

Regelungen für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen

Vom Fachbereich
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Klaus Kefferpütz

geboren am 19. Juli 1981 in Siegburg

Referent: Prof. Dr.-Ing. J. Adamy
Korreferent: Prof. Dr. techn. K. Janschek
Tag der Einreichung: 17. April 2012
Tag der mündlichen Prüfung: 28. August 2012

D17
Darmstadt 2012

Meinem Großvater Karl Kefferpütz gewidmet

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Zeit von Mai 2008 bis April 2012 am Institut für Automatisierungstechnik, Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik der TU Darmstadt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Jürgen Adamy für die Möglichkeit, diese Arbeit unter seiner Betreuung anzufertigen. Neben seiner Unterstützung waren es insbesondere der notwendige Freiraum und das hervorragende wissenschaftliche Arbeitsklima am Institut die maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr. techn. Klaus Janschek von der TU Dresden möchte ich für die Übernahme des Korreferats ganz herzlich danken.

Des Weiteren möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Bunzemeier dafür danken, dass er mit seinen Vorlesungen an der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg den Grundstein für die Entscheidung zum Ergänzungsstudium an der TU Darmstadt gelegt und meinen Weg dort mit Interesse verfolgt hat. Sein Vorbild hat nicht zuletzt den Entschluss zur Promotion begründet.

Für die finanzielle Förderung meiner Promotion mit einem Stipendium möchte ich der Konrad-Adenauer-Stiftung vielmals danken. Darüber hinaus waren die Seminare und Veranstaltungen eine wertvolle Bereicherung.

Einen ganz besonderen Dank möchte ich allen Kollegen und Freunden vom Institut für die zahlreichen fachlichen und nichtfachlichen Diskussionen sowie das hervorragende Arbeitsklima aussprechen.

Für die inhaltliche Durchsicht der Arbeit möchte ich meinen Freunden Dilyana Domont-Yankulova, Moritz Fink, Thomas Gußner, Andreas Ortseifen und Arne Wahrburg danken. Ihre Vorschläge haben sehr zur Verbesserung der Arbeit beigetragen.

Meinen Eltern möchte ich für die großartige und vielfältige Unterstützung in den letzten Jahren ganz herzlich danken. Ein ganz besonderer Dank gilt auch meiner Freundin Jennifer Koopmann, die mir trotz der mit meinen Entscheidungen verbundenen persönlichen Einschränkungen stets zur Seite gestanden und mir Kraft und Zuversicht gegeben hat.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und wichtige Symbole	XI
Kurzfassung	XVI
Abstract	XVII
1 Einleitung	1
1.1 Zielsetzung	2
1.2 Überblick über die Arbeit	3
2 Grundlagen	6
2.1 Systeme mit Stellbegrenzungen	6
2.2 Modellierung der Stellratenbegrenzung	7
2.3 Alternative Modellierung	13
2.4 Vergleich der Aktormodelle	15
2.5 Regelungen für Systeme mit Stellgrößenbegrenzungen . . .	15
2.5.1 Anti-Windup-Verfahren	16
2.5.2 Modellprädiktive Regelung	18
2.5.3 Lineare Sättigungsregler	19
2.5.4 Strukturvariable Regelungen	21
2.5.5 Ausgangsrückführungen	23
2.5.6 Führungsregelungen	25
2.6 Konvexe Optimierung	26
2.6.1 Lineare Matrixungleichungen	26
2.6.2 Lösungsmethoden	29
2.6.3 Sum-of-squares	33
2.6.4 Matrix Sum-of-squares-Zerlegungen	35
3 Stabilität unter geschachtelter Sättigung	37
3.1 Grundbegriffe	37
3.1.1 Kontraktive Invarianz	38
3.1.2 Gebiet nichtsättigender Trajektorien	40
3.1.3 Abklingrate	42

3.2	Lineare Regler	43
3.3	Lineare Sättigungsregler	48
3.4	Nichtlineare Sättigungsregler	52
3.5	Fazit	56
4	Weich strukturvariable Regelungen	57
4.1	Grundlagen	57
4.2	Regelungsnormalform für MIMO-Systeme	61
4.3	Regelgesetz und Auswahlstrategie	64
4.4	Stabilität der impliziten Regelung	66
4.5	Entwurf	69
4.5.1	Einschluss der Anfangsbedingungen	73
4.5.2	Gütekriterium und Optimierungsproblem	73
4.6	Alternative Auswahlstrategie	75
4.7	Beispiel: Space-Shuttle	77
4.8	Fazit	81
5	Ausgangsrückführungen	82
5.1	Grundlagen	83
5.2	Stabilität der Regelung	85
5.3	Konvexe Darstellung der Nebenbedingungen	88
5.4	Entwurf	91
5.4.1	Einschluss der Anfangsbedingungen	92
5.4.2	Begrenzung der Pollagen	94
5.4.3	Optimierungsproblem	94
5.4.4	Rückgewinnung der Reglerparameter	95
5.5	Beispiel: Regelung eines Helikopters	97
5.6	Störunterdrückung	103
5.7	Fazit	110
6	Festwert-Führungsregelungen	111
6.1	Ausschließliche Stellgrößenbegrenzungen	111
6.2	Literaturüberblick	113
6.3	Vorbemerkungen	115
6.3.1	Berechnung von Ruhelagen	116
6.3.2	Zulässige Referenzzustände und -signale	118
6.4	Sättigende Festwert-Führungsregelung	119
6.4.1	Regelgesetz des sättigenden Führungsreglers	122
6.4.2	Stabilität des sättigenden Führungsreglers	125
6.4.3	Entwurf des sättigenden Führungsreglers	128

6.4.4	Entwurf des nichtsättigenden Führungsreglers	131
6.5	Beispiel: Tailless Fighter Aircraft	132
6.6	Beispiel: Space-Shuttle	133
6.7	Erweiterung auf eine Klasse nichtlinearer Systeme	136
6.7.1	Exakte Linearisierung	136
6.7.2	Entwurf eines stabilisierenden Reglers	142
6.7.3	Optimierungsproblem	149
6.7.4	Regelgesetz des Führungsreglers und Stabilität	150
6.7.5	Beispiel: Roboterarm	152
6.8	Fazit	155
7	Zwei-Freiheitsgrade Regelung	156
7.1	Grundlagen	157
7.2	Modellbasierte Vorsteuerung	158
7.3	Vorsteuerung mit Trajektorien-Planung	160
7.3.1	Stellgrößenbeschränkungen	160
7.3.2	Ein-/Ausgangsnormalform	161
7.3.3	Systeminversion	162
7.3.4	Lösung der Randwertaufgabe	163
7.3.5	Stellratenbegrenzungen	164
7.3.6	Beispiel: Tailless Fighter Aircraft	167
7.4	Entwurf der Regelung	168
7.4.1	Variable Aufteilung der Stellrate	171
7.5	Beispiel: Tailless Fighter Aircraft	173
7.6	Beispiel: Space-Shuttle	176
7.7	Fazit	179
8	Zusammenfassung	181
A	Anhang	184
A.1	Lipschitz-Stetigkeit und Cauchy-Folge	184
A.2	Duales Problem	185
A.3	Abklingrate sättigender Regler	187
A.3.1	Sättigende weich strukturvariable Regelung	188
A.4	Eigenwertgebiete	189
A.5	Strikte Invarianz	190
A.6	Linearer Zustandsregler bei Stellgrößenbegrenzung	191
A.6.1	Garantiertes Einzugsgebiet	192
A.7	Eigenschaften der Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$	193
A.8	Nichtsättigender Führungsregler	195

A.9	Lie-Derivierte	196
A.10	Intervalltransformation	197
A.11	Relativer Grad	198
B	Reglerparameter der Beispiele	199
B.1	Implizite Regelung: Space-Shuttle	199
B.2	Ausgangsrückführung: Helikopter Lynx ZD 559	201
B.3	Festwert-Führungsregelungen	207
B.3.1	Einführungsbeispiel: Tailless Fighter Aircraft	207
B.3.2	Beispiel: Tailless Fighter Aircraft	207
B.3.3	Beispiel: Space-Shuttle	208
B.3.4	Beispiel: Roboter-Arm	209
B.4	Zwei-Freiheitsgrade Regelung	212
B.4.1	Vergleich der Vorsteuerungskonzepte	212
B.4.2	Beispiel: Tailless Fighter Aircraft	213
B.4.3	Beispiel: Space-Shuttle	215
	Literaturverzeichnis	218

Abkürzungen und wichtige Symbole

Abkürzungen

Gl.	Gleichung
LMI	Engl.: Linear Matrix Inequality, Deutsch: Lineare Matrix Ungleichung
LQ	Linear quadratisch
MIMO	Engl.: Multiple Input Multi Output
MPC	Engl.: Model Predictive Control, Deutsch: Modell-prädiktive Regelung
PLC	Engl.: Piecewise Linear Control, Deutsch: Stückweise lineare Regelung
SISO	Engl.: Single Input Single Output
SOS	Engl.: Sum-of-squares
u. d. B. d.	unter der Bedingung dass
WSVR	Weich strukturvariable Regelung

Notation

x	Skalar
\mathbf{x}	Vektor
\mathbf{x}^T	Zeilenvektor
\mathbf{X}	Matrix
\mathbf{X}^T	Transponierte einer Matrix
\mathcal{X}	Menge an Skalaren oder Vektoren
$\text{He}(\mathbf{X})$	Verkürzte Schreibweise für $\mathbf{X} + \mathbf{X}^T$
$\mathbf{f}(\cdot)$	Funktion, die in den \mathbb{R}^n abbildet
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen

$\text{Tr}(\mathbf{F})$	Spur einer Matrix
$\mathbf{X} \succ (\succeq) 0$	symmetrische, positiv (semi-)definite Matrix
$\mathbf{X} \prec (\preceq) 0$	symmetrische, negativ (semi-)definite Matrix
$\mathbb{R}[\mathbf{x}]$	Menge der reellwertigen Polynome in \mathbf{x}
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Kronecker-Produkt der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}
$\Sigma[\mathbf{x}]$	Menge der Sum-of-Squares-Polynome in \mathbf{x}
$\mathbb{R}^{r \times r}[\mathbf{x}]$	Menge der symmetrischen und reellwertigen Matrixpolynome in \mathbf{x}
$\Sigma^r[\mathbf{x}]$	Menge der Sum-of-Squares Matrixpolynome

Symbole

Es werden zuerst die lateinischen und dann die griechischen Symbole jeweils alphabetisch aufgelistet. Dabei sind nur solche Symbole aufgeführt, die über die gesamte Arbeit hinweg und nicht nur in einem Abschnitt verwendet werden.

\mathbf{A}_s, \mathbf{A}	Systemmatrix der Strecke bzw. des erweiterten Systems
\mathbf{A}_1	Systemmatrix eines exakt linearisierten Systems
$\mathbf{a}_s(\mathbf{x}_s), \mathbf{a}(\mathbf{x})$	Dynamikmatrix einer einganglinearen Strecke bzw. eines einganglinearen erweiterten Systems
$\hat{\mathbf{A}}$	Systemmatrix des geschlossenen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 + \mathbf{BTK}_2)\mathbf{x}$
$\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_*, \mathbf{D}_*, \mathbf{E}_k$	Parameter der sättigenden, dynamischen Ausgangsrückführung
$\hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{C}}_*, \hat{\mathbf{D}}_*, \hat{\mathbf{E}}_k$	Parameter der sättigenden, dynamischen Ausgangsrückführung nach Anwendung von Substitutionen
\mathbf{B}_s, \mathbf{B}	Eingangsmatrix der Regelstrecke bzw. des erweiterten Systems
\mathbf{b}_1	Eingangsvektor eines exakt linearisierten Systems
$\mathbf{b}_s(\mathbf{x}_s), \mathbf{b}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix einer einganglinearen Regelstrecke bzw. eines einganglinearen erweiterten Systems
\mathbf{C}_s, \mathbf{C}	Ausgangsmatrix der Regelstrecke bzw. des erweiterten Systems
$\mathbf{c}_s(\mathbf{x}_s), \mathbf{c}(\mathbf{x})$	Ausgangsmatrix einer einganglinearen Regelstrecke bzw. eines einganglinearen erweiterten Systems

$\mathbf{D}(p)$,	Diagonalmatrix $\mathbf{D}(p)$ $\text{diag}(p^{\kappa_1}, p^{\kappa_1-1}, \dots, p, \dots, p^{\kappa_m}, p^{\kappa_m-1}, \dots, p)$	= ei-
\mathbf{e}_x	Differenz $\mathbf{e}_x = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$	
$\mathbf{e}_{y,s}$	Differenz $\mathbf{e}_{y,s} = \mathbf{y}_s - \mathbf{y}_{s,v}$, Verwendung im Zuge der Zwei-Freiheitsgrade Regelung	
\mathbf{e}_y	Vektor $\mathbf{e}_y = [\mathbf{e}_y^T \mathbf{u}_{a,r}^T]^T$, Verwendung im Zuge der Zwei-Freiheitsgrade Regelung	
\mathbf{E}_s, \mathbf{E}	Störeingriffsmatrix der Regelstrecke bzw. des erwei- terten Systems	
$e(p), e_{u_{\max}}(p),$ $e_{v_{\max}}(p)$	Skalierungsfunktion	
$\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a),$ $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$	Dynamikfunktion einer nichtlinearen Regelstrecke bzw. einer erweiterten nichtlinearen Regelstrecke	
\mathbf{G}	Matrix zur Spezifizierung der möglicher Störungen	
$g(\mathbf{x}, p)$	Selektionsstrategie $g(\mathbf{x}, p) = 0$	
$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$	Virtuelle Hilfsregler	
$\mathbf{H}_1(p), \mathbf{H}_2(p)$	Virtuelle Hilfsregler zum Entwurf eines weich struk- turvariablen Reglers	
\mathbf{I}	Einheitsmatrix	
\mathbf{K}_1	Zustandsrückführung, welche die Aktorrückführung repräsentiert, $\mathbf{K}_1 = [\mathbf{0} \quad -\mathbf{T}]$	
$\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_2(p)$	Reglermatrix eines linearen Sättigungsreglers bzw. des weich strukturvariablen Reglers	
$\mathbf{K}_{2,\text{lin}}$	Reglermatrix eines linearen Zustandsreglers	
$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$	Lie-Derivierte von $h(\mathbf{x})$ bezüglich $\mathbf{f}(\mathbf{x})$	
m	Dimension des Eingangsvektors \mathbf{u}_a bzw. \mathbf{u}	
n_s, n	Anzahl der Zustandsgrößen der Regelstrecke bzw. des erweiterten Systems $n = n_s + m$	
n_z	Anzahl der Zustandsgrößen der dynamischen Aus- gangsrückführung	
p	Auswahlparameter der weich strukturvariablen Re- gelung	
\mathbf{p}_k	Parametervektor zur Parametrierung der Ansatz- funktionen für die Trajektorienplanung	
\mathbf{P}	Ljapunov-Matrix der Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x}) =$ $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$	
\mathbf{Q}	Inverse der Matrix \mathbf{P} bzw. \mathbf{R}_1	
q, q_s	Dimension des Ausgangsvektors der Regelstrecke bzw. des erweiterten Systems	

\mathbf{r}	Referenzsignal
\mathcal{R}	Menge zulässiger Referenzsignale
\mathbf{T}	Diagonalmatrix $\mathbf{T} = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$
T	Transitionszeit bei Verwendung der Trajektorienplanung
\mathbf{u}_a, \mathbf{u}	Wirksame Stellgröße bzw. kommandierte Stellgröße
$\bar{\mathbf{u}}_a, \bar{\mathbf{u}}$	Stationäre wirksame Stellgröße bzw. stationäre kommandierte Stellgröße
$\mathbf{u}_{a,v}, \mathbf{u}_{a,r}$	Wirksame Stellgröße einer Vorsteuerung bzw. Regelung
\mathbf{u}_{\max}	Vektor der Stellgrößenbegrenzungen
$\mathbf{u}_{\max,r}$	Stellgrößenbegrenzung: Anteil der Regelung bei Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung
$\mathbf{u}_{\max,v}$	Stellgrößenbegrenzung: Anteil der Vorsteuerung bei Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung
\mathbf{v}_{\max}	Vektor der Stellratenbegrenzungen
$\mathbf{v}_{\max,r}$	Stellratenbegrenzung: Anteil der Regelung bei Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung
$\mathbf{v}_{\max,v}$	Stellratenbegrenzung: Anteil der Vorsteuerung bei Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung
$v(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})$	Ljapunov-Funktion zur Stabilisierung einer konstanten Ruhelage
$V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$	Ljapunov-Funktion zur Stabilisierung variabler Ruhelagen $\bar{\mathbf{x}}$
\mathbf{w}	Störvektor
\mathcal{W}	Menge möglicher Störungen
\mathbf{x}_s, \mathbf{x}	Zustandsvektor bzw. erweiterter Zustandsvektor
$\mathbf{x}_{s,v}, \mathbf{x}_v$	Zustandsvektor bzw. erweiterter Zustandsvektor einer modellbasierten Vorsteuerung bei Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung
$\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{x}}$	Stationärer Zustand der Regelstrecke bzw. des erweiterten Systems
\mathcal{X}_0	Gebiet möglicher Anfangszustände
\mathbf{y}_s, \mathbf{y}	Ausgangsvektor der Regelstrecke bzw. erweiterter Ausgangsvektor
\mathbf{y}^*	Geplante Trajektorie für den Systemausgang
$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_k$	Substitution $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{Q}$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}$, $\mathbf{Y}_k = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}$
\mathbf{z}_k	Zustandsvektor der dynamischen Ausgangsrückführung

\mathbf{z}	Zustandsvektor des Gesamtsystems aus Strecke und dynamischer Ausgangsrückführung, $z = [\mathbf{x}^T \mathbf{z}_k^T]^T$ bzw. Zustand des Systems in Byrnes-Isidori Normalform
α	Abklingrate eines geschlossenen Regelkreises
$\underline{\alpha}$	Untere Abschätzung der Abklingrate eines geschlossenen Regelkreises
$\hat{\alpha}_k$	Modifizierte Ansatzfunktion zum Entwurf einer Vorsteuerung mit Trajektorienplanung
β	Gewichtungsfaktor der virtuellen Stellgrößenbegrenzung
$\gamma(p)$	Funktion $\gamma(p) > 0$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ zum Entwurf eines impliziten Reglers
δ	Kronecker-Operator bzw. relativer Grad
η	Skalar zum Entwurf einer Ausgangsrückführung zur Störunterdrückung
$\boldsymbol{\eta}$	Interne Dynamik
κ_i	Skalare zur Herleitung der MIMO-Regelungsnormalform bzw. zur Parametrierung des impliziten Reglers
$\boldsymbol{\kappa}_u, \boldsymbol{\kappa}_v$	Vektor zur Aufteilung der Stellgröße bzw. Stellrate bei Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung
ρ	Höhenlinie einer Ljapunov-Funktion
$\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$	Ideales Aktormodell
τ_i	Verstärkungsfaktor im Aktormodell
$\phi(\mathbf{x})$	Transformationsvorschrift Ein- / Ausgangsnormalform
$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$	Funktion zur Kombination der Zeilen der Matrizen $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$
Θ	Radius des Kreises in der s-Halbebene zur Begrenzung von Eigenwerten
$\Psi_k(t, \mathbf{p}_k)$	Initiale, \mathbf{W}_1 Ansatzfunktion zum Entwurf einer Vorsteuerung mit Trajektorienplanung

Kurzfassung

Zielsetzung dieser Dissertation ist die Entwicklung neuer bzw. die Erweiterung bestehender Ansätze zur Regelung von Systemen unter simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen. Solche Begrenzungen treten in allen praktischen Systemen auf und ihre Verletzung kann zu einer drastischen Verschlechterung der Regelgüte bis hin zur Instabilität führen. Vor diesem Hintergrund sollen in dieser Arbeit Regelverfahren entwickelt werden, welche die Stellbegrenzungen explizit beim Reglerentwurf berücksichtigen. Im ersten Teil der Arbeit liegt der Fokus auf der Stabilisierung einer konstanten Ruhelage, der zweite Teil widmet sich der Aufgabe, ein System von einer Ruhelage in eine andere Ruhelage zu überführen.

Sowohl zur Stabilisierung als auch zur Überführung des Systems zwischen verschiedenen Ruhelagen werden zum einen Zustandsregler und zum anderen Ausgangsrückführungen betrachtet. Im Fall von Zustandsreglern ist die Messung des gesamten Zustandsvektors erforderlich. Dies ist unter praktischen Gesichtspunkten eine sehr restriktive Anforderung, da die Messung des gesamten Zustandsvektors oftmals zu teuer oder schlicht unmöglich ist. Im Gegensatz dazu benötigen Ausgangsrückführungen lediglich die Ausgangsgrößen eines Systems, um das Stellsignal zu berechnen.

Alle Regelungen werden im Hinblick auf eine kurze Ausregelzeit und eine gute Dämpfung optimiert. Dazu werden für alle Verfahren konvexe Optimierungsprobleme auf Basis von linearen Matrixungleichungen (LMIs) und Sum-of-squares-Zerlegungen (SOS-Zerlegungen) angegeben. Auf diese Weise wird ein effizienter Reglerentwurf möglich.

Abstract

The primary objective of this thesis is the development of new and the extension of existing control methods for systems subject to input amplitude and rate constraints. The violation of such constraints can cause serious performance degradations or even instability of the closed loop system. Therefore, control methods incorporating amplitude and rate constraints are of high practical relevance. The first part of this thesis is focussed on stabilizing a constant steady state. In the second part the task of driving the system from one steady state to another one is considered.

In order to stabilize systems and to transfer the system between steady states, state feedback controllers as well as output feedback controllers are developed. In case of state feedback controllers, the whole state vector must be known, which is a quite restrictive assumption because measuring the state vector is often very expensive or even impossible. Output feedback controllers operate based on output information and avoid the requirement of measuring the state vector.

All controllers are designed in view of short settling times and good damping characteristics. All controllers derived in this thesis can be designed based on linear matrix inequalities (LMIs) and sum-of-squares-decompositions (SOS-decompositions). Therefore, convex optimization methods can be employed constituting a very efficient way to parameterize the controllers.

1 Einleitung

Um ein System in geeigneter Weise zu beeinflussen, wird diesem über den Systemeingang Energie zugeführt. So muss beispielsweise zum Betrieb eines klassischen Gleichstrommotors eine bestimmte Eingangsspannung an den Motorklemmen angelegt werden. Durch geeignete Beeinflussung des Energieflusses mittels Stellglieder, die im Folgenden auch als Aktoren bezeichnet werden, kann dem System ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden. Das dazu notwendige Stellsignal wird mittels einer Steuerung bzw. einer Regelung berechnet und entspricht im Idealfall unmittelbar dem Eingang des Systems. In der Realität ist dies aber nicht zu erzielen, da hierfür ein idealer Aktor erforderlich ist, welcher das von der Regelung bzw. Steuerung angeforderte Stellsignal ohne Modifikation in das entsprechende wirksame Stellsignal umsetzen kann. In der Praxis ist jedoch jeder Aktor physikalischen Begrenzungen unterworfen. Diese betreffen zum einen die Begrenzung der Amplitude des Stellsignals, zum anderen aber auch die Geschwindigkeit, mit der das Stellsignal verändert werden kann. So kann beispielsweise das Ruder eines Schiffes zum einen nicht beliebig weit ausgelenkt werden (Stellgrößenbegrenzung), zum anderen kann der Ruderwinkel aufgrund seiner großen Masse nicht beliebig schnell verstellt werden (Stellratenbegrenzung).

Beim Entwurf vieler Regelverfahren werden diese Begrenzungen nicht berücksichtigt. Werden sie jedoch im Betrieb der Regelung verletzt, kann ein unerwünschtes Systemverhalten und im schlimmsten Fall sogar die Instabilität des Systems die Folge sein. Eine Möglichkeit, solche Effekte zu verhindern, ist die Regelung so auszulegen, dass die Begrenzungen niemals verletzt werden. Dies hat jedoch zur Folge, dass die verfügbare Stellgröße bzw. Stellrate nicht vollständig ausgenutzt wird. Um die aus dieser Vorgehensweise resultierenden langen Ausregelzeiten zu vermeiden, werden oftmals die verwendeten Aktoren überdimensioniert. Da in diesem Fall die tatsächliche Nutzung der Stellbegrenzungen im Betrieb weit hinter der Leistungsfähigkeit des Aktors zurückliegt, liegen Wirtschaftlichkeit und Energieeffizienz deutlich unter dem theoretisch erzielbaren Optimum.

Eine signifikante Verbesserung hinsichtlich Regelgüte, Wirtschaftlichkeit und Effizienz lässt sich erzielen, wenn die Stellbegrenzungen bereits

im Entwurf berücksichtigt werden. Während für Systeme, die entweder einer Stellgrößen- oder einer Stellratenbeschränkung unterworfen sind, eine Vielzahl solcher Regelverfahren zur Verfügung stehen, existieren für den Fall simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen weitaus weniger Methoden. Des Weiteren wird selbst im Falle einer ausschließlichen Stellgrößen- bzw. Stellratenbegrenzung zumeist nur die Stabilisierung einer gegebenen Ruhelage betrachtet. Oftmals soll eine Regelung aber dazu verwendet werden, das System von einer Ruhelage in Abhängigkeit von einem Referenzsignal in eine andere Ruhelage zu überführen. Diese Aufgabenstellung ist bislang ebenfalls nicht bzw. nur in unzureichender Weise gelöst.

