



UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

par

**Amina EL KASMI**

**APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ORDONNÉES  
DISCRÈTES AU TRANSFERT RADIATIF DANS  
DES GÉOMÉTRIES BIDIMENSIONNELLES COMPLEXES**

**COUPLAGE RAYONNEMENT-CONVECTION**

Avril 1999



### Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

## **DÉDICACE :**

**Je dédie ce mémoire à mes parents.**

## SOMMAIRE

Dans ce mémoire, le problème radiatif est d'abord traité par la méthode des ordonnées discrètes. Un nouveau schéma de différenciation basé sur la nouvelle approche appliquée par le Groupe de Recherche en Ingénierie des Procédés et Systèmes (GRIPS), est présenté pour déterminer les champs des luminances radiatives et des températures à l'intérieur d'une cavité bidimensionnelle dont les surfaces sont à réflexion diffuse, le maillage est quadrangulaire et peut être non structuré. On applique cette technique au calcul du transfert radiatif dans des géométries complexes. Cette méthode ne donne pas d'oscillation sur le champ de luminances et permet d'obtenir des solutions précises.

Ensuite, on développe l'algorithme SIMPLER pour résoudre les écoulements visqueux incompressibles en régime stationnaire, dans le but de traiter des problèmes de couplage rayonnement-convection naturelle.

Les résultats obtenus nous permettent de conclure que cette nouvelle technique de la méthode des ordonnées discrètes peut être insérée facilement dans l'algorithme d'écoulement, et de donner des résultats précis.

## **REMERCIEMENTS :**

*Je tiens à remercier mon directeur de recherche le Professeur André CHARETTE, et mes codirecteurs de recherche le Docteur Mohamed SAKAMI et le Professeur Mouhsine BERRADA de l'aide qu'ils m'ont apportée lors de mon travail.*

## TABLE DES MATIÈRES :

<b>DÉDICACE :</b> .....	<b>2</b>
<b>SOMMAIRE</b> .....	<b>3</b>
<b>REMERCIEMENTS :</b> .....	<b>4</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES :</b> .....	<b>5</b>
<b>LISTE DES FIGURES :</b> .....	<b>8</b>
<b>NOMENCLATURE :</b> .....	<b>12</b>
<b>1. INTRODUCTION ET OBJECTIFS</b> .....	<b>17</b>
<b>2. APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ORDONNÉES DISCRÈTES</b> .....	<b>21</b>
2.1. INTRODUCTION :.....	21
2.2. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES GOUVERNANTES DE CONSERVATION :.....	21
2.3. LE TRANSFERT RADIATIF : .....	21
2.3.1. Hypothèses :.....	21
2.3.2. Les équations du transfert radiatif :.....	21
2.3.2.1. <i>Equation de transfert radiatif</i> :.....	21
2.3.2.2. <i>Conditions aux limites</i> : .....	21
2.3.2.3. <i>Expression du flux de chaleur radiatif</i> : .....	21
2.3.2.4. <i>Equation de la divergence du flux</i> :.....	21
2.3.3. Méthode des ordonnées discrètes :.....	21
2.3.3.1. <i>Discrétisation spatiale</i> : .....	21
2.3.3.2. <i>Discrétisation angulaire</i> : .....	21
2.3.4. Méthode numérique et algorithme :.....	21

2.3.4.1. <i>Relation de fermeture</i> :.....	21
2.3.4.2. <i>Algorithme de résolution</i> :.....	21
<b>3. RÉSULTATS DU PROBLÈME RADIATIF ET DISCUSSION</b> : .....	<b>21</b>
3.1. INTRODUCTION : .....	21
3.2. CAVITÉ CARRÉE, MAILLAGE RÉGULIER : .....	21
3.2.1. 1 <sup>er</sup> test :.....	21
3.2.2. 2 <sup>ème</sup> test :.....	21
3.3. CAVITÉ CARRÉE, MAILLAGE NON UNIFORME : .....	21
3.3.1. 1 <sup>er</sup> exemple :.....	21
3.3.2. 2 <sup>ème</sup> exemple :.....	21
3.4. GÉOMÉTRIE COMPLEXE :.....	21
3.4.1. Milieux cylindriques.....	21
3.4.2. Anneau elliptique : .....	21
3.5. CONCLUSION : .....	21
<b>4. MÉTHODES DE RÉOLUTION EN MÉCANIQUE DES FLUIDES</b> .....	<b>21</b>
4.1. INTRODUCTION : .....	21
4.2. FORMULATION MATHÉMATIQUE : .....	21
4.2.1. Équations de base :.....	21
4.2.2. Conditions aux limites :.....	21
4.2.2.1. <i>Conditions à la paroi</i> : .....	21
4.2.2.2. <i>Conditions à l'entrée</i> : .....	21
4.2.2.3. <i>Conditions à la sortie</i> :.....	21
4.3. MÉTHODES DES VOLUMES FINIS:.....	21
4.3.1. Discrétisation spatiale du domaine :.....	21
4.3.2. Discrétisation de l'équation gouvernante :.....	21
4.4. SOLUTION NUMÉRIQUE ET ALGORITHME : .....	21

4.4.1. Méthode numérique :.....	21
4.4.2. Algorithme :.....	21
4.5. RÉSULTATS : .....	21
4.5.1. Écoulement de couette :.....	21
4.5.2. Écoulement de convection naturelle :.....	21
4.6. CONCLUSION :.....	21
<b>5. COUPLAGE ENTRE LE RAYONNEMENT ET LA CONVECTION NATURELLE.....</b>	<b>21</b>
5.1. INTRODUCTION :.....	21
5.2. MÉTHODES NUMÉRIQUES UTILISÉES EN COUPLAGE :.....	21
5.3. DESCRIPTION DU MODÈLE PHYSIQUE ET HYPOTHÈSES :.....	21
5.4. FORMULATION EN VARIABLES DIMENSIONNÉES :.....	21
5.4.1. Système d'équations :.....	21
5.4.2. Conditions aux limites :.....	21
5.5. FORMULATION EN VARIABLES ADIMENSIONNÉES :.....	21
5.6. ALGORITHME DE CALCUL :.....	21
5.7. RÉSULTATS : .....	21
5.8. CONCLUSION :.....	21
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE : .....</b>	<b>21</b>
<b>RÉFÉRENCES :.....</b>	<b>21</b>
<b>ANNEXE A : ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS POUR L'ALGORITHME DE RAYONNEMENT AVEC MAILLAGES QUADRANGULAIRES. ....</b>	<b>21</b>

## LISTE DES FIGURES :

FIGURE 2.1 : ANGLE SOLIDE .....	21
FIGURE 2.2 : DIFFUSION DU RAYONNEMENT .....	21
FIGURE 2.3 : CONDITIONS AUX LIMITES .....	21
FIGURE 2.4 : FLUX RADIATIF .....	21
FIGURE 2.5 : SYSTÈME DE COORDONNÉES .....	21
FIGURE 2.6 : VOLUME DE CONTRÔLE .....	21
FIGURE 2.7 : 3 CÔTÉS REÇOIVENT LE RAYONNEMENT D'UN SEUL CÔTÉ.....	21
FIGURE 3.1 : DÉFINITION DU PROBLÈME TEST.....	21
FIGURE 3.2 : MAILLAGE CARTÉSIEN RÉGULIER DE $20 \times 20$ ÉLÉMENTS.....	21
FIGURE 3.3 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LA QUADRATURE $S_6$ ET COMPARÉ AVEC LA SOLUTION EXACTE RAPPORTÉE PAR CROSBIE ET SCRENKER ET LES RÉSULTATS DONNÉS PAR SAKAMI SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), $26 \times 26$ ÉLÉMENTS. ....	21
FIGURE 3.4 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES $S_4$ , $S_6$ ET $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION EXACTE RAPPORTÉE PAR CROSBIE ET SCHRENKER SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25; \omega = 0$ ), $20 \times 20$ ÉLÉMENTS.....	21
FIGURE 3.5 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES $S_4$ , $S_6$ ET $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION EXACTE RAPPORTÉE PAR CROSBIE ET SCRENKER SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25; \omega = 0$ ), $40 \times 40$ ÉLÉMENTS.....	21
FIGURE 3.6 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES $S_4$ , $S_8$ , $T_2$ ET $T_3$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION EXACTE RAPPORTÉ PAR CROSBIE ET SCRENKER SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25; \omega = 0$ ), $40 \times 40$ ÉLÉMENTS.....	21
FIGURE 3.7 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES $S_4$ , $S_6$ ET $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION EXACTE RAPPORTÉE PAR CROSBIE ET SCHRENKER SUR LA PAROI FROIDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25; \omega = 0$ ), $40 \times 40$ ÉLÉMENTS.....	21

- FIGURE 3.8 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $T_3$  ET  $T_6$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION EXACTE RAPPORTÉE PAR CROSBIE ET SCHRENKER SUR LA PAROI FROIDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25; \omega = 0$ ),  $40 \times 40$  ÉLÉMENTS. ....21
- FIGURE 3.9 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$  ET  $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ),  $20 \times 20$  ÉLÉMENTS. ....21
- FIGURE 3.10 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$  ET  $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ),  $40 \times 40$  ÉLÉMENTS. ....21
- FIGURE 3.11 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$  ET  $T_6$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI FROIDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ),  $40 \times 40$  ÉLÉMENTS. ....21
- FIGURE 3.12 : MAILLAGE CARTÉSIEN NON UNIFORME GÉNÉRÉ AVEC 40 SUBDIVISIONS SUR LES SURFACES 1 ET 4, ET 20 SUBDIVISIONS SUR LES SURFACES 2 ET 3. ....21
- FIGURE 3.13 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$  ET  $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), MAILLAGE NON-UNIFORME DE LA FIGURE 3.12. ....21
- FIGURE 3.14 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$  ET  $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI FROIDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), MAILLAGE NON-UNIFORME DE LA FIGURE 3.12. ....21
- FIGURE 3.15 : MAILLAGE CARTÉSIEN DÉFORMÉ DE  $60 \times 60$  ÉLÉMENTS. ....21
- FIGURE 3.16 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$  ET  $S_8$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI CHAUDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), MAILLAGE NON-UNIFORME DE LA FIGURE 3.15. ....21
- FIGURE 3.17 : FLUX RADIATIF ADIMENSIONNÉ OBTENU PAR LES QUADRATURES  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$  ET  $T_6$ , COMPARÉ AVEC LA SOLUTION RAPPORTÉE PAR RAZZAQUE SUR LA PAROI FROIDE ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), MAILLAGE NON-UNIFORME DE LA FIGURE 3.15. ....21

FIGURE 3.18 : DÉFINITION DU PROBLÈME DU CYLINDRE AVEC LE MAILLAGE UTILISÉ (2000 ÉLÉMENTS).....	21
FIGURE 3.19 : PROFIL RADIAL DE LA TEMPÉRATURE ADIMENSIONNÉE OBTENU PAR LA QUADRATURE $S_4$ COMPARÉ AVEC LES RÉSULTATS DONNÉS PAR YÜCEL [23] ET CEUX DE SAKAMI ( $\tau_R = \beta R = 1$ , $\dot{q} = 4\beta\bar{\sigma}T_1$ , $\varepsilon = 1$ , ET $\omega = 0$ ).....	21
FIGURE 3.20 : PROBLÈME D'UN ANNEAU CYLINDRIQUE AVEC LE MAILLAGE UTILISÉ (1600 ÉLÉMENTS).....	21
FIGURE 3.21 : PROFIL RADIAL DE LA TEMPÉRATURE ADIMENSIONNÉE OBTENU PAR LA QUADRATURE $T_5$ COMPARÉ AVEC LES RÉSULTATS DONNÉS PAR SAKAMI [18] POUR PLUSIEURS ÉPAISSEURS OPTIQUES, AVEC $R_1 = 1m$ , $R_2' = 2m$ , ( $T_1 = 1000K$ , $T_2 = 500K$ , $\varepsilon = 1$ , $\omega = 0$ ).....	21
FIGURE 3.22 : DÉFINITION DU PROBLÈME DE L'ANNEAU ELLIPTIQUE AVEC LE MAILLAGE UTILISÉ (1600 ÉLÉMENTS).....	21
FIGURE 3.23 : PROFIL DE LA TEMPÉRATURE ADIMENSIONNÉE LE LONG DE LA LIGNE DE SYMÉTRIE $x = 0$ , OBTENU PAR LA QUADRATURE $S_4$ ET POUR TROIS VALEURS DE L'ALBÉDO $\omega$ , ( $\beta R_1 = 1$ , $\beta R_1' = 2$ , $\beta R_2 = 2$ , $\beta R_2' = 3$ , $T_1 = 1K$ , $T_2 = 0.1K$ , $\varepsilon = 1$ ).....	21
FIGURE 3.24 : DÉFINITION DU PROBLÈME DU DEMI-ELLIPSE AVEC LE MAILLAGE UTILISÉ (1250 ÉLÉMENTS).....	21
FIGURE 3. 25 : PROFIL RADIAL DE LA TEMPÉRATURE ADIMENSIONNÉE OBTENU PAR LA QUADRATURE $S_4$ , ET COMPARÉ AVEC LES RÉSULTATS DONNÉS PAR SAKAMI [17], $R_2/R_1 = 2$ , ET $R_2'/R_1 = 3$ ( $T_1 = 1000K$ , $T_2 = 500K$ , $\varepsilon = 1$ , $\omega = 0$ ).....	21
FIGURE 4.1 : VOLUME DE CONTRÔLE POUR UN MILIEU BIDIMENSIONNEL.....	21
FIGURE 4.2 : VOLUME DE CONTRÔLE POUR $u$ .....	21
FIGURE 4.3 : VOLUME DE CONTRÔLE POUR $v$ .....	21
FIGURE 4.4 : SCHÉMA DE L'INTERPOLATION GÉOMÉTRIQUE.....	21
FIGURE 4.5 : DÉFINITION DU PROBLÈME DE COUETTE .....	21
FIGURE 4.6 : CHAMP DE VITESSE.....	21
FIGURE 4.7 : PROFIL DE LA VITESSE POUR $Re = 2000$ .....	21

FIGURE 4.8 : DÉFINITION DU PROBLÈME DE LA CONVECTION NATURELLE À L'INTÉRIEUR D'UNE CAVITÉ RECTANGULAIRE FERMÉE.....	21
FIGURE 4.9 : LE CHAMP DE VITESSE ADIMENSIONNÉE, (A) $RA=10^3$ , (B) $RA=10^4$ , (C) $RA=10^5$ , (D) $RA=10^6$ .....	21
FIGURE 4.10 : CHAMP DE TEMPÉRATURE, (A) $RA=10^3$ , (B) $RA=10^4$ , (C) $RA=10^5$ , (D) $RA=10^6$ .....	21
FIGURE 4.11 : LES ISOTHERMES ADIMENSIONNÉES, (A) $RA=10^3$ , (B) $RA=10^4$ , (C) $RA=10^5$ , (D) $RA=10^6$ .....	21
FIGURE 4.12 : VITESSE HORIZONTALE ADIMENSIONNÉE À $X=0.5$ , (A) $RA=10^3$ , (B) $RA=10^4$ .....	21
FIGURE 4.13 : VITESSE HORIZONTALE ADIMENSIONNÉE À $X=0.5$ , (A) $RA=10^5$ , (B) $RA=10^6$ .....	21
FIGURE 4.14 : VITESSE VERTICALE ADIMENSIONNÉE À $Y=0.5$ , (A) $RA=10^3$ , (B) $RA=10^4$ .....	21
FIGURE 4.15 : VITESSE VERTICALE ADIMENSIONNÉE À $Y=0.5$ , (A) $RA=10^5$ , (B) $RA=10^6$ .....	21
FIGURE 4.16 : PROFIL DE LA TEMPÉRATURE ADIMENSIONNÉE À $Y=0.5$ , (A) $RA=10^3$ , (B) $RA=10^4$ .....	21
FIGURE 4.17 : PROFIL DE LA TEMPÉRATURE ADIMENSIONNÉE À $Y=0.5$ , (A) $RA=10^5$ , (B) $RA=10^6$ .....	21
FIGURE 5.1 : CARACTÉRISTIQUES GÉOMÉTRIQUES ET CONDITIONS AUX LIMITES.....	21
FIGURE 5.2 : CHAMP DE LA TEMPÉRATURE POUR UN FLUIDE SANS RAYONNEMENT ( $Ra = 5 \cdot 10^6$ )	21
FIGURE 5.3 : ISOTHERMES POUR UN FLUIDE SANS RAYONNEMENT ( $RA=5 \cdot 10^6$ ), (A) OBTENU, (B) DONNÉ PAR YÜCEL ET AL <sup>[30]</sup> .....	21
FIGURE 5.4 : CHAMP DE VITESSE POUR UN FLUIDE SANS RAYONNEMENT ( $RA=5 \cdot 10^6$ ).....	21
FIGURE 5.5 : CHAMP DE TEMPÉRATURE POUR UN FLUIDE AVEC RAYONNEMENT ( $N=0.1, \tau = 1, RA = 5 \cdot 10^6$ ).....	21
FIGURE 5.6 : ISOTHERMES POUR UN FLUIDE AVEC RAYONNEMENT ( $N=0.1, \tau = 1, RA = 5 \cdot 10^6$ ), (A) OBTENU, (B) DONNÉ PAR EL WAKIL <sup>[31]</sup> .....	21
FIGURE 5.7 : CHAMP DE VITESSE POUR UN FLUIDE AVEC RAYONNEMENT ( $N=0.1, \tau = 1, RA = 5 \cdot 10^6$ ) .....	21
FIGURE 5.8 : PROFIL DE LA VITESSE VERTICALE EN PRÉSENCE DU RAYONNEMENT À $x = 0.5$ ( $Ra = 5 \times 10^6, N = 0.02, \omega = 0$ ), (A) LES RÉSULTATS DONNÉS PAR YÜCEL ET AL <sup>[30]</sup> , (B) OBTENU.....	21
FIGURE 5.9 : PROFIL DE LA VITESSE HORIZONTALE EN PRÉSENCE DU RAYONNEMENT À $y = 0.5$ ( $Ra = 5 \times 10^6, N = 0.02, \omega = 0$ ), (A) LES RÉSULTATS DONNÉS PAR YÜCEL ET AL <sup>[30]</sup> , (B) OBTENUS.....	21

## Nomenclature :

### Notations :

$A$	Aire de la face entre deux volumes de contrôle	$[m^2]$
$a$	Coefficient de discrétisation de l'équation de transport	
$B$	Paramètre adimensionné	
$C_p$	Chaleur spécifique	$[J.kg^{-1}.K^{-1}]$
$D$	Flux diffusif	$[kg.m^{-1}.s^{-1}]$
$d$	Remplace $A/a$	
$F$	Flux convectif	$[kg.m^{-1}.s^{-1}]$
$Gr$	Nombre de Grashof	
$I^\circ$	Luminance du corps noir	$[W.m^{-2}.sr^{-1}]$
$I(s, \Omega)$	Luminance directionnelle pour une direction de propagation $\Omega$ à la position $s$	$[W.m^{-2}.sr^{-1}]$
$I_m^i$	Luminance moyenne de l'élément $i$ pour une direction $\Omega_m$	$[W.m^{-2}.sr^{-1}]$
$I_{km}^i$	Luminance moyenne latérale du $k^e$ segment de l'élément $i$ pour une direction $\Omega_m$	$[W.m^{-2}.sr^{-1}]$
$J_m^i$	Paramètre défini par l'équation (1.19)	$[W.m^{-2}.sr^{-1}]$
$k$	Conductivité thermique	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
$l_k^i$	Longueur du $k^e$ segment de l'élément $i$	$[m]$

$L$	Longueur caractéristique	$[m]$
$M$	Nombre des directions discrètes $\Omega_m$	
$n_k^i$	Normale extérieure du $k^e$ segment de l'élément $i$	
$N$	Paramètre de couplage	
$Nu$	Nombre de Nusselt	
$p$	Pression	$[Pa]$
$P_e$	Nombre de Peclet.	
$Pl$	Nombre de Planck.	
$P_r$	Nombre de Prandtl.	
$p'$	Pression de correction	$[Pa]$
$\dot{q}$	Source volumétrique	$[W.m^{-3}]$
$q_c$	Flux conductif	$[W.m^{-2}]$
$q_r$	Flux radiatif	$[W.m^{-2}]$
$q_t$	Flux total ( $q_t = q_r + q_c$ )	$[W.m^{-2}]$
$R_e$	Nombre de Reynolds.	
$R_a$	Nombre de Rayleigh.	
$S$	Terme source de l'équation de transport de $\phi$	$[W.m^{-3}]$
$S^i$	Surface de l'élément $i$	$[m^2]$
$T^i$	Température absolue de l'élément $i$	$[K]$

$T$	Température	$[K]$
$t$	Temps	$[s]$
$U$	Vitesse	$[m.s^{-1}]$
$u, v$	Composantes cartésiennes du vecteur vitesse	$[m.s^{-1}]$

### Symboles grecs :

$\alpha$	Diffusivité thermique	$[m^2 s^{-1}]$
$\beta$	Coefficient d'extinction	$[m^{-1}]$
$\beta$	Coefficient d'expansion volumique	$[K^{-1}]$
$\varepsilon$	Emisivité	
$\Gamma$	Coefficient de diffusion	
$\delta$	opérateur de différence finis	
$\mu$	Viscosité dynamique	$[Kg m^{-1} s^{-1}]$
$\kappa$	Coefficient d'absorption	$[m^{-1}]$
$\bar{\sigma}$	Constante de Stefan Boltzmann	$[W.m^{-2}.K^{-4}]$
$\sigma$	Coefficient de diffusion	$[m^{-1}]$
$\nu$	Viscosité cinématique	$[m^2 s^{-1}]$
$\rho$	Densité	$[kg.m^{-3}]$
$\tau$	Épaisseur optique	
$\varphi_{km}^i$	Remplace $\Omega_m \cdot n_k^i$	

$\Phi(\Omega, \Omega')$	Fonction de phase de diffusion	$[sr^{-1}]$
$\phi$	Variable scalaire (peut être $\rho, u, v, T, \dots etc$ )	
$\omega$	Albédo	
$\Omega$	Direction de propagation	
$\Omega$	Angle solide	$[sr]$
$\Delta x$	Longueur du volume de contrôle dans la direction $x$	$[m]$
$\Delta y$	Longueur du volume de contrôle dans la direction $y$	$[m]$
$\nabla$	Opérateur gradient	
$\nabla^2$	Opérateur laplacien	

### Indices :

*	Valeur intermédiaire
$\wedge$	Pseudo-vitesses
+	Grandeur adimensionnée
$\  \ $	Valeur maximale
E	Voisin dans la direction positive de $x$
$e$	Face du volume de contrôle entre P et E
$ent$	Entrant
$i$	Pour un élément
$k$	Pour un segment d'un élément

<i>m</i>	Pour la direction $\Omega_m$
<i>m'</i>	Pour la direction $\Omega_{m'}$
<i>max</i>	Valeur maximale
N	Voisin dans la direction positive de $y$
<i>n</i>	Face du volume de contrôle entre P et N
<i>nb</i>	Référence aux points voisins
S	Voisin dans la direction négative de $y$
<i>s</i>	Face du volume de contrôle entre P et S
<i>sort</i>	Sortant
<i>o</i>	Corps noir
<i>P</i>	Au point $P$ au volume de contrôle
W	Voisin dans la direction négative de $x$
<i>w</i>	Face du volume de contrôle entre P et W

## **Chapitre : 1**

### **1. Introduction et objectifs**

Les installations industrielles telles que les fours, les hauts-fourneaux, et les chambres de combustion, dont le fonctionnement est basé sur les phénomènes de transfert de chaleur (rayonnement, conduction, convection, combustion) sont des gros consommateurs d'énergie et des gros pollueurs. Alors que la rationalisation de l'utilisation des ressources naturelles et la protection de l'environnement sont devenues des priorités, le développement d'une méthode efficace de calcul du transfert de chaleur est une nécessité.

Le rayonnement représente généralement le principal mode pour plusieurs applications industrielles. Les milieux traités étant semi-transparents, l'étude des phénomènes radiatifs devient alors complexe du fait qu'en rayonnement les grandeurs locales nécessitent une description simultanément directionnelle et souvent spectrale.

À cette fin, plusieurs méthodes numériques ont été développées. Mentionnons d'abord la méthode de zones <sup>[1,2]</sup>, celle-ci donne des solutions considérées comme précises mais ne s'adapte pas facilement aux milieux diffusants. La méthode de Monte-Carlo <sup>[3]</sup> est capable de traiter tout type de géométries y compris celles incluant des obstructions, mais une bonne précision des résultats nécessite également des temps de calcul suffisamment longs. La méthode des harmoniques sphériques <sup>[4]</sup> utilisée par Bayazitoglu et Higenyi demande un temps de calcul très important et elle ne s'applique que difficilement aussi dans un milieu diffusant. La méthode des éléments finis <sup>[5]</sup> a été utilisée pour le calcul du transfert radiatif dans une cavité bidimensionnelle rectangulaire, mais en plus de

nécessiter un temps de calcul important, elle est également difficilement applicable au cas d'un milieu diffusant. Crosbie et Schrenker <sup>[6]</sup> ont développé une formulation pour le calcul exact du champ bidimensionnel des luminances dans une cavité rectangulaire enfermant un milieu semi-transparent en équilibre radiatif. La méthode des ordonnées discrètes a été appliquée au début dans le domaine de l'astrophysique par Chandrasekhar <sup>[7]</sup> et elle a été ensuite utilisée dans le domaine du transfert radiatif par Lathrop <sup>[8]</sup>, Khalil et Truelove <sup>[9]</sup>, et Fiveland <sup>[10]</sup>. Cette méthode a été utilisée pour des cas de problèmes purement radiatifs ou couplés en géométrie cartésienne 2D et 3D <sup>[11, 12]</sup>, en géométrie cylindrique <sup>[9,13]</sup>, et en géométrie curviligne <sup>[14]</sup> dans un milieu gris absorbant-émettant non diffusant.

La méthode des ordonnées discrètes présente cependant certaines limitations dues à la nature de l'équation différentielle. Elle s'applique difficilement aux milieux à géométrie complexe. Pour surmonter ces difficultés, des solutions ont été proposées. Chai et al <sup>[15]</sup> ont appliqué la méthode des ordonnées discrètes à des géométries irrégulières en utilisant une formulation en coordonnées cartésiennes et la technique des volumes finis. Koch et al <sup>[16]</sup> ont utilisé une formulation parabolique de la méthode compatible avec les maillages curvilignes utilisés pour la simulation des écoulements

Le GRIPS\* s'est penché dernièrement sur cette méthode, et un algorithme a été mis au point pour le traitement des enceintes quelconques (2D et 3D) qui utilise des maillages non structurés triangulaires pour le 2D et tétraédriques pour le 3D [17, 18, 19]. La nouvelle approche proposée a été validée par comparaison avec des solutions exactes, et elle a permis d'obtenir des résultats précis et d'éviter les oscillations sur le champ de luminances. En plus, l'adaptation des équations à des maillages non structurés a conduit à l'extension à des géométries complexes dans les cas bidimensionnel et tridimensionnel.

#### **Objectif 1 :**

**Ce mémoire vise d'abord à adapter le nouvel algorithme à des maillages quadrangulaires non-structurés, de façon à faciliter le couplage de la méthode des ordonnées discrètes avec la solution des équations de conservation (masse, mouvement et énergie) pour des géométries complexes.**

Par ailleurs plusieurs méthodes numériques ont été développées pour la simulation des phénomènes d'écoulement, notamment la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, et la méthode des volumes finis. La méthode des différences finies (Raoche, Patankar), est basée sur l'idée de remplacer l'opérateur de différenciation original par des opérateurs de différences finies. Cette méthode est relativement simple à formuler. Elle est mathématiquement rigoureuse, mais elle est peu flexible et ne permet pas une interprétation physique des termes. Quant à la méthode des éléments finis

---

\* GRIPS, Groupe de Recherche en Ingénierie des Systèmes et Procédés.

(Chung, Baker), elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle présente les avantages d'être bien adaptée aux géométries complexes et d'être robuste face aux schémas de convection. Toutefois, les désavantages de cette méthode résident dans le fait qu'elle est difficile à formuler, qu'elle demande une large place de mémoire et qu'elle est très coûteuse en temps de calcul. La troisième méthode est celle dite des ``volumes finis`` (Patankar <sup>[20]</sup>, Baliga et Patankar). L'idée de base de la formulation des volumes de contrôle permet une interprétation physique directe. En effet, le domaine de calcul est divisé sous forme de volumes de contrôles quadrangulaires, sur lesquels l'équation différentielle est intégrée. L'équation discrétisée obtenue exprime les principes de conservation de la variable  $\phi$  dans tous les volumes de contrôle. C'est cette dernière méthode qui a été utilisée dans la présente recherche.

### **Objectif 2 :**

**Le deuxième objectif de ce mémoire est de coupler l'algorithme de rayonnement adapté à un maillage quadrangulaire généralisé avec la solution des équations du mouvement et de l'énergie en convection naturelle.**

## **Chapitre : 2**

### **2. Application de la méthode des ordonnées discrètes**

## 2.1. Introduction :

Ce chapitre est consacré à la modélisation numérique du transfert radiatif par la méthode des ordonnées discrètes dans les enceintes à géométrie complexe.

Ce travail constitue une extension du travail déjà effectué par le GRIPS, qui a développé des algorithmes de modélisation de ce mode de transfert en utilisant des maillages non structurés triangulaires pour le 2D, et tétraédriques pour le 3D. Ainsi l'objectif est d'introduire un nouveau schéma de différenciation basé sur des maillages quadrangulaires non uniformes pour le 2D.

On présentera au début les équations différentielles gouvernantes qui montrent la relation qui lie le transfert radiatif avec les autres modes d'échange.

## 2.2. Les équations différentielles gouvernantes de conservation :

Les équations de Navier Stokes forment un système d'équations couplées qui expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

L'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (2.1)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U U) = -\nabla p + \mu \nabla^2 U \quad (2.2)$$

Pour un fluide en régime stationnaire, et dans le cas où la dissipation visqueuse serait négligeable, l'équation d'énergie s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho c_p \nabla \cdot (U T) = k \nabla^2 T - \nabla \cdot q_r + q \quad (2.3)$$

Le premier terme représente le taux d'échange par convection, le deuxième est le taux d'échange par conduction, le troisième est le taux d'échange radiatif, et le dernier représente une source d'énergie volumique.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à développer une méthode pour calculer le taux d'échange radiatif  $\nabla \cdot q_r$ .

## 2.3. Le transfert radiatif :

### 2.3.1. Hypothèses :

Dans ce travail plusieurs hypothèses ont été introduites :

- Les propriétés du milieu sont supposées indépendantes de la longueur d'onde, c'est l'approximation du milieu gris.

- L'enceinte considérée contient un milieu semi-transparent émettant et absorbant.

- Les parois de l'enceinte sont considérées grises dont la réflexion est diffuse.

Elles sont à luminances ou à températures imposées.

## 2.3.2. Les équations du transfert radiatif :

### 2.3.2.1. Equation de transfert radiatif :

Soit  $I(s, \Omega)$  l'intensité directionnelle pour une direction de propagation  $\Omega$  à la position  $s$  (figure 2.1). Elle représente l'énergie radiative émise par unité d'angle solide et par unité de surface apparente.

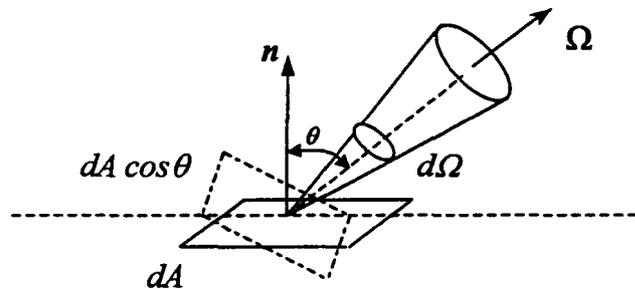


Figure 2.1 : Angle solide

Dans un milieu participant, les mécanismes radiatifs sont gouvernés par l'équation de transfert radiatif (E.T.R). Elle traduit le fait que les variations locales de l'intensité  $I(s, \Omega)$  résultent d'un bilan entre l'atténuation par absorption et diffusion, et du renforcement par émission propre et diffusion dans la direction considérée en provenance de toutes les directions  $\Omega'$  (figure 2.2).

