

# Modélisation et résolution du problème de contact mécanique et son application dans un contexte multi-physiques

THÈSE PRÉSENTÉE À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
DANS LE CADRE DU PROGRAMME DE DOCTORAT EN INGÉNIERIE,  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE  
PHILOSOPHIAE DOCTOR (PH.D.)

par

**Philippe BUSSETTA**

présentée et soutenue publiquement le lundi 2 février 2009

Composition du jury :

Président du jury :	M.	Laszlo KISS
Directeur de thèse :	M.	Daniel MARCEAU
Codirecteur de thèse :	M.	Jean Philippe PONTHOT
Rapporteurs :	Mme.	Lyne ST-GEORGES
	Mme.	Marie-Isabelle FARINAS
	M.	Mohamed RACHIK



### Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

# Résumé

Le contact mécanique est le problème de mécanique des solides qui présente les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. La bonne résolution numérique de ce problème est fortement perturbée par la non-linéarité et la non-différentiabilité des équations régissant le contact mécanique frottant (collement-décollement et amorces du glissement). Encore aujourd'hui, il n'existe pas de méthode permettant de résoudre le problème de contact frottant de manière universelle. Ce travail porte donc sur l'élaboration de méthodes permettant de résoudre le plus grand nombre de types de problème de contact frottant. Il peut être décomposé en deux parties.

La première partie porte sur la formation du système d'équations et l'algorithme de résolution. Les méthodes les plus utilisées sont celles de pénalisation et du lagrangien augmenté. Bien que très simple, ces méthodes sont assez difficiles à utiliser en raison de la difficulté d'identification des valeurs des coefficients de pénalisation (normale et tangentielle). Afin de pallier les carences de ces méthodes, une nouvelle approche est proposée, celle dite du « lagrangien augmenté adapté ». Cette nouvelle méthode est basée sur celle du lagrangien augmenté jumelée à une adaptation de la pénalité. Elle présente l'avantage de ne plus obliger l'utilisateur à choisir des coefficients de pénalisation. De plus, elle cumule la rapidité de l'adaptation de la pénalité et la fiabilité de la méthode du lagrangien augmenté.

La deuxième partie porte sur la prise en compte du contact sous une discrétisation spatiale. La méthode la plus utilisée est la méthode « point-surface ». Le contact est calculé pour chacun des points d'une des surfaces avec l'autre surface. Cette méthode présente de nombreuses limites, notamment au niveau de la représentativité et de la régularité de la solution lorsque les deux surfaces sont déformables et irrégulières. Une autre méthode fait l'objet d'intense recherche, la méthode « surface-surface » basée sur les éléments joints. Le contact est calculé pour chaque nœud d'une des surfaces en fonction des deux surfaces ce qui rend la solution plus régulière et plus représentative. Cependant, les complications induites par cette méthode ne permettent pas de résoudre les problèmes en trois dimensions. Une variante de cette méthode est donc présentée afin de pouvoir être utilisée pour les problèmes en deux ou trois dimensions.

Toutes ces méthodes sont testées sur des problèmes académiques simples et également sur des problèmes industriels multi-physiques.

Courriel de l'auteur : phil\_b\_13@hotmail.com

# Abstract

The mechanical contact is the problem of solids mechanics that presents the most difficult nonlinearity. The good resolution of the frictional contact problem is disrupted by the nonlinearity and the non differentiability of the contact's equations (stick/unstick and the initiation of sliding). Until now, no method could be used to resolve all contact problems. This work is focused on the methods of calculation of the mechanical contact in a more general way. It could be separated in two parts.

The first one concerns the creation of the systems of equations and the algorithm of resolution. The methods more used are the Penalty Method and Lagrangian Augmented Method. Although these methods are simple, they are very difficult to use because the choice of the value of penalty coefficients (normal and tangential). For this reason, a new method, the "Lagrangian Augmented Adapted Method" is proposed. This new method is based on the Lagrangian Augmented Method and on the adaptation of the penalty coefficients. With it, the user does not need to choose the value of penalty coefficients. In addition, this method has the speed of the Penalty Method and the reliability of the Lagrangian Augmented Method.

The second part of this work deals with the calculation of the mechanical contact under a spatial discretization. The method more used is the "Point-Surface" Method. The contact is calculated between every point of one surface and the other surface. This method has many limits, as the representativeness and the regularity of the solution when the boundaries are deformable and irregular. Many researches are done on another method, the "Surface-Surface" Method based on the Mortar Element Method. The mechanical contact is calculated on each node of one surface in function of the two surfaces. With this method the solution is more regular and reliable. But the calculation of the mechanical contact is more difficult, so it can not be used to the three dimensional problems. An adaptation of this method has been proposed to the two and three dimensional problems.

All these methods are tested on some academics and industrials multi-physical problems.

Author's e-mail : phil\_b\_13@hotmail.com



# Remerciement

Ce travail n'aurait pas pu être effectué sans l'accord, le soutien et l'aide de plusieurs personnes.

Je tiens à remercier mon directeur, Monsieur Daniel Marceau (professeur à l'Université du Québec à Chicoutimi), ainsi que mon co-directeur, Monsieur Jean-Philippe Ponthot (professeur à l'Université de Liège, Belgique), pour la confiance et la liberté qu'ils m'ont accordées durant toute la durée de ce doctorat. Ce doctorat a été effectué au sein du Centre Universitaire de Recherche sur l'Aluminium (CURAL) faisant partie de l'Université du Québec à Chicoutimi en collaboration avec le département d'aérospatial, mécanique et matériaux de l'Université de Liège. Je ne voudrais pas oublier de remercier Monsieur Daniel Marceau et les employeurs de l'Université du Québec à Chicoutimi pour m'avoir accueilli et fourni le cadre nécessaire à la réalisation de cette thèse. Mon directeur m'a incité à développer davantage mon esprit d'initiative et m'a démontré l'importance du travail en équipe. Je voudrais également remercier Monsieur Jean-Philippe Ponthot pour m'avoir donné la possibilité d'effectuer un séjour dans son laboratoire à l'Université de Liège. Je n'oublierai évidemment pas, Monsieur Luc Papeleux (ingénieur de recherche à l'Université de Liège) dont son aide a été très précieuse durant tout mon séjour à Liège.

Par ailleurs, je remercie Monsieur Laszlo Kiss pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance, mais également Madame Lyne St-Georges, Madame Marie-Isabelle Farinas et Monsieur Mohamed Rachik pour avoir évalué ma thèse avec minutie. Vos recommandations et corrections ont toutes été prises en considération avec intérêt.

Finalement, je remercie infiniment mon épouse Raquel, pour le soutien qu'elle m'a apporté durant ces trois années.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Remerciement</b>	<b>iv</b>
<b>Table des figures</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xii</b>
<b>Liste des algorithmes</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Généralités . . . . .	1
1.2 Problématique . . . . .	2
1.3 Objectifs . . . . .	3
1.4 État des connaissances . . . . .	4
1.5 Méthodologie . . . . .	6
1.6 Originalité et plan . . . . .	7
<b>2 Mécanique du contact frottant</b>	<b>10</b>
2.1 Notions de cinématique et de sthénique . . . . .	10
2.1.1 Cinématique . . . . .	10
2.1.2 Sthénique . . . . .	15
2.2 Formulation du contact avec frottement . . . . .	16
2.2.1 Modélisation du contact . . . . .	16
2.2.2 Modélisation du frottement . . . . .	18
2.3 Principe des travaux virtuels . . . . .	20
2.4 Conclusion . . . . .	23
<b>3 Méthodes de résolution</b>	<b>25</b>
3.1 Formulation du système d'équations . . . . .	25
3.1.1 Méthode de pénalisation . . . . .	26

3.1.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	30
3.1.3	Méthode du lagrangien augmenté . . . . .	32
3.2	Discrétisation des équations . . . . .	35
3.2.1	Méthode de pénalisation ou hybride . . . . .	36
3.2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	38
3.3	Discrétisation du contact mécanique . . . . .	39
3.3.1	Méthode point-surface . . . . .	40
3.3.2	Méthode surface-surface . . . . .	43
3.4	Algorithmes de résolution . . . . .	47
3.4.1	Méthodes de pénalisation . . . . .	47
3.4.2	Méthodes du lagrangien augmenté . . . . .	51
3.4.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	52
3.5	Conclusion . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Limites des méthodes habituelles</b>	<b>58</b>
4.1	Problèmes de Hertz . . . . .	58
4.1.1	Solution analytique . . . . .	59
4.1.2	Approche numérique . . . . .	60
4.1.3	Deux cylindres identiques . . . . .	63
4.1.4	Deux cylindres de matériaux différents . . . . .	76
4.2	Problèmes de contact frottant . . . . .	83
4.2.1	Écrasement d'un tube entre deux plans rigides . . . . .	83
4.2.2	Écrasement de deux tubes concentriques . . . . .	93
4.3	Conclusion . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Méthodes de résolution proposées</b>	<b>100</b>
5.1	Méthode de pénalisation adaptative modifiée . . . . .	100
5.2	Méthode du lagrangien augmenté adapté . . . . .	103
5.3	Méthode surface-surface . . . . .	107
5.4	Validation des méthodes . . . . .	107
5.4.1	Problèmes de Hertz . . . . .	107
5.4.2	Problèmes de contact frottant . . . . .	118
5.4.3	Préchauffage d'une cuve d'électrolyse . . . . .	122
5.5	Conclusion . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Conclusion et recommandations</b>	<b>144</b>
6.1	Conclusion . . . . .	144
6.2	Recommandations . . . . .	146
<b>A</b>	<b>Approche différente</b>	<b>148</b>
A.1	Approche utilisée à l'Université de Liège . . . . .	148
A.1.1	Metafor . . . . .	148
A.1.2	Gestion du temps . . . . .	149

*TABLE DES MATIÈRES*

vii

A.1.3	Gestion du contact . . . . .	149
A.1.4	Régularisation du vecteur normal . . . . .	150
A.1.5	Matériaux élasto-plastique . . . . .	150
A.2	Problème de Hertz . . . . .	151
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>

# Table des figures

1.1	Quelques exemples de problèmes présentant des zones de contact . . . . .	3
2.1	Représentation des solides au cours de la déformation. . . . .	11
2.2	Représentation des frontières de contact au cours de la déformation. . .	13
2.3	Représentation du contact normal . . . . .	16
2.4	Représentation des lois de contact et de frottement . . . . .	17
2.5	Représentation du contact tangentiel et du glissement. . . . .	18
3.1	Représentation du contact avec la méthode de pénalisation. . . . .	26
3.2	Représentation des lois de contact et de frottement avec la méthode de pénalisation. . . . .	27
3.3	Représentation du calcul de l'interpénétration au point A . . . . .	40
3.4	Représentation du calcul de l'interpénétration au nœud A . . . . .	45
4.1	Problème du contact de Hertz . . . . .	59
4.2	Zone de contact de Hertz. . . . .	59
4.3	Problème du contact de Hertz simplifié. . . . .	60
4.4	Maillage du quart de cylindre en deux dimensions (maillage 6). . . . .	62
4.5	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	66
4.6	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	66
4.7	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	68
4.8	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	68
4.9	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	72
4.10	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	72
4.11	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	78

4.12	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	79
4.13	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	80
4.14	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	80
4.15	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	81
4.16	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	82
4.17	Écrasement d'un tube entre deux plans rigides . . . . .	83
4.18	Maillage du quart de tube en deux dimensions (maillage 200). . . . .	84
4.19	Déformations d'un quart de tube écrasé sur un plan rigide . . . . .	85
4.20	Force normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 200 et comportement élastique) . . . . .	87
4.21	Force normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 400 et comportement élastique) . . . . .	87
4.22	Force normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 400 et comportement élasto-plastique) . . . . .	88
4.23	Force normale de contact avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 200 et comportement élasto-plastique) . . . . .	90
4.24	Force normale de contact avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 400 et comportement élasto-plastique) . . . . .	90
4.25	Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 400 et comportement élastique) . . . . .	92
4.26	Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 400 et comportement élasto-plastique) . . . . .	92
4.27	Écrasement de deux tubes concentriques . . . . .	93
4.28	Maillage des deux demi-tubes en trois dimensions. . . . .	94
4.29	Contrainte normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 1) . . . . .	96
4.30	Contrainte normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 2) . . . . .	96
4.31	Contrainte normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 1) . . . . .	97
4.32	Contrainte normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 2) . . . . .	97
5.1	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	109
5.2	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	110

5.3	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	111
5.4	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	112
5.5	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	115
5.6	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	116
5.7	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élastique) . . . . .	117
5.8	Contrainte normale de contact $t_n$ avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élasto-plastique) . . . . .	118
5.9	Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 400 et comportement élastique) . . . . .	120
5.10	Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 400 et comportement élasto-plastique) . . . . .	120
5.11	Contrainte normale de contact (maillage 1) . . . . .	121
5.12	Contrainte normale de contact (maillage 2) . . . . .	122
5.13	Bloc cathodique [4] . . . . .	123
5.14	Courbe de montée en température du dessus du bloc cathodique [4] . . . . .	124
5.15	Maillage d'un bloc cathodique [4] . . . . .	125
5.16	Éléments de recouvrement des frontières de contact mécanique [4] . . . . .	126
5.17	Nombre d'itérations totale en fonction du temps . . . . .	127
5.18	Valeur de l'interpénétration maximale sur l'interface entre la fonte et le carbone en fonction du temps (méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	128
5.19	Première contrainte principale dans la cathode $t = 6$ heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	130
5.20	Première contrainte principale dans la cathode $t = 6$ heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	130
5.21	Première contrainte principale dans la cathode $t = 12$ heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	131
5.22	Première contrainte principale dans la cathode $t = 12$ heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	131
5.23	Première contrainte principale dans la cathode $t = 18$ heures (en Pa, méthode de pénalisation, hors équilibre) . . . . .	132
5.24	Première contrainte principale dans la cathode $t = 18$ heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	132
5.25	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte $t = 2$ heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	133
5.26	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte $t = 2$ heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	133

5.27	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 4 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	134
5.28	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 4 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	134
5.29	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 6 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	135
5.30	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 6 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	135
5.31	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 8 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	136
5.32	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 8 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	136
5.33	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 10 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	137
5.34	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 10 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	137
5.35	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 12 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	138
5.36	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 12 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	138
5.37	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 14 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	139
5.38	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 14 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	139
5.39	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 16 heures (en Pa, méthode de pénalisation) . . . . .	140
5.40	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 16 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	140
5.41	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 18 heures (en Pa, méthode de pénalisation, hors équilibre) . . . . .	141
5.42	Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 18 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté) . . . . .	141
5.43	Force normale de contact sur l'interface (Id :1 = verticale ; Id :2 = hori- zontale) . . . . .	142
A.1	Contrainte normale de contact $t_n$ (maillage 0,5 et comportement élastique)	152
A.2	Contrainte normale de contact $t_n$ (maillage 0,5 et comportement élasto- plastique) . . . . .	153

# Liste des tableaux

4.1	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	65
4.2	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	67
4.3	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps, $g_{max} = 10^{-4}$ mm) . . . . .	69
4.4	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	71
4.5	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	74
4.6	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	75
4.7	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	75
4.8	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (deux quarts de cylindre, un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	78
4.9	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (deux quarts de cylindre, un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	79
4.10	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (deux quarts de cylindre, un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	81
4.11	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (tube en acier et plan indéformable) . . . . .	86
4.12	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (tube en acier et plan indéformable) . . . . .	89
4.13	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (tube en acier et plan indéformable) . . . . .	91
4.14	Nombre d'itérations en fonction du type de modélisation (écrasement de deux tubes concentriques) . . . . .	95

5.1	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative modifiée (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	109
5.2	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	111
5.3	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative modifiée (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps) . .	113
5.4	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps) . .	114
5.5	Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative modifiée (deux quarts de cylindre, l'un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	115
5.6	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (deux quarts de cylindre, l'un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps) . . . . .	116
5.7	Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (tube en acier et plan indéformable) . . . . .	119
A.1	Nombre d'itérations et de pas de temps (quart de cylindre en acier et du plan indéformable) . . . . .	151
A.2	Nombre d'itérations et de pas de temps (deux quart de cylindre en acier)	153

# Liste des algorithmes

3.1	Méthode de pénalisation . . . . .	48
3.2	Méthode du lagrangien augmenté . . . . .	51
3.3	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	53
3.4	Méthode du lagrangien à incrément « avant » . . . . .	56
5.1	Adaptation du coefficient de pénalisation normale . . . . .	101
5.2	Calcul de la valeur de la contrainte normale de contact . . . . .	103
5.3	Adaptation du coefficient de pénalisation normale . . . . .	104
5.4	Calcul de la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle . . . . .	106



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités

Dans un monde toujours plus concurrentiel, les industriels doivent sans cesse augmenter la qualité de leurs produits tout en diminuant leurs coûts pour ne pas disparaître. L'avènement de l'informatique leur offre la possibilité de pouvoir modéliser et simuler numériquement de plus en plus de phénomènes. Les industriels investissent massivement dans ces nouveaux outils qui sont moins coûteux que des essais réels. Ceux-ci permettent de tester différents matériaux, différentes configurations, de nouveaux procédés et de comprendre les mécanismes en jeu, tout cela dans un monde virtuel sans influence sur le monde réel.

Ces outils sont tellement efficaces qu'ils se sont rapidement imposés dans tous les secteurs : de l'industrie lourde (production de matière première, aluminium, ...) à la biologie (mécanismes moléculaires, ...) en passant par la nanotechnologie (nano-robots, nano-outils, ...). La diversité des phénomènes nécessite un grand nombre d'outils différents. Une multitude de logiciels sont alors développés à travers le monde. Parmi les logiciels commerciaux utilisés pour la résolution des problèmes de mécanique des solides, les marques ABAQUS et ANSYS sont très répandues. La complexité de l'analyse numérique dépend directement du phénomène traité. Ainsi, certains comportements mécaniques ne sont toujours pas bien simulés et/ou demandent une attention particu-

lière. Le contact mécanique frottant fait partie de ces problèmes.

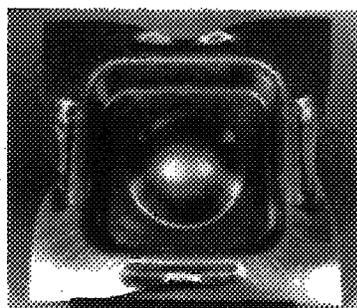
## 1.2 Problématique

Les phénomènes liés au problème de contact mécanique sont présents dans de nombreuses applications domestiques et industrielles. La nature fort complexe, des phénomènes liés à l'interaction purement mécanique ou multi-physiques entre les solides exige, encore aujourd'hui, une attention toute particulière dans les domaines de la physique, des mathématiques et de l'informatique. Or, le contact mécanique est très important pour la bonne résolution de nombreux problèmes tels que la mise en forme (forgeage, emboutissage, poinçonnement, ...), la simulation d'usures (engrenages, pneu-route, ...) ou encore tout système comportant plusieurs pièces dans un contexte mécanique ou multi-physiques (cuve d'électrolyse de l'aluminium, ...) (Figure 1.1). Ces problèmes sont importants pour de nombreux secteurs industriels, tels que la production, l'automobile, l'aéronautique, le nucléaire ou encore le militaire. Tous ces domaines témoignent du besoin grandissant d'outils performants et robustes afin de modéliser mathématiquement et de simuler numériquement le phénomène de contact mécanique. Ceci afin de quantifier précisément l'influence du comportement des interfaces sur celui du système global.

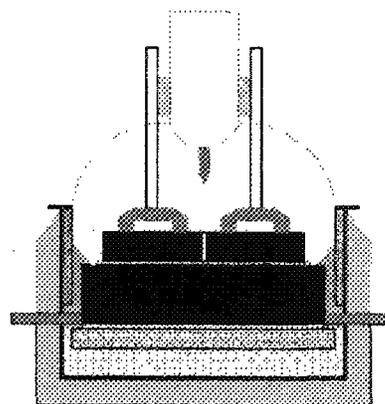
Le contact demeure, encore aujourd'hui, le problème de mécanique des solides qui présente les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. Celles-ci proviennent du changement brutal de comportement, associé au phénomène de collement / décollement et/ou à celui de l'amorce du glissement des solides mis en contact. De plus, l'évaluation des conditions de contact, nécessite la parfaite connaissance de la position relative des solides dans la configuration déformée, a priori inconnue.

De nombreuses lois ont été proposées pour permettre la modélisation des différents phénomènes se produisant au niveau de l'interface dans un problème de contact frot-

tant. Le choix de la loi applicable dépend à la fois des caractéristiques des matériaux, de la nature de l'interface mais aussi de la nature du problème. Néanmoins, ces lois présentent souvent des non-linéarités qui sont non différentiables, ce qui peut provoquer des instabilités ou des oscillations lors de la résolution numérique. Dans ce dernier cadre, de nombreuses techniques numériques ont été avancées. Cependant, chacune d'entre elles s'applique à un type de problème spécifique. Actuellement, il n'existe donc pas de méthode de résolution du problème de contact frottant suffisamment fiable, stable et rapide pouvant être appliquée à tout type de problème.



(a) Emboutissage de tôle [3]



(b) Cuve d'électrolyse [4]

Figure 1.1 – Quelques exemples de problèmes présentant des zones de contact

### 1.3 Objectifs

Ce travail de recherche a pour but d'élaborer un ensemble de méthodes permettant de résoudre une très vaste gamme de problèmes présentant une ou plusieurs interfaces de contact, de manière rapide et fiable. Ces méthodes doivent pouvoir résoudre, sans solliciter l'utilisateur, ces problèmes de contact frottant dans un contexte mécanique ou multi-physiques. Deux aspects sont envisagés : le premier est la technique de calcul

permettant d'obtenir une solution respectant les lois de contact. Le deuxième est la façon de prendre en compte le contact lorsque les frontières sont composées de nuages de points.

## 1.4 État des connaissances

Le problème de contact mécanique est bien connu car il fait partie des fondements de la mécanique. Malgré ceci, force est de constater que la modélisation mathématique n'est pas évidente. De nombreuses lois sont proposées pour représenter le comportement des interfaces, aussi bien au niveau du contact qu'au niveau du frottement [1, 2]. Toujours actuellement, des recherches sont effectuées pour proposer de nouvelles lois prenant en compte plus fidèlement les interactions au niveau des interfaces de contact. Dans cette optique, une loi de frottement non linéaire et non locale est expliquée dans [2].

Le plus souvent, la difficulté engendrée par la non-différentiabilité de ces lois est résolue avec une méthode de régularisation (pénalisation, lagrangien augmenté, ...) [5, 6, 7, 8, 9]. Or, l'utilisation d'une de ces lois produit de nouvelles difficultés lors de la résolution numérique. Même si certaines de ces méthodes sont simples, leur utilisation nécessite une bonne connaissance des phénomènes mécaniques étudiés afin de déterminer les paramètres cruciaux. Ces paramètres sont les coefficients de pénalisation normale et tangentielle. Des valeurs trop faibles de ces coefficients engendrent une mauvaise solution avec la méthode de pénalisation alors qu'avec celle du lagrangien augmenté une vitesse de convergence trop lente rend la résolution impossible. Par contre, si les valeurs de ces coefficients sont trop importantes, des oscillations numériques apparaissent ce qui rend la résolution très lente ou impossible. La méthode du lagrangien augmenté présente l'avantage de permettre un plus large choix des coefficients de pénalisation, mais l'utilisateur doit aussi contrôler les valeurs maximales de l'interpénétration et du glissement tangentiel réversible. Ces valeurs ont une grande influence sur le temps de calcul.

En outre, la discrétisation spatiale du problème produit des difficultés au niveau du calcul du contact mécanique. La détermination des valeurs entrant en jeu dans les équations du contact mécanique est difficile à calculer lorsque les deux frontières sont constituées de nuages de nœuds. La méthode la plus utilisée est l'approche point-surface sous une configuration maître-esclave [13, 3, 4, 14, 15]. Cette approche rencontre des difficultés lorsque les éléments des surfaces de contact forment des angles importants entre eux. Ceci engendre de brusques variations spatiales et temporelles des valeurs prises pour le calcul du contact mécanique, ce qui entraîne de fortes variations des valeurs des contraintes de contact. Ces variations n'ont pas de sens mécanique, elles sont le fruit de l'amplification des erreurs de discrétisation spatiale. Ces problèmes sont aussi rencontrés lorsque la projection d'un point de la surface esclave, sur lequel le contact est calculé, se déplace entre deux éléments maîtres.

Une alternative à cette approche fait l'objet de nombreuses recherches, celle basée sur les éléments joints (« mortar elements » en anglais [16, 17, 18]). Cette méthode consiste à calculer les valeurs relatives au contact pour chaque nœud de la surface esclave. Ces valeurs sont fonction de la position relative des éléments des deux surfaces de contact. Les solutions obtenues sont donc plus régulières qu'avec la méthode point-surface. Mais cette méthode n'est présentée que pour les problèmes en deux dimensions [18]. Elle n'est pas étendue aux problèmes à trois dimensions à cause de la difficulté de calculer un vecteur normal et un plan tangentiel en tous les nœuds d'une des surfaces.

Le calcul du contact peut aussi être fait d'une autre manière. La discrétisation spatiale n'est plus effectuée grâce à la méthode des éléments finis (utilisée dans la grande majorité des cas), mais par celle des éléments finis étendus (X-FEM) (voir [19, 20, 21, 22, 23, 24]). Bien que celle-ci ait déjà prouvé son efficacité dans le cadre de la modélisation de la mécanique des fissures, elle n'est pas appropriée à la modélisation de la mécanique du contact lorsque la géométrie des frontières de contact est définie au début du problème. Néanmoins, elle pourrait être utilisée pour la modélisation des phénomènes non linéaires localisés dans le voisinage des frontières de contact (déformation

des aspérités surfaciques, endommagement, fissuration, ...).

Une autre méthode de discrétisation spatiale peut améliorer le calcul du contact mécanique [26]. Les méthodes sans maillages, telles que celles basées sur la partition de l'unité ([25]), ou encore celles des éléments naturels ([26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]) présentent l'avantage d'être plus malléables. Ainsi, la densification des zones de contact peut être facilement effectuée. Mais ces méthodes ne règlent pas les problèmes du contact mécanique. Quelle que soit la méthode de discrétisation spatiale utilisée, les difficultés produites par le contact frottant sont toujours les mêmes.

Les méthodes de lissage des frontières permettent de mieux calculer les valeurs des expressions importantes pour la modélisation du contact [33, 34, 35, 36]. Ces méthodes donnent une approximation plus lisse des frontières de contact ce qui permet de diminuer les perturbations engendrées par les erreurs numériques. Toutefois, la méthode de lissage proposée dans [33, 34] ne s'applique pas au contact frottant. De plus ces méthodes sont difficiles à mettre en œuvre et très coûteuses en temps de calcul.

## 1.5 Méthodologie

La méthodologie utilisée pour remplir les objectifs de ces travaux de recherche est articulée autour de deux thèmes principaux : la technique de résolution des équations de la mécanique du contact et la méthode de considération du contact mécanique sous une discrétisation spatiale.

Ces travaux sont initiés par une étude de la mécanique du contact frottant. Elle porte sur la modélisation mathématique de la mécanique en présence de contact frottant. Cette étude met en évidence les problèmes liés à la non-différentiabilité des équations du contact mécanique. Suite à cela, une comparaison des méthodes de résolution du problème de contact mécanique frottant les plus utilisées et les plus prometteuses est faite. Cette étape est très importante car la non-différentiabilité des équations de

contact rend la résolution numérique fort complexe. Cette comparaison, permet de distinguer les avantages et les inconvénients des différentes méthodes. Ceci permet de proposer une nouvelle méthode conjuguant les avantages des autres méthodes sans leurs inconvénients. Cette nouvelle méthode peut résoudre un très grand nombre de types différents de problème de contact frottant en quasi-statique.

L'autre aspect important de la résolution numérique des problèmes de contact mécanique est situé au niveau de la discrétisation spatiale des interfaces. En effet, la discrétisation spatiale des solides est particulièrement néfaste pour le contact. Les frontières sont divisées en éléments, mais ces derniers n'en sont qu'une approximation. Une étude comparative des différentes méthodes de calcul du contact mécanique est effectuée. Celle-ci permet de mettre en évidence les avantages de chacune des méthodes. Par la suite, une méthode est proposée afin de permettre la meilleure approximation des contraintes de contact quelle que soit la méthode utilisée pour résoudre le système d'équations.

Enfin les méthodes proposées sont testées sur un problème industriel.

## 1.6 Originalité et plan

Ce travail contribue à l'avancement des connaissances dans la prise en compte des lois de contact et de frottement aussi bien au niveau mathématique que numérique.

Deux aspects peuvent être distingués dans cette contribution. Le premier porte sur l'élaboration d'une méthode de prise en compte des lois régissant l'interface de contact sous une discrétisation spatiale. Cette méthode permet d'atténuer les effets néfastes de la discrétisation spatiale. Elle adopte une formulation surface-surface basée sur les éléments joints ([16, 17, 18]), mais les modifications apportées permettent de l'utiliser facilement pour des problèmes en trois dimensions.

Le deuxième aspect porte sur les techniques de calcul. Un ensemble de méthodes

est proposé afin de rendre la résolution des problèmes de contact mécanique frottant rapide et fiable. Une nouvelle méthode, celle du lagrangien augmenté adapté est ainsi proposée. Cette méthode présente les avantages des méthodes usuelles (rapidité, symétrie de la tolérance par rapport à la frontière de contact, simplicité, et fiabilité) sans leurs inconvénients.

Ainsi cela permet de résoudre de manière fiable et rapide tout problème de contact mécanique quasi-statique. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées pour le calcul du contact mécanique dans un contexte multi-physiques. Ce qui permet de mieux traiter de nombreux problèmes industriels pour lesquels la connaissance précise des conditions de contact est primordiale. En effet, dans certains problèmes multi-physiques, les lois de comportement à l'interface de contact peuvent dépendre fortement de la valeur des contraintes de contact.

Cette thèse présente tous les aspects de la résolution numérique du problème de contact mécanique dans le domaine quasi-statique, des fondements mécaniques aux applications industrielles. Elle est composée de six chapitres. Ce chapitre a pour but d'en faire un survol général.

Le chapitre deux présente la mécanique et la mathématique du contact frottant. Il constitue un préliminaire nécessaire à la résolution du problème. Il débute par les notions de cinématique et de sthénique utiles au problème de contact mécanique. Ces notions permettent de définir les équations représentant le contact mécanique frottant. Le chapitre s'achève sur la présentation des équations de la mécanique des solides sous la forme du principe des travaux virtuels.

Le chapitre trois passe en revue les méthodes de résolution du problème de contact mécanique frottant les plus utilisées et les plus prometteuses. Il commence par la formation d'un système d'équations. Cette étape est très importante car la non-différentiabilité des équations de contact rend la résolution numérique fort complexe. Afin de

pouvoir résoudre numériquement ce problème, une discrétisation spatiale est effectuée à partir de la méthode des éléments finis. La discrétisation spatiale des solides est particulièrement néfaste pour le contact. En effet les frontières sont divisées en éléments, mais ces derniers n'en sont qu'une approximation. Ainsi, différentes méthodes sont exposées pour prendre en compte le contact mécanique.

Malgré une recherche très active dans ce domaine, la résolution numérique du problème de contact mécanique frottant pose toujours problème. Ainsi le chapitre quatre met en avant les carences des méthodes les plus souvent utilisées à travers quelques exemples simples.

La cinquième partie constitue la principale contribution originale de ce travail de recherche. Elle explique les nouvelles méthodes envisagées. Cette recherche a donné naissance à une méthode permettant la résolution du problème de contact frottant d'une manière fiable et rapide. De plus, une méthode de prise en compte du contact mécanique basée sur les éléments joints est envisagée pour les problèmes en trois dimensions. Ces méthodes sont mises à l'épreuve grâce aux problèmes qui ont pris en défaut les méthodes les plus répandues. Un exemple industriel démontre la robustesse de ces méthodes.

La conclusion générale ainsi que les perspectives futures figurent dans le dernier chapitre.

# Chapitre 2

## Mécanique du contact frottant

Ce chapitre a pour but d'établir un système d'équations représentant la mécanique des solides en présence de contact frottant. Cette analyse se focalise sur le contact mécanique. Bien que celui-ci soit un phénomène très connu, une attention particulière doit être portée lors de la transcription du système d'équations. En effet, la détermination du statut de contact nécessite la connaissance de la position relative des frontières. Ainsi, ce chapitre commence par une présentation de quelques notions de cinématique et de sthénique dans le cadre général de grandes transformations. Par la suite, les conditions permettant le respect de la mécanique du contact frottant sont exposées. Finalement, le principe des travaux virtuels permet de former un système d'équations représentant la mécanique des solides en présence de contact frottant.

### 2.1 Notions de cinématique et de sthénique

#### 2.1.1 Cinématique

Dans la configuration initiale, le solide  $\alpha$ , (avec  $\alpha = 1$  ou  $2$ ), occupe l'espace noté  $\Omega_\alpha$ . La position de n'importe laquelle de ces particules est définie par le vecteur  $\mathbf{X}^\alpha$ . À l'instant  $t$ , (avec  $t \in [0, T]$ ), l'espace qu'il occupe est noté  $\Omega_\alpha^t$  et la position de cette même particule est donnée par le vecteur  $\mathbf{x}^\alpha$ , ce vecteur dépend donc de  $\mathbf{X}^\alpha$  et de  $t$ . Le vecteur déplacement de cette particule est notée  $\mathbf{u}^\alpha$  et il est défini par l'expression

suivante :

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) - \mathbf{X}^\alpha. \quad (2.1)$$

La frontière du solide  $\alpha$  est divisée en trois parties, notées respectivement,  $\Gamma_u^\alpha$ ,  $\Gamma_f^\alpha$  et  $\Gamma_c^\alpha$  dans la configuration initiale, et  $\gamma_u^\alpha$ ,  $\gamma_f^\alpha$  et  $\gamma_c^\alpha$  dans la configuration déformée, à l'instant  $t$ . Les parties des frontières notées avec un indice  $u$ ,  $f$  ou  $c$  représentent respectivement, la surface sur laquelle un déplacement, une force ou une condition de contact sont imposés (Figure 2.1). Dans ce document, sauf mention contraire, les indices en lettres grecques prennent les valeurs 1 ou 2.

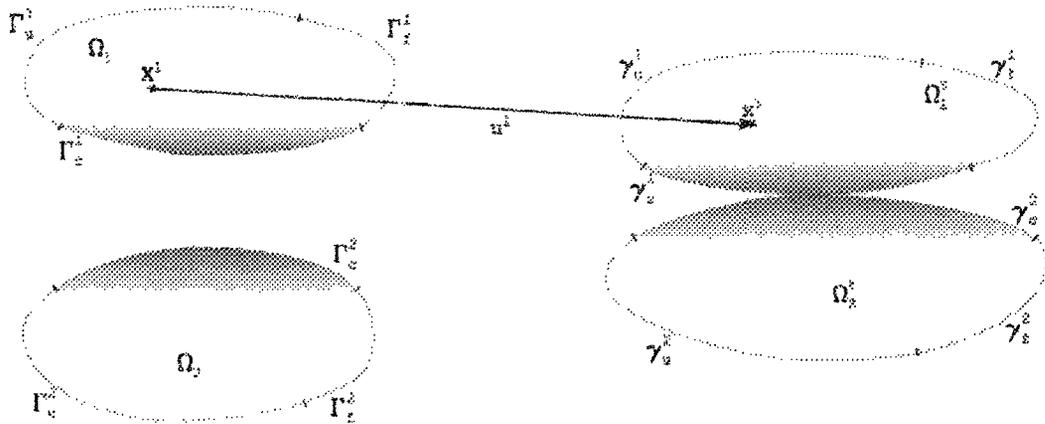


Figure 2.1 – Représentation des solides au cours de la déformation.

Afin de connaître l'état de déformation dans le voisinage de n'importe quelle particule, à l'instant  $t$ , la transformation étudiée est supposée être différentiable sur  $\Omega_\alpha$ . Ainsi, le tenseur gradient de déformation de cette transformation est noté  $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ . C'est un tenseur du second ordre défini par l'expression suivante :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}^\alpha, t) = \overline{\overline{\frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{X}^\alpha}}}(\mathbf{X}^\alpha, t). \quad (2.2)$$

Dans le cadre de cette thèse, l'attention est principalement portée sur les frontières

de contact.

### Particule appartenant à la surface candidate au contact

Dans le cas particulier, où la particule définie précédemment appartient à une surface candidate au contact, elle est notée  $P^\alpha$ . La particularité du problème de contact impose la connaissance d'informations supplémentaires sur la géométrie des frontières candidates au contact. Pour ceci, une fonction bijective,  $\psi_0$ , peut être définie pour mettre en relation la frontière de contact  $\Gamma_c^\alpha$  avec l'ensemble  $A$  (un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ). Ainsi, la position de la particule  $P^\alpha$  peut être donnée par :

$$\psi_0 : A \rightarrow \Gamma_c^\alpha \quad (2.3)$$

$$\xi \rightarrow \psi_0(\xi) \quad (2.4)$$

$$X^\alpha = \psi_0(\xi) \quad (2.5)$$

$$x^\alpha = x^\alpha(\psi_0(\xi), t) = \psi(\xi, t) \quad (2.6)$$

où  $\xi (= (\xi^1, \xi^2))$  est une coordonnée dans  $A$ .

Finalement, cette paramétrisation est supposée suffisamment régulière pour permettre le calcul de toutes les dérivées nécessaires. Cette paramétrisation, permet de définir une base, notée  $(T_1, T_2, N)$  dans la configuration initiale ou  $(\tau_1, \tau_2, n)$  dans la configuration déformée, au temps  $t$  (pour un problème en deux dimensions, voir la figure 2.2 ). Les composantes tangentielles de cette base sont définies en dérivant le vecteur position par rapport aux paramètres  $\xi^\beta$ , tel que :

$$T_\beta(\xi) = \frac{\partial \psi_0(\xi)}{\partial \xi^\beta} \quad (2.7)$$

$$\tau_\beta(\xi, t) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\alpha} \frac{\partial \psi_0(\xi)}{\partial \xi^\beta} = \overline{\overline{F}} \cdot T_\beta(\xi) \quad (2.8)$$

La composante normale est définie par :

$$\mathbf{N}(\xi) = \frac{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2}{\|\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2\|} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{n}(\xi, t) = \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2}{\|\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2\|} \quad (2.10)$$

Force est de constater que les propriétés des bases qui viennent d'être définies  $((\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{N})$  et  $(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n})$ ), sont entièrement conditionnées par la nature de la paramétrisation de la surface de contact. Néanmoins, la paramétrisation est définie de manière à obtenir un vecteur normal sortant (voir figure 2.2).

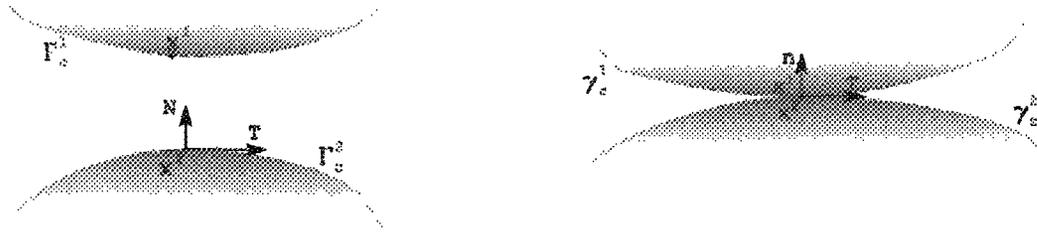


Figure 2.2 - Représentation des frontières de contact au cours de la déformation.

En outre, la description de la cinématique de deux particules candidates au contact nécessite la prise en compte de deux aspects. Le premier est la notion d'interpénétrabilité (distance entre deux particules candidates). Le deuxième aspect est lié à la notion de frottement (vitesse tangentielle des particules candidates).

Pour ce faire, la fonction écart  $g(\mathbf{X}^1, t)$  est définie par l'expression suivante :

$$\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) - \mathbf{x}^2(\psi(\xi_p), t) = -g(\mathbf{X}^1, t) \cdot \mathbf{n} \quad (2.11)$$

où,  $\xi_p$  est la coordonnée paramétrique du point  $\mathbf{x}^2$  de la frontière  $\gamma_c^2$ , celui-ci correspondant à la projection orthogonale du point de coordonnée  $\mathbf{x}^1$  sur la surface  $\gamma_c^2$ . Le vecteur normal à la surface  $\gamma_c^2$  au point  $\mathbf{x}^2$  est noté  $\mathbf{n}$ . De plus, les frontières  $\gamma_c^1$  et

$\gamma_c^2$  sont supposées être suffisamment proches pour que le point  $\mathbf{x}^2$  soit le point de la surface  $\gamma_c^2$  le plus proche du point  $\mathbf{x}^1$ . Si cette relation (équation (2.11)) est dérivée par rapport au temps on obtient :

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{X}^1, t) - \left( \mathbf{v}_2(\psi(\xi_p), t) - g \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}(\psi(\xi_p), t) \right) = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial t} \tau'_\beta - \frac{\partial g}{\partial t} \mathbf{n}(\psi(\xi_p), t) \quad (2.12)$$

où,  $\tau'_\beta$  est défini par :

$$\tau'_\beta = \tau_\beta - g \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^\beta} \quad (2.13)$$

$\tau'_1$  et  $\tau'_2$  représentent une nouvelle base de l'espace vectoriel formé par les vecteurs  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . De plus, le terme  $g \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}(\psi(\xi_p), t)$  représente la vitesse de l'extrémité d'une barre de longueur  $g$  dont le vecteur directeur est  $\mathbf{n}$  et dont l'autre extrémité est fixée sur le point de coordonnée  $\mathbf{x}^2$ . Par conséquent, la partie de droite de l'équation (2.12) représente la vitesse relative entre les points de coordonnées  $\mathbf{x}^1$  et  $\mathbf{x}^2$  (pour plus de détail voir [3]).