1.1 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung neuer, bzw. die Erweiterung bestehender Reglerentwurfsmethoden für Systeme unter simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen. Außerdem sollen, wie bereits zuvor erwähnt, Verfahren entwickelt werden, die nicht nur die Stabilisierung einer einzigen Ruhelage erlauben, sondern auch in der Lage sind, das System abhängig von einem Referenzsignal in verschiedene Ruhelagen zu überführen. Natürlich sind auch in diesem Fall die Stellbegrenzungen in den Reglerentwürfen zu berücksichtigen. Eine weitere Anforderung an den Reglerentwurf ist, dass er auf systematische Weise und in vertretbarer Rechenzeit durchgeführt werden kann. Dazu werden im Rahmen der Arbeit unter Verwendung von linearen Matrixungleichungen und Sum-of-squares-Zerlegungen konvexe Optimierungsprobleme formuliert. Dies erlaubt eine weitgehende Automatisierung des Entwurfsprozesses. Als Ergebnis der Reglerentwürfe ergibt sich neben den Parametern des Reglers auch ein garantiertes Stabilitätsgebiet.

Während die meisten existierenden Regelverfahren einen besonderen Schwerpunkt auf die Größe dieses garantierten Stabilitätsgebiets legen, liegt der Schwerpunkt in dieser Arbeit auf der erzielbaren Regelgüte. Ihre Bewertung erfolgt dabei auf Basis der Ausregelzeit und der Dämpfung des geschlossenen Regelkreises. Dies ist unter praktischen Gesichtspunkten häufig von größerem Interesse, da der Bereich, in welchem die Regelung betrieben wird, in der Regel durch die gegebenen Betriebsgrenzen festgelegt ist. Aus diesem Grunde ist oftmals die Sicherstellung einer guten Reglerperformance innerhalb eines begrenzten, vorab definierten Bereiches einer Vergrößerung des Stabilitätsgebietes vorzuziehen.

Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Entwicklung von Regelverfahren für Systeme mit linearer Dynamik. Einige der entwickelten Verfahren sind aber in modifizierter Form auch auf nichtlineare Systeme anwendbar. In solchen Fällen werden auch Systeme mit nichtlinearer Dynamik betrachtet.

Neben dem Entwurf von Zustandsregelungen, welche die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors erfordern, wird in dieser Arbeit auch der Entwurf von Ausgangsrückführungen betrachtet, deren Regelalgorithmus lediglich auf den Ausgangsgrößen des Systems basiert. Da eine Messung des gesamten Zustandsvektors oftmals nicht möglich bzw. sehr teuer ist, sind Ausgangsrückführungen für den praktischen Einsatz von besonderem Interesse.

1.2 Überblick über die Arbeit

Die Gliederung der Arbeit ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Dabei sind Kapitel, die neu erzielte Ergebnisse beinhalten, grau unterlegt. Auch die Verbindungen zwischen den einzelnen Kapiteln gehen daraus hervor. Zunächst wird in Kapitel 2 die Problemstellung genauer beleuchtet und auf die Modellierung von Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen eingegangen. In der zweiten Hälfte des Kapitels werden die wichtigsten existierenden Verfahren zur Regelung von Strecken unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen vorgestellt. Außerdem wird auf bestimmte Verfahren zur Regelung von Systemen unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung eingegangen, die im Verlauf der Arbeit erweitert werden.

In Kapitel 3 werden wichtige Grundbegriffe und Stabilitätssätze vorgestellt. Diese werden dann zur Entwicklung neuer bzw. zur Erweiterung bestehender Regelverfahren verwendet. Dabei stellt der in Abschnitt 3.4 angegebene Stabilitätssatz bereits ein erstes Ergebnis dieser Arbeit dar.

Die Kapitel 4 bis 7 bilden den Hauptteil der Arbeit und beschreiben die entwickelten Verfahren. Der Fokus in den Kapiteln 4 und 5 liegt dabei in der Stabilisierung einer gegebenen, fixen Ruhelage. In Kapitel 4 wird eine nichtlineare Regelung vorgestellt, die eine besonders gute Reglerperformance erzielt. Ihr Einsatz erfordert jedoch die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors. In Kapitel 5 wird eine Ausgangsrückführung vorgestellt, deren Regelalgorithmus lediglich die Kenntnis der Ausgangsgrößen des Systems erfordert. Diese Eigenschaft macht sie für den praktischen Einsatz besonders interessant.

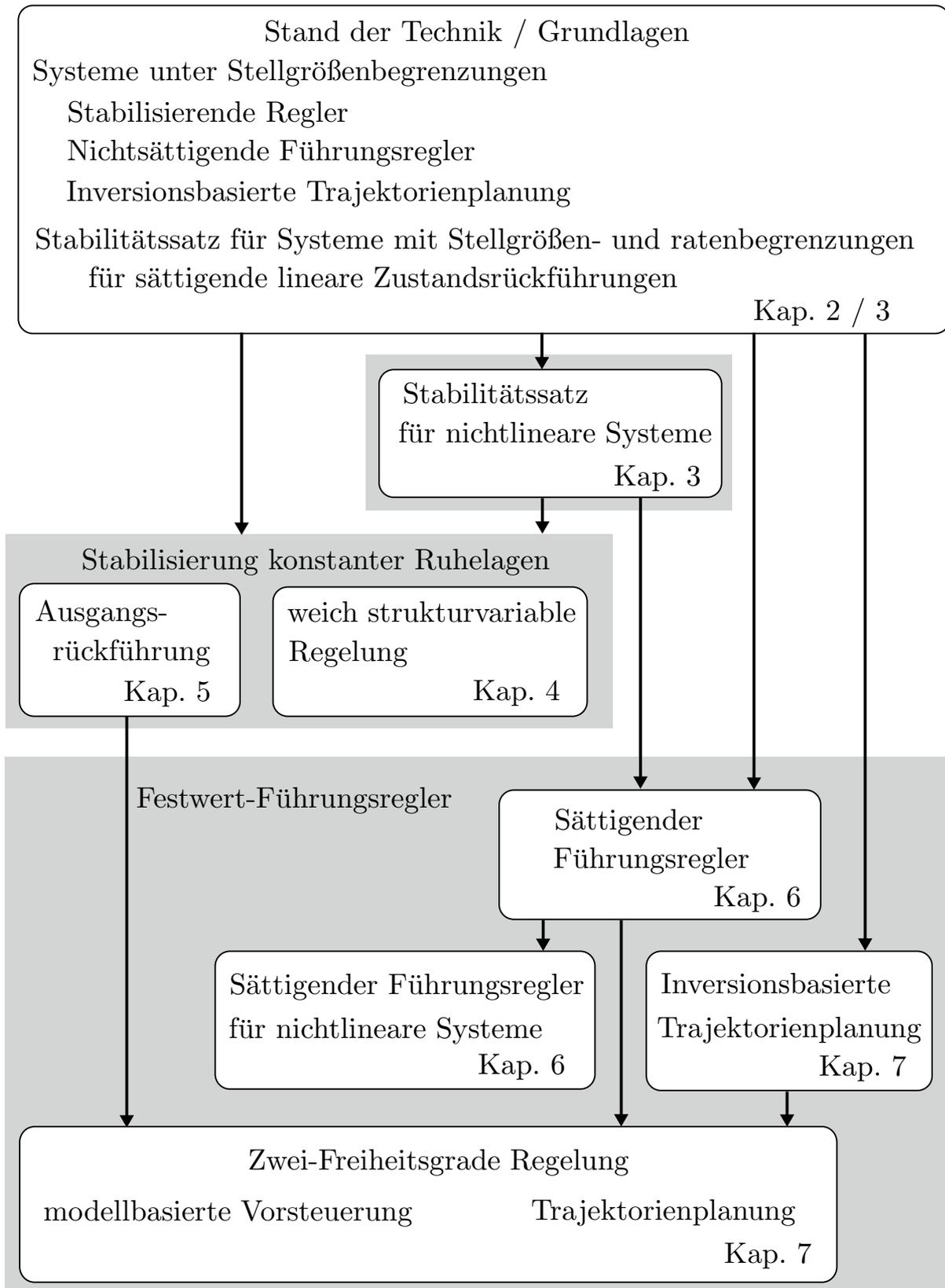


Abbildung 1.1: Überblick über die Arbeit und die entwickelten Verfahren zur Regelung von Systemen unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen.

Die Kapitel 6 und 7 beschreiben Methoden zur Führungsregelung. Dabei erzielt die in Kapitel 6 vorgestellte sättigende Führungsregelung eine sehr gute Reglerperformance. Außerdem kann sie auf eine wichtige Klasse nichtlinearer Systeme erweitert werden. Diese Erweiterung wird im zweiten Teil von Kapitel 6 vorgestellt. Jedoch erfordert die sättigende Führungsregelung die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors.

Für die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung in Kapitel 7 ist dagegen lediglich die Kenntnis der Ausgangsgrößen des Systems erforderlich. Zur Realisierung der Vorsteuerung in der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur wird zum einen ein modellbasierter Ansatz unter Einsatz des Führungsreglers aus Kapitel 6, zum anderen ein inversionsbasierter Ansatz vorgestellt.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel wird auf die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Systeme eingegangen und die Modellierung von simultanen Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen erläutert. Anschließend folgt ein Überblick über bekannte Regelverfahren für diese Systemklasse.

2.1 Systeme mit Stellbegrenzungen

In dieser Arbeit werden zumeist lineare zeitinvariante Systeme betrachtet, die jedoch hinsichtlich ihrer Stellgröße und auch ihrer Stellrate begrenzt sind. Sie werden durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_a, \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $\mathbf{A}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$, $\mathbf{B}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times m}$ und $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{q_s \times n_s}$ beschrieben. Die Elemente $u_{a,i}$ des Eingangsvektors \mathbf{u}_a sind dabei hinsichtlich der Stellgröße, gemäß $u_{\min,i} \leq u_{a,i} \leq u_{\max,i}$, und der Stellrate, gemäß $v_{\min,i} \leq \dot{u}_{a,i} \leq v_{\max,i}$, beschränkt. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass das Paar $(\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s)$ vollständig steuerbar ist und die Ausgangsgrößen linear unabhängig sind, also $\text{rang}(\mathbf{C}_s) = q_s$ gilt.

Im Verlauf der Arbeit werden auch Verfahren vorgestellt, welche zur Regelung nichtlinearer Systeme geeignet sind. Auf die dort betrachteten Systeme wird im jeweiligen Abschnitt eingegangen.

Bei den meisten Verfahren zum Entwurf von Regelungen für lineare und nichtlineare Systeme werden Stellbegrenzungen nicht berücksichtigt. Dadurch wird zwar auf der einen Seite ein einfacher und systematischer Entwurf möglich, auf der anderen Seite können aber bei Überschreitung der Begrenzungen verschiedenste Effekte auftreten, die negativen Einfluß auf die Regelgüte oder gar die Stabilität haben.

Solche Effekte werden beispielsweise durch Windup verursacht. Das wohl bekannteste Windup-Phänomen tritt bei Verwendung von Reglern mit Integralanteil zu Tage, bei welchen im Falle sättigender Stellgrößen oft ein

deutliches und langanhaltendes Überschwingen der Regelgröße beobachtet werden kann. Eine anschauliche Erklärung hierfür liefert die folgende Betrachtung: Ist die Stellgröße in Sättigung, hat eine Veränderung des Regelfehlers keine Änderung des Stellsignals zur Folge. Stattdessen wächst der Integralanteil deutlich an, ein Verhalten, das als Regler-Windup bezeichnet wird. Verlässt die Stellgröße anschließend den Sättigungsbereich, muss dieser hohe Integralanteil erst einmal abgebaut werden, was zu dem verlangsamten Ausregelvorgang mit deutlichem Überschwingen führt.

Windup-Effekte können aber auch beobachtet werden, wenn kein dynamischer Regler verwendet wird. Im Falle stabiler Strecken tritt Windup auf, wenn die Streckendynamik in Relation zum verfügbaren Stellgrößenbereich hoch ist [57]. Das Stellsignal kann dann einen Zustand unter Umständen nicht schnell genug zurückführen, um das System ausreichend zu dämpfen. In solchen Fällen können Grenzyklen mit endlicher Amplitude die Folge sein. Dieses Phänomen wird auch als Strecken-Windup [57] bezeichnet. Ist das System instabil, können die Konsequenzen weitaus dramatischer sein. Im schlimmsten Fall wird das Gesamtsystem aus Strecke und Regler bei auftretender Sättigung instabil. Aufgrund der Stellgrößenbegrenzung sind größere Auslenkungen nicht mehr stabilisierbar. Instabile Systeme, die einer Stellgrößenbegrenzung unterliegen, können daher nur lokal, d.h. für einen begrenzten Betriebsbereich, stabilisiert werden.

In der Vergangenheit hat dies schon diverse katastrophale Unfälle zur Folge gehabt. Einen Überblick hierzu liefert [129]. Als Beispiele werden hier der Absturz eines Prototyps der Saab Gripen JAS-39, ein aerodynamisch instabiles Jagdflugzeug, im Jahre 1993, sowie der Reaktorunfall von Tschernobyl im Jahr 1986 genannt. Die Ursache des Absturzes der Saab Gripen lag dabei in einer unerwartet auftretenden Sättigung der Stellrate. Auch im Fall von Tschernobyl haben Stellbegrenzungen eine maßgebliche Rolle gespielt. Dabei ist insbesondere die Tatsache, dass instabile Systeme nur lokal, d.h. innerhalb eines gewissen Betriebsbereiches, stabilisiert werden können, entscheidend.

2.2 Modellierung der Stellratenbegrenzung

Zur Modellierung einer simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung wird zunächst nur ein skalares Eingangssignal u betrachtet und wie in [113], [130] ein Operator $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ eingeführt. Dieser Operator soll die folgenden Eigenschaften aufweisen:

- $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ ist differenzierbar für jedes stetig differenzierbare Ein-

gangssignal u und es gilt

$$|\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)| \leq u_{\max}, \quad \left| \frac{d}{dt} \sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u) \right| \leq v_{\max},$$

- wenn $u(t) > u_{\max}$ bzw. $u(t) < -u_{\max}$ ist, so gilt

$$\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u) = u_{\max} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u) = -u_{\max},$$

- wenn $\dot{u}(t) > v_{\max}$ bzw. $\dot{u}(t) < -v_{\max}$ ist, so gilt

$$\frac{d}{dt} \sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u) = v_{\max} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u) = -v_{\max}.$$

Es stellt sich nun die Frage, wie ein Operator mit diesen Eigenschaften definiert werden kann. In diesem Zusammenhang wird die Sättigungsfunktion

$$\text{sat}_{[u_{\min} \ u_{\max}]}(u) = \begin{cases} u_{\min}, & \text{wenn } u < u_{\min}, \\ u, & \text{wenn } u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \\ u_{\max}, & \text{wenn } u > u_{\max} \end{cases}$$

verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit werden zumeist symmetrische Stellbegrenzungen betrachtet. In diesen Fällen wird zur Verkürzung der Schreibweise $\text{sat}_{u_{\max}}(u) := \text{sat}_{[-u_{\max} \ u_{\max}]}(u)$ verwendet.

Unter Verwendung der Sättigungsfunktion kann nun die Differentialgleichung

$$\dot{u}_{a,\tau} = \text{sat}_{v_{\max}}(-\tau u_{a,\tau} + \tau \text{sat}_{u_{\max}}(u)), \quad (2.2)$$

mit $u_{a,\tau}(0) = \text{sat}_{u_{\max}}(u(0))$ und $\tau > 0$ aufgestellt werden. Mit Hilfe des folgenden Lemmas lässt sich zeigen, dass die Differentialgleichung (2.2) eine eindeutige Lösung für jedes Eingangssignal u besitzt und der Operator

$$\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} u_{a,\tau}, \quad (2.3)$$

die oben genannten Eigenschaften aufweist. Dabei ergibt sich $u_{a,\tau}$ aus der Differentialgleichung (2.2).

Lemma 2.1. (*[130]*) *Für jede stückweise stetige Funktion u existiert der Grenzwert aus (2.3) im L_∞ -Raum und der Grenzwert $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ hat eine L_∞ -Norm, welche kleiner als u_{\max} ist. Des Weiteren ist $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten v_{\max} .*

Beweis. Der Beweis wird in [130] in knapper Form angegeben. Aufgrund der Bedeutung des Operators $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ und der Differentialgleichung (2.2) für diese Arbeit, wird er an dieser Stelle in einer ausführlicheren Form angegeben.

Zunächst soll gezeigt werden, dass der Grenzwert (2.3) existiert. Dies ist der Fall, falls $u_{a,\tau}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu wird $\tau_1, \tau_2 > \tau_* > 0$ angesetzt und von $u_{a,\tau_1}(0) = u_{a,\tau_2}(0) = \text{sat}_{u_{\max}}(u(0))$ ausgegangen. Ist $u_{a,\tau}$ eine Cauchy-Folge, so muss

$$\|u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2}\|_{\infty} \leq L_{\infty} < \infty$$

gelten (siehe hierzu auch Anhang A.1). Nun wird gezeigt, dass $L_{\infty} = 2v_{\max}/\tau_*$ gilt. Der Beweis erfolgt durch Widerspruch. Angenommen es sei

$$u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2} > 2\frac{v_{\max}}{\tau_*}.$$

Es sind 4 Fälle zu untersuchen:

- $u_{a,\tau_1} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$,
- $u_{a,\tau_1} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$,
- $u_{a,\tau_1} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$,
- $u_{a,\tau_1} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$.

Die Bedingungen $u_{a,\tau_1} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$ sind nicht gleichzeitig erfüllbar, da andernfalls

$$u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) + \frac{v_{\max}}{\tau_*} - \left(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - \frac{v_{\max}}{\tau_*} \right) = 2\frac{v_{\max}}{\tau_*}$$

gelten würde, was im Widerspruch zur oberen Annahme steht. Daher müssen nur die folgenden beiden Fälle betrachtet werden:

- $u_{a,\tau_1} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$,
- $u_{a,\tau_1} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ und $u_{a,\tau_2} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$.

Zunächst wird der erste Fall betrachtet. Aus $u_{a,\tau_1} > \text{sat}_{u_{\max}}(u) + v_{\max}/\tau_*$ folgt $\tau_*(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - u_{a,\tau_1}) < -v_{\max}$ und wegen $\tau_1 > \tau_* > 0$ somit $\tau_1(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - u_{a,\tau_1}) < -v_{\max}$. Damit ist

$$\dot{u}_{a,\tau_1} = \text{sat}_{v_{\max}}(\tau_1(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - u_{a,\tau_1})) = -v_{\max}.$$

Aufgrund der Sättigungsfunktion für die Stellrate ist $\dot{u}_{a,\tau_2} \geq -v_{\max}$, weshalb also im ersten Fall $\dot{u}_{a,\tau_1} - \dot{u}_{a,\tau_2} \leq 0$ gilt.

Nun wird der zweite Fall untersucht. Aus $u_{a,\tau_2} < \text{sat}_{u_{\max}}(u) - v_{\max}/\tau_*$ folgt $\tau_*(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - u_{a,\tau_2}) > v_{\max}$ und wegen $\tau_2 > \tau_*$ somit $\tau_2(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - u_{a,\tau_2}) > v_{\max}$ und damit

$$\dot{u}_{a,\tau_2} = \text{sat}_{v_{\max}}(\tau_2(\text{sat}_{u_{\max}}(u) - u_{a,\tau_2})) = v_{\max}.$$

Da außerdem $\dot{u}_{a,\tau_1} \leq v_{\max}$ gilt, ergibt sich auch in diesem Fall $\dot{u}_{a,\tau_1} - \dot{u}_{a,\tau_2} \leq 0$.

Also gilt in allen Fällen, in denen $u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2} > 2v_{\max}/\tau_*$ ist, $\dot{u}_{a,\tau_1} - \dot{u}_{a,\tau_2} \leq 0$. Demnach kann die Differenz $u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2}$ nicht über $2v_{\max}/\tau_*$ hinaus anwachsen, d.h., es gilt $u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2} \leq 2v_{\max}/\tau_*$. In analoger Weise lässt sich zeigen, dass $\dot{u}_{a,\tau_1} - \dot{u}_{a,\tau_2} \geq 0$ immer gilt, falls $u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2} < -2v_{\max}/\tau_*$ ist. In Folge dessen muss $u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2} \geq -2v_{\max}/\tau_*$ gelten. Da also offensichtlich $\|u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2}\|_{\infty} \leq 2v_{\max}/\tau_*$ gilt, ist $u_{a,\tau}$ eine Cauchy-Folge.

Außerdem impliziert $u_{a,\tau} \geq u_{\max}$ wegen (2.2) $\dot{u}_{a,\tau} \leq 0$ und $u_{a,\tau} \leq -u_{\max}$ impliziert $\dot{u}_{a,\tau} \geq 0$. Aufgrund von $u_{a,\tau}(0) = \text{sat}_{u_{\max}}(u(0)) \leq u_{\max}$ gilt also

$$\|u_{a,\infty}\| = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|u_{a,\tau}\| \leq u_{\max}.$$

Des Weiteren ist $\|u_{a,\tau}(t_2) - u_{a,\tau}(t_1)\| \leq v_{\max}\|t_2 - t_1\|$ für alle $t_1, t_2 > 0$. Für $\tau \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\|u_{a,\infty}(t_2) - u_{a,\infty}(t_1)\| \leq v_{\max}\|t_2 - t_1\|$$

für alle $t_1, t_2 > 0$ und daher ist $u_{a,\infty}$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten v_{\max} . \square

Neben der Modellierung einer simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung mit dem Operator $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ und Gleichung (2.3) existieren in der Literatur noch weitere Ansätze. So wird beispielsweise in [9] ein Aktormodell verwendet, welches durch

$$\dot{u}_a = v_{\max} \text{sgn}(-u_a + \text{sat}_{u_{\max}}(u)) \quad (2.4)$$

mit $u_a(0) = \text{sat}_{u_{\max}}(u(0))$ beschrieben wird. In [113] wird jedoch gezeigt, dass dieses Modell nicht die erforderlichen Eigenschaften aufweist. Wenn nämlich u bzw. u_a die Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung nicht verletzt, gilt bei Verwendung der Differentialgleichung (2.4) offenbar $\dot{u}_a = 0$, was

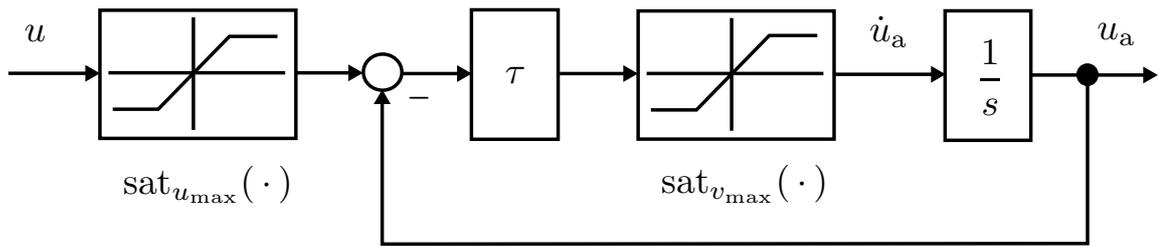


Abbildung 2.1: Aktor mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung

sich aber im Allgemeinen als nicht sinnvoll herausstellt. Weitere Ansätze zur Modellierung von Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen speziell zur Anwendung bei diskreten Systemen werden in [113] diskutiert.

Im Rahmen der Arbeit wird die am weitesten verbreitete Modellierung nach [130] verwendet. Der Operator $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ wird im Folgenden auch als idealer Stellgrößen- und Stellratenbegrenzer bezeichnet. Zur Durchführung von Reglerentwürfen wird die Differentialgleichung (2.2) mit $\tau < \infty$ verwendet. Diese kann als ein Modell für einen Aktor aufgefasst werden und wird im Verlauf der Arbeit auch als *Aktormodell* bezeichnet. Abbildung 2.1 zeigt ein Blockschaltbild der Differentialgleichung.

Die Wahl endlicher Werte für τ hat eine zusätzliche Verlangsamung zur Folge, die in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Gezeigt sind die Verläufe der wirksamen Stellgröße u_a für verschiedene Werte des Parameters τ und den kommandierten Verlauf der Stellgröße u . Dabei fällt auf, dass die Wahl von $\tau = 1$ im Aktormodell (2.2) im Vergleich zu einem idealen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzer $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ die Dynamik deutlich verlangsamt. Es zeigt sich ebenfalls, dass die verfügbare Stellrate nicht ausgeschöpft wird. Dagegen approximiert das Aktormodell (2.2) mit $\tau = 5$ den idealen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzer bereits sehr gut. Wird der Parameter τ entsprechend groß gewählt, ist die von ihm eingebrachte Verlangsamung der Gesamtdynamik äußerst gering. Einen Anhaltspunkt für die konkrete Wahl von τ in Relation zu den Stellbegrenzungen liefern die Überlegungen in Abschnitt 2.4.