L'ETR s'écrit :

$$\frac{1}{\beta} \nabla \cdot [I(s, \Omega) \Omega] + I(s, \Omega) = (1 - \omega) I^o(s) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega, \Omega') I(s, \Omega') d\Omega' \quad (2.4)$$

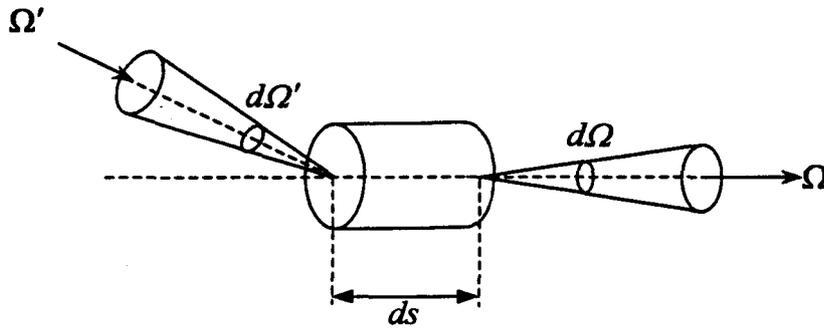


Figure 2.2 : Diffusion du rayonnement

L'intensité du corps noir  $I^o(s)$  pour un milieu gris est :

$$I^o(s) = \sigma \frac{T^4}{\pi}(s) \quad (2.5)$$

### 2.3.2.2. Conditions aux limites :

Dans le cas d'une surface diffuse dont la luminance est indépendante de la direction, l'équation des conditions aux limites pour  $n_s \cdot \Omega < 0$  s'écrit :

$$I_{sort,s}(\Omega) = \varepsilon I_s^o + \frac{1 - \varepsilon}{\pi} \int_{n_s \cdot \Omega' < 0} (n_s \cdot \Omega') I_{ent,s}(\Omega') d\Omega' \quad (2.6)$$

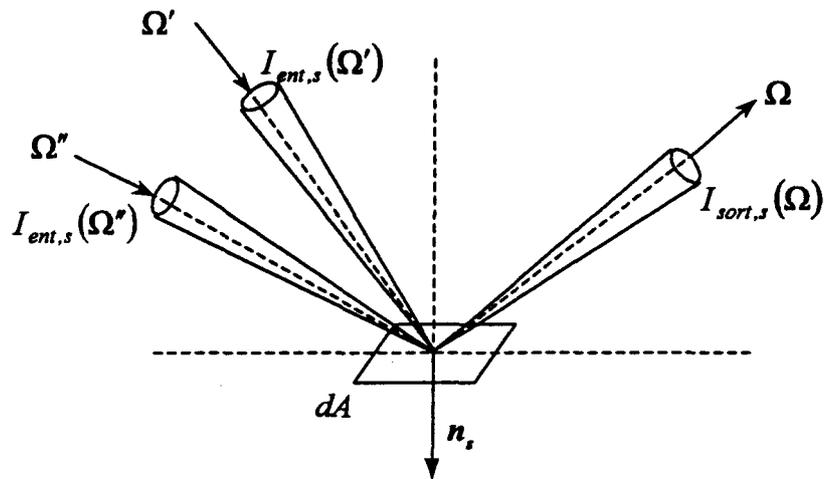


Figure 2.3 : Conditions aux limites

### 2.3.2.3. Expression du flux de chaleur radiatif :

Sur un élément de surface élémentaire  $dA$  (figure 2.4), le flux radiatif net est calculé en additionnant

- La quantité d'énergie partant de  $dA$  ( $\mathbf{n} \cdot \Omega_o > 0$ ) donnée par :

$$q_{part} = \int_{\cos\theta_o > 0} I(s, \Omega_o) \cos\theta_o \, d\Omega_o \quad (2.7)$$

- La quantité d'énergie reçue par  $dA$  ( $\mathbf{n} \cdot \Omega_i < 0$ ) donnée par :

$$q_{reçue} = \int_{\cos\theta_i < 0} I(s, \Omega_i) \cos\theta_i \, d\Omega_i \quad (2.8)$$

Ainsi le flux radiatif net est :

$$q^{net} = q_{part} + q_{reçue} = \int_{4\pi} I(s, \Omega) \cos\theta \, d\Omega \quad (2.9)$$

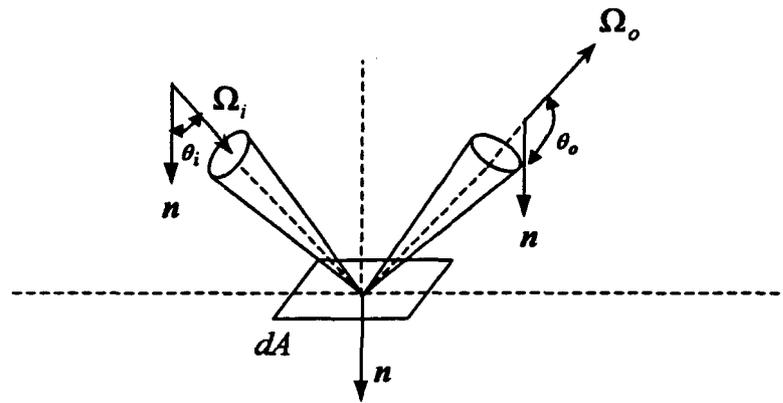


Figure 2.4 : Flux radiatif

#### 2.3.2.4. Equation de la divergence du flux :

En intégrant l'ETR sur tout l'espace ( $\Omega = 4\pi$ ), on obtient l'équation de la divergence du flux, qui exprime le fait que le bilan net d'énergie radiative dans un volume de contrôle est égal à l'énergie émise moins l'irradiation absorbée.

$$\nabla \cdot q = \kappa \left[ 4\pi I^0(s) - \int_{4\pi} I(s, \Omega) d\Omega \right] \quad (2.10)$$

#### 2.3.3. Méthode des ordonnées discrètes :

La méthode des ordonnées discrètes permet de passer de l'équation de transfert radiatif, qui est de type intégral-différentiel, à un système d'équations algébriques obtenues en remplaçant la représentation directionnelle par un ensemble discret de directions.

### 2.3.3.1. Discrétisation spatiale :

On considère une enceinte bidimensionnelle de géométrie quelconque contenant un milieu semi-transparent. Le système de coordonnées est schématisé sur la figure 2.5.

On intègre l'ETR sur un élément  $i$  de surface  $S_i$  (figure 2.6). On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \iint_{S_i} \nabla \cdot [I(s, \Omega) \Omega] dS + \iint_{S_i} I(s, \Omega) dS = (1 - \omega) \iint_{S_i} I^o(s) dS \\ + \frac{\omega}{4\pi} \iint_{S_i} \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega, \Omega') I(s, \Omega') dS d\Omega \end{aligned} \quad (2.11)$$

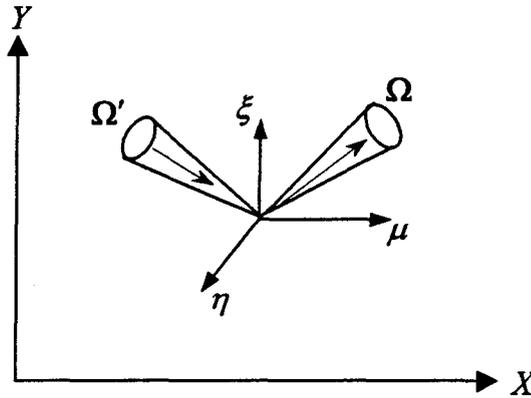


Figure 2.5 : Système de coordonnées

L'application du théorème de Gauss dans le cas d'un maillage quadrangulaire donne :

$$\frac{1}{\beta S^i} \sum_{k=1}^4 (\Omega \cdot \mathbf{n}_k^i) l_k^i I_k^i(\Omega) + I_k^i(\Omega) = (1 - \omega) I^{oi} + \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega, \Omega') I^i(\Omega') d\Omega' \quad (2.12)$$

Les intensités moyennes et centrales sont données respectivement par :

$$I^i(\Omega) = \frac{1}{S^i} \iint_{S^i} I(s, \Omega) dS, \quad I_k^i(\Omega) = \frac{1}{l_k^i} \int_{l_k^i} I(s, \Omega) dl \quad (2.13)$$

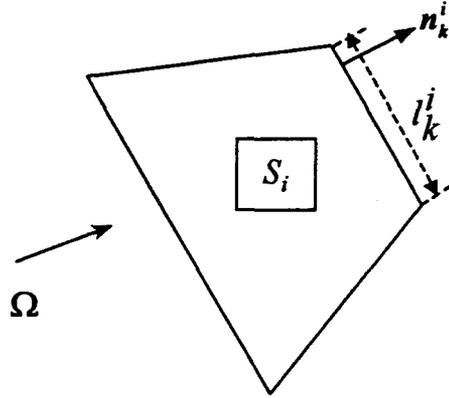


Figure 2.6 : Volume de contrôle

### 2.3.3.2. Discrétisation angulaire :

Dans la méthode des ordonnées discrètes, on remplace l'intégrale par des quadratures pondérées :

$$\int_{4\pi} f(\Omega) d\Omega \cong \sum_{i=1}^M w_i f(\Omega_i) \quad (2.14)$$

où les  $w_i$  sont les poids associés aux directions  $\Omega_i$ .

Donc, l'équation de transfert radiatif se ramène à :

$\forall m \in \{1, M\}$  :

$$I_m^i - \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m'=1}^M w_{m'} \Phi_{mm'} I_{m'}^i = (1-\omega) I^{oi} - \frac{1}{\beta S^i} \sum_{k=1}^4 \varphi_{km}^i l_k^i I_{km}^i \quad (2.15)$$

où  $\varphi_{km}^i = \Omega_m \cdot n_k^i$

De la même façon, l'équation des conditions aux limites s'écrit :

$$I_{sort,s}(\Omega_m) = \varepsilon I_s^o + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \sum_{n_s \cdot \Omega_{m'} > 0} w_{m'} n_s \cdot \Omega_{m'} I_{ent,s}(\Omega_{m'}) \quad (2.16)$$

pour  $n_s \cdot \Omega_m < 0$

De plus, l'équation de la divergence du flux devient :

$$\nabla \cdot q^i = \kappa \left[ 4\pi I^{oi} - \sum_{m=1}^M w_m I_m^i \right] \quad (2.17)$$

## 2.3.4. Méthode numérique et algorithme :

### 2.3.4.1. Relation de fermeture :

En équilibre radiatif, le champ de température peut être obtenu par la connaissance des luminances centrales  $I_m^i$ . On a alors à résoudre le système constitué des équations (2.15) et (2.17). Toutefois il est nécessaire de connaître les luminances latérales  $I_{km}^i$  sur chaque côté  $k$  de l'élément  $i$  pour chaque direction  $\Omega_m$ . Des relations de fermeture sont alors à introduire. Pour le faire, on résoud l'ETR dans le cas monodimensionnel.

La solution de l'ETR le long d'un cheminement défini par la direction  $\Omega$  est donnée par :

$$I(s_f, \Omega) = I(s_i, \Omega)e^{-\beta t} + \beta \int_{s_i}^{s_f} \left[ (1 - \omega)I^o(s) + \frac{\omega}{4\pi} \cdot \int_{\Omega'=4\pi} \Phi(\Omega', \Omega)I(s, \Omega')d\Omega' \right] e^{-\beta(s_f-s)} ds \quad (2.18)$$

où  $s_i$  est la position initiale du parcours,  $s_f$  est la position finale, et  $t = s_f - s_i$ . On pose pour un élément  $i$ , et pour une direction  $m$  :

$$J_m^i = (1 - \omega)I^{oi} + \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m'=1}^M w_{m'} \Phi_{mm'} I_{m'}^i \quad (2.19)$$

L'équation 2.18 devient alors :

$$I_m^{Sf} = I_m^{Si} e^{-\beta t} + J_m^i (1 - e^{-\beta t}) \quad (2.20)$$

Dans ce travail on propose un nouveau schéma de différenciation pour résoudre les équations de transfert radiatif en utilisant des maillages quadrangulaires. La figure 2.7 présente une maille quadrangulaire déformée dans le cas où 3 côtés (côtés 1, 3, 4) reçoivent le rayonnement provenant d'un seul côté (côté 2). Il s'agit de trouver les luminances moyennes sur chacun des côtés éclairés par le rayonnement provenant du côté 2.

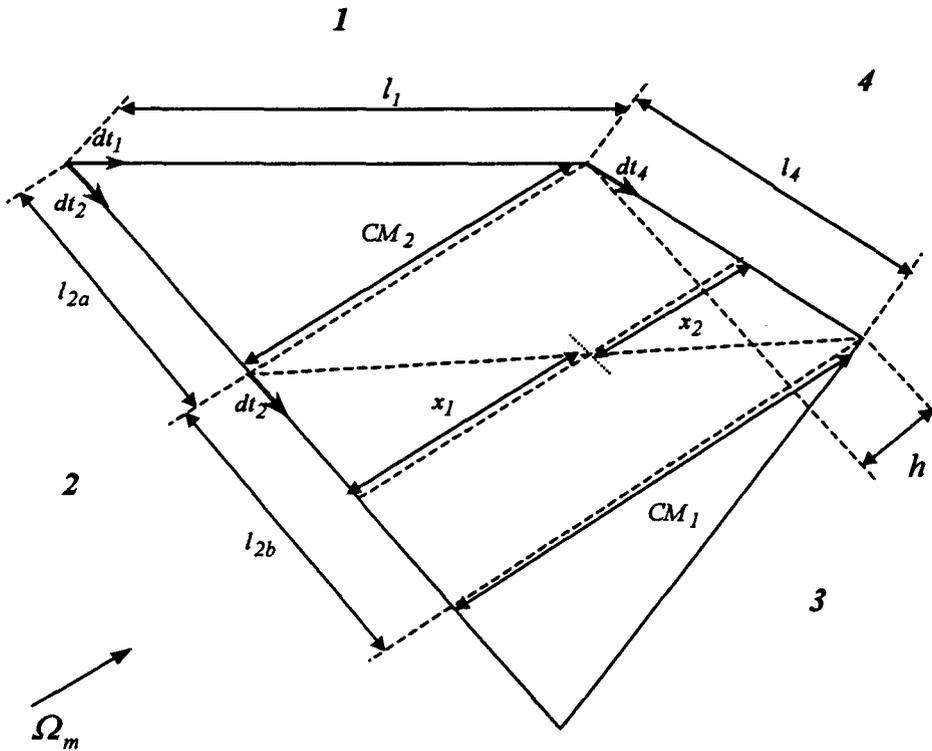


Figure 2.7 : 3 côtés reçoivent le rayonnement d'un seul côté

\* La luminance moyenne du côté 1 est donnée par :

$$I_{1m}^i = \frac{l}{l_1^i l_1^i} \int I_{1m}(t_1) dt_1 \quad (2.21)$$

Puisque l'éclairement du côté 1 provient du côté 2, on a alors d'après l'équation

(2.20) :

$$I_{1m}(t_1) = I_{2m}(t_2) e^{-\beta x(t_2)} + J_m^i (1 - e^{-\beta x(t_2)}) \quad (2.22)$$

On intègre cette expression en utilisant la relation (2.21) pour trouver la luminance moyenne  $I_{1m}^i$  :

On obtient :

$$I_{1m}^i = I_{2m}^i \left( \frac{1 - e^{-\beta CM_2}}{\beta CM_2} \right) + J_m^i \left( 1 - \frac{1 - e^{-\beta CM_2}}{\beta CM_2} \right) \quad (2.23a)$$

$$\text{En posant : } \chi_1 = \frac{1 - e^{-\beta CM_2}}{\beta CM_2}, \quad (2.23b)$$

l'équation (2.23a) se réduit à :

$$I_{1m}^i = I_{2m}^i \chi_1 + J_m^i (1 - \chi_1) \quad (2.24)$$

\* Pour le côté 4 la luminance moyenne s'écrit :

$$I_{4m}^i = \frac{1}{l_4^i} \int_{t_4^i} I_{4m}(t_4) dt_4 \quad (2.25)$$

$$\text{Puisque : } I_{4m} = I_{2m}(t_2) e^{-\beta x(t_2)} + J_m^i (1 - e^{-\beta x(t_2)}) \quad (2.26)$$

$$\text{et : } x(t_2) = x_1 + x_2 = CM_2 + (CM_1 - CM_2) \frac{t_2}{l_2^i} \quad (2.27)$$

on trouve en intégrant l'équation (2.21) adaptée au côté 4 :

$$I_{4m}^i = I_{2m}^i e^{-\beta CM_2} \left( \frac{1 - e^{-\beta h}}{\beta h} \right) + J_m^i \left( 1 - e^{-\beta CM_2} \left( \frac{1 - e^{-\beta h}}{\beta h} \right) \right) \quad (2.28a)$$

$$\text{et en posant : } \chi_4 = e^{-\beta CM_2} \left( \frac{1 - e^{-\beta h}}{\beta h} \right) \quad (2.28b)$$

on obtient :

$$I_{4m}^i = I_{2m}^i \chi_4 + J_m^i (1 - \chi_4) \quad (2.29)$$

\* Le développement pour  $I_{3m}^i$  est similaire et il a été rapporté à l'annexe A. Les relations obtenues pour  $I_{1m}^i$ ,  $I_{4m}^i$  et  $I_{3m}^i$  sont appelées ``équations caractéristiques``.

Globalement il y a trois cas possibles :

- **1<sup>er</sup> cas** : Trois côtés reçoivent le rayonnement d'un seul côté.
- **2<sup>ème</sup> cas** : Deux côtés reçoivent le rayonnement des 2 autres côtés.
- **3<sup>ème</sup> cas** : Un côté reçoit le rayonnement des 3 autres côtés.

Nous référons à l'annexe A pour le traitement des 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> cas.

#### 2.3.4.2. *Algorithme de résolution :*

L'enceinte à analyser peut être maillée avec un agencement quelconque de surfaces quadrangulaires de façon non structurée. À cette fin, différents types de générateurs de maillage peuvent être utilisés. Dans le cas présent, nous avons utilisé le code COSMOS auquel nous avons adjoint un tableau de connectivité pour le repérage des côtés des surfaces quadrangulaires.

L'algorithme développé reconnaît les cas considérés (1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup> ou 3<sup>o</sup> cas ) selon l'orientation des éléments par rapport à la direction de propagation donnée, et il applique la forme appropriée de l'équation caractéristique.

En équilibre radiatif, l'algorithme de détermination du champ de température se déroule comme suit :

- a) Choix d'un premier champ de température.
- b) Initialisation des luminances centrales (moyennes) et latérales de chaque élément et introduction des conditions aux limites physiques de l'enceinte.
- c) Pour une direction donnée de la quadrature, détermination des luminances latérales moyennes de chaque élément (e.g. par les équations (2.24), (2.29),.....).
- d) Pour la même direction de la quadrature, détermination des luminances centrales en procédant itérativement :

$$I_m^{i(n)} = \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m'=1}^M w_{m'} \Phi_{mm'} I_{m'}^{i(n-1)} + (1-\omega) I^{0i(n-1)} - \frac{1}{\beta S^i} \sum_{k=1}^4 \varphi_{km}^i l_k^i I_{km}^{i(n)} \quad (2.30)$$

où  $n-1$  représente l'itération précédente, et  $I^{0i(n-1)}$  est calculé à partir de la relation (2.5).

- e) Vérification du critère de convergence en luminance latérale :

$$Crit(I_{lat}) = \text{Max}_{i,k,m} \frac{\left| (I_{km}^i)^n - (I_{km}^i)^{n-1} \right|}{(I_{km}^i)^n} < \epsilon_I \quad (2.31)$$

sinon retour à l'étape c.

- f) Calcul du champ de température à partir de l'équation de divergence du flux (2.17), soit :

$$T(s) = \left[ \left( \int_{\Omega=4\pi} I(s, \Omega) d\Omega \right) / (4\bar{\sigma}) \right]^{1/4} = \left[ \left( \sum_{m=1}^M w_m I_m^i \right) / (4\bar{\sigma}) \right]^{1/4} \quad (2.32)$$

g) Vérification du critère de convergence en température :

$$Crit(T) = \text{Max}_i \frac{|(T^i)^n - (T^i)^{n-1}|}{(T_{ch})^n} < \varepsilon_T \quad (2.33)$$

Sinon retour à l'étape c.

h) Calcul des flux latéraux aux frontières physiques par l'expression :

$$q = \sum_{m=1}^M w_m \varphi_{km}^i I_{km}^i \quad (2.34)$$

Les valeurs de  $\varepsilon_I$  et  $\varepsilon_T$  sont choisies de l'ordre de 0.0001

À la première itération, le milieu est considéré non diffusant et les frontières comme noires. Après une itération, la diffusion est introduite et les vraies valeurs des émissivités des frontières sont utilisées.

## **Chapitre : 3**

### **3. Résultats du problème radiatif et discussion :**

### 3.1. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons traiter plusieurs géométries, en commençant par un cas test donné dans la littérature avec des solutions considérées comme exactes, il s'agit d'une cavité carrée de longueur infinie. Pour ce but nous allons appliquer l'algorithme présenté dans le chapitre précédent en utilisant des maillages réguliers et non réguliers. Ensuite nous allons étendre la même procédure à des géométries complexes cylindriques et elliptiques.

### 3.2. Cavité carrée, maillage régulier :

Le milieu choisi est une cavité de longueur infinie et de section carrée (figure 3.1). Elle enferme un milieu gris en équilibre radiatif. Les parois sont supposées noires et elles sont maintenues à des intensités nulles sauf pour la surface 1 qui a une intensité unitaire. Ce problème est schématisé comme suit :

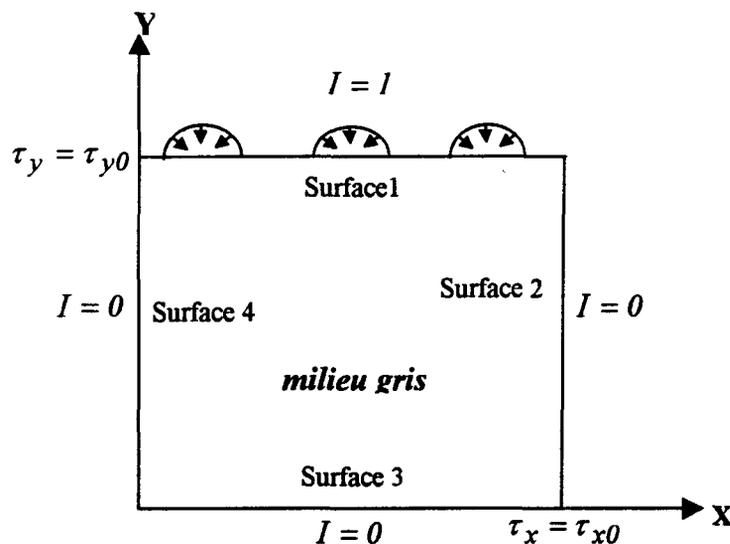


Figure 3.1 : Définition du problème test

### 3.2.1. 1<sup>er</sup> test :

La première application consiste à comparer les résultats obtenus avec notre algorithme pour un milieu absorbant-émettant en équilibre radiatif avec la solution analytique donnée par Crosbie et Schrenker <sup>[6]</sup> pour un milieu purement diffusant. En effet, on montre que ces deux phénomènes sont équivalents <sup>[21]</sup>. Crosbie et Schrenker ont posé le problème en termes d'équations intégrales couplées qu'ils ont résolues à l'aide de la quadrature de Gauss et Lobatto.

Nous avons traité ce problème pour plusieurs cas de maillages cartésiens uniformes et non uniformes. La figure 3.2 présente un exemple de maillage uniforme de  $20 \times 20$  éléments.

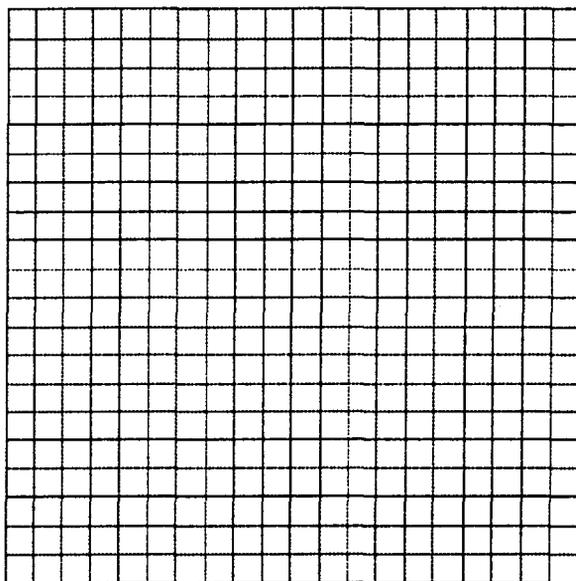


Figure 3.2 : Maillage cartésien régulier de  $20 \times 20$  éléments

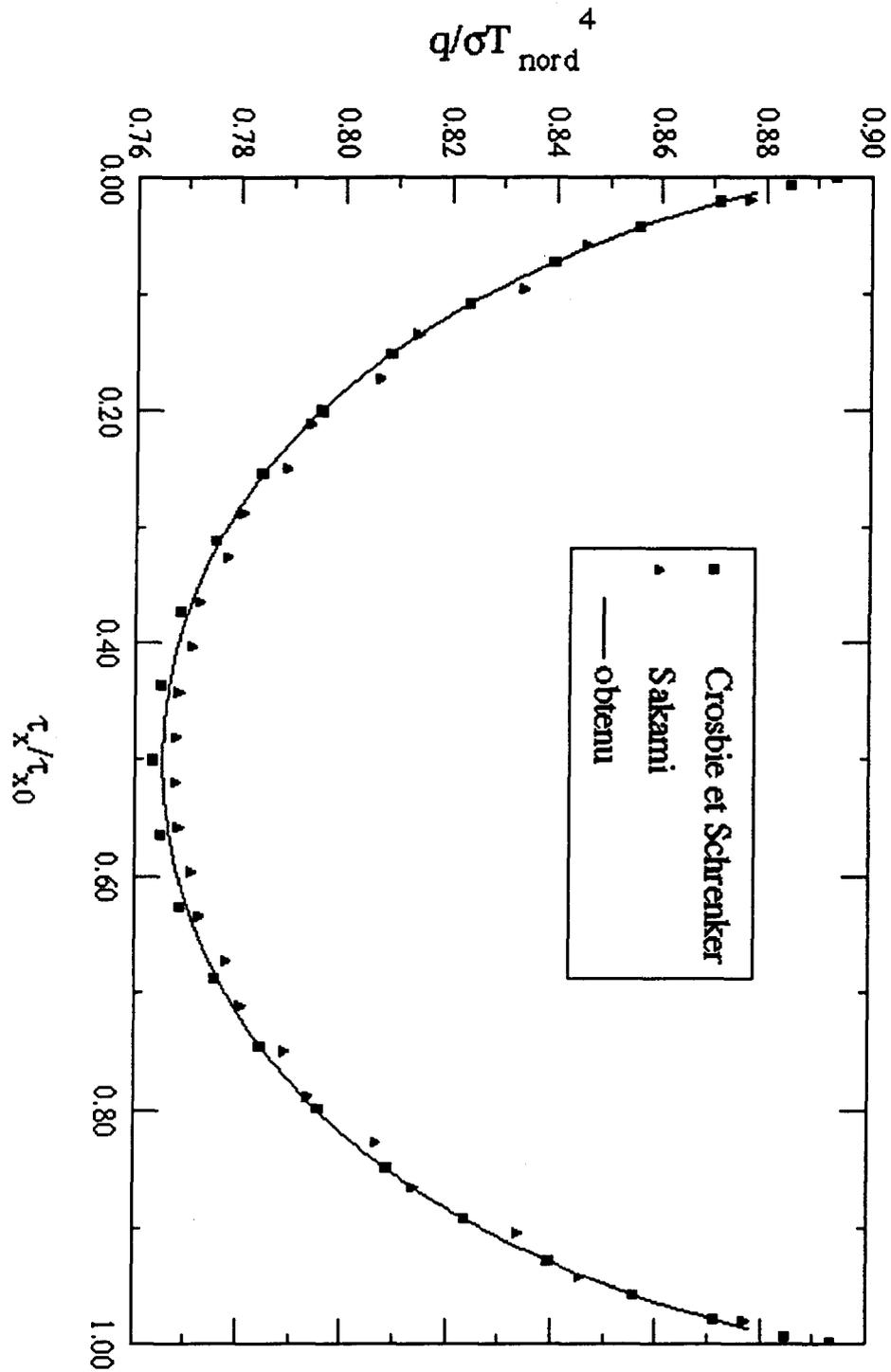


Figure 3.3 : Flux radiatif adimensionné obtenu par la quadrature  $S_6$  et comparé avec la solution exacte rapportée par Crosbie et Schrenker et les résultats donnés par Sakami sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ),  $26 \times 26$  éléments.

La figure 3.3 représente le flux radiatif donné par la quadrature  $S_6$  comparé à celui obtenu par Sakami et Charrette<sup>[24]</sup> qui ont utilisé le maillage triangulaire et celui obtenu par Crosbie et Schrenker. Ces trois résultats sont en bon accord.

La figure 3.4 compare les prédictions du flux sur la paroi chaude, données par les quadratures  $S_4$  (24 directions),  $S_6$  (48 directions) et  $S_8$  (80 directions) avec la solution exacte donnée par Crosbie et Schrenker, pour une épaisseur optique  $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25$ .

On remarque que les trois quadratures  $S_4$ ,  $S_6$ , et  $S_8$  donnent des prédictions précises (moins précis toutefois pour  $S_4$ ). Par ailleurs, si on utilise un maillage plus grand de  $40 \times 40$  éléments, on observe (figure 3.5) que la quadrature  $S_4$  perd de la précision et que c'est la quadrature  $S_6$  qui est la plus précise (plus que la  $S_8$ ). Cela met en évidence qu'un affinement en direction angulaire doit être accompagné d'un affinement de la discrétisation spatiale. Pour la même épaisseur optique la figure 3.6 compare les prédictions entre les quadratures  $S_4$  et  $S_8$  et celles de Thurgood<sup>[22]</sup>,  $T_2$  et  $T_3$ . On remarque que l'approximation  $S_4$  qui correspond à 24 directions est largement plus précise que l'approximation  $T_2$  qui correspond à 32 directions angulaires. Pour les approximations  $S_8$  et  $T_3$  (respectivement 80 et 72 directions), les résultats montrent que  $T_3$  est plus précise que  $S_8$ .

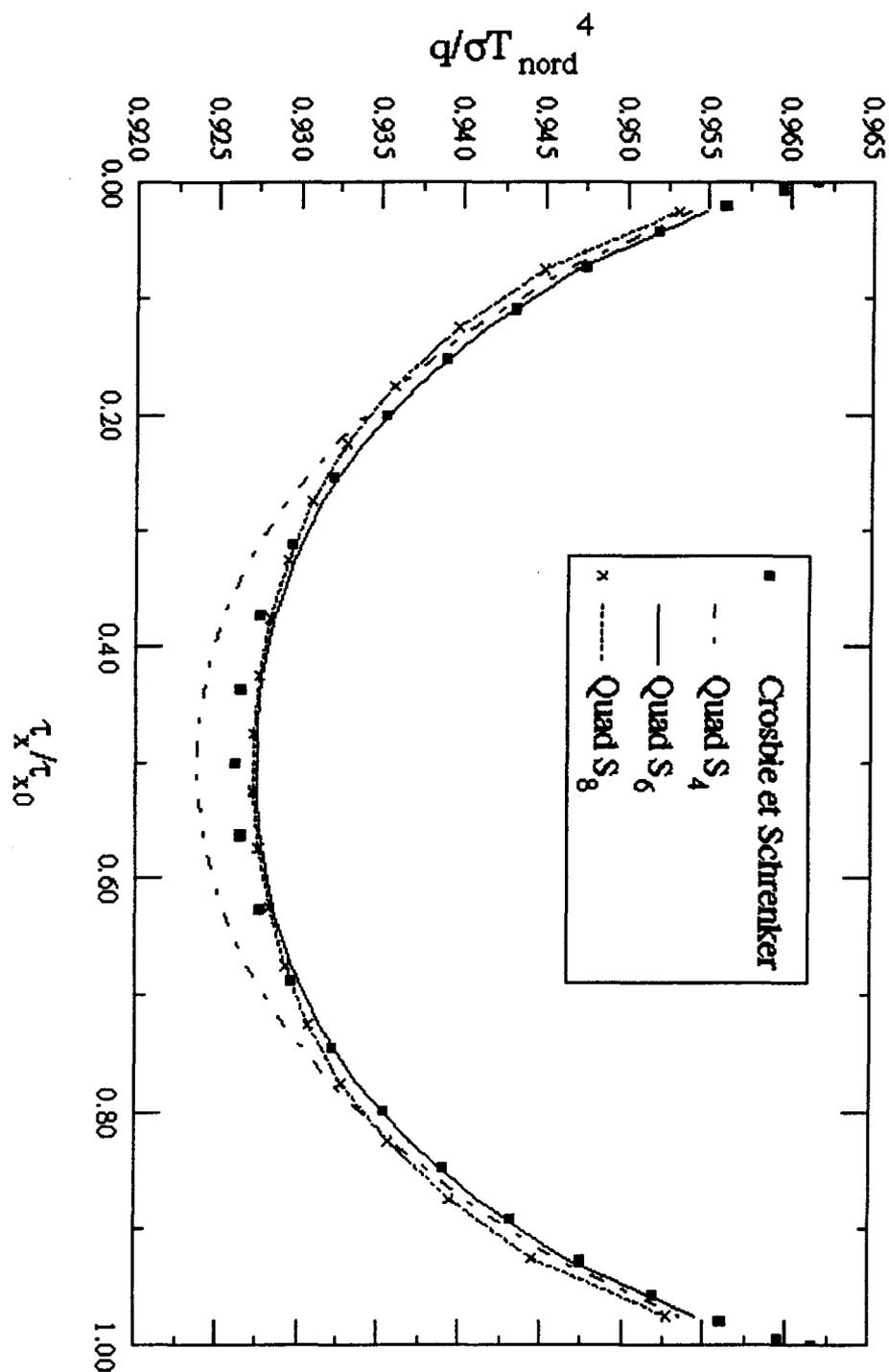


Figure 3.4 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution exacte rapportée par Crosbie et Schrenker sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25$ ;  $\omega = 0$ ),  $20 \times 20$  éléments.