La vitesse relative tangentielle,  $\mathbf{v}_t$ , peut donc être facilement isolée :

$$\mathbf{v}_t = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial t} \tau'_\beta. \quad (2.14)$$

### Petits déplacements

Dans le cadre de l'hypothèse de petits déplacements relatifs entre les frontières de contact, la coordonnée paramétrique  $\xi_p$  ne varie que très peu. Le couple de point  $\mathbf{x}^1$  et  $\mathbf{x}^2$  candidat au contact est le même dans la configuration initiale et dans la configuration déformée. De même, la base paramétrique de la surface de contact est identique dans la configuration déformée et dans la configuration initiale (définie dans les équations (2.7) à (2.10)).

$$\mathbf{T}_\beta(\xi) = \tau_\beta(\xi, t) = \tau_\beta \quad \text{et} \quad \mathbf{N}(\xi) = \mathbf{n}(\xi, t) = \mathbf{n} \quad (2.15)$$

La fonction écart et la vitesse relative tangentielle de deux particules (de coordonnées  $\mathbf{x}^1$  et  $\mathbf{x}^2$ ) candidates au contact sont exprimées par :

$$\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) - \mathbf{x}^2(\psi(\xi_p), t) = -g(\mathbf{X}^1, t) \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{v}_t = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial t} \boldsymbol{\tau}_\beta. \quad (2.16)$$

### 2.1.2 Sthénique

Il existe différentes façons d'exprimer l'état de contrainte d'un système. Elles dépendent de la configuration adoptée. Pour sa définition, si on considère la configuration déformée, pour tout point  $\mathbf{x}^\alpha$ , de  $\Omega_\alpha^t$ , un volume infinitésimal entourant ce point est noté  $dv$ . Une surface infinitésimale extérieure de ce volume  $dv$  ( $ds$ ) et sa normale sortante ( $\mathbf{n}$ ) sont considérées. La force qui s'exerce sur ce volume  $dv$  par l'intermédiaire de cette surface  $ds$  est notée  $d\mathbf{f}$ . La valeur des contraintes dans la configuration déformée est donnée par le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ , qui est défini par :

$$\lim_{ds \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{ds} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \quad (2.17)$$

Une version lagrangienne de ce tenseur peut aussi être donnée en transposant la surface,  $ds$  dans la configuration initiale. Elle est notée  $dS$ , et  $\mathbf{N}$  est sa normale. On obtient ainsi le tenseur de contraintes de Piola Kirchoff de première espèce,  $\overline{\boldsymbol{\Pi}}$ , défini par :

$$\lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{f}}{dS} = \overline{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{N} \quad \text{ou bien par} \quad \overline{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbf{X}) = \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{F}}_\alpha^{-T} \left( \det \overline{\mathbf{F}} \right) \quad (2.18)$$

Le tenseur de Piola Kirchoff de première espèce représente les contraintes dans la configuration déformée par rapport aux surfaces prises dans la configuration initiale.

### Petits déplacements

Dans le cas particulier de petits déplacements, tous les tenseurs de contrainte sont égaux :

$$\overline{\overline{\Pi}} = \overline{\overline{\sigma}} \quad (2.19)$$

Suite à la présentation de quelques notions élémentaires de cinématique et de sthénique, les spécificités du contact frottant seront exposées. Les relations que le contact mécanique impose entre la cinématique et la sthénique seront traitées.

## 2.2 Formulation du contact avec frottement

Le problème de contact mécanique frottant est un exemple de problème régi par des équations et des inéquations non linéaires [1]. Deux genres de non-linéarités peuvent être distingués ; celle du contact et celle du frottement.

### 2.2.1 Modélisation du contact

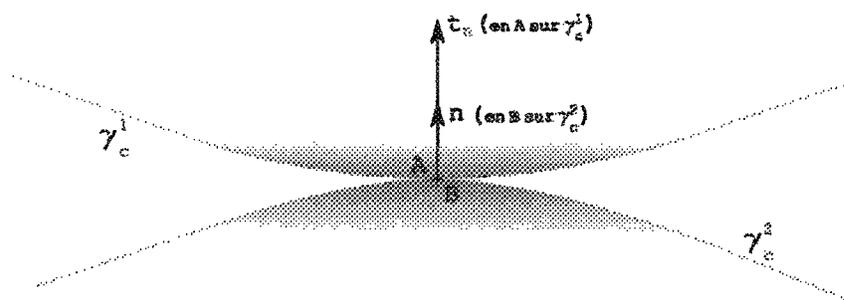


Figure 2.3 – Représentation du contact normal

Il existe plusieurs modélisations du phénomène de contact, entre autres, le contact unilatéral et le bilatéral. Le choix du type de loi dépend des propriétés physiques et

mécaniques des surfaces mises en jeu. Le contact bilatéral est un type de contact collant. Cela signifie que les solides ne peuvent pas s'interpénétrer mais qu'une fois en contact, une force supérieure à un certain seuil doit être appliquée pour pouvoir les décoller. Ce type de contact n'est pas traité dans ce document. Néanmoins, toutes les méthodes de calcul utilisées pourront être étendues à ce type de contact.

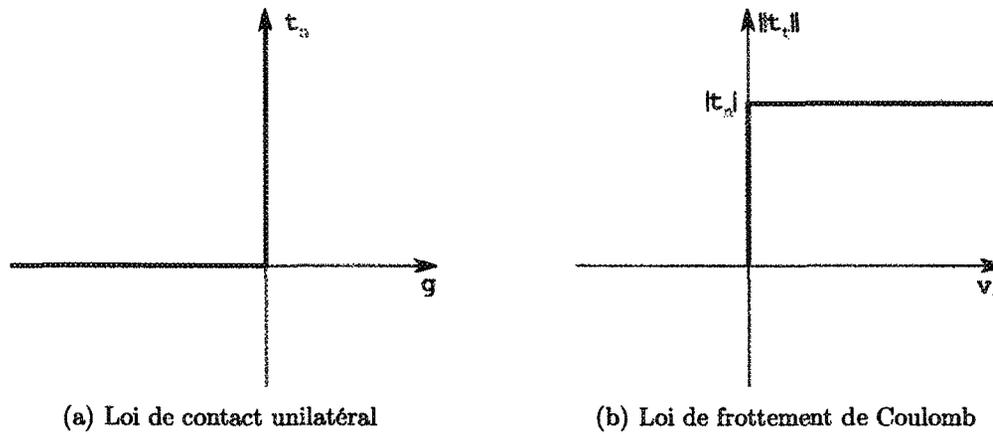


Figure 2.4 – Représentation des lois de contact et de frottement

Le contact unilatéral découle directement de l'impossibilité d'interpénétration de la matière. D'après la partie précédente (partie 2.1 page 10), pour tout point A de coordonnée  $\mathbf{x}_A$ , appartenant à la frontière de contact  $\gamma_c^1$ , la distance entre ce point et la frontière de contact  $\gamma_c^2$  est donnée par  $g(\mathbf{x}_A, t)$  (équation 2.11 page 13). Si la valeur de  $g(\mathbf{x}_A, t)$  est finie, cela signifie que le point A admet un vis-à-vis sur la frontière  $\gamma_c^2$ , celui-ci est noté B et sa coordonnée  $\mathbf{x}_B$  (Figure 2.3). La force de contact au point A,  $\mathbf{t}_c^1 (= \overline{\overline{\Pi}}_1 \mathbf{N})$  est définie à partir du tenseur de Piola Kirchoff de première espèce. La composante normale de la force de contact est notée  $t_n = -\mathbf{t}_c^1 \cdot \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure en A (Figure 2.3). La loi de contact unilatéral de Signorini (Figure 2.4(a)) est exprimée par les inégalités suivantes :

$$g = (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \quad t_n \geq 0 \quad (2.20)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = 0 & t_n > 0 & \text{contact} \\ g < 0 & t_n = 0 & \text{non contact} \end{cases} \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Modélisation du frottement

La modélisation du frottement consiste à établir une relation entre la force de contact tangentielle et la vitesse relative de glissement (Figure 2.5). Il est difficile de prendre en compte le frottement (adhérence - glissement) à cause de la très grande diversité des comportements et de la précision recherchée. Ceci conduit à la formulation de plusieurs modélisations du frottement. Historiquement, la loi de Coulomb est la première à être proposée. De plus, elle est toujours la plus utilisée. En effet, elle permet de bien représenter le comportement en frottement de nombreux matériaux. Pour l'exposer, deux quantités doivent être définies : la force de contact tangentielle,  $\mathbf{t}_t$ , et la vitesse relative tangentielle,  $\mathbf{v}_t$  (voir partie 2.1 page 10) :

$$\mathbf{t}_t = \mathbf{t}_c^1 + t_n \mathbf{n} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{v}_t = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial t} \boldsymbol{\tau}'_\beta \quad (2.23)$$

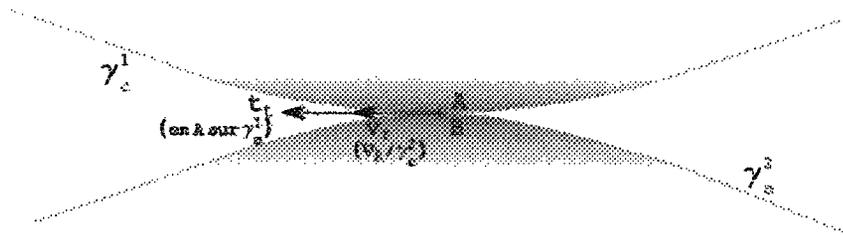


Figure 2.5 – Représentation du contact tangentiel et du glissement.

En faisant l'hypothèse de persistance du contact mécanique et pour des raisons d'objectivité, la forme de la force de contact tangentielle (équation (2.22)) et celle de la vitesse relative (équation (2.23)) sont modifiées (pour plus d'informations voir [3]). Ces

deux quantités sont exprimées dans la base duale du plan tangent, par les expressions suivantes :

$$\mathbf{t}_t = t_{t\beta} \boldsymbol{\tau}^\beta \quad (2.24)$$

$$\mathbf{v}_t = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t} M_{\alpha\beta} \boldsymbol{\tau}^\beta. \quad (2.25)$$

$\overline{\overline{M}}_{\bullet\bullet}$  est un tenseur du second ordre défini par :

$$M_{\alpha\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta \quad (2.26)$$

Les vecteurs  $\boldsymbol{\tau}^\alpha$  sont obtenus en transportant les vecteurs de la base duale,  $\mathbf{T}^\alpha$ , dans la configuration déformée. Les vecteurs de la base duale,  $\mathbf{T}^\alpha$ , sont définis par la relation :

$$\mathbf{T}^\alpha = M^{\alpha\beta} \mathbf{T}_\beta \quad (2.27)$$

où, le tenseur du second ordre  $\overline{\overline{M}}^{\bullet\bullet}$  est l'inverse du tenseur  $\overline{\overline{M}}_{\bullet\bullet}$ . Ainsi, la loi de Coulomb peut être écrite sous la forme :

$$\|\mathbf{t}_t\| \leq \mu t_n \quad \zeta \geq 0 \quad (2.28)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|\mathbf{t}_t\| < \mu t_n & \mathbf{v}_t = \mathbf{0} & \text{adhérence} \\ \|\mathbf{t}_t\| = \mu t_n & \mathbf{v}_t = \zeta \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} \text{ avec } \zeta \geq 0 & \text{glissement} \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $\zeta$  est le taux de glissement absolu.

De plus, ce modèle peut permettre différents ajustements en fonction de la température et d'autres variables locales, grâce au choix du coefficient de frottement de Coulomb,  $\mu$  (Figure 2.4(b)).

Afin de généraliser cette modélisation et de la rendre plus proche de la réalité, la microstructure de la zone de contact peut être prise en compte par une approche non locale et non linéaire [2]. Mais il existe aussi beaucoup d'autres modélisations telles que

la loi de Tresca, ou celle de Coulomb - Orowan. Le choix de la loi de frottement est lié aux caractéristiques mécaniques des surfaces candidates au contact.

L'exposé des conditions d'admissibilité du contact frottant est suivi de l'étude des équations régissant la mécanique des solides et des structures. Parmi les différentes formulations envisageables, le principe des travaux virtuels est choisi.

### 2.3 Principe des travaux virtuels

D'après le principe fondamental de la dynamique, dans le cas quasi-statique, l'équation suivante est vérifiée en tout point  $\mathbf{x}^\alpha$  de  $\Omega_\alpha^t$  :

$$\mathit{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

où,  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$  et  $\mathbf{f}_v$  désignent respectivement, le tenseur des contraintes de Cauchy et la force volumique au point  $\mathbf{x}^\alpha$  de  $\Omega_\alpha^t$ . En multipliant scalairement l'équation précédente par un déplacement virtuel quelconque  $\delta \mathbf{u}^\alpha$ , la forme variationnelle suivante est obtenue :

$$\delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathit{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathbf{f}_v = 0 \quad (2.31)$$

Les définitions des opérateurs différentiels permettent d'obtenir l'égalité qui suit :

$$\delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \mathit{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathit{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta \mathbf{u}^\alpha) - \overline{\overline{\overline{\mathit{grad}} \delta \mathbf{u}^\alpha}} : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.32)$$

De plus, comme  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$  est symétrique, alors :

$$\overline{\overline{\overline{\mathit{grad}} \delta \mathbf{u}^\alpha}} : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\overline{\mathit{grad}} \delta \mathbf{u}^\alpha}^T} + \overline{\overline{\overline{\mathit{grad}} \delta \mathbf{u}^\alpha}}) : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \overline{\overline{\overline{\mathit{grad}}_S \delta \mathbf{u}^\alpha}} : \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.33)$$

L'expression (2.33) est introduite dans la forme variationnelle (équation (2.31)). Enfin, la forme variationnelle est intégrée sur l'ensemble des deux solides liés au problème de

contact. La formulation ainsi calculée prend en compte les conditions aux limites, elle est appelée forme faible. Cette forme faible correspond au principe des travaux virtuels dans le cas quasi-statique, qui peut être écrit de la manière suivante :

$$\mathcal{P}^{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \mathcal{P}^{ext}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + \mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = 0 \quad (2.34)$$

$\mathcal{P}^{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  et  $\mathcal{P}^{ext}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$  représentent, respectivement, le travail virtuel produit par les forces internes et celui des forces externes à l'exception des forces de contact. Ces dernières sont incluses dans le terme  $\mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ .  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  désignent respectivement les champs réel et virtuel de déplacement définis sur l'ensemble  $\Omega^t$  ( $\mathbf{u}^1 \cup \mathbf{u}^2$  et  $\delta\mathbf{u}^1 \cup \delta\mathbf{u}^2$ ). L'ensemble  $\Omega^t$  est défini par l'union des ensembles  $\Omega_1^t$  et  $\Omega_2^t$ . De même, l'ensemble  $\Omega$  désigne cette union dans la configuration non déformée ( $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ). De plus, les parties de la frontière de  $\Omega^t$  sur lesquelles des contraintes, des déplacements, ou des conditions possibles de contact sont imposés, sont notées respectivement  $\gamma_f$  ( $\gamma_f^1 \cup \gamma_f^2$ ),  $\gamma_u$  ( $\gamma_u^1 \cup \gamma_u^2$ ) ou  $\gamma_c$  ( $\gamma_c^1 \cup \gamma_c^2$ ). Ces parties de la frontière sont désignées dans le même ordre par  $\Gamma_f$  ( $\Gamma_f^1 \cup \Gamma_f^2$ ),  $\Gamma_u$  ( $\Gamma_u^1 \cup \Gamma_u^2$ ) et par  $\Gamma_c$  ( $\Gamma_c^1 \cup \Gamma_c^2$ ) dans la configuration initiale (voir partie 2.1 page 10).

Le principe des travaux virtuels doit être vérifié par le champ de déplacement réel et ceci pour tout champ de déplacement virtuel cinétiquement admissible. Cela signifie que le champ de déplacement virtuel doit être suffisamment régulier sur l'ensemble de définition et que sa valeur doit être nulle sur la frontière où des déplacements sont imposés.

Dans la configuration d'origine, ces contributions sont exprimées par :

$$\mathcal{P}^{int}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \overline{\frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}}(\mathbf{X}, t) : \overline{\overline{\Pi}}(\mathbf{X}, t) d\Omega \quad (2.35)$$

$$\mathcal{P}^{ext}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{X}, t) d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}_s(\mathbf{X}, t) d\Gamma_f \quad (2.36)$$

$$\mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c^1} \delta\mathbf{u}^1(\mathbf{X}_1, t) \cdot \mathbf{t}_c^1(\mathbf{X}_1, t) d\Gamma_c^1 + \int_{\Gamma_c^2} \delta\mathbf{u}^2(\mathbf{X}_2, t) \cdot \mathbf{t}_c^2(\mathbf{X}_2, t) d\Gamma_c^2 \quad (2.37)$$

Dans la configuration lagrangienne,  $F_v$  et  $F_s$  représentent respectivement les forces volumiques imposées sur le domaine  $\Omega$  et les forces surfaciques imposées sur la frontière  $\Gamma_f$ . Ainsi, les relations entre ces variables et celles de la configuration eulérienne sont données par les expressions suivantes :

$$F_v = f_v \left( \det \overline{F} \right) \quad \text{et} \quad F_s = f_s \cdot \overline{F}^{-T} \left( \det \overline{F} \right). \quad (2.38)$$

$f_s$  représente la force appliquée en un point  $x$  de la surface  $\gamma_f$ .

Pour tout point  $x_1(X_1, t)$  de  $\gamma_c^1$  appartenant à la zone de contact avec  $\gamma_c^2$ , le point correspondant sur  $\gamma_c^2$  est noté  $x_2(X_2, t)$ . Donc, d'après le principe d'action-réaction :

$$t_c^2(X_2, t) d\Gamma_c^2 = -t_c^1(X_1, t) d\Gamma_c^1 \quad (X_1, X_2) \in \Gamma_c^1 \times \Gamma_c^2 \quad (2.39)$$

D'après ce principe (équation (2.39)), la composante des travaux virtuels correspondante au contact peut être écrite sous la forme d'une intégrale sur la frontière  $\Gamma_c^1$  :

$$\mathcal{P}^c(u, \delta u) = \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta t_{t_\beta} + \delta g t_n) d\Gamma_c^1 \quad (2.40)$$

Dans cette expression, les variables  $\delta \xi^\alpha$  et  $\delta g$  représentent respectivement le champ de déplacement virtuel tangentiel et le normal sur la surface de contact  $\Gamma_c^1$  (pour plus d'informations voir [3]). Ces champs sont définis par les relations ci-dessous :

$$A_{\alpha\beta} \delta \xi^\beta = [\delta u^1 - \delta u^2] \tau_\alpha - g n \cdot \delta u_{,\alpha}^2 \quad (2.41)$$

$$\delta g = [\delta u^1 - \delta u^2] n \quad (2.42)$$

Dans cette expression et dans la suite de ce document,  $(\cdot)_{,\alpha}$  représente l'opérateur dérivation de  $(\cdot)$  par rapport au paramètre  $\xi^\alpha$ . Pour des raisons de simplification d'écriture, les dépendances ne seront plus notées. Néanmoins, la connaissance de la configuration relative des frontières candidates au contact à l'instant  $t$  ( $\gamma_c^1$  et  $\gamma_c^2$ ) est nécessaire. En ef-

fet, pour pouvoir calculer la valeur de la composante des travaux virtuels liée aux forces de contact, la position du point  $\mathbf{x}_2$  doit être déterminée pour tout point  $\mathbf{x}_1$  de  $\gamma_c^1$ . Cette formulation du principe des travaux virtuels comprend deux inconnues supplémentaires, la force normale de contact et la force tangentielle de contact. Cette équation (2.34) et les équations régissant le contact frottant forment un système d'équations décrivant la mécanique des solides en présence de contact frottant. Ce système d'équations peut être représenté de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}_v(\mathbf{X}, t) d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{F}_s(\mathbf{X}, t) d\Gamma_f \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\overline{\partial \delta \mathbf{u}}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) : \overline{\overline{\Pi}}(\mathbf{X}, t) d\Omega + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta t_{i\beta} + \delta g t_n) d\Gamma_c^1 = 0 \\
 & g \leq 0 \\
 & t_n \geq 0 \\
 & \|\mathbf{t}_t\| \leq \mu t_n \\
 & \mathbf{v}_t = \zeta \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} \\
 & \zeta \geq 0 \\
 & g t_n = 0 \\
 & (\|\mathbf{t}_t\| - \mu t_n) \zeta = 0
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

## 2.4 Conclusion

Après avoir exposé le problème de contact mécanique, nous remarquons qu'il n'est pas facilement modélisable. En effet, le comportement mécanique peut être très différent entre deux interfaces, aussi bien au niveau du contact qu'au niveau du frottement. De nombreuses lois de comportement ont donc été proposées dans la littérature. Le choix d'une de ces lois est surtout lié aux caractéristiques physiques et mécaniques des surfaces de contact, mais aussi à celles des solides et aux conditions d'évolution du problème. Or, ces lois présentent souvent des non-linéarités qui sont non différentiables. Ceci peut provoquer des instabilités ou des oscillations numériques lors d'une résolution

numérique. Néanmoins, ce travail ne s'intéresse pas au choix de la loi du contact mécanique frottant, mais plutôt à la résolution du problème dans le cas où cette loi est non différentiable. Dans la suite de ce document, le problème de contact mécanique étudié obéira à la loi du contact unilatéral et à la loi de frottement de Coulomb.

Le chapitre suivant présente les méthodes de résolution du problème de contact mécanique les plus utilisées.

# Chapitre 3

## Méthodes de résolution

La résolution d'un problème de mécanique des solides en présence de contact frottant est généralement effectuée à l'aide de méthodes numériques. Celles-ci se montrent même indispensables pour des problèmes complexes. La résolution numérique du problème de contact frottant nécessite la formulation d'un système d'équations avec un nombre fini d'inconnues. Or, la non-linéarité et la non-différentiabilité des équations régissant le contact mécanique frottant posent des problèmes pour la résolution numérique. Pour ce faire, les méthodes de régularisation sont les plus utilisées pour former le système d'équations à résoudre. Quelques unes de ces méthodes sont présentées. Par la suite, une discrétisation des équations est proposée. Cette discrétisation spatiale pose le problème de la prise en compte du contact mécanique lorsque les frontières sont composées de points. Ainsi, la troisième partie expose deux méthodes de calcul du contact mécanique entre deux nuages de points. Enfin, la dernière partie traite des algorithmes de résolution.

### 3.1 Formulation du système d'équations

La formulation d'un système d'équations adapté à la discrétisation nécessite la transformation des inéquations en équations. Les méthodes de régularisation sont majoritairement répandues. Parmi ces méthodes, les deux les plus importantes sont : celle de

pénalisation [5, 3, 4] et celle des multiplicateurs de Lagrange [10, 11, 12]. Pour concilier les avantages de l'une et de l'autre, un certain nombre de méthodes hybrides ont été proposées [7, 8, 9]. La plus commune de ces méthodes hybrides est celle du lagrangien augmenté [7, 8]. Il est important de préciser que dans chacun de ces cas, un système d'équations est obtenu par la linéarisation du système formé à partir des équations du principe des travaux virtuels (voir partie 2.3).

### 3.1.1 Méthode de pénalisation

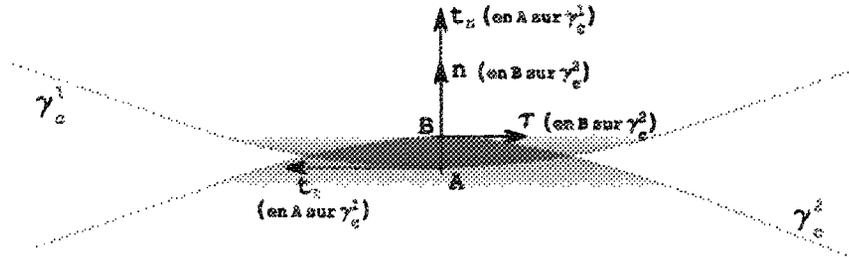


Figure 3.1 – Représentation du contact avec la méthode de pénalisation.

La méthode de pénalisation a été l'une des premières à être utilisée. Elle exploite le fait que la résolution numérique d'un système d'équations produit une approximation de la solution. Ainsi, les déplacements des interfaces de contact sont connus avec une certaine tolérance. Les conditions de contact sont donc respectées si l'interpénétration et le glissement tangentiel réversible sont inférieurs à cette tolérance. En conséquence, la méthode de pénalisation viole les conditions d'admissibilité en imposant une relation de proportionnalité entre la force de contact et l'interpénétration (pour la composante normale de la force) ou le glissement tangentiel réversible (pour la composante tangentielle de la force). Elle présente l'avantage d'être d'une grande simplicité pour la mise en œuvre, ce qui fait d'elle, encore aujourd'hui, l'une des méthodes les plus répandues. Cette méthode consiste à remplacer les lois de contact et de frottement par des relations définissant les contraintes de contacts de manière continue en fonction de la distance

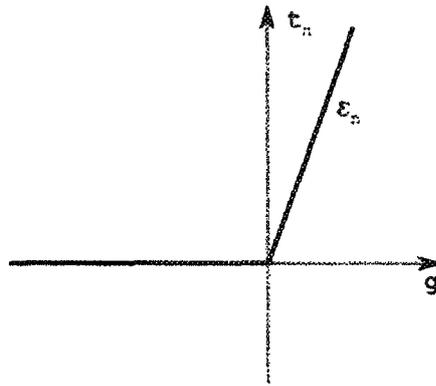
entres les deux solides et le glissement relatif.

La condition d'admissibilité de contact (équation (2.20) page 17) est régularisée :

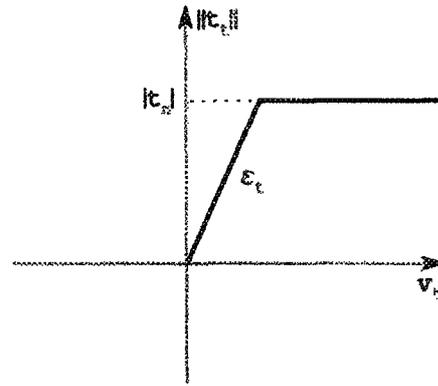
$$t_n = \varepsilon_n \langle g \rangle \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g \geq 0 & t_n = \varepsilon_n g & \text{contact} \\ g < 0 & t_n = 0 & \text{non contact} \end{cases} \quad (3.2)$$

où,  $\varepsilon_n$  est le paramètre de pénalisation normale et  $\langle . \rangle$  les crochets de Macauley qui désignent la partie positive de son opérande.



(a) Loi de contact unilatéral.



(b) Loi de frottement de Coulomb.

Figure 3.2 – Représentation des lois de contact et de frottement avec la méthode de pénalisation.

La condition d'admissibilité de frottement (équation (2.28) page 19) est régularisée :

$$\Phi = \|t_t\| - \mu t_n \leq 0 \quad \zeta \geq 0 \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi < 0 & v_t = \frac{1}{\varepsilon_t} \mathcal{L}_v t_t & \text{adhérence} \\ \Phi = 0 & v_t - \zeta \frac{t_t}{\|t_t\|} = \frac{1}{\varepsilon_t} \mathcal{L}_v t_t \text{ avec } \zeta \geq 0 & \text{glissement} \end{cases} \quad (3.4)$$

L'opérateur  $\mathcal{L}_v$  désigne la dérivée de Lie, tel que :

$$\mathcal{L}_v t_t = \dot{t}_{t\beta} \tau_\beta,$$

et  $\varepsilon_t$ , le paramètre de pénalisation tangentielle. Le symbole  $(\cdot)$  correspond à la dérivée par rapport au temps.

Ainsi, le système d'équations régissant la mécanique des solides en présence de contact frottant, (voir partie 2.3 page 20,) est exprimé par :

$$\underbrace{\mathcal{P}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{P}^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})}_{\mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})} + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta t_{t\beta} + \delta g t_n) d\Gamma_c^1 = 0 \quad (3.5)$$

avec

$$t_n = \varepsilon_n \langle g \rangle \quad (3.6a)$$

$$\Phi = \|\mathbf{t}_t\| - \mu t_n \leq 0 \quad (3.6b)$$

$$\mathbf{v}_t - \zeta \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} = \frac{1}{\varepsilon_t} \mathcal{L}_v t_t \quad \text{avec } \zeta \geq 0 \quad (3.6c)$$

$$\Phi \zeta = 0 \quad (3.6d)$$

La résolution de ce problème est obtenue grâce à la linéarisation de l'équation d'équilibre (3.5) dans le cadre de l'algorithme de Newton-Raphson. Cette résolution s'effectue en plusieurs itérations. Pour chaque itération, le calcul du développement limité au premier ordre de l'équation d'équilibre (équation (3.5)) permet d'obtenir une correction incrémentale du champ solution. Dans le cas présent, l'inconnue est le champ de déplacement. Une correction incrémentale du champ de déplacement est calculée en

résolvant l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta t_{t_\beta} + \delta g t_n) d\Gamma_c^1}_{\delta \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}} \\
& + \underbrace{\Delta \mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta \Delta t_{t_\beta} + \delta g \Delta t_n) d\Gamma_c^1 + \int_{\Gamma_c^1} (t_{t_\beta} \Delta \delta \xi^\beta + t_n \Delta \delta g) d\Gamma_c^1}_{\delta \mathbf{u} \cdot \overline{\mathcal{K}}_T \cdot \Delta \mathbf{u}} \quad (3.7) \\
& = \delta \mathbf{u} \cdot \mathcal{R} + \delta \mathbf{u} \cdot \overline{\mathcal{K}}_T \cdot \Delta \mathbf{u} = 0
\end{aligned}$$

Lorsque les coefficients de pénalisation tendent vers l'infini, les conditions de contact imposées par la méthode de pénalisation tendent vers les conditions d'admissibilité. Cependant, une valeur trop élevée des coefficients de pénalisation entraîne un mauvais conditionnement du système et donc, des oscillations numériques lors de la résolution. Une valeur trop faible provoque des interpénétrations ou des glissements tangentiels réversibles inadmissibles. Donc, le choix de ces paramètres est d'une grande importance. Des procédures d'ajustement ont été proposées pour se limiter à des valeurs d'interpénétration admissible, [33, 34]. Néanmoins, cette formulation reste très utilisée [3, 12, 6], car elle permet l'utilisation d'un schéma d'intégration en temps explicite, et l'implémentation de celle-ci est relativement simple. De plus, lorsque l'interpénétration et les glissements tangentiels réversibles sont contrôlés, ils peuvent avoir une représentation physique. Ils peuvent servir à modéliser les déformations élastiques des aspérités surfaciques.

Dans le but de pallier aux limites de cette méthode, et notamment afin de pouvoir entièrement respecter les conditions d'admissibilité, une autre méthode a été envisagée, celle des multiplicateurs de Lagrange.

### 3.1.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode introduit de nouvelles variables, les multiplicateurs de Lagrange notés  $\lambda$ . Ils représentent les forces empêchant toute interpénétration à l'interface de contact. Le champ  $\lambda$  est décomposé en une partie normale à la surface de contact,  $\lambda_n$ , et une partie tangentielle,  $\lambda_t$ , tel que :

$$\lambda = t_c^1 = -\lambda_n \mathbf{n} + \lambda_t \quad \text{avec} \quad \lambda_t = \lambda_{t\beta} \tau^\beta. \quad (3.8)$$

Le champ virtuel des forces de contact, noté  $\delta\lambda$  est défini sur la frontière de contact  $\Gamma_c^1$ . Ce champ doit être quelconque et suffisamment régulier, il est décomposé en une partie normale à la surface de contact et une tangentielle tel que :

$$\delta\lambda = \delta\lambda_n \mathbf{n} + \delta\lambda_t \quad \text{avec} \quad \delta\lambda_t = \delta\lambda_{t\beta} \tau^\beta. \quad (3.9)$$

La condition d'admissibilité de contact (équation (2.20) page 17) est remplacée par la relation suivante :

$$g \leq 0 \quad \lambda_n \geq 0 \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = 0 & \lambda_n > 0 & \text{contact} \\ g < 0 & \lambda_n = 0 & \text{non contact} \end{cases} \quad (3.11)$$

La condition d'admissibilité de frottement (équation (2.28) page 19) est remplacée par la relation :

$$\Phi = \|\lambda_t\| - \mu\lambda_n \leq 0 \quad \zeta \geq 0 \quad (3.12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi < 0 & \mathbf{v}_t = 0 & \text{adhérence} \\ \Phi = 0 & \mathbf{v}_t - \zeta \frac{\lambda_t}{\|\lambda_t\|} = 0 & \text{avec } \zeta \geq 0 & \text{glissement} \end{cases} \quad (3.13)$$

Ainsi le système d'équations régissant la mécanique des solides en présence de contact frottant, (voir partie 2.3 page 20,) est donné par :

$$\underbrace{\mathcal{P}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{P}^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})}_{\mathcal{P}^{ic}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})} + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta \lambda_{t_\beta} + \delta g \lambda_n) S_c d\Gamma_c^1 = 0 \quad (3.14a)$$

$$\int_{\Gamma_c^1} g S_c \delta \lambda_n d\Gamma_c^1 = 0 \quad (3.14b)$$

$$\int_{\Gamma_c^1} \xi^\alpha M_{\alpha\beta} S_a \delta \lambda_{t_\beta} d\Gamma_c^1 = 0 \quad (3.14c)$$

où  $S_c$  et  $S_a$  désignent deux champs de signe défini sur la frontière  $\Gamma_c^1$ . Ces deux champs sont définis par les relations suivantes :

$$S_c = 1_{\mathbb{R}^+}(\lambda_n + hg) \quad S_a = 1_{\mathbb{R}^+}(-\phi - h\zeta) \quad (3.15)$$

où  $h$  est une constante strictement positive et  $1_{\mathbb{R}^+}$  est la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}^+$ .

Le problème de contact mécanique est résolu en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson, comme avec la méthode de pénalisation. Pour chacune des itérations, une correction du champ de déplacement et du champ de force sur la frontière de contact est calculée à partir de la linéarisation du système d'équations (3.14) :

$$\delta \mathbf{u} \cdot \mathcal{R} + \delta \mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\mathcal{K}_T}} \cdot \Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \cdot \mathcal{R}_1 \\ \delta \lambda_n \mathcal{R}_2 \\ \delta \lambda_t \cdot \mathcal{R}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \cdot \overline{\overline{\mathcal{K}_{T1}}} \cdot \Delta \mathbf{u}_\lambda \\ \delta \lambda_n \mathcal{K}_{T2} \cdot \Delta \mathbf{u} \\ \delta \lambda_t \cdot \overline{\overline{\mathcal{K}_{T3}}} \cdot \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \delta u \cdot \mathcal{R}_1 &= \mathcal{P}^{ie}(u, \delta u) + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta \lambda_{t_\beta} + \delta g \lambda_n) S_c d\Gamma_c^1 \\
 \delta \lambda_n \mathcal{R}_2 &= \int_{\Gamma_c^1} g S_c \delta \lambda_n d\Gamma_c^1 \\
 \delta \lambda_t \cdot \mathcal{R}_3 &= \int_{\Gamma_c^1} \dot{\xi}^\alpha M_{\alpha\beta} S_a \delta \lambda_{t_\beta} d\Gamma_c^1 \\
 \delta u \cdot \overline{\overline{\mathcal{K}}}_{T1} \cdot \Delta u_\lambda &= \Delta \mathcal{P}^{ie}(u, \delta u) \\
 &\quad + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta \Delta \lambda_{t_\beta} + \delta g \Delta \lambda_n) S_c d\Gamma_c^1 + \int_{\Gamma_c^1} (\lambda_{t_\beta} \Delta \delta \xi^\beta + \lambda_n \Delta \delta g) S_c d\Gamma_c^1 \\
 \delta \lambda_n \mathcal{K}_{T2} \cdot \Delta u &= \int_{\Gamma_c^1} \Delta g S_c \delta \lambda_n d\Gamma_c^1 \\
 \delta \lambda_t \cdot \overline{\overline{\mathcal{K}}}_{T3} \cdot \Delta u &= \int_{\Gamma_c^1} \Delta (\dot{\xi}^\alpha M_{\alpha\beta}) S_a \delta \lambda_{t_\beta} d\Gamma_c^1
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Bien que cette méthode respecte parfaitement les conditions d'admissibilité, elle est cependant moins utilisée que la pénalisation. En effet, cette méthode introduit de nouvelles variables et la résolution du système d'équations engendré est beaucoup plus complexe à résoudre. De plus, la non-violation des conditions d'admissibilité ne permet pas la prise en compte directe des déformations élastiques des aspérités surfaciques. En effet, l'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange suppose que les surfaces de contact sont parfaitement décrites.

La volonté d'unir dans une même procédure les avantages de la pénalisation et ceux du lagrangien a vu émerger une multitude de méthodes hybrides dont la plus utilisée est celle du lagrangien augmenté.

### 3.1.3 Méthode du lagrangien augmenté

La méthode du lagrangien augmenté présente l'avantage de permettre le respect quasi exact des conditions d'admissibilité sans ajouter des degrés de liberté supplémen-

taires. En effet, les multiplicateurs de Lagrange sont considérés comme des paramètres qui sont mis à jour à partir d'une méthode de pénalisation. Donc, les multiplicateurs de Lagrange,  $\lambda$ , sont toujours introduits mais comme des paramètres auxquels une composante de pénalisation est ajoutée, pour obtenir les forces de contact. Les composantes normale et la tangentielle de  $\lambda$  sont notées respectivement  $\lambda_n$  et  $\lambda_t$ . Elles respectent les égalités suivantes :

$$\lambda = -\lambda_n \mathbf{n} + \lambda_t \quad \text{avec} \quad \lambda_t = \lambda_{t,g} \mathbf{r}^\beta \quad (3.18)$$

La condition d'admissibilité de contact (équation (2.20) page 17) est remplacée par une combinaison entre celle utilisée avec la méthode de pénalisation (équation (3.1)) et celle utilisée avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (équation (3.10)). La relation établie pour représenter le contact est la suivante :

$$t_n = \langle \lambda_n + \varepsilon_n g \rangle \quad (3.19)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n + \varepsilon_n g \geq 0 & t_n = \lambda_n + \varepsilon_n g & \text{contact} \\ \lambda_n + \varepsilon_n g < 0 & t_n = 0 & \text{non contact} \end{cases} \quad (3.20)$$

Par ailleurs, la condition d'admissibilité de frottement (équation (2.28) page 19) est substituée par une combinaison entre celle utilisée avec la méthode de pénalisation (équation (3.3)) et celle utilisée avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (équation (3.12)). Le frottement est donc représenté de la manière suivante :

$$\Phi = \|\mathbf{t}_t\| - \mu t_n \leq 0 \quad \zeta \geq 0 \quad (3.21)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi < 0 & \mathbf{v}_t = \frac{1}{\varepsilon_t} (\mathcal{L}_v \mathbf{t}_t - \mathcal{L}_v \lambda_t) & \text{adhérence} \\ \Phi = 0 & \mathbf{v}_t - \zeta \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} = \frac{1}{\varepsilon_t} (\mathcal{L}_v \mathbf{t}_t - \mathcal{L}_v \lambda_t) \quad \text{avec} \quad \zeta \geq 0 & \text{glissement} \end{cases} \quad (3.22)$$

Ainsi le système d'équations régissant la mécanique des solides en présence de contact frottant (voir partie 2.3 page 20,) est exprimé par :

$$\underbrace{\mathcal{P}^{int}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{P}^{ext}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})}_{\mathcal{P}^{ic}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u})} + \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta t_{t\beta} + \delta g t_n) d\Gamma_c^1 = 0 \quad (3.23)$$

avec

$$t_n = \langle \lambda_n + \varepsilon_n g \rangle \quad (3.24a)$$

$$\Phi = \|\mathbf{t}_t\| - \mu t_n \leq 0 \quad (3.24b)$$

$$\mathbf{v}_t - \zeta \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} = \frac{1}{\varepsilon_t} (\mathcal{L}_v \mathbf{t}_t - \mathcal{L}_v \lambda_t) \quad \text{avec } \zeta \geq 0 \quad (3.24c)$$

$$\Phi \zeta = 0 \quad (3.24d)$$

Comme pour les formulations précédentes, la résolution de ce problème se fait avec la méthode de Newton-Raphson. Pour chaque itération, le calcul de la correction du champ de déplacement est effectué de la même manière qu'avec la méthode de pénalisation (voir équation (3.7) à la page 29). Mais les valeurs des forces de contact sont obtenues grâce aux équations (3.24). Lors de la mise à jour des multiplicateurs de Lagrange, la valeur actualisée est donnée par la relation :

$$\lambda_n^{k+1} = t_n^{k+1} = \langle \lambda_n^k + \varepsilon_n g \rangle \quad (3.25a)$$

$$\lambda_t^{k+1} = t_t^{k+1} \quad (3.25b)$$

La méthode du lagrangien augmentée combine les avantages de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et ceux de la méthode de pénalisation. En effet, elle permet d'obtenir les conditions d'admissibilité lorsque les multiplicateurs de Lagrange sont

égaux aux forces de contact ou lorsque les coefficients de pénalisation tendent vers l'infini. De plus, le choix des paramètres de pénalisation n'a pas vraiment d'influence sur les résultats. L'avantage de cette méthode est de permettre l'utilisation de coefficient de pénalisation plus faible. Elle évite les problèmes engendrés par le choix de coefficients de pénalisation trop élevés. De plus, elle autorise le contrôle de la qualité de la solution grâce à l'augmentation des multiplicateurs de Lagrange (voir les équations 3.25). Néanmoins, une valeur trop faible des coefficients de pénalisations peut engendrer des temps de calcul très importants en raison de la faible vitesse de convergence. Des coefficients de pénalisation trop grands provoquent, comme avec la méthode de pénalisation, des oscillations du statut de contact (contact / non contact). Ces oscillations peuvent soit rendre le calcul plus long soit rendre la résolution impossible. Ainsi, le choix des coefficients de pénalisation peut rendre cette approche moins bien adaptée que celle de la pénalisation ou celle des multiplicateurs de Lagrange.