Im Falle eines Eingangsvektors \mathbf{u}_a bzw. \mathbf{u} kann der Operator $\sigma_{\mathbf{u}_{\max}, \mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{u})$ bzw. die Differentialgleichung (2.2) elementweise angewendet werden. Dann ergibt sich unmittelbar das Aktormodell

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \text{sat}_{\mathbf{v}}(\mathbf{T}(\text{sat}_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_a)), \quad \mathbf{u}_a(0) = \text{sat}_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}(0)), \quad (2.5)$$

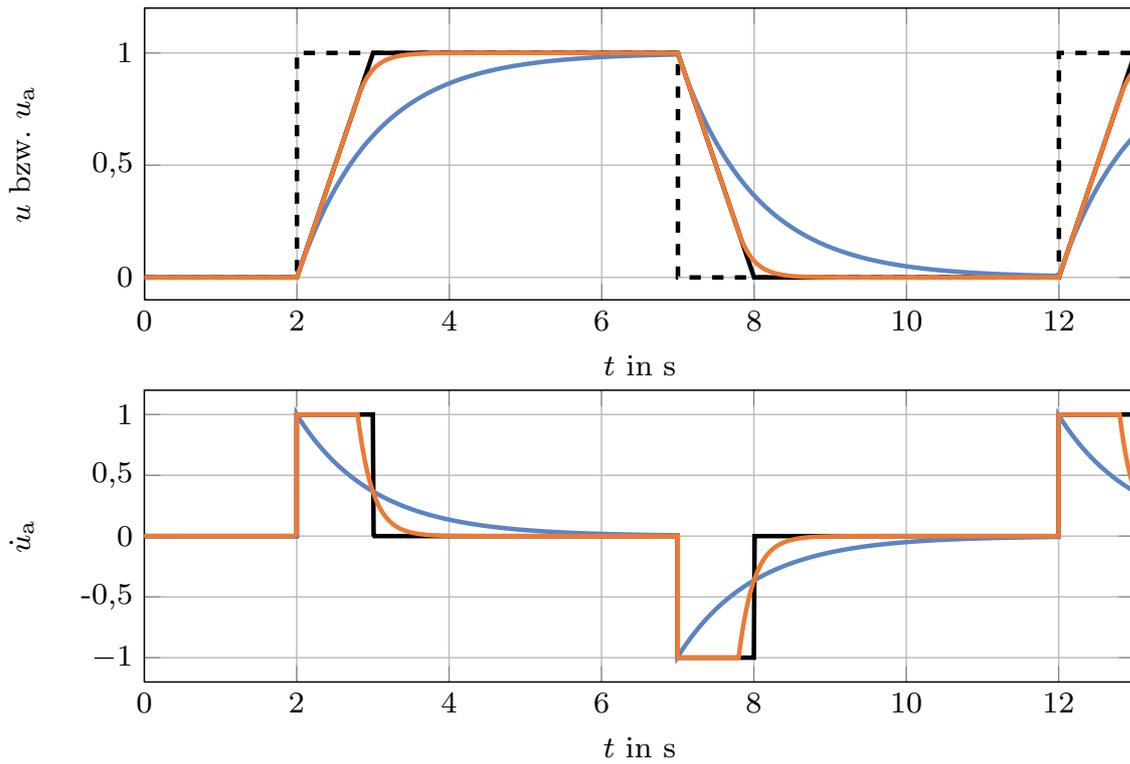


Abbildung 2.2: Einfluss des Parameters τ auf die Dynamik des Aktormodells mit $u_{\max} = -u_{\min} = 1$ und $v_{\max} = -v_{\min} = 1$: Verlauf der wirksamen Stellgröße u_a als Reaktion auf den kommandierten Stellgrößenverlauf u — — bei Verwendung des idealen Aktormodells $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ —, eines Aktormodells mit $\tau = 1$ — und eines Aktormodells mit $\tau = 5$ — (oben). Darunter sind die zugehörigen Verläufe der Stellrate \dot{u}_a dargestellt.

mit $\mathbf{T} = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_m)$ und der m -dimensionalen Sättigungsfunktion

$$\text{sat}_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \begin{cases} \text{sat}_{[u_{\min,1} \ u_{\max,1}]}(u_1), \\ \vdots \\ \text{sat}_{[u_{\min,m} \ u_{\max,m}]}(u_m). \end{cases}$$

mit $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_{\min} \ \mathbf{u}_{\max}]$, $\mathbf{u}_{\min} = [u_{\min,1} \ \dots \ u_{\min,m}]^T$, $\mathbf{u}_{\max} = [u_{\max,1} \ \dots \ u_{\max,m}]^T$. Auch hier wird im Falle symmetrischer Begrenzungen zur Vereinfachung der Schreibweise $\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}) = \text{sat}_{[-\mathbf{u}_{\max} \ \mathbf{u}_{\max}]}(\mathbf{u})$ verwendet. Der Aktorausgang \mathbf{u}_a ist dann die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{T}(\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_a)), \quad \mathbf{u}_a(0) = \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}(0)). \quad (2.6)$$

Zur Analyse und zum Entwurf von Regelkreisen für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen wird das System (2.1) um den Zu-

stand \mathbf{u}_a des Aktors erweitert. Mit

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \quad \mathbf{u}_a^T]^T$$

ergibt sich das erweiterte System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{v_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{u_{\max}} (\mathbf{u})) \quad (2.7)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = [\mathbf{0} \quad -\mathbf{T}]. \quad (2.8)$$

Für die in dieser Arbeit vorgestellten Reglerentwürfe wird vorausgesetzt, dass der Ausgang des Aktormodells (2.2) bekannt ist. Wird das Aktormodell als Teil des Regelalgorithmus angesehen, ist diese Voraussetzung immer erfüllt. Im Verlauf dieser Arbeit wird die Ausgangsgröße \mathbf{u}_a des Aktormodells als die *wirksame Stellgröße* bezeichnet.

2.3 Alternative Modellierung

Die Modellierung der simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen in Abschnitt 2.2 führt schließlich auf das System (2.7). Darin taucht eine geschachtelte Sättigungsfunktion auf, welche im Reglerentwurf berücksichtigt werden muss.

Um Komplikationen durch die zusätzliche Sättigungsfunktion zu vermeiden, kann alternativ ein Aktormodell aus [58] verwendet werden, bei welchem durch entsprechende Auslegung eines im Regler integrierten PT-1 Gliedes sichergestellt wird, dass die Stellratenbegrenzung niemals verletzt wird. Da eine Sättigung der Stellrate ausgeschlossen ist, ist diese Vorgehensweise jedoch konservativ. Abbildung 2.3 zeigt das entsprechende Modell, welches elementweise auf den Eingangsgrößenvektor angewendet werden kann und durch die Differentialgleichung

$$\dot{u}_{a,i} = \frac{1}{T_{v,i}} (-u_{a,i} + \operatorname{sat}_{u_{\max,i}}(u_i)), \quad u_{a,i}(0) = \operatorname{sat}_{u_{\max,i}}(u_i(0)) \quad (2.9)$$

beschrieben wird. Die Zeitkonstanten $T_{v,i}$ werden so gewählt, dass die Stellratenbegrenzung $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ in jedem Fall eingehalten wird. Aufgrund der Sättigungsfunktion in (2.9) gilt $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ und somit ist

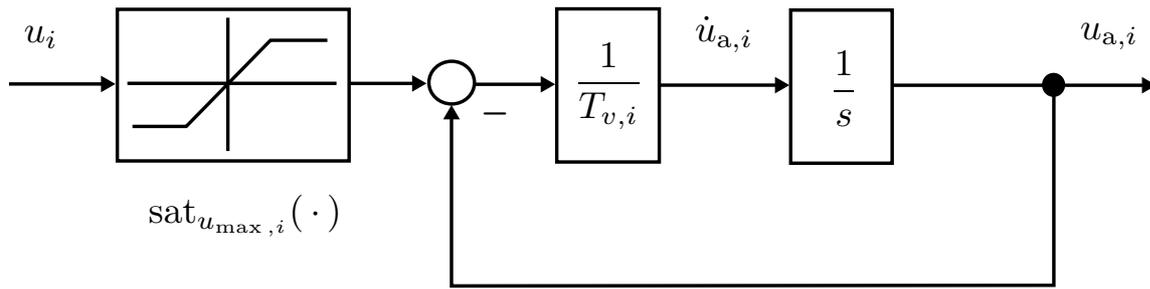


Abbildung 2.3: Ersatzmodell für einen Aktor mit Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung

die maximale Differenz $\max |u_i - u_{a,i}| = 2u_{\max,i}$. Aus der Forderung $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ leitet sich dann die Bedingung

$$T_{v,i} \geq \frac{2u_{\max,i}}{v_{\max,i}} \quad (2.10)$$

her [58]. Demnach darf die Zeitkonstante des Ersatzmodells den Wert

$$T_{v,i} = \frac{2u_{\max,i}}{v_{\max,i}}$$

nicht unterschreiten. Auch hier kann zum Reglerentwurf eine um den Aktorzustand \mathbf{u}_a erweiterte Systemdarstellung angegeben werden. Sie lautet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})$$

mit $\mathbf{T}_v = \text{diag}\left(\frac{1}{T_{v,1}}, \dots, \frac{1}{T_{v,m}}\right)$ und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_v \end{bmatrix}.$$

Im Gegensatz zum System (2.7) tritt hier nur eine Sättigungsfunktion für die Stellgröße auf. Durch dieses Modell wird es demnach möglich, die bestehenden Verfahren zum Entwurf von Regelungen für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung einzusetzen. Dieser Vorteil wird jedoch durch eine deutliche Konservativität erkauft. Aufgrund von Bedingung (2.10) wird die Zeitkonstante des Ersatzmodells auf einen minimalen Wert begrenzt und verlangsamt so den Ausregelvorgang. Anhand von Ungleichung (2.10) wird deutlich, dass dies eine umso größere Rolle spielt, je kleiner das Verhältnis von $v_{\max,i}$ zu $u_{\max,i}$ ist.

2.4 Vergleich der Aktormodelle

In diesem Abschnitt werden die beiden Aktormodelle (2.2) und (2.9) miteinander verglichen. Bei Betrachtung der beiden Modelle fällt auf, dass sich aus der Differentialgleichung (2.2) das Modell (2.9) für den Spezialfall

$$\tau \leq \frac{v_{\max}}{2u_{\max}}$$

ergibt. Erfüllt der Parameter τ diese Ungleichung, tritt keine Sättigung der Stellrate auf und die entsprechende Sättigungsfunktion in Gl. (2.2) wird nicht aktiv. Entsprechend muss diese bei den nachfolgenden Stabilitätsbetrachtungen und im Reglerentwurf nicht berücksichtigt werden. Die Einschränkung hinsichtlich τ bzw. T_v führt jedoch zu einer deutlich schlechteren Dynamik des Modells (2.9) gegenüber dem Modell nach Gl. (2.2). Dies unterstreicht Abbildung 2.4.

Darin sind die Verläufe der wirksamen Stellgröße u_a und der Stellrate \dot{u}_a für beide Modelle dargestellt. Während bei Verwendung des Aktormodells (2.2) mit $\tau = 5$ eine Sättigung der Stellrate auftritt, wird bei Verwendung des Modells (2.9) die Stellrate nur schlecht ausgenutzt. Dies führt zu einer deutlich langsameren Reaktion der wirksamen Stellgröße u_a auf den kommandierten Verlauf u .

Es lässt sich also festhalten, dass bei Verwendung des Modells (2.9) die Kapazität des realen Aktors nicht ausgeschöpft wird. Gleichzeitig liefert der Vergleich einen Anhaltspunkt für die Wahl des Parameters τ bei Verwendung des Aktormodells (2.2). Damit die volle Kapazität des Aktors ausgenutzt werden kann, sollte

$$\tau \gg \frac{v_{\max}}{2u_{\max}}$$

gewählt werden.

2.5 Regelungen für Systeme mit Stellgrößenbegrenzungen

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, erlaubt die Verwendung des Ersatzmodells (2.9) die Anwendung von Verfahren für Strecken unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung, zumindest in den Fällen, in denen die Stellratenbegrenzung nicht zu restriktiv ist. Im Folgenden wird daher auf verschiedene Ansätze zur Regelung von Systemen mit Stellgrößenbegrenzungen eingegangen. Im Rahmen dieser Arbeit werden einige

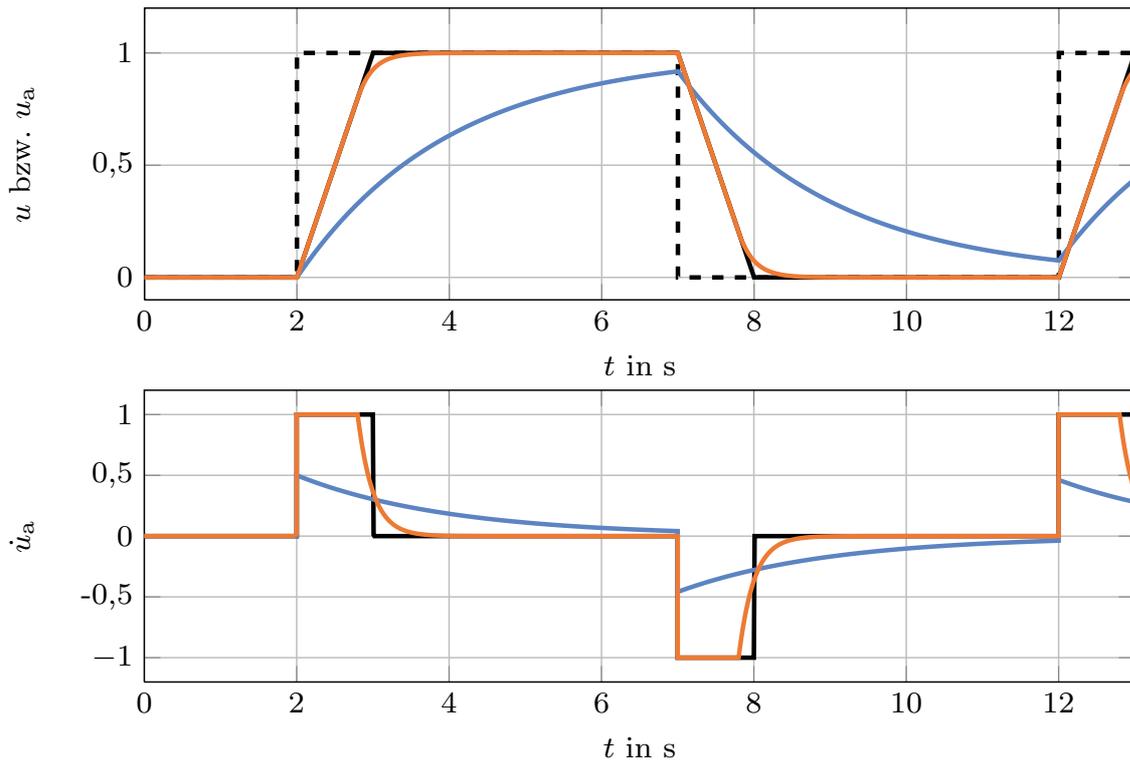


Abbildung 2.4: Vergleich der Aktormodelle (2.2) mit $\tau = 5$ — orange — und (2.9) — blau — mit $u_{\max} = -u_{\min} = 1$ und $v_{\max} = -v_{\min} = 1$ für einen kommandierten Stellgrößenverlauf u - - : Dargestellt sind die wirksame Stellgröße u_a (oben) und die Stellrate \dot{u}_a (unten). Die Verläufe von u_a und \dot{u}_a für den idealen Aktor $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ — schwarz — sind ebenfalls dargestellt.

der an dieser Stelle vorgestellten Verfahren auf Systeme unter geschachtelter Sättigung erweitert, so dass die Verwendung des Modells (2.2) möglich wird, was insbesondere im Falle restriktiver Stellratenbegrenzungen von Vorteil ist. Einige Verfahren erlauben bereits die Sättigung der Stellrate. Darauf wird an den entsprechenden Stellen explizit hingewiesen.

2.5.1 Anti-Windup-Verfahren

Dieser Abschnitt soll einen groben Überblick über Anti-Windup-Verfahren bieten und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Detailliertere Erläuterungen zu den verschiedenen Verfahren und deren Entwicklung finden sich in [135].

Beim Entwurf von Regelungen mit Anti-Windup wird zunächst ein Regler ohne Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung derart entworfen, dass bestimmte Performancemerkmale für das unbeschränkte Sys-

tem eingehalten werden. Anschließend wird die eigentliche Anti-Windup-Struktur in den Regelkreis integriert. Diese wird so entworfen, dass im Fall nichtsättigender Stellgrößen die Performancemerkmale erhalten bleiben und bei auftretender Sättigung diese möglichst gut approximiert werden können [135].

Ausgehend von ad-hoc Verfahren, die ohne oder mit wenig theoretischem Hintergrund entwickelt wurden, über erste akademische Studien in der Mitte des 20. Jahrhunderts (siehe beispielsweise [88]) haben sich heute moderne Anti-Windup-Verfahren etabliert. Letztere ermöglichen Stabilitäts- und Performancegarantien und können nicht zuletzt durch den Einsatz LMI-basierter Verfahren auf systematische Weise entworfen werden [48], [102], [103], [121]. Dabei haben sich zwei Richtungen etabliert: globale und lokale Ansätze. Der globale Ansatz geht von stabilen Regelstrecken aus. Zielsetzung beim Entwurf des Anti-Windup-Netzwerkes ist die Sicherstellung der globalen Stabilität des geschlossenen Kreises. Im Allgemeinen werden dazu globale Performance-Kriterien optimiert, siehe beispielsweise [48], [143]. Neuere Ansätze wie [102] erlauben auch eine lokale Performance-Optimierung bei gleichzeitiger Garantie der globalen Stabilität. Während die globalen Ansätze nur auf stabile Systeme anwendbar sind, sind lokale Ansätze auch zur Regelung instabiler Systeme geeignet. Hier ist die Stabilität des geschlossenen Kreises jedoch nicht mehr global, sondern nur lokal innerhalb eines bestimmten Betriebsbereichs sichergestellt. Zum Entwurf des Anti-Windup-Netzwerkes wird dann entweder die Größe dieses garantierten Einzugsgebietes [121] oder ein lokales Performance-Kriterium, wie beispielsweise die L_2 -Verstärkung optimiert [103].

Mit den zuvor genannten Ansätzen ist lediglich die Berücksichtigung der Beschränkung der Stellgröße möglich. Liegt eine zusätzliche Stellratenbegrenzung vor, so kann diese unter Verwendung des in Abschnitt 2.3 vorgestellten einfachen Aktormodells berücksichtigt werden. Durch diese Vorgehensweise wird jedoch die Dynamik des geschlossenen Kreises, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, verlangsamt. Unter Verwendung des weniger konservativen Aktormodells aus Abschnitt 2.2 wird für stabile Regelstrecken in [146] ein erweitertes Anti-Windup-Netzwerk vorgestellt. Zur lokalen Stabilisierung ist das Verfahren [141] geeignet.

2.5.2 Modellprädiktive Regelung

Die modellprädiktive Regelung (Engl.: Model Predictive Control, MPC) ist ein in der praktischen Anwendung häufig eingesetztes Regelungsverfahren. Wichtigster Bestandteil einer modellprädiktiven Regelung ist ein Modell der Strecke. Dieses Modell wird dazu verwendet, mit Hilfe des aktuellen Zustands Vorhersagen über zukünftige Streckenzustände in Abhängigkeit vom Systemeingang für einen bestimmten Zeithorizont zu treffen und auf dieser Grundlage eine optimale Steuerfolge zu berechnen. Üblicherweise wird zunächst das Streckenmodell diskretisiert, wodurch die Optimierung der Steuerfolge und die Implementierung auf einem Digitalrechner erleichtert werden. Anschließend wird das diskretisierte Streckenmodell dazu genutzt, um online, d.h. während des Betriebs der Regelung, in jedem Abtastschritt k eine optimale Stellgrößenfolge $\mathbf{u}(k+1), \mathbf{u}(k+2), \dots, \mathbf{u}(k+N)$ über einen endlichen Vorhersagehorizont N zu berechnen. In der Regel wird für diese Optimierung ein quadratisches Gütemaß minimiert. Von der auf diese Weise berechneten Stellgrößenfolge werden jedoch nur die Werte $\mathbf{u}(k+1)$ für den unmittelbar folgenden Abtastschritt als Stellsignal verwendet. Im nächsten Rechenschritt wird das Optimierungsproblem erneut gelöst, wobei wiederum nur die ersten Werte der errechneten Stellgrößenfolge verwendet werden.

In der Online-Optimierung können Begrenzungen der Stellgröße, der Stellrate sowie der Zustände berücksichtigt werden und bei Verwendung eines quadratischen Gütemaßes ergibt sich ein konvexes Optimierungsproblem, welches effizient gelöst werden kann [27]. Aufgrund der Konvexität gilt in diesem Fall, dass jedes lokale Optimum auch gleichzeitig global optimal ist. Einen guten Überblick über die modellprädiktive Regelung und die Berücksichtigung von Stellbegrenzungen liefern die Übersichtsartikel [83], [92] sowie [109]. In dem Buch [91] wird außerdem auf spezifische Aspekte aus dem praktischen Einsatz der modellprädiktiven Regelung eingegangen und es werden zahlreiche Anwendungen vorgestellt.

Nachteilig an dieser ursprünglichen Form der modellprädiktiven Regelung ist jedoch die Notwendigkeit, ein Optimierungsproblem online lösen zu müssen. Daher beschränkt sich der Einsatz des Verfahrens bislang auf die Regelung relativ langsam ablaufender Prozesse. In den letzten Jahren wurden jedoch Ansätze entwickelt, das Optimierungsproblem vorab offline zu lösen und den Zustandsraum in konvexe Gebiete aufzuteilen, wobei jedem Gebiet ein affines Regelgesetz zugeordnet werden kann. Im Verlauf des Ausregelvorgangs muss dann lediglich bestimmt werden, in welchem Gebiet sich der aktuelle Zustand befindet, um dann das entspre-

chende Regelgesetz anwenden und so das Stellsignal berechnen zu können. Auch bei diesem Verfahren können Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen berücksichtigt werden. Diese sogenannte explizite modellprädiktive Regelung wurde in [14] vorgestellt. Es ergeben sich jedoch bereits für Systeme niedriger Ordnung sehr komplexe Gebietsaufteilungen mit vielen Gebieten [83], [142]. Dies erschwert im Betrieb der Regelung die Aufgabe, das zum jeweiligen Systemzustand gehörige Gebiet zu ermitteln. Neue Ansätze nutzen Hashtabellen [11] bzw. Baumstrukturen [95], um diese Aufgabe effizient lösen zu können. Als Alternative zur expliziten modellprädiktiven Regelung werden auch Ansätze verfolgt, den Aufwand für die Online-Optimierung zu reduzieren. So wird beispielsweise in [142] die spezielle Struktur des Optimierungsproblems ausgenutzt. Außerdem wird die Optimierung abgebrochen, bevor das Optimum erreicht ist. Dies reduziert zwar deutlich den Online-Rechenaufwand, jedoch existiert bislang für diesen Fall kein Stabilitätsnachweis [142].

2.5.3 Lineare Sättigungsregler

Als lineare Sättigungsregler werden lineare Zustandsrückführungen bezeichnet, die bewusst so entworfen werden, dass eine sättigende Stellgröße auftreten kann. Im Gegensatz zu Anti-Windup-Verfahren wird hier jedoch die Sättigung nicht als ein negativer Effekt betrachtet, der im Nachhinein kompensiert werden muss. Vielmehr wird der Sättigungsbereich bewusst genutzt, um möglichst große Einzugsgebiete garantieren oder den Ausregelvorgang beschleunigen zu können. Dazu wird die Stellgrößenbegrenzung bereits im Reglerentwurf berücksichtigt.

Es lassen sich zwei Forschungsrichtungen feststellen: Die (semi-)globale Stabilisierung und die lokale Stabilisierung. Bei der (semi-)globalen Stabilisierung erfolgt der Reglerentwurf im Hinblick auf die globale Stabilität einer Ruhelage, die Performance der Regelung spielt dabei jedoch eine untergeordnete Rolle. Ein wichtiges Ergebnis zur (semi-)globalen Stabilisierung findet sich in [117], [127]. Demnach kann ein lineares System unter Stellgrößenbegrenzungen global asymptotisch stabilisiert werden, falls alle Pole des unbeschränkten Systems in der geschlossenen linken s -Halbebene liegen. Dies gilt in gleicher Weise, wenn das System zusätzlich Stellratenbegrenzungen unterworfen ist [113]. Der in [112] vorgestellte Ansatz erlaubt ein verbessertes Ausregelverhalten, indem ein sogenannter Low-gain Regler mit einem High-gain Regler kombiniert wird. Dabei dient der Low-gain Regler der Stabilisierung und geht nicht in Sättigung. Der High-gain Regler stellt dann die Performance sicher und arbeitet auch im Sättigungsbereich.

Zusätzliche Stellratenbegrenzungen werden in [113] berücksichtigt.

Dennoch ist der Aspekt der (semi-)globalen Stabilisierung unter praktischen Gesichtspunkten von untergeordnetem Interesse. Aufgrund der Tatsache, dass eine lineare Systemdarstellung in der Regel aus der Linearisierung eines nichtlinearen Systems um einen Arbeitspunkt hervorgeht, gilt die lineare Systembeschreibung nur in einem Teil des Zustandsraumes. Zumeist hat ein reales System auch bestimmte Betriebsgrenzen, die nicht überschritten werden dürfen. Aus diesen Gründen ist die Performance des Reglers oftmals von größerem Interesse als ein großes garantiertes Einzugsgebiet. Dies setzt selbstverständlich voraus, dass alle relevanten Betriebszustände im garantierten Einzugsgebiet liegen. Des Weiteren werden Regelungen auch eingesetzt, um instabile Systeme zu stabilisieren. Dies ist mit dem Ansatz der (semi-)globalen Stabilisierung nicht möglich. Methoden zur lokalen Stabilisierung erlauben dagegen neben einer deutlich verbesserten Performance auch den Reglerentwurf für instabile Systeme.

Bei der lokalen Stabilisierung wird zumeist die direkte Methode von Ljapunov verwendet, um garantierte Einzugsgebiete zu ermitteln. Erste Arbeiten auf dem Gebiet sind in [52] zu finden. Darin werden ebenfalls ein Low-gain und High-gain Regler kombiniert. Die Struktur des High-gain Reglers ist jedoch sehr eingeschränkt, weshalb das Verfahren relativ konservativ ist.