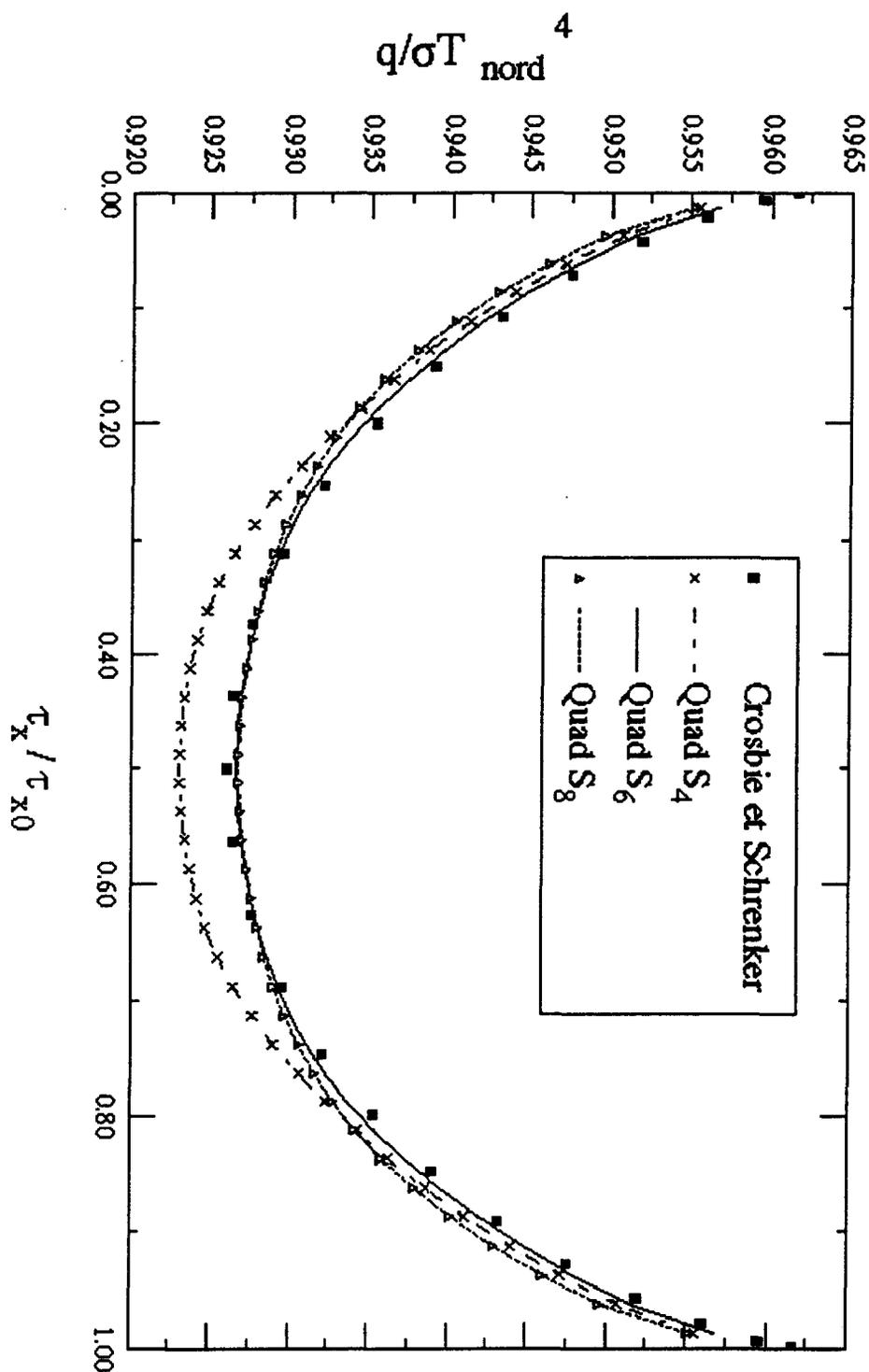


Figure 3.5 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution exacte rapportée par Crosbie et Schrenker sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25$ ;  $\omega = 0$ ),  $40 \times 40$  éléments.

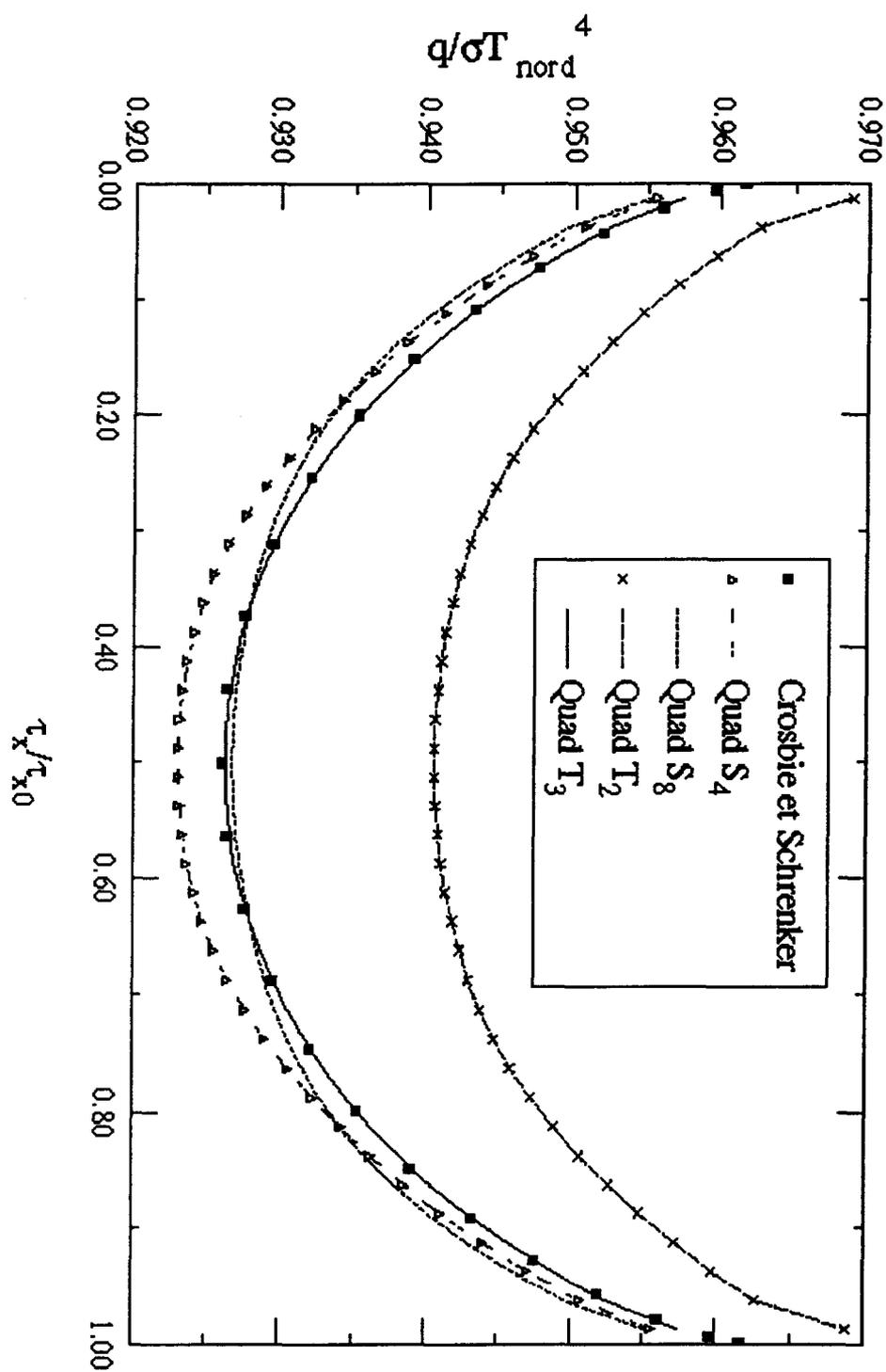


Figure 3.6 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures S<sub>4</sub>, S<sub>8</sub>, T<sub>2</sub> et T<sub>3</sub>, comparé avec la solution exacte rapporté par Crosbie et Schrenker sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25$ ;  $\omega = 0$ ), 40 × 40 éléments.

Le flux radiatif sur la paroi froide obtenu par les approximations  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution obtenue par Crosbie et Schrenker est montré sur la figure 3.7 pour un maillage de  $40 \times 40$  éléments. On remarque que la quadrature  $S_8$  donne le meilleur résultat, mais il présente toutefois un écart important avec la solution exacte. Alors pour remédier à ce problème on doit augmenter le nombre de directions angulaires en utilisant les quadratures  $T_n$ . La figure 3.8 montre les résultats obtenus avec les approximations  $T_3$  et  $T_6$ . On remarque que l'augmentation du nombre de directions améliore la précision des résultats. On peut ajouter que le nouvel algorithme permet d'éviter les oscillations sur le flux qui ont été observés auparavant par Thurgood [22].

### 3.2.2. 2<sup>ème</sup> test :

Dans le deuxième test, on compare les résultats obtenus avec ceux donnés par la méthode des éléments finis, pour une enceinte carrée d'épaisseur optique  $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1.0$ . La méthode des éléments finis développée par Razzaque et al [5] est considérée comme numériquement exacte. Comme dans le 1<sup>er</sup> test, les quatre faces de l'enceinte sont noires. Une température de  $1 K$  a été imposée sur la surface 1, alors que les autres faces sont à  $0 K$ .

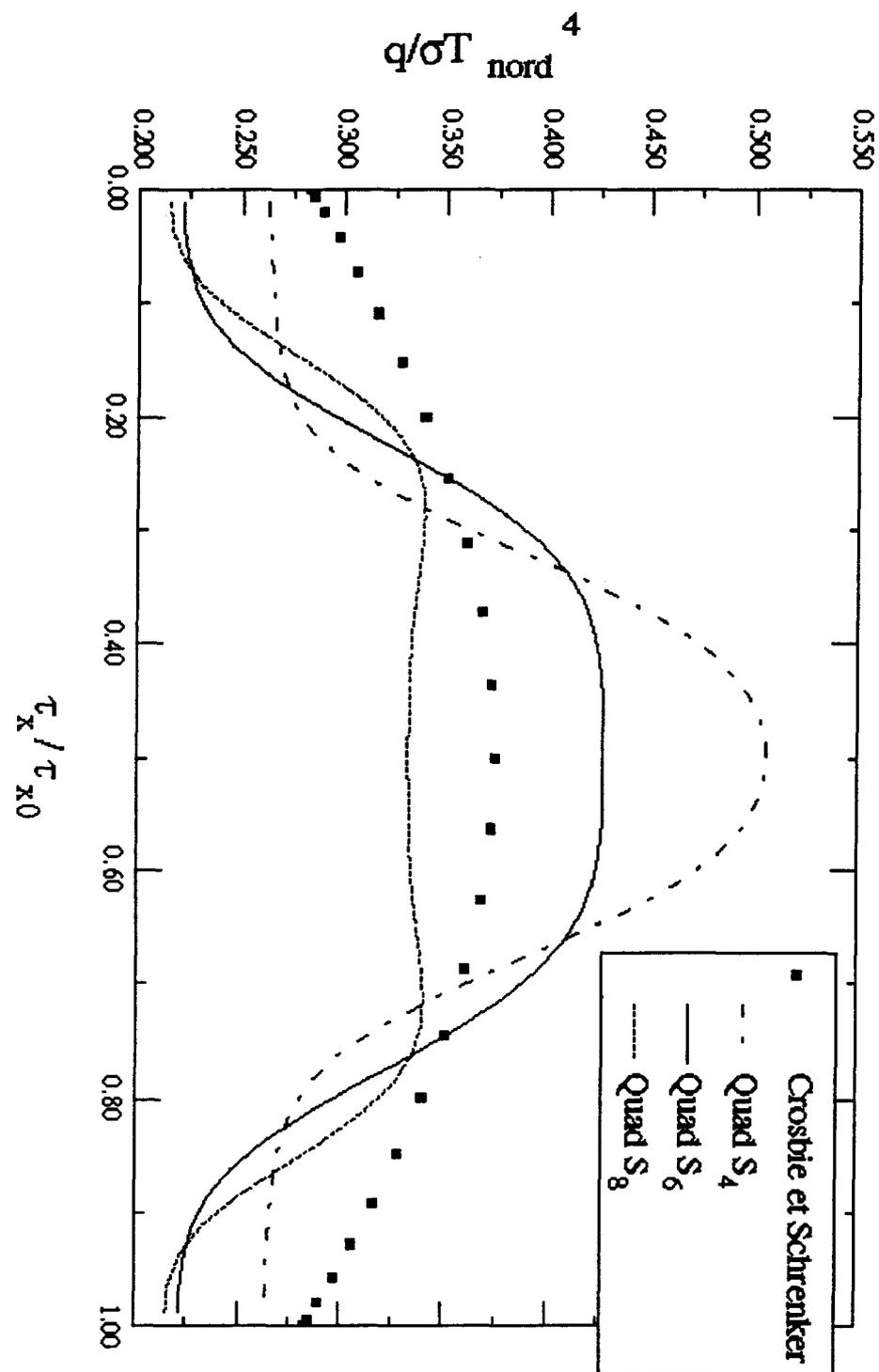


Figure 3.7 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution exacte rapportée par Crosbie et Schrenker sur la paroi froide

( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25$ ;  $\omega = 0$ ),  $40 \times 40$  éléments.

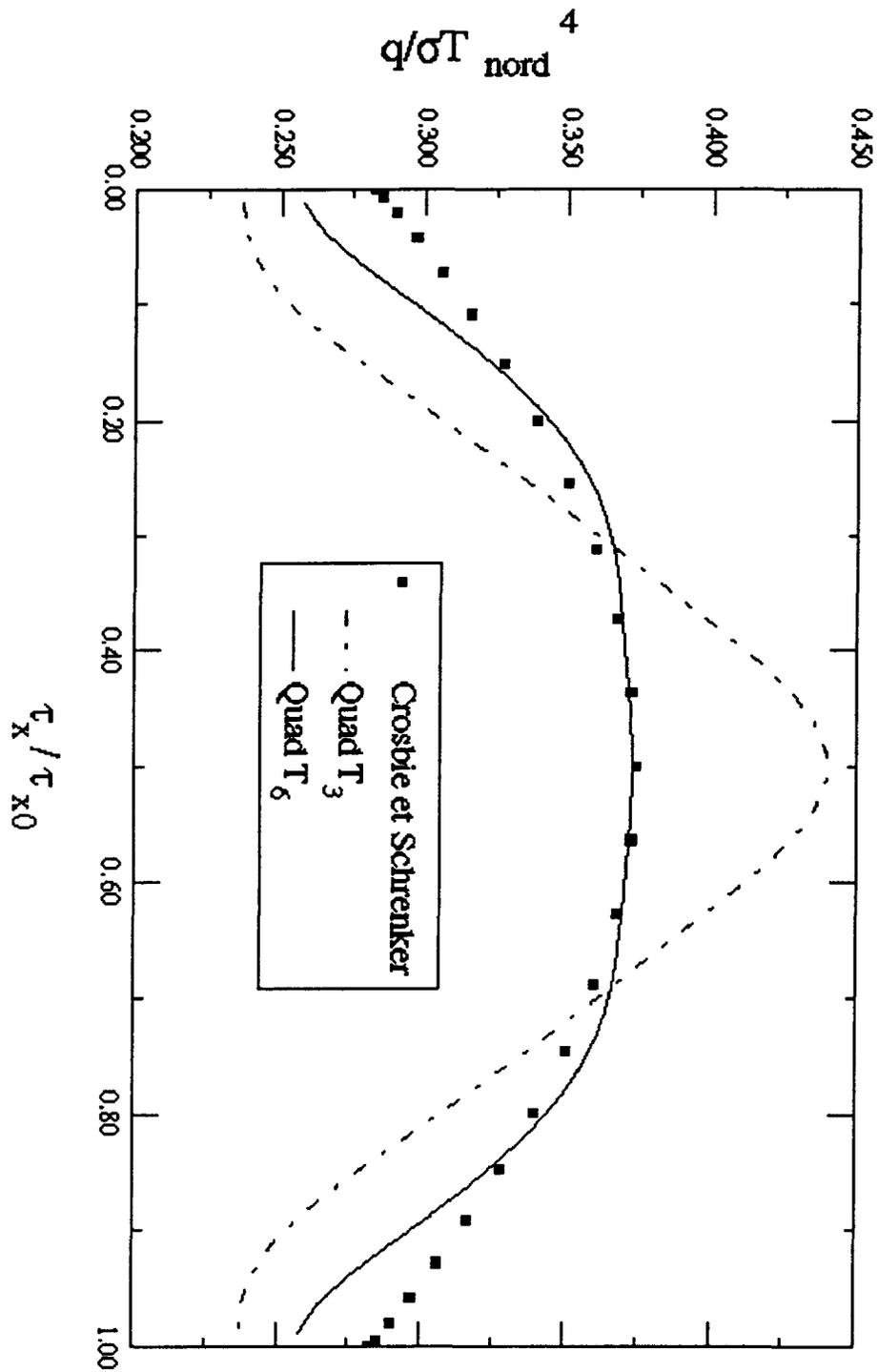


Figure 3.8 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $T_3$  et  $T_6$ , comparé avec la solution exacte rapportée par Crosbie et Schrenker sur la paroi froide ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 0.25$ ;  $\omega = 0$ ),  $40 \times 40$  éléments.

Les figures 3.9 et 3.10 montrent le flux adimensionné sur la paroi chaude. Dans ce cas on voit bien que l'approximation  $S_4$  est la plus précise lorsque le maillage est de  $20 \times 20$  éléments (figure 3.9). Par contre, pour un maillage de  $40 \times 40$  éléments (figure 3.10) ce sont les approximations  $S_6$  et  $S_8$  qui sont les plus précises.

À la figure 3.11, on a représenté les résultats obtenus sur la paroi froide avec les approximations  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$  et  $T_6$ . On constate que c'est toujours la quadrature  $T_6$  qui donne la meilleure prédiction.

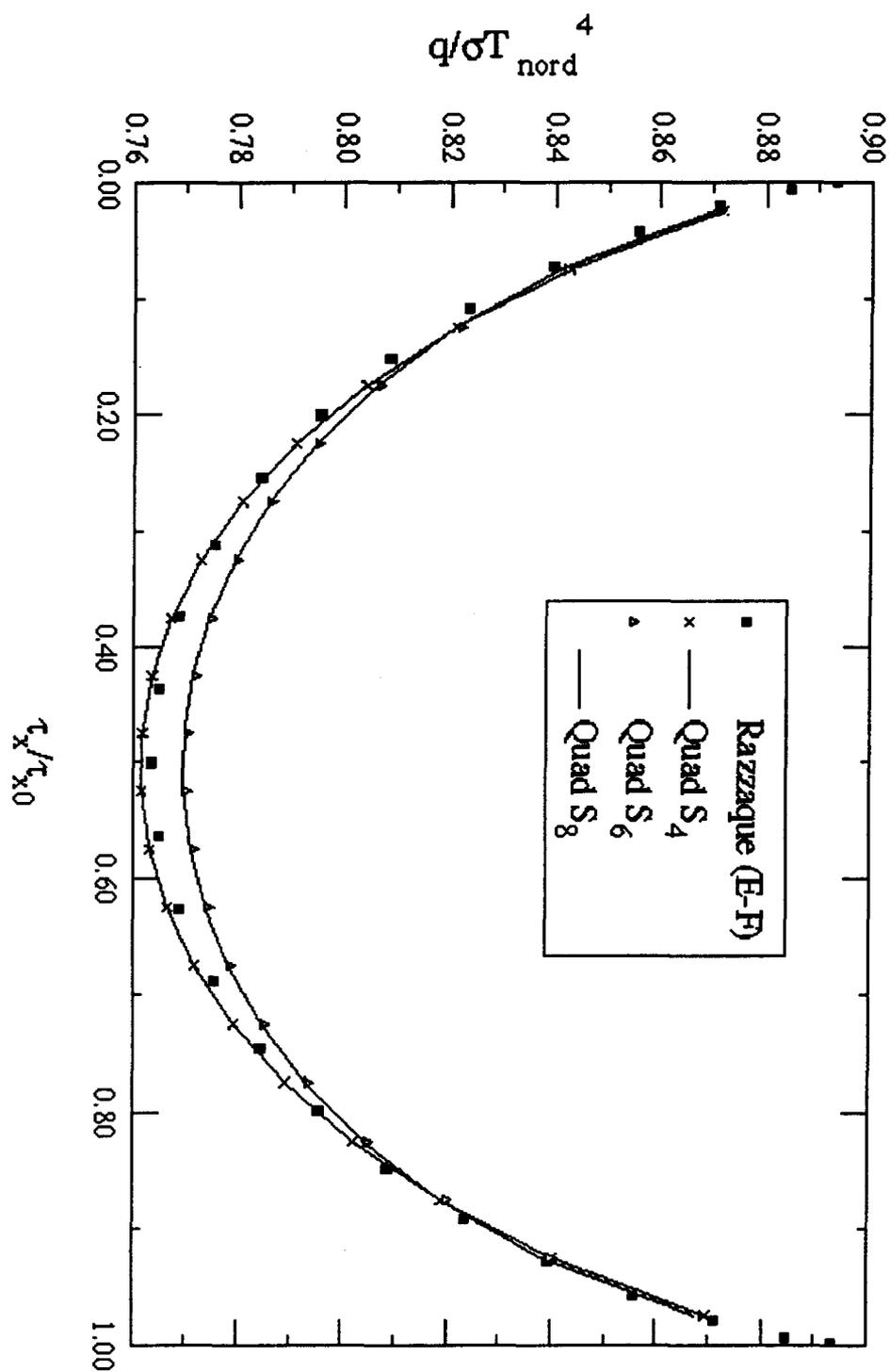


Figure 3.9 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution rapportée par Razzaque sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ;  $\omega = 0$ ),  $20 \times 20$  éléments.

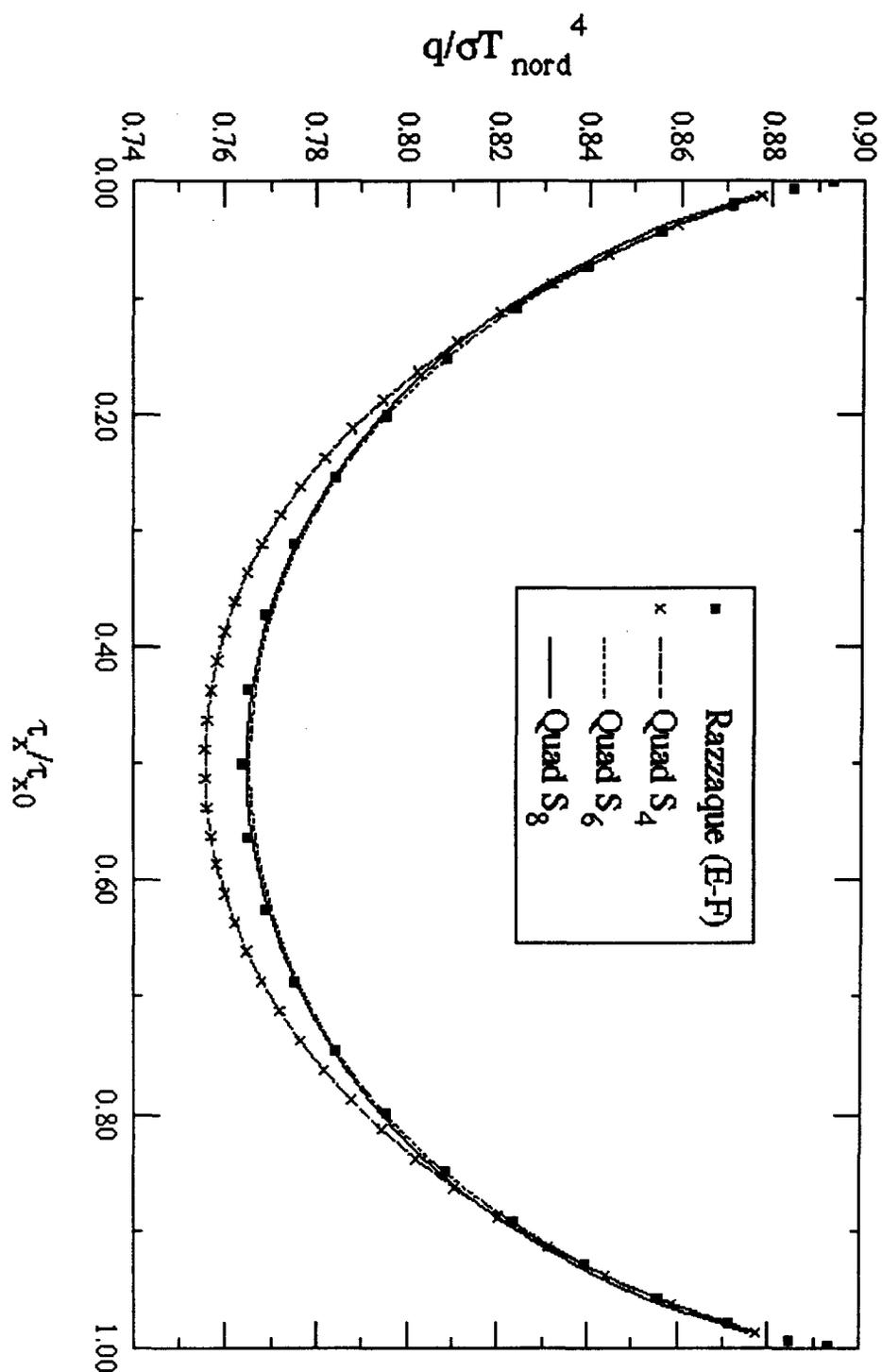


Figure 3.10 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution rapportée par Razzaque sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ;  $\omega = 0$ ),  $40 \times 40$  éléments.

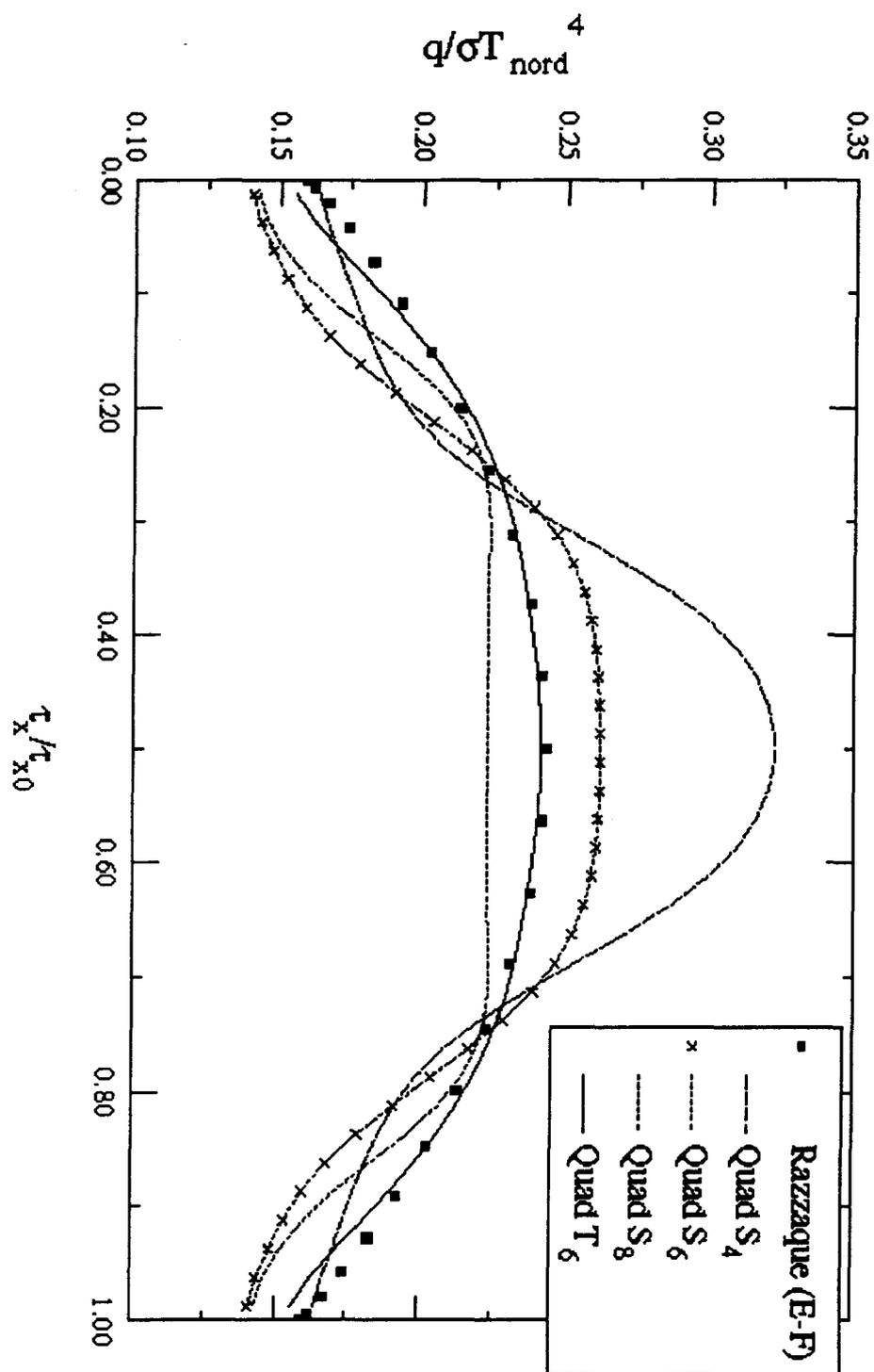


Figure 3.11 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$  et  $T_6$ , comparé avec la solution rapportée par Razzaque sur la paroi froide ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ),  $40 \times 40$  éléments.

### 3.3. Cavité carrée, maillage non uniforme :

Pour vérifier la robustesse du nouveau schéma proposé dans ce travail, on a traité le même problème d'une cavité de longueur infinie et de section carrée avec parois noires en utilisant un maillage non régulier.

On a choisi deux exemples de maillage déformé (figures 3.12 et 3.15).

#### 3.3.1. 1<sup>er</sup> exemple :

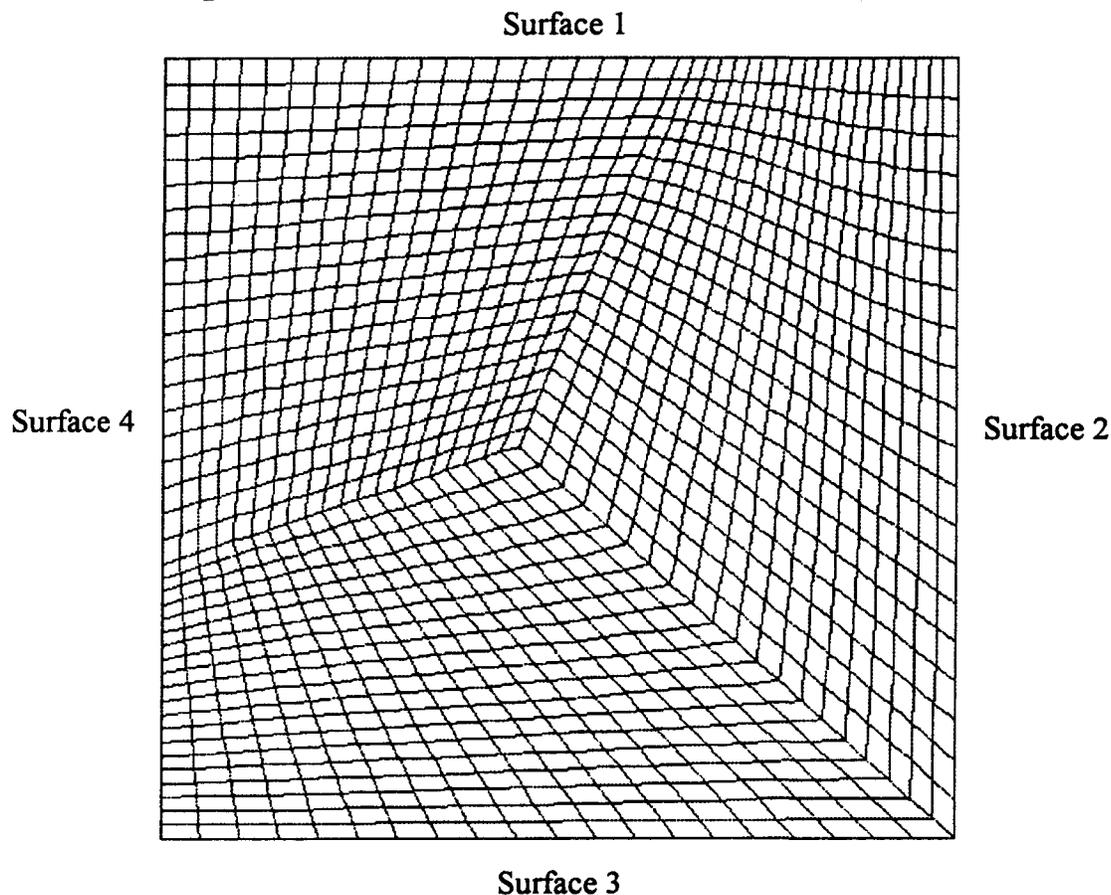


Figure 3.12 : Maillage cartésien non uniforme généré avec 40 subdivisions sur les surfaces 1 et 4, et 20 subdivisions sur les surfaces 2 et 3.