Après avoir formulé un système d'équations adapté à la résolution numérique, une méthode de discrétisation des équations est présentée.

## 3.2 Discrétisation des équations

Afin de pouvoir résoudre ce problème de contact mécanique entre deux corps déformables, la méthode des éléments finis est utilisée. L'ensemble des deux corps est découpé en  $n_e$  éléments et  $n_n$  nœuds. Pour chaque élément  $e$  du maillage, il existe une fonction bijective qui l'associe à un élément de référence,  $e_{ref}$ . Les champs de déplacements virtuel et réel sont discrétisés sur l'élément de référence, tel que :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_{k=1}^{n_{ne}} N_k(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{U}_k(t) \quad \delta \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta, t) = \sum_{k=1}^{n_{ne}} N_k(\xi, \eta, \zeta) \delta \mathbf{U}_k(t) \quad (3.26)$$

Dans les expressions précédentes,  $n_{ne}$  est le nombre de nœuds de l'élément  $e$ .  $N_k$  est la fonction de forme du  $k^{\text{ième}}$  nœud de l'élément de référence  $e_{ref}$ . Les vecteurs  $\mathbf{U}_k$  et

$\delta U_k$  représentent respectivement les valeurs du champ de déplacement réel et virtuel au  $k^{\text{ième}}$  nœud de l'élément  $e$ . Pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les champs des forces de contact virtuel et réel sont discrétisés sur les frontières de contact de la même manière.

D'après la partie précédente, (partie 3.1,) deux types différents de systèmes d'équations peuvent être identifiés en fonction de la méthode utilisée pour prendre en compte le contact frottant, celui créé avec la méthode de pénalisation ou une hybride et celui lié à la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

### 3.2.1 Méthode de pénalisation ou hybride

Pour la méthode de pénalisation, celle du lagrangien augmenté ou toute autre méthode hybride, le système d'équations linéarisé à résoudre s'écrit :

$$\mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \Delta \mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \Delta \mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (3.27)$$

avec

$$\mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta t_{t_\beta} + \delta g t_n) d\Gamma_c^1 \quad (3.28)$$

$$\Delta \mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c^1} (\delta \xi^\beta \Delta t_{t_\beta} + \delta g \Delta t_n) d\Gamma_c^1 + \int_{\Gamma_c^1} (t_{t_\beta} \Delta \delta \xi^\beta + t_n \Delta \delta g) d\Gamma_c^1 \quad (3.29)$$

Seules les expressions de  $t_n$  et de  $t_t$  varient d'une méthode à une autre (voir paragraphe 3.1 page 26 et 32).

Dans le cas général des grandes déformations, les termes relatifs aux travaux virtuels des forces internes et externes (exceptées les forces de contact) peuvent être écrits sous la forme :

$$\mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta U^T \cdot \mathbf{R}_{ie}(U) \quad (3.30)$$

$$\Delta \mathcal{P}^{ie}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta U^T \cdot \mathbf{K}_{ie}(U) \cdot \Delta U \quad (3.31)$$

où  $\Delta U$  et  $\delta U$  sont des vecteurs de taille  $n_{ddl}$  composés respectivement des valeurs nodales des déplacements incrémentaux et des déplacements virtuels de l'ensemble des nœuds des solides, tel que :

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_{n_n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \delta U = \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \vdots \\ \delta U_{n_n} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$n_{ddl}$  est le nombre de degrés de liberté du système.  $R_{ie}$  et  $K_{ie}$  sont respectivement un vecteur et une matrice carrée de taille  $n_{ddl}$ .

Les termes correspondant aux forces de contact peuvent aussi être mis sous la même forme :

$$\mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta U^T \cdot R_c(U) \quad (3.33)$$

$$\Delta \mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta U^T \cdot K_c(U) \cdot \Delta U. \quad (3.34)$$

Le vecteur  $R_c$  et la matrice carrée  $K_c$  ont la même taille que le vecteur  $R_{ie}$  et la matrice carrée  $K_{ie}$  ( $n_{ddl}$ ). Le nombre d'éléments non nuls compris dans le vecteur  $R_c$  et la matrice  $K_c$  dépend à la fois du nombre de nœuds des surfaces de contact et du statut de contact (dimension de la zone de contact et position relative des frontières). Ce nombre d'éléments peut donc varier entre deux pas de temps. Mais, la formulation du vecteur  $R_c$  et la matrice  $K_c$  dépendent aussi de la méthode permettant de prendre en compte le contact frottant entre deux solides discrétisés spatialement. Ainsi, le calcul du vecteur  $R_c$  et la matrice  $K_c$  sont détaillés dans la partie suivante avec la méthode de discrétisation du contact mécanique (paragraphe 3.3 page 39). Comme cette relation (équation 3.27) doit être vérifiée pour tout champ de déplacement  $\delta \mathbf{u}$  cinétiquement admissible, alors l'équation à résoudre dans le cadre d'un algorithme de Newton-Raphson

est la suivante :

$$\underbrace{R_{ie}(U) + R_c(U)}_{R(U)} + \underbrace{[K_{ie}(U) + K_c(U)]}_{K_T(U)} \cdot \Delta U = 0 \quad (3.35)$$

où,  $R$  et  $K_T$  sont respectivement le vecteur résidu et la matrice tangente.

### 3.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, une démarche similaire à celle utilisée avec la méthode de pénalisation est effectuée. Mais, le système d'équations régissant la mécanique du contact frottant est différent (voir paragraphe 3.1.2 équation 3.16). Néanmoins, le système d'équations à résoudre peut être mis sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_u(U, \lambda) \\ R'_{\lambda_n}(U) \\ R'_{\lambda_t}(U) \end{pmatrix}}_{R'(U)} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{uu}(U, \lambda) & K'_{u\lambda_n}(U) & K'_{u\lambda_t}(U) \\ K'_{\lambda_n u}(U) & 0 & 0 \\ K'_{\lambda_t u}(U) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{K'_T(U)} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta \lambda'_n \\ \Delta \lambda'_t \end{pmatrix} = 0 \quad (3.36)$$

avec

$$R_u(U, \lambda) = R_{ie}(U) + R_{c\lambda}(U, \lambda) \quad (3.37)$$

$$K_{uu}(U, \lambda) = K_{ie}(U) + K_{c\lambda}(U, \lambda) \quad (3.38)$$

La matrice carrée  $K_{uu}$  et le vecteur  $R_u$  ont la même taille que la matrice tangente et le vecteur résidu obtenus avec la méthode de pénalisation ou une méthode hybride ( $n_{ddl}$ ). La matrice  $K_{ie}$  et le vecteur  $R_{ie}$  sont définis dans la partie précédente (équations 3.30 et 3.31). Les vecteurs  $R'_{\lambda_n}$  et  $\Delta \lambda'_n$  ont la taille du nombre de nœuds de la surface de contact  $\Gamma_c^1$  ( $n_n^{c1}$ ), soit  $n_{ddl}^{c1} - n_n^{c1}$  ( $n_{ddl}^{c1}$  est le nombre de degrés de liberté lié aux forces de contact de la surface  $\Gamma_c^1$ ). Les matrices  $K'_{\lambda_n u}$ ,  $K'_{\lambda_t u}$ ,  $K'_{u\lambda_n}$  et  $K'_{u\lambda_t}$  sont respectivement de taille  $n_n^{c1} \times n_{ddl}$ ,  $(n_{ddl}^{c1} - n_n^{c1}) \times n_{ddl}$ ,  $n_{ddl} \times n_n^{c1}$  et  $n_{ddl} \times (n_{ddl}^{c1} - n_n^{c1})$ .

La matrice tangente du système d'équations précédent,  $K'_T$ , comporte un certain nombre de lignes et de colonnes nulles dans les termes de contact mécanique (matrices notées avec l'indice  $\lambda$ ). De même, le vecteur résidu,  $R'$ , comprend des éléments nuls dans les termes de contact (vecteurs notés avec l'indice  $\lambda$ ). Ces éléments nuls sont dus au fait que certains nœuds de la frontière  $\Gamma_c^1$  sont libres de tout contact mécanique. Si uniquement les forces de contact liées aux nœuds en contact mécanique sont considérées, alors la dimension de ce système peut être réduite sous la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} R_u(U, \lambda) \\ R_{\lambda_n}(U) \\ R_{\lambda_t}(U) \end{pmatrix}}_{R(U, \lambda)} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{uu}(U, \lambda) & K_{u\lambda_n}(U) & K_{u\lambda_t}(U) \\ K_{\lambda_n u}(U) & 0 & 0 \\ K_{\lambda_t u}(U) & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{K_T(U, \lambda)} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta \lambda_n \\ \Delta \lambda_t \end{pmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

La matrice tangente  $K_T$  ne comporte plus de lignes ou de colonnes nulles, mais sa dimension peut varier entre deux itérations. En effet, le nombre d'inconnues peut être modifié en fonction du changement des statuts de contact. Ainsi, la taille du vecteur solution et donc la taille du système à résoudre peuvent varier au cours de la résolution.

La discrétisation spatiale utilisée pour la résolution numérique pose des problèmes au niveau des interfaces de contact. En effet, le contact mécanique n'est plus considéré entre deux frontières mais entre deux nuages de points.

### 3.3 Discrétisation du contact mécanique

La modélisation mathématique de l'interface de contact peut se faire de différentes manières. Deux techniques permettant de prendre en compte les conditions de contact peuvent être utilisées : une méthode point-surface et une méthode surface-surface.

### 3.3.1 Méthode point-surface

Cette méthode, sous la formulation maître-esclave, est la plus répandue car elle est simple et donne de bons résultats. Dans cette formulation, les deux interfaces n'ont pas les mêmes statuts, ce qui introduit une non-symétrie. Une surface de contact est considérée maître et l'autre esclave. Les conditions de contact frottant sont considérées entre tout point de la surface esclave avec la surface maître (voir figure 3.3).

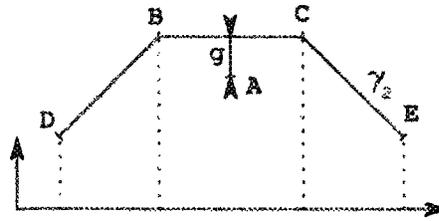


Figure 3.3 – Représentation du calcul de l'interpénétration au point A

Pour le problème de contact mécanique frottant exposé précédemment, le solide 1 est l'esclave et le solide 2 le maître. La frontière de contact dans la configuration déformée  $\gamma_c^1$  est donc la surface esclave. Alors que  $\gamma_c^2$  est la frontière de contact maître. Les conditions de contact et de frottement (loi de Coulomb) sont données pour chaque point,  $\mathbf{x}_1$ , de la surface esclave,  $\gamma_c^1$ , par :

$$\left\{ \begin{array}{l} g \leq 0 \\ t_n \geq 0 \\ gt_n = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \|t_t\| - \mu t_n \geq 0 \\ v_t = \zeta \frac{t_t}{\|t_t\|} \\ \zeta \leq 0 \\ \zeta \Phi = 0 \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \gamma_c^1. \quad (3.40)$$

Cette modélisation du contact permet aussi bien d'utiliser les méthodes de résolution basées sur la pénalisation que celles utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Le calcul des éléments relatifs au contact, du système d'équations discrétisé, exposé dans la partie précédente (partie 3.2 page 35), nécessite de faire la distinction entre la

méthode de pénalisation ou hybride et la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

### Méthode de pénalisation ou hybride

Tenant compte du système d'équations (3.27) et du fait que le contact est considéré pour tout point de la frontière  $\gamma_c^1$ , alors les composantes relatives au contact frottant peuvent être mises sous la forme :

$$\mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \underbrace{\int_{e_{ref}} (\delta \xi^\beta t_{t_\beta} + \delta g t_n) \det J_e d\xi d\eta}_{\mathcal{P}_e^c} \quad (3.41)$$

$$\Delta \mathcal{P}^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \underbrace{\int_{e_{ref}} (\delta \xi^\beta \Delta t_{t_\beta} + \delta g \Delta t_n + t_{t_\beta} \Delta \delta \xi^\beta + t_n \Delta \delta g) \det J_e d\xi d\eta}_{\Delta \mathcal{P}_e^c} \quad (3.42)$$

où  $J_e$  est le jacobien de la transformation qui associe à un élément du maillage,  $e$ , un élément de référence,  $e_{ref}$ .

Si une intégration numérique est effectuée, alors les contributions de l'élément  $e$  sont notées :

$$\mathcal{P}_e^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{pi=1}^{n_{pi}} \underbrace{(\delta \xi^\beta t_{t_\beta} + \delta g t_n) w \det J_e}_{\mathcal{P}_{e\ pi}^c} \quad (3.43)$$

$$\Delta \mathcal{P}_e^c(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \sum_{pi=1}^{n_{pi}} \underbrace{(\delta \xi^\beta \Delta t_{t_\beta} + \delta g \Delta t_n + t_{t_\beta} \Delta \delta \xi^\beta + t_n \Delta \delta g) w \det J_e}_{\Delta \mathcal{P}_{e\ pi}^c} \quad (3.44)$$

où  $w$  est le poids d'intégration du point  $pi$ . Si la particule de coordonnée  $\mathbf{X}^1(pi)$  admet une relation de contact avec une particule d'un élément  $m$  appartenant à la frontière

$\gamma_c^2$ , alors les vecteurs  $\delta U_{pi}^c$  et  $\Delta U_{pi}^c$  sont définis tels que :

$$\delta U_{pi}^c = \left. \begin{array}{c} \delta U_1 \\ \vdots \\ \delta U_{n_{ne}} \\ \delta U_1 \\ \vdots \\ \delta U_{n_{nm}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \in e \subset \Gamma_c^1 \\ \\ \\ \in m \subset \Gamma_c^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \Delta U_{pi}^c = \left. \begin{array}{c} \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_{n_{ne}} \\ \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_{n_{nm}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \in e \subset \Gamma_c^1 \\ \\ \\ \in m \subset \Gamma_c^2 \end{array} \quad (3.45)$$

La partie supérieure des vecteurs correspond aux degrés de liberté de l'élément esclave alors que la partie inférieure correspond à ceux de l'élément maître, relatif au point d'intégration  $pi$ . Après quelques transformations, (pour plus de détails, voir [3],) les contributions relatives au point d'intégration  $pi$  peuvent être écrites sous la forme :

$$\mathcal{P}_{e\,pi}^c = \delta U_{pi}^{c\,T} \cdot R_{pi}^c \quad (3.46)$$

$$\Delta \mathcal{P}_{e\,pi}^c = \delta U_{pi}^{c\,T} \cdot K_{pi}^c \cdot \Delta U_{pi}^c \quad (3.47)$$

### Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Une approche similaire est utilisée avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les composantes relatives au contact du système d'équations (3.16) sont décomposées en une somme sur les éléments de  $\Gamma_c^1$ . Chacun des termes de cette somme est aussi décomposé en une somme sur les points d'intégration. La particule de  $pi$  appartenant à l'élément  $e$  de la frontière  $\Gamma_c^1$  est supposée être en relation de contact avec l'élément  $m$  de la frontière  $\Gamma_c^2$ . Les contributions à l'équation représentant la mécanique du problème et à la linéarisation de celle-ci liées au point d'intégration  $pi$  de l'élément  $e$  sont données

par les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \delta U_{pi}^c \\ \delta \lambda_{ne} \\ \delta \lambda_{te} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{pi u}^c \\ R_{pi \lambda_n}^c \\ R_{pi \lambda_t}^c \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

et

$$\begin{pmatrix} \delta U_{pi}^c \\ \delta \lambda_{ne} \\ \delta \lambda_{te} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} K_{pi uu}^c & K_{pi u \lambda_n}^c & K_{pi u \lambda_t}^c \\ K_{pi \lambda_n u}^c & 0 & 0 \\ K_{pi \lambda_t u}^c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_{pi}^c \\ \Delta \lambda_{ne} \\ \Delta \lambda_{te} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Cette méthode de prise en compte du contact pose certains problèmes. Elle entraîne des instabilités ou des blocages numériques, notamment lorsque les surfaces de contact ne sont pas assez régulières ou lorsque les déplacements relatifs sont trop importants. Afin de remédier à ces problèmes, une méthode surface-surface, basée sur les éléments joints, est proposée.

### 3.3.2 Méthode surface-surface

La méthode des éléments joints a initialement été introduite pour gérer les incompatibilités de raccordement entre les maillages. Ce problème a émergé avec l'avènement du calcul parallèle. Cette méthode consiste à calculer une égalité sur l'ensemble de l'interface (sur l'élément joint) et non plus localement. L'application de cette méthode de calcul au problème de contact frottant consiste à imposer les conditions de contact non pas localement, mais sur l'ensemble de la surface candidate au contact. On définit donc une formulation surface-surface [16].

Si le problème de contact exposé précédemment est considéré, les solides 1 et 2 sont candidats au contact par l'intermédiaire de la partie de leur frontière notée respectivement dans la configuration déformée  $\gamma_c^1$ , pour la surface esclave (non joint) et  $\gamma_c^2$  pour

la surface maître (joint). Les conditions de contact et de frottement (loi de Coulomb) sont données pour chaque point,  $\mathbf{x}_1$ , de la surface esclave,  $\gamma_c^1$ , par :

$$\left\{ \begin{array}{l} g \leq 0 \\ t_n \geq 0 \\ \int_{\gamma_c^1} g t_n d\gamma_c^1 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi = \|\mathbf{t}_t\| - \mu t_n \geq 0 \\ \mathbf{v}_t = \zeta \frac{\mathbf{t}_t}{\|\mathbf{t}_t\|} \\ \zeta \leq 0 \\ \zeta \Phi = 0 \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{x}_1 \in \gamma_c^1. \quad (3.50)$$

Bien que cette technique de calcul reste valable quelle que soit la discrétisation spatiale, une discrétisation isoparamétrique des forces de contact, du champ de déplacement réel et virtuel est effectuée sur les frontières candidates au contact, telle que :

$$\mathbf{t}_c^1 = \sum_{i=1}^{n_c^1} N_i^1 \mathbf{t}_{ci}^1 = - \sum_{i=1}^{n_c^1} N_i^1 t_{ni} \mathbf{n}_i + \sum_{i=1}^{n_c^1} N_i^1 t_{t\beta i} \boldsymbol{\tau}_i^\beta \quad (3.51)$$

$$\mathbf{u}^\alpha = \sum_{i=1}^{n_c^\alpha} N_i^\alpha \mathbf{u}_i^\alpha \quad (3.52)$$

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{i=1}^{n_c^\alpha} N_i^\alpha \mathbf{x}_i^\alpha \quad (3.53)$$

où,  $N_i^\alpha$  et  $(\ )_i^\alpha$  désigne respectivement la fonction d'interpolation au nœud  $i$  de la surface candidate au contact  $\alpha$ , et la valeur de la variable  $(\ )$  en ce même nœud.  $n_c^\alpha$  est le nombre de nœuds que comporte la frontière candidate au contact  $\alpha$ . Ces équations sont introduites dans la formulation faible de l'équation d'admissibilité du contact unilatéral (voir (3.50)) :

$$\int_{\gamma_c^1} t_n \mathbf{n} (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\gamma_c^1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma_c^1} \sum_{A=1}^{n_c^1} N_A^1 t_{nA} \mathbf{n}_A \left( \sum_{B=1}^{n_c^1} N_B^1 \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n_c^2} N_C^2 \mathbf{x}_C^2 \right) d\gamma_c^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{A=1}^{n_c^1} \left[ t_{nA} \mathbf{n}_A \left( \sum_{B=1}^{n_c^1} n_{AB}^1 \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n_c^2} n_{AC}^2 \mathbf{x}_C^2 \right) \right] = 0 \quad (3.54)$$

avec :  $n_{AB}^i = \int_{\gamma_c^1} N_A^1 N_B^i d\gamma_c^1$ . Une fonction écart  $g_A$  est ainsi définie, en tout nœud  $A$  de la surface  $\gamma_c^1$ , tel que :

$$g_A = n_A \left( \sum_{B=1}^{n_c^1} n_{AB}^1 x_B^1 - \sum_{C=1}^{n_c^2} n_{AC}^2 x_C^2 \right) \quad (3.55)$$

Les conditions d'admissibilité du contact unilatéral peuvent donc être réécrites sous la forme :

$$\begin{cases} g_A \leq 0 \\ t_{nA} \geq 0 \\ \sum_{A=1}^{n_c^1} g_A t_{nA} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g_A \leq 0 \\ t_{nA} \geq 0 \\ g_A t_{nA} = 0 \end{cases} \quad \forall A \in [1, n_c^1] \quad (3.56)$$

Une condition d'admissibilité pour le contact unilatéral est alors définie pour chaque nœud de la surface "non-joint",  $\gamma_c^1$ . Cette condition d'admissibilité dépend à la fois de la géométrie de la surface "non-joint",  $\gamma_c^1$ , et de celle de la surface "joint",  $\gamma_c^2$ .

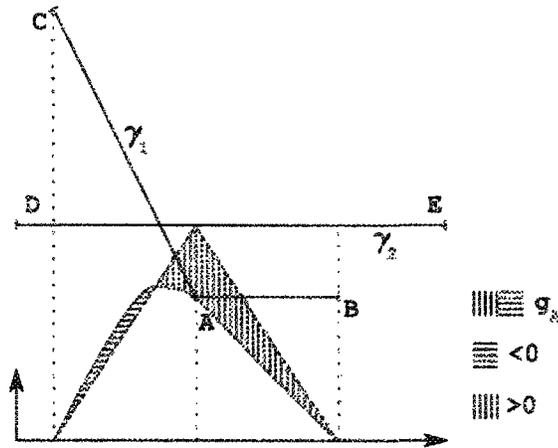


Figure 3.4 – Représentation du calcul de l'interpénétration au nœud A

La valeur de la distance entre le nœud  $A$  et la surface  $\gamma_c^2$  obtenue par la relation (3.55) correspond à l'aire (en deux dimensions) ou le volume (en trois dimensions) de

l'interpénétration pondérer par les fonctions de forme du nœud  $A$ . Cette valeur de la distance entre les solides dépend aussi de la taille des éléments comprenant le nœud  $A$ . Dans le cas d'un problème en deux dimensions, cette aire est représentée sur la figure 3.4. Une autre valeur de la distance peut être définie afin que celle-ci ne dépende pas de la taille des éléments [16]. L'article cité précédemment expose la méthode des éléments joints pour un problème de contact mécanique frottant en deux dimensions. La distance ainsi que la vitesse du nœud  $A$  par rapport à la surface  $\gamma_c^2$  sont exprimées par :

$$g_A = \mathcal{K}_A \left( \sum_{B=1}^{n_c^1} n_{AB}^1 \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n_c^2} n_{AC}^2 \mathbf{x}_C^2 \right) \mathbf{n}_A \quad (3.57)$$

$$v_{tA} = \mathcal{K}_A \left( \sum_{B=1}^{n_c^1} \dot{n}_{AB}^1 \mathbf{x}_B^1 - \sum_{C=1}^{n_c^2} \dot{n}_{AC}^2 \mathbf{x}_C^2 \right) \boldsymbol{\tau}_A \otimes \boldsymbol{\tau}_A \quad (3.58)$$

avec

$$\mathcal{K}_A = \frac{1}{\sum_{D=1}^{n_c^1} n_{AD}^{1,ref}} \quad \text{et} \quad n_{AD}^{1,ref} = \int_{\Gamma_c^1} N_A^1 N_D^1 d\Gamma_c^1 \quad (3.59)$$

Dans ces expressions, les vecteurs  $\mathbf{n}_A$  et  $\boldsymbol{\tau}_A$  sont définis au nœud  $A$  de la frontière  $\gamma_c^1$ . Le vecteur  $\mathbf{n}_A$  est égal à la moyenne des vecteurs normaux des éléments comportant le nœud  $A$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\tau}_A$  est orthogonal au vecteur  $\mathbf{n}_A$  (le calcul est fait en deux dimensions).

Comme pour la modélisation point-surface, cette méthode permet aussi bien d'utiliser les méthodes de résolution basées sur la pénalisation ou celles utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

De même, le calcul des éléments relatifs au contact du système d'équations discrétisé exposé précédemment (partie 3.2 page 35) doit être fait de deux manières différentes (pour la méthode de pénalisation ou hybride et celle des multiplicateurs de Lagrange).

Pour ces deux types de méthodes, les calculs sont les mêmes qu'avec la méthode point-surface (voir paragraphe précédent (3.3.1)). Par contre, dans ce calcul, les valeurs de la distance et de la vitesse entre un nœud  $A$  de la frontière  $\gamma_c^1$  par rapport à la

frontière  $\gamma_c^2$  sont redéfinies par les relations imposées par la méthode des éléments joints (équations 3.57 et 3.58). Les valeurs de ces variables aux points d'intégration sont interpolées en fonction des valeurs nodales.

La principale difficulté s'opposant à l'implémentation de cette méthode est la nécessité de posséder un vecteur normal et un vecteur tangentiel en chaque nœud de la surface « non-joint »,  $\gamma_c^1$ . Une méthode de calcul de ces valeurs est envisagée dans [17, 18]. En outre, une procédure de régularisation du vecteur normal et du vecteur tangentiel est détaillée dans [16]. Les frontières de contact peuvent aussi être lissées, afin de déterminer un vecteur normal et un vecteur tangentiel continus.

Après avoir présenté les différents systèmes d'équations discrétisés, il reste à présenter les techniques de résolution et plus précisément, les algorithmes.

## 3.4 Algorithmes de résolution

Il existe de nombreux algorithmes permettant de résoudre le problème de mécanique des solides en présence de contact frottant. Évidemment, ces algorithmes sont liés au système d'équations discrétisé. L'approche adoptée dans ce document est basée sur l'algorithme de Newton-Raphson.

### 3.4.1 Méthodes de pénalisation

En utilisant la méthode de la pénalisation, les inconnues du système d'équations à résoudre sont constituées des déplacements nodaux. Les degrés de liberté supplémentaires liés aux forces de contact ne sont donc pas pris en compte (voir partie 3.1.1 page 26). Le système non linéaire obtenu est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Celle-ci consiste à calculer une suite de corrections incrémentales permettant d'obtenir la solution du problème à partir de l'état d'équilibre précédent. La correction incrémentale à la  $i^{\text{ième}}$  itération ( $\Delta U_i$ ) est obtenue par la résolution de l'équation (3.35) qui peut

être écrite sous une forme plus abrégée :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_i)\Delta\mathbf{U}_i = 0 \quad (3.60)$$

$\mathbf{R}$  est le vecteur résidu et  $\mathbf{K}_T$  est la matrice tangente correspondant au développement limité au premier ordre du vecteur  $\mathbf{R}$  par rapport au vecteur déplacement,  $\mathbf{U}$ . Dans ce système d'équations, la force de contact  $t_c^1$  est remplacée par une fonction des champs de déplacement  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  (voir équations 3.6). L'algorithme utilisé dans ce document pour la résolution d'un problème de contact mécanique avec une méthode de pénalisation est présenté dans l'Algorithme 3.1.

---

**Algorithme 3.1** Méthode de pénalisation

---

**ENTRÉES:**  $\mathbf{U}_0$ ,  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_t$  ( $i = 0$ ).

1- Calcul des conditions de contact ( $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_t$  et  $t_c^1$ ).

2- Calcul de la correction incrémentale,  $\Delta\mathbf{U}_i$  :

(équation (3.60)),  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_i)\Delta\mathbf{U}_i = 0$

Correction du vecteur des déplacements à l'itération  $i + 1$  :  $\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta\mathbf{U}_i$ .

si convergence alors

$\mathbf{U}_{i+1}$  = état d'équilibre

sinon

retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$

fin (si)

---

Cette méthode nécessite la définition de deux constantes : le coefficient de pénalisation normale ( $\varepsilon_n$ ) et le coefficient de pénalisation tangentielle ( $\varepsilon_t$ ). Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour définir la valeur des coefficients de pénalisation.

### Pénalité constante

Cette méthode est de loin la plus utilisée. Ceci, notamment, grâce à sa simplicité et au fait qu'elle est une des premières à avoir vu le jour. Les coefficients de pénalisation ( $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_t$ ) sont des constantes. Ils ne varient ni dans l'espace ni dans le temps, ce qui permet de ne pas alourdir le calcul. Il reste ainsi très proche d'un calcul de mécanique

non linéaire. Néanmoins, la principale difficulté survenant lors de l'utilisation de cette méthode est le choix des coefficients de pénalisation. Le choix de coefficients trop faibles engendre des interpénétrations ou des glissements relatifs dont les valeurs sont trop grandes et donc inadmissibles physiquement. D'un autre côté, le choix de coefficients trop grands conduit à des oscillations et des problèmes de convergence.

Pour pallier ces difficultés, la méthode de pénalisation adaptative a été proposée.

### Pénalité adaptative

La méthode de pénalisation adaptative ne s'applique qu'au coefficient de pénalisation normale [34]. Le coefficient de pénalisation tangentielle reste constant dans l'espace et tout au long de la résolution (comme dans la méthode de pénalisation). Cette méthode a pour but d'éliminer la difficulté engendrée par le choix du coefficient de pénalisation normale. L'utilisateur ne doit fournir qu'une valeur initiale de ce coefficient. Par contre, il doit choisir une valeur d'interpénétration minimale ( $g_{min}$ ) et une valeur maximale ( $g_{max}$ ). Afin de contrôler l'interpénétration, pour qu'elle reste comprise entre la valeur minimale ( $g_{min}$ ) et la maximale ( $g_{max}$ ), une méthode d'adaptation du coefficient de pénalisation normale a été proposée ([34, 33, 35]). Pour que l'interpénétration reste acceptable il faut que la borne supérieure soit de l'ordre de grandeur de l'erreur engendrée par la résolution numérique. Lorsqu'il y a contact, on souhaite que :

$$g_{min} \leq g \leq g_{max}. \quad (3.61)$$

Afin de respecter l'inégalité (3.61), lors du calcul de la force normale de contact, le coefficient de pénalisation normale ( $\varepsilon_n$ ) est fixé selon les conditions de contact (ceci en fonction de la valeur de l'interpénétration et la valeur de ce même coefficient à l'itération précédente). Le coefficient de pénalisation normal peut donc être différent pour deux points sur une même surface de contact.

Si l'interpénétration est trop importante, ou trop petite, le paramètre de pénalisation

sera respectivement augmenté ou diminué. Le coefficient de pénalisation normale à l'itération  $i + 1$  ( $\varepsilon_{ni+1}$ ) est ajusté en fonction de l'interpénétration et de ce même paramètre à l'itération  $i$  ( $g_i$  et  $\varepsilon_{ni}$ ), tel que :

$$\varepsilon_{ni+1} = \mathcal{F}(g_i, g_{min}, g_{max})\varepsilon_{ni} \quad (3.62)$$

avec pour  $g > 0$

$$\mathcal{F}(g_i, g_{min}, g_{max}) = \begin{cases} \frac{g_i}{g_{max}} & \text{si } g_i > g_{max} \\ \frac{g_i}{g_{min}} & \text{si } g_i < g_{min} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.63)$$

Le critère de convergence est enrichi d'une condition d'invariabilité des coefficients de pénalisation. Ceci assure que les valeurs de l'interpénétration seront bien comprises entre les valeurs maximales et minimales, fournies par l'utilisateur. Cette technique d'adaptation de la pénalisation permet de rendre la méthode plus stable et plus rapide. Néanmoins, la valeur majorant l'interpénétration admissible ne peut pas toujours être aussi petite que ce qui est désiré. Le choix d'une valeur trop petite peut engendrer des oscillations numériques, situation qui peut rendre la résolution impossible. En outre, l'adaptation de la pénalité fait disparaître la possibilité de pouvoir représenter la déformation élastique des aspérités surfaciques par l'interpénétration. Celle-ci n'est plus fonction de la pression de contact. L'interpénétration est donc uniquement une erreur engendrée par la résolution numérique. De plus, la non-symétrie des conditions de contact (l'erreur n'est admise que lorsqu'il y a interpénétration,) peut créer certains problèmes de convergence. En effet, le franchissement de la frontière de contact peut entraîner des oscillations numériques. Pour pallier les limites de ces méthodes, celle du

lagrangien augmenté peut être envisagée.

### 3.4.2 Méthodes du lagrangien augmenté

L'utilisation de la méthode du lagrangien augmenté n'introduit pas d'inconnues supplémentaires (voir partie 3.1.3 page 32). Les inconnues du système d'équations à résoudre sont les déplacements nodaux, comme pour la méthode de pénalisation. Le système non linéaire obtenu peut être résolu par la même méthode utilisée dans le cas de la méthode de pénalisation (voir la partie précédente, 3.4.1, équation 3.60). Dans ce système d'équations, la force de contact  $t_c^1$  est remplacée par une fonction des champs de déplacement  $u_1$  et  $u_2$  et des multiplicateurs de Lagrange (voir équations 3.24). La mise à jour des multiplicateurs de Lagrange est faite à partir des équations (3.25). Plusieurs algorithmes peuvent être utilisés pour la résolution de problème utilisant la méthode du lagrangien augmenté. L'algorithme 3.2 est utilisé dans cette analyse.

---

#### Algorithme 3.2 Méthode du lagrangien augmenté

---

**ENTRÉES:**  $U_0$ ,  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_t$  ( $i = 0$ )  $\lambda = t_c^1$ .

- 1- Calcul des conditions de contact ( $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_t$  et  $t_c^1$ ).
- 2- Calcul de la correction incrémentale,  $\Delta U_i$  :  
(équation (3.60)),  $R(U_i) + K_T(U_i)\Delta U_i = 0$

Calcul du vecteur des déplacements à l'itération  $i + 1$  :  $U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$ .

**si** convergence **alors**

**si** l'interpénétration et le glissement relatif sont inférieurs à la tolérance **alors**

$U_{i+1}$  = état d'équilibre

**sinon**

mise à jour des multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda = t_c^1$ , équations (3.25))

retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$

**fin (si)**

**sinon**

retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$

**fin (si)**

---

L'algorithme utilisé avec la méthode du lagrangien augmenté nécessite la détermination de deux constantes, le coefficient de pénalisation normale et le tangentielle. Les

valeurs des coefficients de pénalisation,  $\varepsilon_n$  et  $\varepsilon_t$ , sont constantes et fixées par l'utilisateur.

Cette méthode permet d'utiliser des valeurs plus faibles pour les coefficients de pénalisation. Ceci réduit les risques d'avoir des oscillations numériques et des problèmes de convergence. Néanmoins, comme pour la méthode de pénalisation, la principale difficulté survenant lors de son utilisation est le choix des coefficients de pénalisation. Le choix de coefficients trop faibles engendre un trop grand nombre d'itérations, et donc des temps de calcul inadmissibles.

Afin de supprimer le choix des coefficients de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être envisagée.

### 3.4.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

L'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange n'introduit pas de coefficients devant être déterminés par l'utilisateur mais ajoute des degrés de liberté. Ces degrés de liberté supplémentaires correspondent aux forces de contact (voir partie 3.1.2). Le système d'équations non linéaires est aussi résolu par la méthode de Newton-Raphson. La correction à l'itération  $i$  est obtenue par la résolution de l'équation (3.39), qui peut être réécrite sous la forme :

$$R(U_i, \lambda_i) + K_T(U_i, \lambda_i)\Delta U_{\lambda i} = 0 \quad (3.64)$$

avec

$$R(U_i, \lambda_i) = \begin{pmatrix} R_u(U_i, \lambda_i) \\ R_{\lambda_n}(U_i) \\ R_{\lambda_t}(U_i) \end{pmatrix} \quad \Delta U_{\lambda i} = \begin{pmatrix} \Delta U_i \\ \Delta \lambda_{ni} \\ \Delta \lambda_{ti} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

et

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}(\mathbf{U}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) & \mathbf{K}_{u\lambda_n}(\mathbf{U}_i) & \mathbf{K}_{u\lambda_t}(\mathbf{U}_i) \\ \mathbf{K}_{\lambda_n u}(\mathbf{U}_i) & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\lambda_t u}(\mathbf{U}_i) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

La taille de ce système peut varier entre  $n_{ddl}$  et  $n_{ddl} + n_{ddl}^{c1}$  en fonction du nombre de noeuds de la frontière  $\Gamma_c^1$  en contact.  $n_{ddl}$  et  $n_{ddl}^{c1}$  sont respectivement, le nombre de degrés de liberté des déplacements et celui des forces de contact.

### Résolution classique

Une technique de résolution similaire à celle effectuée avec la méthode de pénalisation peut être retenue (voir 3.4.1). L'algorithme utilisé pour résoudre ce système est, de même, celui de Newton-Raphson (Algorithme 3.3) :

---

#### Algorithme 3.3 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

---

**ENTRÉES:**  $\mathbf{U}_0$  et  $\boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{t}_c^1$  ( $i = 0$ ).

1- Calcul de la correction incrémentale,  $\Delta\mathbf{U}_{\lambda_i}$  :

(équation (3.64)),  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_{\lambda_i}) + \mathbf{K}_T(\mathbf{U}_{\lambda_i})\Delta\mathbf{U}_{\lambda_i} = 0$

Correction du vecteur des déplacements et des forces de contact à l'itération  $i + 1$  :

$\mathbf{U}_{\lambda_{i+1}} = \mathbf{U}_{\lambda_i} + \Delta\mathbf{U}_{\lambda_i}$ .

si convergence alors

$\mathbf{U}_{\lambda_{i+1}}$  = état d'équilibre

sinon

retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$

fin (si)

---

Cette technique de résolution pose plusieurs problèmes. Le premier est la taille du système. En effet, chaque correction incrémentale peut modifier les statuts de contact et donc modifier le nombre de degrés de liberté lié aux forces de contact. Le deuxième problème est lié à la résolution de l'équation (3.64). La matrice  $\mathbf{K}_T$  comprend un certain nombre de zéros sur sa diagonale, l'inversion de celle-ci n'est pas triviale. La résolution de l'équation (3.64) nécessite une technique particulière plus coûteuse en temps de calcul que la factorisation classique généralement utilisée.

Pour éviter ces problèmes, une autre procédure de calcul basée sur celle dite du "lagrangien à incrément « avant »" est proposée.

### Méthode du lagrangien à incrément « avant »

Pour cette approche, les multiplicateurs de Lagrange ne sont pas considérés comme des inconnues mais plutôt comme des paramètres que l'on fixera *a posteriori*. Ces paramètres engendrent à leur tour des corrections du vecteur des déplacements. Cette technique permet donc la résolution exacte du problème en deux temps. Elle est utilisée dans le cas du problème de mécanique du contact en dynamique. Elle a d'abord été proposée pour le contact bidimensionnel [11] puis elle fut étendue au cas tridimensionnel et utilisée dans de nombreuses applications [10, 12]. Nous proposerons une adaptation de cette méthode afin de résoudre les problèmes de contact mécanique en quasi-statique. Les équations d'équilibre sont vérifiées sans prendre en compte toutes les nouvelles conditions de contact. Puis, des valeurs incrémentales permettant le respect des conditions d'admissibilité sont calculées.

L'équation permettant le calcul de la correction du vecteur solution (3.39) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} R_u(U, \lambda) \\ R_\lambda(U) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu}(U, \lambda) & K_{u\lambda}(U) \\ K_{\lambda u}(U) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

avec

$$R_\lambda(U) = \begin{pmatrix} R_{\lambda_n}(U) \\ R_{\lambda_t}(U) \end{pmatrix} \quad \Delta \lambda = \begin{pmatrix} \Delta \lambda_n \\ \Delta \lambda_t \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

et

$$K_{u\lambda}(U) = \begin{bmatrix} K_{u\lambda_n}(U) & K_{u\lambda_t}(U) \end{bmatrix} \quad K_{\lambda u}(U) = \begin{bmatrix} K_{\lambda_n u}(U) \\ K_{\lambda_t u}(U) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Le vecteur des corrections des déplacements  $\Delta U$  est décomposé en une somme de deux termes, tel que :

$$\Delta U = \Delta U^* + \Delta U^c. \quad (3.70)$$

où le terme  $\Delta U^*$  correspond à une approximation évaluée à condition de contact constante.  $\Delta U^c$  et  $\Delta \lambda$  correspondent aux corrections permettant le respect des conditions d'admissibilité.

Le vecteur  $\Delta U^*$  est calculé à partir de l'équation (3.67) en remplaçant le vecteur  $\Delta \lambda$  par zéro :

$$R_u(U_j^*, \lambda) + K_{uu}(U_j^*, \lambda) \Delta U_j^* = 0 \quad (3.71)$$

Cette équation non linéaire est résolue de façon itérative à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson. La solution de cette équation est notée  $U^*$  et la correction  $\Delta U^*$  est donnée par la différence entre  $U^*$  et  $U$  initiale ( $\Delta U^* = U^* - U = \sum_j \Delta U_j^*$ ). Puis, les valeurs des vecteurs  $\Delta U^c$  et  $\Delta \lambda$  permettant le respect des conditions d'admissibilité sont calculées. Ces vecteurs sont déterminés à partir de l'équation (3.67), pour une valeur du vecteur déplacement égale à  $U^*$ . Cette équation permet d'obtenir les relations suivantes :

$$K_{uu}(U^*, \lambda) \Delta U^c + K_{u\lambda}(U^*) \Delta \lambda = 0 \quad (3.72)$$

$$R_\lambda(U^*) + K_{\lambda u}(U^*) [\Delta U^* + \Delta U^c] = 0 \quad (3.73)$$

Après réarrangement, les expressions de  $\Delta U^c$  et  $\Delta \lambda$  sont données par :

$$[K_{\lambda u} K_{uu}^{-1} K_{u\lambda}] \Delta \lambda = R_\lambda + K_{\lambda u} \Delta U^* \quad (3.74)$$

$$\Delta U^c = -K_{uu}^{-1} K_{u\lambda} \Delta \lambda \quad (3.75)$$

L'algorithme utilisé pour résoudre ce système d'équations est présenté dans l'Algorithme 3.4.