In den letzten Jahren haben sich effiziente Entwurfsverfahren mit Hilfe linearer Matrixungleichungen (Engl.: Linear Matrix Inequalities, LMI) etabliert. Arbeiten hierzu finden sich in [60], [63] und [123]. Die Ansätze aus [60], [63] stellen den sättigenden Zustandsregler als konvexe Hülle, bestehend aus dem unbeschränkten Regler und einem virtuellen, nicht-sättigenden Hilfsregler, dar. Im Gegensatz zu [123], wo ein bilineares Optimierungsproblem iterativ gelöst werden muss, ergibt sich auf diese Weise unmittelbar ein konvexes Optimierungsproblem. Die Stabilitätsbedingungen aus [60], [63] bilden im Falle einer einzigen Eingangsgröße tatsächlich die Sättigungsfunktion exakt ab, für Mehrgrößensysteme werden jedoch in [6] weniger konservative Stabilitätsbedingungen hergeleitet. Dies geschieht zum Preis einer deutlichen Zunahme an Optimierungsvariablen, was in der praktischen Implementierung und beim Einsatz gängiger numerischer Optimierungsmethoden, insbesondere bei Systemen höherer Ordnung, zu Problemen führt.

Aus beiden zuvor genannten Ansätzen wurden auch Methoden zur Behandlung geschachtelter Sättigungen abgeleitet [10], [122], [150], welche die Berücksichtigung zusätzlicher Stellratenbegrenzungen erlauben. Der Ansatz aus [122] ist eine Verallgemeinerung von [123] und erfordert eben-

falls eine iterative Lösung des sich ergebenden bilinearen Optimierungsproblems. Dagegen ergeben sich aus [10], [150] konvexe Optimierungsprobleme, die ohne Iteration auskommen. Die in [10] vorgestellte Methodik ist dabei eine Erweiterung des in [60], [63] beschriebenen Verfahrens, während [150] eine Erweiterung der Methodik aus [6] ist. Beide Ansätze liefern im Falle von Systemen mit einer einzigen Eingangsgröße dieselben Stabilitätsbedingungen. Bei Mehrgrößensystemen ist der Ansatz [150] weniger konservativ, erfordert jedoch mehr Optimierungsvariablen, was die praktische Anwendbarkeit einschränkt. Einen aktuellen, umfassenden Überblick über die existierenden Verfahren liefert auch das Buch [133]. Als zentraler Ansatz für diese Arbeit wird die in [10] vorgestellte Methodik dienen. Diese wird in Kapitel 3 auch auf nichtlineare Systeme erweitert und beim Entwurf nichtlinearer Regler Anwendung finden.

2.5.4 Strukturvariable Regelungen

Strukturvariable Regelungen verfolgen prinzipiell die gleiche Zielsetzung wie die im vorigen Abschnitt vorgestellten linearen Sättigungsregler. Während bei den linearen Sättigungsreglern zur lokalen Stabilisierung der Sättigungsbereich der Stellgröße genutzt wird, um so durch eine gute Ausnutzung des Stellbereichs eine gute Performance des geschlossenen Regelkreises zu erzielen, nutzen strukturvariable Regelungen eine zustandsabhängige Reglerverstärkung und damit eine nichtlineare Zustandsrückführung.

Die ersten Arbeiten zur Anwendung strukturvariabler Regler zur Regelung von Systemen mit Stellgrößenbegrenzungen finden sich in [77] und [78]. Hier wird zustandsabhängig zwischen einer endlichen Anzahl von Zustandsreglern so umgeschaltet, dass der Stellbereich unter Vermeidung einer Sättigung des Stellsignals besser genutzt wird. Dazu wird jedem Regler ein Ljapunov-Gebiet zugeordnet und sichergestellt, dass diese Gebiete ineinander geschachtelt sind.

Ein ähnlicher Ansatz wurde danach auch in [144] unter dem Namen piecewise-linear LQ control (PLC) vorgestellt. Dabei erfolgt die Wahl der einzelnen Teilregler und der zugehörigen Gebiete durch das Lösen von Riccati-Gleichungen. Weitere Verfahren denen diese Idee zugrunde liegt, werden in [94], [118], [119] vorgestellt, wobei in den beiden Letztgenannten auch asymmetrische Begrenzungen und Stellratenbegrenzungen berücksichtigt werden. Die Ergebnisse sind jedoch sehr konservativ.

Die zuvor genannten Verfahren schalten zwischen einer endlichen Anzahl an Teilreglern um. Dadurch ist der Stellgrößenverlauf nicht stetig,

was im praktischen Einsatz zu einer sehr hohen Belastung des Stellgliedes führt. Die sogenannte weich strukturvariable Regelung (WSVR) weist diesen Nachteil nicht auf. Erste Arbeiten finden sich in [7], [37], [38], [78]. In der WSVR mit variabler Sättigung [7] werden zwei Zustandsrückführungen miteinander kombiniert. Die erste Zustandsrückführung wird so entworfen, dass die Stellgröße nicht sättigt, die zweite wiederum wird mittels einer variablen Sättigung so modifiziert, dass die Kombination beider Regelungen die Stellgrößenbegrenzung einhält. Im Gegensatz dazu wird in [37], [38] ein parameterabhängiges Regelgesetz verwendet. Dieser Parameter wird aus der Lösung einer Differentialgleichung bestimmt und ist daher stetig. Eine weitere Version weich strukturvariabler Regler wird in [1] vorgestellt. Auch hier wird ein parameterabhängiges Auswahlgesetz verwendet, jedoch ergibt sich dieser Parameter aus der Lösung einer impliziten Gleichung. Er dient dazu, die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises zustandsabhängig auf Ursprungsgeraden zu verschieben und so den Ausregelvorgang zu beschleunigen. Da dieser implizit definierte Parameter auch gleichzeitig eine Ljapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises ist, wird das Verfahren als weich strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen bezeichnet. Alle Ansätze weisen die gemeinsame Eigenschaft auf, dass die Stellgröße nicht sättigt. Eine Übersicht über die in diesem Absatz angesprochenen Regelungen liefert [4].

Für das in [1] vorgestellte Konzept wurden in der jüngeren Vergangenheit diverse Modifikationen vorgestellt. So wird in [34], [147] ein LMI basierter Entwurf angegeben, welcher einen effizienten Reglerentwurf erlaubt. In [49] wurde die Methodik auf eine bestimmte Klasse von MIMO-Systemen erweitert. Des Weiteren wird in [85], [86] eine sättigende Version der weich strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen für SISO-Systeme eingeführt, welche deutlich schnellere Ausregelvorgänge erlaubt. Durch eine Modifikation des Auswahlgesetzes gelingt es in [67], die Regelung auf eine größere Systemklasse zu erweitern, in [66] wird schließlich eine polynomiale weich strukturvariable Regelung vorgestellt, welche es erlaubt, die Eigenwerte nicht nur auf Ursprungsgraden, sondern auch auf anderen Bahnen in der komplexen Ebene zu verschieben. Neben der Tatsache, dass bislang nur Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung betrachtet wurden, existiert bislang keine Version der weich strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktion, die auf allgemeine MIMO-Systeme anwendbar ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Konzept aus [67] auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen und Systeme mit mehreren Eingangsgrößen erweitert. Im Vergleich zu der in [49] angegebenen Regelung erlaubt die in dieser Arbeit vorgestellte Version

aufgrund der modifizierten Selektionsstrategie aus [67] die Anwendbarkeit auf eine größere Systemklasse. Da sättigende Stellsignale erlaubt sind, ergibt sich außerdem eine deutlich verbesserte Performance des geschlossenen Regelkreises. Näheres hierzu findet sich in Kapitel 4.

Ein weiterer Ansatz sättigender weich strukturvariabler Regler ist der sogenannte α -Regler nach [24], [25]. Hier wird in jedem Zeitschritt eine Zustandsrückführung aus der Lösung einer parameterabhängigen Riccati-Gleichung gewonnen. Ein Nachteil des Verfahrens ist der relativ hohe Online-Rechenaufwand, der sich aus der Lösung der parameterabhängigen Riccati-Gleichung ergibt.

Auch der in der Arbeit von [77] bzw. [144] vorgestellte strukturvariable Regler wurde zu einer weich strukturvariablen Version modifiziert. Diese wird in [61] vorgestellt. Hier wird zwischen zwei linearen Zustandsrückführungen interpoliert, wozu in jedem Zeitschritt der Eigenwert einer Matrix bestimmt werden muss. Ein sehr ähnliches Verfahren, welches sich hinsichtlich der Selektionsstrategie von [61] unterscheidet, nutzt zur Interpolation N Zustandsrückführungen. Es wird in [39], [148] vorgestellt und zur Realisierung eines modellbasierten Anti-Windup Verfahrens verwendet.

2.5.5 Ausgangsrückführungen

Der Begriff Ausgangsrückführung bezeichnet Regelverfahren, deren Regelalgorithmus lediglich die Kenntnis der messbaren Ausgangsgrößen benötigt. Dies ist unter praktischen Gesichtspunkten ein wesentlicher Aspekt, da oftmals nicht alle Zustandsgrößen mit vertretbarem Aufwand messbar sind.

Die in den Abschnitten 2.5.3 und 2.5.4 vorgestellten Regelverfahren benötigen die Information des gesamten Zustandsvektors. Prinzipiell lassen sich die Verfahren auch zu Ausgangsrückführungen erweitern, indem ein Beobachter eingesetzt wird, um den Zustandsvektor zu schätzen. Für die weich strukturvariable Regelung zeigen [5] bzw. [84], dass die Verwendung eines Beobachters zwar möglich ist, sich jedoch Einschränkungen an das Verfahren ergeben, welche die praktische Nutzbarkeit in Frage stellen.

Ein Beobachter nutzt zur Schätzung des Zustandsvektors ein Modell der Strecke. Auf Basis dieses geschätzten Zustands berechnet der Regler dann das Stellsignal. Dieses Konzept lässt sich verallgemeinern, indem die Anforderung der Schätzung des Zustandsvektors aufgegeben wird. Es ergibt sich ein dynamischer Regler, dessen Dynamik jedoch nicht durch das Modell der Strecke beschrieben wird. Dies erlaubt zwar auf der einen Seite

mehr Entwurfsfreiheit, auf der anderen Seite sind aufwendigere Transformationen zur Herleitung konvexer Entwurfsbedingungen erforderlich.

Ausgangsrückführungen zur semiglobalen Stabilisierung werden beispielsweise in [112], [113], [120] vorgestellt. Wie auch die linearen Sättigungsregler weisen diese ebenfalls den Nachteil auf, dass sie sehr langsame Ausregelverläufe liefern. Ein anderer Ansatz, welcher ebenfalls nur zur Regelung stabiler linearer Systeme geeignet ist, findet sich in [101]. Darin wird eine maximale L_2 Verstärkung bezüglich Störgrößen garantiert, jedoch werden die Anfangsbedingungen der Strecke zu null angenommen. Zusätzliche Stellratenbegrenzungen können mit der in [113], [130] beschriebenen Methodik berücksichtigt werden.

Verfahren, die auch zur lokalen Stabilisierung geeignet sind und nicht voraussetzen, dass die Strecke stabil ist, werden in [54], [132] vorgestellt. In [132] werden dabei auch zusätzliche Stellratenbegrenzungen betrachtet. Zur Herleitung eines Stabilitätssatzes werden Bedingungen für die Stabilität linearer Sättigungsregler aus [123] verwendet. Die sich ergebenden Stabilitätsbedingungen haben die Form bilinearer Matrixungleichungen (BMI) und werden zu LMIs relaxiert. Dadurch sind die Verfahren jedoch konservativ. Eine sättigende Ausgangsrückführung, die leichter berechnet werden kann, liefert [145]. Diese Regelung ist jedoch parametervariant, was zu mehr Variablen im Entwurf und höherem Aufwand bei der Implementierung des Reglers führt.

Ein besonders interessanter Ansatz zur lokalen Stabilisierung wird in [84] vorgestellt. Hier können unter Anwendung einer Transformation aus [114] alle Entwurfsbedingungen als lineare Matrixungleichungen formuliert werden, wodurch ein effizienter Entwurf möglich wird. Unabhängig davon wird in [40] eine sehr ähnliche Methode vorgeschlagen, die ebenfalls unter Verwendung der Transformation aus [114] konvexe Entwurfsbedingungen liefert. Dabei ist die gewählte Struktur der Ausgangsrückführung identisch. Im Gegensatz zu [84] wird in [40] der Schwerpunkt aber auf die Unterdrückung energiebegrenzter Störungen gelegt. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Ansatz aus [84] aufgegriffen und auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen erweitert. Außerdem wird ein Entwurf zur Unterdrückung von Störungen vorgeschlagen, welche im Gegensatz zum Ansatz in [40] nicht energiebegrenzt sind.

2.5.6 Führungsregelungen

Die meisten in den vorigen Abschnitten vorgestellten Regelungen sind darauf zugeschnitten, eine bestimmte und während des Betriebs der Regelung konstante Ruhelage zu stabilisieren. Diese Ruhelage wird dann üblicherweise in den Koordinatenursprung transformiert, so dass die Regelungsaufgabe als Stabilisierung der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ aufgefasst werden kann. Diese Vorgehensweise liegt den Entwürfen der linearen Sättigungsregler, der strukturvariablen Regelungen sowie der Ausgangsrückführungen zugrunde.

Vielfach besteht die Aufgabe einer Regelung aber darin, das System in Abhängigkeit eines Referenzsignals von einem Arbeitspunkt in einen anderen zu überführen. Die Regelungsaufgabe wird jedoch deutlich komplizierter, wenn vorausgesetzt werden muss, dass sich die zu stabilisierende Ruhelage während des Betriebs der Regelung ändert. Ein weit verbreiteter Ansatz zur Lösung dieser Problemstellung ist, das System so zu transformieren, dass die gewünschte neue Ruhelage im Ursprung des transformierten Systems liegt. Solche Verfahren werden beispielsweise in [80], [82] und [134] beschrieben. Aus diesem Ansatz ergeben sich jedoch zwei wesentliche Nachteile:

- Im Falle zeitvarianter Referenzsignale und somit zeitvarianter neuer Ruhelagen geht das Referenzsignal in die Differentialgleichung des Systems ein, was zu einem deutlich komplizierteren Optimierungsproblem führt.
- Die erreichbaren neuen Ruhelagen sind vom Anfangszustand der Strecke abhängig.

Das erste Problem, welches aus dem Auftreten des Referenzsignals in der Differentialgleichung resultiert, kann abgemildert werden, indem ein sogenanntes Exosystem hinzugefügt wird. Es dient dazu, das gewünschte Referenzsignal zu modellieren. Neben sinusförmigen Referenzsignalen können auf diese Weise auch Rampen und konstante Referenzsignale verwendet werden. Solche Verfahren werden beispielsweise in [62], [93] und [130] vorgestellt. Der letztgenannte Nachteil, die Abhängigkeit der erreichbaren neuen Ruhelagen vom Anfangszustand, bleibt aber bestehen.

Im Laufe dieser Arbeit wird ein Führungsregler vorgestellt, welcher die zuvor genannten Nachteile vermeidet und ein schnelles Ausregelverhalten sicherstellt. Dabei werden die Stellbeschränkungen im Stabilitätsnachweis explizit berücksichtigt. Zunächst wird ein Regler für den Fall eines

vollständig messbaren Zustandsvektors hergeleitet. Anschließend wird eine Methode vorgestellt, welche die Regelung nur auf Basis der Ausgangsgrößen des Systems ermöglicht. Dabei wird auf die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur von Horowitz [59] zurückgegriffen. In dieser Struktur wird eine Vorsteuerung mit einer Regelung kombiniert. Zur Realisierung der Vorsteuerung werden im Rahmen dieser Arbeit sowohl ein modellbasierter als auch ein inversionsbasierter Ansatz verfolgt.

2.6 Konvexe Optimierung

Es wird sich zeigen, dass sich die Entwürfe der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Regelungen als konvexe Optimierungsprobleme formulieren lassen. Konvexe Optimierungsprobleme zeichnen sich dadurch aus, dass sowohl die Nebenbedingungen als auch die verwendeten Gütefunktionen konvex sind. Sie weisen eine Reihe wichtiger Eigenschaften auf. So ist jedes lokale Optimum auch ein global optimal und das Optimierungsproblem besitzt eine eindeutige Lösung. Diese Eigenschaften erlauben eine numerisch effiziente Lösung des Optimierungsproblems.

Die in dieser Arbeit hergeleiteten Entwurfsbedingungen werden als lineare Matrixungleichungen oder in Form von sogenannten Sum-of-squares-Polynomen (SOS-Polynome) dargestellt und sind somit konvex. Daher wird in diesem Abschnitt eine Einführung in die LMI und SOS-Methodik gegeben.

2.6.1 Lineare Matrixungleichungen

Lineare Matrixungleichungen (LMIs) eignen sich zur Darstellung von Nebenbedingungen in der Optimierung. Im Bereich der Regelungstechnik treten Nebenbedingungen sehr oft in dieser Form in Erscheinung oder können in eine solche Darstellung überführt werden. Einen Überblick hierüber bietet [139], für eine tiefgreifende Erläuterung sei auf [21] verwiesen. Im Folgenden werden die Definition einer LMI sowie die wichtigsten Eigenschaften und Sätze angegeben.

Die Definition einer linearen Matrixungleichung liefert

Definition 2.1. Gegeben seien symmetrische Matrizen $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $i = 0, 1, \dots, m$ und ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ bestehend aus den skalaren Variablen x_i . Die Ungleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i \succ 0 \quad (2.11)$$

wird als lineare Matrixungleichung bezeichnet, wobei die Notation $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$ bedeutet, dass die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ symmetrisch und positiv definit ist.

Lautet eine Bedingung, dass die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ positiv semidefinit sein muss, so wird dies durch die nicht strikte Ungleichung $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0$ ausgedrückt. Eine solche nicht strikte Ungleichung kann aber stets in eine äquivalente strikte LMI umgeformt werden [21].

Der Name lineare Matrixungleichung bezieht sich auf die Form von Ungleichung (2.11). Wird eine Ungleichung der Form (2.11) unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen den Hauptabschnittsdeterminanten und der Definitheit der Matrix [21] als skalare Ungleichungen in den Matrixelementen ausgeschrieben, ergeben sich jedoch keine linearen Ungleichungen. Vielmehr sind die Ungleichungen polynomial in den Variablen x_i .

Die Darstellung einer LMI in Definition 2.1 ist sehr allgemein. In der Regelungstechnik tritt sie oft in einer Gestalt auf, in denen Matrizen als Variablen in Erscheinung treten. Ein Beispiel hierfür bildet die Stabilitätsuntersuchung des autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit Hilfe des Stabilitätssatzes von Ljapunov. Das System ist demnach stabil, wenn die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} &< 0, \\ \mathbf{P} &\succ 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Zum Nachweis der Stabilität des Systems muss daher eine Matrix \mathbf{P} gefunden werden, welche die obigen Ungleichungen erfüllt. Solche Bedingungen lassen sich mit Hilfe von Basismatrizen ausdrücken. Dies wird deutlich, wenn eine Matrix $\mathbf{E}^{i,j}$ mit $i \geq j$ verwendet wird, wobei die Elemente $e_{i,j}$ und $e_{j,i}$ zu eins und alle übrigen zu null gesetzt werden. Die Bedingung $\mathbf{P} \succ 0$ lässt sich dann darstellen als

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \sum_{i \geq j}^n p_{i,j} \mathbf{E}^{i,j} \succ 0,$$

wobei $p_{i,j}$ das entsprechende Element der Matrix \mathbf{P} bezeichnet. Damit liegt sie in der erforderlichen Form (2.11) vor. In gleicher Weise kann auch die Bedingung $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} \prec 0$ umgeformt werden.

Wichtige Eigenschaften und Rechenregeln

An dieser Stelle sollen einige wichtige Eigenschaften und Rechenregeln vorgestellt werden, die im Rahmen der Arbeit Anwendung finden werden. Diese und weitere Regeln finden sich beispielsweise in [21]. Insbesondere in Fällen, in denen die Nebenbedingungen zunächst nicht unmittelbar in der Gestalt von LMIs vorliegen, sind diese Regeln unverzichtbar, um eine Transformation in die benötigte Form vorzunehmen.

Die erste wichtige Eigenschaft ist, dass LMIs im Allgemeinen nicht eindeutig sind. Daher kann dieselbe Lösungsmenge durch verschiedene LMIs beschrieben werden. So bezeichnen die LMIs

$$\mathbf{A} \succ 0$$

und

$$\mathbf{M}^T \mathbf{A} \mathbf{M} \succ 0,$$

wobei die Matrix \mathbf{M} regulär ist, dieselbe Lösungsmenge. Dies ist anhand aus der Definition einer positiv definiten Matrix ersichtlich, wonach $\mathbf{A} \succ 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt. Mittels einer regulären Matrix \mathbf{M} kann somit eine Kongruenztransformation durchgeführt werden, welche oft für einen Variablenwechsel zur Eliminierung bilinearer Terme verwendet wird.

In vielen regelungstechnischen Problemstellungen treten nichtlineare Nebenbedingungen auf. Diese sind oft dennoch konvex und können in Form einer LMI ausgedrückt werden. Die Grundlage hierfür liefert das sogenannte Schur-Komplement Lemma.

Lemma 2.2. ([21]) Gegeben seien affine Funktionen $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{R}(\mathbf{x})$, wobei $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ symmetrisch sind. Die Ungleichungen

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \succ 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) \succ 0$$

sind äquivalent zur LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succ 0.$$

Lemma 2.2 kann auch auf nicht strikte LMIs verallgemeinert werden, siehe dazu beispielsweise [21].

2.6.2 Lösungsmethoden

Dieser Abschnitt soll einen Einblick in die Lösungsmethoden für Optimierungsprobleme, bestehend aus Nebenbedingungen in Form von LMIs und konvexen Gütefunktionen, vermitteln. Solche Optimierungsprobleme werden auch als semidefinite Programme bezeichnet. Ihre allgemeine Form lautet:

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m}{\text{Minimiere}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \text{unter der Bedingung, dass} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0$$

mit $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ gemäß Ungleichung (2.11). Die Variablen x_i des Optimierungsproblems sind im Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ zusammengefasst. Aufgrund der Tatsache, dass semidefinite Programme konvex sind, können effiziente Methoden zur Berechnung der optimalen Lösung angewendet werden. Der wohl einfachste Algorithmus ist der Ellipsoid-Algorithmus, wie er beispielsweise in [20] beschrieben wird. Im praktischen Einsatz haben sich jedoch die sogenannten Innere-Punkte-Verfahren etabliert [139]. Zwar steigt der Aufwand zur Lösung eines Optimierungsproblems sowohl beim Ellipsoid-Algorithmus als auch bei Innere-Punkte-Verfahren im ungünstigsten Fall polynomial mit der Größe des Problems, in der Praxis zeigen Innere-Punkte-Verfahren aber ein besseres Konvergenzverhalten [140].

Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Optimierung die frei verfügbaren Solver SDPT3 4.0 [136] bzw. SeDuMi 1.21 [131] zusammen mit dem Interface YALMIP [87] verwendet. Beide Solver sind zur Lösung von semidefiniten Programmen geeignet und verwenden primal-duale Pfadverfolgungsmethoden. Um einen Einblick in die zu Grunde liegenden Methoden zu geben, soll im Folgenden auf die Lösung von semidefiniten Programmen der Form (2.12) unter Verwendung von Innere-Punkte-Verfahren eingegangen werden. Eine detailliertere Betrachtung findet sich in [140].

Primal-duales Optimierungsproblem

Das sogenannte duale Problem (siehe dazu auch Abschnitt A.2) zum Optimierungsproblem (2.12) lautet

$$\underset{\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n}}{\text{Maximiere}} \quad -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}), \quad \text{u. d. B. d.} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Z} \succeq 0, \\ \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i, \quad \forall i = \{1, \dots, m\}.$$

Darin bezeichnet $\text{Tr}(\mathbf{F})$ die Spur der Matrix \mathbf{F} . Angenommen, \mathbf{x} sei eine zulässige Lösung des primalen Problems (2.12) und \mathbf{Z} eine zulässige Lösung des dualen Problems (2.13), d.h. die Bedingungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0$ und $\mathbf{Z} \succeq 0$ sind erfüllt. Für positiv definite symmetrische Matrizen $\mathbf{A} \succeq 0$, $\mathbf{B} \succeq 0$ gilt $\text{Tr}(\mathbf{AB}) \geq 0$ und daher

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^m \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z} x_i) + \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) = \text{Tr}(\mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{Z}) \geq 0,$$

woraus

$$-\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

folgt. Aus diesem Grund ist der Wert der Zielfunktion des dualen Problems für alle zulässigen \mathbf{Z} kleiner oder gleich dem Wert der Zielfunktion des primalen Problems für alle zulässigen \mathbf{x} . Der Wert

$$\eta = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) \geq 0 \quad (2.14)$$

ist die sogenannte Dualitätslücke (Engl.: Duality Gap) bzgl. \mathbf{x} und \mathbf{Z} . Im Folgenden bezeichnet \mathbf{x}^* die optimale Lösung des primalen Problems (2.12) und $p^* = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*$ den zugehörigen optimalen Wert der Zielfunktion. Ebenso bezeichnet \mathbf{Z}^* die optimale Lösung des dualen Problems (2.13) und $d^* = -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}^*)$ den zugehörigen Wert der Zielfunktion. Aufgrund der obigen Ausführungen gilt $d^* \leq p^*$, wobei gemäß [110] die Beziehung $d^* = p^*$ gilt, falls entweder ein \mathbf{x} existiert, so dass $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$ gilt oder ein $\mathbf{Z} \succ 0$ existiert, so dass $\mathbf{Z} \succ 0$ und $\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i$ für alle $i = \{1, \dots, m\}$ gilt.