Pour le maillage de la figure 3.12, les résultats obtenus pour les flux radiatifs adimensionnés aux parois chaude et froide sont donnés aux figures 3.13 et 3.14 respectivement. On remarque que les résultats sont très près de ceux obtenus avec un maillage de  $40 \times 40$  éléments (figure 3.10 et 3.11).

Pour le maillage de la figure 3.15 qui est plus déformé et contient  $60 \times 60$  éléments, les résultats sont montrés aux figures 3.16 et 3.17. On peut constater que les prédictions obtenues aux parois chaude et froide sont similaires à celles du premier maillage déformé. La seule différence notable se situe au niveau des deux extrémités de la paroi froide (figure 3.17) où les quadratures  $S_6$  et  $S_8$  produisent des courbures plus prononcées. De façon générale, on peut conclure que les résultats obtenus avec les maillages déformés sont bons et que la méthode proposée peut s'adapter à des géométries complexes.

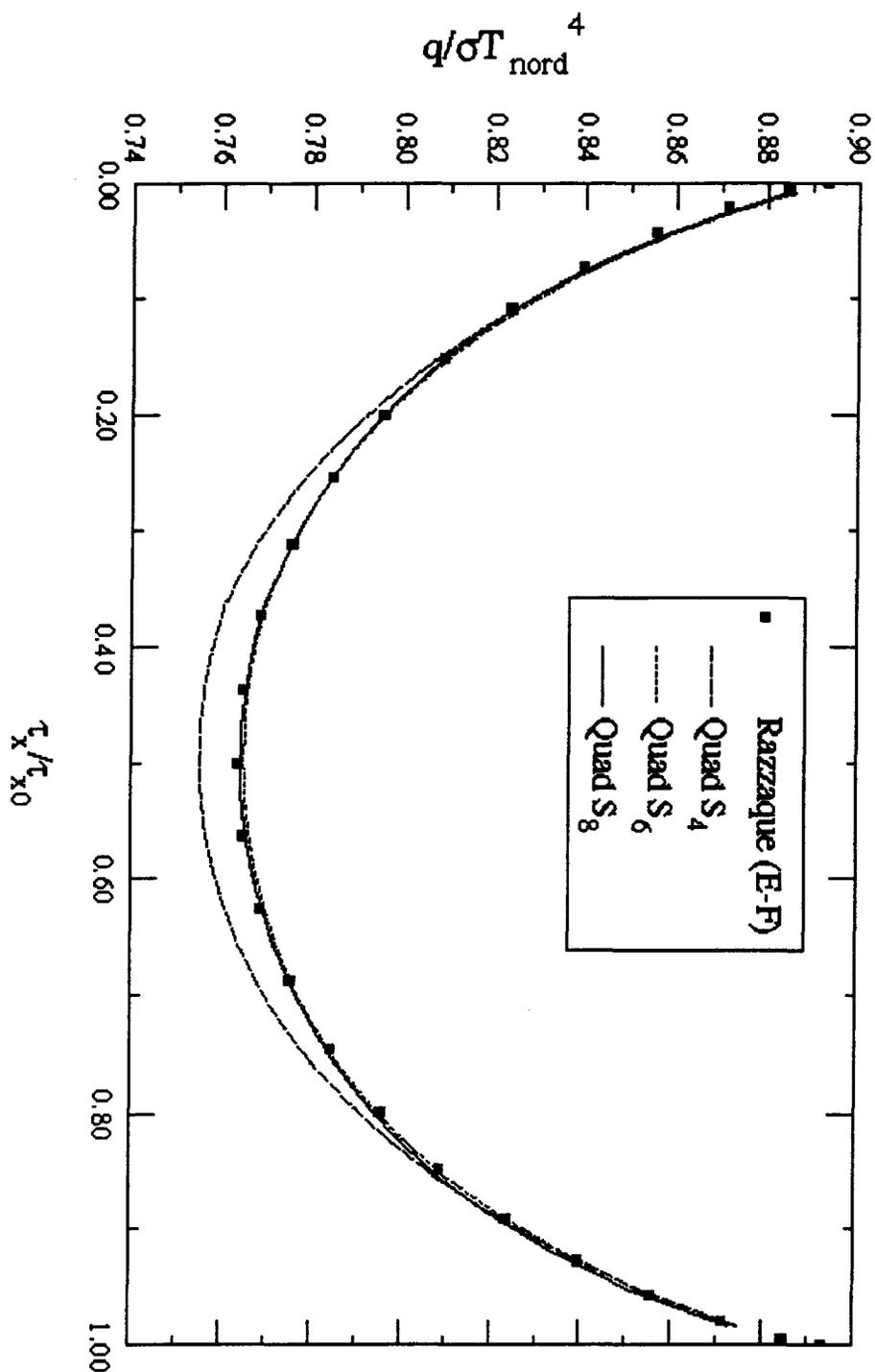


Figure 3.13 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution rapportée par Razzaque sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), maillage non-uniforme de la figure 3.12.

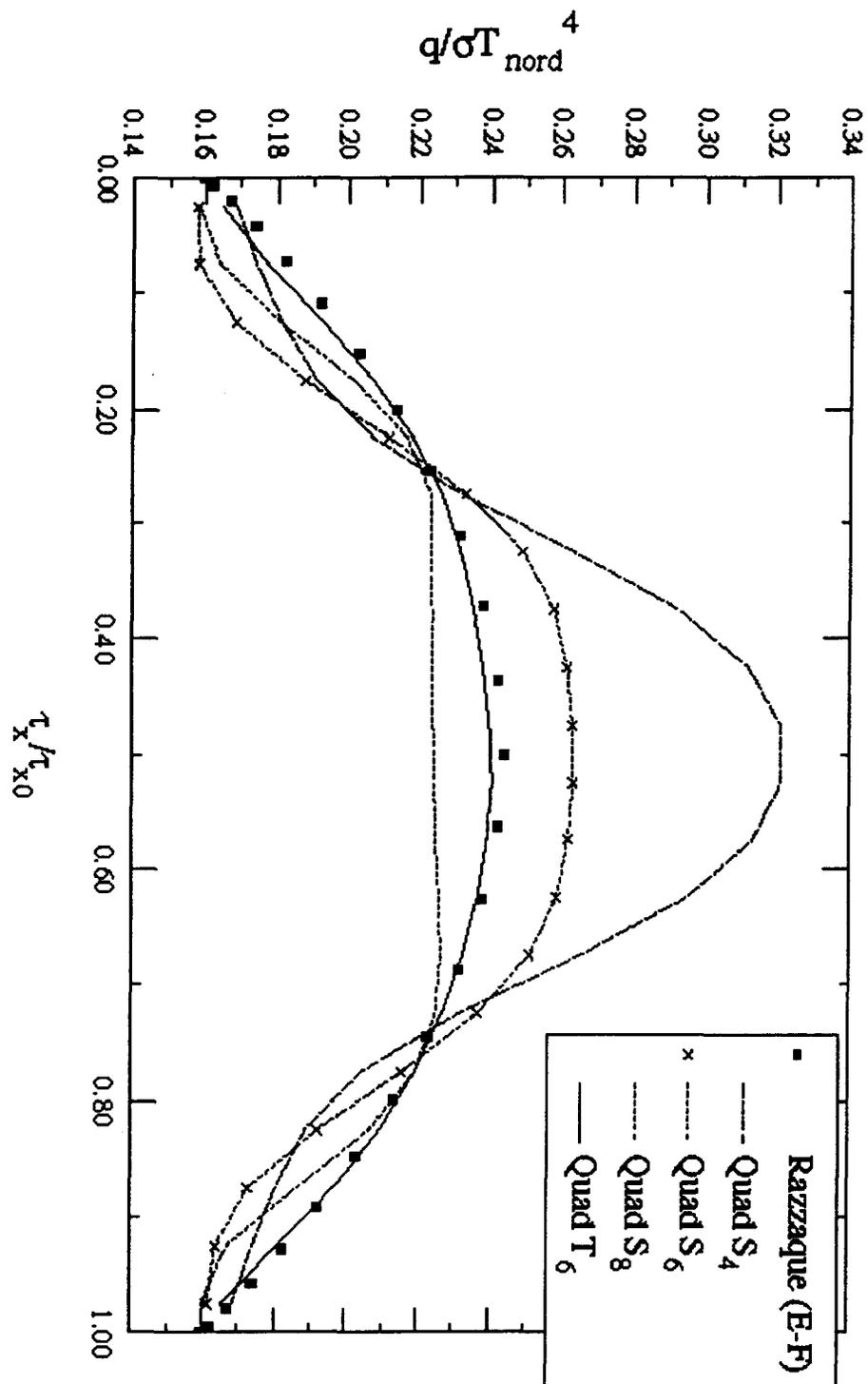


Figure 3.14 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution rapportée par Razzague sur la paroi froide ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), maillage non-uniforme de la figure 3.12.

### 3.3.2. 2<sup>ème</sup> exemple :

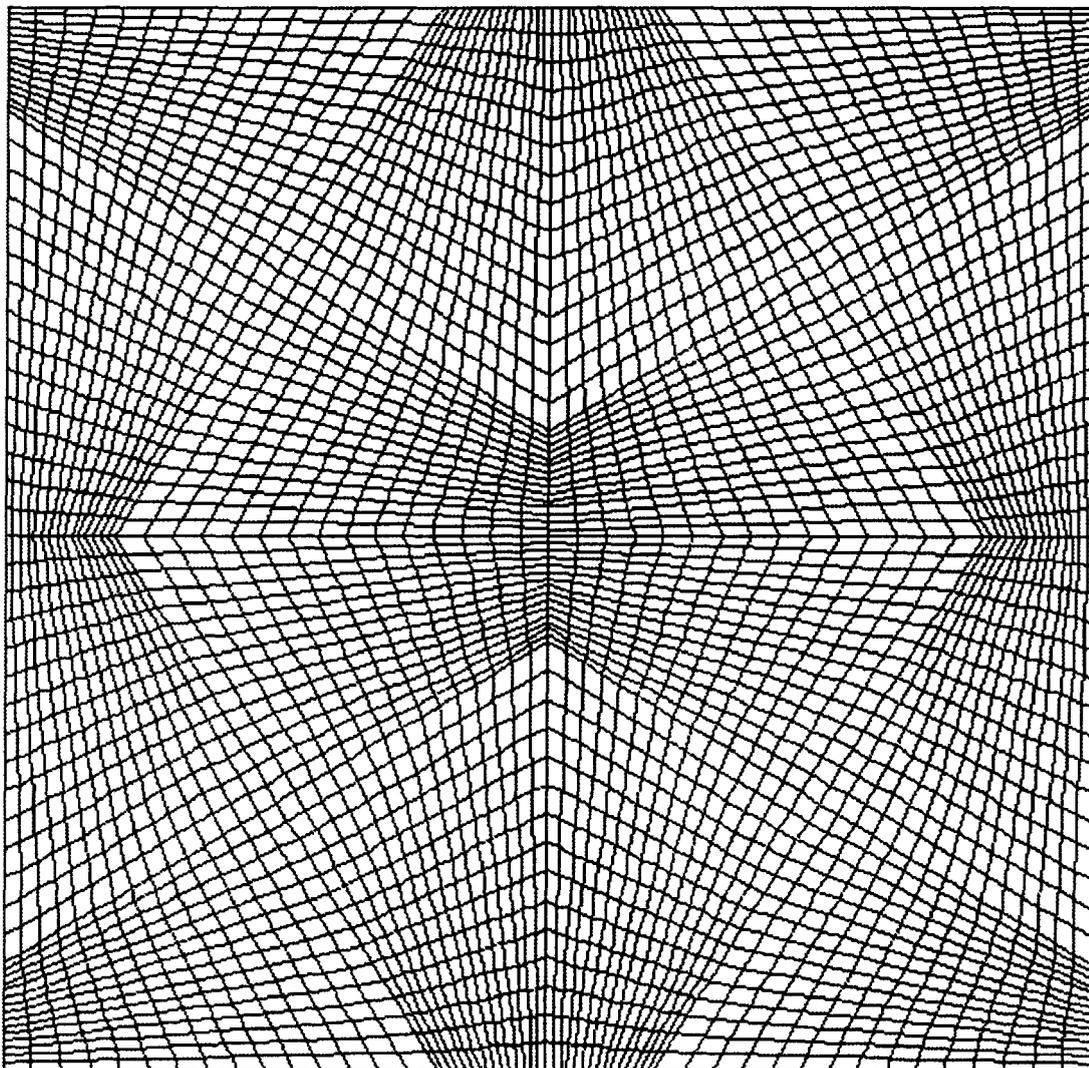


Figure 3.15 : Maillage cartésien déformé de  $60 \times 60$  éléments.

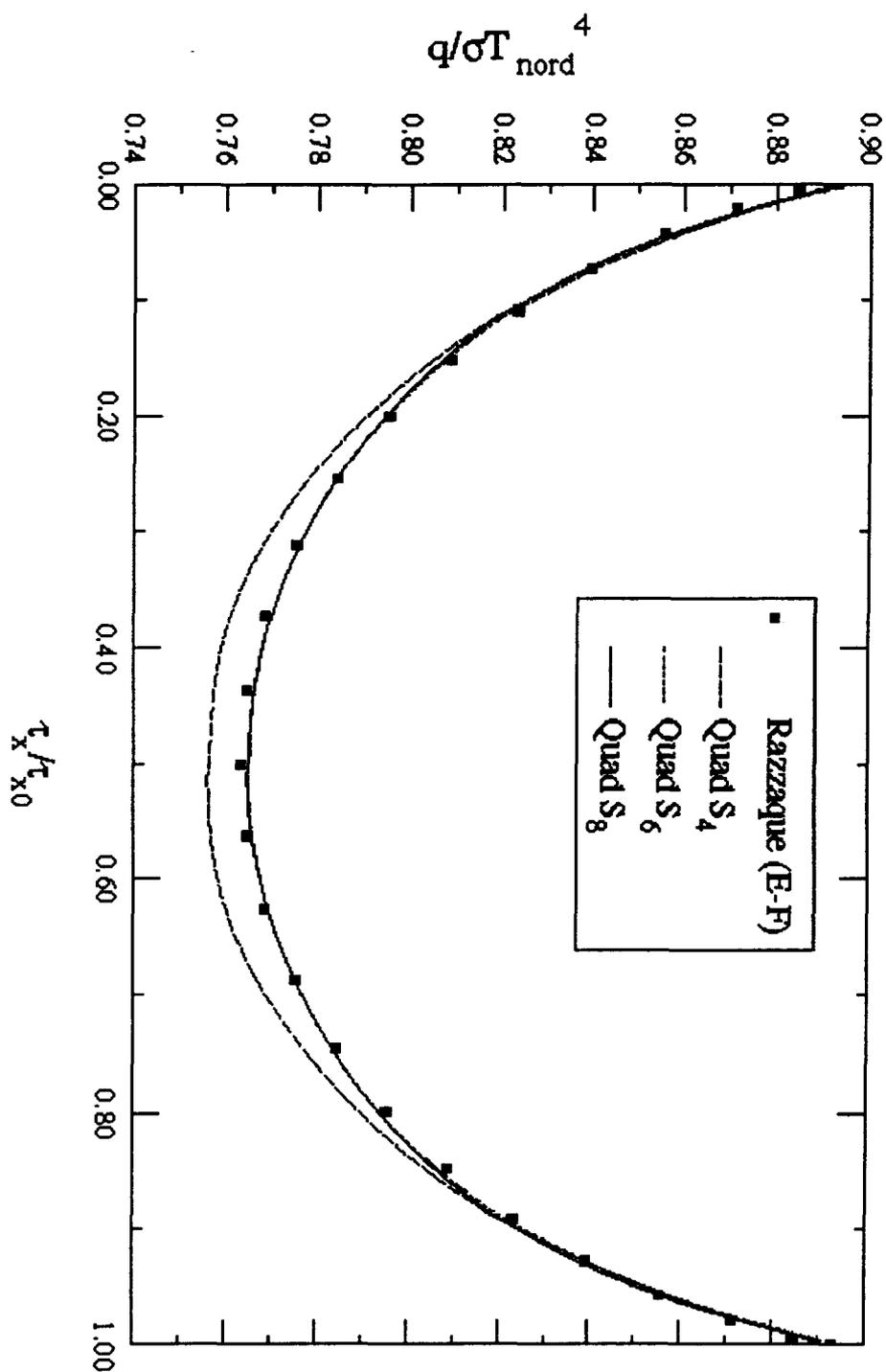


Figure 3.16 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$  et  $S_8$ , comparé avec la solution rapportée par Razzaque sur la paroi chaude ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1$ ;  $\omega = 0$ ), maillage non-uniforme de la figure 3.15.

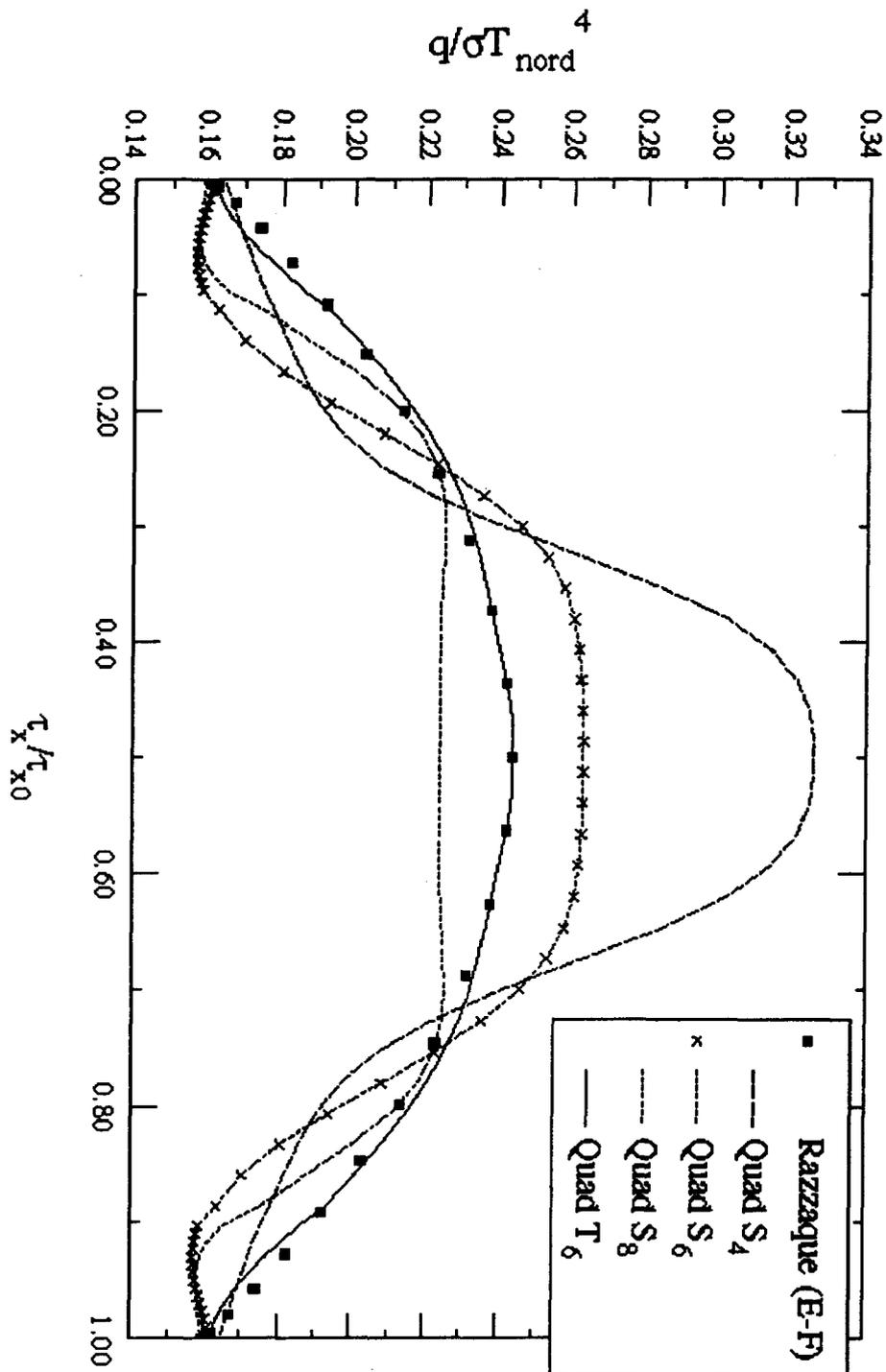


Figure 3.17 : Flux radiatif adimensionné obtenu par les quadratures  $S_4$ ,  $S_6$ ,  $S_8$  et  $T_6$ , comparé avec la solution rapportée par Razzaque sur la paroi froide ( $\tau_{x0} = \tau_{y0} = 1; \omega = 0$ ), maillage non-uniforme de la figure 3.15.

### 3.4. Géométrie complexe :

La technique étant validée sur un maillage non régulier, on l'a étendue à des géométries complexes en milieu absorbant émettant.

#### 3.3.1. Milieux cylindriques.

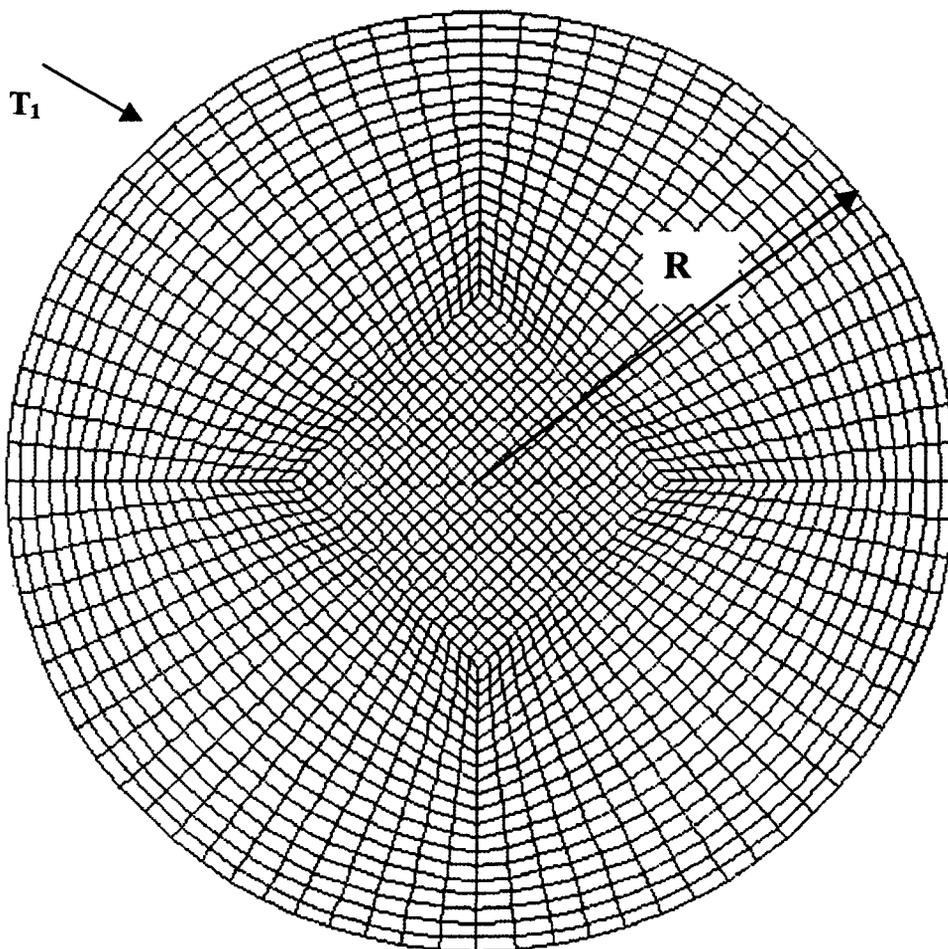


Figure 3.18 : Définition du problème du cylindre avec le maillage utilisé (2000 éléments).

Nous avons analysé un cylindre infini et un anneau cylindrique. Dans les deux cas, les frontières sont considérées noires, et le milieu est absorbant-émettant sans diffusion.

Le premier cas est un cylindre infini dont la température de surface est maintenue uniforme à  $T_1$ . Le milieu est soumis à une génération de chaleur  $\dot{q} = 4\beta\bar{\sigma}T_1$ . Les résultats sont présentés à la figure 3.19 où la température adimensionnée  $T_r/T_1$  est tracée selon la position radiale relative  $r/R$ .

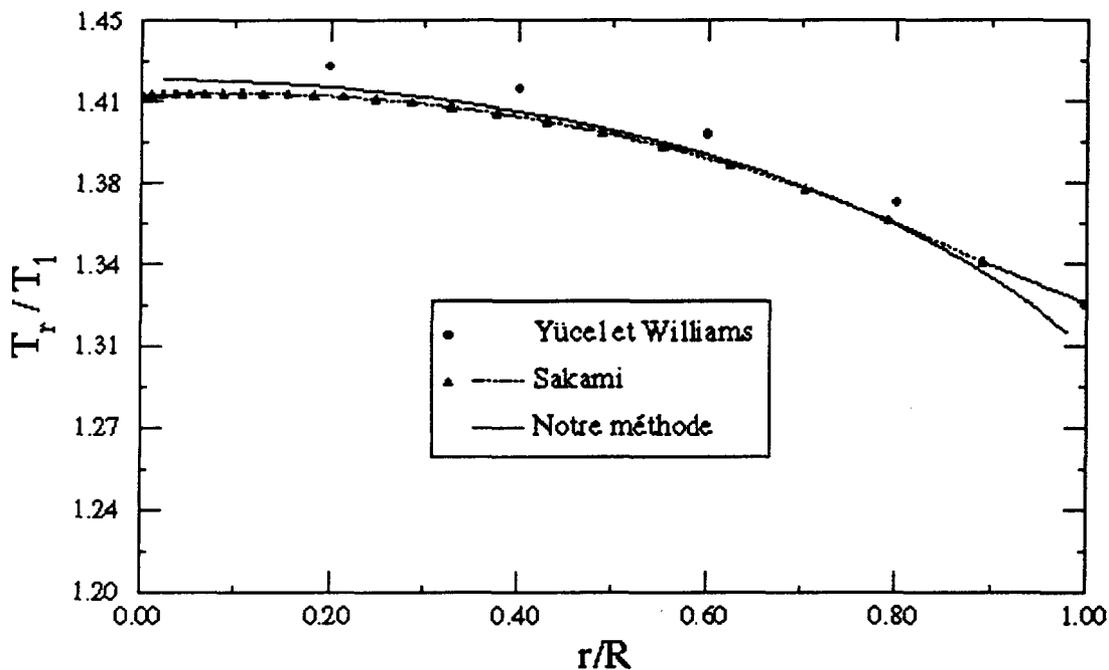


Figure 3.19 : Profil radial de la température adimensionnée obtenu par la quadrature  $S_4$  comparé avec les résultats donnés par Yücel <sup>[23]</sup> et ceux de Sakami ( $\tau_R = \beta R = 1$ ,  $\dot{q} = 4\beta\bar{\sigma}T_1$ ,  $\varepsilon = 1$ , et  $\omega = 0$ ).

On remarque la discontinuité de la température à la frontière, la température du milieu étant différente de la température de la surface. On constate également que les résultats obtenus sont bien compatibles avec ceux donnés par Yücel et Williams qui ont utilisé le code d'ordonnées discrètes DOTIV. Alors qu'avec ceux de Sakami et al <sup>[18]</sup>, il y a un certain écart sur les deux extrémités des courbes.

Le deuxième cas est un anneau cylindrique de longueur infinie (figure 3.20).

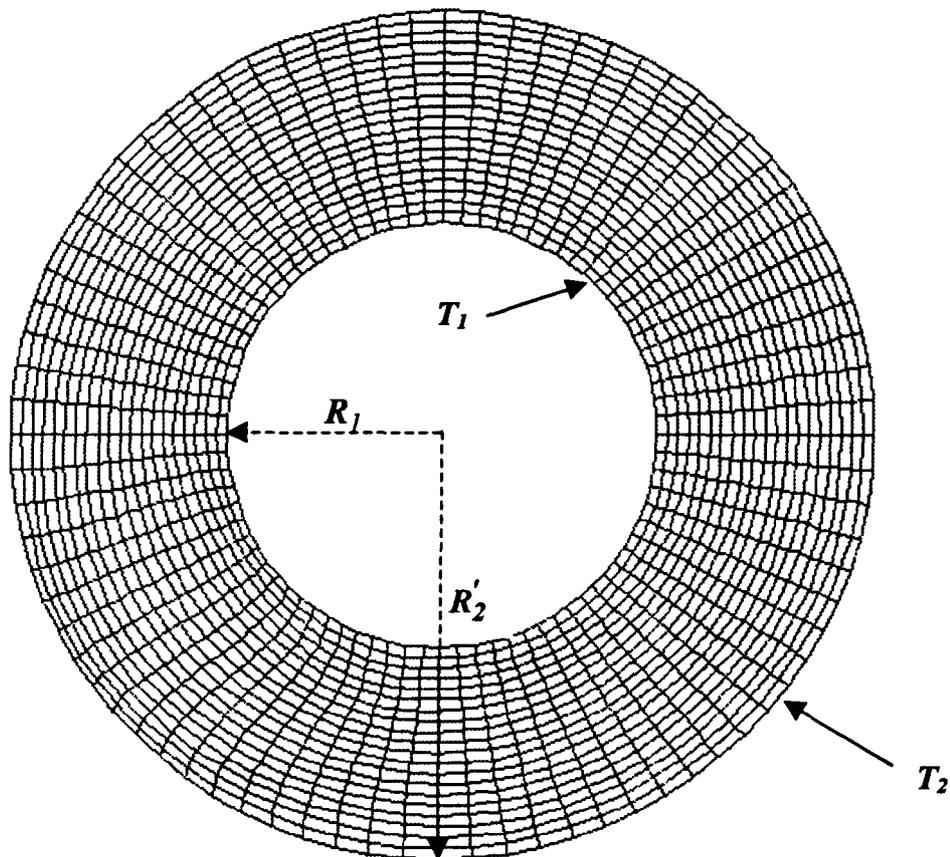


Figure 3.20 : Problème d'un anneau cylindrique avec le maillage utilisé (1600 éléments).

Les températures des cercles intérieur et extérieur sont respectivement  $T_1 = 1000K$  et  $T_2 = 500K$ . les résultats sont montrés à la figure 3.21.

On remarque aussi la discontinuité de la température au voisinage des frontières. Les températures du milieu tendent vers les températures des parois au fur et à mesure que le coefficient d'extinction augmente.

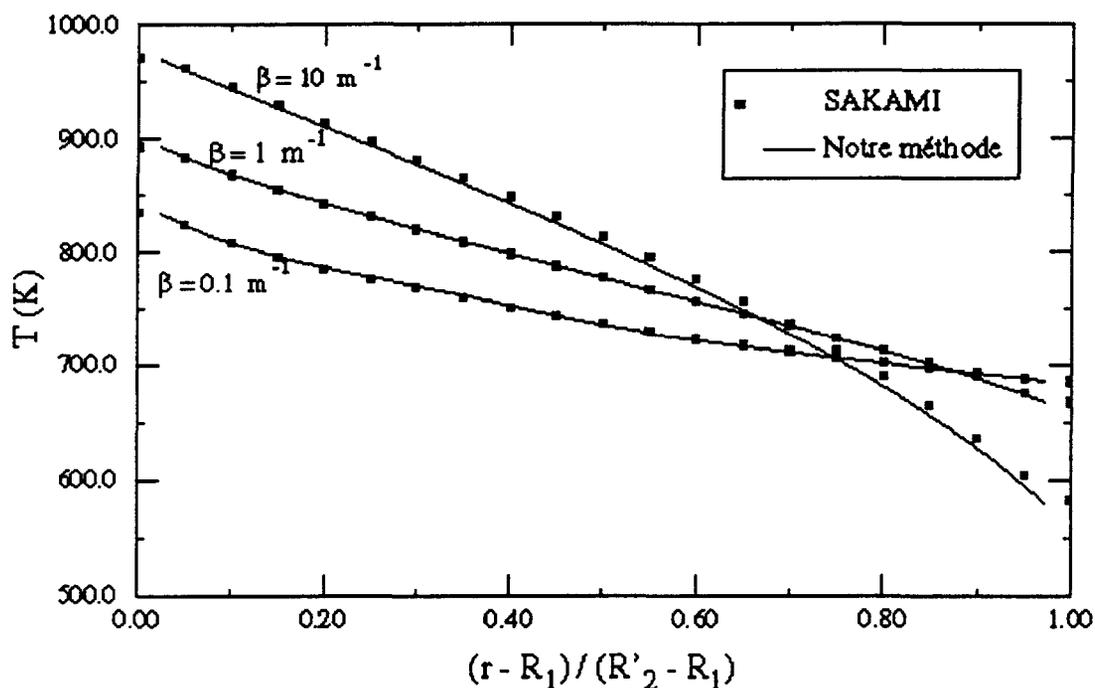


Figure 3.21 : Profil radial de la température adimensionnée obtenu par la quadrature  $T_5$  comparé avec les résultats donnés par Sakami <sup>[18]</sup> pour plusieurs épaisseurs optiques, avec  $R_1 = 1m$ ,  $R'_2 = 2m$ , ( $T_1 = 1000K$ ,  $T_2 = 500K$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 0$ ).