---

**Algorithme 3.4** Méthode du lagrangien à incrément « avant »

---

**ENTRÉES:**  $U_0$  et  $\lambda_0 = t_c^1$  ( $i = 0$ ).

1- Première étape du calcul :  $U_0^* = U_i$  ( $j = 0$ ).

2- Calcul de  $U_j^*$  :

(équation (3.71),  $R_u(U_j^*, \lambda) + K_{uu}(U_j^*, \lambda)\Delta U_j^* = 0$

Correction du vecteur des déplacements à l'itération  $j + 1$  :

$U_{j+1}^* = U_j^* + \Delta U_j^*$

si convergence alors

$\Delta U^* = U_{j+1}^* - U_i$  et  $U^* = U_{j+1}^*$

sinon

retour à l'étape 2 avec  $j = j + 1$

fin (si)

3- Deuxième étape du calcul :

Calcul de la matrice  $X$  :  $K_{uu}(U^*, \lambda)X = K_{u\lambda}(U^*)$

Calcul de la matrice  $Y$  :  $Y = K_{\lambda u}(U^*)X$

Calcul des corrections incrémentales,  $\Delta U^c$  et  $\Delta \lambda$  :

$Y\Delta \lambda = R_\lambda(U^*) + K_{\lambda u}(U^*)\Delta U^*$  et  $\Delta U^c = -X\Delta \lambda$

Calcul des vecteurs à l'itération  $i + 1$  :  $U_{i+1} = U_i + \Delta U^* + \Delta U^c$  et  $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta \lambda$

si convergence alors

$U_{i+1}, \lambda_{i+1} = \text{état d'équilibre}$

sinon

retour à l'étape 1 avec  $i = i + 1$

fin (si)

---

### 3.5 Conclusion

Le problème de mécanique du contact frottant fait partie des problèmes mécaniques qui sont les plus sensibles à la méthode de résolution numérique utilisée. La résolution de ce genre de problème nécessite encore aujourd'hui une attention particulière aussi bien au niveau de la formation du système d'équations que de la discrétisation spatiale du contact et dans l'algorithme de résolution du problème.

L'intégration des lois de contact dans un système d'équations n'est pas triviale. Il existe plusieurs méthodes. Notre travail se focalise sur les méthodes de régularisation de ces lois, parmi lesquelles nous avons exposé les méthodes les plus classiques, telles que celle de pénalisation, celle des multiplicateurs de Lagrange ou encore celles du lagrangien augmenté. Chacune de ces méthodes présente des avantages et des inconvénients. Les méthodes basées sur la pénalisation sont limitées par le choix des coefficients de pénalisation alors que celle des multiplicateurs de Lagrange est limitée par sa complexité et par un coût de calcul plus important.

La prise en compte du contact mécanique sous une discrétisation spatiale est exposée sous une formulation point-surface et une formulation surface-surface. La modélisation point-surface présente de nombreuses limites. Elle entraîne des instabilités ou des blocages numériques, notamment lorsque les surfaces de contact ne sont pas assez régulières ou lorsque les déplacements relatifs sont trop importants. La formulation surface-surface arborée n'est pas symétrique mais présente l'avantage de considérer la géométrie des deux surfaces en contact. Néanmoins, cette méthode présente aussi certains problèmes tels que la nécessité de posséder un vecteur normal et un vecteur tangentiel en chaque nœud d'une des surfaces candidate au contact. Ceci limite cette formulation aux problèmes en deux dimensions.

Ce chapitre présente finalement les algorithmes de résolution du problème de contact mécanique frottant les plus utilisés. Le chapitre suivant permettra de mettre en évidence les limites de ces algorithmes grâce à des exemples simples.

# Chapitre 4

## Limites des méthodes habituelles

Afin de mettre en lumière les limites des différentes méthodes de calcul présentées dans le chapitre 3, des exemples sont exposés. La résolution de ces exemples est faite avec le logiciel de calcul pour les problèmes multi-physiques, FESh++ (**F**inite **E**lement **s**hell in **C++** [3, 4]). Cet outil se base sur la méthode des éléments finis, il est développé conjointement entre l'Université Laval et l'Université du Québec à Chicoutimi. Il est couplé au module Contacta (voir [3]) afin de permettre la résolution de problèmes de contact multi-physiques. Ce module est programmé avec une méthode de discrétisation des équations de contact point-surface. Cette dernière fait l'objet de la partie 3.3.1 à la page 40. Dans un premier temps, des problèmes de contact sans frottement sont abordés à travers le problème de Hertz. Par la suite, l'analyse se porte sur des problèmes de contact frottant traitant de l'écrasement de structures minces.

### 4.1 Problèmes de Hertz

Le problème de Hertz est très souvent utilisé comme référence dans le processus de validation de modèle numérique. Il consiste à calculer l'état mécanique de deux cylindres entrant en contact le long de leur génératrice sous l'effet d'une force linéique  $P$  (Figure 4.1). Ce problème permet de vérifier si la méthode de calcul peut donner une bonne évaluation des conditions de contact même si on ne connaît qu'une approximation des

frontières.

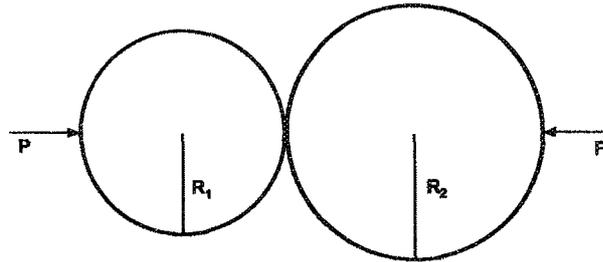


Figure 4.1 – Problème du contact de Hertz

#### 4.1.1 Solution analytique

Lorsque le comportement des solides est élastique, la solution analytique d'un tel problème est connue depuis les travaux de Hertz publiés en 1882. La solution proposée par Hertz n'est valable que si nous respectons certaines hypothèses sur la zone de contact (Figure 4.2). Celles-ci sont données par :

- les surfaces sont continues et non conformes :  $a \ll R_1$  et  $a \ll R_2$  (Figure 4.2)
- les déformations sont petites :  $a \ll R_1$  et  $a \ll R_2$
- chaque solide peut être considéré comme un solide semi-infini, c'est-à-dire :  
 $a \ll R_1$  et  $a \ll R_2$
- il n'y a pas de frottement :  $\mu = 0$

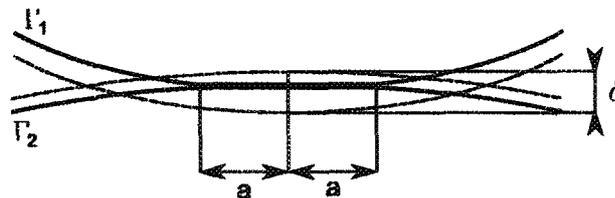


Figure 4.2 – Zone de contact de Hertz.

D'après les ouvrages [37, 38, 39], qui reprennent la théorie de Hertz, les équations régissant la mécanique dans la zone de contact (Figure 4.2) des deux cylindres infiniment longs en contact le long de leur génératrice (Figure 4.1) sont données par :

$$a = 2\sqrt{\frac{PR^*}{\pi E^*}} \quad (4.1)$$

$$t_N(x) = \frac{2P}{\pi a^2}(a^2 - x^2)^{1/2} = t_{N0} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (4.2)$$

$$\delta = \frac{P}{\pi E^*} \left( \frac{2}{3} + Ln \frac{2R_1}{a} + Ln \frac{2R_2}{a} \right) \quad (4.3)$$

avec :

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Approche numérique

Dans cet exemple, les deux cylindres sont de même dimension. D'après les plans de symétrie, de l'hypothèse des petites déformations et de la géométrie, le problème peut être réduit à la modélisation de deux quarts de cylindres rentrant en contact entre eux (Figure 4.3).

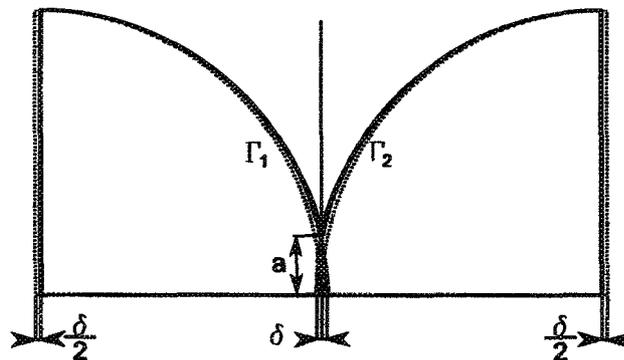


Figure 4.3 – Problème du contact de Hertz simplifié.

Compte tenu du fait que tout le cylindre n'est plus considéré, la force linéique  $P$  ne peut plus être imposée. Afin de résoudre le même problème, un déplacement est imposé sur les faces des quarts de cylindre parallèles à la zone de contact, ceux-ci ont le même sens que la force  $P$  et sont égaux à  $\delta/2$ . De plus, les déplacements normaux des frontières reposant sur les axes de symétries sont imposés nuls.

La résolution de ce problème est effectuée en deux dimensions en se basant sur l'hypothèse des déformations planes. Le calcul est accompli en deux pas de temps. Le nombre d'itérations maximale pour chaque pas de temps est fixé à cent.

Le maillage de la section du quart de cylindre est composé d'éléments triangulaires à trois noeuds (Figure 4.4). Les éléments situés dans le voisinage de la zone de contact sont supposés être de même dimension. Pour le choix de la taille des éléments, nous avons pris comme critère le ratio entre la taille des éléments dans la zone de contact et la dimension de celle-ci. Trois maillages sont définis (noté *maillage n*, où  $n$  est le nombre d'éléments dans la zone de contact) :

- maillage 2,
- maillage 4,
- maillage 6.

Le choix d'une méthode de régularisation des équations du contact mécanique a une très grande influence sur la qualité de la solution ainsi que la vitesse de convergence.

Nous avons comparé les trois méthodes suivantes :

- méthode de pénalisation (avec une pénalité normale de  $10^5$ ,  $10^6$  ou  $10^7$ ),
- méthode de pénalisation adaptative [34],
- méthode du lagrangien augmenté (avec une pénalité normale de  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  ou  $10^6$ ).

L'unité de longueur choisie pour la modélisation de ces problème est le millimètre. Une interpolation linéaire est utilisée, ainsi qu'une intégration sur la frontière de contact de

type Newton-Cotes à deux points (pour un élément unidimensionnel, cela correspond à une intégration sur les nœuds).

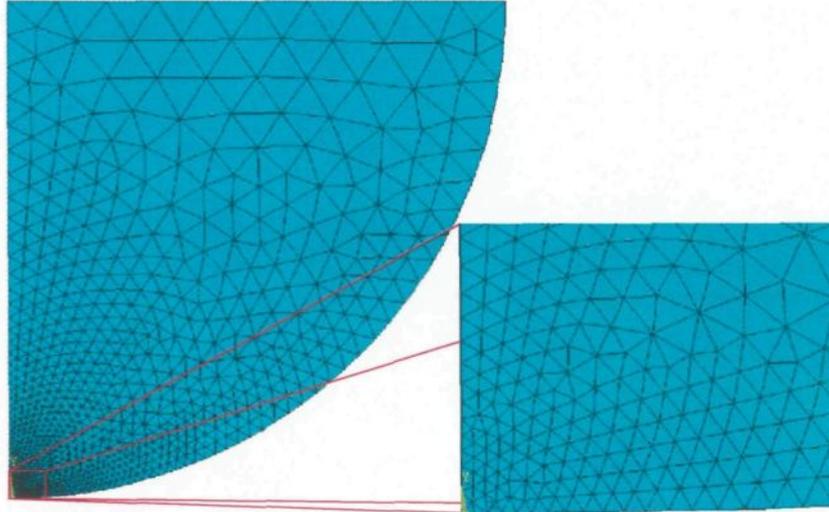


Figure 4.4 – Maillage du quart de cylindre en deux dimensions (maillage 6).

Pour la méthode de pénalisation, le choix des valeurs du coefficient de pénalisation normale est motivé par les valeurs maximales de la force normale de contact attendue (cas des deux cylindres en acier : voir paragraphe 4.1.3) et de la tolérance à l'interpénétration. De même, les valeurs du coefficient de pénalisation normale pour la méthode du lagrangien augmenté sont basées sur les valeurs utilisées avec la méthode de pénalisation. Pour la méthode d'adaptation de la pénalité, la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale est prise égale à 2,  $2 \times 10^2$ ,  $2 \times 10^4$  ou  $2 \times 10^6$ . Ces valeurs correspondent à la valeur du module d'Young de l'acier multipliée par une puissance de dix (cas des deux cylindres en acier : voir paragraphe 4.1.3).

### 4.1.3 Deux cylindres identiques

Le problème de contact entre deux cylindres identiques est résolu de deux manières différentes :

- un quart de cylindre rentrant en contact avec un plan indéformable,
- deux quarts de cylindre identiques entrant en contact entre eux.

Ces deux versions sont exposées aussi bien avec un comportement élastique qu'élasto-plastique. Le problème élasto-plastique est utilisé pour tester l'effondrement de la valeur des contraintes normales de contact. Ainsi, afin de maximiser la plastification, l'hypothèse des déformations planes est remplacée par celle des contraintes planes. Les caractéristiques physiques et mécaniques de ces problèmes sont définies par les valeurs suivantes :

- rayon des cylindres  $R = 0,25$  m
- module d'Young  $E = 200$  GPa
- coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$
- limite d'élasticité :  $\sigma_e = 472$  MPa
- la loi d'écroutissage :  $\sigma_0(\text{MPa}) = \sigma_e + K\varepsilon$  avec :
  - $K = 640$  MPa.

#### Solution analytique

Dans le cas élastique, afin de majorer la composante normale de la force de contact on pose :

$$t_{N0} = 1000 \text{ MPa.} \quad (4.5)$$

Donc, d'après les équations régissant la mécanique dans la zone de contact ((4.1) à (4.3) de la page 60), les valeurs de  $a$  et de  $\delta/2$  sont données par :

$$\frac{\delta}{2} = 5,927 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,05927 \text{ mm} \quad (4.6)$$

$$a = 0,002275 \text{ m} = 2,275 \text{ mm} \quad (4.7)$$

### Solution numérique

Pour le problème élasto-plastique, les conditions aux limites et les maillages sont ceux utilisés pour le problème élastique. Ces problèmes sont résolus en deux pas de temps.

#### – Cas du quart de cylindre et du plan

Le cas du quart de cylindre et du plan indéformable est la configuration la plus simple de ce problème. C'est pour cette raison que ce problème est présenté au début de la validation des méthodes numériques de résolution.

#### – Méthode de pénalisation

Dans un premier temps, la méthode de pénalisation est étudiée avec un coefficient de pénalisation normale constant. Une étude du cas élastique permet de déterminer la valeur optimale du coefficient de pénalisation normale. Celle-ci est la plus faible valeur permettant une bonne approximation des forces normales de contact. Les mêmes coefficients de pénalisation sont utilisés pour le cas élasto-plastique. Le tableau 4.1 présente le nombre d'itérations en fonction du type du maillage, du comportement du matériau et du coefficient de pénalisation normale. Dans ce tableau, le terme « osc cnt » indique que l'algorithme de résolution a divergé à cause des oscillations de statuts de contact (contact / non contact).

Le tableau 4.1 montre que le nombre d'itérations nécessaires à la résolution de ce problème en deux pas de temps, ne dépend pas vraiment du coefficient de pénalisation normale. De plus, ce nombre est quasiment identique pour tous les maillages utilisés (lorsque la résolution est possible). Cependant, dans le cas élasto-plastique, pour le maillage le plus fin, les valeurs des coefficients de pénalisation normale  $10^6$  et  $10^7$  sont trop importantes, et ceci rend la résolution impossible à cause de l'oscillation de statut

de contact. Cette constatation peut s'expliquer par le fait que le maillage 6 permet de mieux prendre en compte la plasticité et donc le problème se différencie plus du cas élastique. Alors, pour les maillages utilisés ici,  $10^5$  est la plus grande valeur du coefficient de pénalisation normale permettant de résoudre le problème élasto-plastique en deux pas de temps.

Tableau 4.1 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps)

$\epsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
$10^5$	3	4	4	4	5	4
	2	3	3	5	5	5
$10^6$	4	4	5	6	5	osc
	3	3	4	7	5	cnt
$10^7$	4	4	6	5	5	osc
	3	3	4	7	5	cnt

Les figures 4.5 et 4.6 exposent les contraintes normales de contact sur le cylindre en fonction du coefficient de pénalisation normale pour le maillage 4. La coordonnée  $X$  représente la distance séparant un point de la droite, représentant le plan indéformable et le plan de symétrie. La figure 4.5 montre que dans le cas élastique un coefficient de pénalisation normale d'une valeur de  $10^5$  engendre une erreur sur les valeurs des contraintes de contact supérieur à vingt pour cent et une mauvaise évaluation de la zone de contact. Cette figure révèle aussi que la plus faible valeur du coefficient de pénalisation normale permettant une bonne approximation de la force de contact est  $10^6$ . Ces conclusions sont aussi valables pour les autres maillages (maillage 2 et 6).

En outre, la figure 4.6 permet de constater que pour ces trois valeurs du coefficient de pénalisation normale, les contraintes de contact et la zone de contact sont quasiment identiques, dans le cas élasto-plastique. Néanmoins, la solution obtenue avec le coeffi-

cient de pénalisation le plus faible ( $10^5$ ) est de moins bonne qualité que les autres. De même, des constatations identiques peuvent être faites pour le maillage 2.

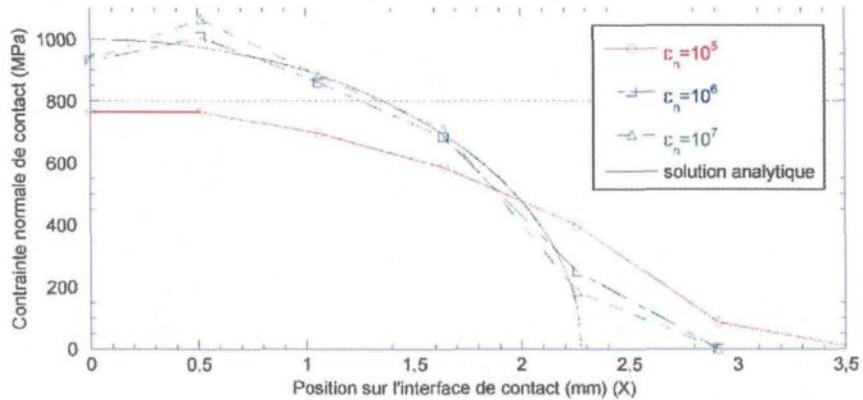


Figure 4.5 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élastique)

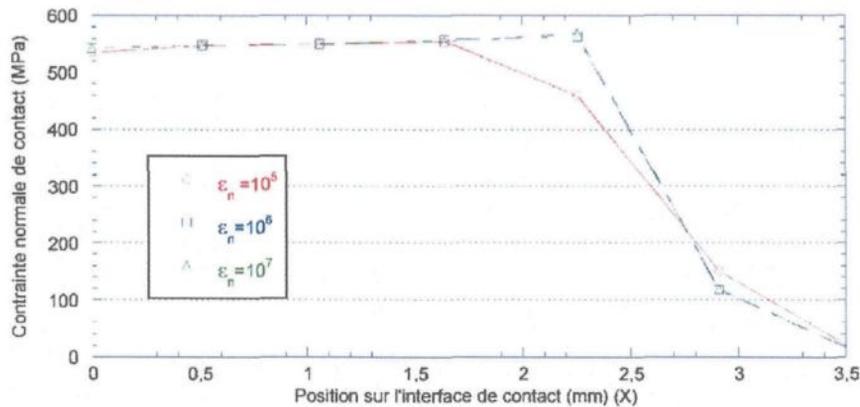


Figure 4.6 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

Le tableau 4.1 et les figures 4.5 et 4.6 permettent de constater qu'aucune des valeurs du coefficient de pénalisation normale ne permet de résoudre de façon optimale ce problème dans le cas élastique et élasto-plastique. En effet, la valeur optimale permet-

tant de résoudre le problème élastique est de  $10^6$  (voir la figure 4.5), alors que pour le problème élasto-plastique la plus grande valeur permettant d'obtenir une solution avec les trois maillages en deux pas de temps est de  $10^5$  (voir le tableau 4.1).

– Méthode de pénalisation adaptative

Pour la méthode de pénalisation adaptative, une étude de l'influence de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale est effectuée. Les valeurs minimale et maximale de l'interpénétration considérées dans la loi d'adaptation de la pénalité sont respectivement de  $10^{-5}$ mm et  $10^{-3}$ mm. Le tableau 4.2 présente le nombre d'itérations nécessaires à la résolution en fonction du type de maillage, du comportement du matériau et de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale.

Tableau 4.2 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	8	9	8	8	10	10
	17	26	25	12	15	12
$2 \times 10^2$	7	7	7	7	8	8
	12	19	18	10	13	10
$2 \times 10^4$	6	6	6	7	7	7
	8	11	11	9	11	8
$2 \times 10^6$	5	6	7	6	6	osc
	4	3	5	8	6	cnt

Le tableau 4.2 montre que la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale a une influence sur le temps de calcul et donc sur la convergence du système. Comme pour la méthode de pénalisation, plus la valeur du coefficient de pénalisation est importante plus les risques d'oscillation numérique et de divergence augmentent. La valeur initiale  $2 \times 10^6$  pour le coefficient de pénalisation normale rend impossible la résolution du

problème en deux pas de temps avec le maillage 6 et un comportement élasto-plastique. En outre, lorsque la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale diminue le nombre d'itérations nécessaires à la résolution du problème augmente.

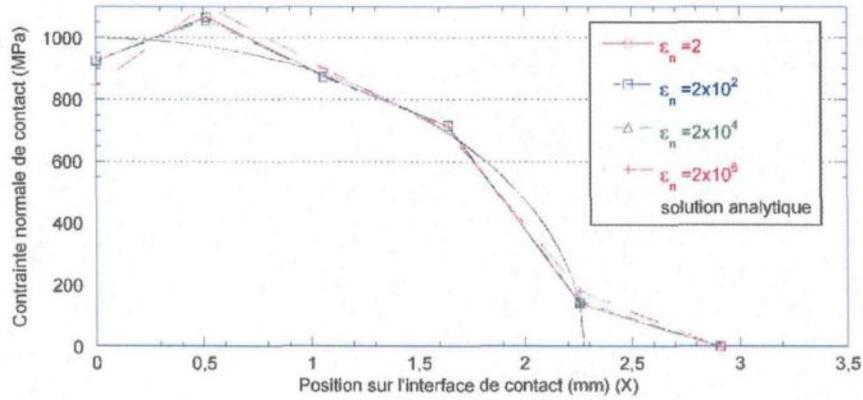


Figure 4.7 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élastique)

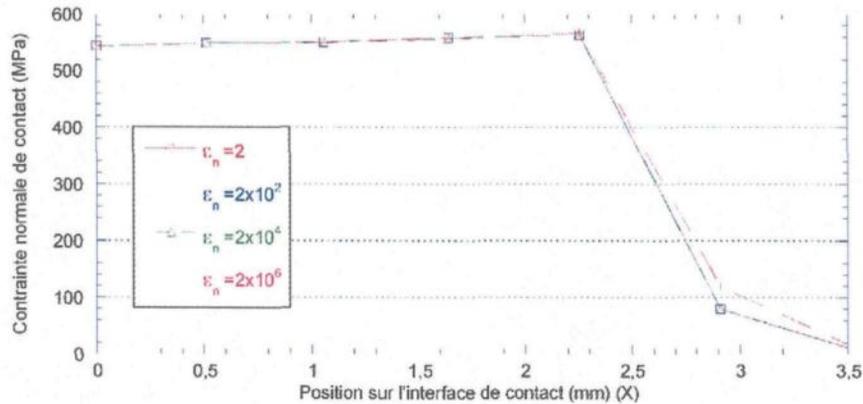


Figure 4.8 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

De plus, les figures 4.7 et 4.8 permettent de constater que pour le maillage 4, lorsque la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale est trop importante ( $2 \times 10^6$ ),

les contraintes normales de contact sont moins bien évaluées. Cette constatation est aussi valable pour les autres maillages. Pour que les contraintes normales de contact soient bien évaluées avec une valeur initiale du coefficient de pénalisation normale trop importante ( $2 \times 10^6$ ), la valeur de l'interpénétration maximale doit être plus faible. Le tableau 4.3 expose le nombre d'itérations nécessaires à la résolution de ce problème en deux pas de temps avec une interpénétration maximale de  $10^{-4}$  mm et une minimale de  $10^{-5}$  mm. Ce tableau montre que dans le cas élasto-plastique, la résolution du problème dépend du choix de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale. Il semble impossible de déterminer un ensemble continu de valeurs du coefficient de pénalisation normale initial permettant de résoudre le problème. En effet, l'augmentation trop importante du coefficient de pénalisation normale peut engendrer des oscillations numériques et ainsi provoquer la divergence de l'algorithme. Néanmoins, la diminution de la valeur de l'interpénétration maximale permet de faire converger les solutions vers celle obtenue avec une valeur initiale du coefficient de pénalisation normale faible (2) et une interpénétration maximale de  $10^{-3}$  mm.

Tableau 4.3 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps,  $g_{max} = 10^{-4}$ mm)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	7	6	8	8	7	osc
	8	10	8	10	9	cnt
$2 \times 10^2$	6	6	7	6	7	7
	7	8	7	9	8	8
$2 \times 10^4$	6	7	8	osc	osc	osc
	5	6	6	cnt	cnt	cnt
$2 \times 10^6$	5	6	7	6	6	osc
	4	4	5	8	6	cnt

Ainsi, comme pour la méthode de pénalisation, le choix de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale reste important. Mais la plage de variation de cette valeur est beaucoup plus importante que dans le cas de la pénalisation constante. Cependant, cette méthode ajoute des paramètres : l'interpénétration maximale et minimale. Le choix de ces paramètres est très important pour obtenir la bonne résolution du problème. Une valeur d'interpénétration maximale trop importante risque de produire une mauvaise approximation des pressions de contact. Alors qu'une valeur trop faible peut engendrer des oscillations numériques et donc ne pas permettre la résolution. De plus, lorsque les valeurs de l'interpénétration maximale et minimale se rapprochent le temps de calcul augmente très rapidement. Si ces valeurs sont trop proches, des oscillations numériques peuvent empêcher la résolution.

– Méthode du lagrangien augmenté

Pour la méthode du lagrangien augmenté, une étude similaire est faite pour déterminer l'intervalle dans lequel le coefficient de pénalisation normale peut être choisi. La valeur minimale de l'interpénétration autorisée est de  $10^{-3}$  mm. Le tableau 4.4 expose l'influence du choix de la valeur du coefficient de pénalisation normale sur le nombre d'itérations obtenu pour chacun des deux pas de temps pris pour résoudre ce problème avec un comportement élastique ou élasto-plastique et en fonction du maillage. Dans ce tableau le terme « non cvg » indique que l'algorithme de résolution n'a pas pu converger en un nombre d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange convenable (inférieur à 20), à cause d'une vitesse de convergence trop faible. Celle-ci est causée par une valeur trop petite du coefficient de pénalisation normale.

Le tableau 4.4 montre que le choix du coefficient de pénalisation normale demeure critique avec la méthode du lagrangien augmenté. En effet, la résolution du problème n'est possible, dans toutes les configurations, que pour un coefficient de pénalisation normale bien choisi (compris entre  $10^4$  et  $10^5$ ). En outre, lorsque le coefficient de péna-

lisation normale diminue le nombre d'itérations augmente rapidement.

Tableau 4.4 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
$10^3$	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg
$10^4$	28 17	26 20	29 41	26 26	24 36	25 43
$10^5$	8 5	8 6	9 5	7 11	8 13	7 11
$10^6$	4 3	4 3	5 4	6 7	5 5	osc cnt

Les figures 4.9 et 4.10 présentent la valeur de la contrainte normale de contact sur la surface du cylindre en fonction du coefficient de pénalisation normale pour le maillage 4. Ces figures permettent de constater que les contraintes normales de contact dépendent de la valeur du coefficient de pénalisation. La qualité de la solution diminue avec l'augmentation du coefficient de pénalisation normale. Dans le cas élastique comme pour l'élasto-plastique, un coefficient de pénalisation de  $10^6$  donne une très mauvaise approximation des contraintes normales de contact. En effet, la valeur du coefficient de pénalisation normale est liée à la rigidité de l'interface. Ainsi, plus cette valeur est importante plus la force nécessaire pour déformer l'interface est importante. Ce phénomène est amplifié par le processus d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange. Pour que la solution obtenue avec un coefficient de pénalisation normale important ( $10^6$ ) soit de la même qualité que celle obtenue avec un coefficient plus faible ( $10^4$ ), la tolérance sur l'interpénétration doit être diminuée. Évidemment, ceci augmente le nombre d'itérations. Ces constatations sont valables quel que soit le maillage.

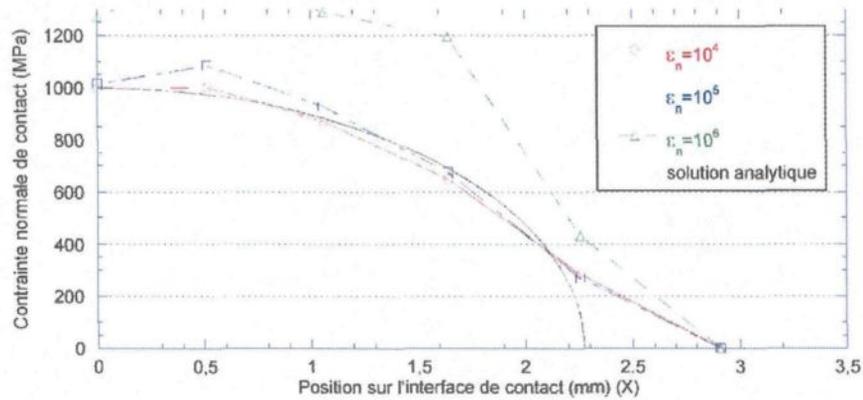


Figure 4.9 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique)

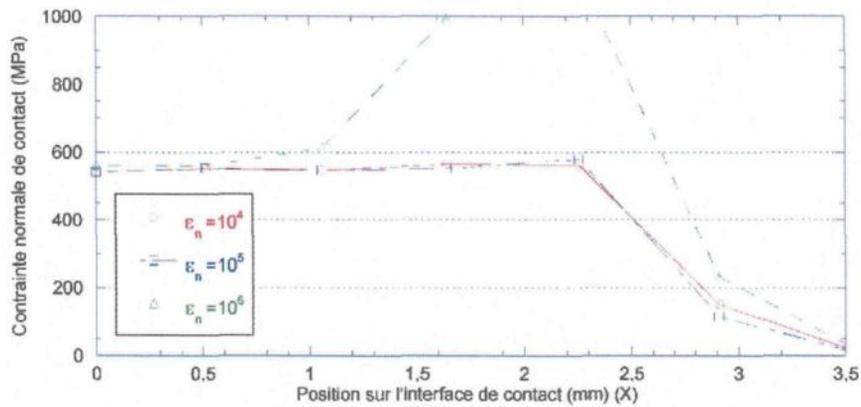


Figure 4.10 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique)

Le tableau 4.4 et les figures 4.9 et 4.10 montrent l'importance de la valeur du coefficient de pénalisation normale. Néanmoins, dans cet exemple, tous les types de problèmes présentés, (élastique ou élasto-plastique avec les maillages 2, 4 ou 6,) peuvent être résolus avec un même coefficient de pénalisation (compris entre  $10^4$  et  $10^5$ ).

Cet exemple démontre l'importance du contrôle de la valeur du coefficient de pé-

nalisation normale et de l'interpénétration pour une pression de contact donnée. Dans le cas de la pénalisation, ces deux variables sont liées. Le contrôle du coefficient de pénalisation normale permet donc celui de l'interpénétration. Mais cette méthode ne permet pas de résoudre ce problème, sous toutes ces configurations, avec la même valeur du coefficient de pénalisation normale. Or, la méthode de pénalisation adaptative et celle du lagrangien augmenté peuvent être utilisées pour résoudre ce problème avec une valeur du coefficient de pénalisation normale identique pour toutes les configurations. Un avantage distingue cependant la méthode de pénalisation adaptative. La plage de variation du coefficient de pénalisation est plus large que celle de la méthode du lagrangien augmenté. Mais ces méthodes sont aussi entravées par le choix de la valeur de l'interpénétration maximale. Une valeur trop faible ne permet pas la résolution du problème, alors qu'une valeur trop importante produit une mauvaise approximation des contraintes de contact. De plus, la méthode de pénalisation adaptative impose à l'utilisateur de choisir une valeur d'interpénétration minimale.

#### – Cas des deux quarts de cylindre

Le cas des deux quarts de cylindres identiques entrant en contact est une configuration plus compliquée que la précédente. Elle vise à tester les méthodes de résolution lorsque les deux frontières de contact sont déformables, ce qui peut engendrer une plus grande variation des conditions de contact entre deux itérations. La même étude que celle effectuée avec la configuration cylindre-plan est reprise sous cette configuration.

#### – Méthode de pénalisation

Le tableau 4.5 présente le nombre d'itérations effectuées pour la résolution de ce problème en deux pas de temps. Ce tableau permet de constater que la méthode de pénalisation se comporte moins bien lorsque les deux frontières sont discrétisées, surtout avec un comportement élasto-plastique. En effet, aucun des coefficients de pénalisation

choisi ne permet de résoudre ce problème en deux pas de temps, avec un comportement élasto-plastique et le maillage 6. En ce qui concerne la qualité de la solution, les conclusions sont les mêmes que pour la configuration avec une seule frontière déformable. Donc la méthode de pénalisation n'est pas appropriée pour résoudre ce problème sous cette configuration en deux pas de temps.

Tableau 4.5 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
$10^5$	4	5	5	5	5	osc
	3	4	3	6	5	cnt
$10^6$	4	4	6	5	5	osc
	3	3	4	7	6	cnt
$10^7$	osc	7	9	osc	osc	osc
	cnt	3	4	cnt	cnt	cnt

#### – Méthode de pénalisation adaptative

Le tableau 4.6 montre également que la méthode de pénalisation adaptative n'est pas utilisable pour résoudre adéquatement ce problème. En effet, malgré la large plage de variation de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale proposée, (compris en 2 et  $2 \times 10^6$ ) aucun de ceux choisis ne permet la résolution du problème élasto-plastique en deux pas de temps avec le maillage 6. Néanmoins, lorsqu'une solution est obtenue, elle est d'une bonne qualité comme celle obtenue dans la configuration plan-cylindre. Ainsi, cet exemple met en lumière une des limites de la méthode de pénalisation adaptative. Cette méthode est moins performante dans le cas élasto-plastique lorsque les deux solides sont déformables.

Tableau 4.6 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	13 12	18 17	23 12	13 11	15 12	osc cnt
$2 \times 10^2$	12 9	17 13	21 9	11 9	14 10	osc cnt
$2 \times 10^4$	11 6	16 8	20 7	osc cnt	osc cnt	osc cnt
$2 \times 10^6$	9 5	14 5	19 5	osc cnt	osc cnt	osc cnt

– Méthode du lagrangien augmenté

Tableau 4.7 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
$10^3$	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg
$10^4$	18 14	30 16	38 25	16 20	23 27	30 34
$10^5$	6 5	7 5	7 6	8 11	8 9	osc cnt
$10^6$	4 3	4 3	6 4	5 7	5 6	osc cnt

Le tableau 4.7 limite encore les avantages de la méthode du lagrangien augmenté. En effet, pour pouvoir résoudre ce problème sous toutes les variations présentées, il

faut prendre une valeur du coefficient de pénalisation normale plus faible que dans la configuration plan-cylindre ( $10^4$  à la place de  $10^5$ ), ceci augmente la qualité de la solution mais aussi le temps de calcul. La résolution de ce problème avec un coefficient de pénalisation normale bien choisi ( $10^4$ ) donne des solutions quasiment identiques à celles obtenues sous la configuration plan-cylindre.

Cet exemple, sous ces deux configurations, (plan-cylindre ou cylindre-cylindre,) démontre la supériorité de la méthode du lagrangien augmenté sur celle de la pénalisation avec ou sans adaptation de la pénalité. En effet, seule la méthode du lagrangien augmenté permet de résoudre ce problème sous toutes ces configurations avec une même valeur du coefficient de pénalisation normale. De plus, la méthode de pénalisation, que ce soit avec ou sans adaptation de la pénalité ne permet pas de résoudre ce problème avec un comportement élasto-plastique, en deux pas de temps, lorsque les deux frontières de contact sont déformables.

#### 4.1.4 Deux cylindres de matériaux différents

Cet exemple a pour but de tester l'influence de la différence de caractéristiques mécaniques des deux solides mis en contact sur les méthodes de résolution. Ainsi, le problème de contact entre un cylindre en aluminium et un autre en acier est exposé aussi bien avec un comportement élastique qu'élasto-plastique. Pour la même raison que celle du problème précédent, dans le cas élasto-plastique, l'hypothèse des déformations planes est remplacée par celle des contraintes planes. Les caractéristiques physiques et mécaniques de ce problème sont définies par :

- rayon des cylindres  $R = 0,25$  m
- acier : les caractéristiques physiques et mécaniques sont les mêmes que celles de l'acier du problème précédent (voir page 63)
- aluminium :
  - module d'Young  $E = 70$  GPa

- coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$
- limite d'élasticité :  $\sigma_e = 325 \text{ MPa}$
- la loi d'écroutissage :  $\sigma_0(\text{MPa}) = \sigma_e + K\varepsilon$  avec :
  - $K = 690 \text{ MPa}$ .

### Solution analytique

Dans le cas élastique, afin de majorer la composante normale de la force de contact on pose :

$$t_{N0} = 500 \text{ MPa.} \quad (4.8)$$

Donc, d'après les équations régissant la mécanique dans la zone de contact ((4.1) à (4.3) de la page 60), les valeurs de  $a$  et de  $\delta/2$  sont données par :

$$\frac{\delta}{2} = 5,546 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,05546 \text{ mm} \quad (4.9)$$

$$a = 0,002194 \text{ m} = 2,194 \text{ mm} \quad (4.10)$$

### Solution numérique

Pour les deux problèmes (élastique et élasto-plastique), les maillages sont ceux utilisés pour le problème des deux quarts de cylindre. Pour le problème élasto-plastique, les conditions aux limites utilisées sont celles calculées pour le problème élastique.

- Méthode de pénalisation

Pour ce problème, comme les contraintes normales de contact sont moins importantes, une valeur plus faible du coefficient de pénalisation normale ( $10^4$ ) est utilisée. Le tableau 4.8 présente le nombre d'itérations pour chacun des deux pas de temps. Il permet de constater que la résolution de ce problème pour tous les maillages et quel que soit le comportement des matériaux (élastique ou élasto-plastique) n'est possible

qu'avec le coefficient de pénalisation normale le plus faible ( $10^4$ ). De plus, les figures 4.11 et 4.12 montrent que la valeur des contraintes normales de contact n'est pas correctement évaluée avec le coefficient de pénalisation de  $10^4$ . L'erreur produite avec ce coefficient est proche de quarante pour cent. Il semble impossible de pouvoir résoudre convenablement ce problème sous toutes ces configurations, en deux pas de temps, avec la méthode de pénalisation.