Die Dualitätslücke (2.14) kann dazu verwendet werden, das sogenannte primal-duale Optimierungsproblem

$$\underset{\mathbf{x}, \mathbf{Z}}{\text{Minimiere}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}), \quad \text{u. d. B. d.}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0, \\ \mathbf{Z} \succeq 0, \\ \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i, \quad \forall i = \{1, \dots, m\}.$$

zu formulieren. Da die Variablen \mathbf{x} und \mathbf{Z} unabhängig sind und die Zielfunktion die Summe der Zielfunktionen des primalen und dualen Problems ist, können primales und duales Problem auch separat gelöst werden. Somit erscheint das primal-duale Optimierungsproblem zunächst nicht von Vorteil zu sein. Tatsächlich kann es aber dazu dienen, die Konvergenz zu verbessern.

Der zentrale Pfad

Im Folgenden wird die strikte Lösbarkeit des primalen und dualen Problems sowie die lineare Unabhängigkeit der Matrizen \mathbf{F}_i vorausgesetzt. Es wird nun eine strikt konvexe Barriere-Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \log \det \mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}, & \text{falls } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet. Da diese Funktion konvex ist, besitzt sie ein globales Minimum in \mathbf{x}^* . Die Lösung \mathbf{x}^* wird analytisches Zentrum der LMI $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$ genannt. Das analytische Zentrum hängt von den zugehörigen LMIs, nicht aber von der Lösungsmenge ab. Das Hinzufügen redundanter Bedingungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern, beeinflusst daher sehr wohl das analytische Zentrum [140].

Nun wird das primale Problem (2.12) mit den Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &\succ 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \gamma \end{aligned} \tag{2.15}$$

betrachtet. Das analytische Zentrum von (2.15) ist die optimale Lösung $\mathbf{x}^*(\gamma)$ von

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimiere}} \log \det \mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}, \quad \text{u. d. B. d.} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &\succeq 0, \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= \gamma. \end{aligned}$$

In Abhängigkeit von γ beschreibt $\mathbf{x}^*(\gamma)$ einen Pfad im Lösungsraum, dieser wird als der zentrale Pfad bezeichnet und ist in Abbildung 2.5 dargestellt.

Nun soll ein Zusammenhang zum dualen Problem (2.13) hergestellt werden. Dazu wird das analytische Zentrum $\mathbf{x}^*(\gamma)$ betrachtet. Mit Hilfe des

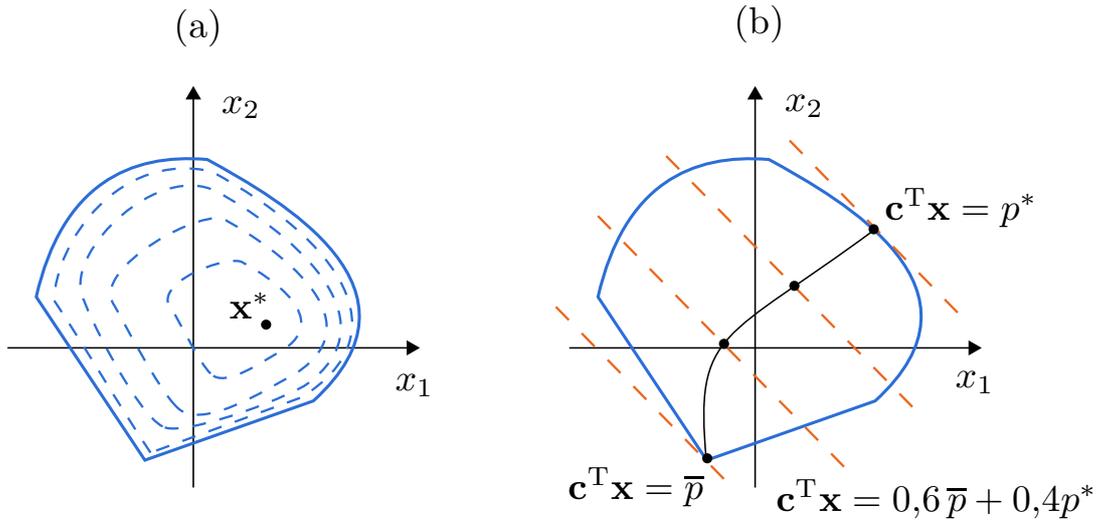


Abbildung 2.5: (a) Höhenlinien der Barriere-Funktion $\Phi(\mathbf{x})$ mit analytischem Zentrum \mathbf{x}^* . (b) Zentraler Pfad: Die Punkte kennzeichnen die analytischen Zentren $\mathbf{x}^*(\gamma)$ für $\gamma = \bar{p}$, $\gamma = 0,6 \bar{p} + 0,4 p^*$ und $\gamma = p^*$.

Zusammenhangs [140]

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\log \det \mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}) \right)_i = \text{Tr} (\mathbf{F}(\mathbf{x}(\gamma))^{-1} \mathbf{F}_i),$$

wobei der Index i die i -te Komponente des Gradienten von $\log \det \mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}$ bezeichnet, folgt aus der Bedingung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\log \det \mathbf{F}(\mathbf{x})^{-1}) \right)_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda (\gamma - c_i x_i) = 0$$

für einen optimalen Punkt von (2.16) unmittelbar

$$\text{Tr} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma))^{-1} \mathbf{F}_i) = \lambda c_i$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Es lässt sich zeigen, dass $\lambda > 0$ für alle Teile des zentralen Pfades zwischen dem analytischen Zentrum und der optimalen Lösung gilt [140]. Da $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma)) \succ 0$ gilt und ebenfalls $\lambda > 0$ ist, ist $\mathbf{Z}^* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma))^{-1} / \lambda$ eine zulässige Lösung des dualen Problems (2.13). Daher folgen aus Punkten $\mathbf{x}^*(\gamma)$ des primalen Problems zulässige Matrizen des dualen Problems. Außerdem ergibt sich zwischen der Dualitätslücke η und dem Lagrange-Multiplikator λ das Verhältnis

$$\eta = \text{Tr} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma)) \mathbf{Z}^*) = \text{Tr} (\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma))) / \lambda = \frac{k}{\lambda},$$

d.h. die Dualitätslücke ist antiproportional zu λ . Des Weiteren ist $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*(\gamma))^{-1}/\lambda$ nicht nur eine zulässige Lösung des dualen Problems, sondern liegt ebenfalls auf dem zum dualen Problem gehörenden zentralen Pfad. Demnach gibt es einen Zusammenhang zwischen Punkten auf dem primalen und dualen zentralen Pfad. Diese Tatsache kann ausgenutzt werden, indem in jedem Schritt entweder das aktuelle \mathbf{Z}_k des dualen Problems zum Update der Variable \mathbf{x}_k des primalen Problems, bzw. das aktuelle \mathbf{x}_k zum Update von \mathbf{Z}_k verwendet wird.

2.6.3 Sum-of-squares

Die Sum-of-squares-Methodik (SOS-Methodik) stellt eine Verallgemeinerung der LMI-Methodik auf polynomiale Funktionen dar. Sie dient dazu, die Nichtnegativität eines Polynoms sicherzustellen. Im Allgemeinen ist die Überprüfung eines Polynoms auf Nichtnegativität ein np-schweres Problem [106]. Mit der SOS-Methodik lässt sich diese Aufgabe jedoch sehr effizient lösen. Dabei wird die Forderung der Nichtnegativität durch die Forderung ersetzt, dass das Polynom als Summe quadrierter Polynome darstellbar ist. Offensichtlich ist ein Polynom, welches durch eine Summe quadrierter Polynome dargestellt werden kann, nichtnegativ. Dabei ist aber zu beachten, dass nicht jedes nichtnegative Polynom ein SOS-Polynom ist.

Um die Methodik zu erläutern, wird zunächst der Begriff Polynom definiert:

Definition 2.2. Ein Polynom $p(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ der Ordnung δ mit den Koeffizienten $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ ist eine Linearkombination von Monomen $x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ der Form

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq \delta} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Die Menge der Polynome in \mathbf{x} wird im Folgenden mit $\mathbb{R}[\mathbf{x}]$ bezeichnet. Damit kann nun ein Sum-of-squares-Polynom definiert werden:

Definition 2.3. Die Menge der SOS-Polynome $\Sigma[\mathbf{x}]$ ist die Menge aller Polynome $p(\mathbf{x})$, welche durch eine endliche Summe von quadrierten Polynomen $q_i(\mathbf{x})$ darstellbar ist, d.h., es gilt

$$\Sigma[\mathbf{x}] = \left\{ p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] : p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N q_i^2(\mathbf{x}), q_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}] \right\}.$$

Damit ist die Forderung $p(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, falls $p(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$ gilt. Da die Menge der nichtnegativen Polynome größer als die Menge der SOS-Polynome ist, stellt die Forderung $p(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$ eine konservative Abschätzung bezüglich der Forderung der Nichtnegativität dar. Es existieren also bestimmte Polynome, die ebenfalls nichtnegativ sind, aber nicht als SOS-Polynome ausgedrückt werden können.

Ist ein Polynom ein SOS-Polynom, so ist damit nur dessen Nichtnegativität sichergestellt. Oftmals wird aber gefordert, dass ein Polynom positiv definit ist, d.h., $p(\mathbf{0}) = 0$ und $p(\mathbf{x}) > 0$ soll für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ gelten. Um auch die positive Definitheit eines Polynoms nachweisen zu können, wird ein positiv definites Hilfspolynom der Form

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_1 x_1^{2d} + \dots + \epsilon_n x_n^{2d}, \quad \epsilon_i > 0$$

verwendet. Gilt nun

$$p(\mathbf{x}) - \epsilon(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}],$$

ist $p(\mathbf{x}) \geq \epsilon(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ nachgewiesen.

Existiert die SOS-Zerlegung eines Polynoms, so ist dessen globale Nichtnegativität sichergestellt. In vielen Fällen ist diese Forderung aber zu restriktiv, da oftmals nur die Nichtnegativität innerhalb eines gewissen Gebietes \mathcal{G} gefordert ist. Um diese Forderung als SOS-Bedingung zu definieren, kann das folgende Lemma aus [65] verwendet werden, welches auch als verallgemeinerte S-Prozedur bezeichnet wird.

Lemma 2.3. ([65]) *Gegeben seien ein Polynom $p(\mathbf{x})$ und N Polynome $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_N(\mathbf{x})$. Falls N Polynome $a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_N(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$ existieren, so dass*

$$p(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^N a_k(\mathbf{x})g_k(\mathbf{x}) \in \Sigma[\mathbf{x}]$$

gilt, dann ist

$$p(\mathbf{x}) \geq 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G} = \{\mathbf{x} : g_k(\mathbf{x}) \geq 0, k = 1, \dots, N\}$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [65]. □

2.6.4 Matrix Sum-of-squares-Zerlegungen

Die für SOS-Polynome entwickelte Methodik lässt sich auf Matrixpolynome erweitern. Ergebnisse hierzu finden sich beispielsweise in [29], [81] und [116]. Dazu wird zunächst die folgende Definition benötigt.

Definition 2.4. Die Menge der SOS-Matrixpolynome $\Sigma^r[\mathbf{x}]$ ist die Menge aller symmetrischen Matrixpolynome $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\mathbf{x}]$, die als eine endliche Summe von Matrixpolynom-Produkten $\mathbf{Q}_i(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_i(\mathbf{x})$ darstellbar ist, d.h., es gilt

$$\Sigma^r[\mathbf{x}] = \left\{ \mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\mathbf{x}] : \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\mathbf{x}] \right\}.$$

Die wesentliche Eigenschaft von SOS-Matrixpolynomen ist, dass sie positiv semidefinit sind für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Wie schon im Falle von SOS-Polynomen können auch für SOS-Matrixpolynomen analog zu Lemma 2.3 lokale Bedingungen formuliert werden. Dazu dient

Lemma 2.4. ([50]) Gegeben seien ein symmetrisches Matrixpolynom $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times r}[\mathbf{x}]$ und N Polynome $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_N(\mathbf{x})$. Falls N Matrixpolynome $\mathbf{W}_1(\mathbf{x}), \mathbf{W}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{W}_N(\mathbf{x}) \in \Sigma^r[\mathbf{x}]$ existieren, so dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^N \mathbf{W}_k(\mathbf{x}) g_k(\mathbf{x}) \in \Sigma^r[\mathbf{x}]$$

gilt, dann ist

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \succeq 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G} = \{\mathbf{x} : g_k(\mathbf{x}) \geq 0, k = 1, \dots, N\}$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [50]. □

Lösungsmethoden

Wie eingangs dieses Abschnittes erwähnt, kann die Frage, ob für ein Polynom eine SOS-Zerlegung existiert, als LMI-Problem formuliert werden [30], [107]. Einen Ausgangspunkt hierfür bildet der folgende Satz.

Satz 2.1. ([107]) Ein Polynom $p(\mathbf{x})$ vom Grad $2d$ ist ein SOS-Polynom genau dann, wenn eine positiv semidefinite Matrix \mathbf{Q} und ein Vektor¹ $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ existieren, wobei $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ die Monome in \mathbf{x} mit maximalem Grad d beinhaltet, so dass

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{x})\mathbf{Q}\mathbf{z}(\mathbf{x})$$

gilt.

Beweis. Der Beweis findet sich in [107]. □

Zur Überprüfung, ob ein Polynom $p(\mathbf{x})$ ein SOS-Polynom ist, kann demnach die sogenannte *Gram-Matrix* \mathbf{Q} untersucht werden. Ist diese positiv semidefinit, so handelt es sich bei $p(\mathbf{x})$ um ein SOS-Polynom. Es ist jedoch festzuhalten, dass die Zerlegung $p(\mathbf{x}) = \mathbf{z}^T(\mathbf{x})\mathbf{Q}\mathbf{z}(\mathbf{x})$ in Satz 2.1 nicht eindeutig ist. So existieren Matrizen \mathbf{Q} , welche nicht positiv semidefinit sind, obwohl $p(\mathbf{x})$ ein SOS-Polynom ist. Ist aber eine Zerlegung bekannt, in welcher \mathbf{Q} positiv semidefinit ist, so lässt sich hieraus folgern, dass es sich bei $p(\mathbf{x})$ um ein SOS-Polynom handelt. Unter Verwendung einer Darstellung aus [108] gelingt es, die Suche nach einer solchen positiv semidefiniten Matrix \mathbf{Q} als LMI-Problem zu formulieren [30], [107]. Dies ist auch dann möglich, wenn ein Polynom $p(\mathbf{x})$ unbekannte Koeffizienten beinhaltet, was für die Anwendbarkeit der Methodik zum Reglerentwurf entscheidend ist.

Auch für SOS-Matrixpolynome kann ein zu Satz 2.1 analoger Satz aus [29] angegeben werden.

Satz 2.2. ([29]) Ein symmetrisches Matrixpolynom $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ vom Grad $2d$ ist ein SOS-Matrixpolynom genau dann, wenn eine positiv semidefinite Matrix \mathbf{Q} und ein Vektor $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ existieren, wobei $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ die Monome in \mathbf{x} mit maximalem Grad d beinhaltet, so dass

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (\mathbf{z}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{I}_r)^T \mathbf{Q} (\mathbf{z}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{I}_r)$$

gilt. Dabei hat die Matrix \mathbf{Q} die Dimension $r \cdot \binom{n+d}{d}$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [29]. □

Unter Verwendung von Satz 2.1 bzw. 2.2 kann ein SOS-Problem als LMI-Problem ausgedrückt werden. Dieses LMI-Problem kann dann mit den in Abschnitt 2.6.1 beschriebenen Verfahren gelöst werden. Für Details zur Umwandlung von SOS- in LMI-Probleme sei auf [107] verwiesen.

¹In der Literatur findet sich oftmals die Darstellung des Vektors als $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$.

3 Stabilität unter geschachtelter Sättigung

In diesem Kapitel wird die Stabilität von Systemen unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen betrachtet. Dazu wird das in Abschnitt 2.2 vorgestellte Aktormodell verwendet. Das Kapitel ist folgendermaßen aufgebaut: Zunächst werden einige Grundbegriffe erläutert, die für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Stabilitätssätze entscheidend sind. Im Anschluss daran wird in Abschnitt 3.2 auf den Entwurf von nichtsättigenden linearen Reglern für Systeme mit linearer Dynamik eingegangen. In diesem Zusammenhang werden auch konvexe Entwurfsbedingungen hergeleitet. Eine bessere Ausnutzung der verfügbaren Stellgrößen- bzw. Stellratenbeschränkungen wird durch den in Abschnitt 3.3 vorgestellten Stabilitätssatz ermöglicht, welcher den Entwurf sättigender linearer Zustandsregler erlaubt. Während die zuvor erwähnten Stabilitätssätze der Literatur entnommen werden können, stellt der im letzten Abschnitt des Kapitels vorgestellte Stabilitätssatz für nichtlineare Systeme unter sättigenden nichtlinearen Zustandsrückführungen bereits ein Ergebnis dieser Arbeit dar.

3.1 Grundbegriffe

Der Begriff des Einzugsgebietes einer Ruhelage ist von zentraler Bedeutung. Im Folgenden bezeichnet $\Psi(t, \mathbf{x}_0)$ die Trajektorie des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ausgehend vom Anfangszustand $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$. Nun wird das Einzugsgebiet wie folgt definiert:

Definition 3.1. ([8]) Das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ habe eine Ruhelage in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Das Gebiet $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Einzugsgebiet der Ruhelage, wenn für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{A}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \Psi(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{A} \quad \forall t > 0$$

gilt. Das größtmögliche Einzugsgebiet

$$\mathcal{A}_{\max} = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \wedge \Psi(t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{A}_{\max} \quad \forall t > 0 \right\}$$

heißt maximales Einzugsgebiet der Ruhelage.

Ist das System global asymptotisch stabil, so gilt $\mathcal{A}_{\max} = \mathbb{R}^n$. Andernfalls ist die Frage entscheidend, wie groß das Einzugsgebiet ist. Es gibt eine Vielzahl an Verfahren, die zur Approximation des maximalen Einzugsgebiets für ein System geeignet sind, Übersichtsartikel dazu stellen [16] und [41] dar.

3.1.1 Kontraktive Invarianz

Im Rahmen dieser Arbeit werden Regelverfahren vorgestellt, welche neben den eigentlichen Reglerparametern auch ein Einzugsgebiet für das geregelte System garantieren. Dazu wird die Eigenschaft der kontraktiven Invarianz eines Gebietes [60] verwendet. Ein kontraktiv invariantes Gebiet kann numerisch effizient bestimmt werden und ist ein Einzugsgebiet. Im Allgemeinen ist es aber kleiner als das maximale Einzugsgebiet \mathcal{A}_{\max} .

Zur Erläuterung der kontraktiven Invarianz wird mittels einer positiv definiten Funktion $v(\mathbf{x})$ die beschränkte Menge

$$\mathcal{G}(\rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) \leq \rho\}$$

mit $\rho > 0$ definiert. Nun lässt sich die folgende Definition angeben:

Definition 3.2. ([60]) Das abgeschlossene Gebiet $\mathcal{G}(\rho)$ heißt kontraktiv invariant für ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wenn $v(\mathbf{0}) = 0$, $v(\mathbf{x}) > 0$ und $\dot{v}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\rho)$ gilt.

Abbildung 3.1 (a) dient der Veranschaulichung der Eigenschaft der kontraktiven Invarianz für den Fall ellipsoider Gebiete $\mathcal{G}(\rho)$. Dazu wird zunächst der Rand $\partial\mathcal{G}(\rho)$ betrachtet: Der Gradient von $v(\mathbf{x})$ ist in Richtung des steilsten Anstiegs von $v(\mathbf{x})$ gerichtet und steht somit orthogonal auf $\partial\mathcal{G}(\rho)$. Offenbar ist der Vektor $\dot{\mathbf{x}}$ für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(\rho)$ ins Innere von $\mathcal{G}(\rho)$ gerichtet, falls

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(\rho)$ gilt. Letzteres ist im Falle eines kontraktiv invarianten Gebietes sichergestellt, da in Definition 3.2 $\dot{v}(\mathbf{x}) < 0$ nicht nur für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(\rho)$, sondern für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\rho)$ gefordert wird. Folglich läuft die Trajektorie ausgehend von $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(\rho)$ in das Gebiet $\mathcal{G}(\rho)$ hinein und kann

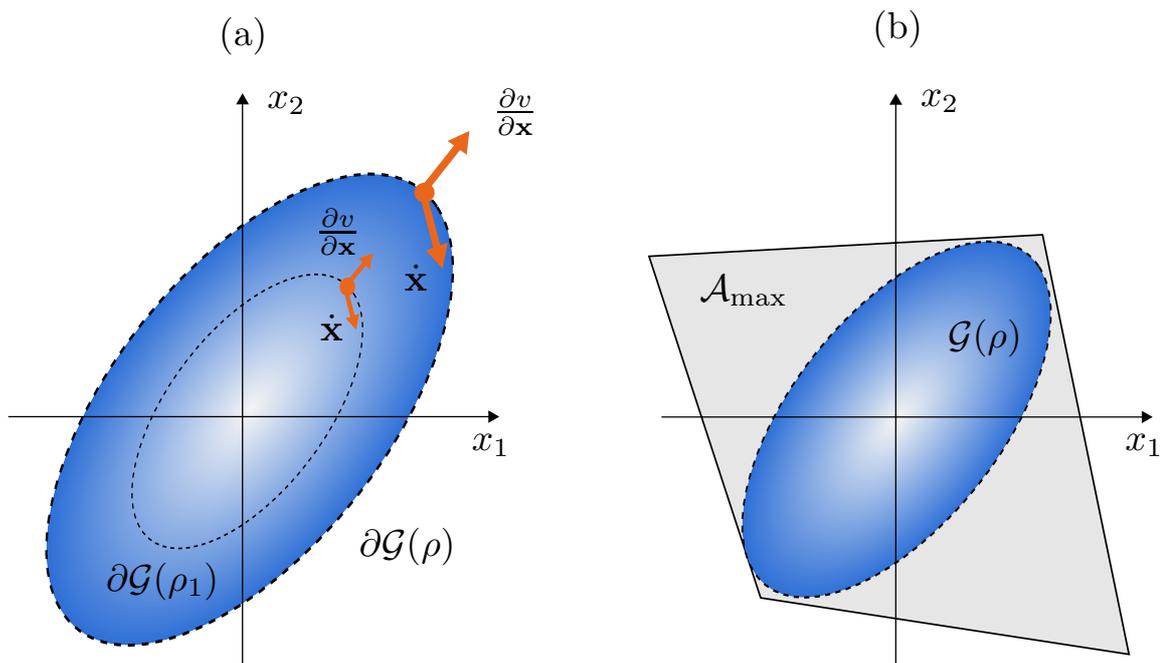


Abbildung 3.1: (a) Kontraktiv invariantes Gebiet $\mathcal{G}(\rho)$: Jede Trajektorie, die in ein Gebiet $\mathcal{G}(\rho_1)$ mit $0 < \rho_1 \leq \rho$ einläuft, kann dieses im weiteren Verlauf nicht mehr verlassen. (b) Approximation des maximalen Einzugsgebiets \mathcal{A}_{\max} mit Hilfe des kontraktiv invarianten Gebiets $\mathcal{G}(\rho)$.

es nicht verlassen. Im Folgenden wird nun ein Gebiet $\mathcal{G}(\rho_1)$ mit $0 < \rho_1 \leq \rho$ betrachtet. Es gilt

$$\mathcal{G}(\rho_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) \leq \rho_1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) \cdot \rho / \rho_1 \leq \rho\}$$

bzw.

$$\mathcal{G}(\rho_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \tilde{v}(\mathbf{x}) \leq \rho\}$$

mit der Ljapunov-Funktion $\tilde{v}(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \cdot \rho / \rho_1$. Da laut Definition 3.2 $\dot{v}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\rho)$ gefordert wird, gilt für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(\rho_1)$

$$\dot{\tilde{v}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} < 0.$$

Somit läuft eine Trajektorie, die von $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(\rho)$ ausgeht, schließlich in das Gebiet $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\rho_1)$ ein und verlässt es in ihrem weiteren Verlauf auch nicht wieder. Auch für eine Trajektorie, die von $\mathbf{x}(t) \in \partial\mathcal{G}(\rho_1) \subseteq \mathcal{G}(\rho)$ mit $0 < \rho_1 \leq \rho$ ausgeht, existiert ein $\rho_2 < \rho_1$, so dass $\mathbf{x}(t + \epsilon) \in \mathcal{G}(\rho_2) \subset \mathcal{G}(\rho_1)$ für ein beliebig kleines $\epsilon > 0$ gilt. Die Gebiete ziehen sich demnach mit

der Zeit um den Ursprung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ zusammen, woraus sich der Begriff der kontraktiven Invarianz ableitet.

Für Systeme mit linearer Dynamik erweisen sich quadratische Formen

$$v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

mit $\mathbf{P} \succ 0$ als außerordentlich nützlich. In diesem Fall ist $\mathcal{G}(\rho)$ ein Ellipsoid. Der Vorteil der Verwendung quadratischer Formen liegt vor allem darin begründet, dass sie eine Formulierung des Reglerentwurfs als konvexes Optimierungsproblem ermöglichen. Dies wird sich auch beim Entwurf der in dieser Arbeit entwickelten Regelungen zeigen. Die Approximation des maximalen Einzugsgebietes mittels des Gebiets $\mathcal{G}(\rho)$ und quadratischer Ljapunov Funktion $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ zeigt Abbildung 3.1 (b).