On voit que les résultats obtenus pour plusieurs épaisseurs optiques concordent avec ceux donnés par Sakami et al <sup>[18]</sup> qui ont utilisé le maillage triangulaire et la même quadrature angulaire  $T_5$ .

### 3.4.2. Anneau elliptique :

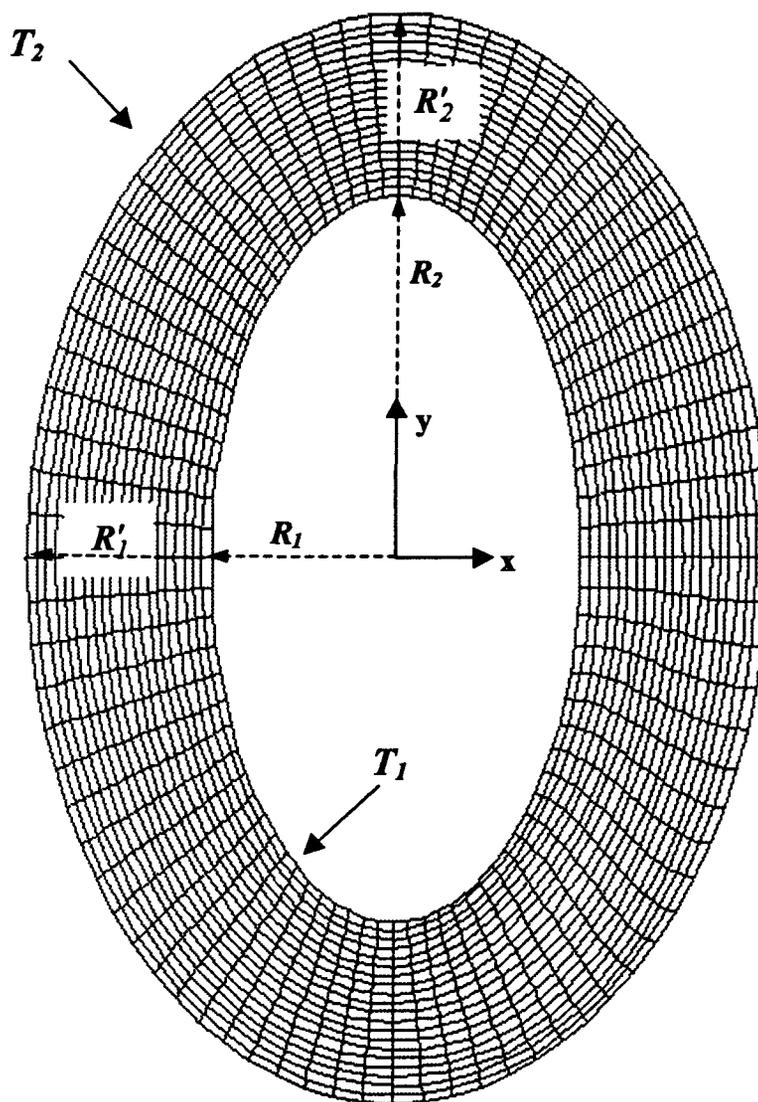


Figure 3.22 : Définition du problème de l'anneau elliptique avec le maillage utilisé (1600 éléments).

Pour montrer que la méthode peut s'adapter à n'importe quelle géométrie, on l'a appliquée sur un anneau elliptique (figure 3.22). Le nouvel anneau est créé en élargissant l'anneau circulaire dans la direction  $y$ . Les axes majeurs intérieur et extérieur sont variés tout en gardant constants l'épaisseur optique  $\beta(R'_2 - R_2) = \beta(R'_1 - R_1)$ , l'axe mineur et toutes les autres conditions. Contrairement aux exemples précédents le milieu est le siège d'une diffusion isotrope ( $\Phi(\Omega', \Omega) = 1$ ) en plus d'être absorbant-émetteur.

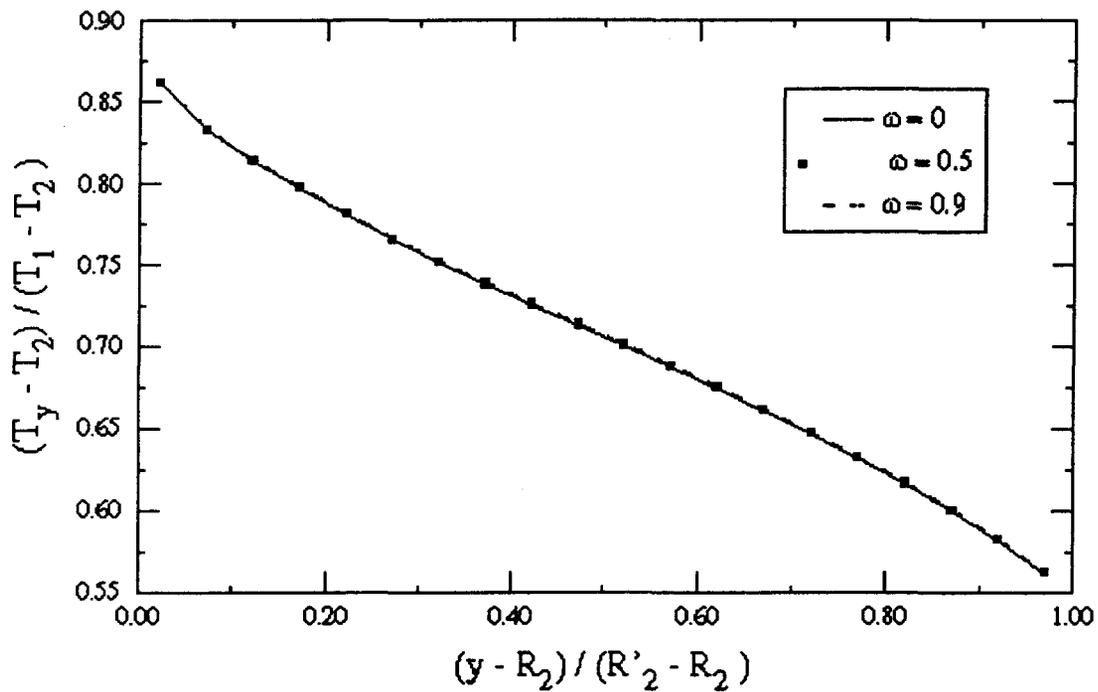


Figure 3.23 : Profil de la température adimensionnée le long de la ligne de symétrie  $x = 0$ , obtenu par la quadrature  $S_4$  et pour trois valeurs de l'albédo  $\omega$ , ( $\beta R_1 = 1$ ,  $\beta R'_1 = 2$ ,  $\beta R_2 = 2$ ,  $\beta R'_2 = 3$ ,  $T_1 = 1K$ ,  $T_2 = 0.1K$ ,  $\varepsilon = 1$ ).

La figure 3.22 montre le flux radiatif obtenu par  $S_4$  pour trois valeurs de l'albédo. Les résultats sont les mêmes et ne dépendent pas de l'albédo  $\omega$ . En effet, pour un milieu en équilibre radiatif avec diffusion isotrope, l'albédo n'est pas un paramètre.

Nous avons aussi traité le cas d'un demi-anneau elliptique schématisé sur la figure 3.24. La face intérieure est maintenue à une température  $T_1$  ( $T_1 = 1000 K$ ),

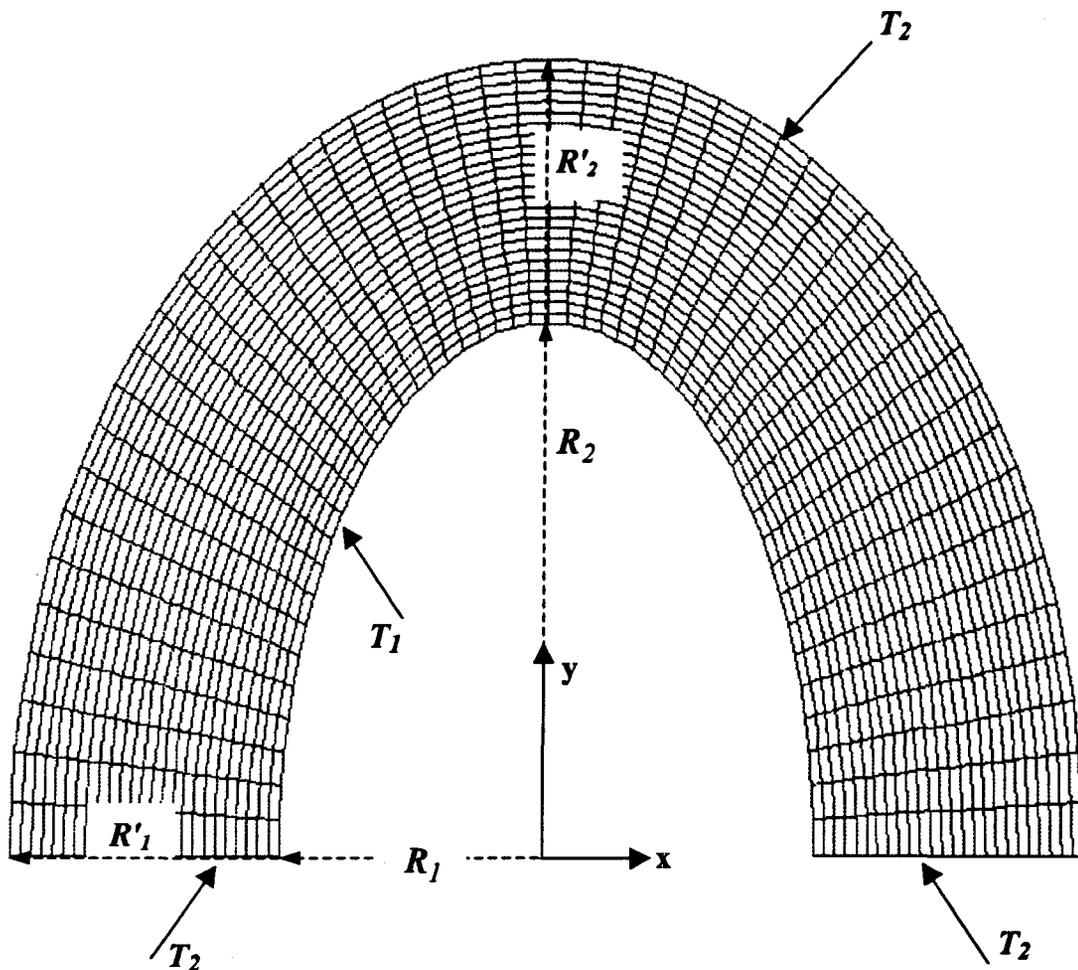


Figure 3.24 : Définition du problème du demi-ellipse avec le maillage utilisé (1250 éléments).

et les autres faces sont à température  $T_2$  ( $T_2 = 500 K$ ). Le milieu considéré est absorbant-émettant en équilibre radiatif. Les résultats sont montrés sur la figure 3.25.

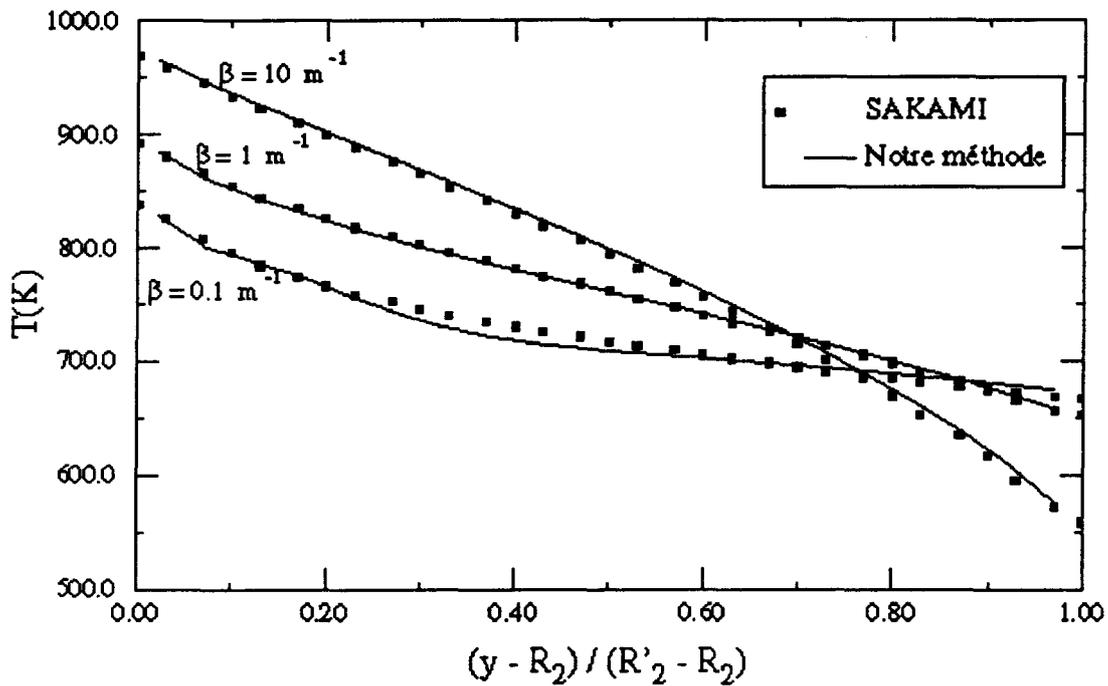


Figure 3. 25 : Profil radial de la température adimensionnée obtenu par la quadrature  $S_4$ , et comparé avec les résultats donnés par Sakami <sup>[17]</sup>,  $R_2/R_1 = 2$ , et  $R'_2/R_1 = 3$  ( $T_1 = 1000 K$ ,  $T_2 = 500 K$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\omega = 0$ ).

On voit que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux donnés par Sakami et al <sup>[17]</sup>.

### **3.5. Conclusion :**

Nous avons repris dans ce chapitre des cas de rayonnement traités auparavant par Sakami et Charette<sup>[24]</sup> avec leur nouvelle technique de différenciation en maillage triangulaire. Les exemples ont été refaits en maillage quadrangulaire pour montrer que la modification apportée par l'auteur de ce mémoire reproduit bien les résultats déjà trouvés. Les résultats montrent que la nouvelle méthode de différenciation adaptée à un maillage quadrangulaire est très générale et permet de traiter tous les cas de géométries quelconques.

## **Chapitre : 4**

# **4. Méthodes de résolution en mécanique des fluides**

## **4.1. Introduction :**

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la simulation numérique des écoulements laminaires de fluides incompressibles dans des géométries bidimensionnelles, en régime stationnaire. L'objectif visé est d'assurer un couplage entre la méthode de résolution des équations de conservation par volumes finis et l'algorithme de transfert radiatif présenté au chapitre 2.

La simulation numérique des écoulements des fluides est conditionnée par le choix du modèle mathématique qui gouverne l'écoulement, et du schéma numérique pour la résolution de ce modèle. Elle se déroule en deux étapes principales : la subdivision du domaine de calcul et la discrétisation des équations de base.

La discrétisation du domaine se fait en éléments quadrilatéraux uniformes. Les équations gouvernantes sont écrites en variables primitives  $(u, v, p)$ , et discrétisées sur des volumes de contrôle décalés.

La résolution s'effectue par la procédure SIMPLER de Patankar <sup>[20]</sup>.

## **4.2. Formulation mathématique :**

### **4.2.1. Équations de base :**

Les problèmes d'écoulement de fluides et de transferts de chaleur sont gouvernés par les principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie donnés au chapitre 2 (Équations (2.1), (2.2), (2.3)). Chaque équation traite d'une

quantité physique et implique que cette quantité doit être équilibrée selon les différents facteurs qui l'influencent. Ces principes sont traduits mathématiquement par des équations de transport de fonctions scalaires qui prennent la forme générale d'une équation de convection-diffusion de  $\phi$ .

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \nabla \cdot (\rho U \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \text{ grad} \phi) + S \quad (4.1)$$

Les quatre termes de cette équation sont le terme instationnaire, le terme de convection, de diffusion, et enfin le terme source.

#### 4.2.2. Conditions aux limites :

##### 4.2.2.1. Conditions à la paroi :

Les conditions à la paroi imposées sur la variable scalaire  $\phi$  sont :

- Condition de Dirichlet appliquée sur  $S_\phi$  :

$$\phi = \phi_s \quad (4.2)$$

avec  $S_\phi$  la surface où  $\phi$  est imposé. Pour un écoulement laminaire, les conditions d'imperméabilité et de non-glissement sont appliquées sur les composantes de la vitesse comme suit :  $u = v = 0$ .

- Condition de Neumann appliquée sur  $S_f$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_s \quad (4.3)$$

avec  $S_f$  la surface où le flux  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  est imposé et  $n$  la normale de  $S_f$ .

- Condition de Neumann adiabatique dans le cas d'un plan de symétrie, ou d'une frontière isolée.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (4.4)$$

#### 4.2.2.2. Conditions à l'entrée :

Le champ de vitesse est imposé à l'entrée sous la forme d'un profil plat ou d'un profil développé :

$$\begin{cases} u = u_{\text{entrée}} \\ v = v_{\text{entrée}} \end{cases} \quad (4.5)$$

#### 4.2.2.3. Conditions à la sortie :

On annule le flux de chaque variable transportée suivant la direction principale de l'écoulement; on suppose que l'écoulement est établi en posant :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (4.6)$$

### 4.3. Méthodes des volumes finis:

La simulation numérique des équations qui régissent les écoulements se déroule en deux étapes principales :

- la subdivision du domaine de calcul.
- la discrétisation des équations de base.

### 4.3.1. Discrétisation spatiale du domaine :

Le calcul effectué utilise un espace divisé en éléments quadrilatéraux uniformes (figure 4.1). Ces éléments constituent des volumes de contrôle (surface hachurée) permettant de traiter l'équation générale de  $\phi$ . Une fois la discrétisation spatiale effectuée, toutes les variables  $\phi$  de l'équation générale sont stockées au centre des éléments au point P. Les points E et W (est et west) sont ses voisins dans la direction x, alors que les points N et S (nord et sud) sont ses voisins dans la

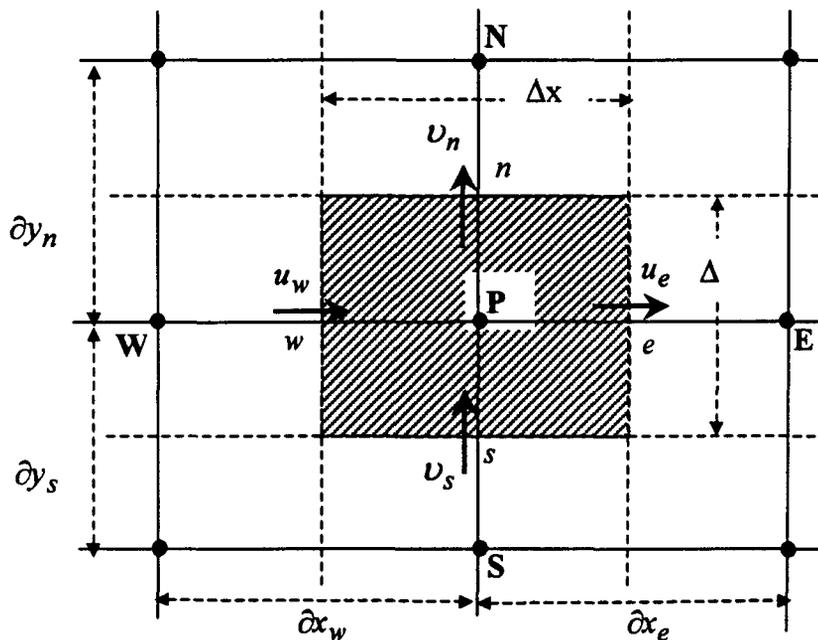


Figure 4.1 : Volume de contrôle pour un milieu bidimensionnel

direction  $y$ . La surface du volume de contrôle est  $\Delta x \Delta y$ . Ces faces sont situées entre les points voisins du point  $P$ .  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse dans la direction  $x$  et  $y$ .

En volume finis, pour remédier au problème provoqué lors du couplage entre la vitesse et la pression lorsqu'ils sont placés au même nœud de calcul, Patankar<sup>[20]</sup> a utilisé le schéma à maillage décalé pour les deux composantes de la vitesse. Ceci permet ainsi une interprétation physique des termes qui interviennent lors de la discrétisation des équations.

En fait, les deux composantes de la vitesse sont calculées sur les faces du volume de contrôle de  $\phi$ . Dans la direction  $x$ , la vitesse  $u$  est calculée au milieu des faces normales de la direction  $x$  (figure 4.2). On peut noter que la localisation de la vitesse est décalée dans

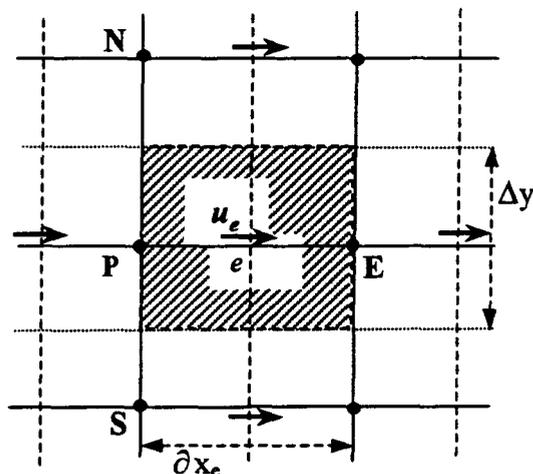


Figure 4.2 : Volume de contrôle pour  $u$

la direction  $x$ . La même procédure est utilisée pour la vitesse  $v$  dans la direction  $y$  (figure 4.3).

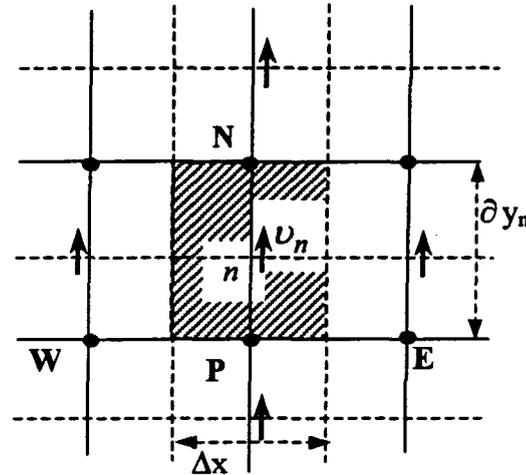


Figure 4.3 : Volume de contrôle pour  $v$

#### 4.3.2. Discrétisation de l'équation gouvernante :

En intégrant l'équation de continuité sur le volume de contrôle de  $\phi$  montré sur la figure 4.1, on obtient l'équation discrétisée suivante :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (4.7)$$

où  $F_e$ ,  $F_w$ ,  $F_n$ ,  $F_s$  sont les flux convectifs sur les faces du volume de contrôle. Ils s'écrivent comme suit :

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y, F_w = (\rho u)_w \Delta y \quad (4.8a)$$

$$F_n = (\rho v)_n \Delta x, F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad (4.8b)$$

L'intégration de l'équation gouvernante de  $\phi$  sur le volume de contrôle correspondant donne :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (4.9)$$

les  $a_P$ ,  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  sont les coefficients reliés aux points P, E, W, N, S respectivement, ils sont donnés par :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\|, \quad (4.10a)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|F_w, 0\|, \quad (4.10b)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|, \quad (4.10c)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|F_s, 0\|, \quad (4.10d)$$

$$a_P^o = \frac{\rho_P^o \Delta x \Delta y}{\Delta t}, \quad (4.10e)$$

$$b = S_c \Delta x \Delta y + a_P^o \phi_P^o, \quad (4.10f)$$

$$\text{et } a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^o - S_P \Delta x \Delta y \quad (4.10g)$$

Les conductances correspondantes sont :

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\partial x)_e}, \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\partial x)_w} \quad (4.11a)$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\partial y)_n}, \quad D_s = \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\partial y)_s} \quad (4.11b)$$

et les nombres de Peclet sont :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e}, P_w = \frac{F_w}{D_w}, P_n = \frac{F_n}{D_n}, P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (4.12)$$

**Schéma de convection :**

\* La variable  $\phi$  à l'interface d'un volume de contrôle a été déterminé en utilisant le schéma *upwind* (figure 4.4). Cette dernière présente une interpolation de premier ordre entre les points voisins de cette interface. En effet la valeur de  $\phi_e$  prend la valeur de  $\phi_p$  si  $F_e$  est positive, et la valeur de  $\phi_E$  si  $F_e$  est négative.

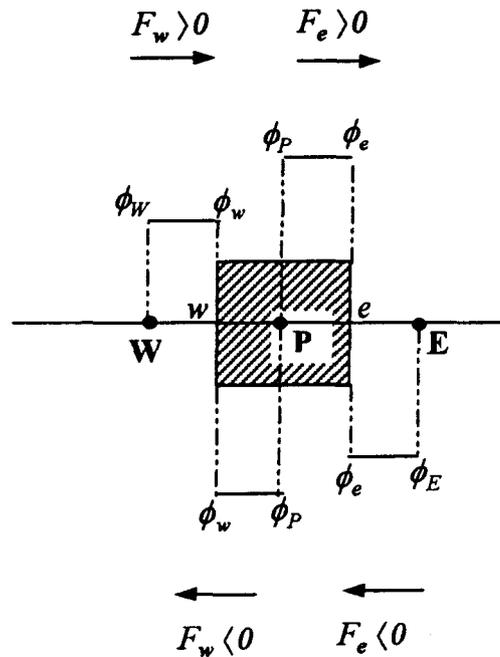


Figure 4.4 : Schéma de l'interpolation géométrique.

#### 4.4. Solution numérique et algorithme :

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar <sup>[20]</sup> a été utilisé dans ce travail de maîtrise pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked). Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées.

À partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER était basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

##### 4.4.1. Méthode numérique :

L'équation résultante de la discrétisation des équations de quantité de mouvement s'écrit :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_P - p_E) A_e \quad (4.13)$$

où  $a_{nb}$  sont les coefficients correspondant aux vitesses des voisins  $u_{nb}$ .  $A_e$  est l'aire de la face sur laquelle est calculée la vitesse  $u_e$ .

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit :

$$\begin{cases} \hat{u}_e = (\sum a_{nb} u_{nb} + b)/a_e \\ \hat{v}_n = (\sum a_{nb} v_{nb} + b)/a_n \end{cases}$$

On définit les pseudo-vitesses  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  par :

$$\begin{cases} u_e = \hat{u}_e + d_e(p_P - p_E) \\ v_n = \hat{v}_n + d_n(p_P - p_N) \end{cases} \quad (4.14)$$

Ces pseudo-vitesses sont utilisées pour résoudre l'équation de continuité afin d'obtenir le champ de pression. L'équation résultante s'écrit sous la forme suivante :

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (4.15)$$

où  $p_P, p_E, p_W, p_N, p_S$  représentent les pressions correspondant aux points  $P, E, W, N$  et  $S$ .

avec :

$$b = \frac{\rho_P^o - \rho_P}{\Delta t} \Delta x \Delta y + [(\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e] \Delta y + [(\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_n] \Delta x \quad (4.16)$$

À partir du champ de pression obtenu  $p^*$ , on résout les équations de quantité de mouvement pour obtenir  $u^*$  et  $v^*$  :

$$\begin{cases} u_e^* = \hat{u}_e + d_e(p_P^* - p_E^*) \\ v_n^* = \hat{v}_n + d_n(p_P^* - p_N^*) \end{cases} \quad (4.17)$$

On utilise ce champ de vitesse dans la résolution de l'équation de continuité pour obtenir la pression de correction  $p'$ . L'équation de cette dernière s'écrit sous la même forme que l'équation de la pression :

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b' \quad (4.18)$$

avec :

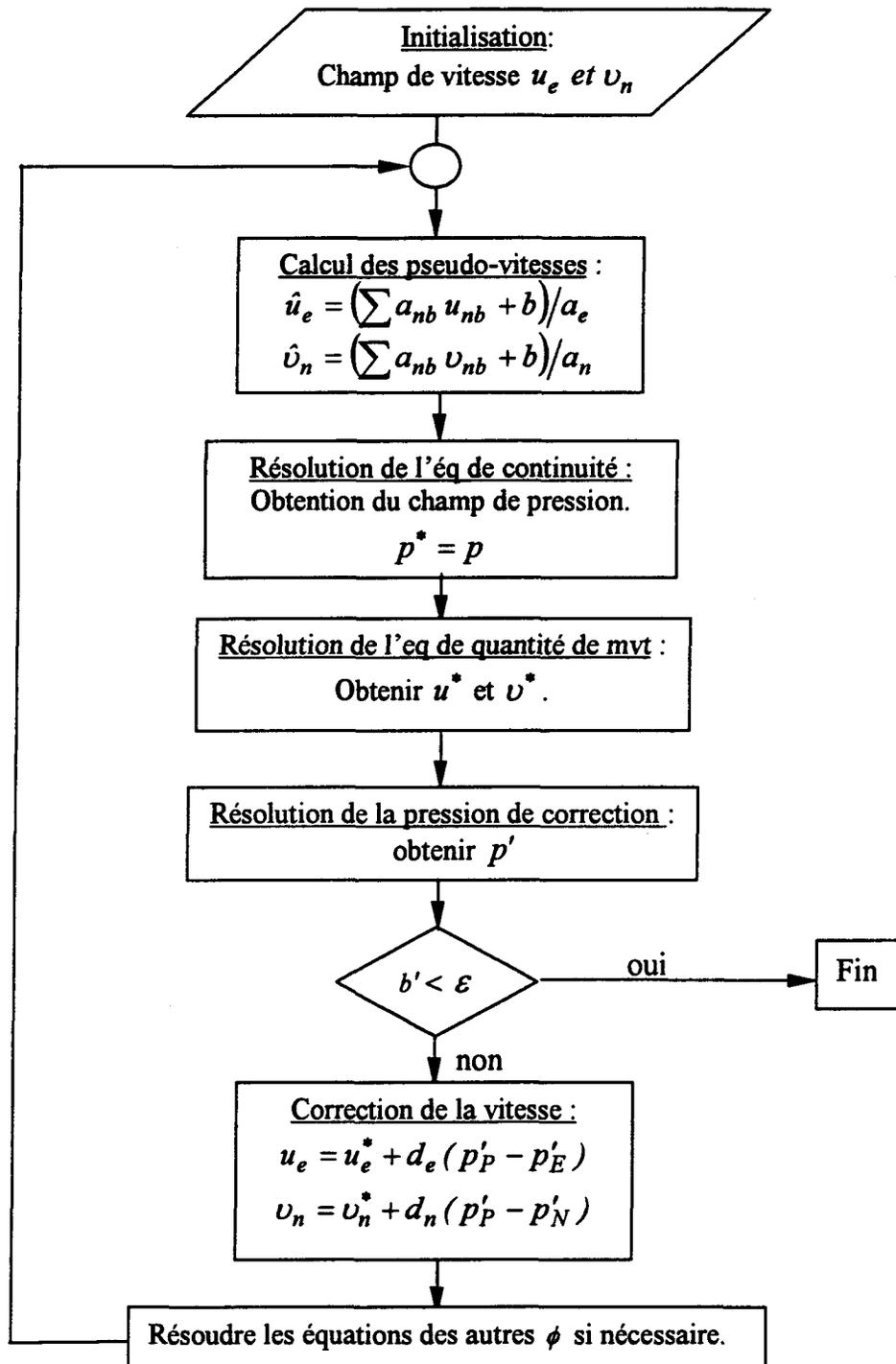
$$b' = \frac{(\rho_P^o - \rho_P) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_s - (\rho v^*)_n] \Delta x \quad (4.19)$$

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de  $b'$  s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source  $b'$  soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de  $p'$  n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source  $b'$  est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

#### 4.4.2. Algorithme :

L'algorithme de la méthode numérique est montré ci-dessous :



## 4.5. Résultats :

L'algorithme ainsi développé va être appliqué pour résoudre deux problèmes d'écoulement, il s'agit de l'écoulement de Couette qui est un écoulement de translation plan, et l'écoulement de convection naturelle à l'intérieur d'une cavité rectangulaire fermée. Le problème d'une cavité rectangulaire a été déjà traité en rayonnement (chapitre 3) dans le cas d'un équilibre radiatif, et il présente aussi un test dans le cas de la convection naturelle.