Tableau 4.8 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation (deux quarts de cylindre, un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps)

$\epsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
$10^4$	3 3	4 3	4 4	3 3	4 3	4 4
$10^5$	4 3	4 3	4 4	4 4	5 4	osc cnt
$10^6$	4 3	4 3	6 4	4 4	5 4	osc cnt
$10^7$	osc cnt	osc cnt	osc cnt	osc cnt	osc cnt	osc cnt

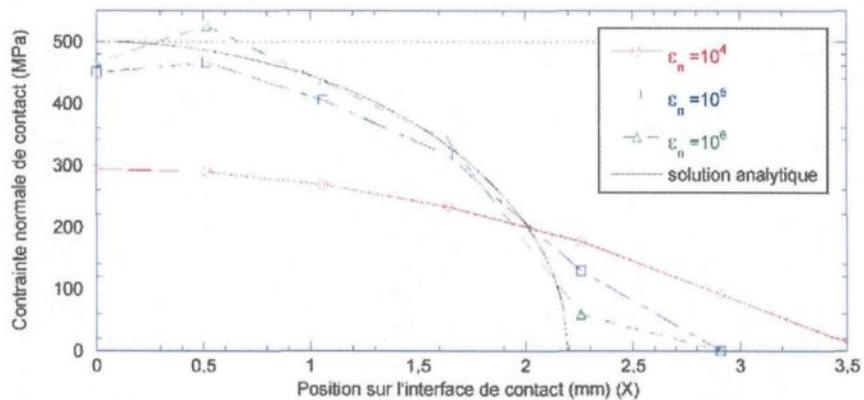


Figure 4.11 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation (mail- lage 4 et comportement élastique)

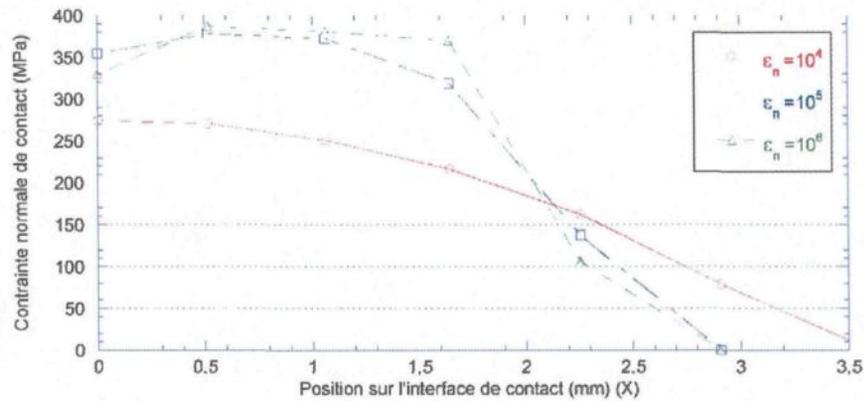


Figure 4.12 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

– Méthode de pénalisation adaptative

Tableau 4.9 – Nombre d’itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (deux quarts de cylindre, un en acier et l’autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps)

$\epsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	13	18	23	13	18	22
	13	24	12	9	11	9
$2 \times 10^2$	12	17	22	12	17	21
	10	16	9	7	9	8
$2 \times 10^4$	11	16	19	osc	osc	osc
	4	5	7	cnt	cnt	cnt
$2 \times 10^6$	9	osc	19	osc	osc	osc
	5	cnt	7	cnt	cnt	cnt

La méthode de pénalisation adaptative permet de résoudre ce problème en deux pas de temps lorsque la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale est choisi

correctement (voir tableau 4.9). La plage de variation de ce coefficient est quand même large (entre 2 et  $2 \times 10^2$ ). De plus, le nombre d'itérations varie très peu entre les deux valeurs extrêmes. Les figures 4.13 et 4.14 montrent que les valeurs de la pression normale de contact sont bien évaluées.

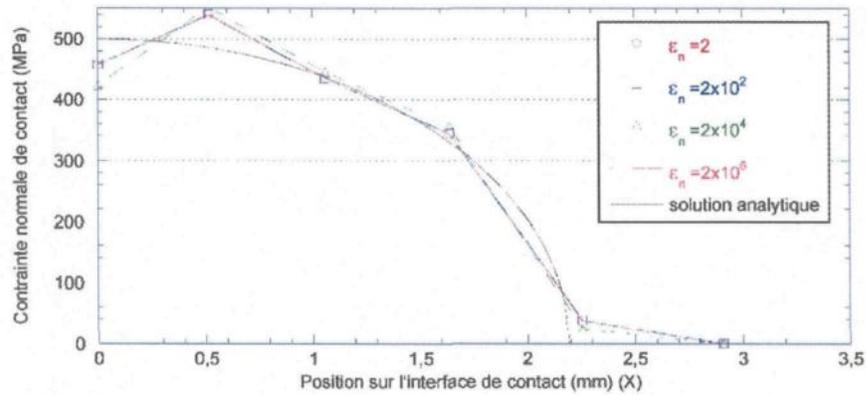


Figure 4.13 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élastique)

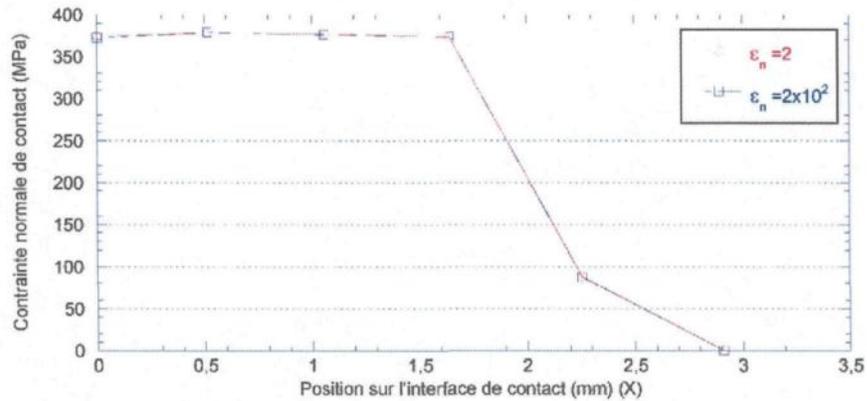


Figure 4.14 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

– Méthode du lagrangien augmenté

Dans cet exemple, le choix du coefficient de pénalisation normale est assez restreint. Le tableau 4.10 montre que seule la valeur  $10^4$  permet la résolution dans toutes les configurations en un temps de calcul raisonnable.

Tableau 4.10 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (deux quarts de cylindre, un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps)

$\epsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
$10^3$	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg	non cvg
$10^4$	11 10	18 12	20 14	11 12	18 19	18 19
$10^5$	6 5	6 5	7 6	6 6	7 6	osc cnt
$10^6$	4 3	4 3	6 4	4 4	5 4	osc cnt

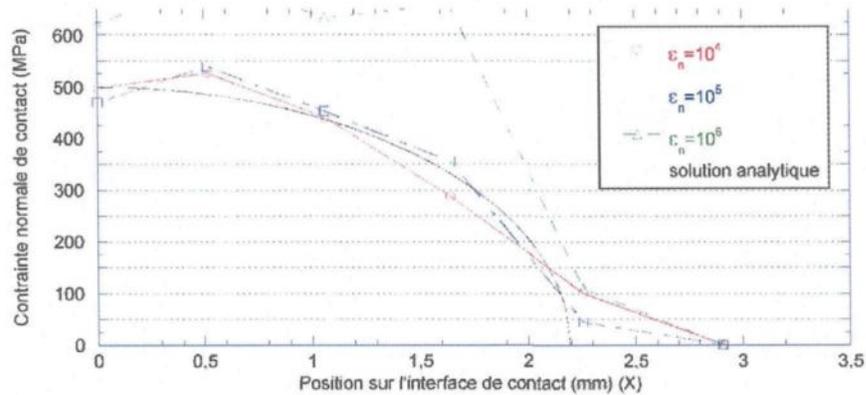


Figure 4.15 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique)

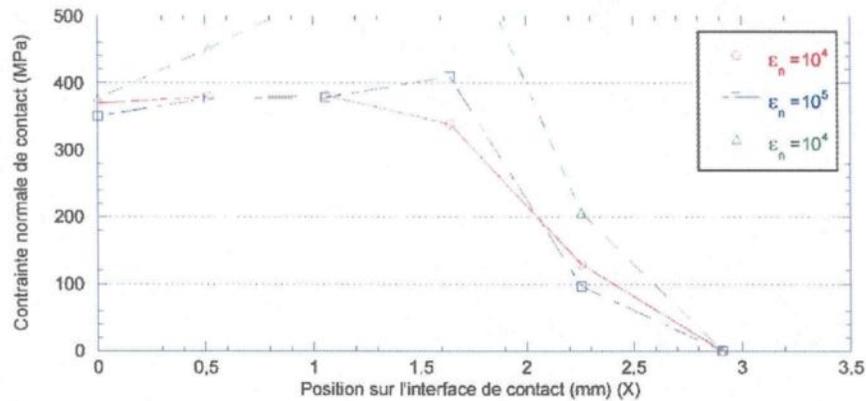


Figure 4.16 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 4 et comportement élastique)

Les figures 4.15 et 4.16 exposent les valeurs des contraintes normales de contact en fonction de la valeur du coefficient de pénalisation normale pour le maillage 4. Celles-ci sont bien évaluées pour une valeur du coefficient de pénalisation normale de  $10^4$ . Pour les valeurs plus importantes, l'approximation est moins bonne mais elle converge vers cette même valeur lorsque la tolérance sur l'interpénétration diminue.

Cet exemple met en évidence l'avantage des méthodes contrôlant l'interpénétration. La méthode du lagrangien augmenté et celle de la pénalisation adaptative permettent de résoudre cet exemple pour tous les cas de figures. La plage de variation de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale est plus importante avec la méthode d'adaptation de la pénalité. De plus, cette dernière est en moyenne moins gourmande en temps de calcul. Par contre, la méthode de pénalisation se montre incapable de résoudre ce problème en deux pas de temps avec un comportement élasto-plastique.

Après la résolution de problèmes de contact mécanique sans frottement sur des solides massifs, quelques exemples de contact mécanique frottant mettant en jeu des structures minces sont présentés.

## 4.2 Problèmes de contact frottant

Deux problèmes de contact frottant différents sont traités : l'écrasement du tube entre deux plans rigides et le développement du contact lorsque ce tube est placé à l'intérieur d'un autre. Le matériau constituant ce tube est l'acier présenté dans le problème de Hertz (voir partie 4.1, page 63). Le coefficient de frottement de la loi de Coulomb  $\mu$  vaut 0,15. Comme avec les exemples précédents, l'unité de longueur utilisée dans la modélisation de ces problèmes est le mm et une interpolation linéaire est utilisée.

### 4.2.1 Écrasement d'un tube entre deux plans rigides

Les dimensions du tube considéré sont les suivantes (4.17) :

- rayon extérieur  $R = 0,25$  m
- épaisseur  $e = 5$  mm.

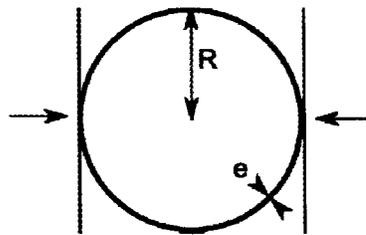


Figure 4.17 – Écrasement d'un tube entre deux plans rigides

Grâce aux plans de symétrie, ce problème est résolu en deux dimensions et uniquement un quart du tube est modélisé. Les différents maillages utilisés sont notés *maillage*  $n$ , où  $n$  est le nombre d'éléments linéiques sur la surface extérieure du quart du tube :

- maillage 100,
- maillage 200,
- maillage 400.

Pour tous ces maillages, l'épaisseur du tube est découpée en deux éléments (voir figure 4.18). Les éléments utilisés sont des quadrangles à 4 nœuds. Ce problème est résolu

aussi bien avec un comportement élastique qu'avec un élasto-plastique. Comme avec le problème de Hertz, l'hypothèse des déformations planes est faite avec le comportement élastique alors que pour le comportement élasto-plastique l'hypothèse retenue est celle des contraintes planes. Le schéma d'intégration numérique sur la frontière de contact est le même que celui utilisé avec le problème de Hertz, les points d'intégrations sont situés sur les nœuds (Newton-Cotes à 2 points).

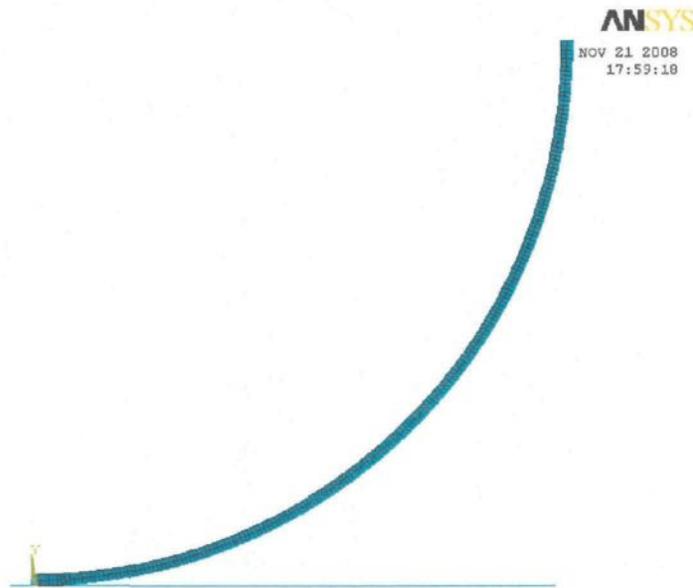


Figure 4.18 – Maillage du quart de tube en deux dimensions (maillage 200).

La face parallèle au plan indéformable du tube est pilotée en déplacement. La direction du déplacement imposé est celle de la normale au plan indéformable (figure 4.19). Ce problème se divise en deux parties. Dans un premier temps, le tube s'écrase sur le plan de la même manière qu'un cylindre. La zone de contact est une bande centrée sur la projection du centre du tube sur le plan. Puis, la partie centrale se décolle de la plaque. La zone de contact est composée de deux bandes et les forces tangentielles deviennent importantes (voir figure 4.19). Le calcul est découpé en 10 pas de temps. Dans le cas élastique, pendant les cinq premiers pas de temps, le déplacement incrémental est de

13 mm. Pour les pas de temps suivants, il est de 2,6 mm. Au total, l'écrasement du quart de tube est de 78 mm. Avec un comportement élasto-plastique, le déplacement incrémental des cinq premiers pas de temps est de 9 mm. Alors que celui des suivants est de 0,9 mm. Ainsi, le quart de tube s'écrase de 49,5 mm sur le plan indéformable.

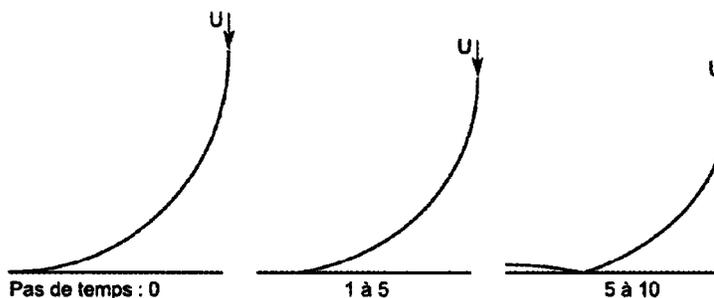


Figure 4.19 – Déformations d'un quart de tube écrasé sur un plan rigide

#### – Méthode de pénalisation

Les exemples de problèmes de Hertz ont démontré l'influence du coefficient de pénalisation normale. Pour résoudre ce problème, la valeur du coefficient de pénalisation normale est fixée à  $10^4$ . Cette valeur permet de rendre l'interpénétration négligeable tout en évitant des oscillations numériques. En outre, une attention particulière est portée au coefficient de pénalisation tangentielle. Le calcul est fait pour plusieurs valeurs du coefficient de pénalisation tangentielle ( $10^2$ ,  $10^3$  et  $10^4$ ). Le tableau 4.11 présente le nombre d'itérations en fonction du type du maillage, du comportement du matériau et du coefficient de pénalisation tangentielle.

Le tableau 4.11 prouve que le nombre d'itérations est quasiment indépendant du type de maillage, du comportement du matériau et du coefficient de pénalisation tangentielle. De plus, il confirme que la méthode de pénalisation garantit une bonne vitesse de convergence. En effet, la résolution est effectuée avec en moyenne trois ou quatre itérations par pas de temps.

Tableau 4.11 – Nombre d’itérations pour la méthode de pénalisation (tube en acier et plan indéformable)

$\varepsilon_t$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	100	200	400	100	200	400
$10^2$	34	38	37	29	28	29
$10^3$	34	38	35	29	30	32
$10^4$	34	36	36	29	30	32

Les figures 4.20 et 4.21 représentent la valeur totale de la force normale de contact sur la surface de contact en fonction du déplacement imposé. La troisième courbe, celle nommée « solution » est obtenue à partir d’un maillage comprenant mille éléments linéiques sur la surface extérieure du quart de tube et quatre sur l’épaisseur. Pour le maillage 100, le profil obtenu est identique à celui du maillage 200 mais l’écart avec la solution de référence est plus important. La valeur maximale de la force normale de contact est égale à 25 N. Ces deux figures montrent que la méthode de pénalisation permet d’obtenir une bonne approximation de la force normale de contact, quel que soit la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle. Néanmoins, la valeur de ce coefficient a une influence sur la qualité de la solution (figure 4.21).

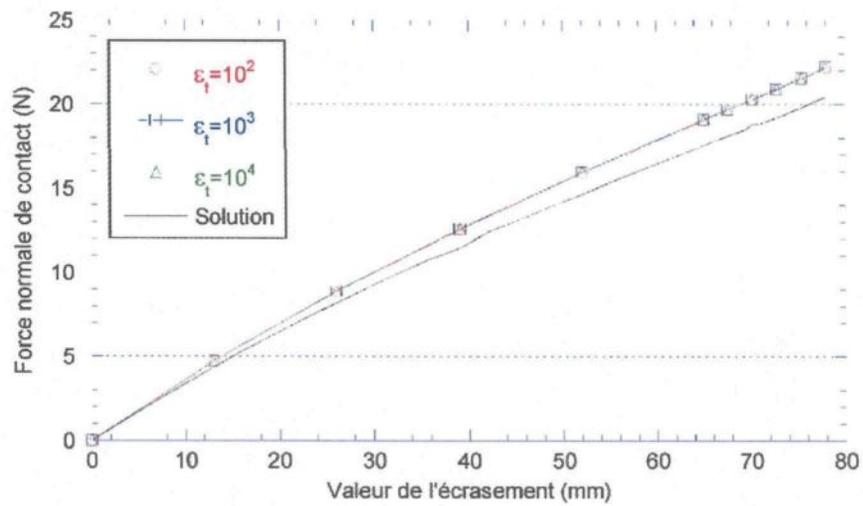


Figure 4.20 – Force normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 200 et comportement élastique)

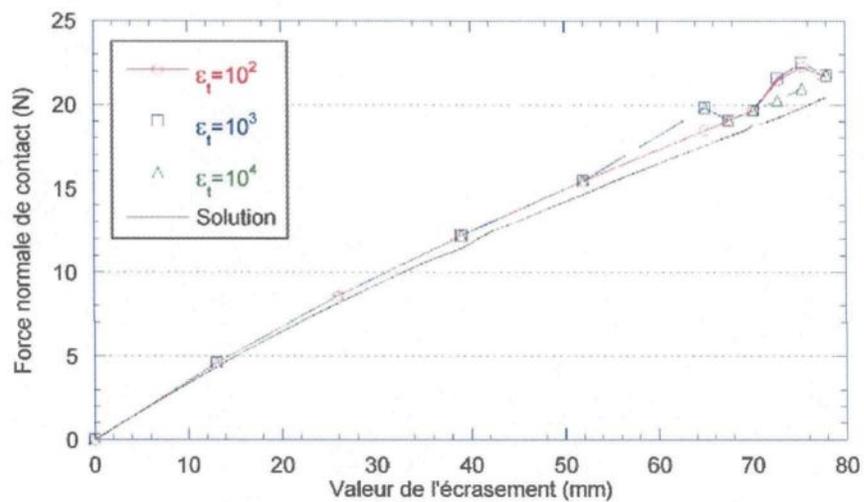


Figure 4.21 – Force normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 400 et comportement élastique)

La figure 4.22 permet de constater, que dans le cas élasto-plastique comme dans le cas élastique, la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle n'a pas vraiment

d'importance à faible écrasement. Toutefois, lorsque la force tangentielle devient importante, la force normale de contact est moins bien évaluée et sa fluctuation est assez importante. Ces constatations sont aussi valables pour les autres maillages.

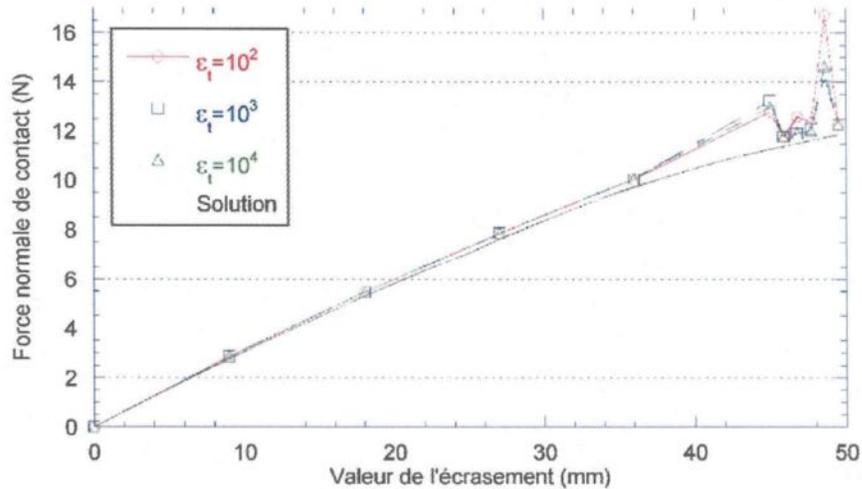


Figure 4.22 – Force normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 400 et comportement élasto-plastique)

#### – Méthode de pénalisation adaptative

La méthode d'adaptation de la pénalité ne permet pas d'ajuster le coefficient de pénalisation tangentielle. Cependant, la valeur des contraintes normales de contact influence fortement la valeur de la composante tangentielle. Le coefficient de pénalisation tangentielle est fixé à  $10^3$  car c'est la valeur qui paraît optimale avec la méthode de pénalisation. Trois valeurs initiales sont prises pour le coefficient de pénalisation normale ( $20$ ,  $2 \times 10^2$  et  $2 \times 10^3$ ). Ces valeurs sont plus faibles qu'avec le problème de Hertz car les contraintes de contact sont beaucoup plus faibles. Comme dans l'exemple précédent, les valeurs de l'interpénétration maximale et minimale sont respectivement de  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$  mm. Le tableau 4.12 expose le nombre d'itérations pour les différents maillages, quel

que soit le comportement du matériau en fonction de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale. Le nombre  $n$  dans l'inscription « osc cnt ( $n$ ) » indique la valeur du plus grand pas de temps pour lequel le problème a été résolu. Le calcul d'après n'a pas pu aboutir à cause d'oscillations numériques du statut de contact.

Tableau 4.12 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative (tube en acier et plan indéformable)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	100	200	400	100	200	400
20	62	83	135	53	osc cnt(8)	130
$2 \times 10^2$	62	90	osc cnt(9)	48	85	105
$2 \times 10^3$	42	40	osc cnt(9)	35	36	41

Le tableau 4.12 montre que le nombre d'itérations varie beaucoup entre deux cas (de 35 à 135). De plus, aucune des valeurs initiales du coefficient de pénalisation normale ne permet de produire une solution pour les dix pas de temps et ceci pour toutes les configurations. L'algorithme diverge lorsque le frottement devient important et que la partie centrale se décolle. Au niveau de la qualité de la solution, celle-ci est meilleure ou identique à celle obtenue avec la méthode de pénalisation. Dans le cas élastique, pour les maillages 100 et 200 la solution est quasiment identique à celle obtenue avec la méthode de pénalisation (voir figure 4.20). Pour le maillage 400, la solution est la meilleure combinaison possible des solutions obtenues avec la méthode de pénalisation (voir figure 4.21). Mais seule la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale la plus faible (20) permet d'obtenir une solution pour les dix pas de temps (voir tableau 4.12). Dans le cas élasto-plastique, les solutions obtenues avec les maillages 100 et 200 sont plus régulières que celles obtenues avec la méthode de pénalisation. Mais des fluctuations importantes de la force de contact normale peuvent apparaître en fonction

de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale (voir figure 4.23). De même, le maillage 400 permet l'obtention d'une très bonne approximation (voir figure 4.24).

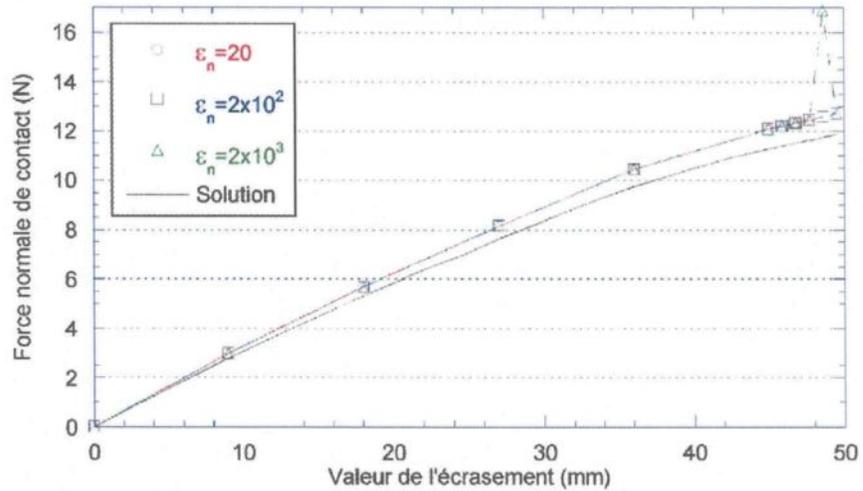


Figure 4.23 – Force normale de contact avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 200 et comportement élasto-plastique)

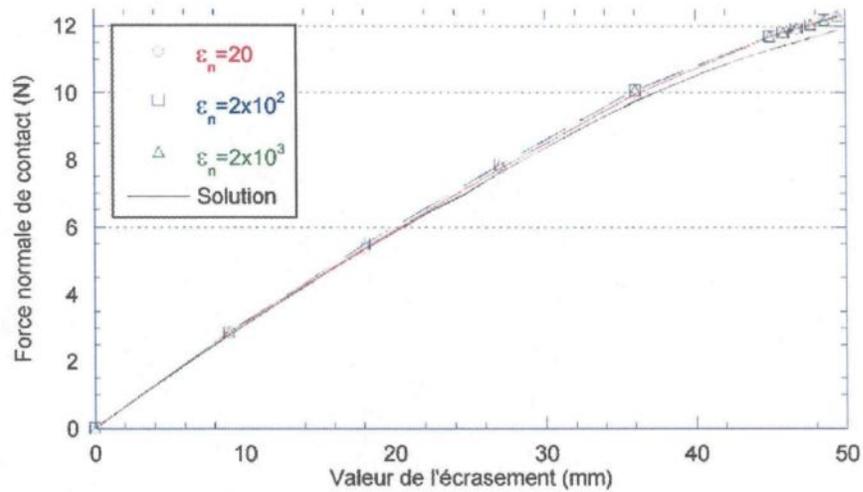


Figure 4.24 – Force normale de contact avec la méthode de pénalisation adaptative (maillage 400 et comportement élasto-plastique)

## – Méthode du lagrangien augmenté

Comme pour la méthode de pénalisation, cet exemple permet de tester l'influence de la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle. Le coefficient de pénalisation normale est fixé à  $10^3$  car cette valeur semble optimale pour ce problème. De plus, l'interpénétration maximale et le glissement tangentiel réversible sont fixés à  $10^{-3}$  mm. Le tableau 4.13 présente le nombre d'itérations en fonction du coefficient de pénalisation tangentielle, du maillage et du comportement du matériau. Dans ce tableau la non convergence de la solution (« non cvg ») indique une vitesse de convergence trop faible. Celle-ci est induite par un coefficient de pénalisation trop faible.

Tableau 4.13 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté (tube en acier et plan indéformable)

$\varepsilon_t$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	100	200	400	100	200	400
10	non cvg	62	non cvg	42	45	non cvg
$10^2$	54	60	72	42	45	74
$10^3$	54	57	64	44	45	64

Le tableau 4.13 permet de constater que, comme avec le coefficient de pénalisation normale, une valeur trop faible du coefficient de pénalisation tangentielle (10) rend la vitesse de convergence trop faible. Excepté pour un coefficient de pénalisation tangentielle faible (10), le nombre d'itérations varie entre 42 et 74. En outre, les figures 4.25 et 4.26 montrent pour le maillage 400 que la valeur de la force normale de contact subit des fluctuations importantes. Elles apparaissent dans la deuxième partie du problème, et elles augmentent avec la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle. Pour rendre la solution moins sensible, il faut diminuer la valeur maximale de l'interpénétration et

du glissement réversible. Mais ceci augmente fortement le temps de calcul.

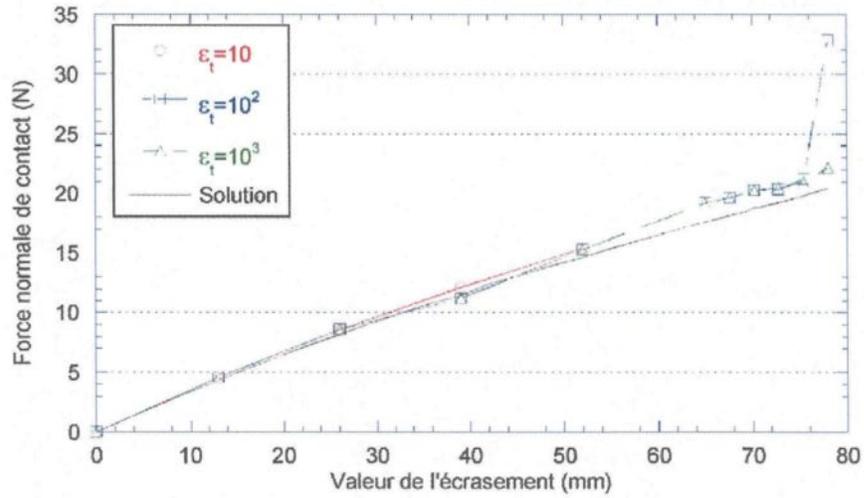


Figure 4.25 – Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (mail-  
lage 400 et comportement élastique)

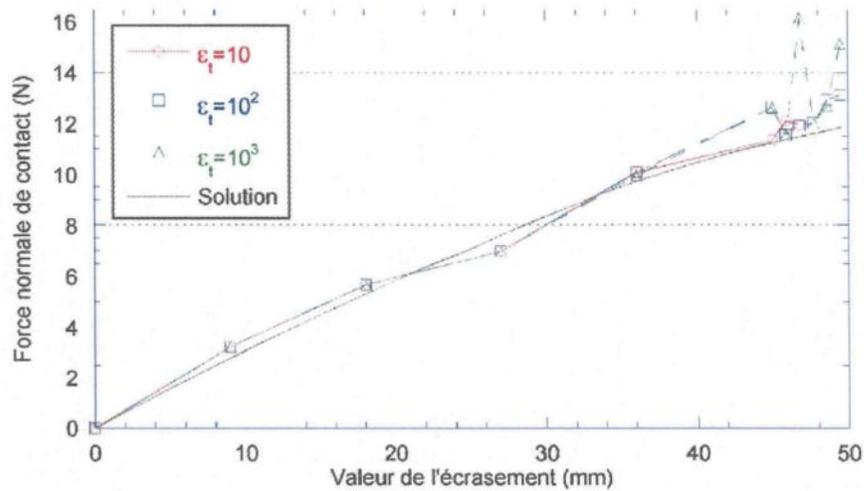


Figure 4.26 – Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (mail-  
lage 400 et comportement élasto-plastique)

Cet exemple prouve que quelle que soit la méthode utilisée, la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle est très importante pour ce type de problème. La méthode permettant de résoudre le plus rapidement le problème est celle de pénalisation. Mais les solutions obtenues avec celle-ci ne sont pas très fiables. Bien que la méthode d'adaptation de la pénalité soit beaucoup plus fiable, cette dernière est beaucoup trop gourmande en temps de calcul et ne permet pas toujours de résoudre entièrement le problème. La méthode du lagrangien augmenté semble être un bon compromis, mais le choix des valeurs des coefficients de pénalisation tangentielle, normale, de l'interpénétration maximale et du glissement réversible a une grande influence sur la résolution du problème ainsi que sur la qualité de la solution.

#### 4.2.2 Écrasement de deux tubes concentriques

Le problème étudié est celui de deux tubes concentriques. Le tube intérieur est appuyé contre l'autre (voire figure 4.27). Les deux tubes ont une épaisseur identique ( $e = 10$  mm). Le rayon intérieur du tube extérieur est égal au rayon extérieur du tube intérieur (25 cm). Le matériau constituant ces deux tubes est l'acier présenté dans le problème de Hertz (voir partie 4.1, page 63). Dans cet exemple le matériau est supposé élastique.

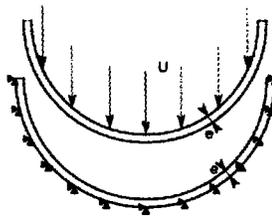


Figure 4.27 – Écrasement de deux tubes concentriques

Ce problème est modélisé en trois dimensions. La longueur des deux tubes est de 100 mm. Afin de retrouver des déformations planes, les déplacements suivant l'axe

longitudinal des tubes, sont bloqués sur les deux sections extrêmes. Les déplacements tangentiel et radial sont bloqués sur la surface extérieure du tube extérieur.

Deux demi-tubes sont modélisés. Deux maillages sont utilisés, ils sont constitués d'hexaèdres à 8 nœuds. Les deux maillages sont découpés en trois éléments sur l'épaisseur. Le tube intérieur est découpé en 9 éléments dans le sens de la profondeur alors que le tube extérieur est divisé en 4 éléments. Le maillage 1 est constitué de 58 éléments sur la demi-circonférence du tube intérieur et de 39 sur celle du tube extérieur (voir figure 4.28(a)). Le maillage 2 comporte 40 éléments sur la demi-circonférence du tube intérieur et du tube extérieur (voir figure 4.28(b)). Un déplacement de 0,1 mm est appliqué sur la surface intérieure du demi-tube intérieur suivant la direction  $U$  (voir figure 4.27). Le schéma d'intégration utilisé sur les frontières de contact est un schéma de Newton-Cotes à 9 points par ligne.

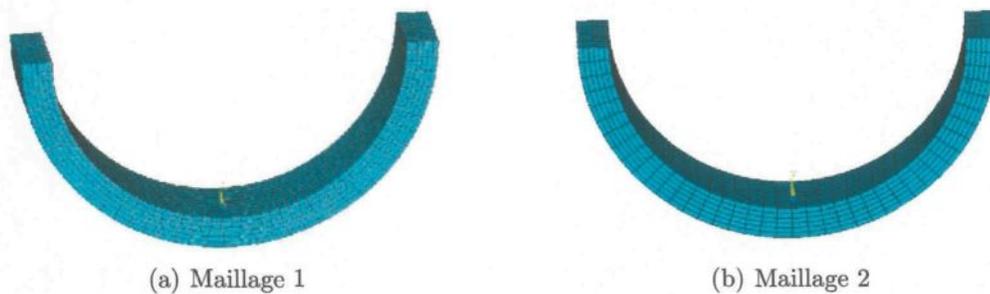


Figure 4.28 – Maillage des deux demi-tubes en trois dimensions.

La résolution de ce problème est effectuée avec la méthode de pénalisation et celle du lagrangien augmenté. Pour la méthode du lagrangien augmenté, la valeur de l'interpénétration maximale est de  $10^{-3}$  mm. Le calcul est effectué en un seul pas de temps. Le tableau 4.14 reprend le nombre d'itérations pour chacun des cas de figure.

Le tableau (4.14), montre que pour ce problème, la concordance du maillage ne diminue pas le nombre d'itérations, mais au contraire l'augmente. De plus, le nombre important d'itérations nécessaires pour la résolution du problème avec la méthode du

lagrangien augmenté s'explique par les valeurs très élevées des contraintes normales de contact et donc du grand nombre de cycles d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange indispensable pour respecter les valeurs maximales de l'interpénétration et du glissement réversible.

Tableau 4.14 – Nombre d'itérations en fonction du type de modélisation (écrasement de deux tubes concentriques)

	$\varepsilon_n$	$\varepsilon_t$	maillage	
			1	2
pénalisation	$10^4$	$10^3$	8	8
	$10^5$	$10^4$	10	14
lagrangien augmenté	$10^5$	$10^4$	40	82

Les figures 4.29 à 4.32 montrent que quelle que soit la méthode utilisée, la solution obtenue avec le maillage 1 présente de très fortes irrégularités qui n'ont aucun sens physique. En outre, même avec un maillage concordant (maillage 2), la solution est régulière et symétrique uniquement avec la méthode de pénalisation et les coefficients de pénalisation les plus faibles ( $\varepsilon_n = 10^4$  et  $\varepsilon_t = 10^3$  voir figure 4.30).

Les solutions obtenues avec la méthode de pénalisation sont plus régulières et plus symétrique qu'avec la méthode du lagrangien augmenté car l'interpénétration est plus importante. Ainsi, plus l'interpénétration maximale diminue, plus l'irrégularité de la solution augmente car la valeur de la distance entre les frontières est faussée par la discrétisation spatiale. Cet exemple prouve qu'avec la méthode point-surface, le contrôle de l'interpénétration ne rime pas forcément avec une solution de qualité. La valeur de l'interpénétration doit être considérée en fonction de la taille des éléments des frontières de contact.

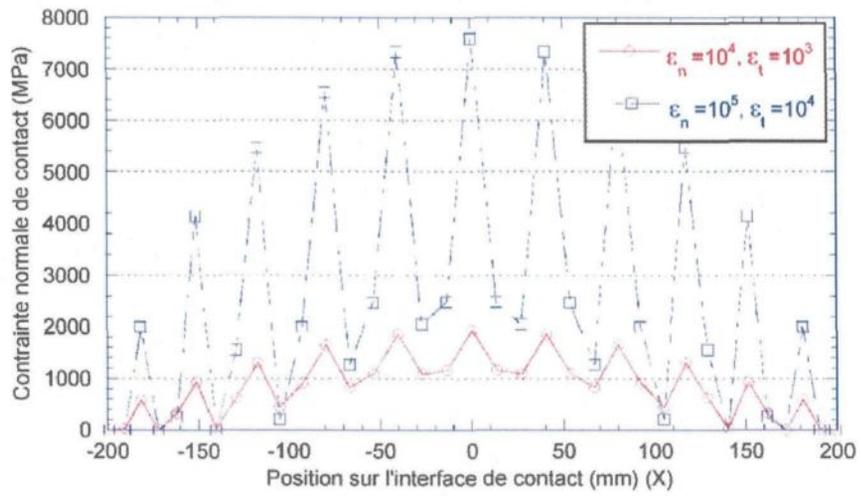


Figure 4.29 – Contrainte normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 1)

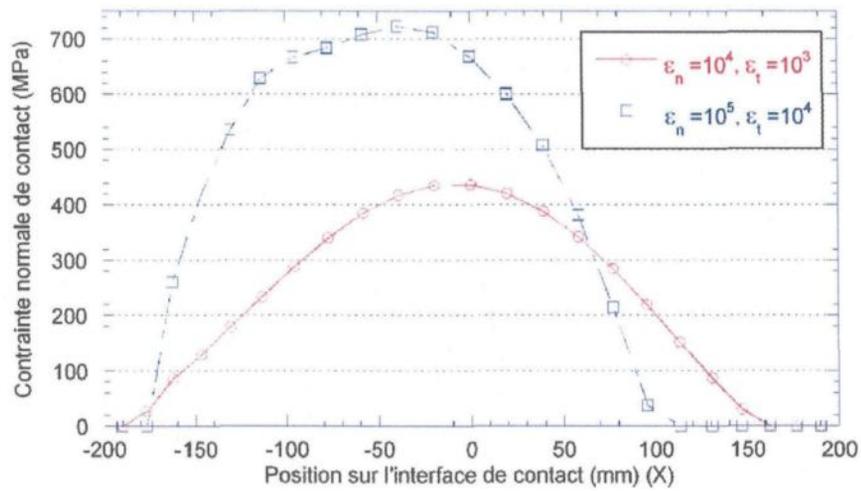


Figure 4.30 – Contrainte normale de contact avec la méthode de pénalisation (maillage 2)

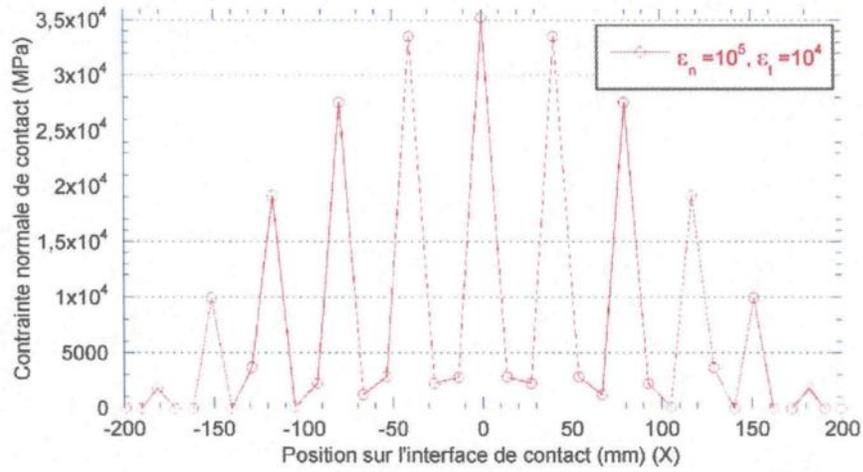


Figure 4.31 – Contrainte normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 1)

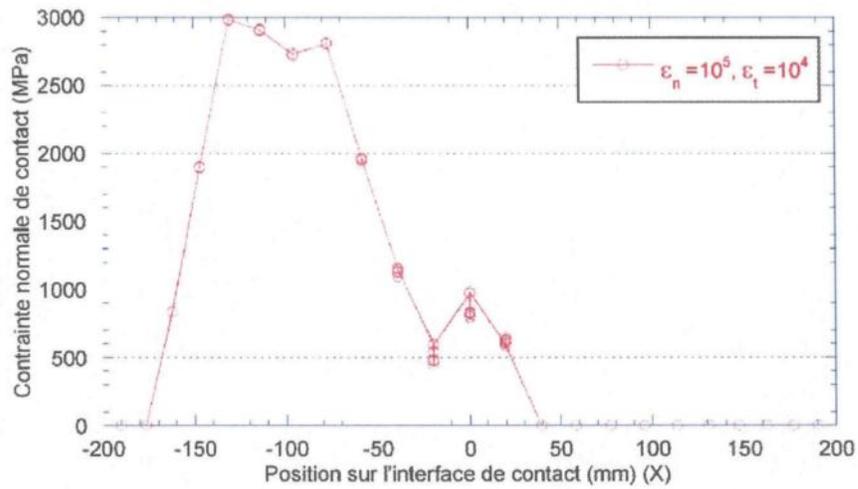


Figure 4.32 – Contrainte normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté (maillage 2)

### 4.3 Conclusion

Ces exemples montrent les limites des méthodes les plus répandues, celle de pénalisation, d'adaptation de la pénalité et du lagrangien augmenté. Ces exemples démontrent aussi l'importance de contrôler l'interpénétration, du glissement réversible et des coefficients de pénalisation. Ainsi, lorsque l'interpénétration et le glissement réversible sont contrôlés, toutes les méthodes donnent des résultats quasiment identiques (lorsque l'algorithme de résolution converge). Mais, les valeurs maximales de l'interpénétration et du glissement réversible dépendent de la méthode de régularisation utilisée et des coefficients de pénalisation.