3.1.2 Gebiet nichtsättigender Trajektorien

Im Fall von Systemen, die Stellbegrenzungen unterworfen sind, sind die Gebiete von besonderem Interesse, in denen eine Zustandsrückführung $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ nicht sättigt, d.h. $u_{\min,i} \leq h_i(\mathbf{x}) \leq u_{\max,i}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt. Mit $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_{\min} \ \mathbf{u}_{\max}]$ lässt sich die folgende Definition angeben:

Definition 3.3. Das nichtsättigende Gebiet

$$\mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : u_{\min,i} \leq h_i(\mathbf{x}) \leq u_{\max,i}, i = 1, 2, \dots, m\}$$

eines Reglers $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ ist die Menge, in welcher die Zustandsrückführung $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ nicht sättigt, d.h. $u_{\min,i} \leq h_i(\mathbf{x}) \leq u_{\max,i}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt.

Das im Folgenden definierte Gebiet der nichtsättigenden Trajektorien betrachtet im Gegensatz zu Definition 3.3 den Vektor $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ entlang der in $\mathbf{x}(t_0)$ startenden Trajektorie $\Psi(t, \mathbf{x}(t_0))$.

Definition 3.4. Das Gebiet nichtsättigender Trajektorien

$$\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n : \Psi(t, \mathbf{x}(t_0)) \in \mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \forall t \geq t_0\}$$

eines Systems mit der Zustandsrückführung $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ beschreibt die Menge aller Zustände $\mathbf{x}(t_0)$, für welche die Begrenzung $u_{\min,i} \leq h_i(\mathbf{x}) \leq u_{\max,i}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und für alle zukünftigen Zeiten eingehalten wird.

In den meisten Fällen werden im Rahmen der Arbeit symmetrische Beschränkungen betrachtet. Zur Verkürzung der Schreibweise wird dann $\mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathcal{L}_{[-\mathbf{u}_{\max} \ \mathbf{u}_{\max}]}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ und $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) =$

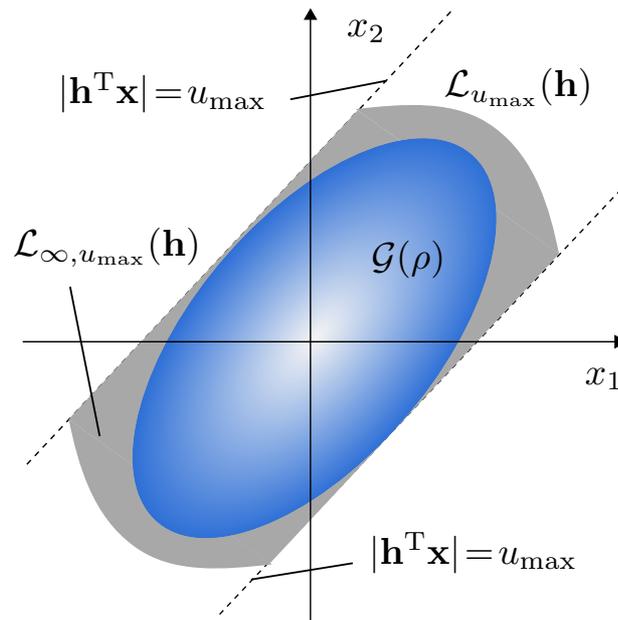


Abbildung 3.2: Lineares Gebiet $\mathcal{L}_{u_{\max}}(\mathbf{h})$ zu einer linearen Zustandsrückführung $\mathbf{h}^T \mathbf{x}$ und Gebiet nichtsättigender Trajektorien $\mathcal{L}_{\infty, u_{\max}}(\mathbf{h})$. Das kontraktiv invariante Gebiet $\mathcal{G}(\rho)$ kann als Abschätzung von $\mathcal{L}_{\infty, u_{\max}}(\mathbf{h})$ verwendet werden.

$\mathcal{L}_{\infty, [-\mathbf{u}_{\max} \ \mathbf{u}_{\max}]}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ verwendet. Werden lineare Zustandsrückführungen $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$ betrachtet, so werden $\mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{H}) = \mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{H}\mathbf{x})$ und $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathbf{H}) = \mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathbf{H}\mathbf{x})$ abgekürzt.

Während beide Gebiete in den obenstehenden Definitionen für die Stellgrößenbeschränkung definiert wurden, lassen sich diese Definitionen auch dafür angeben, dass eine Zustandsrückführung die Begrenzung $v_{\min, i} \leq h_i(\mathbf{x}) \leq v_{\max, i}$ einhält. Es ergeben sich dann die Gebiete $\mathcal{L}_{\mathbf{V}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ und $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{V}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$.

Das Gebiet der nichtsättigenden Trajektorien ist von besonderem Interesse, da in $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ die Stellgröße nicht sättigt, d.h., die Sättigungsfunktion der Stellgröße nicht berücksichtigt werden muss. Im Fall linearer Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen ist $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathbf{h})$ ein Einzugsgebiet, falls die Eigenwerte des geregelten Systems in der linken s-Halbebene liegen. Im Falle einer zusätzlichen Stellratenbegrenzung gilt, dass die Schnittmenge $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{L}_{\infty, \mathbf{V}}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H})$ ein Einzugsgebiet ist, falls die Eigenwerte des geregelten Systems in der linken s-Halbebene liegen. Die Tatsache, dass auch das Gebiet $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{V}}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H})$ berücksichtigt werden muss, wird bei Betrachtung des Systems (2.7) deutlich. Abbildung 3.2 zeigt die Gebiete $\mathcal{L}_{u_{\max}}(\mathbf{h})$ und $\mathcal{L}_{\infty, u_{\max}}(\mathbf{h})$ für die Zu-

standsrückführung $\mathbf{h}^T \mathbf{x}$. Die Bestimmung des Gebietes nichtsättigender Trajektorien $\mathcal{L}_{\infty, u_{\max}}(\mathbf{h})$ ist im Allgemeinen nicht auf einfache Weise möglich.

Eine Abschätzung für das Gebiet nichtsättigender Trajektorien ergibt sich mit Hilfe eines kontraktiv invarianten Gebietes $\mathcal{G}(\rho)$. Gilt nämlich wie in Abbildung 3.2 $\mathcal{G}(\rho) \subseteq \mathcal{L}_{u_{\max}}(\mathbf{h})$, so ist $\mathcal{G}(\rho)$ eine Abschätzung für $\mathcal{L}_{\infty, u_{\max}}(\mathbf{h})$. Da eine Trajektorie, die in $\mathcal{G}(\rho)$ startet, $\mathcal{G}(\rho)$ nicht wieder verlassen kann, liegen alle zukünftigen Zustände in $\mathcal{L}_{u_{\max}}(\mathbf{h})$ und gehören damit zum Gebiet nichtsättigender Trajektorien $\mathcal{L}_{\infty, u_{\max}}(\mathbf{h})$. Diese Vorgehensweise wird später aufgegriffen, um einen nichtsättigenden, linearen Zustandsregler für ein lineares System unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung zu entwerfen.

3.1.3 Abklingrate

Beim Entwurf der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Regelungen steht die erzielbare Regelgüte im Vordergrund. Ist ein Gebiet \mathcal{G} kontraktiv invariant, so ist damit zwar sichergestellt, dass der Zustand $\mathbf{x}(t)$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G}$ schließlich in die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ einläuft, jedoch ist zunächst keine Aussage möglich, wie schnell dies geschieht. Ein Bewertungskriterium hierfür liefert die Abklingrate [21].

Definition 3.5. ([21]) Gegeben sei das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Die Abklingrate bezüglich eines Gebietes \mathcal{G} ist definiert als die größte Zahl $\alpha > 0$, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| e^{\alpha t} = 0$$

für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G}$ gilt.

Ist eine Ljapunov-Funktion eines Systems bekannt, so kann gemäß [21] mit Hilfe des folgenden Satzes eine untere Schranke für die Abklingrate bestimmt werden.

Satz 3.1. ([21]) Gegeben sei das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit der asymptotisch stabilen Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gilt für eine Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x})$ des Systems

$$\dot{v}(\mathbf{x}) \leq -2\underline{\alpha}v(\mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} = \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) \leq 1\}$, dann ist $\underline{\alpha}$ eine untere Schranke für die Abklingrate α .

Mit Hilfe dieser unteren Schranke kann die Performance eines Reglers optimiert werden. Wird ein lineares System mit dem nichtsättigenden linearen Zustandsregler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{x}$ geregelt, so dass alle Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 + \mathbf{BTK}_{2,\text{lin}})\mathbf{x}$ links der imaginären Achse liegen, so entspricht die untere Schranke Abklingrate $\underline{\alpha}$ dem Betrag des größten Realteils aller Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises, d.h., es gilt

$$\underline{\alpha} = \max_i \text{Re}\{\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})\}.$$

Wird sie vergrößert, so wird dementsprechend der langsamste Eigenwert nach links verschoben, was zu einem schnelleren Ausregelverhalten führt. Auf den Entwurf des Reglers $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{x}$ wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

3.2 Lineare Regler

Die in dieser Arbeit entwickelten Regler werden mit einem linearen Zustandsregler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{x}$ für das System (2.7) verglichen. Damit der geschlossene Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\text{max}}}(\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\text{max}}}(\mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{x})),$$

linear ist, ist beim Entwurf sicherzustellen, dass weder die Stellgrößen-, noch die Stellratenbegrenzung verletzt wird. Die entsprechenden Bedingungen lauten

$$|\mathbf{k}_{1,i}^T\mathbf{x} + \tau_i\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T\mathbf{x}| \leq v_{\text{max},i} \quad \text{und} \quad |\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T\mathbf{x}| \leq u_{\text{max},i} \quad (3.1)$$

für alle $\mathbf{x}(t)$ mit $t \in [0, \infty]$ und alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Dabei bezeichnen $\mathbf{k}_{1,i}^T$ und $\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T$ die i -ten Zeilen von \mathbf{K}_1 und $\mathbf{K}_{2,\text{lin}}$.

Während die Zustandsrückführung \mathbf{K}_1 durch das Aktormodell (2.5) und die Wahl der Parameter τ_i festgelegt ist, kann die Wahl des Reglers $\mathbf{K}_{2,\text{lin}}$ auf vielfältige Weise erfolgen. Unter anderem können Verfahren aus der linearen Regelungstheorie, wie beispielsweise Polplatzierung oder auch linear-quadratische Reglerentwürfe eingesetzt werden. Nachteilig bei dieser Vorgehensweise ist jedoch, dass die Bedingungen (3.1) nur nachträglich durch Simulation des geschlossenen Regelkreises überprüft werden können. Werden die Begrenzungen verletzt, so verliert die lineare Theorie ihre Gültigkeit. Daher müssen die Entwurfsparameter so angepasst

werden, dass die Begrenzungen nicht verletzt werden. Dazu muss nach jeder Variation der Parameter erneut die Einhaltung der Stellbegrenzungen überprüft werden. Gegebenenfalls ist dann eine neuerliche Parameteranpassung erforderlich. Diese Prozedur muss so lange wiederholt werden, bis ein Regler gefunden ist, der die Stellbegrenzungen einhält.

Um den Entwurf effizienter durchführen zu können, soll die Formulierung der Entwurfsbedingungen als LMIs erfolgen. Dies ist im Falle symmetrischer Begrenzungen $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ und $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ möglich. Asymmetrische Begrenzungen $u_{\min,i} \leq u_{a,i} \leq u_{\max,i}$ bzw. $u_{\min,i} \leq \dot{u}_{a,i} \leq u_{\max,i}$ mit $u_{\min,i}, v_{\min,i} < 0$ und $u_{\max,i}, v_{\max,i} > 0$ können jedoch berücksichtigt werden, wenn der im Folgenden vorgestellte Entwurf für die betragsmäßig restriktivere Begrenzung erfolgt.

Aufgrund der Tatsache, dass das System (2.7) eine lineare Dynamik aufweist, wird die quadratische Form $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ mit $\mathbf{P} \succ 0$ verwendet. Mit ihrer Hilfe wird das Gebiet

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) = \mathcal{G}(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 1\} \quad (3.2)$$

definiert und gefordert, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant und somit eine Teilmenge des maximalen Einzugsgebietes ist. Um sicherzustellen, dass die Stellbegrenzungen nicht verletzt werden und der resultierende geschlossene Regelkreis lineares Verhalten aufweist, wird

$$|\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

$$|\mathbf{k}_{1,i}^T \mathbf{x} + \tau_i \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}| \leq v_{\max,i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gefordert. Diese Forderung ist erfüllt, sofern die Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt sind

Satz 3.2. *Gegeben sei das Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ gemäß Gl. (3.2), das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

und die nichtsättigende Zustandsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}} \mathbf{x}$. Wenn die Bedingungen $\mathbf{P} \succ 0$,

$$\begin{bmatrix} u_{\max,i}^2 & \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \\ \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.5)$$

$$\begin{bmatrix} v_{\max,i}^2 & \mathbf{k}_{1,i}^T + \tau_i \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \\ \mathbf{k}_{1,i} + \tau_i \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{K}_{2,\text{lin}})^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{K}_{2,\text{lin}}) \prec 0 \quad (3.7)$$

erfüllt sind, ist $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant für das oben gegebene System unter der Zustandsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}} \mathbf{x}$.

Beweis. Um die kontraktive Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ zu zeigen, muss $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ positiv definit sein und die Bedingung

$$\begin{aligned} \dot{v}(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \\ &= 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{K}_2 \mathbf{x}))) < 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Sind die Bedingungen (3.3) und (3.4) für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ sichergestellt, so sättigt der Regler weder hinsichtlich der Stellgröße noch der Stellrate. Daher müssen die Sättigungsfunktionen in der obigen Gleichung nicht berücksichtigt werden. Entsprechend ergibt sich Bedingung (3.7).

Nun werden die Bedingungen (3.3) und (3.4) betrachtet. Für den maximalen Betrag $|\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}|$ in $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ soll

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})} |\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}| = \sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 1} |\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,i}$$

gelten. Der maximale Betrag $|\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}|$ tritt auf dem Rand $\partial \mathcal{E}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 1\}$ auf. Demnach muss

$$\sup_{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 1} |\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,i}$$

gelten. Mit Hilfe des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren kann das Supremum berechnet werden. Zunächst wird der Fall $\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x} > 0$ betrachtet und es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x} + \lambda (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - 1)) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^* = -\frac{1}{2\lambda} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}.$$

Aus $\mathbf{x}^{*T} \mathbf{P} \mathbf{x}^* = 1$ folgt $\lambda = 1/2 \sqrt{\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}}$ und somit $\mathbf{x}^* = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} / \sqrt{\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}}$. Im Fall $\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x} < 0$ ergibt sich in analoger Weise $\mathbf{x}^* = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} / \sqrt{\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}}$. Quadrieren der Forderung $|\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}^*| \leq u_{\max,i}$ liefert $|\mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}^*|^2 = \mathbf{x}^{*T} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{x}^* \leq u_{\max,i}^2$. Nach Einsetzen von \mathbf{x}^* ergibt sich in beiden Fällen die Forderung

$$u_{\max,i}^2 - \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} \geq 0,$$

welche mit Hilfe des Schur-Komplements in die Matrixungleichung (3.5) umgeformt werden kann. Die Umformung der Bedingung (3.4) erfolgt in analoger Weise und liefert Bedingung (3.6). \square

Die Bedingungen (3.5) und (3.6) stellen sicher, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{TK}_{2,\text{lin}}) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_{2,\text{lin}})$ gilt. Da $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant ist, gilt demnach auch $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\infty, \mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{TK}_{2,\text{lin}}) \cap \mathcal{L}_{\infty, \mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_{2,\text{lin}})$.

Durch die in Satz 3.2 formulierten Bedingungen werden keine Forderungen an die Größe des Gebiets $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ gestellt. In der praktischen Anwendung soll $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ jedoch das Gebiet möglicher Betriebszustände umfassen. Um dies sicherzustellen, wird die zusätzliche Bedingung $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{E}(\mathbf{P})$ hinzugefügt. Dabei bezeichnet \mathcal{X}_0 die Menge möglicher Anfangszustände, die im Rahmen dieser Arbeit als konvexes Polyeder mit den N -Eckpunkten $\mathbf{x}_{0,j}$ angesetzt ist. Die Forderung $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{E}(\mathbf{P})$ ist erfüllt, falls

$$\mathbf{x}_{0,j}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{0,j} < 1 \quad (3.8)$$

für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt. Auch die Verwendung von Ellipsoiden als Gebiet möglicher Anfangszustände ist denkbar. Gilt beispielsweise $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{x} \leq 1\}$, so lautet die Forderung $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{E}(\mathbf{P})$

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}_0 \succ 0.$$

Um eine hohe Regelgüte zu erzielen, bietet sich die Optimierung der unteren Schranke der Abkling- bzw. Konvergenzrate $\underline{\alpha}$ des geschlossenen Regelkreises an. Da der Regler im vorliegenden Fall auf dem Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ nicht sättigt, ergibt sich aus Satz 3.1, dass α die Abklingrate des geschlossenen Regelkreises ist, falls die Bedingung

$$2\mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{K}_2 \mathbf{x}))) < -2\underline{\alpha} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

erfüllt ist. Da der Regler weder hinsichtlich der Stellgröße noch der Stellrate sättigt, müssen die Sättigungsfunktionen in der obigen Gleichung nicht berücksichtigt werden und es ergibt sich unmittelbar

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{TK}_{2,\text{lin}})^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{TK}_{2,\text{lin}}) \prec -2\underline{\alpha} \mathbf{P}. \quad (3.9)$$

Im Folgenden soll die untere Schranke $\underline{\alpha}$ optimiert werden, d.h., der langsamste Eigenwert des geschlossenen Regelkreises soll nach links verschoben werden. Ist Bedingung (3.9) für ein beliebiges $\alpha > 0$ erfüllt, so ist damit offensichtlich auch die Forderung (3.7) aus Satz 3.2 erfüllt. Daher wird

die Forderung (3.7) in der Optimierung durch die restriktivere Forderung (3.9) ersetzt.

Um ein konvexes Optimierungsproblem zu erhalten, müssen die Entwurfsbedingungen aus Satz 3.2 bzw. die Bedingung (3.9) als LMIs formuliert werden. Aufgrund der Terme $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_{2,\text{lin}}$ in den Matrixungleichungen (3.7) bzw. (3.9) liegen die Entwurfsbedingungen zunächst nicht in Form von LMIs vor. Jedoch lässt sich diese Bilinearität unter Zuhilfenahme der Substitutionen $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{Q}$ vermeiden. Dazu wird Bedingung $\mathbf{P} \succ 0$ sowie (3.7) bzw. (3.9) beidseitig mit $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ multipliziert. Es ergibt sich $\mathbf{Q} \succ 0$ und

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{G}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\mathbf{G} \prec -2\underline{\alpha}\mathbf{Q}, \quad (3.10)$$

wobei an dieser Stelle zur Verkürzung der Schreibweise $\mathbf{G} = \mathbf{K}_1\mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Y}$ abgekürzt wird. Durch beidseitige Multiplikation mit der regulären, symmetrischen Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

werden die Bedingungen (3.5) und (3.6) in

$$\begin{bmatrix} u_{\max,i}^2 & \mathbf{y}_i^T \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} v_{\max,i}^2 & \mathbf{g}_i^T \\ \mathbf{g}_i & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

umgeformt. Darin bezeichnen \mathbf{y}_i^T , \mathbf{g}_i^T die i -ten Zeilen von \mathbf{Y} bzw. von \mathbf{G} . Mit Hilfe des Schur-Komplement Lemmas lässt sich die Bedingung (3.8) umformen in

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_{0,j}^T \\ \mathbf{x}_{0,j} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

Mit den Entwurfsvariablen $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ und \mathbf{Y} lautet das Optimierungsproblem zur Maximierung der unteren Schranke für die Abklingrate:

$$\text{Maximiere } \underline{\alpha}, \quad \text{u. d. B. d.} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Q} \succ 0, \mathbf{Y}, \underline{\alpha} > 0$$

(3.10), (3.12), (3.13), (3.14).

Aufgrund des Terms $\underline{\alpha}\mathbf{Q}$ in (3.10) handelt es sich bei (3.15) streng genommen nicht um ein konvexes Optimierungsproblem. Das Problem ist aber quasikonvex und kann mittels einer Bisektion in $\underline{\alpha}$ iterativ gelöst werden. Die Reglermatrix kann anschließend aus $\mathbf{K}_{2,\text{lin}} = \mathbf{Y}\mathbf{Q}^{-1}$ berechnet werden.

Lineare Regler weisen, wie schon im Falle einer ausschließlichen Stellgrößenbeschränkung, Nachteile bezüglich der Reglerperformance auf. Die Ursache hierfür liegt in einer Begrenzung der Reglerverstärkung durch die Bedingungen (3.12) und (3.13), was zu langsamen Ausregelvorgängen führt. Im betrachteten Fall einer zusätzlichen Stellratenbegrenzung wiegen die Nachteile aber noch schwerer: Insbesondere beim Entwurf linearer Regler für instabile Systeme ergeben sich nur kleine kontraktiv invariante Gebiete. Auf diesen Aspekt wird im folgenden Abschnitt nochmals eingegangen.

3.3 Lineare Sättigungsregler

Die im vorigen Abschnitt betrachteten linearen Regler weisen den Nachteil auf, dass sie weder die verfügbare Stellrate noch die Stellgröße gut ausnutzen. Die Regelgüte lässt sich jedoch deutlich verbessern, indem sättigende Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$ zugelassen werden. In diesem Fall gestaltet sich jedoch der Nachweis der kontraktiven Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ schwieriger. Eine solche Methodik wird in [10] beschrieben. Sie bildet eine wichtige Grundlage für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verfahren und wird daher im Folgenden vorgestellt.

Es werden wiederum das System (2.7) und das Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ gemäß Gl. (3.2) betrachtet. Um sicherzustellen, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant ist, müssen die Bedingungen aus Definition 3.2 erfüllt sein. Mit einer positiv definiten Funktion $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{P} \succ 0$ ist noch sicherzustellen, dass

$$\begin{aligned} \dot{v}(\mathbf{x}) &= 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} \\ &= 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T}\text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{K}_2\mathbf{x}))) < 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Im Unterschied zum linearen Regler müssen hier die beiden ineinander geschachtelten Sättigungsfunktionen berücksichtigt werden. Dies gelingt mit Hilfe eines Satzes aus [10], welcher Bedingungen für die kontraktive Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ unter einer p -fach geschachtelten Sättigungsfunktion angibt. Um diesen Satz für den vorliegenden Fall angeben zu können, wird die Menge

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^m : v_i \in \{1, 2, 3\}\}$$

benötigt, wobei die Dimension m des Vektors \mathbf{v} der Dimension des Eingangsvektors \mathbf{u} bzw. \mathbf{u}_a entspricht. Sie dient dazu, einzelne Zeilen aus Matrizen \mathbf{W}_i auszuwählen und die Matrix

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) = & \text{diag}\{\delta(v_1 - 1), \delta(v_2 - 1), \dots, \delta(v_m - 1)\} \mathbf{W}_1 \\ & + \text{diag}\{\delta(v_1 - 2), \delta(v_2 - 2), \dots, \delta(v_m - 2)\} \mathbf{W}_2 \\ & + \text{diag}\{\delta(v_1 - 3), \delta(v_2 - 3), \dots, \delta(v_m - 3)\} \mathbf{W}_3 \end{aligned}$$

mit

$$\delta(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = 0, \\ 0, & \text{falls } j \neq 0 \end{cases}$$

zu definieren. Die Aufgabe der Matrix $\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3)$ lässt sich anschaulich anhand des folgenden Beispiels erläutern. Angenommen, es gelte $\mathbf{v} = [3 \ 1 \ 2]^T$, dann liefert

$$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{3,1}^T \\ \mathbf{w}_{1,2}^T \\ \mathbf{w}_{2,3}^T \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{w}_{j,i}^T$ die i -te Zeile der Matrix \mathbf{W}_j bezeichnet. Damit lässt sich nun der folgende Satz angeben:

Satz 3.3 ([10]). *Gegeben sei das Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$, das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}))$$

und der Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$. Falls Matrizen $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren, so dass die Bedingungen $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2)$ und

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2)) \\ & + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2))^T \mathbf{P} < 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gelten, dann ist $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant für das oben gegebene System unter der Zustandsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$.

Beweis. Der Beweis findet sich in [10]. □

Der Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$ ist damit nicht mehr direkt beschränkt durch die Stellgrößen- bzw. Stellratenbegrenzung, sondern indirekt über die Tatsache, dass virtuelle Hilfsregler \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 existieren müssen, so

dass sie die Matrixungleichung (3.16) und die Stellraten- bzw. Stellgrößenbegrenzung einhalten. Letzteres ist der Fall, wenn die Bedingungen $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2)$ erfüllt sind. Für die eigentliche Regelung wird jedoch nur der tatsächliche Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}$ verwendet, weshalb \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 keinerlei Performanceansprüchen gerecht werden müssen.

Zusätzlich zu den in Satz 3.3 angegebenen Bedingungen soll sichergestellt werden, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ das Gebiet möglicher Anfangszustände \mathcal{X}_0 beinhaltet. Dies führt wiederum auf Bedingung (3.8).