### 4.5.1. Écoulement de Couette :

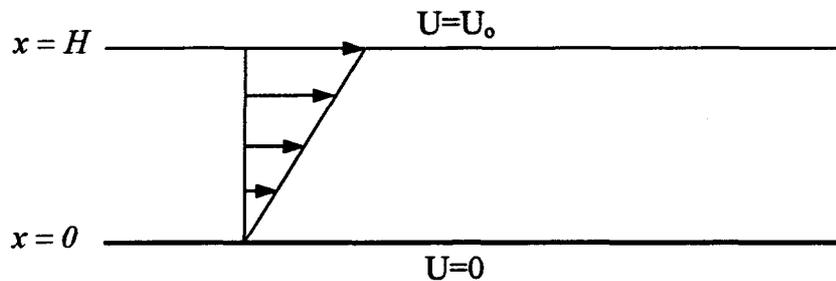


Figure 4.5 : Définition du problème de Couette

#### Description du problème :

Le premier problème choisi est un écoulement visqueux, incompressible en régime stationnaire entre deux plaques parallèles infinies séparées par une distance  $H$ . La plaque inférieure est immobile alors que l'autre est mise en translation à la vitesse  $U_0$ . Cet

écoulement est connu comme l'écoulement de Couette plan, et il présente un écoulement de cisaillement simple.

**Conditions aux limites :**

$$\begin{cases} u(x=0, y) = 0 \\ u(x=H, y) = U_o \end{cases} \quad (4.20)$$

**Équations à traiter :**

- Conservation de la masse :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (4.21a)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (4.20b)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{dp}{dy} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (4.20c)$$

**Analyse :**

Ce cas est traité pour  $Re = 2000$  (laminaire), et comparé avec la solution générée par FIDAP 7.0 [FIDAP 7.0] (Fluid Dynamics Analysis Package). Ce dernier est un logiciel commercial utilisé pour la résolution des problèmes d'écoulement avec la méthode des éléments finis. La figure 4.6 donne l'allure du champ de vitesse. Le profil de

vitesse est donné à la figure 4.7 pour une position  $x$  constante; on voit bien que les résultats obtenus et ceux donnés par FIDAP 7.0 sont en bon accord.

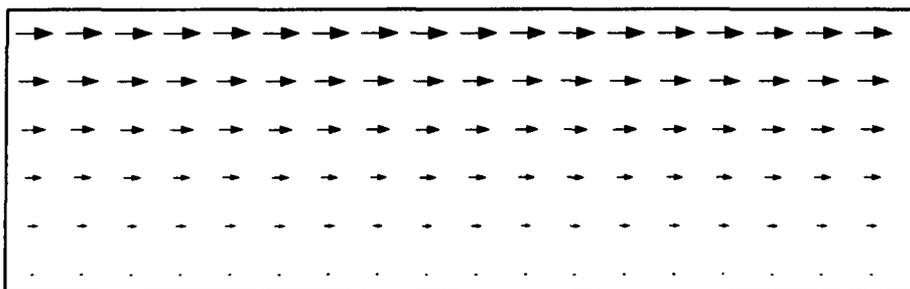


Figure 4.6 : Champ de vitesse

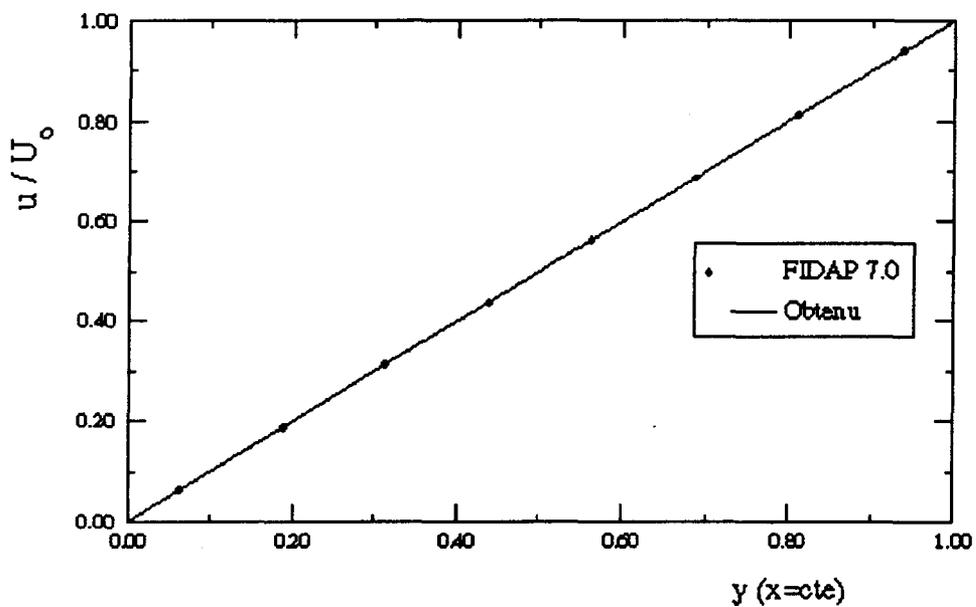


Figure 4.7 : Profil de la vitesse pour  $Re = 2000$

#### 4.5.2. Écoulement de convection naturelle :

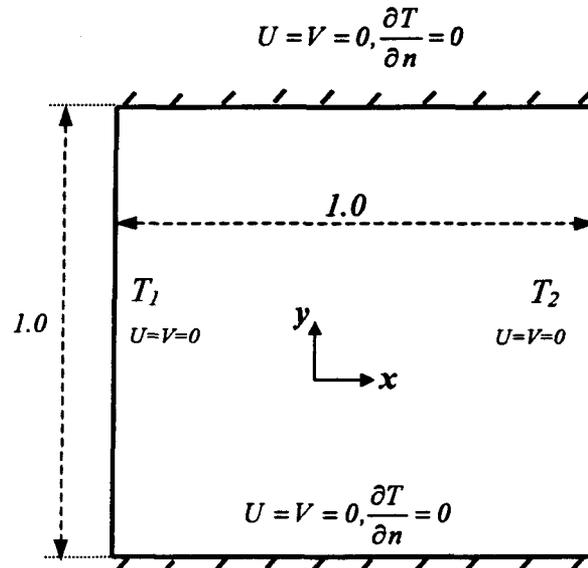


Figure 4.8 : Définition du problème de la convection naturelle à l'intérieur d'une cavité rectangulaire fermée.

#### Description du problème :

Ce problème consiste à décrire l'écoulement à l'intérieur d'une cavité rectangulaire fermée, dont l'origine est due à la convection naturelle produite à partir du gradient de la température. Ce cas constitue un test pour évaluer la performance de l'algorithme développé.

Il est schématisé à la figure 4.8. La cavité a une longueur caractéristique  $L=1$ , avec deux parois adiabatiques. Les parois droite et gauche sont maintenues à des températures

$T_2$  et  $T_1$  respectivement. On suppose que le fluide est incompressible avec des propriétés constantes.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- Conditions d'imperméabilité et de non-glissement :

$$\begin{cases} u(x=0, y) = v(x=0, y) = 0 \\ u(x=L, y) = v(x=L, y) = 0 \\ u(x, y=0) = v(x, y=0) = 0 \\ u(x, y=L) = v(x, y=L) = 0 \end{cases} \quad (4.22a)$$

- Condition d'isothermie (condition de Dirichlet) :

$$\begin{cases} T(x=0, y) = T_1 \\ T(x=L, y) = T_2 \end{cases} \quad (4.21b)$$

- Condition d'adiabaticité (condition de Newmann) :

$$\begin{cases} q(x, y=0) = 0 \\ q(x, y=L) = 0 \end{cases} \quad (4.21c)$$

### Approximation de Boussinesq :

Le terme qui génère le mouvement du fluide est dû à la différence de la densité volumique  $\rho_{ref} - \rho$ .

où  $\rho_{ref}$  représente la densité volumique de référence.

Par définition le coefficient d'expansion volumique à pression constante est :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_{ref}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (4.23)$$

Dans le cas des variations faibles de  $\rho$ ,  $\beta$  est approximé par

$$\beta = -\frac{1}{\rho_{ref}} \left( \frac{\rho - \rho_{ref}}{T - T_{ref}} \right)_p, \text{ donc :}$$

$$\rho_{ref} - \rho = \rho_{ref} \beta (T - T_{ref}) \approx \rho \beta (T - T_{ref}) \quad (4.24)$$

Cette approximation est appelée l'approximation de Boussinesq. En l'appliquant, on obtient les équations de quantité de mouvement suivantes :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \beta (T - T_{ref}) \quad (4.25a)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \beta (T - T_{ref}) \quad (4.24b)$$

La température de référence choisie est  $T_{ref} = 0 \text{ K}$ .

### Équations adimensionnées à résoudre :

Dans le cas de la convection naturelle, les équations de quantité de mouvement d'énergie sont couplées. Pour la résolution de ce problème, on a utilisé les paramètres adimensionnés suivants :

Vitesse de référence choisie :

$$U_{ref} = \frac{\alpha}{L} \sqrt{Ra Pr} \quad (4.26a)$$

où  $\alpha$  est la diffusivité thermique en  $m^2/s$ .

Variabes adimensionnées :

$$u^+ = \frac{u}{U}, \quad x^+ = \frac{x}{L}, \quad T^+ = \frac{(T - T_{ref})}{(T_2 - T_{ref})}, \quad p^+ = \frac{pL}{\mu U} \quad (4.27a)$$

$$\text{avec } Ra = \frac{\rho \beta g (T_2 - T_1) L^3}{\mu \alpha} \quad \text{et } Pr = \frac{\mu c_p}{\alpha} \quad (4.27b)$$

ainsi les équations finales à traiter sont :

$$\frac{du^+}{dx^+} + \frac{dv^+}{dy^+} = 0 \quad (4.28a)$$

$$\sqrt{\frac{Ra}{Pr}} u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right) + \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} T^+ \quad (4.28b)$$

$$\sqrt{\frac{Ra}{Pr}} u^+ \frac{\partial v^+}{\partial x^+} + \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} v^+ \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial y^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \frac{\partial v^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \frac{\partial v^+}{\partial y^+} \right) + \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} T^+ \quad (4.28c)$$

$$\sqrt{\frac{Ra}{Pr}} u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} v^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \frac{\partial T^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left( \frac{\partial T^+}{\partial y^+} \right) \quad (4.28d)$$

### **Résultats :**

Ce cas est traité pour les nombres de Rayleigh suivants  $Ra=10^3, 10^4, 10^5$  et  $10^6$  avec  $Pr=0.71$ .

Le nombre de Grashof  $Gr = Ra Pr$ , remplace le nombre de Reynolds en convection naturelle, et il nous indique le régime de l'écoulement. Dans tous les cas traités le régime est laminaire (puisque'il est inférieur à  $10^8$  où commence le régime transitoire).

Les températures aux limites choisies sont les suivantes :  $T_1 = T_{ref} = 0$ , et  $T_2 = 1$ .

• Champs de températures et de vitesses :

Les champs de températures et de vitesses sont montrés aux figures 4.9, 4.10 et

4.11. Pour  $Ra = 10^3$  et  $Ra = 10^4$  les champs de vitesses sont parfaitement symétriques.

Lorsque  $Ra$  atteint  $10^5$  les changements physiques suivants se produisent :

- Une seconde recirculation commence à se former, figure 4.9(c).
- Un gradient de température très important au voisinage des murs; en effet

les isothermes deviennent très proches, figure 4.11(c).

- Les vitesses deviennent plus élevées dans les coins de la cavité, figure 4.9

(c).

Et l'intensité de tous ces phénomènes augmente lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

Le profil des vitesses horizontales est montré aux figures 4.12 et 4.13 pour  $x = 0.5$ , celui des vitesses verticales aux figures 4.14 et 4.15 pour  $y = 0.5$ . Les températures sont présentées aux figures 4.16 et 4.17 pour  $y = 0.5$ .

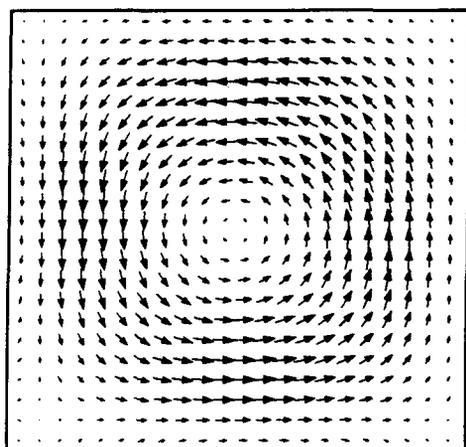
Les caractéristiques de la couche limite deviennent plus importantes lorsque le nombre de Rayleigh augmente. En effet on remarque que la composante verticale de la vitesse augmente lorsque le nombre de Rayleigh augmente. Lorsque  $Ra = 10^3$  sa valeur absolue est environ 0.139, et lorsque  $Ra = 10^6$  elle prend la valeur 0.275 (figures 4.14 et 4.15). Néanmoins la vitesse horizontale diminue lorsque  $Ra$  augmente, en fait pour

$Ra=10^3$  sa valeur absolue est environ 0.13 et lorsque  $Ra=10^6$  elle prend la valeur 0.085 (figure 4.12 et 4.13).

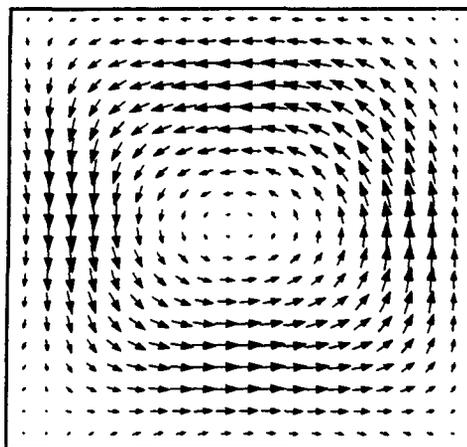
Pour la température sa distribution est linéaire lorsque  $Ra$  est faible ( $10^3$ ) et lorsqu'il augmente ( $10^6$ ), on voit un fort gradient de température au voisinage des faces isothermes et son profil devient stratifié (figure 4.10(c)). Celui-ci est dû à la décharge horizontale du fluide plus chaud provenant de la couche limite. En effet le fluide chaud se déplace de la paroi vers l'intérieur de la cavité en se mettant au dessus du fluide froid sous forme de couche horizontale.

Selon les figures 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15, les profils des deux composantes de la vitesse comparés avec ceux donnés par FIDAP sont les mêmes, sauf pour celui de la vitesse horizontale  $u$  à la figure 4.13b qui est plus courbé au centre que celui de FIDAP. On remarque aussi que les valeurs numériques des vitesses obtenues lorsque  $Ra$  atteint  $10^5$  ou plus sont légèrement plus grandes que ceux de FIDAP.

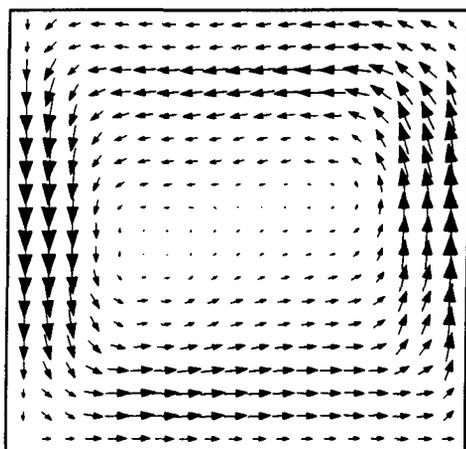
Pour le profil de la température donné aux figures 4.16 et 4.17, on voit qu'il est très similaire à celui donné par FIDAP.



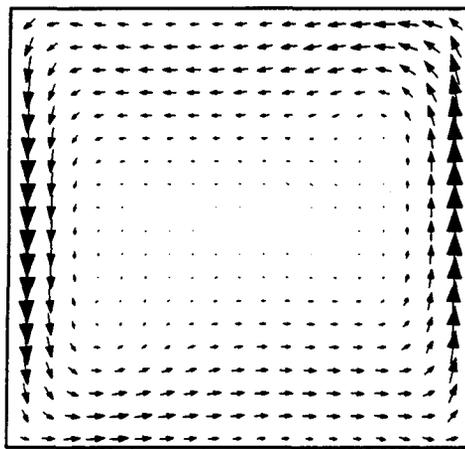
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4.9 : Le champ de vitesse adimensionnée, (a)  $Ra=10^3$ , (b)  $Ra=10^4$ , (c)  $Ra=10^5$ , (d)  $Ra=10^6$

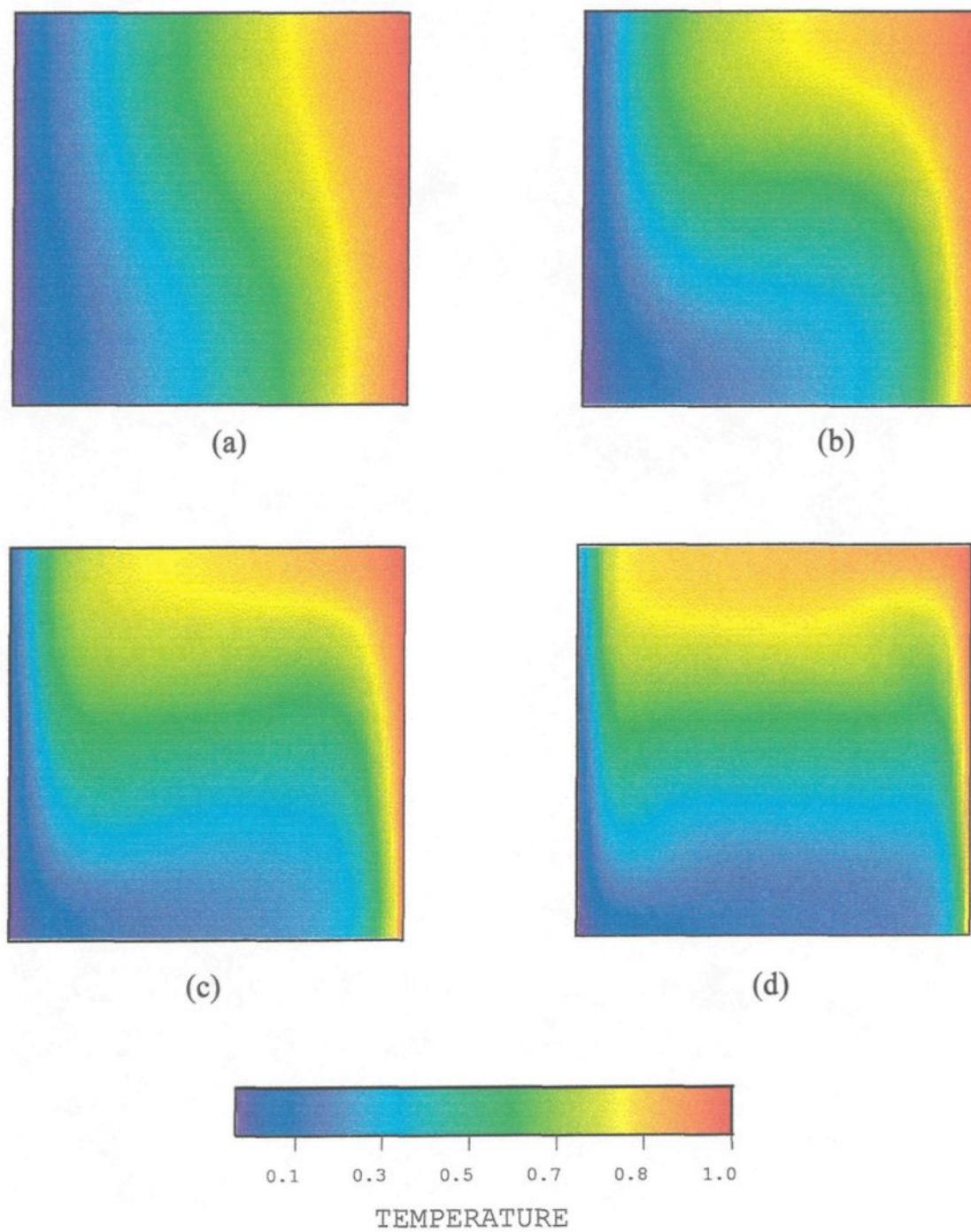
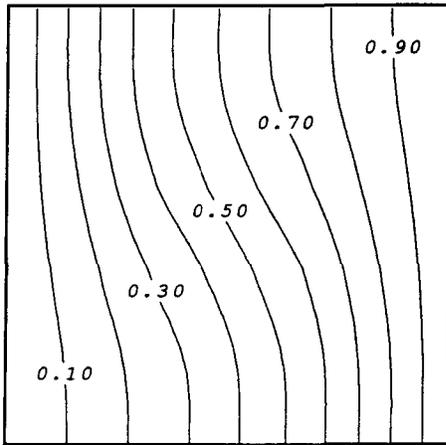
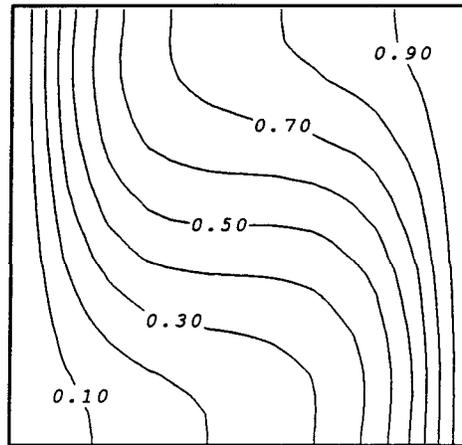


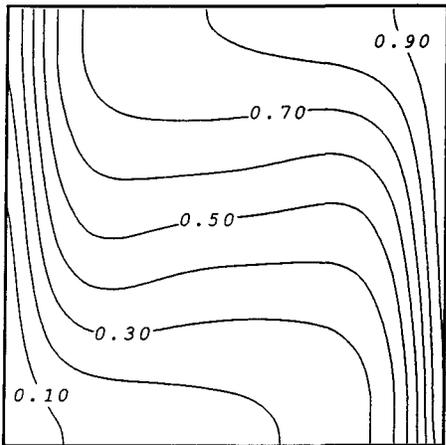
Figure 4.10 : Champ de température, (a)  $Ra=10^3$ , (b)  $Ra=10^4$ , (c)  $Ra=10^5$ , (d)  $Ra=10^6$



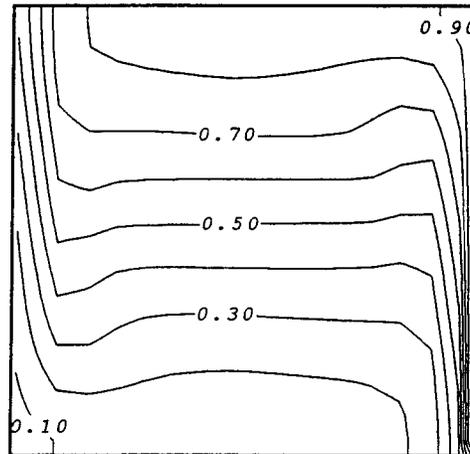
(a)



(b)

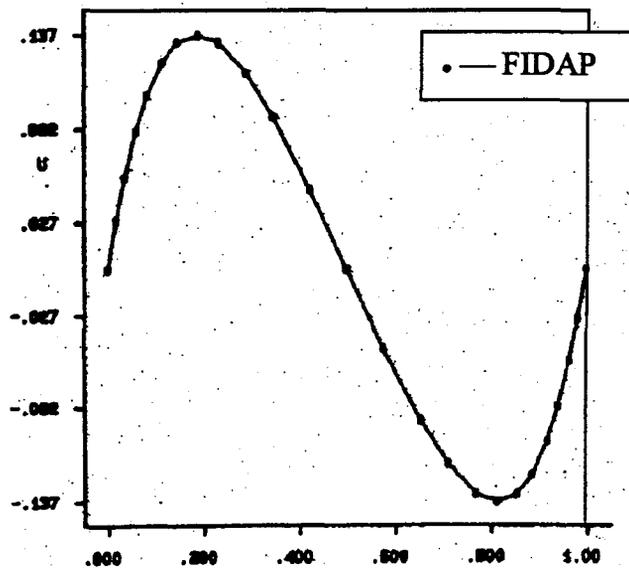
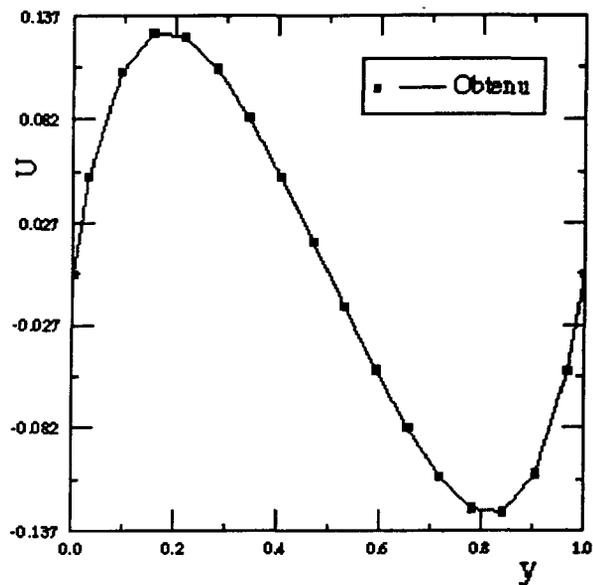


(c)

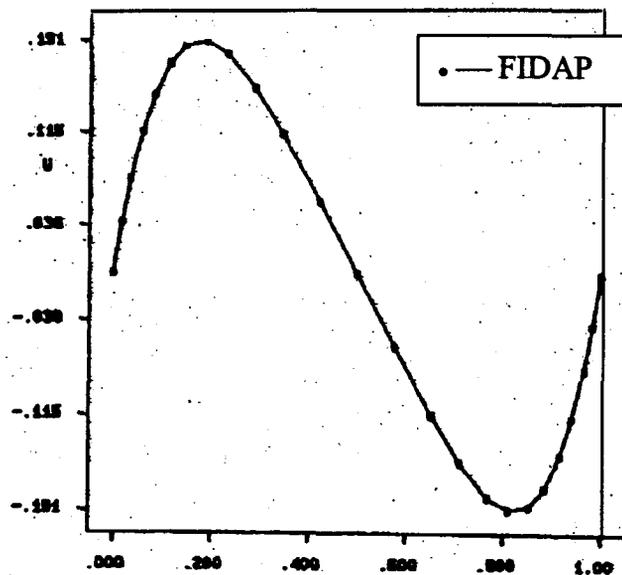
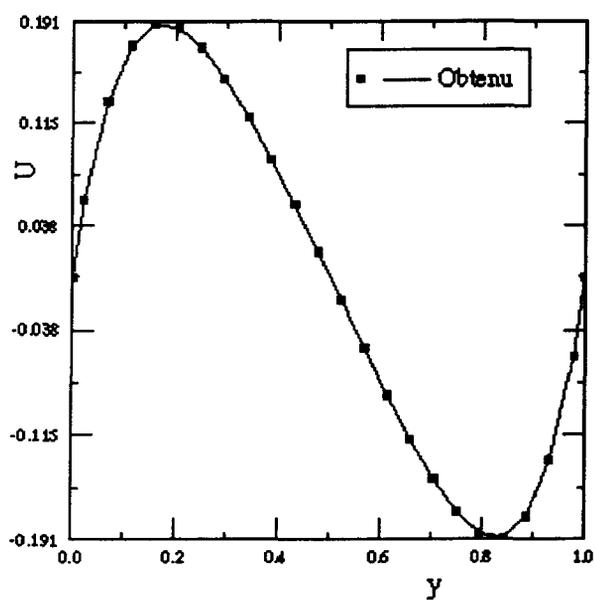


(d)

Figure 4.11 : Les isothermes adimensionnés, (a)  $Ra=10^3$ , (b)  $Ra=10^4$ , (c)  $Ra=10^5$ , (d)  $Ra=10^6$

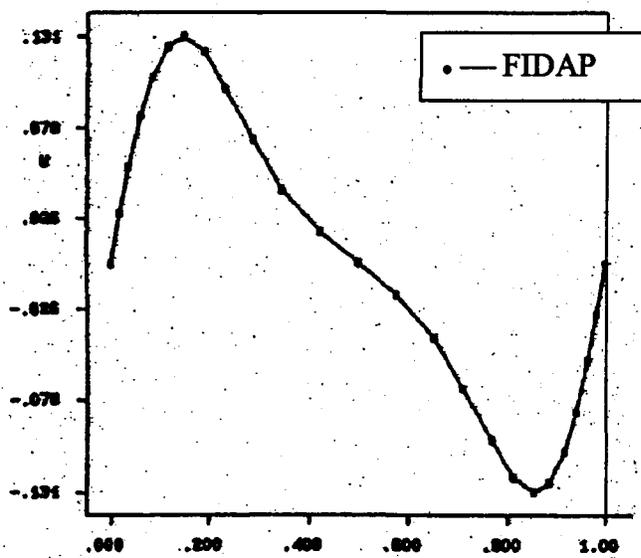
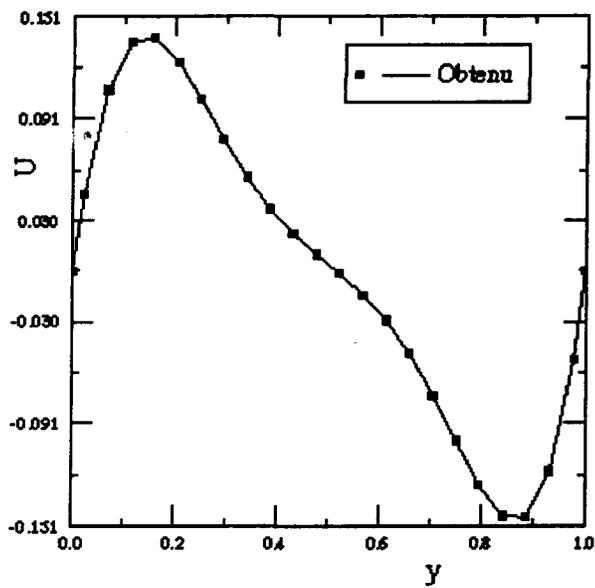


(a)

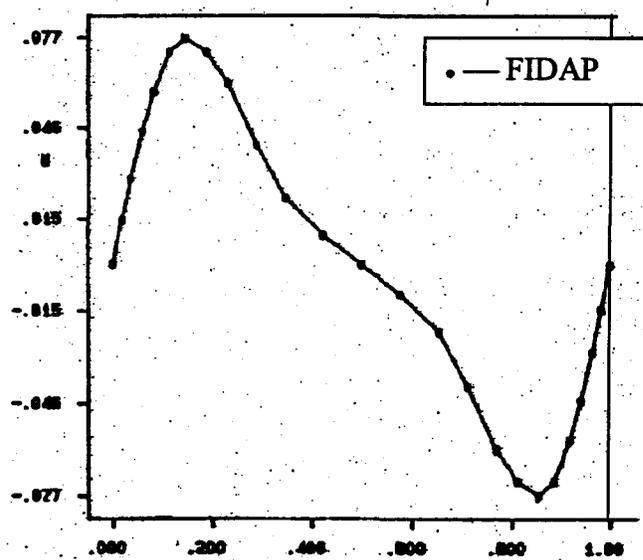
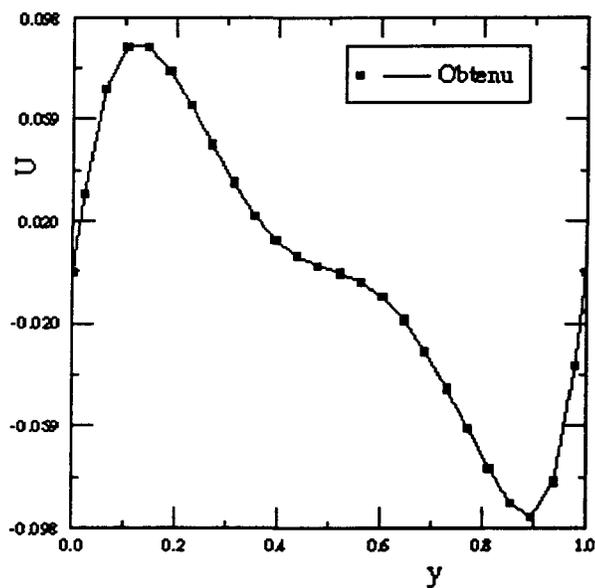


(b)

Figure 4.12 : Vitesse horizontale adimensionnée à  $x=0.5$ , (a)  $Ra=10^3$ , (b)  $Ra=10^4$



(a)



(b)

Figure 4.13 : Vitesse horizontale adimensionnée à  $x=0.5$ , (a)  $Ra=10^5$ , (b)  $Ra=10^6$