Les méthodes les plus répandues sont handicapées par le fait que l'utilisateur doit choisir adéquatement les valeurs de paramètres (coefficient de pénalisation, interpénétration maximale, minimale et/ou glissement réversible maximal), pour la bonne résolution du problème. Or, les valeurs optimales de ces paramètres varient en fonction du problème étudié. De plus, aucune des méthodes utilisées ne permet de résoudre tous les problèmes étudiés sans que l'utilisateur change les valeurs de certains de ses coefficients.

Pour la méthode de pénalisation, l'interpénétration et le glissement réversible sont des fonctions des coefficients de pénalisation. Ces derniers sont donc les seuls à être contrôlés par l'utilisateur. Ainsi, cette méthode est relativement rapide et simple, mais cela rend le choix des coefficients de pénalisation crucial. De plus, la plage de variation des coefficients de pénalisation est très restreinte. Celle-ci varie d'un problème à l'autre.

La méthode de pénalisation adaptative n'apporte pas vraiment d'amélioration par rapport à la méthode de pénalisation. Le choix du coefficient de pénalisation normale est plus large. Mais l'utilisateur doit également fournir les valeurs de l'interpénétration maximale et minimale. L'ajout de ces variables complique la résolution du problème. Si les valeurs de l'interpénétration minimale et maximale sont trop proches, alors le temps de calcul peut devenir très important. De plus, si l'interpénétration maximale est trop faible, l'augmentation du coefficient de pénalisation normale risque d'être trop brutale.

Ce dernier peut devenir trop grand et des oscillations du statut de contact (contact / non contact) peuvent diminuer la robustesse de la méthode ou empêcher la convergence de l'algorithme.

La méthode du lagrangien augmenté est la plus fiable car la qualité de la solution peut être rapportée au nombre d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange. Mais le temps de calcul peut devenir important si la valeur des coefficients de pénalisation est trop faible.

En outre, lorsque la géométrie des frontières de contact est complexe aucune de ces méthodes ne permet la bonne résolution du problème. En effet, les erreurs dues à la discrétisation spatiale des frontières de contact engendrent une solution ne correspondant pas à la physique du problème. Cela prouve que la méthode point-surface ne permet pas d'atténuer les erreurs induites par la discrétisation spatiale mais les amplifie. Ainsi de fortes concentrations de contraintes peuvent apparaître puisque le calcul du contact est localisé sur des point et non pas sur un élément.

Ainsi, le chapitre suivant expose une méthode qui présente à la fois la fiabilité de celle du lagrangien augmenté, la rapidité de celle de pénalisation et en même temps sa robustesse. Une méthode surface-surface basée sur les éléments joints est également présentée pour les problèmes en trois dimensions.

# Chapitre 5

## Méthodes de résolution proposées

Les nouvelles méthodes qui sont présentées dans ce chapitre sont basées sur celles présentées dans le chapitre 3. Tout d'abord, une première méthode, fondée sur une adaptation de la pénalisation est expliquée. Par la suite, celle-ci est reprise et est couplée à la méthode du lagrangien augmenté. Enfin, les exemples traités au chapitre 4 sont utilisés pour valider ces méthodes.

### 5.1 Méthode de pénalisation adaptative modifiée

Cette nouvelle méthode de pénalisation adaptative est inspirée de la méthode de pénalisation adaptative présentée dans la partie 3.4.1. Elle permet de réduire au minimum les oscillations du statut de contact engendré par une augmentation trop importante du coefficient de pénalisation normale (contact / non contact). Elle autorise aussi le contrôle de l'interpénétration résiduelle. Ainsi, les bornes de variation de l'interpénétration admissible ( $g_{min}$  et  $g_{max}$ ) peuvent être choisies de façon plus libre.

L'algorithme utilisé pour la résolution d'un problème de contact mécanique avec cette nouvelle méthode de pénalisation adaptative est le même que celui présenté pour la méthode de pénalisation (voir l'algorithme 3.1 page 48). Elle peut donc aisément être implémentée dans un code comprenant la méthode de pénalisation adaptative. Pour chaque itération et chaque point, la valeur des contraintes de contact doit être

calculée. Or, la composante normale dépend du coefficient de pénalisation normale. La valeur de ce coefficient est adaptée à partir de l'algorithme 5.1.

---

**Algorithme 5.1** Adaptation du coefficient de pénalisation normale
 

---

**ENTRÉES:**  $\varepsilon_n$ ,  $g_i$  et  $g_{i-1}$ .

```

si  $g_i > g_{max}$  alors
  si  $|g_i - g_{i-1}| > \max(g_i/10; g_{i-1}/10; 5g_{max})$  alors
     $\varepsilon_n = 2\varepsilon_n$ 
  sinon si  $|0.99g_{i-1}| < |g_i| < |1.01g_{i-1}| < 10g_{max}$  alors
     $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\sqrt{(g_i/g_{max} - 1) + 1})^2$ 
  sinon si  $|g_i| > |1.01g_{i-1}|$  alors
     $\varepsilon_n = 2\varepsilon_n(g_{i-1}/g_i)$ 
  sinon
     $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\sqrt{(g_i/g_{max} - 1) + 1})$ 
  fin (si)
sinon si  $g_i < g_{min}$  alors
   $\varepsilon_n = \varepsilon_n g_i / g_{min}$ 
sinon
   $\varepsilon_n = \varepsilon_n$ 
fin (si)

```

---

Cette technique d'adaptation de la pénalisation permet de rendre la méthode plus stable et plus rapide. En effet, l'adaptation de la valeur du coefficient de pénalisation normale est calculée en fonction de l'évolution des variables. Trois cas de figures sont envisageables, soit la valeur de l'interpénétration est inférieure à la limite minimale, soit elle est comprise entre la limite minimale et la maximale, soit elle est supérieure à la limite maximale.

Dans les deux premiers cas, l'adaptation de la valeur du coefficient de pénalisation normale est identique à celle de la pénalisation adaptative (chapitre 3, partie 3.4.1). Si  $g_i$  est inférieur à  $g_{min}$  alors la condition de contact est considérée parfaitement respectée et pour réduire les risques d'oscillations numériques la valeur de  $\varepsilon_n$  est diminuée. Si  $g_i$  est compris entre  $g_{min}$  et  $g_{max}$  alors l'évaluation des conditions de contact est considérée convenable, ainsi la valeur de  $\varepsilon_n$  n'est pas modifiée.

Dans le cas où  $g_i$  est supérieur à  $g_{max}$ , l'adaptation de  $\varepsilon_n$  doit permettre d'augmenter

la valeur de la contrainte normale de contact sans provoquer d'oscillations numérique. Afin d'optimiser le temps de calcul plusieurs sous-cas sont envisagés. Si la valeur de l'interpénétration varie trop (supérieur au  $\max(g_i/10; g_{i-1}/10; 5g_{max})$ ), alors afin d'éviter les oscillations numériques, le coefficient de pénalisation normale est multiplié par deux. Si la valeur de l'interpénétration est quasiment constante ( $g_i$  est égale à  $g_{i-1}$  avec une tolérance d'un pourcent), alors afin de réduire le temps de calcul, le coefficient de pénalisation normale est adapté deux fois (le coefficient multiplicatif est élevé au carré) dans la limite où cette augmentation n'est pas trop importante (le coefficient multiplicatif doit être inférieur à seize). Si la valeur de l'interpénétration augmente, alors afin de la ramener le plus rapidement possible sous la limite sans engendrer d'oscillations numériques, l'adaptation de  $\varepsilon_n$  permet de doubler la valeur de la contrainte normale de contact. Si non, la fonction par laquelle le coefficient de pénalisation normale est multiplié varie en fonction de la racine carrée du rapport entre l'interpénétration et la valeur maximale autorisée. Lorsque  $g_i$  est supérieur à deux fois  $g_{max}$ , la croissance de cette fonction est plus lente que celle utilisée avec la méthode d'adaptation de la pénalité (linéaire [34]), ce qui réduit les risques d'oscillations numériques. De plus, lorsque  $g_i$  est inférieur à deux fois  $g_{max}$ , la croissance de cette fonction est plus rapide que celle de la fonction linéaire, ce qui rend le calcul plus rapide.

Cette adaptation permet de réduire les risques d'augmentation trop brutale de la valeur du coefficient de pénalisation normale. Néanmoins, comme pour la méthode de pénalité adaptative, il reste difficile de choisir la valeur majorant l'interpénétration admissible aussi faible que souhaitée. Un choix d'une valeur trop faible peut engendrer des oscillations de la distance entre les frontières autour de zéro et donc des oscillations du statut de contact, et ainsi ralentir voir empêcher la convergence. De plus, le choix de la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle n'est pas réglé. Pour pallier aux limites de cette méthode, celle du lagrangien augmenté adapté est proposée.

## 5.2 Méthode du lagrangien augmenté adapté

La méthode du lagrangien augmenté adapté est basée à la fois sur celle du lagrangien augmenté (voir partie 3.4.2) et sur celle de la nouvelle pénalisation adaptative (voir partie 5.1). Elle a pour but de cumuler la fiabilité de la méthode du lagrangien augmenté et la rapidité de celle de la pénalisation. L'algorithme utilisé pour la résolution d'un problème de contact avec la méthode du lagrangien augmenté adapté est le même que celui présenté pour la méthode du lagrangien augmenté (voir l'algorithme 3.2 page 51), cette méthode peut donc facilement être utilisée dans un code de calcul l'utilisant. Par contre, les conditions de contact sont calculées différemment. Lors de chaque itération, la valeur des coefficients de pénalisation et des contraintes de contact doit être recalculée.

---

### Algorithme 5.2 Calcul de la valeur de la contrainte normale de contact

---

**ENTRÉES:**  $\varepsilon_n$ ,  $g_i$  et  $g_{i-1}$ .

```

si  $g_i \times g_{i-1} < 0$  alors
  si deuxième changement consécutif alors
     $Evalt_n = 0$ 
  sinon
     $Evalt_n = \varepsilon_n g_{i-1}$ 
  fin (si)
fin (si)
si  $g_i < 0$  ou  $t_n(i-1) > 0$  alors
   $\varepsilon_n =$  adaptation de  $\varepsilon_n$ 
sinon
   $\varepsilon_n =$  valeur initiale de  $\varepsilon_n$ 
fin (si)
 $t_n = \langle Evalt_n + \varepsilon_n g_i + \lambda_n \rangle$ 

```

---

La contrainte normale de contact est calculée de la même manière qu'avec la méthode du lagrangien augmenté. Mais un terme est ajouté afin de mieux l'évaluer lorsque la valeur de l'interpénétration change de signe (voir l'algorithme 5.2). Cette procédure de calcul est basée sur le principe suivant : si la valeur de l'interpénétration change de signe ( $g_i \times g_{i-1} < 0$ ), cela signifie que la correction apportée est trop importante. Cette

dernière ( $g_{i-1}\varepsilon_n$ ) est ajoutée à la composante normale du multiplicateur de Lagrange afin de réduire les oscillations numériques. Par contre, lorsque ce phénomène se répète plusieurs fois consécutives, aucun historique des corrections apportées par la pénalisation n'est conservé car la valeur trop importante du coefficient de pénalisation normale provoque ces instabilités (voir l'algorithme 5.2).

Lors de l'entrée en contact, une valeur initiale du coefficient de pénalisation normale est imposée. Cette valeur peut être choisie en fonction des caractéristique des matériaux. Par la suite, cette valeur est ajustée en fonction de l'historique des conditions de contact (voir l'algorithme 5.3). Ainsi, la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale n'a que très peu d'importance sur le temps de calcul et quasiment aucune sur la valeur de la solution.

---

**Algorithme 5.3** Adaptation du coefficient de pénalisation normale
 

---

**ENTRÉES:**  $\varepsilon_n$ ,  $g_i$  et  $g_{i-1}$ .

**si**  $g_i \times g_{i-1} < 0$  **alors**

**si**  $g_{i-1} > g_{max}$  **alors**

$$\varepsilon_n = |(\varepsilon_n g_{i-1}) / g_i \times (|g_i| + g_{max}) / (g_i - g_{i-1})|$$

**sinon**

$$\varepsilon_n = |\varepsilon_n g_{i-1} / (10g_i)|$$

**fin (si)**

**sinon si**  $g_i > g_{max}$  **alors**

**si**  $|g_i - g_{i-1}| > \max(g_i/10; g_{i-1}/10; 5g_{max})$  **alors**

$$\varepsilon_n = 2\varepsilon_n$$

**sinon si**  $|0.99g_{i-1}| < |g_i| < |1.01g_{i-1}| < 10g_{max}$  **alors**

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n (\sqrt{(|g_i|/g_{max} - 1) + 1})^2$$

**sinon si**  $|g_i| > |1.01g_{i-1}|$  **alors**

$$\varepsilon_n = 2\varepsilon_n (g_{i-1}/g_i)$$

**sinon**

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n ((\sqrt{(|g_i|/g_{max} - 1) + 1}))$$

**fin (si)**

**sinon**

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n$$

**fin (si)**

---

Trois cas de figures sont distingués pour l'adaptation du coefficient de pénalisation

normale, soit la valeur de l'interpénétration change de signe ( $g_i \times g_{i-1} < 0$ ), soit la valeur absolue de l'interpénétration est supérieure à la limite maximale ( $|g_i| > g_{max}$ ), soit elle est inférieure à la limite maximale ( $|g_i| < g_{max}$ ) (voir l'algorithme 5.3). Dans le dernier cas, la valeur du coefficient de pénalisation normale est identique à celui de l'itération précédente.

Dans le cas où  $g_i \times g_{i-1}$  est négatif, la valeur de  $\varepsilon_n$  est ajustée afin de rendre la valeur de l'interpénétration la plus petite possible en valeur absolue sans qu'elle change à nouveau de signe. Le déplacement normale maximale que peut ajouter la pénalisation doit être inférieur à  $|g_i| + g_{max}$  afin que la valeur absolue de l'interpénétration soit majorée par  $g_{max}$ . La valeur du déplacement normal entre les deux itérations est égale à  $|g_i - g_{i-1}|$ . Si  $g_{i-1}$  est supérieure à  $g_{max}$ , alors l'adaptation de  $\varepsilon_n$  permet d'apporter une correction à la contrainte normale par pénalisation égale en valeur absolue à celle de l'itération précédente multipliée par le rapport entre  $|g_i| + g_{max}$  et  $|g_i - g_{i-1}|$ . Sinon, la valeur absolue de la correction apportée à la contrainte normale de contact par pénalisation est dix fois inférieure à celle de l'itération précédente.

Dans le cas où la valeur absolue de l'interpénétration est supérieure à  $g_{max}$ , alors le coefficient de pénalisation normale est adapté de la même manière qu'avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (voir partie précédente). L'adaptation de  $\varepsilon_n$  doit permettre d'augmenter la contribution de la pénalisation dans la valeur de la contrainte normale sans que l'interpénétration change de signe (voir l'algorithme 5.3).

La condition de convergence entre deux augmentations des multiplicateurs de Lagrange est enrichie, de sorte qu'à convergence la valeur maximale de l'interpénétration soit inférieur à la valeur maximale considérée dans l'algorithme d'adaptation de la pénalité. Lors de l'augmentation des multiplicateurs de Lagrange, la valeur maximale de l'interpénétration pour l'adaptation de la pénalité est remplacée par la valeur de l'interpénétration maximale divisée par dix. Ainsi, l'utilisateur peut imposer une interpénétration maximale aussi petite qu'il le désire. Pour cela, il doit soit choisir deux de

ces trois valeurs :

- un nombre de cycle d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange,
- la valeur maximale de l'interpénétration pour la solution ou
- la valeur maximale de l'interpénétration lors de la première augmentation des multiplicateurs de Lagrange.

Le calcul des contraintes tangentielles est effectué de la même manière qu'avec la méthode du lagrangien augmenté. Mais, l'utilisateur ne doit pas choisir la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle. Cette dernière est basée sur une étude empirique qui montre qu'une surévaluation de la contrainte tangentielle perturbe la résolution. Lors de l'entrée en contact, la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle permet d'obtenir une contrainte tangentielle égale à dix pour cent de celle de glissement. La valeur du coefficient de pénalisation tangentielle est ajustée pendant l'augmentation des multiplicateurs de Lagrange (voir l'algorithme 5.4). De plus, la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle est divisée par deux si un retournement du sens de glissement se produit entre deux itérations.

---

**Algorithme 5.4** Calcul de la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle

---

**ENTRÉES:**  $\varepsilon_t$ , GlRe = Valeur absolue du glissement réversible.

**si** (pas de contact à l'itération  $i - 1$ ) ou (Première itération après l'augmentation des multiplicateurs de Lagrange et  $\text{GlRe} < \text{Tol}$ ) **alors**

$$\varepsilon_t = \mu t_n / (10 \text{ GlRe})$$

**sinon si** retournement du sens de glissement **alors**

$$\varepsilon_t = \varepsilon_t / 2$$

**fin (si)**

---

Cette méthode de calcul des conditions de contact permet d'optimiser le temps de calcul sans demander à l'utilisateur de déterminer les valeurs des coefficients de pénalisation. La qualité de la solution d'un problème de contact mécanique est aussi liée à la méthode de prise en compte du contact sur l'interface discrétisée spatialement. Une méthode surface-surface est donc présentée.

### 5.3 Méthode surface-surface

La méthode surface-surface proposée est basée sur les éléments joints. Une version pour les problèmes en deux dimensions est déjà présentée dans le chapitre 3 (partie 3.3.2, page 43). Cette version est adaptée à la résolution de problèmes en trois dimensions. La redéfinition des valeurs nodales de la distance entre les surfaces et du glissement tangentiel est identique à celle présentée dans la partie 3.3.2. Mais, dans ces expressions, le vecteur normal et les vecteurs définissant le plan tangentiel au nœud A sont ceux du point le plus proche sur l'autre frontière de contact. Il n'est donc pas nécessaire de calculer de manière compliquée la valeur de ces vecteurs à partir de ceux des éléments voisins. Cette manière de calculer la distance et la vitesse tangentielle aux nœuds d'une des surfaces permet l'utilisation de cette méthode pour des problèmes en trois dimensions.

Le processus de validation de ces méthodes est fait à partir des exemples utilisés pour exposer les limites des méthodes les plus connues (voir chapitre 4).

### 5.4 Validation des méthodes

Des problèmes de contact avec et sans frottement sont abordés respectivement à travers le problème de Hertz et l'écrasement de structures minces (présentés au chapitre 4). Ils mettent en lumière les améliorations apportées par ces méthodes.

#### 5.4.1 Problèmes de Hertz

Les problèmes de Hertz résolus sont ceux de la partie 4.1 à la page 58. Les caractéristiques mécaniques et les maillages sont exposés dans la section citée précédemment. Dans la méthode de pénalité adaptative modifiée, la valeur minimale et la valeur maximale de l'interpénétration considérées dans la loi d'adaptation de la pénalité sont respectivement de  $10^{-5}$ mm et  $10^{-3}$ mm. Avec la méthode du lagrangien augmenté adapté, la

valeur de l'interpénétration maximale autorisée et celle de l'interpénétration maximale permettant l'ajustement de la pénalité normale sont égales, cette valeur est de  $10^{-3}$  mm. Ainsi, la résolution de ce problème ne nécessite pas plusieurs cycles d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange.

### Deux cylindres identiques

Le problème de contact entre deux cylindres identiques est exposé de deux manières différentes :

- un quart de cylindre rentrant en contact avec un plan indéformable,
- deux quarts de cylindre identiques entrant en contact entre eux.

Les caractéristiques physiques et mécaniques de ces problèmes sont définies à la page 63 (partie 4.1.3).

#### - Cas du quart de cylindre et du plan

Comme pour la méthode de la pénalisation adaptative, la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale doit être fournie par l'utilisateur.

#### - Méthode de pénalisation adaptative modifiée

Afin de déterminer l'influence de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale sur la qualité de la solution et la vitesse de convergence, les valeurs initiales suivantes sont choisies : 2,  $2 \times 10^2$  et  $2 \times 10^4$ . Le tableau 5.1 présente le nombre d'itérations pour les deux pas de temps.

D'après le tableau 5.1, la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale n'a pas beaucoup d'influence sur la convergence du problème. Cette méthode permet de résoudre ce problème quel que soit le maillage et le comportement du matériau et pour une valeur initiale du coefficient de pénalisation comprise entre 2 et  $2 \times 10^4$ . De plus, le nombre d'itérations ne varie pas beaucoup, il passe d'une quinzaine ( $\varepsilon_n = 2$ ) à moins

d'une dizaine ( $\varepsilon_n = 2 \times 10^4$ ). En général, il est quasiment identique à celui obtenu avec la méthode de pénalisation adaptative (voir tableau 4.2). Dans le meilleur des cas ( $\varepsilon_n = 2 \times 10^4$ ), le nombre d'itérations est quasiment égal au plus petit nombre obtenu avec la méthode du lagrangien augmenté (voir tableau 4.4). Cette méthode devient vite plus rapide lorsque la valeur du coefficient de pénalisation normale diminue.

Tableau 5.1 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative modifiée (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	13	13	13	13	13	15
	16	18	20	17	18	16
$2 \times 10^2$	11	11	11	11	11	11
	13	14	15	14	14	13
$2 \times 10^4$	8	8	8	7	8	7
	7	8	9	11	11	9

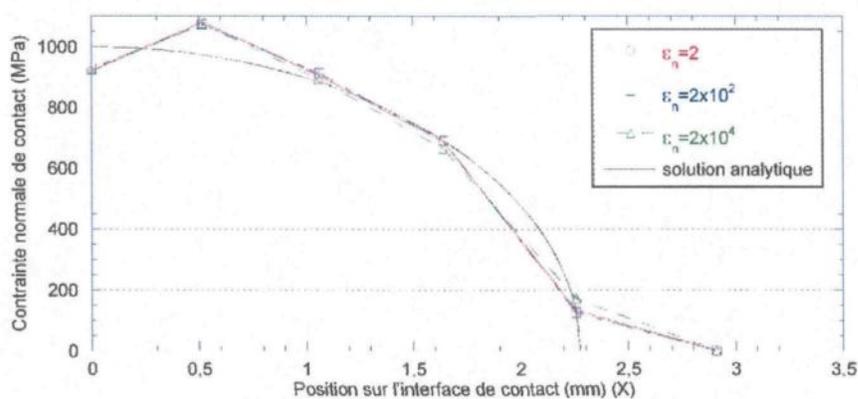


Figure 5.1 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élastique)

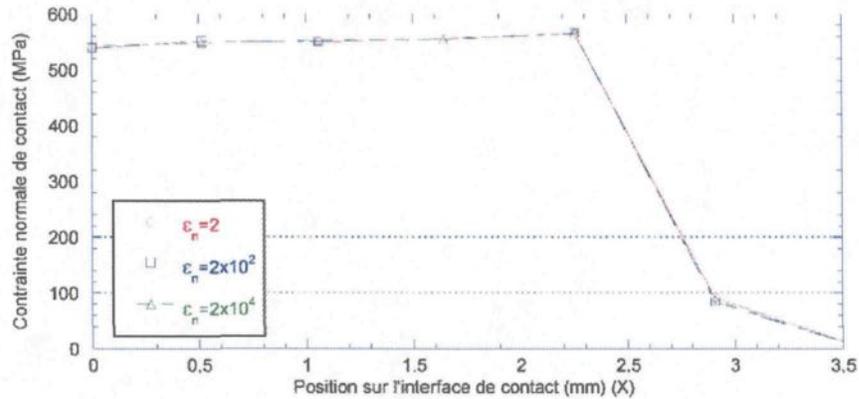


Figure 5.2 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

En outre, la solution est d'une très bonne qualité (voir figures 5.1 et 5.2 pour le maillage 4). Les contraintes normales de contact sont quasiment identiques à celles obtenues avec la méthode de pénalisation adaptative (voir figures 4.7 et 4.8 pour le maillage 4).

– Méthode du lagrangien augmenté adapté

De même, pour cette méthode, les valeurs initiales 2, 20,  $2 \times 10^2$ ,  $2 \times 10^3$  et  $2 \times 10^4$  sont prises pour le coefficient de pénalisation normale. Le tableau 5.2 présente le nombre d'itérations pour chacun des deux pas de temps.

Le tableau 5.2 permet de constater que la valeur du coefficient de pénalisation normale a moins d'influence sur le temps de calcul que sur celui obtenu par la méthode de pénalisation adaptative modifiée. De plus, le nombre d'itérations est légèrement inférieur et il y a une meilleure répartition des itérations entre les deux pas de temps. Les figures 5.3 et 5.4 exposent les valeurs des contraintes normales de contact sur la frontière de contact pour le maillage 4. Elles permettent de constater que la solution de la méthode du lagrangien augmenté adapté est plus proche de la solution analytique

que celle produite par les méthodes d'adaptation de la pénalité. Cette constatation est aussi valable pour les autres maillages.

Tableau 5.2 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (quart de cylindre en acier et plan indéformable, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	16	13	15	15	13	16
	13	13	15	16	15	13
$2 \times 10^1$	12	14	12	15	14	12
	12	14	14	14	14	16
$2 \times 10^2$	13	11	13	13	11	13
	11	11	11	12	12	12
$2 \times 10^3$	13	12	12	13	12	12
	11	9	9	13	11	10
$2 \times 10^4$	8	10	8	11	9	11
	8	10	8	10	9	10

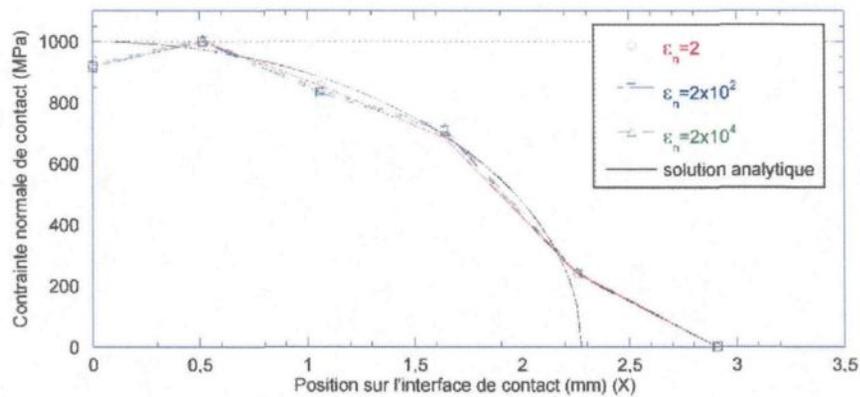


Figure 5.3 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élastique)

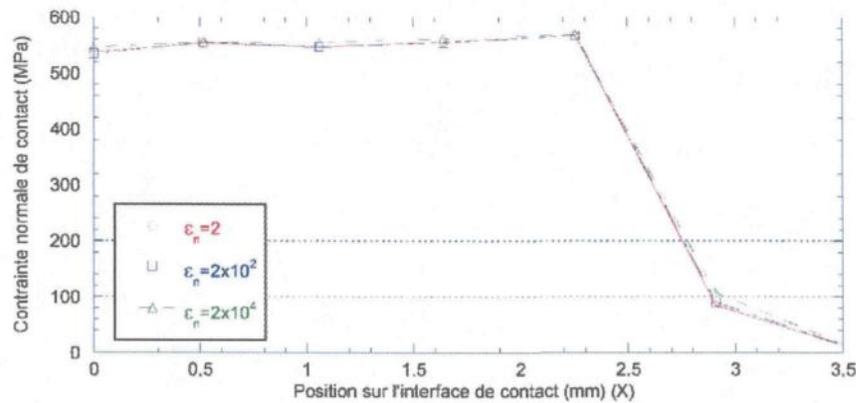


Figure 5.4 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

Par conséquence, la méthode du lagrangien augmenté adapté est la plus fiable des méthodes présentées. Elle semble être un bon compromis entre rapidité et fiabilité, sans que l'utilisateur détermine minutieusement le coefficient de pénalisation normale. En effet, cet exemple prouve que le nombre d'itérations nécessaires avec cette méthode n'est que très faiblement corrélé à la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale. Il peut être constaté que les solutions varient légèrement en fonction de la valeur du coefficient de pénalisation normal initiale. Cette dépendance est annulée si l'interpénétration maximale est diminuée du facteur dix par un autre cycle d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange. Durant ce nouveau cycle, il n'est pas nécessaire de recalculer la matrice tangente, ce qui réduit fortement le temps de calcul.

#### – Cas des deux quarts de cylindre

Cette configuration vise à tester le comportement des méthodes proposée lorsque les deux corps en contact sont déformables.

#### – Méthode de pénalisation adaptative modifiée

Le nombre d'itérations en fonction de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale apparaît dans le tableau 5.3.

Tableau 5.3 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative modifiée (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	22	25	28	25	25	osc
	15	16	14	19	16	cnt
$2 \times 10^2$	20	22	25	23	22	osc
	11	10	11	14	13	cnt
$2 \times 10^4$	15	19	21	18	17	osc
	7	8	7	10	9	cnt

Cet exemple met en lumière une des limites de la méthode de pénalisation adaptative modifiée. Le problème élasto-plastique ne peut pas être résolu avec le maillage 6 quelle que soit la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale (voir tableau 5.3). Comme la méthode de pénalisation adaptative et celle de la pénalisation, le problème élasto-plastique ne peut pas être résolu en deux pas de temps lorsque les deux frontières sont déformables. En outre, lorsque l'algorithme converge, les solutions sont quasiment identiques à celle du problème sous la configuration plan-cylindre.

#### – Méthode du lagrangien augmenté adapté

Le tableau 5.4 expose le nombre d'itérations pour chacun des deux pas de temps, en fonction du coefficient de pénalisation normale initial. Il montre qu'avec cette méthode, la résolution du problème cylindre-cylindre est faite avec un nombre d'itérations quasiment égal à celui du problème plan-cylindre. De plus, la valeur des contraintes normales de contact est pratiquement identique à celle trouvée dans la configuration plan-cylindre.

Tableau 5.4 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (deux quarts de cylindre en acier, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	14	15	15	15	15	15
	14	15	15	14	15	17
$2 \times 10^1$	13	14	14	14	14	13
	13	14	17	15	14	13
$2 \times 10^2$	14	12	14	14	12	13
	12	12	15	15	13	12
$2 \times 10^3$	13	11	13	12	10	11
	11	11	14	16	12	13
$2 \times 10^4$	7	8	9	8	7	9
	7	8	8	9	9	7

La configuration cylindre-cylindre met en évidence un des avantages de la méthode du lagrangien augmenté adapté. Cette méthode permet de résoudre un problème de contact de deux corps dont les lois de comportements sont élasto-plastique en moins de pas de temps que les autres méthodes présentées. De plus, cette méthode est plus rapide que la méthode du lagrangien augmenté grâce à l'adaptation de la pénalité.

### Deux cylindres de matériaux différents

Comme dans la section 4.1.4, le problème de contact entre un cylindre en aluminium et un autre en acier, est exposé aussi bien avec un comportement élastique qu'élasto-plastique. Les caractéristiques physiques et mécaniques de ces problèmes sont les mêmes que celles définies dans le chapitre 4 (pages 63 et 76).

– Méthode de pénalisation adaptative modifiée

Le tableau 5.5 montre que pour que tous les cas de figures soient résolus il faut

restreindre la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale. Ainsi, le nombre d'itérations s'en trouve considérablement augmenté (plus d'une vingtaine par pas de temps). En ce qui concerne la qualité de la solution, les figures 5.5 et 5.6 révèlent que la valeur des contraintes normales de contact est mieux évaluée avec cette méthode qu'avec les méthodes habituellement utilisées (voire figure 4.11 à 4.16).

Tableau 5.5 – Nombre d'itérations pour la méthode de pénalisation adaptative modifiée (deux quarts de cylindre, l'un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	22	24	27	22	24	27
	15	17	15	15	16	15
$2 \times 10^2$	19	21	24	19	22	25
	11	9	11	11	11	12
$2 \times 10^4$	16	17	20	16	19	osc
	5	9	7	6	8	cnt

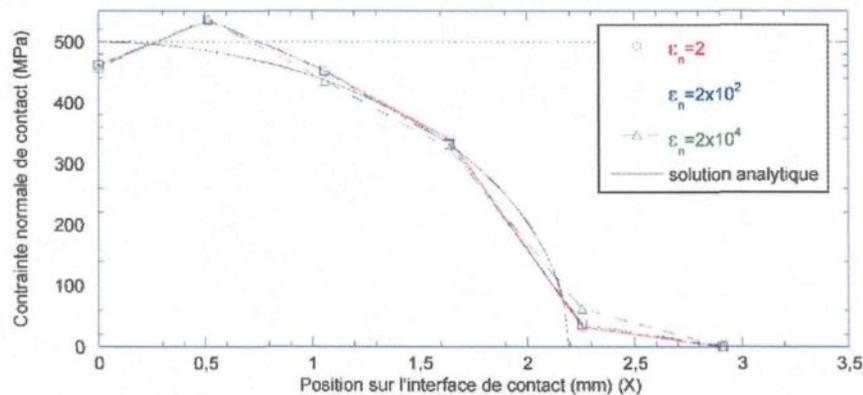


Figure 5.5 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élastique)

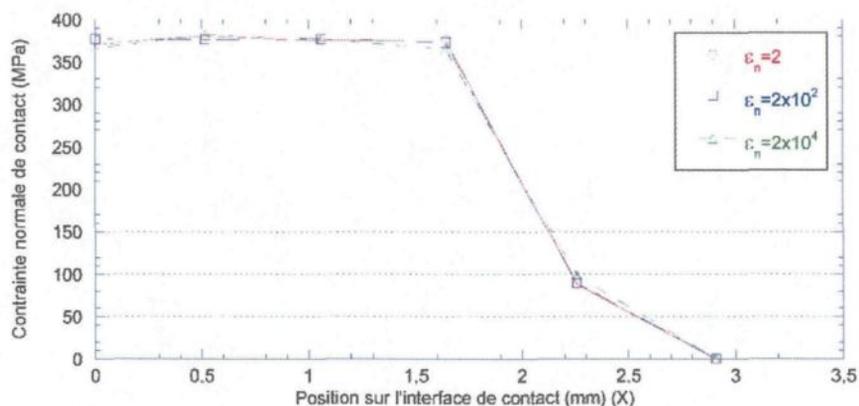


Figure 5.6 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode de pénalisation adaptative modifiée (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

– Méthode du lagrangien augmenté adapté

Tableau 5.6 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (deux quarts de cylindre, l'un en acier et l'autre en aluminium, calcul fait en deux pas de temps)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	2	4	6	2	4	6
2	14	14	14	13	15	14
	14	15	16	13	14	14
$2 \times 10^1$	12	13	13	14	12	14
	12	12	15	12	13	13
$2 \times 10^2$	13	13	13	14	13	13
	11	11	12	12	11	15
$2 \times 10^3$	10	10	10	9	10	10
	10	11	10	9	11	10
$2 \times 10^4$	11	9	8	11	9	8
	7	7	7	7	6	10

Le tableau 5.6 montre que la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale

n'a que très peu d'influence sur le temps de calcul. Quelle que soit cette valeur, le nombre d'itérations est toujours inférieur à celui obtenu avec la méthode du lagrangien augmenté, à celui de l'adaptation de la pénalité ou à celui de la pénalisation adaptative modifiée. Dans le meilleur des cas, le nombre d'itérations est comparable à celui obtenu avec la méthode de pénalisation.

D'après les figures 5.7 et 5.8, la valeur des contraintes normales varie en fonction de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale. Mais dans tous les cas, l'approximation obtenue est plus régulière que celle des autres méthodes. Ces variations deviennent négligeables après un deuxième cycle d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange. De plus, le calcul de la matrice tangente n'est plus nécessaire durant ce deuxième cycle, ce qui rend le temps de calcul de celui-ci négligeable.

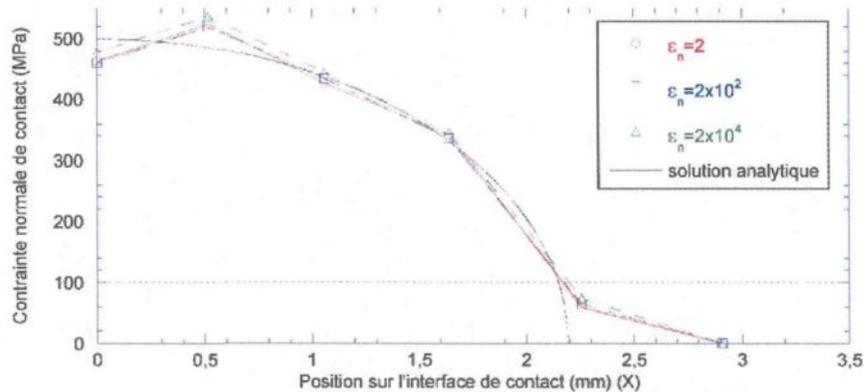


Figure 5.7 – Contrainte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élastique)

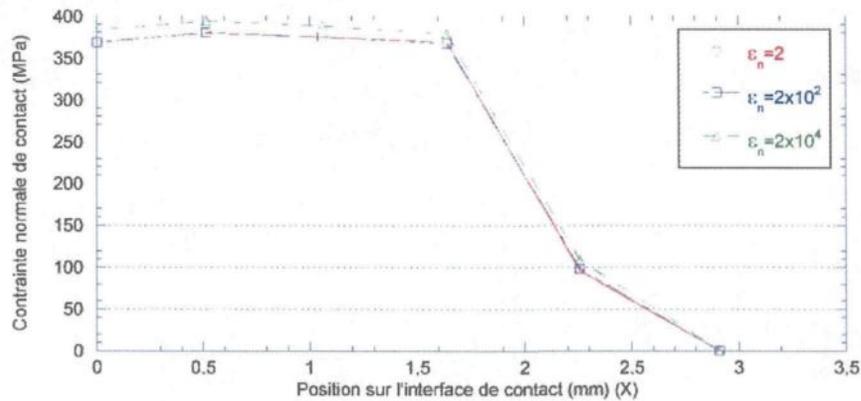


Figure 5.8 – Contraînte normale de contact  $t_n$  avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 4 et comportement élasto-plastique)

Le tableau 5.6 et les figures 5.7 et 5.8 prouvent que la méthode du lagrangien augmenté adapté permet de résoudre correctement ce problème dans tous les cas de figure et quelle que soit la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale.

Ces exemples de problème de Hertz confirment que la méthode du lagrangien augmenté adapté est un bon compromis entre rapidité et fiabilité dans le cas de solides massifs en présence de contact sans frottement. Ces méthodes sont aussi testées pour des problèmes de contact mécanique frottant mettant en jeu des structures minces.

#### 5.4.2 Problèmes de contact frottant

Les problèmes de déformation de structures minces en présence de contact frottant sont ceux exposés dans la partie 4.2 à la page 83.

##### Écrasement d'un tube entre deux plans rigides

Les dimensions du tube et les caractéristiques des maillages utilisés sont présentées dans la partie 4.2.1. Dans cet exemple, les contraintes normales de contact sont très inférieures à celle du problème de Hertz (d'un facteur cent).

La méthode du lagrangien augmenté adapté est utilisée avec les valeurs initiales du coefficient de pénalisation normale suivantes : 20,  $2 \times 10^2$  et  $2 \times 10^3$ . Le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre le problème avec cette méthode, est exposé dans le tableau 5.7. Dans ce tableau, le nombre entre parenthèse correspond à l'ensemble des itérations effectuées après la première augmentation des multiplicateurs de Lagrange. Ce tableau montre que pour cet exemple, la méthode du lagrangien augmenté adapté est assez lente et que l'utilisation d'une technique de factorisation sélective permet dans certain cas, de réduire le temps de calcul par un facteur deux. Si la méthode du lagrangien augmenté adapté est utilisée et si uniquement le premier cycle d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange de chaque pas de temps est considéré, alors il faut entre deux et quatre fois plus d'itérations que pour la méthode de pénalisation.

Tableau 5.7 – Nombre d'itérations pour la méthode du lagrangien augmenté adapté (tube en acier et plan indéformable)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	100	200	400	100	200	400
20	126 (17)	147 (40)	122 (86)	83 (8)	91 (0)	102 (0)
$2 \times 10^2$	70 (6)	84 (17)	122 (15)	52 (15)	97 (0)	62 (83)
$2 \times 10^3$	77 (0)	61 (62)	54 (0)	43 (0)	osc cnt	56 (0)

Les figures 5.9 et 5.10 montrent que cette méthode permet d'obtenir des contraintes de contact évoluant de manière plus régulière dans le temps. De plus, la faible valeur des contraintes normales de contact et la présence du frottement rendent le choix de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale plus difficile. La valeur  $2 \times 10^3$  paraît trop importante car elle engendre des variations importantes de la force normale de contact.