Auch hier liegen die Entwurfsbedingungen zunächst nicht als LMIs vor. Jedoch erlaubt die Verwendung der Substitutionen $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{Q}$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{Q}$ und $\mathbf{Y}_k = \mathbf{K}_2 \mathbf{Q}$ eine Formulierung der Entwurfsbedingungen als LMIs. Die Zustandsrückführung \mathbf{K}_1 ist wiederum durch das Aktormodell (2.5) festgelegt und somit keine Optimierungsvariable. Durch beidseitige Multiplikation mit $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ ergibt sich aus der Forderung $\mathbf{P} \succ 0$ unmittelbar die Bedingung $\mathbf{Q} \succ 0$. Auf die gleiche Weise kann die Matrixungleichung (3.16) in die LMI

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{K}_1 \mathbf{Q} + \mathbf{T} \mathbf{Y}_2, \mathbf{K}_1 \mathbf{Q} + \mathbf{T} \mathbf{Y}_k) \\ + \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{K}_1 \mathbf{Q} + \mathbf{T} \mathbf{Y}_2, \mathbf{K}_1 \mathbf{Q} + \mathbf{T} \mathbf{Y}_k)^T \mathbf{B}^T \prec 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

transformiert werden [10]. Die Forderungen $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1)$ und $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2)$, d.h. $|\mathbf{h}_{1,i}^T \mathbf{x}| \leq v_{\max,i}$ und $|\mathbf{h}_{2,i}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,i}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und alle $i \in \{1, \dots, m\}$ werden wie im Beweis zu Satz 3.2 im vorigen Abschnitt behandelt. Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{bmatrix} v_{\max,i}^2 & \mathbf{h}_{1,i}^T \\ \mathbf{h}_{1,i} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq 0 \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} u_{\max,i}^2 & \mathbf{h}_{2,i}^T \\ \mathbf{h}_{2,i} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq 0$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$, welche wiederum durch beidseitige Multiplikation mit der regulären, symmetrischen Matrix (3.11) und Anwendung der Substitutionen in die LMIs

$$\begin{bmatrix} v_{\max,i}^2 & \mathbf{y}_{1,i}^T \\ \mathbf{y}_{1,i} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max,i}^2 & \mathbf{y}_{2,i}^T \\ \mathbf{y}_{2,i} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.19)$$

umgeformt werden können [10]. Die Bedingung $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ kann im Falle der Wahl von \mathcal{X}_0 als konvexes Polyeder durch die Forderung (3.8) ausgedrückt werden. Mit Hilfe des Schur-Komplement Lemmas ergibt sich die

zugehörige Formulierung als LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_{0,j}^T \\ \mathbf{x}_{0,j} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.20)$$

Während in [10] die Größe des Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ maximiert wird, liegt bei den in dieser Arbeit durchgeführten Reglerentwürfen der Fokus auf einer hohen Regelgüte. Daher soll, wie schon beim Entwurf eines linearen, nichtsättigenden Zustandsreglers, die Abklingrate des geschlossenen Kreises maximiert werden. Zu diesem Zweck wird in (3.17) die Ungleichung für den Fall $\mathbf{v} = [3, \dots, 3]^T$ ersetzt durch die restriktivere Forderung

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}(\mathbf{K}_1\mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Y}_k) + (\mathbf{K}_1\mathbf{Q} + \mathbf{T}\mathbf{Y}_k)^T \mathbf{B}^T \prec -2\alpha\mathbf{Q}. \quad (3.21)$$

Mit den Entwurfsvariablen \mathbf{Q} , \mathbf{Y}_1 , \mathbf{Y}_2 und \mathbf{Y}_k lautet das Optimierungsproblem zur Maximierung der Abklingrate des gesättigten Systems $\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x})$:

$$\begin{array}{l} \text{Maximiere } \alpha, \quad \text{u. d. B. d.} \\ \mathbf{Q} > 0, \mathbf{Y}_1, \\ \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_k, \alpha > 0 \end{array} \quad (3.22)$$

$$(3.17), (3.18), (3.19), (3.20).$$

Der maximale Wert α_{max} , der sich aus dieser Optimierung ergibt, repräsentiert die untere Schranke für die Abklingrate $\underline{\alpha}$ des virtuellen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}$, d.h., die im tatsächlichen Regelkreis vorhandenen Sättigungsfunktionen werden in Bedingung (3.21) nicht explizit berücksichtigt. Dennoch führt eine höhere Abklingrate $\underline{\alpha}$ auch zu einer Verbesserung der Abklingrate $\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x})$ des gesättigten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\text{max}}}(\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\text{max}}}(\mathbf{K}_2\mathbf{x})).$$

Diese wird durch die virtuellen Hilfsregler \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 beeinflusst, welche über die gemeinsame Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$ auch mit \mathbf{K}_2 in Beziehung stehen. Es gilt

$$\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x}) \in [\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}]$$

mit $\alpha_{\text{min}} = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{\alpha(\mathbf{v})\}$ und

$$\alpha(\mathbf{v}) = \max \{ \alpha > 0 : \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}) < -\alpha\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \}.$$

Eine Erhöhung von α_{\max} führt aufgrund der gemeinsamen Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ auch zu einer Verschiebung von α_{\min} in Richtung α_{\max} und somit zu einer Verbesserung der Abklingrate $\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x})$ des gesättigten Systems. Eine detailliertere Betrachtung findet sich in Abschnitt A.3.

3.4 Nichtlineare Sättigungsregler

Der im vorigen Abschnitt vorgestellte lineare Sättigungsregler aus [10] erzielt aufgrund der Tatsache, dass das Stellsignal hinsichtlich Stellgröße und Stellrate sättigen kann, eine deutlich bessere Performance als ein linearer Regler. Jedoch besteht aufgrund der Linearität im Regelgesetz weiterhin der Nachteil, dass für kleine Auslenkungen um die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, bei denen keine Sättigung stattfindet, die Stellbegrenzungen nur unzureichend ausgenutzt werden. Dieser Nachteil kann aber durch Verwendung eines nichtlinearen sättigenden Regelgesetzes $\mathbf{u} = \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$ vermieden werden. In diesem Fall ist jedoch ein modifizierter Satz über die kontraktive Invarianz erforderlich, welcher im Rahmen dieser Arbeit hergeleitet und im Folgenden allgemein für nichtlineare Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{k}_2(\mathbf{x})))$$

mit $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sowie Gebiete

$$\mathcal{G}_v = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : v(\mathbf{x}) \leq 1\} \quad (3.23)$$

mit positiv definiten Funktion $v(\mathbf{x})$ angegeben wird. Der folgende Satz stellt nun die kontraktive Invarianz von \mathcal{G}_v sicher.

Satz 3.4. *Gegeben sei das Gebiet \mathcal{G}_v gemäß Gl. (3.23), das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}))$$

und der nichtlineare Zustandsregler $\mathbf{u} = \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$. Falls Vektoren $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ existieren, so dass $\mathcal{G}_v \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x})) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}))$ und

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T} \mathbf{h}_2(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T} \mathbf{k}_2(\mathbf{x}))) < 0 \quad (3.24)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_v \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt, dann ist \mathcal{G}_v kontraktiv invariant für das oben gegebene System unter dem Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$.

Beweis. Damit das Gebiet \mathcal{G}_v kontraktiv invariant ist, muss

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{k}_2(\mathbf{x})))) < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_v \setminus \{\mathbf{0}\}$ gelten. Der Nachweis, dass die obige Ungleichung erfüllt ist, sofern die Bedingungen aus Satz 3.4 gelten, wird, ähnlich wie im Beweis von Satz 3.3 in [10], mittels einer oberen Abschätzung von $\dot{v}(\mathbf{x})$ durchgeführt. Zunächst wird die vorige Ungleichung umgeschrieben zu

$$\begin{aligned} \dot{v}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(k_{1i}(\mathbf{x}) + \tau_i \text{sat}_{u_{\max,i}}(k_{2i}(\mathbf{x}))) < 0, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{b}_i(\mathbf{x})$ die i -te Spalte der Matrix $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ bezeichnet. Zur kompakteren Darstellung werden außerdem die Funktionen

$$f_i(\mathbf{x}) = k_{1i}(\mathbf{x}) + \tau_i \text{sat}_{u_{\max,i}}(k_{2i}(\mathbf{x}))$$

verwendet. Nun wird unter Berücksichtigung von $\mathcal{G}_v \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x})) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}))$ eine, von den beiden Sättigungsfunktionen unabhängige, obere Grenze für den Summenterm in $\dot{v}(\mathbf{x})$ hergeleitet. Zunächst wird eine obere Grenze für die äußere Sättigungsfunktion angegeben. Die Herleitung dieser Zusammenhänge ist für ein eindimensionales System in Abbildung 3.3 dargestellt. Es werden vier Fälle betrachtet, in denen $f_i(\mathbf{x})$ sättigt, d.h., $|f_i(\mathbf{x})| \geq v_{\max,i}$:

- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \geq 0$ und $f_i(\mathbf{x}) \leq -v_{\max,i}$, dann

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) h_{1,i}(\mathbf{x}),$$
- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \geq 0$ und $f_i(\mathbf{x}) \geq v_{\max,i}$, dann

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}),$$
- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \leq 0$ und $f_i(\mathbf{x}) \geq v_{\max,i}$, dann

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) h_{1,i}(\mathbf{x}),$$

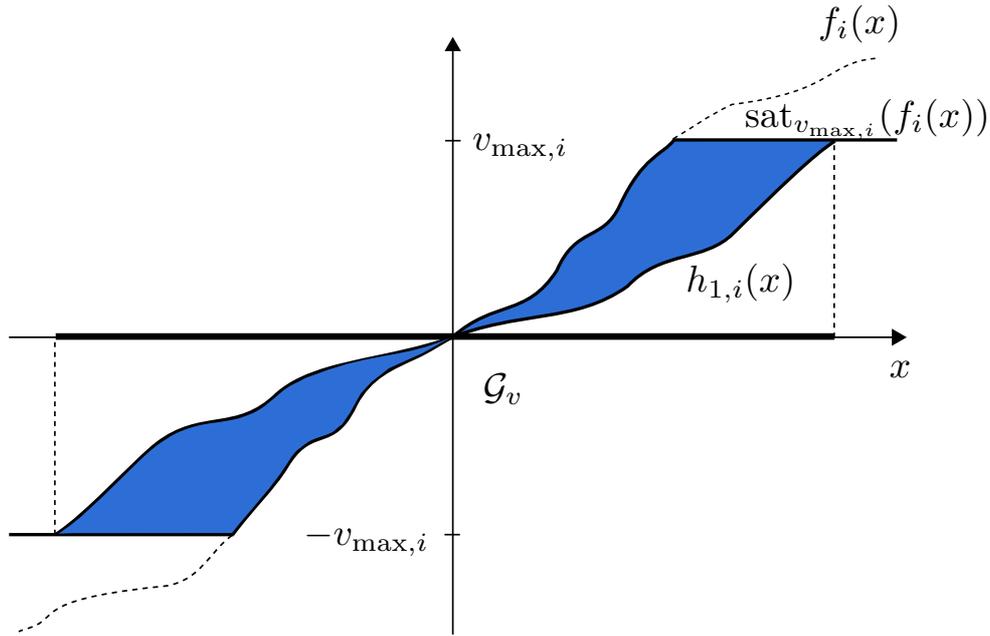


Abbildung 3.3: Berücksichtigung der Sättigungsfunktion im Stabilitätsnachweis: Herleitung einer oberen Abschätzung für $f_i(\mathbf{x})$ mit Hilfe eines virtuellen Reglers $h_{1,i}(\mathbf{x})$ im Falle eines eindimensionalen Systems.

- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \leq 0$ und $f_i(\mathbf{x}) \leq -v_{\max,i}$, dann

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}).$$

Im ungesättigten Fall gilt $\text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) = f_i(\mathbf{x})$. Die Kombination aller Fälle liefert

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \max\{h_{1,i}(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{x})\}.$$

Mit der Funktion $\text{sat}_{u_{\max,i}}(k_{2i}(\mathbf{x}))$ aus $f_i(\mathbf{x})$ wird in gleicher Weise verfahren und es ergibt sich

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \tau_i \text{sat}_{u_{\max,i}}(k_{2i}(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \tau_i \max\{h_{2,i}(\mathbf{x}), k_{2,i}(\mathbf{x})\}.$$

Diese beiden Ungleichungen lassen sich zusammenfassen und es folgt

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max,i}}(f_i(\mathbf{x})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \max\{h_{1,i}(\mathbf{x}), k_{1,i}(\mathbf{x}) + \tau_i h_{2,i}(\mathbf{x}), k_{1,i}(\mathbf{x}) + \tau_i k_{2,i}(\mathbf{x})\}.$$

Mit der Forderung $v(\mathbf{x}) < 0$ ergibt sich als hinreichende Bedingung für die kontraktive Invarianz von \mathcal{G}_v schließlich

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x}) \max \{h_{1,i}(\mathbf{x}), k_{1,i}(\mathbf{x}) + \tau_i h_{2,i}(\mathbf{x}), k_{1,i}(\mathbf{x}) + \tau_i k_{2,i}(\mathbf{x})\} < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_v \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sind alle Argumente der Maximumfunktion negativ, so ist auch das Maximum der Argumente negativ. Dies wird in Satz 3.4 in Bedingung (3.24) unter Verwendung von $\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T}\mathbf{h}_2(\mathbf{x}), \mathbf{k}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{T}\mathbf{k}_2(\mathbf{x}))$ ausgenutzt, indem die obige Ungleichung für alle Argumente der Maximumfunktion überprüft wird. \square

Zur Erläuterung von Satz 3.4, wird ein SISO-System der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \text{sat}_{v_{\max}}(k_1(\mathbf{x}) + \tau \text{sat}_{u_{\max}}(k_2(\mathbf{x})))$$

betrachtet. Für diesen Fall ergibt sich $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{N} : v \in \{1,2,3\}\}$. Damit folgen aus Satz 3.4 die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x})) &< 0, \\ \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})(k_1(\mathbf{x}) + \tau h_2(\mathbf{x}))) &< 0, \\ \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})(k_1(\mathbf{x}) + \tau k_2(\mathbf{x}))) &< 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_v \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\mathcal{G}_v \subseteq \mathcal{L}_{v_{\max}}(h_1(\mathbf{x})) \cap \mathcal{L}_{u_{\max}}(h_2(\mathbf{x}))$ für die kontraktive Invarianz von \mathcal{G}_v . Demnach müssen die virtuellen Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x})$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})(k_1(\mathbf{x}) + \tau h_2(\mathbf{x}))$ und $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})(k_1(\mathbf{x}) + \tau k_2(\mathbf{x}))$ die gemeinsame Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x})$ besitzen. Im MIMO-Fall ergeben sich entsprechend 3^m virtuelle Systeme, die eine gemeinsame Ljapunov-Funktion besitzen müssen.

Satz 3.4 wird in [50] aufgegriffen, um polynomiale Systeme unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung mit polynomialen Reglern zu stabilisieren. Im Falle von Strecken mit linearer Dynamik und linearen Zustandsrückführungen ergibt sich aus Satz 3.4 unmittelbar Satz 3.3.

Für den Fall, dass ein System mit linearer Dynamik mit Hilfe eines nichtlinearen Reglers stabilisiert werden soll, lässt sich der folgende Satz verwenden.

Satz 3.5. *Gegeben sei die Regelstrecke*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{u})),$$

das Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$ und das Gebiet \mathcal{G}_v . Falls Vektoren $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass $\mathcal{G}_v \subset \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x})) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}))$ und

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{h}_2(\mathbf{x}), \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{k}_2(\mathbf{x}))) < 0$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_v$ gilt, dann ist \mathcal{G}_v kontraktiv invariant für die Regelstrecke unter Verwendung des Regelgesetzes $\mathbf{u} = \mathbf{k}_2(\mathbf{x})$.

Beweis. Satz 3.5 folgt unmittelbar aus Satz 3.4 für ein mit linearer Dynamik, d.h. $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$ und $\mathbf{k}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{K}_1 \mathbf{x}$. \square

Satz 3.5 wird im folgenden Abschnitt genutzt, um nichtlineare Regelungen für Systeme mit linearer Dynamik zu entwerfen.

3.5 Fazit

Die in diesem Kapitel eingeführten Grundbegriffe sind im Rahmen dieser Arbeit von wesentlicher Bedeutung. Die in den folgenden beiden Kapiteln vorgestellten Regelverfahren liefern jeweils eine Approximation des Einzugsgebietes einer Ruhelage unter Verwendung der in Abschnitt 3.1.1 eingeführten kontraktiv invarianten Gebiete. Bei der Optimierung der Regelverfahren wird im Folgenden zumeist die in Abschnitt 3.1.3 definierte Abklingrate des geschlossenen Regelkreises maximiert. Der in Abschnitt 3.3 vorgestellte lineare Sättigungsregler wird ebenso wie der lineare Regler aus Abschnitt 3.2 als Vergleichsregler zur Bewertung der entwickelten Regelungsverfahren verwendet. Des Weiteren erfordert die Parametrierung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten sättigenden Führungsreglers den Entwurf eines linearen Sättigungsreglers.

Satz 3.4 ist bereits ein erstes Ergebnis dieser Arbeit. Er bildet die entscheidende Grundlage für den Entwurf weich strukturvariabler Regler im nun folgenden Kapitel. Im Stabilitätsnachweis für den sättigenden Führungsreglers wird ebenfalls auf dieses Ergebnis zurückgegriffen.

4 Weich strukturvariable Regelungen

Die in Abschnitt 3.3 erläuterten linearen Sättigungsregler erlauben eine, im Vergleich zu einem nichtsättigenden linearen Regler, bessere Nutzung des verfügbaren Stellbereichs und somit einen deutlich schnelleren Ausregelvorgang. Dennoch weisen sie den Nachteil auf, dass auch hier aufgrund des linearen Regelgesetzes der Stellbereich für kleine Auslenkungen nicht gut ausgeschöpft wird. Dieser Nachteil kann durch den Einsatz nichtlinearer Regelgesetze vermieden werden. Diese Idee liegt den weich strukturvariablen Regelungen zu Grunde.

Für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung existieren, wie bereits in Abschnitt 2.5.4 erwähnt, verschiedene Versionen weich strukturvariabler Regelungen. In dieser Arbeit wird das Konzept der weich strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktion nach [1] aufgegriffen. Diese Methode wird im Folgenden auch als implizite Regelung bezeichnet. Diese wird in [49] auf eine bestimmte Klasse von MIMO-Systemen erweitert, jedoch ist eine sättigende Stellgröße ausgeschlossen.

Die existierenden Versionen der impliziten Regelung sind also bislang nur für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung und nicht auf allgemeine MIMO-Systeme anwendbar. In dieser Arbeit wird eine Erweiterung auf Systeme unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung, sowie auf allgemeine Systeme mit mehreren Eingängen vorgestellt. Dazu findet Satz 3.5 aus Abschnitt 3.4 sowie die erstmals in [67] angegebene Auswahlstrategie Verwendung.

4.1 Grundlagen

Um eine implizite Regelung für ein lineares System (2.1) unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung zu entwerfen, wird zunächst das in Abschnitt 2.2 eingeführte Aktormodell verwendet und das erweiterte System (2.7) gebildet. Es wird nun vorausgesetzt, dass die Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen symmetrisch sind, d.h., es gilt $u_{\min,i} = -u_{\max,i}$

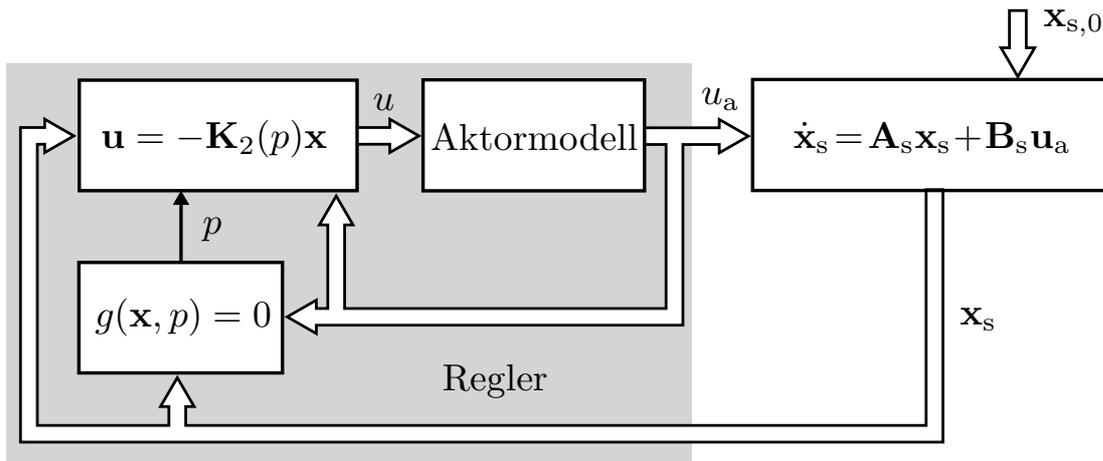


Abbildung 4.1: Blockschaltbild einer impliziten Regelung für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung. Ein Aktormodell wird in den Regler integriert und stellt sicher, dass \mathbf{u}_a die Stellbegrenzungen einhält. Der Parameter p wird mit Hilfe der impliziten Gleichung $g(\mathbf{x}, p) = 0$ aus dem aktuellen Zustand $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \ \mathbf{u}_a^T]^T$ bestimmt.

und $v_{\min,i} = -v_{\max,i}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Das Grundprinzip der impliziten Regelung besteht darin, eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_2(p)\mathbf{x}$$

in Abhängigkeit eines Selektionsparameters $p \in (0, \bar{p}]$ so zu verändern, dass der zur Verfügung stehende Stellbereich möglichst gut ausgenutzt wird. Der Selektionsparameter wird dabei aus einer impliziten Gleichung bestimmt. Abbildung 4.1 zeigt ein Blockschaltbild der impliziten Regelung. Zunächst wird jedem Regler $\mathbf{K}_2(p)$ ein kontraktiv invariantes Gebiet

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}, p) < 0\}$$

zugeordnet. Dabei ist sicherzustellen, dass diese Gebiete infinitesimal dicht ineinander geschachtelt sind, d.h., es gilt $\mathcal{G}(p - \epsilon) \subset \mathcal{G}(p)$ für jedes beliebig kleine $\epsilon > 0$. Da die Gebiete $\mathcal{G}(p)$ kontraktiv invariant sind, kann eine Trajektorie, die in ein Gebiet $\mathcal{G}(p)$ einläuft, dieses im weiteren Verlauf nicht mehr verlassen. Für eine endliche Anzahl an Reglern $\mathbf{K}_2(p)$ zeigt Abbildung 4.2 (a) die Schachtelung der Gebiete. Um den Ausregelvorgang zu beschleunigen, erfolgt die Wahl der Regler $\mathbf{K}_2(p)$ derart, dass die Eigenwerte des Systems

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 - \mathbf{T}\mathbf{K}_2(p)$$

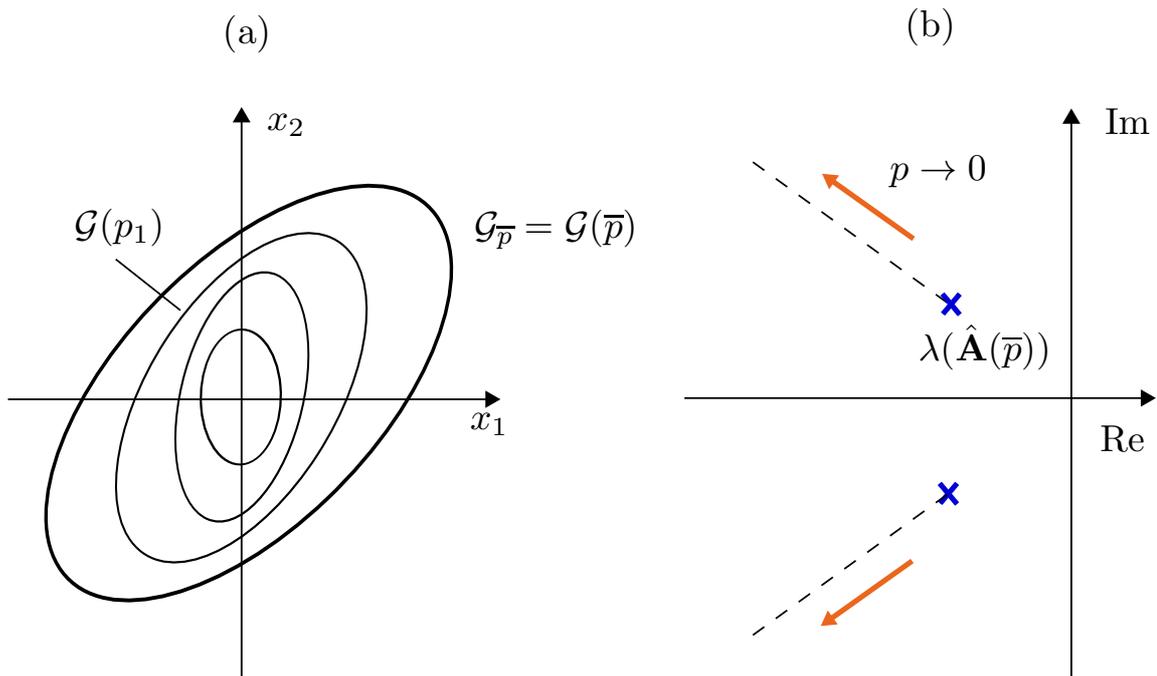


Abbildung 4.2: (a) Schachtelung der kontraktiv invarianten Gebiete $\mathcal{G}(p)$: Mit fallendem Auswahlparameter p ziehen sich die Gebiete um die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ zusammen. (b) Verschiebung der Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}(p)$ ausgehend von $\lambda(\hat{\mathbf{A}}(\bar{p}))$ mit fallendem p auf Strahlen in der komplexen Ebene.

auf Strahlen in der linken komplexen s-Halbebene verschoben werden. Dies wird in Abbildung 4.2 (b) illustriert. Ein Regler $\mathbf{K}_2(p)$ wird dann aktiviert, wenn die Trajektorie in das zugehörige Gebiet $\mathcal{G}(p)$ eintritt, d.h., wenn \mathbf{x} auf dem Rand des Gebietes $\mathcal{G}(p)$ liegt und somit $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}, p) = 0\}$ gilt. Daraus folgt unmittelbar die Selektionsstrategie

$$g(\mathbf{x}, p) = 0 \quad (4.1)$$

zur Bestimmung des Auswahlparameters p . Ist die Selektionsstrategie (4.1) hinsichtlich p eindeutig lösbar, ist jedem Zustand $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(\bar{p})$ eindeutig ein Regler $\mathbf{K}_2(p)$ zugeordnet. Außerdem ist $g(\mathbf{x}, p)$ so zu wählen, dass der geschlossene Regelkreis stabil ist. Sind die Bedingungen des folgenden Satzes erfüllt, so sind die eindeutige Lösbarkeit der Selektionsstrategie (4.1) und die Stabilität des geschlossenen Regelkreises gewährleistet.