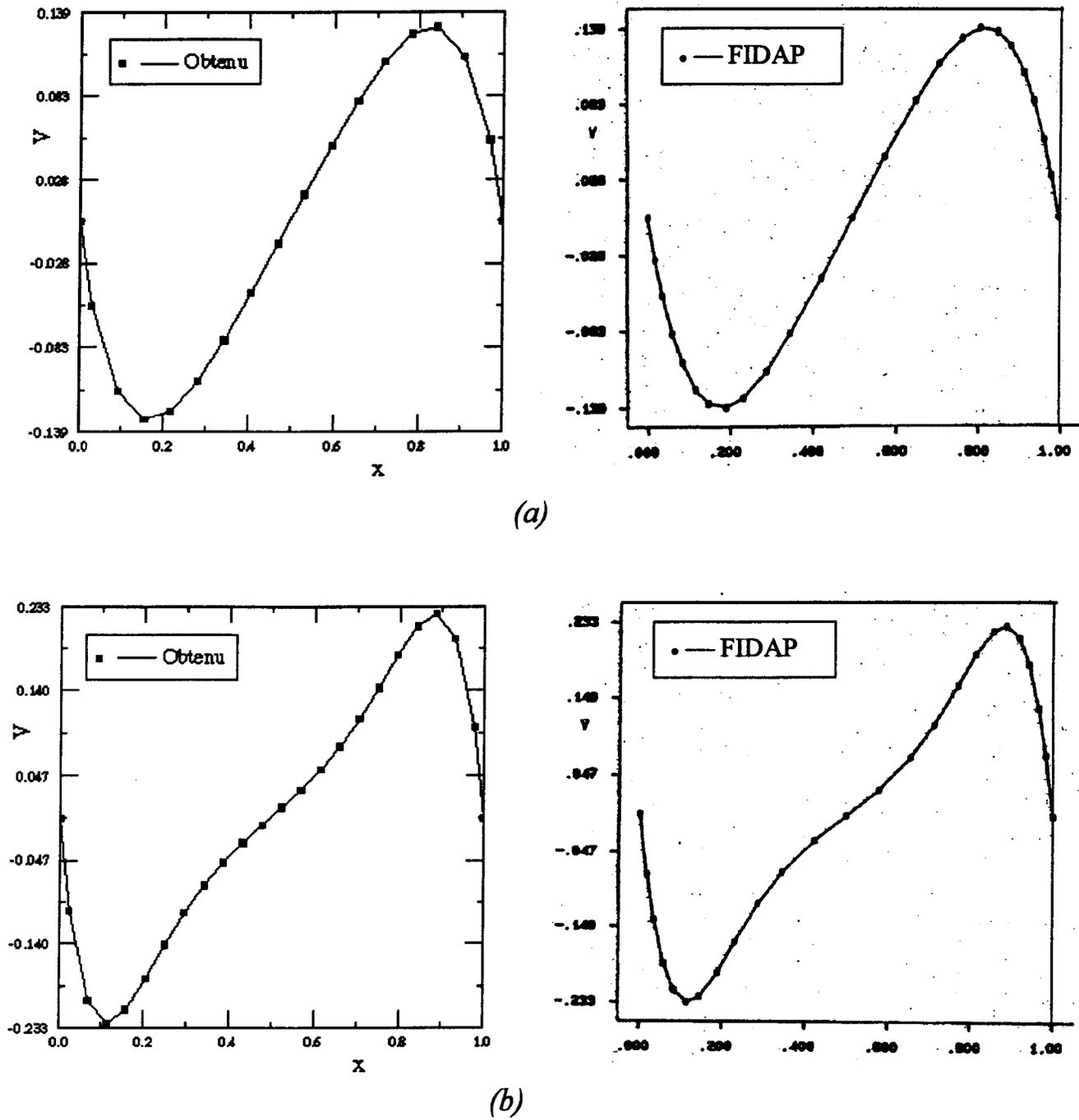
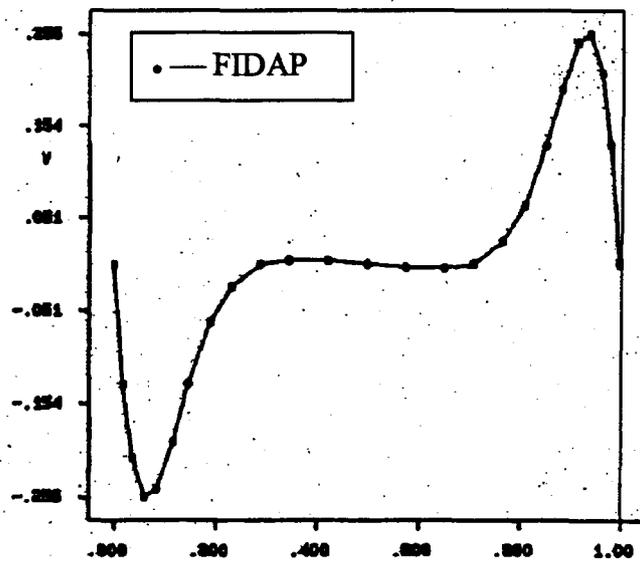
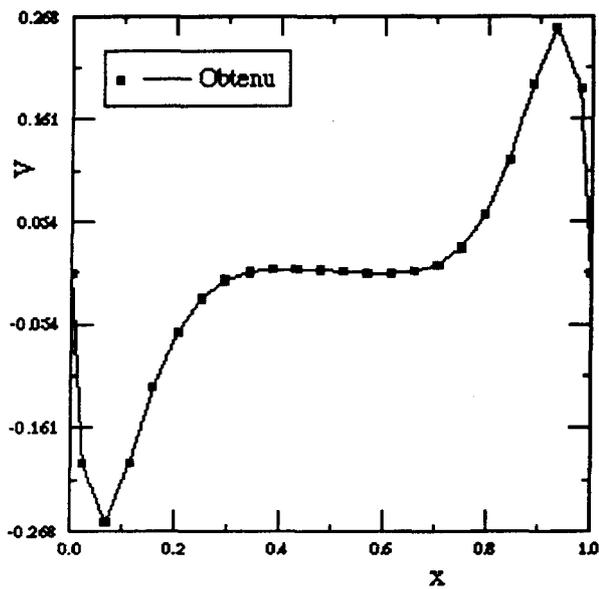
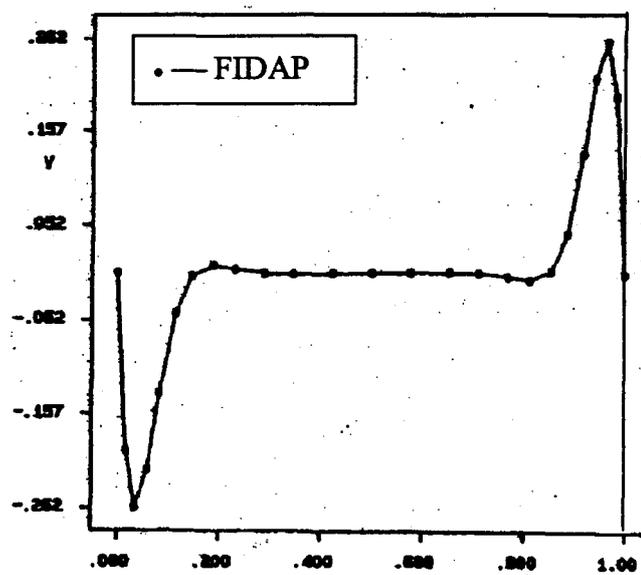
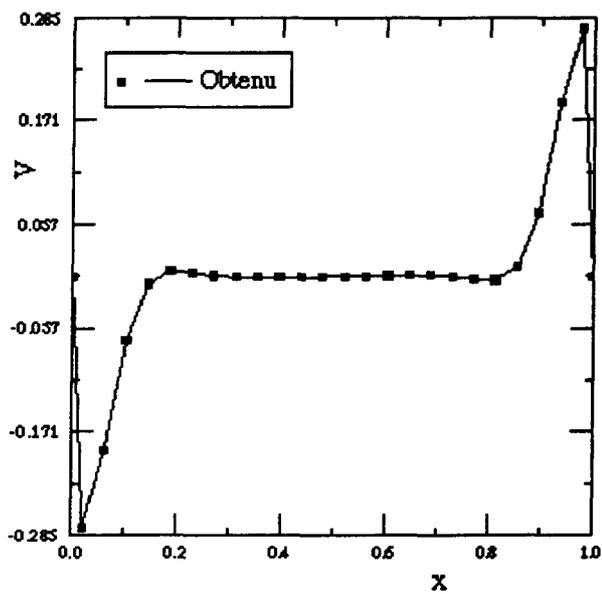


Figure 4.14 : Vitesse verticale adimensionnée à  $y=0.5$ , (a)  $Ra=10^3$ , (b)  $Ra=10^4$

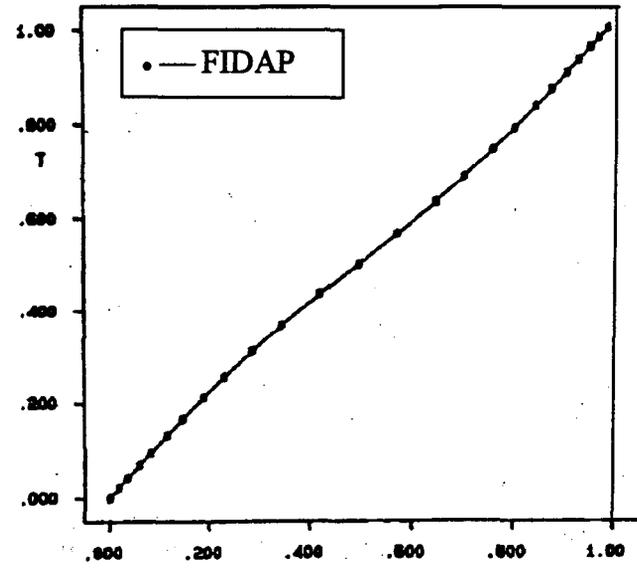
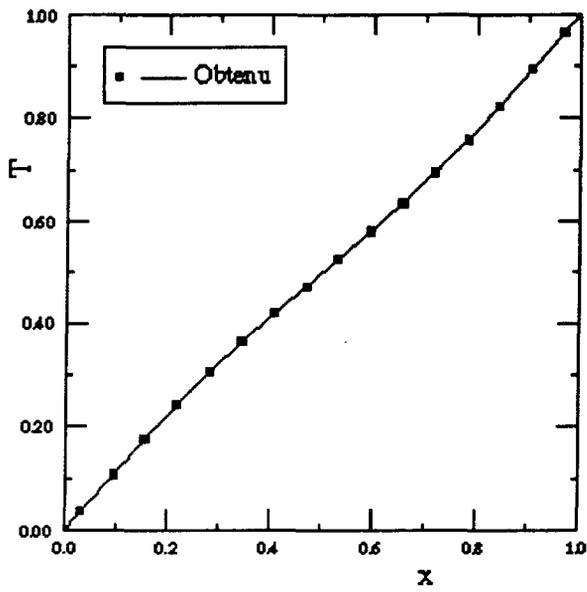


(a)

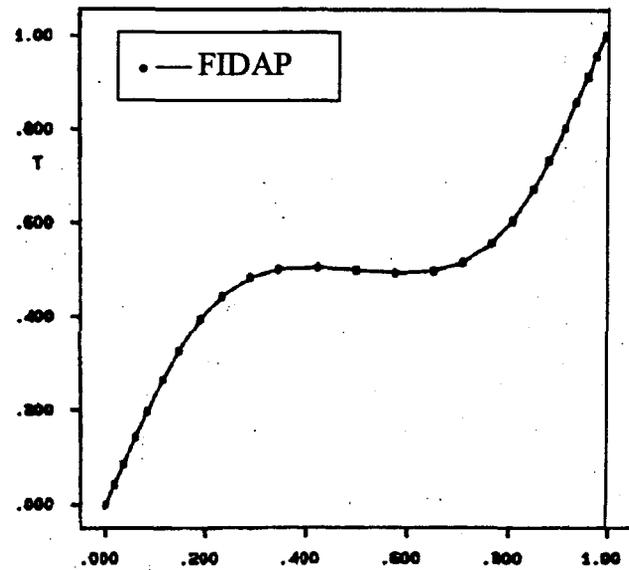
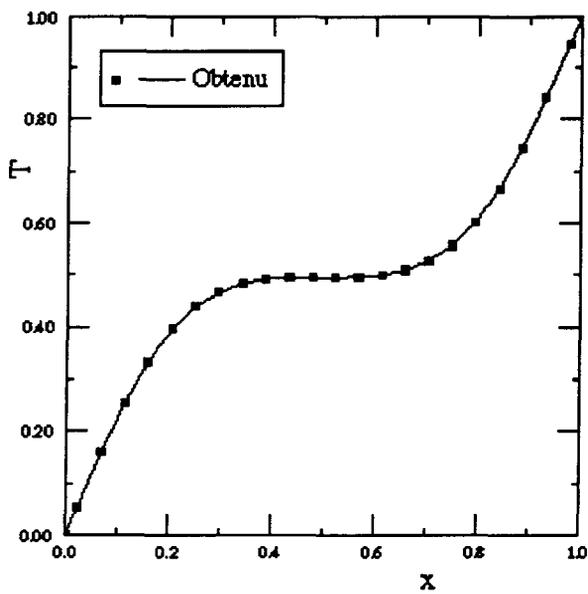


(b)

Figure 4.15 : Vitesse verticale adimensionnée à  $y=0.5$ , (a)  $Ra=10^5$ , (b)  $Ra=10^6$



(a)



(b)

Figure 4.16 : Profil de la température adimensionnée à  $y=0.5$ , (a)  $Ra=10^3$ , (b)  $Ra=10^4$

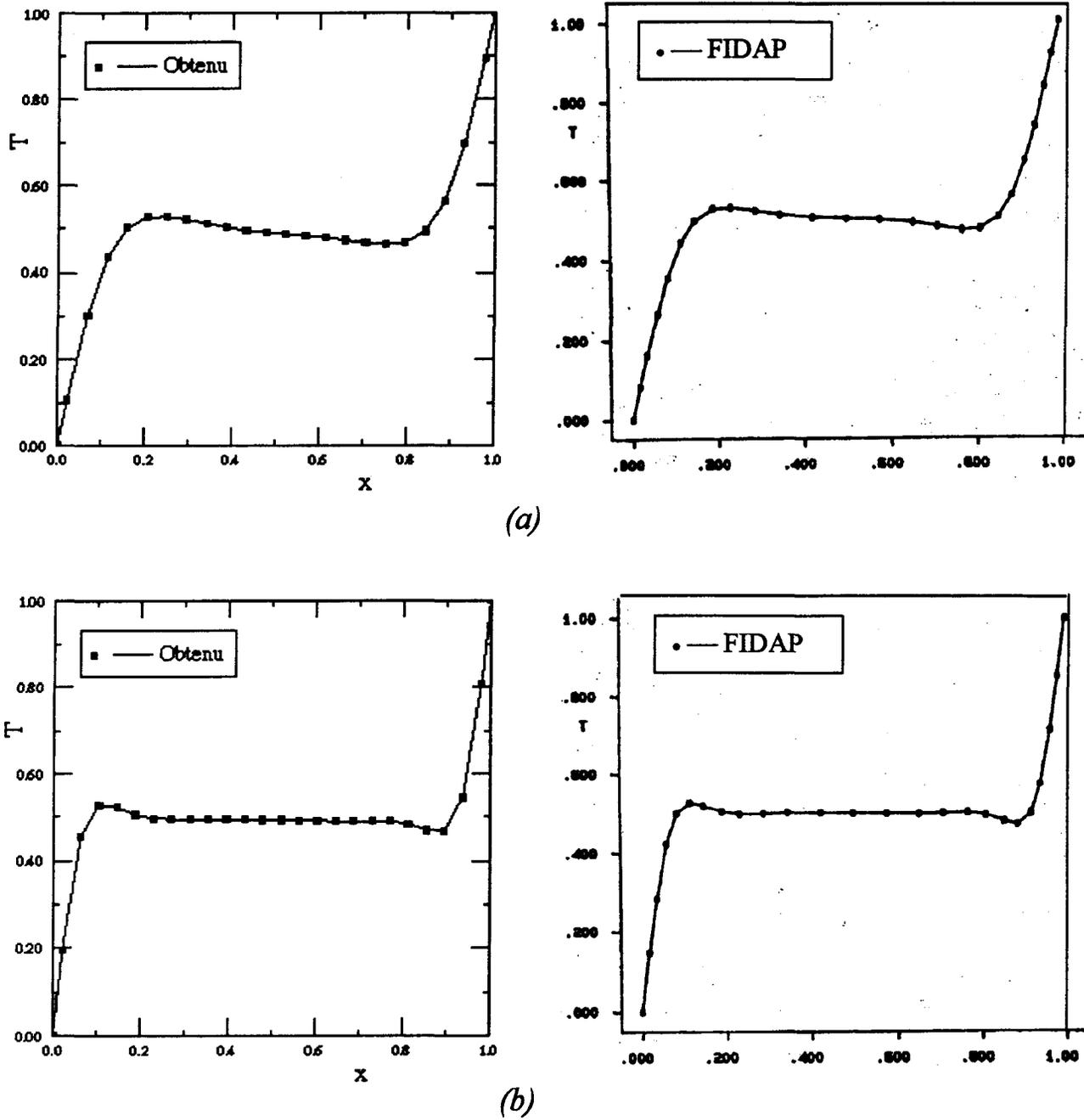


Figure 4.17 : Profil de la température adimensionnée à  $y=0.5$ , (a)  $Ra=10^5$ , (b)  $Ra=10^6$

## **4.6. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons développé un algorithme de résolution des équations différentielles gouvernant l'écoulement d'un fluide incompressible en régime laminaire dans le cas stationnaire. Pour valider ce travail, on a appliqué l'algorithme à des problèmes tests et on a comparé nos résultats avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

Cet algorithme nous permet maintenant de traiter le couplage du rayonnement et de la convection, ce que nous présentons au chapitre suivant.

## **Chapitre : 5**

### **5. Couplage entre le rayonnement et la convection naturelle**

## **5.1. Introduction :**

La combinaison du rayonnement avec les autres modes de transfert ou avec la combustion est très importante dans de nombreuses applications techniques et industrielles, notamment dans les fours et les chambres de combustion. C'est la raison pour laquelle beaucoup d'efforts ont été consacrés pour étudier ce phénomène.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'interaction entre la convection naturelle et le rayonnement dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle, avec deux faces isothermes et les deux autres adiabatiques. Nous utiliserons la méthode des ordonnées discrètes pour résoudre le problème radiatif.

## **5.2. Méthodes numériques utilisées en couplage :**

Dans les problèmes de couplage, le modèle radiatif le plus utilisé est la méthode P1 à cause de sa simplicité et sa facilité de mise en œuvre. Elle a été utilisée notamment par Lauriat <sup>[25]</sup>, dans le cas d'un problème convectif avec un milieu gris non-diffusant. Elle a aussi été utilisée en couplage convectif par Draoui <sup>[26]</sup> en association avec l'algorithme Simpler, et par Bouallou <sup>[27]</sup> avec une formulation en différences finies pour la convection. Fusegi et Farouk <sup>[28]</sup> ont appliqué la méthode P1 associée à l'algorithme Simple pour la convection dans les cas laminaire et turbulent avec un milieu gris. En <sup>[29]</sup> ils ont réalisé une étude expérimentale pour valider les résultats numériques, mais ils n'ont trouvé qu'un accord qualitatif à cause d'une imperfection de leur montage expérimental. Par ailleurs, ils

ont constaté que la méthode P1 ne donne pas de bons résultats dans le cas d'un milieu gris, surtout pour les faibles épaisseurs optiques.

Dernièrement Yücel et al <sup>[30]</sup> ont utilisé la méthode des ordonnées discrètes conjointement à l'algorithme Simplé pour la convection. Ils ont étudié l'influence de certains paramètres comme l'épaisseur optique et l'albédo et ont comparé les résultats obtenus avec ceux fournis pour la méthode P1. Ils ont constaté que cette dernière présente des limitations, et qu'elle surestime notamment le flux radiatif sur les faces ainsi que les vitesses à l'intérieur d'une cavité. El Wakil <sup>[31]</sup> a utilisé aussi la méthode des ordonnées discrètes associée à l'algorithme Simplé. Il a également étudié l'effet du paramètre du couplage, de l'épaisseur optique ainsi que de l'albédo.

### **5.3. Description du modèle physique et hypothèses :**

On considère une cavité rectangulaire à parois imperméables, dont les deux faces est et ouest sont isothermes et les deux autres adiabatiques (figure 5.1). Elle est remplie d'un fluide semi-transparent gris, homogène et isotrope dont l'indice de réfraction est égal à l'unité. Les parois sont considérées noires.

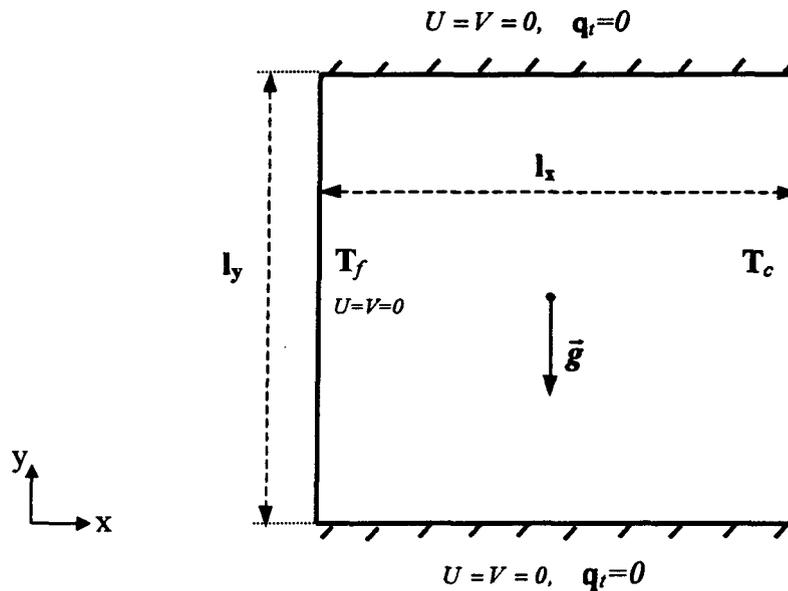


Figure 5.1 : Caractéristiques géométriques et conditions aux limites.

On considère les hypothèses suivantes :

- Le fluide est newtonien et incompressible.
- Les propriétés thermophysiques sont constantes et indépendantes de la température.
- Les conditions de l'application de l'approximation de Boussinesq sont remplies.
- La dissipation visqueuse est négligeable

## 5.4. Formulation en variables dimensionnées :

### 5.4.1. Système d'équations :

Dans ce cadre d'hypothèses, le système d'équations modélisant la convection avec le rayonnement sont les suivantes :

a) *Équation de continuité :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

b) *Équation de quantité de mouvement :*

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \beta (T - T_{ref}) \quad (5.2a)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \beta (T - T_{ref}) \quad (5.2b)$$

c) *Équation d'énergie :*

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = k \nabla^2 T - \text{div}(\bar{q}_r) \quad (5.3)$$

$\bar{q}_r$  est le flux radiatif dont la divergence est donnée par :

$$\text{div}(\bar{q}_r) = \kappa (4n^2 \bar{\sigma} T^4 - G) \quad (5.4)$$

$G$  est le rayonnement incident défini par :

$$G = \int_{\Omega=4\pi} I(s, \Omega) \Omega d\Omega \quad (5.5)$$

$I(s, \Omega)$  est la luminance radiative donnée à partir de l'équation (2.4) de la section sur le transfert radiatif.

#### 5.4.2. Conditions aux limites :

##### Conditions aux limites thermiques :

$$\text{À } x=0 \quad T=T_f \quad (5.6a)$$

$$\text{À } x=l_x \quad T=T_c \quad (5.6b)$$

$$\text{À } y=0 \quad \bar{q}_t = \bar{q}_c + \bar{q}_r = \vec{0} \quad (5.6c)$$

$$\text{À } y=l_y \quad \bar{q}_t = \bar{q}_c + \bar{q}_r = \vec{0} \quad (5.6d)$$

$T_f$  et  $T_c$  sont respectivement les températures des parois froide et chaude.

$\bar{q}_t$  est le flux total, et  $\bar{q}_c$  est le flux conductif.

##### Conditions aux limites hydrodynamiques :

$$\text{À } x=0 \quad u=0 \text{ et } v=0 \quad (5.7a)$$

$$\text{À } x=l_x \quad u=0 \text{ et } v=0 \quad (5.7b)$$

$$\text{À } y=0 \quad u=0 \text{ et } v=0 \quad (5.7c)$$

$$\text{À } y=l_y \quad u=0 \text{ et } v=0 \quad (5.7d)$$

## 5.5. Formulation en variables adimensionnées :

La vitesse de référence et la température de référence sont choisies telles que :

$$U_{ref} = \frac{\nu}{L}, T_{ref} = \frac{T_c + T_f}{2} \quad (5.8)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

Les paramètres adimensionnés utilisés sont :

$$x^+ = \frac{x}{L}, y^+ = \frac{y}{L}, p^+ = \frac{pL}{\mu u}, u^+ = \frac{u}{U_{ref}}, v^+ = \frac{v}{U_{ref}}, \quad (5.9a)$$

$$T^+ = \frac{T - T_{ref}}{T_c - T_f}, T_{ref}^+ = \frac{T_{ref}}{T_c - T_f} \quad (5.9b)$$

Pour les grandeurs radiatives adimensionnées on a :

$$q_r^+ = \frac{q_r}{4\bar{\sigma} T_{ref}^4}, I^+ = \frac{I}{4\bar{\sigma} T_{ref}^4}, G^+ = \frac{G}{4\bar{\sigma} T_{ref}^4} \quad (5.10)$$

Le flux total adimensionné est :

$$q_t^+ = \left[ \frac{q_t}{k(T_c - T_f)/L} \right] \quad (5.11)$$

Le système d'équations devient :

$$\frac{\partial u^+}{\partial x^+} + \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = 0 \quad (5.12a)$$

$$u^+ \frac{\partial v^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial v^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial y^+} + \nabla^2 v^+ + \frac{Ra}{Pr} T^+ \cos \theta \quad (5.12b)$$

$$u^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = -\frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \nabla^2 u^+ + \frac{Ra}{Pr} T^+ \sin \theta \quad (5.12c)$$

$$u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} + v^+ \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T^+ - \frac{T_{ref}^+}{Pr Pl} \nabla \cdot \mathbf{q}_r^+ \quad (5.12d)$$

avec :

$$Ra = \frac{\beta g (T_c - T_f) L^3}{\nu \alpha}, \text{ et } Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (5.12e)$$

On définit le paramètre adimensionné B par :

$$B = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^4 = \left( \frac{T^+}{T_{ref}^+} + 1 \right) \quad (5.13)$$

Le paramètre de couplage N est défini par :

$$N = \frac{k(\kappa + \sigma)}{4\bar{\sigma} T_{ref}^3} = \frac{k/L}{4\bar{\sigma} T_{ref}^3} (\kappa + \sigma)L = Pl \cdot \tau \quad (5.14)$$

où  $Pl$  est le nombre de Planck et  $\tau$  est l'épaisseur optique, donnés respectivement par :

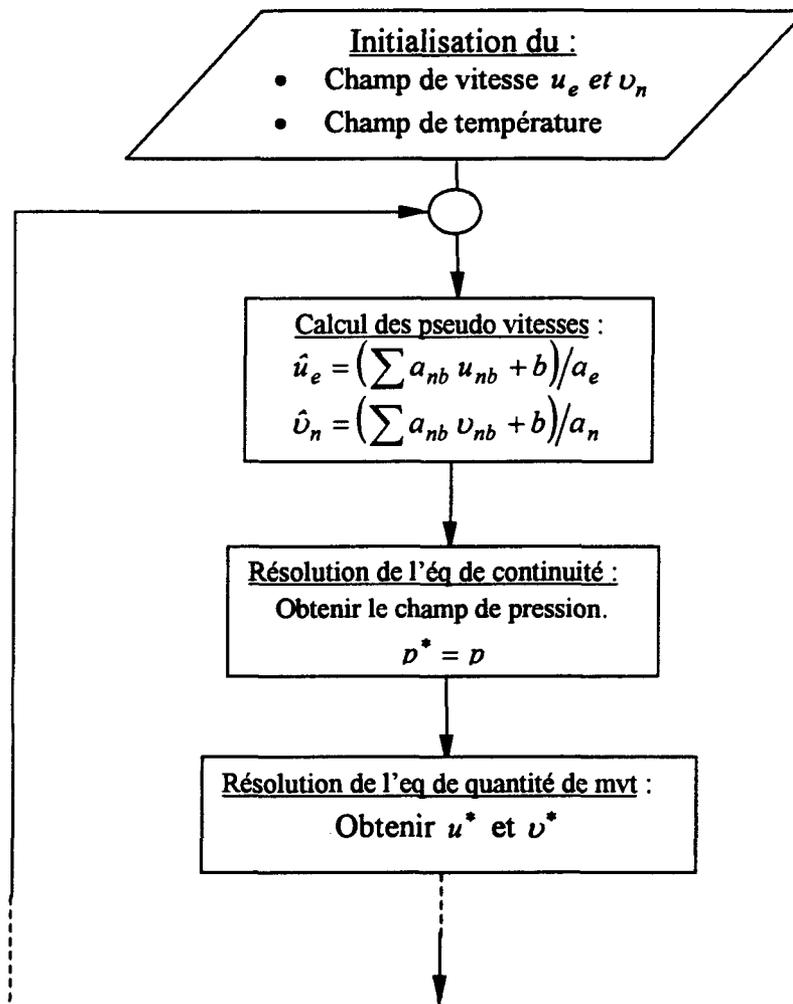
$$Pl = \frac{k/L}{4\bar{\sigma}T_{ref}^3} \text{ et } \tau = (\kappa + \sigma)L \quad (5.14b)$$

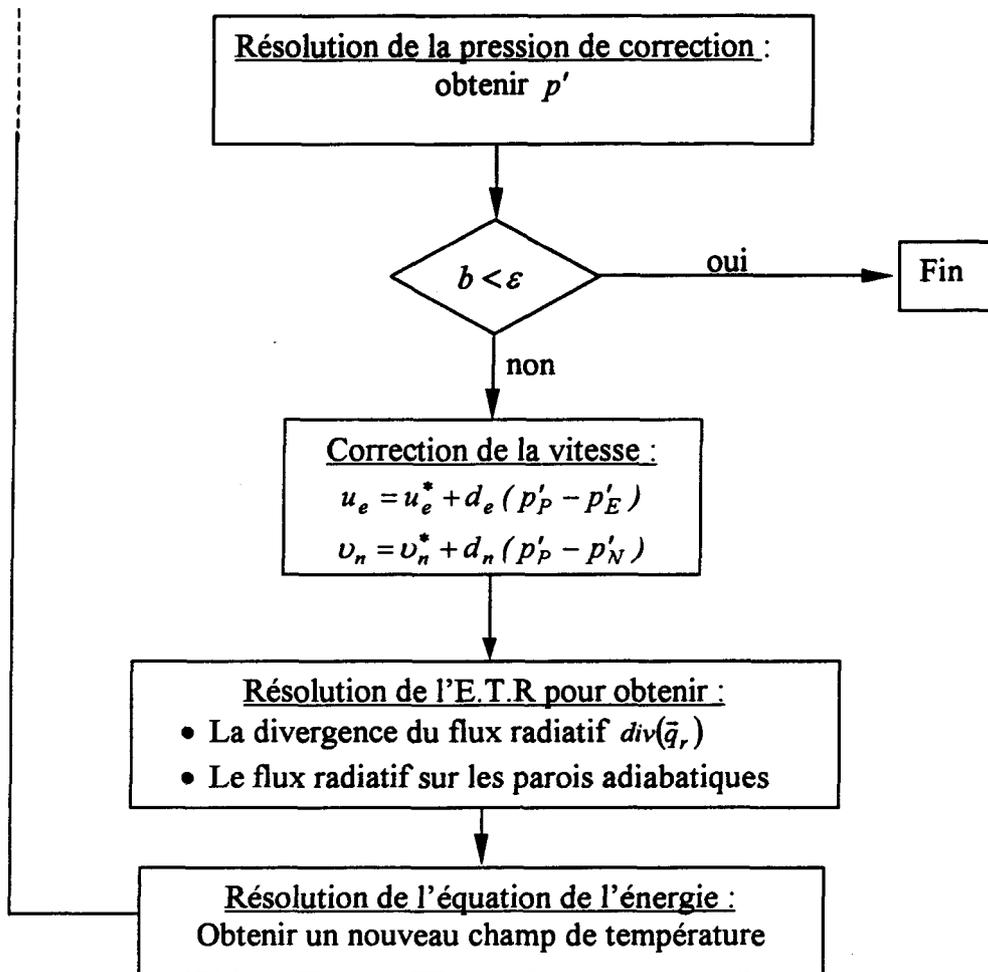
La divergence du flux radiatif adimensionné s'écrit par :

$$\nabla \cdot q_r^+ = \kappa \left[ B - \int_{4\pi} I^+ d\Omega \right] \quad (5.15)$$

## 5.6. Algorithme de calcul :

L'algorithme de la méthode numérique est montré ci-dessous :





## 5.7. Résultats :

Les résultats ont été obtenus pour une cavité remplie d'un milieu fluide homogène et isotrope, dont le nombre de Prandtl est égal à 0.72. On a choisi un cas où le fluide est en activité convective importante ( $Ra = 5.10^6$ ) et on a traité ce cas sans rayonnement

(figures 5.2, 5.3 et 5.4), et en présence de rayonnement pour deux valeurs du paramètre de couplage  $N$  ( $N=0.1$  et  $N=0.02$ ).

En ce qui concerne les hypothèses radiatives, le milieu est supposé absorbant, avec une épaisseur optique  $\tau$  égale à l'unité. Toutes les faces de la cavité sont considérées noires. La température de référence adimensionnée  $T_{ref}^+$  est égale à 1.5 ( $T_c/T_f = 0.5$ ).