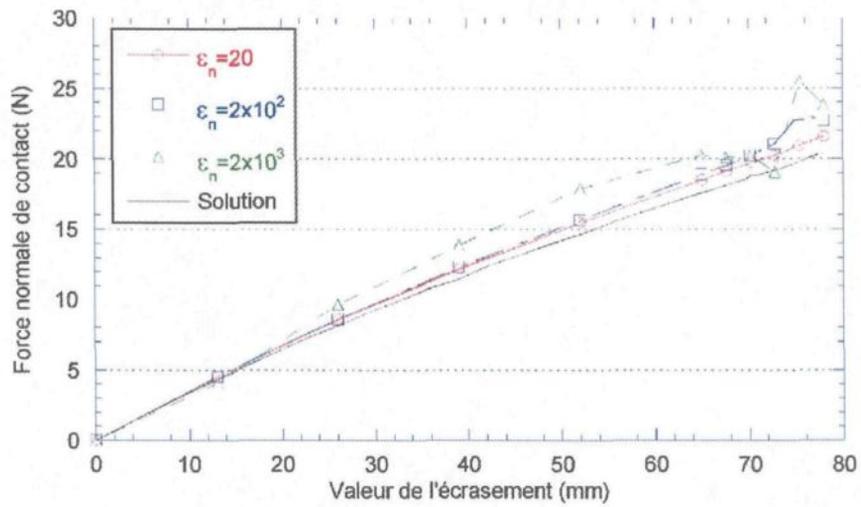


Figure 5.9 – Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 400 et comportement élastique)

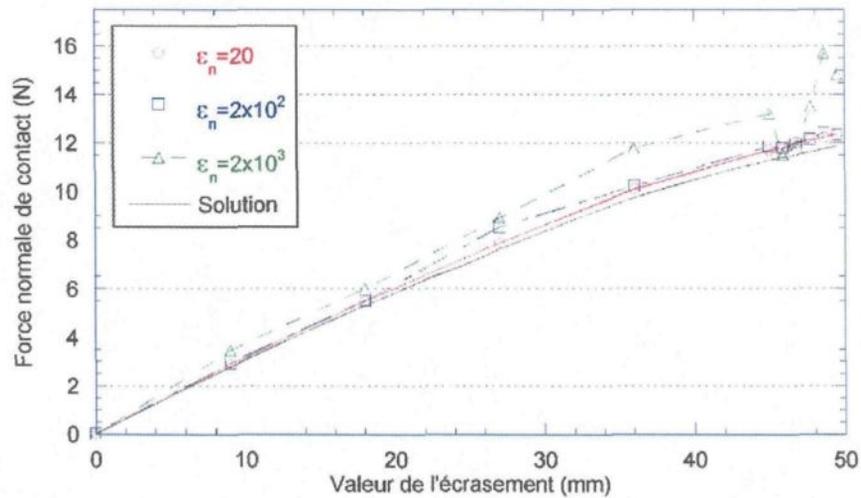


Figure 5.10 – Force normale de contact avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (maillage 400 et comportement élasto-plastique)

Ainsi, la résolution de cet exemple peut être faite avec la méthode du lagrangien augmenté adapté. Cette méthode permet donc de résoudre un problème de contact

frottant sans introduire de coefficient de pénalisation tangentielle. Cependant, la présence de contraintes tangentielles de contact handicape cette méthode, ce qui oblige à restreindre le choix de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale.

### Écrasement de deux tubes concentriques

Les propriétés mécaniques et géométriques de ce problème sont exposées dans la partie 4.2.2 à la page 93. Il est résolu avec la méthode de pénalisation ( $\varepsilon_n = 10^5$  et  $\varepsilon_t = 10^4$ ).

Les figures 5.11 et 5.12 mettent en évidence les différences entre les deux méthodes de prise en compte du contact entre deux solides discrétisés spatialement. La méthode surface-surface est basée sur les éléments joints, elle est présentée dans la partie 5.3.

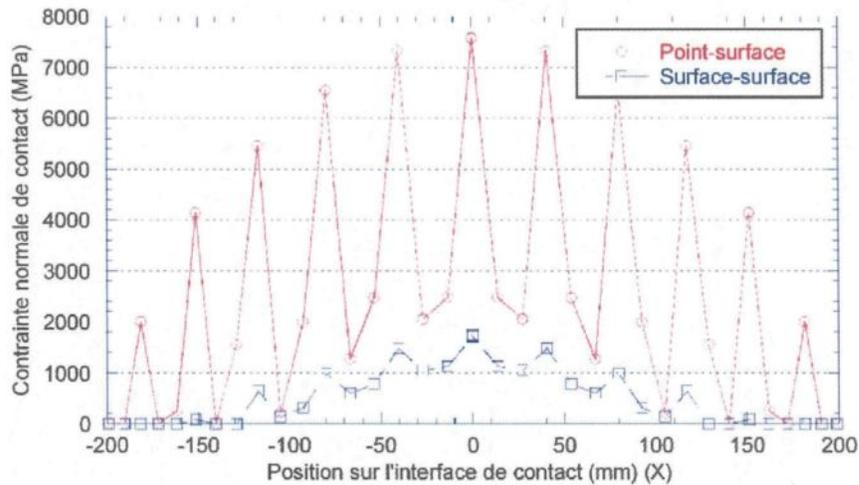


Figure 5.11 – Contrainte normale de contact (maillage 1)

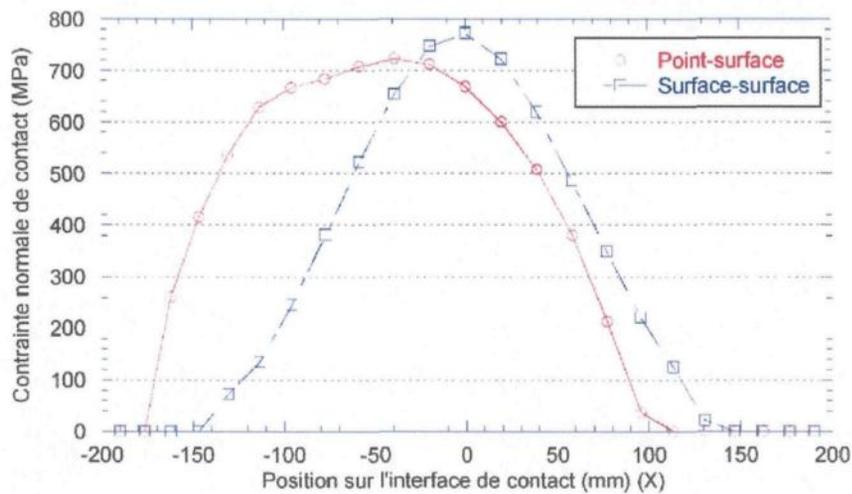


Figure 5.12 – Contrainte normale de contact (maillage 2)

Les solutions obtenues avec la méthode surface-surface sont plus régulières, que le maillage soit concordant ou pas. Dans le cas d'un maillage non concordant, il est important de remarquer que l'interpénétration n'a plus vraiment de signification physique, mais elle doit être considérée comme une erreur de discrétisation. L'interpénétration maximale doit donc être déterminée en fonction de la taille des éléments.

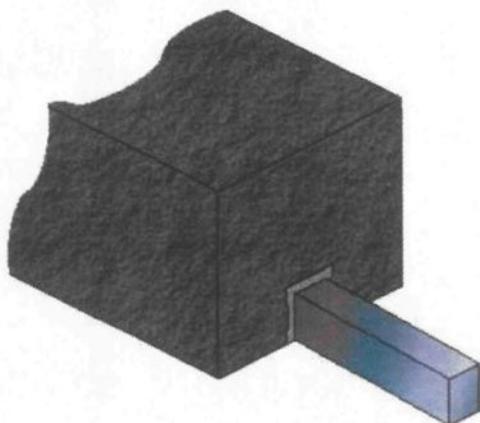
Le dernier exemple étudié est un problème multi-physiques venant de l'industrie de l'aluminium.

### 5.4.3 Préchauffage d'une cuve d'électrolyse

La fabrication de l'aluminium est effectuée dans des cuves d'électrolyse. La réduction de l'oxyde d'aluminium se produit à haute température (environ à 950°C). Afin d'éviter tout endommagement des matériaux par un choc thermique, un préchauffage électrique (par effet Joule) de la cuve d'électrolyse est effectué, avant le versement du bain en fusion.

Ce problème traite du préchauffage électrique des cathodes d'une cuve d'électrolyse.

Ce problème industriel a été traité par P. Goulet ([4]). C'est un problème thermo-électro-mécanique composé de trois parties, la cathode (carbone), la barre collectrice (acier) et le joint entre les deux (fonte). Le bloc cathodique est présenté sur la figure 5.13.



(a) Schéma d'un bloc cathodique



(b) Scellement des barres collectrices

Figure 5.13 – Bloc cathodique [4]

Le comportement mécanique de l'acier et de la fonte est supposé élastique, alors que celui du carbone est thermo-élasto-plastique avec écrouissage et adoucissement. Les caractéristiques thermiques, électriques et mécaniques de ces matériaux sont prises dans [4].

Le préchauffage dure dix-huit heures, pendant les seize premières heures, la température augmente linéairement pour atteindre  $600^{\circ}\text{C}$ . Suite à ceci, le bain en fusion est versé, ce qui accélère le réchauffement jusqu'à environ  $950^{\circ}\text{C}$  (voir figure 5.14). Durant cette période, le bloc cathodique est traversé par un courant électrique. Une densité de courant est imposée au bout de la barre collectrice. Un potentiel électrique nul est appliqué sur la surface supérieure de la cathode. Ceci permet de contrôler l'évolution de la perte de potentiel électrique due aux résistances de contact.

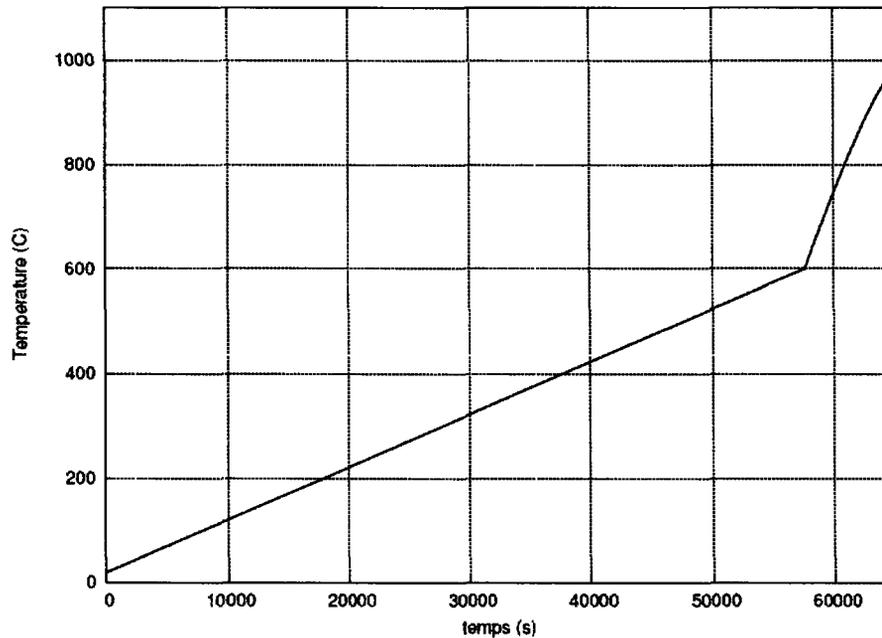
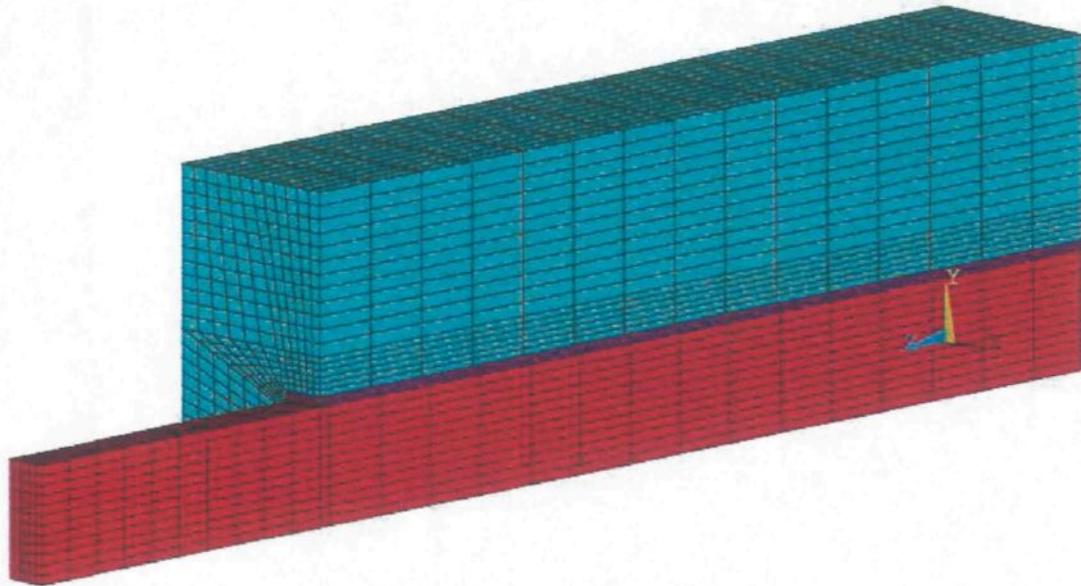
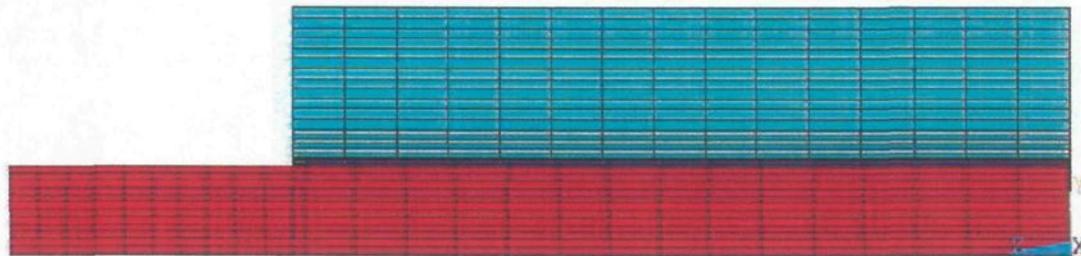


Figure 5.14 – Courbe de montée en température du dessus du bloc cathodique [4]

En raison des conditions de symétrie, le calcul est effectué sur une demi-cathode. Le maillage utilisé pour la résolution de ce problème est repris de la thèse de P. Goulet ([4]), il est présenté dans les figures 5.15. D'autres matériaux (pâte à brasquer, béton, ...) entourent le bloc cathodique mais, l'auteur a décidé de ne pas les modéliser. Il a décidé de représenter l'influence de ces autres matériaux par des interactions de contact et donc par des rigidités équivalentes.



(a) vue isométrique



(b) vue du côté



(c) vue de face

Figure 5.15 – Maillage d'un bloc cathodique [4]

La résolution de ce problème a été faite avec la méthode de pénalisation (dans [4]). Les frontières de contact sont représentées sur la figure 5.16. Les coefficients de pénalisation normale des frontières 1, 2 et 3 sont égaux à  $10^8$  ceux des frontières 4 et 5 à  $10^6$  alors que ceux des frontières 6 et 7 à  $10^{10}$  (voir figure 5.16). Ces coefficients sont déterminés par les propriétés mécaniques des matériaux entourant le bloc cathodique. Ces frontières de contact permettent donc, une première approximation de l'influence de l'environnement. Pour chacune de ces frontières, la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle est égale  $10^6$ .

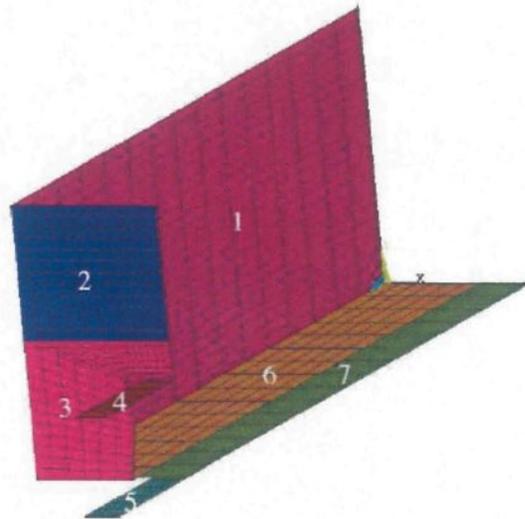


Figure 5.16 – Éléments de recouvrement des frontières de contact mécanique [4]

La frontière de contact entre la fonte et le carbone est une interface thermo-électro-mécanique. Les propriétés thermoélectriques ne sont pas reprises (voir dans [4]), mais les propriétés mécaniques sont les suivantes :

- coefficient de pénalisation normale :  $\varepsilon_n = 10^{10}$ ,
- coefficient de pénalisation tangentielle :  $\varepsilon_t = 10^8$ ,
- coefficient de frottement :  $\mu = 0,08$

Il est très important de bien déterminer les contraintes de contact sur cette interface

car les valeurs de la conductance de contact thermique et de la résistance de contact électrique sont fonction des contraintes de contact. Le calcul est effectué en dix-huit pas de temps d'une heure (voire figure 5.14). La résolution de ce problème est testée avec la méthode du lagrangien augmenté adapté et celle de pénalisation pour la frontière entre le carbone et la fonte. Avec la méthode du lagrangien augmenté adapté, la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale pour l'interface fonte/carbone est de  $10^8$ . Afin de respecter les conditions aux limites du problème, les autres interfaces de contact sont traitées avec la méthode de pénalisation.

La valeur de l'interpénétration maximale pour la solution et pour l'adaptation de la pénalité normale est prise à 0.001 m. La valeur du glissement tangentiel réversible est de 0.002 m.

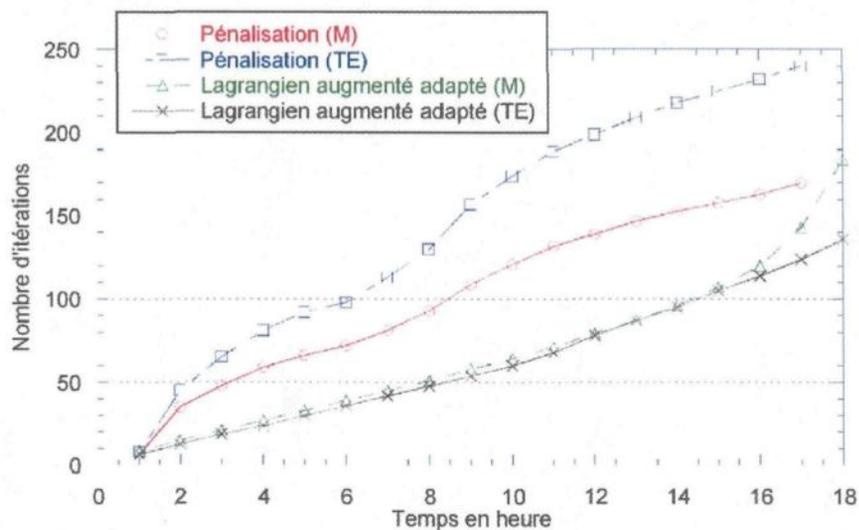


Figure 5.17 – Nombre d'itérations totale en fonction du temps

La figure 5.17 expose le nombre d'itérations relatif au système mécanique (M) et au système thermo-électrique (TE), en fonction du nombre de pas de temps pour les deux méthodes utilisées. Cette figure permet de constater que la méthode du lagrangien augmenté adapté est plus rapide que celle de la pénalisation. La méthode du lagrangien

augmenté adapté permet un gain de performance de l'ordre de cinquante pourcent pour le système mécanique et par répercutions un de l'ordre de soixante pourcent pour le système thermo-électrique.

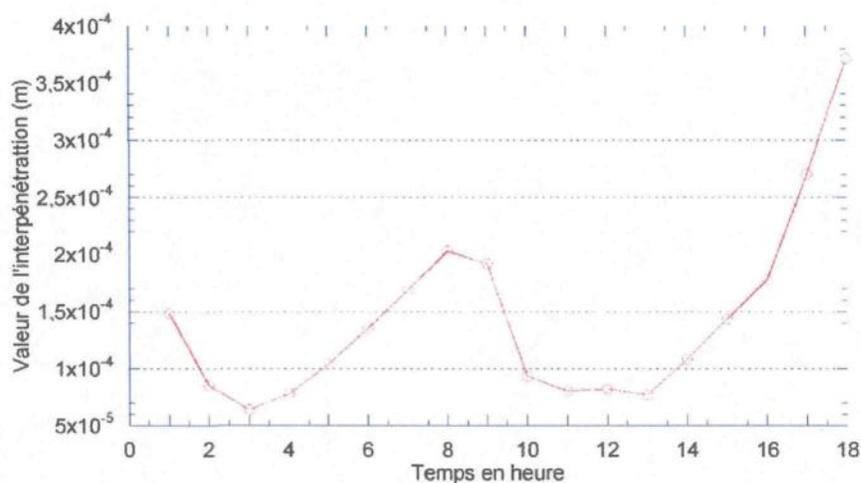


Figure 5.18 – Valeur de l'interpénétration maximale sur l'interface entre la fonte et le carbone en fonction du temps (méthode du lagrangien augmenté adapté)

La figure 5.18 montre qu'avec la méthode du lagrangien augmenté adapté, même si la valeur maximale de l'interpénétration est importante (0.001), la valeur maximale de l'interpénétration sur l'interface de contact thermo-électro-mécanique est faible tout au long du problème (inférieur à  $4 \times 10^{-4}$  m).

Les figures 5.19 à 5.24 montrent la distribution de la première contrainte principale dans la cathode, pour la sixième itération (figure 5.19 et 5.20), la douzième (figure 5.21 et 5.22) et la dernière (figure 5.23 et 5.24). Les figures 5.19 et 5.20 exposent le fait qu'à la sixième heure la méthode du lagrangien augmenté adapté permet d'avoir moins de concentration de contrainte dans le voisinage de l'interface fonte / carbone. Cette constatation est aussi vérifiée pour les autres pas de temps (pour le douzième voir figure 5.21 et 5.22 et pour le dix-huitième voir figure 5.23 et 5.24). Au dix-huitième pas de temps, la solution obtenue avec la méthode de pénalisation ne représente pas l'équilibre

thermo-électro-mécanique puisque la convergence de l'algorithme n'est pas atteinte. La figure 5.23 présente une contrainte en traction supérieure à la limite du matériau (7,35 MPa). Néanmoins, cette fissuration n'est pas réelle puisqu'une adaptation du pas de temps permet une réduction de la concentration des contraintes. Avec la méthode du lagrangien augmenté adapté, la concentration des contraintes est beaucoup moins importante, ce qui permet de ne pas dépasser la limite d'élasticité du matériau (voir figure 5.24).

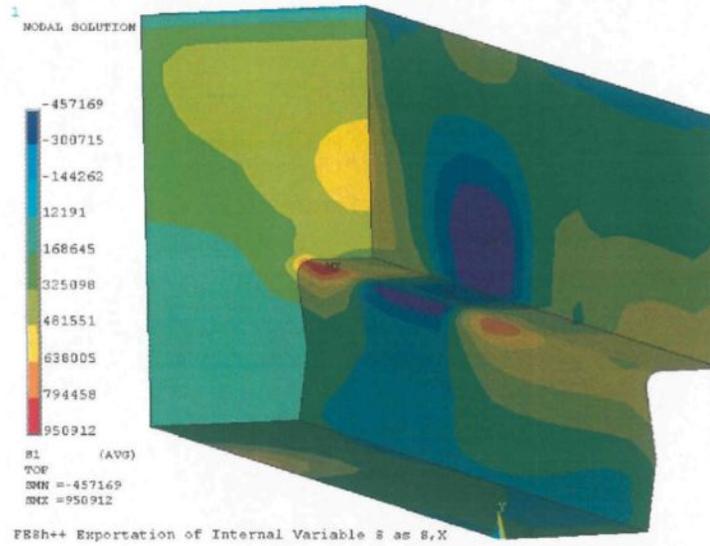


Figure 5.19 – Première contrainte principale dans la cathode  $t = 6$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

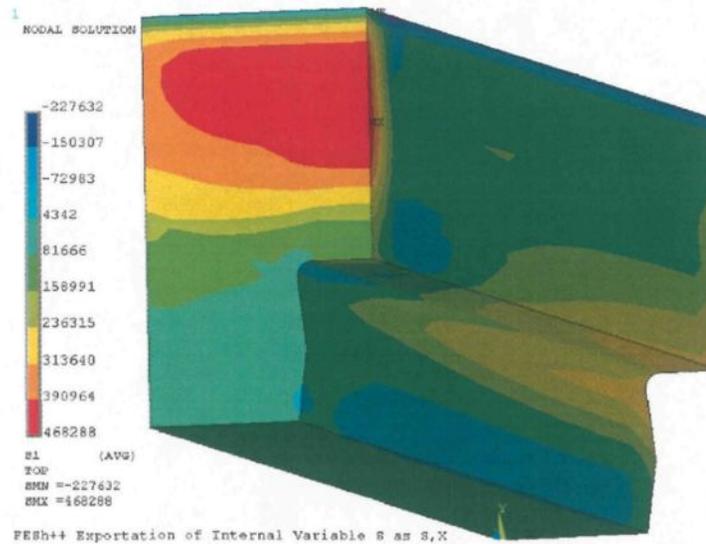


Figure 5.20 – Première contrainte principale dans la cathode  $t = 6$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

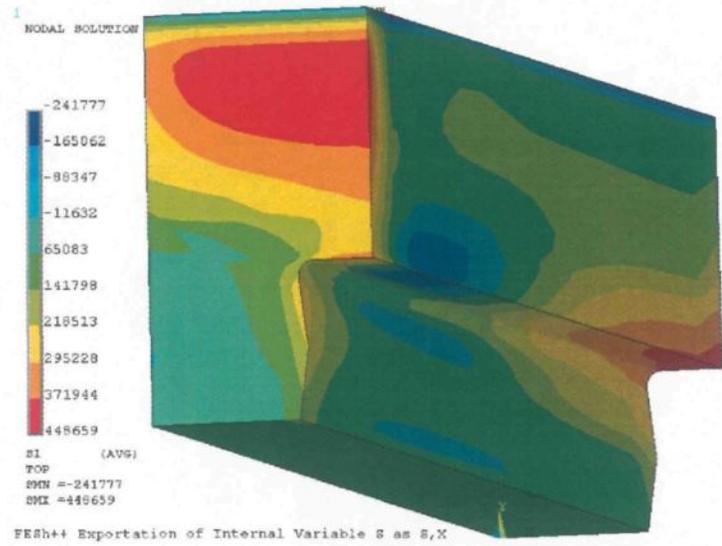


Figure 5.21 – Première contrainte principale dans la cathode  $t = 12$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

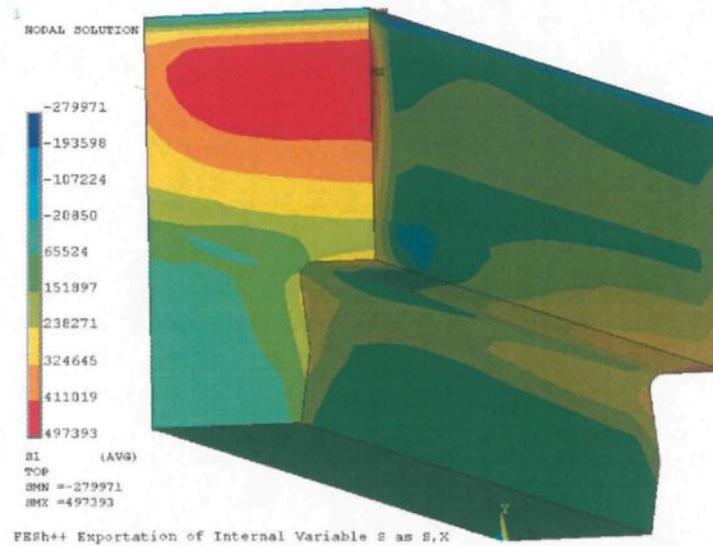


Figure 5.22 – Première contrainte principale dans la cathode  $t = 12$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

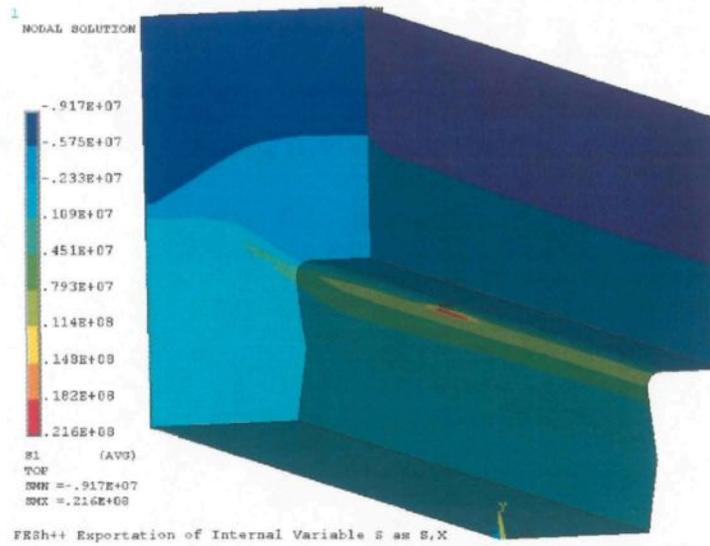


Figure 5.23 – Première contrainte principale dans la cathode  $t = 18$  heures (en Pa, méthode de pénalisation, hors équilibre)

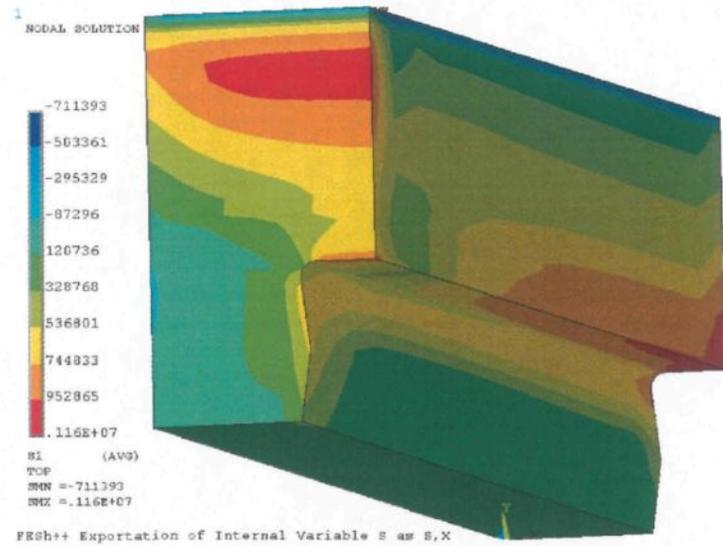


Figure 5.24 – Première contrainte principale dans la cathode  $t = 18$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

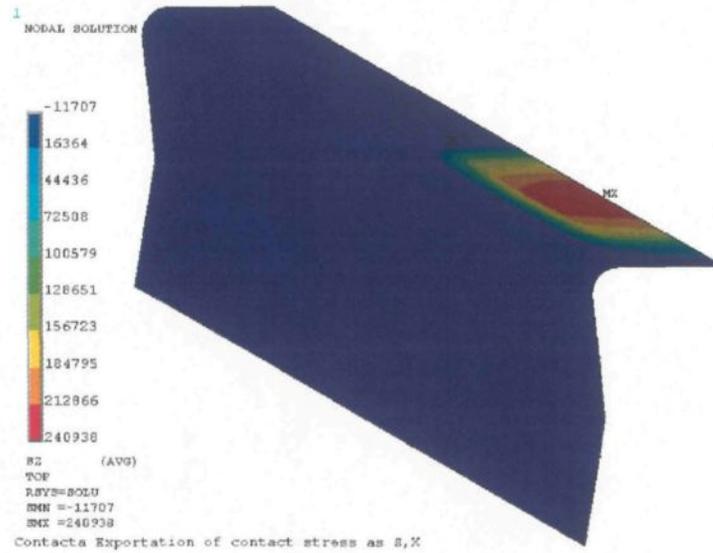


Figure 5.25 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 2$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

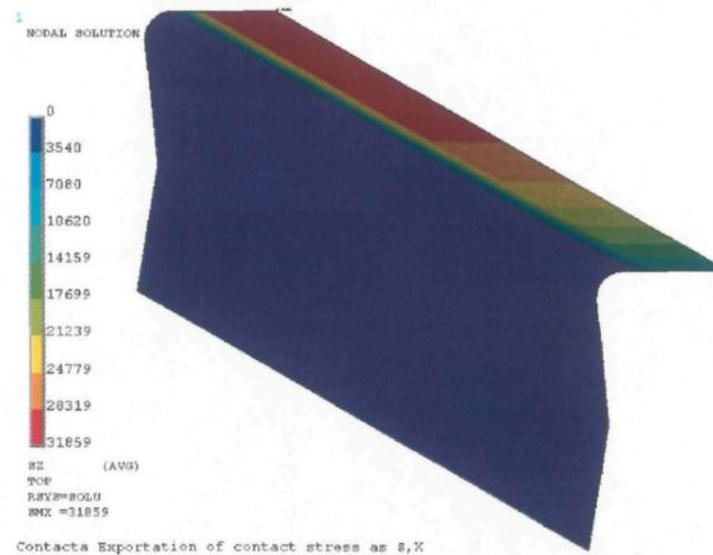


Figure 5.26 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 2$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

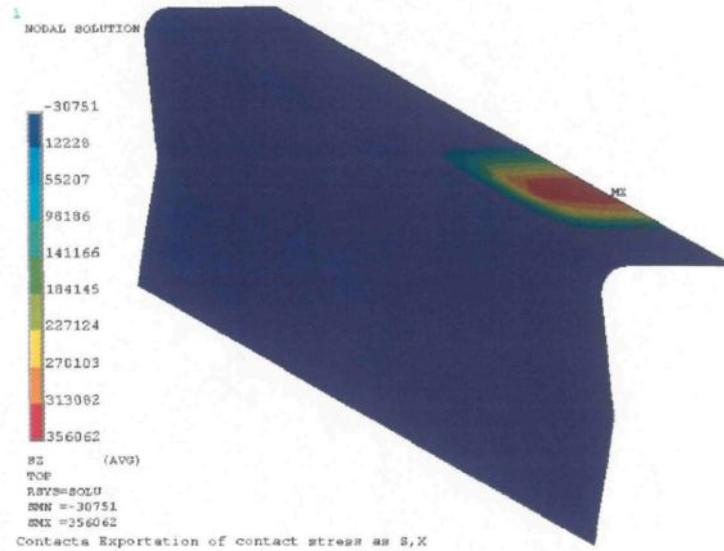


Figure 5.27 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 4$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

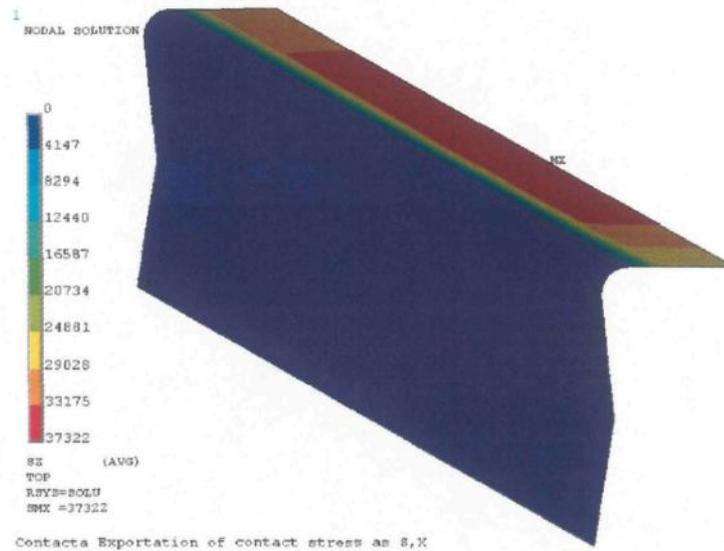


Figure 5.28 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 4$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

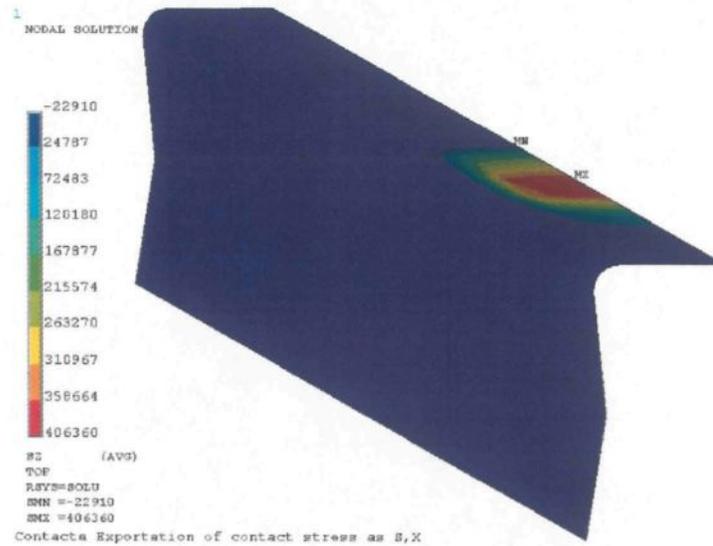


Figure 5.29 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 6 heures (en Pa, méthode de pénalisation)

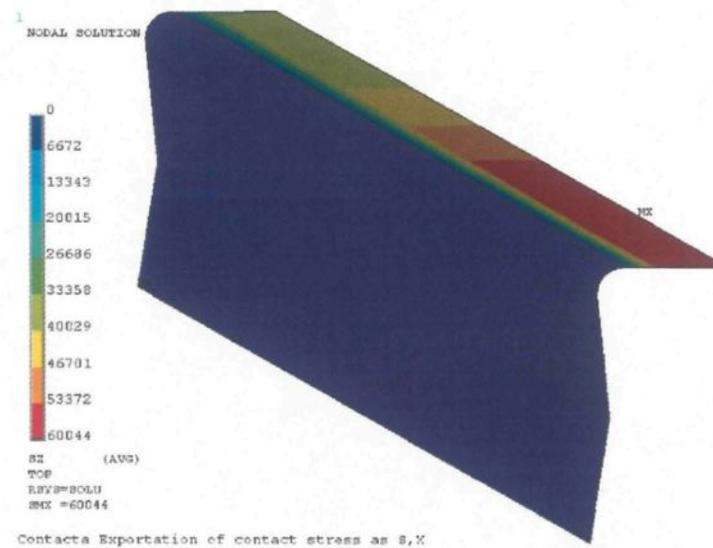


Figure 5.30 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte t = 6 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

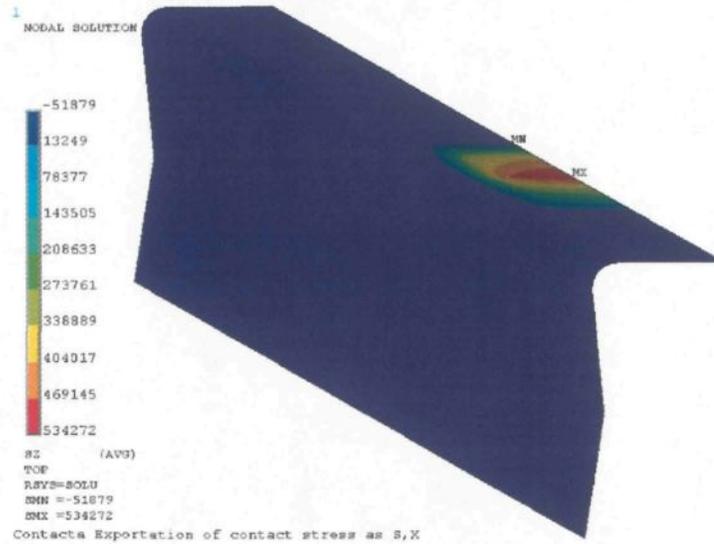


Figure 5.31 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte  $t = 8$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

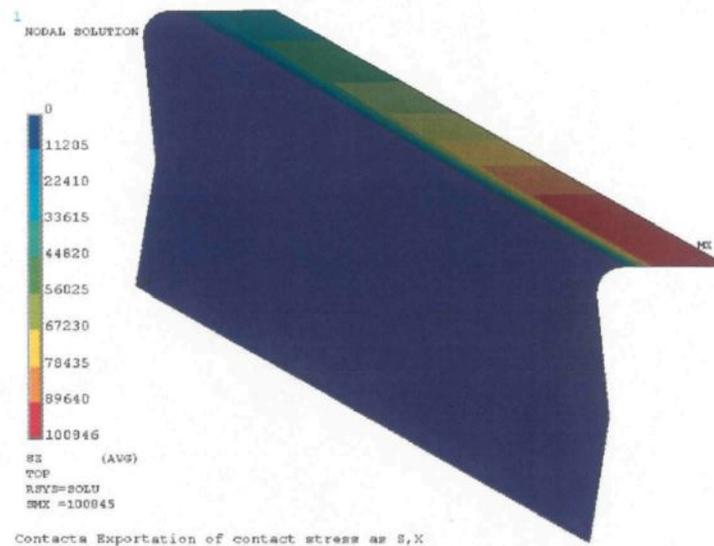


Figure 5.32 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte  $t = 8$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

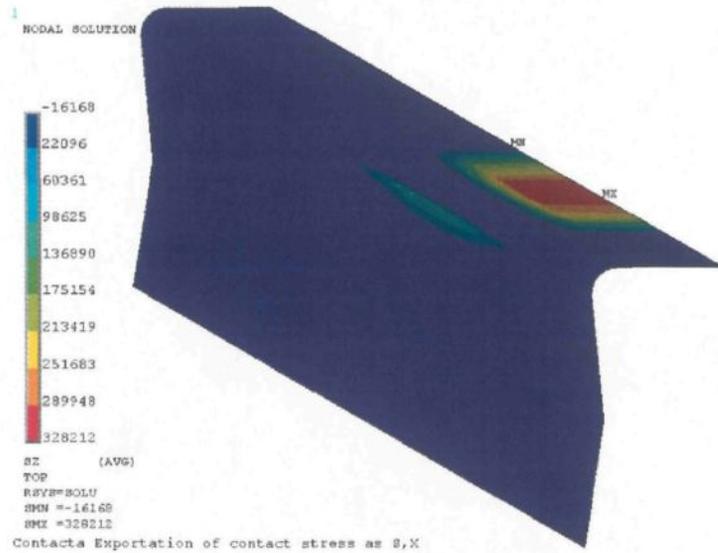


Figure 5.33 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 10$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