Le paramètre de couplage  $N$  représente un indicateur sur l'importance du rayonnement par rapport à la convection naturelle. Lorsque  $N=0.1$ , le transfert de la chaleur est assuré par la convection à l'intérieur de la cavité et par la conduction à proximité des faces alors que la participation du rayonnement dans ce cas n'est pas très forte. Le mouvement de fluide se fait donc autour d'un centre immobile confondu avec le centre de la cavité (figure 5.7) et les isothermes sont centrosymétriques (figure 5.6 (a)) sauf au voisinage des faces adiabatiques où l'on remarque une interaction entre le rayonnement et la convection, donc destruction de la centrosymétrie. Les isothermes obtenues dans ce cas de couplage pour  $N=0.1$ , sont très similaires à celles trouvées par El Wakil <sup>[31]</sup> (figure 5.6 (a) et (b)).

Lorsque la valeur de  $N$  décroît, la contribution du rayonnement devient plus importante. Elle est plus forte du côté de la face froide; en effet la conduction et la convection vont compenser cette différence par une réduction de leur participation au voi-

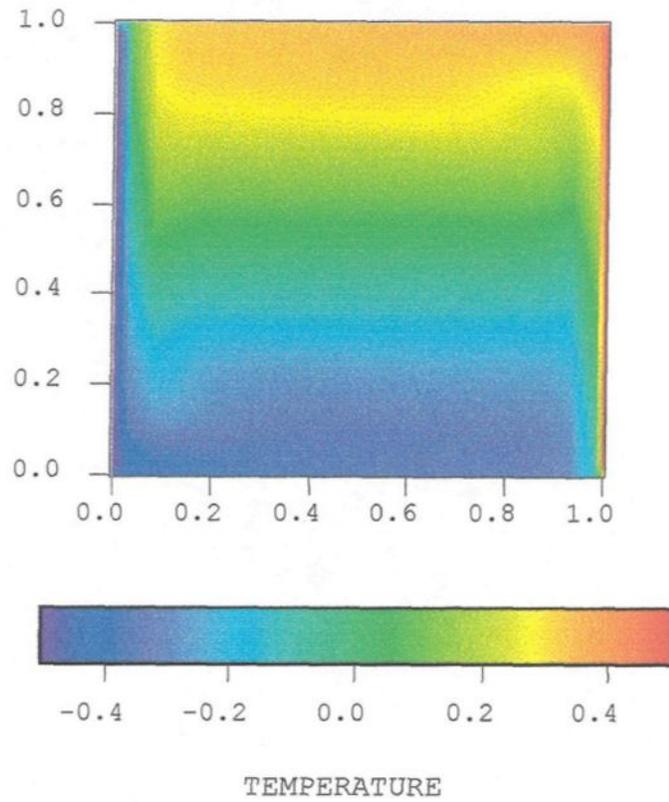


Figure 5.2 : Champ de la température pour un fluide sans rayonnement  
( $Ra = 5 \cdot 10^6$ )

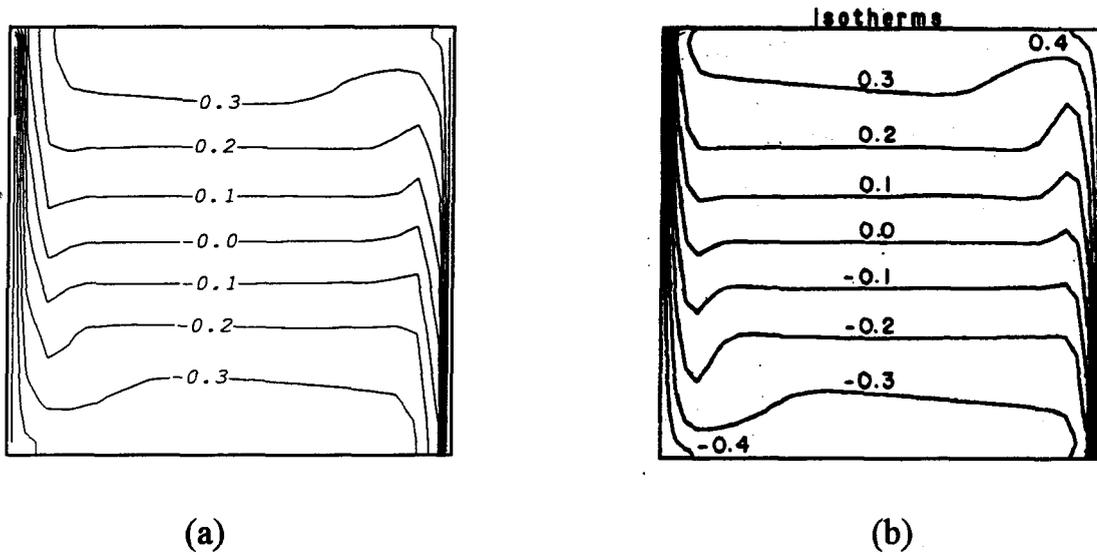


Figure 5.3 : Isothermes pour un fluide sans rayonnement ( $Ra=5 \cdot 10^6$ ), (a) obtenu, (b) donné par Yücel et al <sup>[30]</sup>

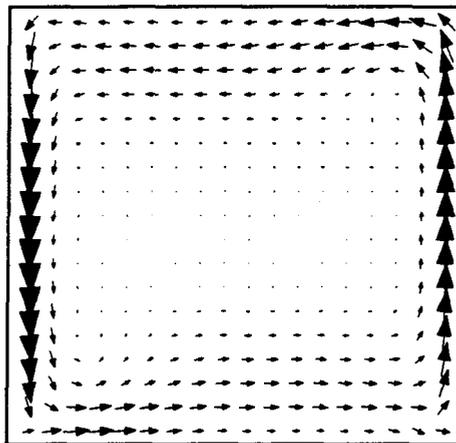


Figure 5.4 : Champ de vitesse pour un fluide sans rayonnement ( $Ra=5 \cdot 10^6$ )

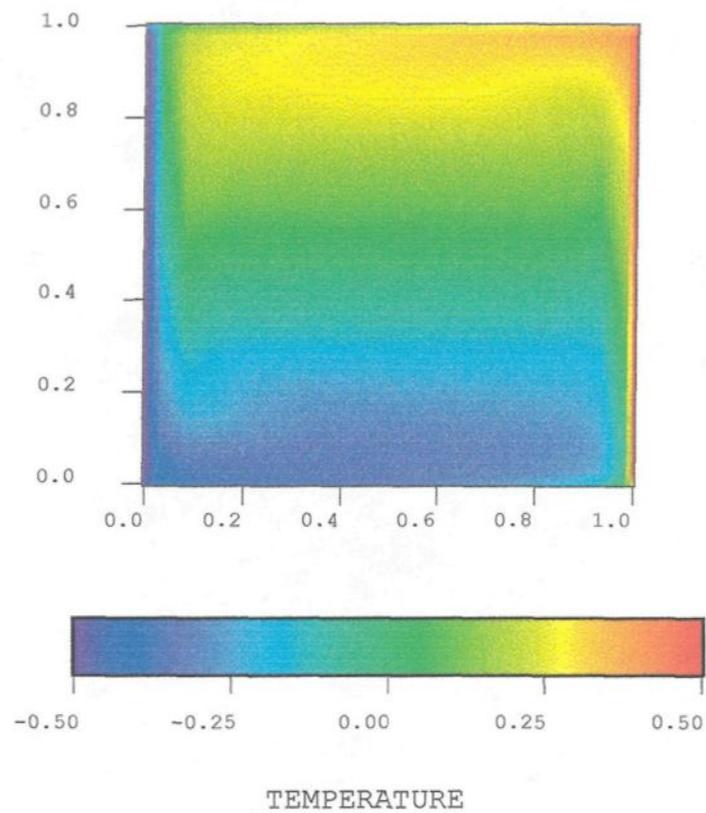


Figure 5.5 : Champ de température pour un fluide avec rayonnement  
( $N=0.1, \tau=1, Ra=5 \cdot 10^6$ )

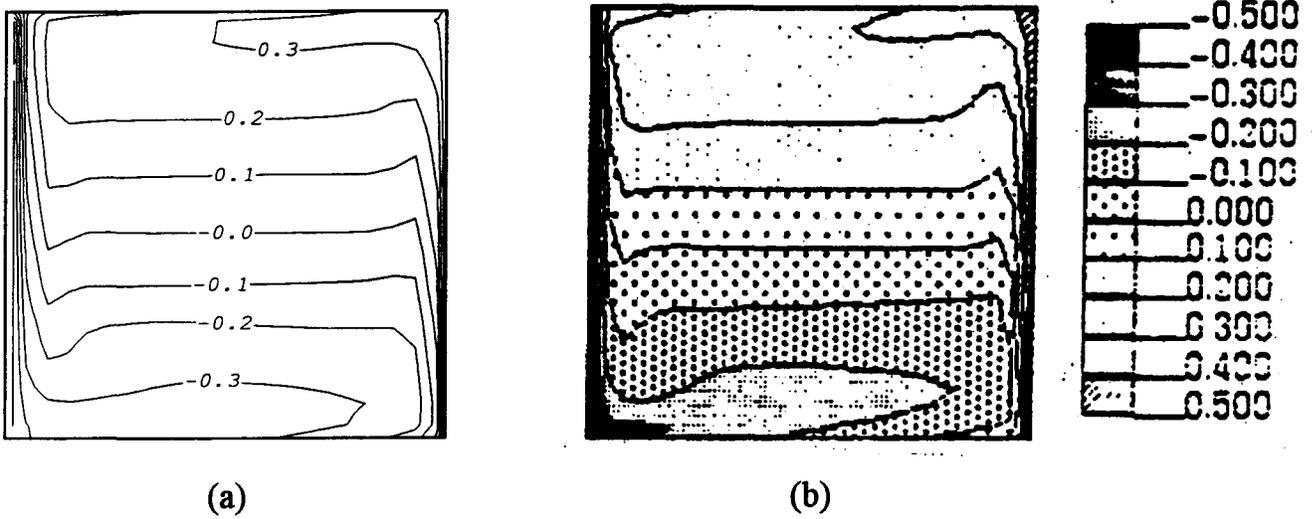


Figure 5.6 : Isothermes pour un fluide avec rayonnement ( $N=0.1, \tau = 1, Ra = 5 \cdot 10^6$ ), (a) obtenu, (b) donné par El Wakil <sup>[31]</sup>.

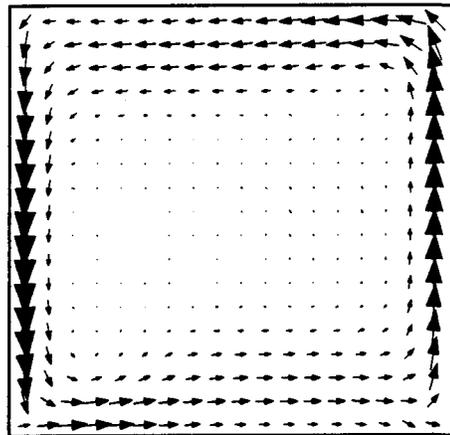
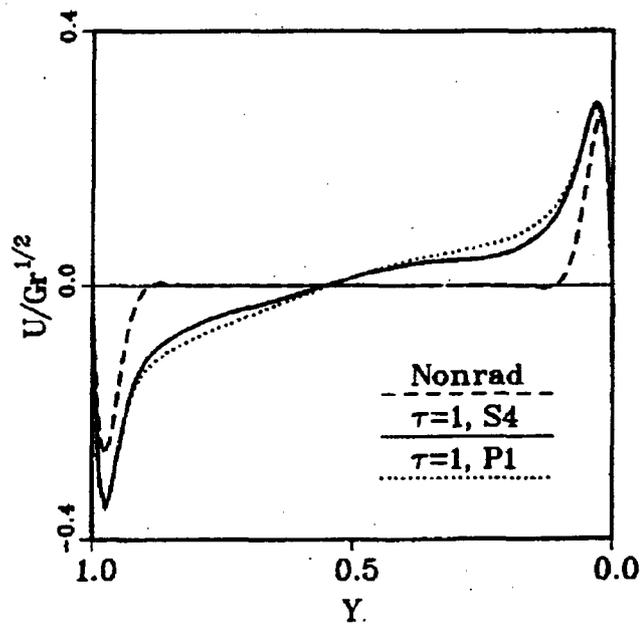
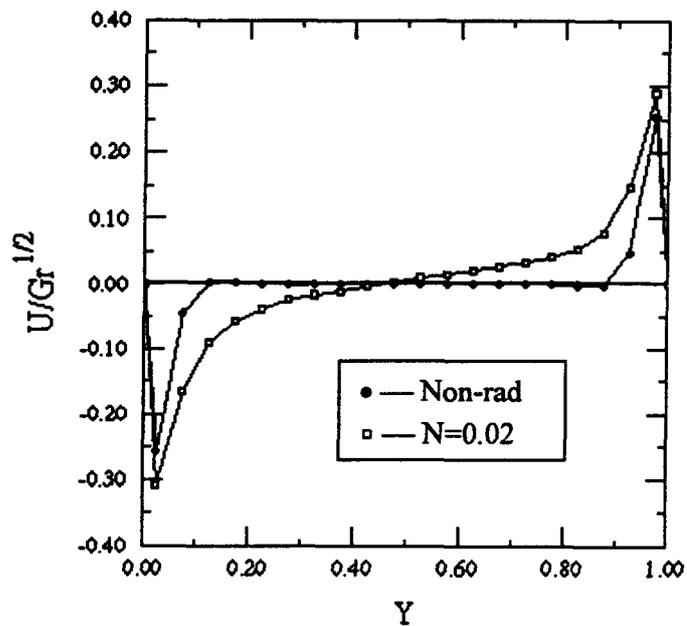


Figure 5.7 : Champ de vitesse pour un fluide avec rayonnement ( $N=0.1, \tau = 1, Ra = 5 \cdot 10^6$ )



(a)



(b)

Figure 5.8 : Profil de la vitesse verticale en présence du rayonnement à  $x = 0.5$  ( $Ra = 5 \times 10^6$ ,  $N = 0.02$ ,  $\omega = 0$ ), (a) les résultats donnés par Yücel et al <sup>[30]</sup>, (b) obtenus.

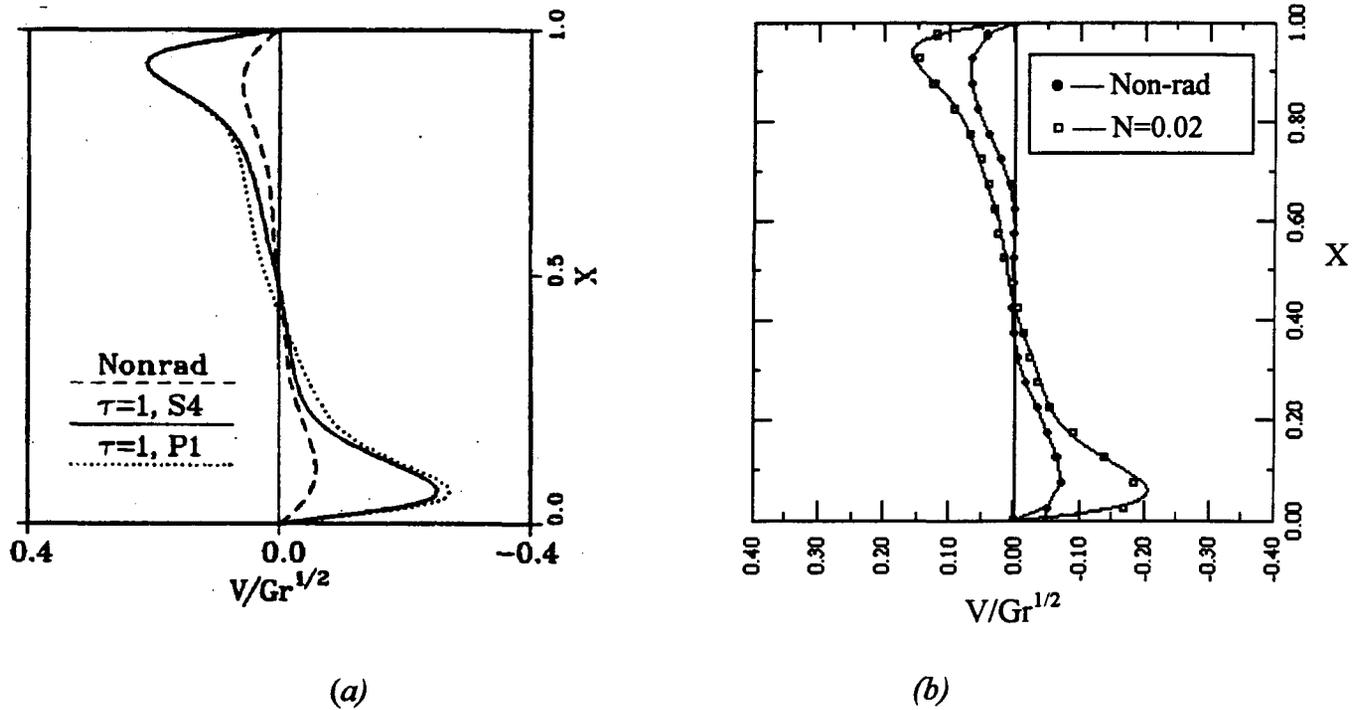


Figure 5.9 : Profil de la vitesse horizontale en présence du rayonnement à  $y = 0.5$  ( $Ra = 5 \times 10^6$ ,  $N = 0.02$ ,  $\omega = 0$ ), (a) les résultats donnés par Yücel et al <sup>[30]</sup>, (b) obtenus.

sinage de la face chaude. Il s'ensuit que les profils correspondants ne sont plus symétriques, ce qui peut être remarqué au niveau du profil des deux composantes de la

vitesse  $u$  et  $v$  pour  $N = 0.02$  aux figures 5.8 et 5.9. La comparaison de ces derniers avec ceux de Yücel et al montre qu'il sont en accord.

L'inconvénient de l'insertion du code de rayonnement dans l'algorithme de convection, c'est que lorsque le nombre  $N$  décroît le temps demandé pour la convergence est long. Ceci peut être expliqué par le fait que l'apport de chaleur introduit par le transfert radiatif dans l'équation d'énergie est très grand, ce qui nécessite l'introduction de très petits coefficients de relaxation pour assurer la convergence.

## 5.8. Conclusion :

On a étudié le couplage de la convection naturelle laminaire avec le rayonnement dans un fluide semi-transparent en utilisant l'approximation  $S_4$  associée à l'algorithme Simplr.

On a remarqué que la méthode des ordonnées discrètes s'adapte très bien au calcul, et elle nous permet d'obtenir des résultats précis. D'autre part, on a étudié l'effet du paramètre du couplage  $N$  (lorsque ce dernier est nul on se retrouve dans le cas où on a un transfert radiatif pur). Quand  $N = 0.02$  le rayonnement est dominant; en effet le terme source généré par le transfert radiatif provoque un mouvement très fort, ce qui se voit au niveau des deux composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  (figures 5.8 et 5.9) qui deviennent plus grandes le long des parois. Ces résultats ont été comparés avec ceux de Yücel et al <sup>[30]</sup> qui ont utilisé la méthode des ordonnées discrètes et l'approximation P1.

## **Chapitre :6**

### **6. Conclusion générale**

Dans ce travail de maîtrise, nous avons accompli plusieurs objectifs. Nous avons tout d'abord appliqué la méthode des ordonnées discrètes en utilisant un nouveau schéma de différenciation sur des géométries complexes avec des maillages quadrangulaires non réguliers, les résultats se sont révélés précis lorsqu'ils ont été comparés à ceux de Sakami et al qui ont utilisé des maillages triangulaires non uniformes et à des résultats exacts fournis par la littérature. Nous avons ensuite développé l'algorithme SIMPLER pour résoudre les équations de Navier-Stokes, et les résultats obtenus ont été comparés avec la méthode des éléments finis. Nous avons finalement couplé l'algorithme de rayonnement ainsi reformulé avec l'algorithme d'écoulement. Nos résultats obtenus ont fait l'objet d'une comparaison à ceux de El Wakil et al, et ils se sont avérés très voisins.

L'étude du couplage a montré de plus que le lien entre la nouvelle méthode de différenciation et les équations de l'énergie et du mouvement peut être bien réalisé, ce qui permet ainsi d'élargir les champs d'étude et d'application.

Dans les travaux ultérieurs on recommande de :

- Tenter de réduire le temps de calcul lors du couplage.
- Passer à un des cas tridimensionnels.
- Analyser les effets de rayon.

## **Références :**

- 
- [1] *H.C. Hottel et A.F. Sarofim* ♦ *Radiative transfer* Mc.Graw-Hill, New York 1967.
- [2] *H.P. Tan, B. Maestre et M. Lallemand* ♦ *Transient and steady-state combined heat transfer in semi-transparent materials subjected to a pulse or a step irradiation*. *J. Heat Transfer*, 1991, vol. 113, n° 1, p.166-173.
- [3] *F.R. Steward, et P. Cannon* ♦ *The calculation of radiative heat flux in a cylindrical furnace using the Monte-Carlo method*. *Int. J. Heat Mass transfer*, 1971, 14, p 245-261.
- [4] *Y. Bayazitoglu, et J. Higenyi* ♦ *Higher-order differential equations of radiative transfer : P-3 approximation*. *AIAA J.*, 1980, 17,n 4, p 424-431.
- [5] *M.M. Razzaque, D.E.Klein et J.R. Howell* ♦ *Finite element solution of radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with gray participating media*. *J. Heat transfer*, 1983, vol. 105, n° 4, p. 933-936.
- [6] *A.L. Crosbie et R.G. Schrenker* ♦ *Radiative transfer in a two dimensional rectangular medium exposed to diffuse reflexion*. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 1984, vol. 31, n° 4, p. 339-372.
- [7] *S. Chandrasekhar* ♦ *Radiative heat transfer*. New York, Ed.Dover, 1960.
- [8] *K.D. Lathrop* ♦ *Use of discrete ordinates method for solution of photon transport problems*. *Nucl. Sci. Eng*, 1966, vol.4, p 381-388.
- [9] *E. Khalil et J. Truelove* ♦ *Calculations of radiative heat transfer in a large gas filled furnace*. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1977, vol. 4, p. 353-365.

- 
- [10] *W.A. Fiveland ♦ A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures. ASME, 1982, paper n 82-HT-20.*
- [11] *A.S. Jammaluddin et P.J. Smith ♦ Predicting radiative heat transfer in rectangular enclosures using the discrete ordinates method . Combustion, Science and Technology, 1988, vol. 59, p.321-340.*
- [12] *W.A. Fiveland ♦ Discrete-ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures. ASME J. Heat Transfer, 1984, vol. 106, p. 699-706.*
- [13] *A.S. Jammaluddin et P.J. Smith ♦ Predicting radiative heat transfer in axisymmetric cylindrical enclosures using the discrete ordinates method. Combustion, Science and Technology, 1988, vol. 62, p. 173-186.*
- [14] *R. Vaillon, M. Lallemand et D. Lemonnier ♦ Radiative-conductive heat transfer in curvilinear coordinates by discrete ordinates method. Eurotherm Seminar 36, Poitiers-Futuroscope, 1994, Ed. Elsevier, Paris, 1996.*
- [15] *J.C. Chai., H.S. Lee et S.V. Patankar ♦ Treatment of irregular geometries using a cartesian coordinates finite-volume radiation heat transfer procedure. J. Numerical Heat Transfer, Part B, 1994, vol. 26, p. 225-235*
- [16] *R. Koch, W. Krebs, S. Wittig et R. Viskanta ♦ A parabolic formulation of the discrete ordinates method for the treatment of complex geometries. Symposium on radiative heat transfer, Kusadasi, Turkey, 14-18 August 1995.*

- 
- [17] *M. Sakami, et A.Charette et V. Le Dez ♦ Application de la méthode des ordonnées discrètes au transfert radiatif dans un milieu bidimensionnel gris à géométrie complexe, Rev. Gén. Therm., 1996, vol 35, p. 83-94.*
- [18] *M. Sakami, et A.Charette et V. Le Dez ♦ Application of the discrete ordinates method to combined conductive and radiative heat transfert in two-dimensional complex geometry. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1996, Vol. 56, No.4, pp. 517-533.*
- [19] *M. Sakami, A. Charette et V. Le Dez ♦ Radiative heat transfer in three dimensional enclosures of complex geometry using the discrete ordinates method. J.Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1998, vol. 59, No1/2, pp.117-136.*
- [20] *Suhas V. Patankar ♦ Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York, 1980.*
- [21] *A.L. Crosbie et R.G. Schrenker ♦ Exact expression for Radiative transfer in a three-dimensional rectangular geometry. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 1982, vol. 28, n° 6, p. 507-526.*
- [22] *C.P. Thurgood ♦ A critical evaluation of the discrete ordinates method using HEART and Tn quadrature. PhD Thesis, Departement of chemical engineering, Queen's University, Kingston, 1992.*
- [23] *A. Yücel et M. L. Williams ♦ Heat transfer by combined conduction and radiation in axisymmetric enclosures. J Themophysics, 1987, vol 1, no. 4,p. 301-306.*

- 
- [24] *M. Sakami et A. Charette* ♦ *A new differencing scheme for discrete-ordinates method in complex geometries*. Rev. Gén. Therm. (1998) 37, p.440-449.
- [25] *G. Lauriat* ♦ *Combined radiation-convection in gray fluids enclosed in vertical cavities*. ASME Journal of heat transfer, November 1982, vol 104, p. 609-615.
- [26] *A. Draoui* ♦ *Étude numérique des transferts de chaleur couplés rayonnement-conduction et rayonnement-convection dans un milieu semi-transparent bidimensionnel*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989.
- [27] *C. Bouallou* ♦ *Modélisation bidimensionnelle de transferts couplés rayonnement-convection naturelle dans les milieux semi-transparents. Application à des milieux poreux, fluides et stratifiés avec interface perméable et transparente*. Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1989.
- [28] *T. Fusegi et B. Farouk* ♦ *Laminar and turbulent natural convection-radiation interactions in a square enclosure filled with a nongray gas*. Numerical heat transfer, part A 1989, vol. 15, p. 303-322.
- [29] *T. Fusegi et B. Farouk* ♦ *A computational and experimental study of natural convection and surface/gas radiation interactions in a square cavity*. ASME Journal of heat transfer, August 1990, vol 112, p.802-804.
- [30] *A. Yücel, S. Acharya et M.L. Williams* ♦ *Natural convection and radiation in a square enclosure*. Numerical heat transfer, part A, 1989, vol. 15, p. 261-278.

---

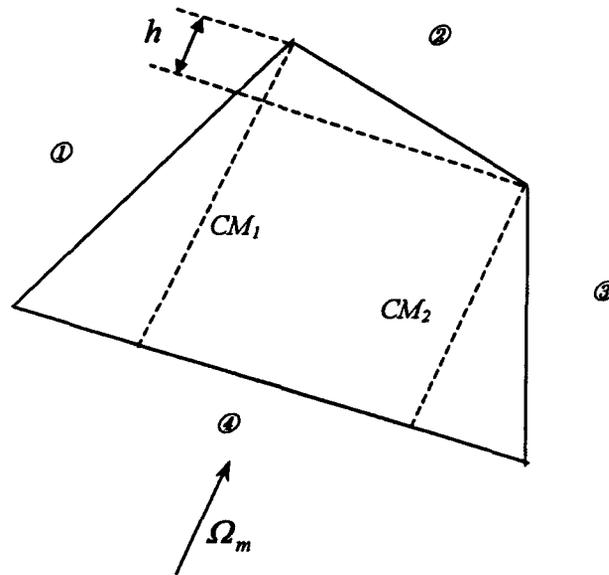
<sup>[31]</sup> *N. El Wakil ♦ Couplage des transferts thermiques en milieux semi-transparentes.*

Thèse de doctorat : Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1990.

**Annexe A : Établissement des équations pour  
l'algorithme de rayonnement avec maillages  
quadrangulaires.**

• 1<sup>er</sup> cas :

Trois côtés reçoivent le rayonnement d'un seul côté :



Sur le côté 1 :

$$I_{1m}^i = I_{4m}^i \chi_1 + J_m^i (1 - \chi_1)$$

$$\text{Avec : } \chi_1 = \frac{1 - e^{-\beta CM_1}}{\beta CM_1}$$

Sur le côté 2 :

$$I_{3m}^i = I_{4m}^i \chi_3 + J_m^i (1 - \chi_3)$$

$$\text{Avec : } \chi_3 = \frac{1 - e^{-\beta CM_2}}{\beta CM_2}$$

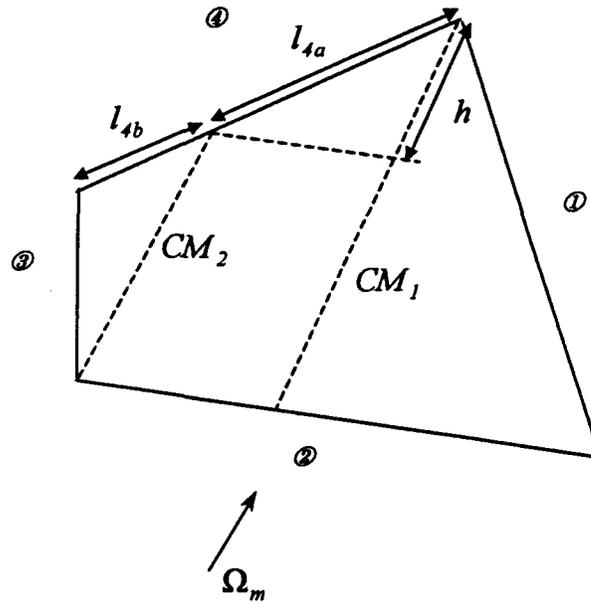
Sur le côté 3 :

$$I_{2m}^i = I_{4m}^i \chi_2 + J_m^i (1 - \chi_2)$$

$$\text{Avec : } \chi_2 = e^{-\beta CM_2} \frac{1 - e^{-\beta h}}{\beta h}$$

• 2<sup>ème</sup> cas :

Deux côtés reçoivent le rayonnement des 2 autres :



Sur le côté 1 :

$$I_{1m}^i = I_{2m}^i \chi_1 + J_m^i (1 - \chi_1)$$

$$\text{Avec : } \chi_1 = \frac{1 - e^{-\beta CM_1}}{\beta CM_1}$$

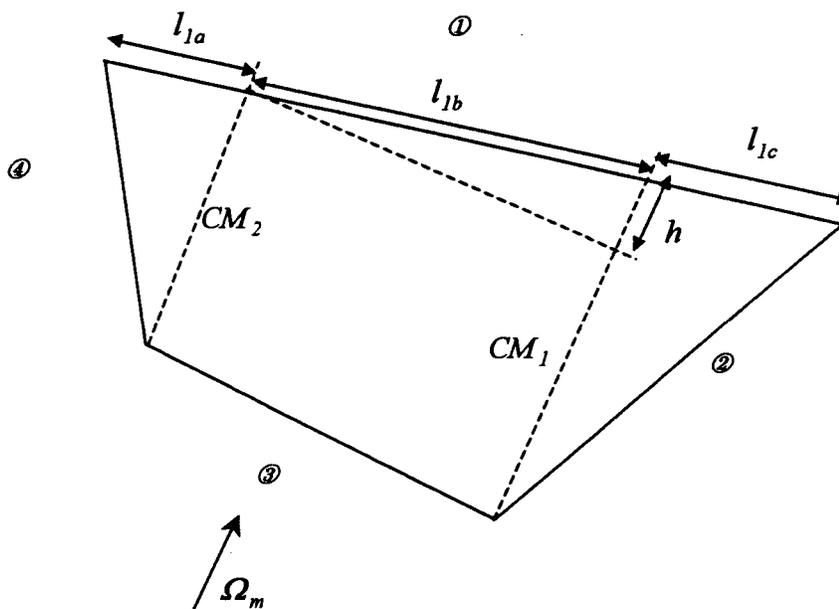
Sur le côté 4 :

$$I_{4m}^i = \frac{l_{4a}}{l_4} I_{2m}^i \chi_2 + \frac{l_{4a}}{l_4} J_m^i (1 - \chi_2) + \frac{l_{4b}}{l_4} I_{3m}^i \chi_3 + \frac{l_{4b}}{l_4} J_m^i (1 - \chi_3)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \chi_2 = e^{-\beta CM_2} \frac{1 - e^{-\beta h}}{\beta h} \\ \chi_3 = \frac{1 - e^{-\beta CM_2}}{\beta CM_2} \end{cases}$$

• 3<sup>ème</sup> cas :

Un côté reçoit le rayonnement des 3 autres :



Sur le côté 1 :

$$I_{1m}^i = \frac{l_{1a}}{l_1} I_{4m}^i \chi_2 + \frac{l_{1a}}{l_1} J_m^i (1 - \chi_2) + \frac{l_{1b}}{l_1} I_{3m}^i \chi_1 + \frac{l_{1b}}{l_1} J_m^i (1 - \chi_1) \\ + \frac{l_{1c}}{l_1} I_{2m}^i \chi_3 + \frac{l_{1c}}{l_1} J_m^i (1 - \chi_3)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \chi_1 = e^{-\beta CM_2} \frac{1 - e^{-\beta h}}{\beta h} \\ \chi_2 = \frac{1 - e^{-\beta CM_2}}{\beta CM_2} \\ \chi_3 = \frac{1 - e^{-\beta CM_1}}{\beta CM_1} \end{cases}$$