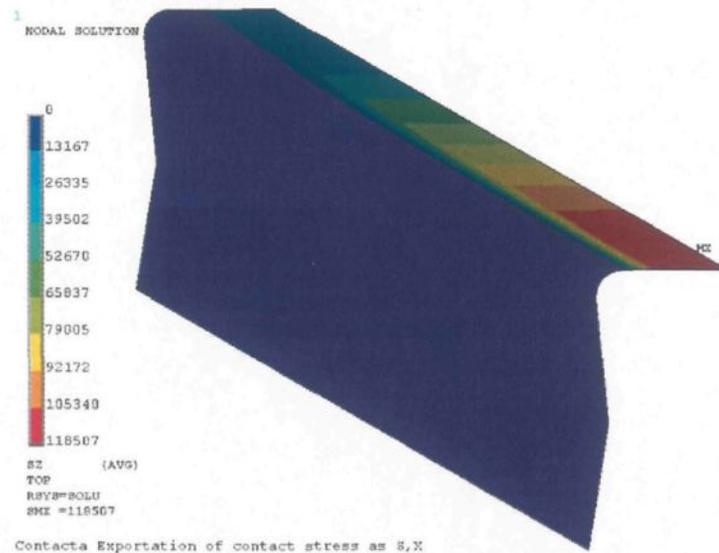


Figure 5.34 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 10$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

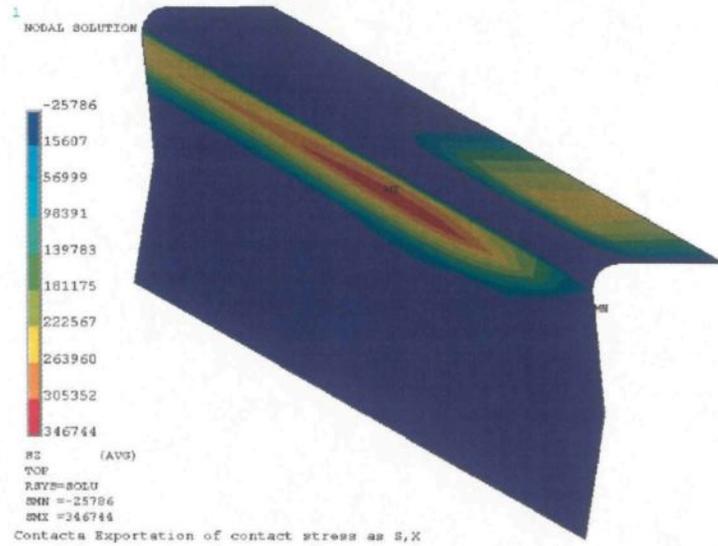


Figure 5.35 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte  $t = 12$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

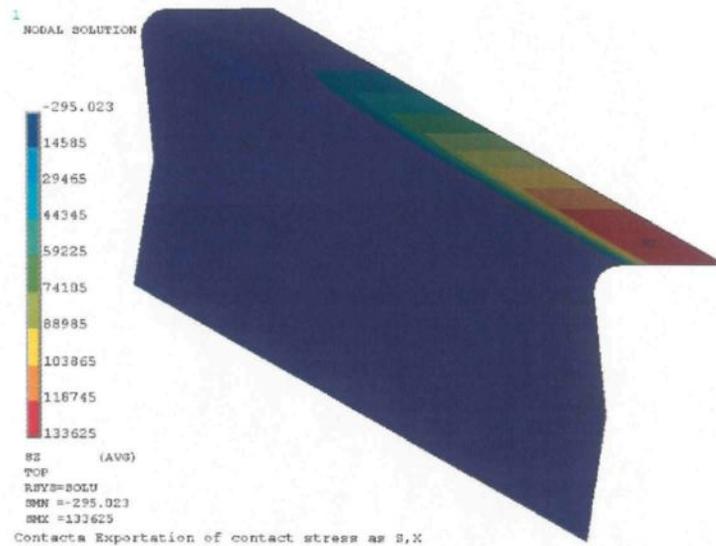


Figure 5.36 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte  $t = 12$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

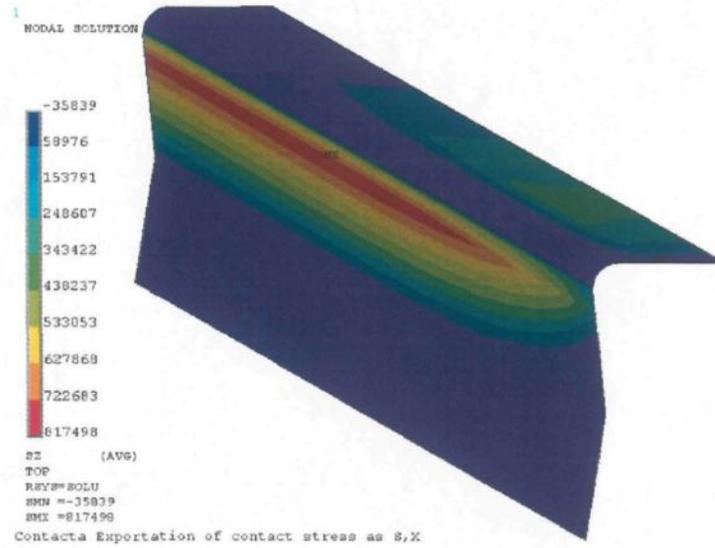


Figure 5.37 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte t = 14 heures (en Pa, méthode de pénalisation)

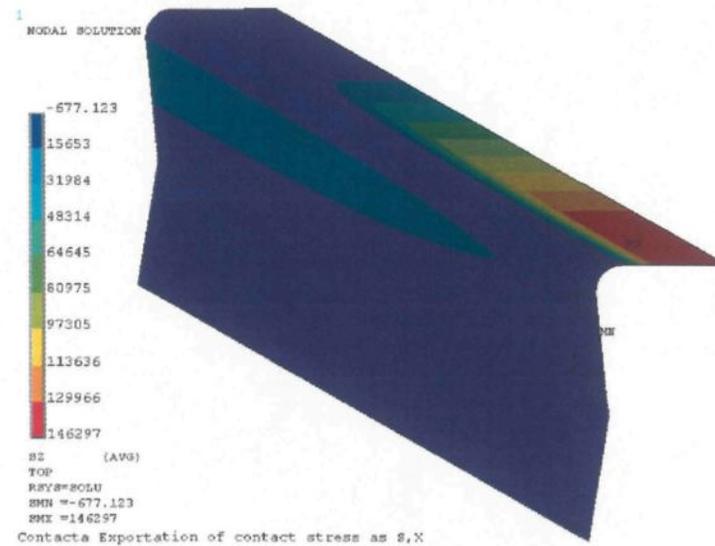


Figure 5.38 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte t = 14 heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

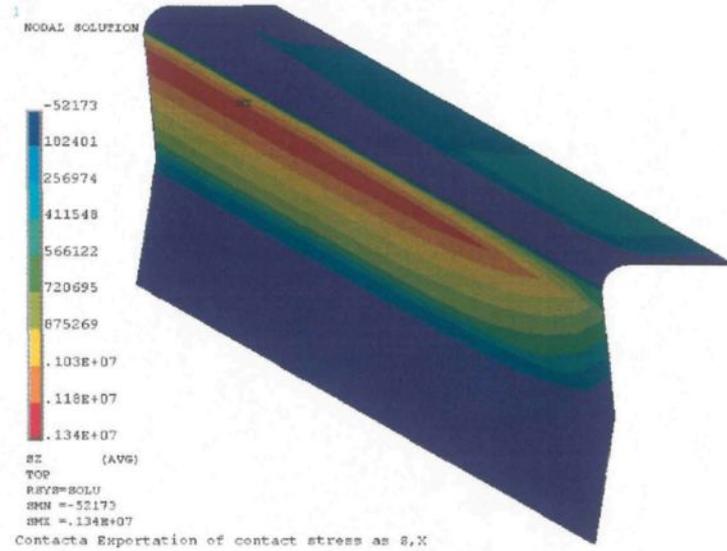


Figure 5.39 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 16$  heures (en Pa, méthode de pénalisation)

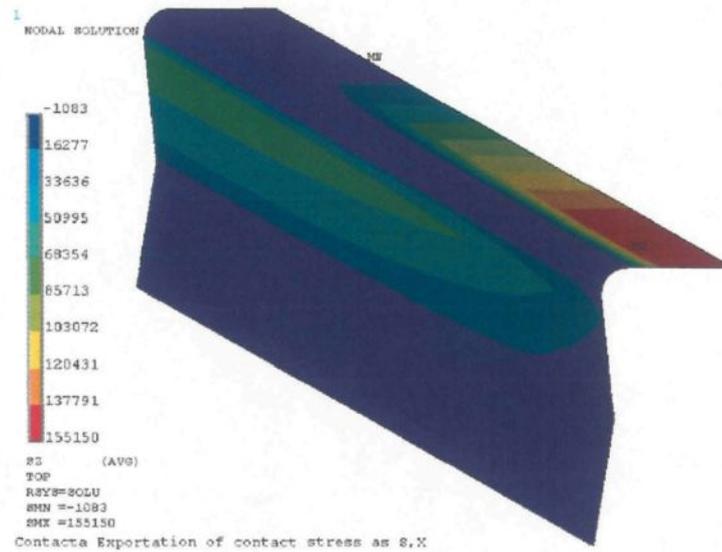


Figure 5.40 – Contrainte normale de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte  $t = 16$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

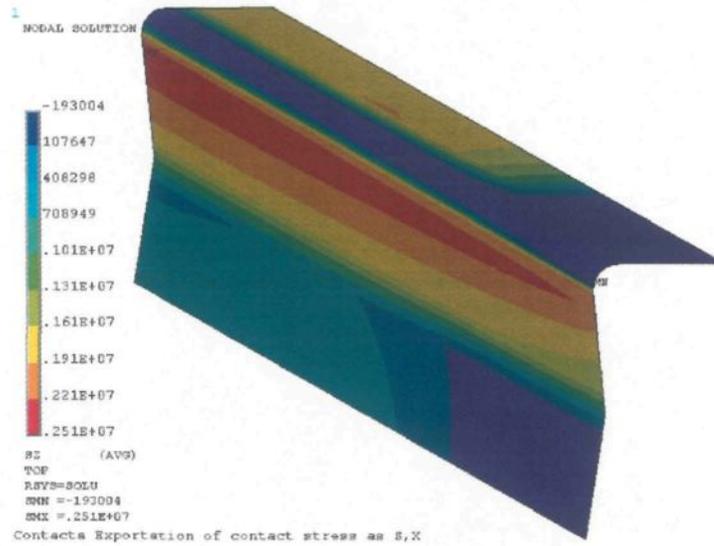


Figure 5.41 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte  $t = 18$  heures (en Pa, méthode de pénalisation, hors équilibre)

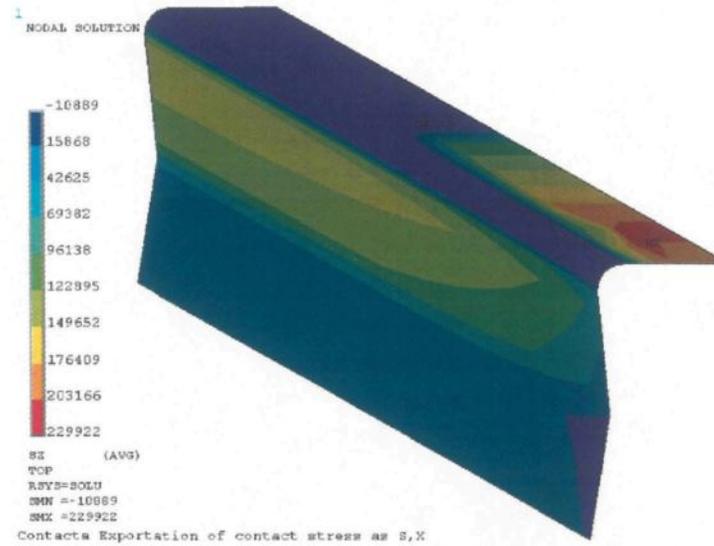


Figure 5.42 – Contrainte normale de contact sur l’interface entre le carbone et la fonte  $t = 18$  heures (en Pa, méthode du lagrangien augmenté adapté)

Les figures 5.25 à 5.42 présentent les contraintes normales de contact sur l'interface entre le carbone et la fonte. Ces figures permettent de constater que la distribution des pressions de contact est beaucoup plus homogène avec la méthode du lagrangien augmenté adapté. La méthode du lagrangien augmenté adapté permet de réduire les concentrations de contraintes sur les frontières de contact tout au long du calcul. L'évolution de la position de la zone de contact est similaire pour les deux méthodes.

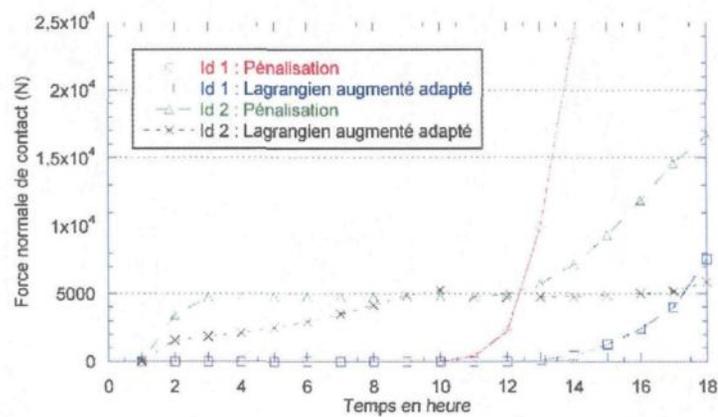


Figure 5.43 – Force normale de contact sur l'interface (Id :1 = verticale ; Id :2 = horizontale)

La figure 5.43 expose la valeur de la force normale de contact en fonction du temps pour les interfaces 1 et 2. Ces dernières sont respectivement les interfaces thermo-électromécanique verticale et horizontale entre le carbone et la fonte. Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont assez réguliers dans le temps. Néanmoins, les résultats obtenus par la méthode du lagrangien augmenté adapté, ont une évolution plus linéaire dans le temps. Cette méthode semble donc plus fiable.

La méthode du lagrangien augmenté adapté permet de réduire fortement le temps de calcul aussi bien celui lié au système mécanique que celui du système thermo-électrique. De plus, les solutions obtenues avec cette méthode sont beaucoup plus régulières qu'avec la méthode de pénalisation (les zones de contact sont plus larges et les contraintes sont

plus faibles). Cette méthode permet donc de résoudre des problèmes thermo-électromécanique de manière rapide et fiable.

## 5.5 Conclusion

Ces exemples ont démontré les avantages des méthodes proposées. La nouvelle méthode proposée, celle du lagrangien augmenté adaptative permet la résolution de tous les problèmes de contact exposés. Cette méthode conjugue les avantages du lagrangien augmenté (symétrie de la tolérance, simplicité, et stabilité) aux avantages de l'adaptation de la pénalité (optimisation du temps de calcul). La méthode du lagrangien augmenté adapté est très performante pour résoudre les problèmes de contact mécanique sans frottement. Pour ces types de problèmes, la rapidité de cette méthode est comparable à celle de la pénalisation. De plus, elle permet de prendre des pas de temps plus importants et le choix de la valeur initiale du coefficient de pénalisation normale n'a pas vraiment d'importance. En outre, cette méthode peut résoudre les problèmes de contact frottant sans solliciter l'utilisateur pour choisir la valeur du coefficient de pénalisation tangentielle. Cette méthode est aussi performante pour des problèmes mettant en jeu des contraintes de contact pouvant varier entre quelques mégapascal à quelques milliers de mégapascal. De plus, la méthode du lagrangien augmenté adapté se trouve particulièrement efficace pour les problèmes élasto-plastiques lorsque les deux solides sont déformables. Les avantages de cette méthode sont encore plus importants dans le contexte multi-physiques. Cette méthode est donc un bon compromis entre robustesse et rapidité.

En outre, ces exemples présentent l'avantage d'utiliser une méthode surface-surface. Cette dernière permet de rendre la solution beaucoup plus régulière. La méthode présentée est basée sur les éléments joints et permet de résoudre des problèmes en trois dimensions.

# Chapitre 6

## Conclusion et recommandations

### 6.1 Conclusion

De nos jours, le contact reste un problème de mécanique des solides qui exige une attention toute particulière aussi bien dans les domaines de la physique, des mathématiques et de l'informatique. En effet, le problème de contact mécanique n'est pas facilement modélisable. L'interface de contact peut présenter une très grande gamme de comportements au niveau du contact ou/et du frottement. Les lois utilisées pour modéliser ces phénomènes présentent souvent des non-linéarités qui sont non-différentiables. Ces non-linéarités peuvent provoquer des instabilités ou des oscillations numériques lors de la résolution numérique.

La formation d'un système d'équations n'est pas triviale. Elle demande la modification des équations qui régissent le contact. Les méthodes les plus utilisées sont celles de la régularisation (la méthode de pénalisation, celle des multiplicateurs de Lagrange ou encore celles du lagrangien augmenté). Or, ces méthodes présentent plus d'inconvénients que d'avantages.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange respecte parfaitement les lois de contact et de frottement. Mais, elle fait intervenir de nouvelles inconnues, et rend le système d'équations plus complexe à résoudre.

La méthode de pénalisation et celle du lagrangien augmenté sont plus simples. Mais

avec ces méthodes, l'utilisateur doit déterminer les valeurs de coefficients cruciaux, les coefficients de pénalisation (normale et tangentielle). La qualité de la solution dépend énormément du choix de ces coefficients. La méthode du lagrangien augmenté donne plus de liberté au niveau du choix des coefficients de pénalisation mais l'utilisateur doit également déterminer la valeur maximale de l'interpénétration et du glissement réversible.

En outre, la résolution numérique du problème de contact frottant nécessite la discrétisation spatiale des solides, et donc des interfaces de contact. Par conséquent, les calculs sont effectués sur une approximation des surfaces de contact. Ainsi, les méthodes de discrétisation des équations du contact sont aussi importantes que les méthodes de régularisation. La méthode de discrétisation des équations du contact la plus utilisée est celle dite point-surface. Or, elle entraîne de nombreux problèmes numériques lorsque les surfaces de contact ne sont pas assez régulières ou lorsque les déplacements relatifs sont trop importants. Pour éviter ces problèmes, une autre méthode, dite surface-surface, peut être utilisée. Le principal inconvénient de cette méthode est l'obtention d'un vecteur normal et tangentiel pour chaque nœud d'une des surfaces de contact. Le calcul de ces valeurs est facilement réalisable en deux dimensions mais il est beaucoup plus complexe en trois dimensions, ce qui rend cette méthode inutilisable. Ce problème est contourné si le vecteur normal et tangentiel en un nœud est défini par rapport au point le plus proche sur l'autre surface de contact.

Enfin, lors de la résolution numérique d'un tel système, différentes méthodes peuvent être utilisées pour la prise en compte du contact. Les méthodes les plus utilisées (pénalisation, pénalité adaptative ou lagrangien augmenté) présentent toutes de nombreuses limites. Chacune de ces méthodes produit de très bons résultats mais pour cela l'utilisateur doit choisir correctement les valeurs des coefficients de pénalisation et les pas de temps. En outre, les performances en termes de temps de calcul dépendent énormément du type d'exemple. Ainsi, aucune de ces méthodes (pénalisation, pénalisation

adaptative et lagrangien augmenté) n'est convenable.

Ces travaux de recherche proposent donc une nouvelle méthode, celle du lagrangien augmenté adapté. Cette méthode conjugue les avantages des méthodes usuelles sans leurs inconvénients (symétrie de la tolérance, simplicité, stabilité et optimisation du temps de calcul). L'adaptation de la pénalité permet d'éliminer les oscillations du statut de contact (contact / non contact), et rend ainsi la résolution plus rapide et plus fiable. Cette méthode permet de contrôler l'interpénétration. En effet, l'utilisateur peut choisir la valeur maximale de l'interpénétration qu'il souhaite. Cette valeur peut être reliée à une signification mécanique ou bien à la discrétisation spatiale. Ce paramètre permet donc de contrôler la représentativité de la réalité. L'annexe A renforce les avantages de cette nouvelle méthode en montrant que les résultats obtenus avec celle-ci sont transposables dans d'autres contextes. De plus, une technique de factorisation sélective permet de réduire considérablement l'influence de ce paramètre sur le temps de calcul. Cette méthode est par conséquent, plus fiable, plus rapide et plus robuste que n'importe laquelle des méthodes les plus utilisées (pénalisation, pénalisation adaptative et lagrangien augmenté).

En outre, ces travaux présentent également une méthode surface-surface permettant la résolution de problèmes en trois dimensions. Elle diminue l'erreur produite par la discrétisation spatiale. Cette méthode n'a que peu d'influence sur le temps de calcul. Elle permet de produire une solution plus régulière. Néanmoins, cette formulation surface-surface présente de grandes différences par rapport à la formulation point-surface. Des ajustements sont nécessaires dans la procédure de résolution.

## 6.2 Recommandations

Les travaux effectués durant cette recherche doctorale peuvent être améliorés sur certains points. Bien que la méthode du lagrangien augmenté adapté soit très performante, l'utilisation d'une technique de factorisation sélective permettant de ne pas recalculer

la matrice tangente pour toutes les itérations après la première augmentation des multiplicateurs de Lagrange, permettrait d'éviter l'intervention de l'utilisateur. En effet, cela donne la possibilité d'effectuer plusieurs cycles d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange, sans réellement influencer le temps de calcul. Ainsi, un critère d'erreur sur les contraintes de contact pourrait être calculé entre deux cycles, ce qui permettrait de supprimer les valeurs d'interpénétration maximale et du glissement réversible maximal. D'autre part, une étude complémentaire devrait être menée sur le frottement. Cette étude déterminera si l'algorithme de calcul du coefficient de pénalisation tangentielle doit être modifié ou si cette méthode doit utiliser la technique de résolution des multiplicateurs de Lagrange à incrément avant (voire partie 3.4.3). Dans ce cas, après un certain nombre de cycles d'augmentation des multiplicateurs de Lagrange (un ou deux), les statuts de contact sont définis, la résolution par la méthode des multiplicateurs de Lagrange à incrément avant pourrait ainsi être envisagée aisément.

En ce qui concerne la méthode des éléments joints, la modification apportée permet la résolution des problèmes de dimensions trois. Mais les performances de cette méthode n'ont pas pu être exploitées au maximum en raison de l'architecture du code de calcul utilisé. Le code utilisé est construit pour calculer les contraintes de contact sur un élément esclave en fonction des éléments maîtres. Or, dans la formulation surface-surface, le calcul effectué sur chacun des nœuds de la surface esclave dépend de l'ensemble de ses voisins et des éléments maîtres. Dans le cadre d'une résolution de type Newton-Raphson, le calcul du vecteur résidu peut facilement être effectué avec cette architecture, mais le calcul de la matrice tangente s'avère très complexe. Ces différences rendent obligatoire d'importantes modifications du code de calcul. Bien qu'en théorie rien ne laisse penser que l'utilisation de la méthode du lagrangien augmenté adapté avec celle des éléments joints devrait poser problème, cette combinaison devrait être étudiée. Elle devrait produire une amélioration du calcul des contraintes de contact aussi bien dans un contexte mécanique que multi-physiques.

# Annexe A

## Approche différente

Cette annexe a pour but de présenter une autre approche des problèmes de contact mécanique afin de prouver que les études faites dans le cadre de ce projet de recherche peuvent être utilisées pour d'autres codes de calculs. Dans un premier temps la méthodologie et les outils utilisés à l'Université de Liège sont présentés. Puis, le problème de Hertz présenté dans le chapitre 4 à la partie 4.1.3 est repris et résolu avec ces outils.

### A.1 Approche utilisée à l'Université de Liège

Les problèmes de contact mécanique résolu à l'université de Liège sont différents de ceux calculés à l'Université du Québec à Chicoutimi. L'approche prise pour résoudre ces problèmes est d'autant plus différente que chacune des deux institutions utilise des outils qu'elle développe elle-même.

#### A.1.1 Metafor

Metafor est le logiciel développé à l'université de Liège pour la résolution par élément fini de problèmes de contact en grandes transformations. Il diffère de celui développé à l'Université du Québec à Chicoutimi en de nombreux points. Les buts des deux logiciels sont différents. Metafor avait à l'origine pour objectif de résoudre des problèmes de formage (problème dynamique de contact mécanique en grandes déformations). Par

contre, FESh++ est destiné à la résolution de problèmes multi-physiques en quasi-statique, le module Contacta est dédié au contact ([3, 4]). Les stratégies de calcul sont donc différentes et de nombreuses astuces de calcul sont différentes. Ceci rend la comparaison des deux logiciels très difficile.

### A.1.2 Gestion du temps

La stratégie de résolution de Metafor est basée sur l'adaptation du pas de temps. Dans FESh++ une méthode d'adaptation du pas de temps peut être utilisée mais elle ne l'est que très rarement. Le logiciel Metafor utilise une technique de calcul permettant d'ajuster la taille du pas de temps en fonction de la vitesse de convergence. Si l'algorithme ne converge pas avant un certain nombre de pas de temps, alors le calcul est repris avec un pas de temps plus petit.

Cette technique semble permettre une optimisation du temps de calcul et assure l'obtention d'une solution fiable. La gestion du contact est également différente.

### A.1.3 Gestion du contact

La formulation choisie pour calculer le contact mécanique dans Metafor, est comme celle utilisée dans FESh++, une approche maître/esclave. La surface esclave entre en contact avec la surface maître (obstacle). Mais contrairement à ce qui est fait dans Contacta (un élément esclave entre en contact avec la surface maître), le contact est considéré pour chacun des nœuds de la surface esclave. Ainsi, la notion d'élément de contact n'est pas définie. Les nœuds de la surface esclave sont simplement mis en relation avec les nœuds de la surface maître afin de calculer les conditions de contact. En conséquence, ce sont des forces et non pas des contraintes de contact qui sont calculées. Ces forces sont donc appliquées sur chacun des nœuds de la surface esclave. Afin de respecter le principe d'action - réaction, pour chaque nœud esclave, la force opposée est appliquée sur la surface maître, elle est divisée entre les nœuds de l'élément en contact

avec ce nœud, en fonction de la position du contact sur cet élément. Une option permet de tenir compte de la différence de densité de maillage en venant multiplier la force de contact par une valeur caractérisant la taille de la zone d'influence du nœud (cette valeur est constante au cours du calcul). De plus, ce code de calcul donne la possibilité d'utiliser l'approche double maître/esclave. Les deux frontières sont prises successivement avec le statut esclave et les forces de contact sont sommées. Cette technique présente l'avantage d'être très rapide et simple. Elle permet d'utiliser des techniques pouvant rendre les résultats plus réguliers, comme la régularisation du vecteur normal [40, 41].

#### A.1.4 Régularisation du vecteur normal

Le logiciel Metafor utilise une méthode de régularisation du vecteur normal sur la frontière maître au voisinage de la frontière des éléments. La position des axes permettant la représentation du contact est une fonction de la position du nœud esclave par rapport aux éléments maîtres. Lorsque le nœud esclave se trouve dans le voisinage de plusieurs éléments maîtres, la position des axes varie de manière continue entre les valeurs prises pour chacun des éléments maîtres en fonction de la position du nœud par rapport aux éléments maîtres. Cette méthode apporte de la stabilité et diminue le temps de calcul tout en augmentant la fiabilité.

#### A.1.5 Matériaux élasto-plastique

L'outil Metafor est développé, entre autre, pour la résolution de mécanique avec un comportement élasto-plastique. Il comporte des méthodes permettant la bonne représentation des déformations élasto-plastiques. Une intégration différentielle est effectuée pour mieux prendre en compte les déformations élasto-plastiques.

Malgré toutes ces différences, la résolution d'un même problème est effectuée avec les deux outils pour compléter l'étude des méthodes de calcul du contact mécanique.

## A.2 Problème de Hertz

Le problème de Hertz résolu, est présenté dans la partie 4.1. Mis à part pour le problème élasto-plastique dans lequel l'hypothèse des contraintes planes est remplacé par celle des déformations planes. Les maillages utilisés sont produits par un utilitaire (Gen4) incorporé dans le logiciel Metafor. Ces maillages sont composés d'éléments quadrangles et notés maillage  $n$  ou  $n$  est la longueur en millimètre des éléments linéique dans la zone de contact. Trois maillages différents sont utilisés :

- maillage 1 ;
- maillage 0,5 ;
- maillage 0,25.

Les caractéristiques mécaniques sont exposées dans la partie 4.1 à la page 58. Ces exemples sont résolus avec la méthode de pénalisation. Les valeurs du coefficient de pénalisation sont identiques à ceux utilisés dans les exemples de la partie 4.1 ( $10^5$ ,  $10^6$  et  $10^7$ ).

### - Cas du quart de cylindre et du plan

Tableau A.1 – Nombre d'itérations et de pas de temps (quart de cylindre en acier et du plan indéformable)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	1	0,5	0,25	1	0,5	0,25
$10^5$	5 (2)	7 (2)	7 (2)	6 (2)	7 (2)	18 (5)
$10^6$	6 (2)	9 (3)	9 (3)	19 (5)	21 (5)	34 (9)
$10^7$	6 (2)	9 (3)	12 (4)	20 (5)	31 (9)	33 (9)

Le tableau A.1 présente le nombre d'itérations et le nombre de pas de temps (nombre entre parenthèses) pour chacune des configurations.

Le tableau (A.1) permet de constater que l'augmentation de la valeur du coefficient de pénalisation normale rend la résolution plus difficile. De même, la plastification du matériau oblige une diminution des pas de temps. Le rapport du nombre d'itérations et de celui des pas de temps démontre la rapidité de la méthode de pénalisation (entre trois et quatre itérations par pas de temps). Dans le cas élastique, le nombre d'itérations est comparable à celui obtenu avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (voir tableau 5.2).

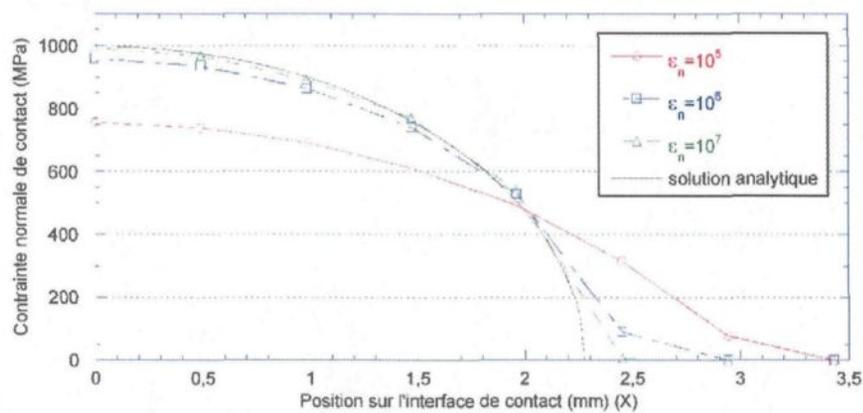


Figure A.1 – Contrainte normale de contact  $t_n$  (maillage 0,5 et comportement élastique)

Les figures A.1 et A.2 représentent les « contraintes » de contact (les forces de contact au nœuds divisées par la surface d'influence), pour le maillage 0,5. Elles montrent la bonne évaluation des conditions de contact pour les valeurs du coefficient de pénalisation de  $10^6$  et  $10^7$ . Des constatations similaires sont valables pour les autres maillages.

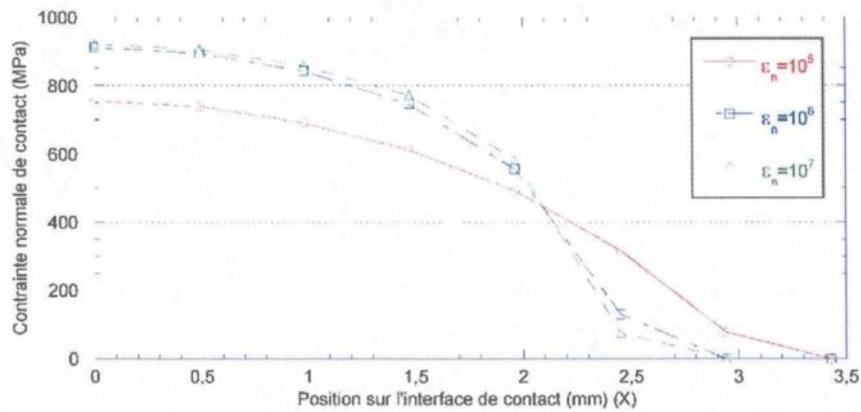


Figure A.2 – Contrainte normale de contact  $t_n$  (maillage 0,5 et comportement élasto-plastique)

#### – Cas des deux quarts de cylindre

Tableau A.2 – Nombre d'itérations et de pas de temps (deux quart de cylindre en acier)

$\varepsilon_n$	élastique			élasto-plastique		
	maillage			maillage		
	1	0,5	0,25	1	0,5	0,25
$10^5$	5 (2)	7 (2)	11 (4)	7 (2)	21 (5)	37 (9)
$10^6$	7 (2)	11 (4)	23 (5)	19 (6)	26 (6)	31 (9)
$10^7$	32 (9)	18 (6)	36 (9)	30 (9)	31 (10)	40 (11)

Le tableau A.2 présente le nombre d'itérations et de pas de temps pour la résolution de ce problème sous la configuration des deux quarts de cylindre. Dans le cas général, le nombre de pas de temps augmente par rapport à la configuration plan-cylindre. Ainsi, le nombre d'itérations est également plus important mais, s'il est ramené au pas de temps, il est identique (entre trois ou quatre itérations par pas de temps). Le nombre

d'itérations, dans le cas élastique, est supérieur à celui obtenu avec la méthode du lagrangien augmenté adapté (voir tableau 5.4).

De plus, les solutions sont quasiment identiques à celles obtenues sous la configuration plan-cylindre.

Malgré les nombreuses différences entre les deux logiciels, ce problème permet d'envisager le fait que la méthode du lagrangien augmenté adapté pourrait apporter une amélioration conséquente à la rapidité et la fiabilité de l'outil de calcul Metafor. De plus, d'après la structure de la procédure de calcul, la méthode surface-surface basée sur les éléments joints (voir chapitre 5) apporterait une meilleure régularité de la solution.

# Bibliographie

- [1] G. DUVAUT, J.L. LIONS *Les inéquations en mécanique et en physique* DUNOD, Paris 1972
- [2] J.T. ODEN, E.B. PIRES Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity *Journal of Applied Mechanics* 1983 ; **50**, p.67-76
- [3] D. MARCEAU *Modélisation du contact tridimensionnel avec frottement en grande transformation et son application à l'étude des dispositifs d'ancrage multitorons* Thèse de doctorat, Université Laval (Québec), Canada 2001
- [4] P. GOULET *Modélisation du comportement thermo-électro-mécanique des interfaces de contact d'une cuve de Hall-Héroult* Thèse de doctorat, Université Laval (Québec), Canada 2004
- [5] SH. KESHAVARZ, A.R. KHOEI, A.R. KHALOO Contact friction simulation in powder compaction process based on the penalty approach *Materials and Design* 2008 ; **29**, p.1199-1211
- [6] Y.B. BAYRAM, H.F. NIED Enriched Finite element-penalty function method for modeling interface cracks with contact *Engineering Fracture Mechanics* 2000 ; **65**, p.541-557
- [7] T. ELGUEDJ, A. GRAVOUIL AND A. COMBESURE A mixed augmented Lagrangian-extended finite element method for modelling elastic-plastic fatigue crack growth with unilateral contact *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2007 ; **71**, P.1569-1597
- [8] J.C. SIMO AND T.A. LAURSEN An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction *Computers & Structures* 1992 ; **42**, P.97-116
- [9] A.F. SALEEB, K. CHEN AND T.Y.P. CHANG An effective two-dimensional frictional contact model for arbitrary curved geometry *Int. J. Numer. Meth. Engng* 1994 ; **37**, P.1297-1321
- [10] H. WALTER *Modélisation 3D par éléments finis du contact avec frottement et de l'endommagement du béton : application à l'étude de fixation ancrées dans une structure en béton* Thèse de doctorat, École Doctorale MEGA (Lyon), France 1999
- [11] N.J. CARPENTER, R.L. TAYLOR, M.G. KATONA Lagrange constraints for transient finite elements surface contact *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1991 ; **32**, p.103-128

- [12] M. OLDENBURG, L. NILSSON The position code algorithm for contact searching *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1994 ; **37**, p.359-386
- [13] J-P. PONTHOT *Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis* Thèse de doctorat, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, Belgique 1997
- [14] Z-Q. FENG *Contribution à la modélisation des problèmes non linéaires : contact, plasticité et endommagement* Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1991
- [15] M. EL MOUATASSIM *Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis* Thèse de doctorat, Université de technologie de Compiègne, France 1989
- [16] B.YANG, T.A. LAURSEN AND X. MENG Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding *Int. J. Numer. Engne* 2005 ; **62**, p.1183-1225
- [17] M. A. PUSO, T.A. LAURSEN A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004 ; **193**, p.601-629
- [18] M. A. PUSO, T.A. LAURSEN A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2004 ; **193**, p.4891-4913
- [19] C. DAUX, N. MOËS, J. DOLBOW, N. SUKUMAR AND T. BELYTSCHKO Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method *Int. J. Numer. Engng* 2000 ; **48**, p.1741-1760
- [20] J. DOLBOW, N. MOËS, T. BELYTSCHKO An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001 ; **190**, p.6825-6846
- [21] Y. GUÉTARI, S. LE CORRE ET N. MOËS Étude des possibilités de la méthode X-FEM pour la simulation numérique de la coupe *Mécanique & Industries* 2005 ; **6**, p.315-319
- [22] G. LEGRAIN, N. MOËS, E. VERRON Fissuration en grandes transformation avec X-FEM *dans les actes du septième colloque national en calcul des structures*, Giens 2005 ; Volume 2 pages 629-634
- [23] G. LEGRAIN, N. MOËS, E. VERRON Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method *Int. J. Numer. Meth. Engrg* 2005 ; **63**, p.290-314
- [24] N. MOËS, J. DOLBOW, , T. BELYTSCHKO A finite element method for crack growth without remeshing *Int. J. Numer. Meth. Engrg* 1999 ; **46**, p.131-150
- [25] J.M. MELENK, I. BABUŠKA The partition of unity finite element method : Basic theory and applications *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 1996 ; **139**, p.289-314

- [26] Sous la direction de P. BREITKOPF La méthode des éléments finis : extensions et alternatives *Hermes Science Publications*, Paris 2006
- [27] I. ALFARO, J. YVONNET, E. CUETO, F. CHINESTA, M. DOBLARÉ Meshless methods with application to metal forming *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2006 ; **195**, p.6661-6675
- [28] HISAMOTO HIYOSHI, KOKICHI SUGIHARA Improving continuity of Voronoi-based interpolation over Delaunay spheres *Computational Geometry*, 2002 ; **22**, p.167-183
- [29] J. YVONNET, I. ALFARO, E. CUETO, F. CHINESTA, M. DOBLARÉ Nouvelle avancées dans les méthodes sans maillage de type éléments naturels pour la simulation des procédés de mise en forme *dans les actes du septième colloque national en calcul des structures*, Giens 2005 ; Volume 2 pages 407-412
- [30] J. YVONNET, F. CHINESTA, PH. LORONG, D. RYCKELYNCK The constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces *International Journal of Thermal Sciences*, 2005 ; **44**, p.559-569
- [31] J. YVONNET *Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme* Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Paris, France 2004
- [32] I. ALFARO, D. BEL, E. CUETO, M. DOBLARÉ and F. CHINESTA Three-dimensional simulation of Aluminium extrusion by the  $\alpha$ -shape based Natural Element Method *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2006 ; **195**, p. 4269-4286
- [33] D. CHAMORET, P. SAILLARD, A. RASSINEUX, J-M. BERGHEAU New smoothing procedures in contact mechanics *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2004 ; **168**, p.107-116
- [34] D. CHAMORET *Modélisation du contact : nouvelles approches numériques* Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, France 2002
- [35] D. CHAMORET, P. SAILLARD, A. RASSINEUX, J-M. BERGHEAU Comparaison d'algorithmes classiques et originaux dans le traitement numérique du contact *dans les actes du sixième colloque national en calcul des structures*, Giens 2003 ; Tomes II pages 313-320
- [36] D. CHAMORET, A. RASSINEUX, P. BREITKOPF, P. VILLON Optimisation de maillage surfacique de pièces mécanique par une méthode diffuse inverse *dans les actes du sixième colloque national en calcul des structures*, Giens 2003 ; Tomes III pages 533-540
- [37] S. TIMOSHENKO, J.N. GOODIER *Theory of Elasticity*. Second Edition, MC GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, New York 1951
- [38] W.C. YOUNG *Roark's Formulas for Stress and Strain*. Sixth Edition, MC GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, New York 1989
- [39] D. FRANÇOIS, A. PINEAU, A. ZAOUÏ *Comportement mécanique des matériaux* HERMÈS, Paris 1995

- [40] D. GRILLET *Modélisation tridimensionnelle du contact entre structures à parois minces dans les phénomènes d'impacts et de mise en forme* Activity report of FRIA fellowship - third year, Université de Liège, Belgique 1998
- [41] L. NOELS *Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures* Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique 2004