Satz 4.1 ([1, 2]). *Die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung \mathcal{U}_1 des Ursprungs eine stetige und eindeutige Lösung. Es existiere in einer Menge*

$$\mathcal{H} = \{(p, \mathbf{x}) : 0 < p < \bar{p}, \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

wobei $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1$ ebenfalls eine Umgebung des Ursprungs sei, eine stetige Funktion $g(\mathbf{x}, p)$, so dass die Bedingungen

1. Für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ resultiert aus $g(\mathbf{x}, p) = 0$ der Grenzübergang $p \rightarrow 0+$,
2. $\lim_{p \rightarrow 0+} g(\mathbf{x}, p) > 0$ und $\lim_{p \rightarrow \bar{p}-} g(\mathbf{x}, p) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$.
3. $-\infty < \partial g(\mathbf{x}, p) / \partial p < 0$ für alle $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$
4. $\partial g(\mathbf{x}(t), p) / \partial t < 0$ für alle $(p, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$ mit $g(\mathbf{x}, p) = 0$

erfüllt sind, dann ist die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil. Des Weiteren ist durch die Gleichung $g(\mathbf{x}, p) = 0$ in $\mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine Funktion $p(\mathbf{x})$ implizit definiert, die in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ durch $p(\mathbf{0}) = 0$ stetig erweiterbar ist. Diese erweiterte Funktion ist in \mathcal{U}_0 eine Ljapunov-Funktion für das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Beweis. Satz 4.1 ist eine Kombination expliziter Stabilitätssätze mit dem Satz über implizite Funktionen (siehe beispielsweise [23]). Für einen ausführlichen Beweis sei auf [1, 2] verwiesen. \square

Zunächst wird die Funktion $g(\mathbf{x}, p)$ in Abhängigkeit von $p \in (0, \bar{p})$ betrachtet. Aufgrund von Bedingung 2 gilt $g(\mathbf{x}, p) > 0$ an der unteren Intervallgrenze, während $g(\mathbf{x}, p) < 0$ an der oberen Intervallgrenze gilt. Durch Bedingung 3 ist sichergestellt, dass $g(\mathbf{x}, p)$ mit zunehmendem p streng monoton fällt. Somit stellen Bedingungen 2 und 3 des Satzes sicher, dass die Funktion $g(\mathbf{x}, p)$ im Intervall $(0, \bar{p})$ genau eine Nullstelle besitzt. Gemäß [76] ist die Funktion $p(\mathbf{x})$ eine Ljapunov-Funktion der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ in der Umgebung \mathcal{U} , falls diese die Bedingungen $p(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p(\mathbf{0}) = 0$ und $\dot{p}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$ erfüllt. Die Definition von \mathcal{H} stellt sicher, dass $p(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt. Bedingung 1 garantiert, dass $p(\mathbf{x})$ in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stetig erweiterbar ist. Somit gilt auch $p(\mathbf{0}) = 0$. Bedingungen 3 und 4 wiederum stellen sicher, dass

$$\dot{p}(\mathbf{x}(t)) = -\frac{\partial g(\mathbf{x}(t), p) / \partial t}{\partial g(\mathbf{x}(t), p) / \partial p} < 0$$

gilt und $p(\mathbf{x})$ ist eine Ljapunov-Funktion der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\bar{p} = 1$ festgelegt.

4.2 Regelungsnormalform für MIMO-Systeme

Bevor die konkrete Wahl der Funktion $g(\mathbf{x}, p)$ und der Zustandsrückführung $\mathbf{K}_2(p)$ erläutert wird, wird zunächst auf die Regelungsnormalform für Mehrgrößensysteme eingegangen. Es wird sich zeigen, dass die Darstellung des Systems (2.7) in der Regelungsnormalform für den Entwurf einer strukturvariablen Regelung in besonderer Weise geeignet ist. In [90] werden verschiedene Normalformen für lineare Mehrgrößen-Systeme vorgestellt. Eine ausführlichere Erläuterung findet sich ebenfalls in [137]. Im Folgenden soll nun die Transformation eines MIMO-Systems in die Regelungsnormalform erläutert werden.

Dazu wird vorausgesetzt, dass die Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{M}_b = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^n\mathbf{B}]$$

den Rang n besitzt. Unter Verwendung der Strategie der gleichlangen Ketten [90] lässt sich zunächst eine Matrix

$$\mathbf{P}_{Gl} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{A}^{\kappa_1-1}\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{A}^{\kappa_m-1}\mathbf{b}_m] \quad (4.2)$$

berechnen, wobei \mathbf{b}_i die i -te Spalte der Eingangsmatrix $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]$ bezeichnet. Um die Transformation $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}$ durchführen zu können, muss die Matrix \mathbf{P}_{Gl} invertierbar sein. Daher werden nur Spalten $\mathbf{A}^i\mathbf{b}_i$ hinzugefügt, wenn dadurch der Rang von \mathbf{P}_{Gl} vergrößert wird und $\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}_i$ zuvor bereits hinzugefügt wurde. Gilt $\text{rang}(\mathbf{P}_{Gl}) = n$, werden keine weiteren Spalten hinzugefügt. Nun wird zunächst die Inverse \mathbf{P}_{Gl}^{-1} berechnet, aus welcher die Transformationsmatrix $\mathbf{\Gamma}$ wie folgt gewonnen

und der Eingangsmatrix

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & \tilde{b}_{1,2} & \tilde{b}_{1,3} & \dots & \tilde{b}_{1,m} \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{b}_{2,3} & \dots & \tilde{b}_{2,m} \\ & & \vdots & & \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Das Ergebnis der Transformation hängt mit der Anordnung der Spalten \mathbf{b}_i in \mathbf{B} zusammen. Da die Nummerierung der Eingänge aber frei wählbar ist, ist eine spaltenweise Umsortierung der Eingangsmatrix stets möglich, so dass jedes steuerbare System in die obige Darstellung transformiert werden kann [90]. Bei Systemen, bei welchen die mit $\tilde{b}_{i,j}$ bezeichneten Elemente in $\tilde{\mathbf{B}}$ null sind, vereinfacht sich die im Folgenden hergeleitete Methode deutlich. Im Allgemeinen können die Elemente jedoch von null verschieden sein, was beispielsweise in [124] gezeigt wird. Während im Fall der impliziten Regelung für Mehrgrößensysteme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen aus [49] der Entwurf nur für Systeme möglich ist, bei denen $\tilde{b}_{i,j} = 0$ für alle i, j gilt, ist der in dieser Arbeit entwickelte Entwurf nicht auf diese Systemklasse beschränkt.

Bei Betrachtung von $\tilde{\mathbf{A}}$ ergeben sich durch die Transformation Teilsysteme auf der Diagonalen, die ebenfalls in einer Regelungsnormform vorliegen. Diese sind jedoch gegebenenfalls über die Elemente $-a_{j,i}$ miteinander verknüpft. Auch die Einträge $\tilde{b}_{i,j}$ in $\tilde{\mathbf{B}}$ sind im Allgemeinen von null verschieden, weshalb die Teilsysteme in diesem Fall auch über die Stellsignale miteinander verknüpft sind. Im Rahmen der nun folgenden Ausführungen werden die Vektoren

$$\mathbf{a}_j = [a_{j,1} \ a_{j,2} \ \dots \ a_{j,n}]^T$$

mit $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ benötigt.

4.3 Regelgesetz und Auswahlstrategie

In diesem Abschnitt werden das Regelgesetz und die Auswahlstrategie genauer erläutert. Dazu wird davon ausgegangen, dass das System (2.7) in der Regelungsnormalform vorliegt oder mit Hilfe der im vorigen Abschnitt beschriebenen Transformation in diese transformiert wurde. Dies ist in der Regel immer notwendig, da das erweiterte System selbst dann nicht in der Regelungsnormalform vorliegt, wenn das Originalsystem (2.1) in dieser Form gegeben ist. Die Ursache hierfür liegt in der Systemerweiterung nach Gl. (2.8). Außerdem ist zu beachten, dass auch die Zustandsrückführung \mathbf{K}_1 , welche die Rückführung von \mathbf{u}_a im Aktormodell (2.5) repräsentiert, transformiert werden muss.

Ein Ziel bei der Wahl des Reglers ist es, eine Darstellung der Entwurfsbedingungen zu erhalten, die nach Möglichkeit vom Auswahlparameter p unabhängig ist. Die Wahl von $\mathbf{K}_2(p)$ bzw. seinen Zeilenvektoren $\mathbf{k}_{2,j}^T(p)$ zu

$$\mathbf{k}_{2,j}^T(p) = \tau_j^{-1} \left(\hat{\mathbf{a}}'_{*,j}{}^T \mathbf{D}^{-1}(p) - (\mathbf{a}'_j - \mathbf{k}_{1,j})^T \right) \quad (4.3)$$

mit $j \in \{1, \dots, m\}$ und

$$\mathbf{D}(p) = \text{diag}(p^{\kappa_1}, p^{\kappa_1-1}, \dots, p, p^{\kappa_2}, p^{\kappa_2-1}, \dots, p, \dots, p^{\kappa_m}, p^{\kappa_m-1}, \dots, p)$$

ist unter diesem Gesichtspunkt besonders günstig. Dabei werden die Skalare κ_i aus (4.2) entnommen. Im Unterschied zu [49] werden die Vektoren \mathbf{a}'_i und $\hat{\mathbf{a}}'_{*,m}$ in rekursiver Weise gewählt. Beginnend mit \mathbf{a}'_m bzw. $\hat{\mathbf{a}}'_{*,m}$ wird

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_m &= \mathbf{a}_m, \\ \mathbf{a}'_{m-1} &= \mathbf{a}_{m-1} - \tilde{b}_{m-1,m} \mathbf{a}'_m, \\ &\vdots \\ \mathbf{a}'_i &= \mathbf{a}_i - \sum_{j=i+1}^m \tilde{b}_{i,j} \mathbf{a}'_j \end{aligned} \quad (4.4)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{a}}'_{*,m} &= \hat{\mathbf{a}}_{*,m}, \\
\hat{\mathbf{a}}'_{*,m-1} &= \hat{\mathbf{a}}_{*,m-1} - \tilde{b}_{m-1,m} \hat{\mathbf{a}}'_{*,m}, \\
&\vdots \\
\hat{\mathbf{a}}'_{*,i} &= \hat{\mathbf{a}}_{*,i} - \sum_{j=i+1}^m \tilde{b}_{i,j} \hat{\mathbf{a}}'_{*,j}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

berechnet. Die Vektoren $\hat{\mathbf{a}}_{*,i}$ stellen dabei Entwurfparameter dar. Um zu erläutern, warum diese Wahl vorteilhaft ist, wird im Folgenden der virtuelle Regelkreis

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 - \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2(p)$$

betrachtet, dessen Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{K}_1 in der im vorigen Abschnitt vorgestellten Regelungsnormform vorliegen. Offensichtlich wirkt die Zeile $\mathbf{k}_{2,m}^T(p)$ des Reglers $\mathbf{K}_2(p)$ aufgrund der Elemente $\tilde{b}_{i,j}$ der transformierten Eingangsmatrix nicht nur auf das m -te Teilsystem, sondern auch auf alle Weiteren, darunter auch das $m-1$ -te Teilsystem. Durch die oben angegebene Wahl der \mathbf{a}'_{m-1} bzw. $\hat{\mathbf{a}}'_{*,m-1}$ wird diese Auswirkung auf das $m-1$ -te Teilsystem kompensiert. Auf das i -te Subsystem wirken sich wiederum über $\tilde{b}_{i,j}$ alle Reglerzeilen $\mathbf{k}_{2,l}(p)^T$ mit $l = i+1, \dots, m$ aus. Diese werden mit Hilfe der Summen in den Gleichungen (4.4) und (4.5) kompensiert.

Schließlich ergibt sich die folgende Darstellung von $\hat{\mathbf{A}}(p)$

$$\hat{\mathbf{A}}(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & -\hat{\mathbf{a}}_{*,1}^T \mathbf{D}^{-1}(p) & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & & 0 & \dots & & & 1 \\ & & & & -\hat{\mathbf{a}}_{*,m}^T \mathbf{D}^{-1}(p) & & & & & & \end{bmatrix},$$

welche auch durch

$$\hat{\mathbf{A}}_*(p) = \frac{1}{p} \mathbf{D}(p) \hat{\mathbf{A}}_*(1) \mathbf{D}^{-1}(p)$$

ausgedrückt werden kann.

Nachdem die Wahl der Zustandsrückführung erläutert wurde, wird nun auf die Wahl der Selektionsstrategie eingegangen. Auch im Falle der impliziten Regelung bietet es sich an, Ellipsoide als kontraktiv invariante Gebiete $\mathcal{G}(p)$ anzusetzen und zur Definition der Auswahlstrategie zu verwenden. Daher wird

$$g(\mathbf{x}, p) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 = 0 \quad (4.6)$$

mit $\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p)$ und $\mathbf{R}_1 \succ 0$ als Auswahlstrategie gewählt, woraus sich die Gebiete

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}, p) < 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} - 1 < 0\} \quad (4.7)$$

ergeben. Die Auswahlstrategie (4.6) entspricht der in [67] verwendeten Version und unterscheidet sich dabei von der ursprünglichen Version in [1], [4]. Auf diesen Umstand wird in Abschnitt 4.6 genauer eingegangen. Verglichen mit dem Ansatz [49] erlaubt die Auswahlstrategie (4.6) zusammen mit dem Regelgesetz (4.3) eine deutlich gesteigerte Entwurfsfreiheit hinsichtlich der Matrix \mathbf{R}_1 ¹.

4.4 Stabilität der impliziten Regelung

In diesem Abschnitt sollen Bedingungen hergeleitet werden, die sicherstellen, dass der mit der impliziten Regelung geschlossene Regelkreis stabil ist und der Auswahlparameter p eine Ljapunov-Funktion des Regelkreises ist. Zu diesem Zweck müssen die Bedingungen aus Satz 4.1 erfüllt sein. Unter Verwendung der Zustandsrückführung (4.3) zusammen mit der Auswahlstrategie (4.6), lässt sich der folgende Satz angeben.

Satz 4.2. *Gegeben sei das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

in Regelungsnormalform, das Regelgesetz (4.3) und die Selektionsstrategie (4.6). Falls eine Matrix $\mathbf{R}_1 \succ 0$ und virtuelle Zustandsrückführungen $\mathbf{H}_1(p), \mathbf{H}_2(p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren, so dass die Bedingungen

$$\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} \prec 0, \quad (4.8a)$$

¹Im Falle der impliziten Regelung aus [49] hat \mathbf{R}_1 die Gestalt einer Blockdiagonalmatrix.

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}(p) (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1(p), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2(p), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2(p))) \\ & + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1(p), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2(p), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2(p)))^T \mathbf{R}(p) \prec 0, \\ & \forall p \in (0, 1], \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (4.8b) \end{aligned}$$

und $\mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1(p)) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2(p))$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \text{diag} & (-\kappa_1, -(\kappa_1 - 1), \dots, -1, -\kappa_2, -(\kappa_2 - 1), \dots, -1, \\ & -\kappa_m, -(\kappa_m - 1), \dots, -1) \end{aligned}$$

gelten, dann stabilisiert der Regler (4.3) mit der Auswahlstrategie (4.6) die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass bei Erfüllung der Bedingungen von Satz 4.2 die Bedingungen 1-4 aus Satz 4.1 erfüllt sind. Dann nämlich ist durch $g(\mathbf{x}, p) = 0$ eine Ljapunov-Funktion $p(\mathbf{x})$ implizit definiert.

Zunächst werden die Forderungen 1 bis 3 aus Satz 4.1 betrachtet: Die Definition der kontraktiv invarianten Gebiete nach Gl. (4.6) mit der positiv definiten Matrix $\mathbf{R}(p)$ führt in Satz 4.2 zu der Forderung $\mathbf{R}_1 \succ 0$.

Zur Überprüfung von Bedingung 1 aus Satz 4.1 wird zunächst gezeigt, dass der Grenzwert des maximalen Eigenwertes von $\mathbf{R}(p)$ mit $g(\mathbf{x}, p) = 0$ an der Stelle $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ gegen unendlich strebt. Gemäß [15] gilt die obere Abschätzung

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \geq \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x}$$

und mit Gleichung (4.6), d.h., $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} = 1$, folgt

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p(\mathbf{x})))}.$$

Daher muss für den Grenzwert $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p(\mathbf{x})))} = 0 \\ \Rightarrow & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p(\mathbf{x}))) = \infty \end{aligned}$$

gelten. Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))$ nur für den Grenzwert $p \rightarrow 0^+$ gegen unendlich strebt. Wegen $\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p)$ mit $\mathbf{R}_1 \succ 0$ folgt

$$0 < \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) < \infty$$

für alle $p \in (0,1]$. Weiterhin kann $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p))$ von unten mit

$$\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1)\lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(p))$$

abgeschätzt werden [15]. Mit $\lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(p)) = p^{-2}$ für $p \in (0,1]$ berechnet sich der Grenzwert zu

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \cdot \lim_{p \rightarrow 0^+} p^{-2} = \infty.$$

Daraus folgt $\lambda_{\max}(\mathbf{R}(p)) \rightarrow \infty$, wenn $p \rightarrow 0^+$ gilt. Zusammen mit den vorigen Betrachtungen folgt darüber hinaus, dass für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ aus $\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} = 1$ der Grenzübergang $p \rightarrow 0^+$ resultiert. Damit ist Bedingung 1 aus Satz 4.1 erfüllt.

Nun wird Bedingung 2 betrachtet. Für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0^+} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{R}_1 \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x} &\geq \lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{x} \cdot \lim_{p \rightarrow 0^+} \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{-2}(p)) \\ &= \underbrace{\lambda_{\min}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{x}}_{>0} \cdot \underbrace{\lim_{p \rightarrow 0^+} p^{-2}}_{=\infty}, \end{aligned}$$

und somit folgt für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$, dass $\lim_{p \rightarrow 0^+} g(\mathbf{x}, p) = \infty > 0$ gilt. Für die obere Grenze folgt aus der Definition der Gebiete $\mathcal{G}(p)$ in Gl. (4.7) für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)$ offenbar $\lim_{p \rightarrow 1^-} g(\mathbf{x}, p) = g(\mathbf{x}, p) < 0$. Damit ist gezeigt, dass auch Bedingung 2 erfüllt ist.

Zur Überprüfung von Bedingung 3 wird die partielle Ableitung

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, p)}{\partial p} = \frac{1}{p} \mathbf{x}^T \mathbf{D}^{-1}(p) (\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}) \mathbf{D}^{-1}(p) \mathbf{x}$$

berechnet. Sie ist endlich für alle $(p, \mathbf{x}) \in (0,1] \times \mathcal{G}(1) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und negativ, wenn die Matrix $\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N}$ negativ definit ist. Dies stellt Bedingung (4.8a) sicher und Bedingung 3 ist somit ebenfalls erfüllt. Zusammen mit den Bedingungen 1 und 2 ist sichergestellt, dass die Funktion $p(\mathbf{x})$ in $\mathcal{G}(1)$ implizit durch (4.6) definiert ist.

Schließlich lautet Bedingung 4

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}(t), p)}{\partial t} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, p)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}(p) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) \dot{\mathbf{x}} < 0.$$

Nun wird Satz 3.5 herangezogen. Danach ist die obige Bedingung erfüllt, falls die Matrixungleichungen (4.8b) und $\mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1(p)) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2(p))$ gelten. Es lässt sich also festhalten, dass alle Bedingungen aus Satz 4.1 sichergestellt sind, sofern die Bedingungen aus Satz 4.2 erfüllt sind. \square

Die Bedingungen aus Satz 4.2 eignen sich noch nicht unmittelbar zum Entwurf eines impliziten Reglers. Dazu müssen zunächst die virtuellen Hilfsregler $\mathbf{H}_1(p)$ und $\mathbf{H}_2(p)$ in geeigneter Weise gewählt werden. Dabei ist wie schon bei der Wahl von $\mathbf{K}_2(p)$ wichtig, dass die Darstellung der Entwurfsbedingungen unabhängig vom Auswahlparameter p erfolgen kann. Dies ist der Fall, wenn die Hilfsregler

$$\mathbf{h}_{1,j}^T(p) = \hat{\mathbf{a}}'_{1,j}{}^T \mathbf{D}^{-1}(p) - \mathbf{a}'_j{}^T, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{h}_{2,j}^T(p) = \tau_j^{-1} \left(\hat{\mathbf{a}}'_{2,j}{}^T \mathbf{D}^{-1}(p) - (\mathbf{a}'_j - \mathbf{k}_{1,j})^T \right) \quad (4.10)$$

mit $j = \{1, 2, \dots, m\}$, die Vektoren \mathbf{a}'_j aus Gl. (4.4) und die Vektoren

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}'_{i,m} &= \hat{\mathbf{a}}_{*,m}, \\ \hat{\mathbf{a}}'_{i,m-1} &= \hat{\mathbf{a}}_{*,m-1} - \tilde{b}_{m-1,m} \hat{\mathbf{a}}'_{*,m}, \\ &\vdots \\ \hat{\mathbf{a}}'_{i,l} &= \hat{\mathbf{a}}_{*,l} - \sum_{j=l+1}^m \tilde{b}_{l,j} \hat{\mathbf{a}}'_{*,j} \end{aligned}$$

mit $i \in \{1, 2\}$ verwendet werden. Die sich hieraus ergebenden Entwurfsbedingungen werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

4.5 Entwurf

Für den Reglerentwurf müssen die Matrix \mathbf{R}_1 und die Vektoren $\hat{\mathbf{a}}_{i,j}$ so bestimmt werden, dass die Bedingungen von Satz 4.2 erfüllt sind. Dies ist der Fall, wenn der Entwurf auf Basis des, in diesem Abschnitt beschriebenen, konvexen Optimierungsproblems erfolgt. Dazu werden zunächst die Stabilitätsbedingungen in Satz 4.2 in lineare Matrixungleichungen umgewandelt. Danach wird ein konvexes Gütekriterium vorgestellt.

Eine Formulierung der Bedingungen aus Satz 4.2 als lineare Matrixungleichungen ist mit Hilfe der Substitutionen

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_{i,1}^T \\ \tilde{\mathbf{y}}_{i,2}^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}_{i,m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}'_{i,1}{}^T \mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{a}}'_{i,2}{}^T \mathbf{Q} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}'_{i,m}{}^T \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

möglich. Die Entwurfsbedingungen liefert

Satz 4.3. *Gegeben sei das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

in Regelungsnormalform, das Regelgesetz (4.3), die Selektionsstrategie (4.6) und ein frei wählbares Polynom $\gamma(p)$ mit $\gamma(p) \geq 0$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$. Falls Matrizen $\mathbf{Q} \succ 0$, $\tilde{\mathbf{Y}}_1$, $\tilde{\mathbf{Y}}_2$ und $\tilde{\mathbf{Y}}_*$ existieren, so dass die Bedingungen

$$\mathbf{Q}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Q} \prec 0, \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G})^T - \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{Y}}_1, \tilde{\mathbf{Y}}_2, \tilde{\mathbf{Y}}_*) \\ - \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{Y}}_1, \tilde{\mathbf{Y}}_2, \tilde{\mathbf{Y}}_*)^T \mathbf{B}^T \prec 0, \end{aligned} \quad (4.12b)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$,

$$\begin{bmatrix} v_{\max,j}^2 - \gamma(p)s_{1,j}(p) & \tilde{\mathbf{y}}_{1,j}^T - \mathbf{a}'_j{}^T \mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{1,j} - \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{a}'_j & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[p], \quad (4.12c)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max,j}^2 - \gamma(p)s_{2,j}(p) & \tilde{\mathbf{y}}_{2,j}^T - \tilde{\mathbf{a}}'_j{}^T \mathbf{D}^{-1}(p)\mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{2,j} - \mathbf{Q}\mathbf{D}^{-1}(p)\tilde{\mathbf{a}}'_j & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[p], \quad (4.12d)$$

$$s_{k,j}(p) \in \Sigma[p], \quad \forall k \in \{1, 2\}, \quad (4.12e)$$

für alle $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ mit $\tilde{\mathbf{a}}'_j = \tau_j^{-1}(\mathbf{a}'_j - \mathbf{k}_{1,j})$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \operatorname{diag}(-\kappa_1, -(\kappa_1 - 1), \dots, -1, -\kappa_2, -(\kappa_2 - 1), \dots, -1, \\ -\kappa_m, -(\kappa_m - 1), \dots, -1) \end{aligned}$$

gelten, dann stabilisiert der Regler (4.3) mit der Auswahlstrategie (4.6) die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems.

Beweis. Aufgrund der Wahl von $\mathbf{K}_2(p)$, $\mathbf{H}_1(p)$ und $\mathbf{H}_2(p)$ entsprechend den Gleichungen (4.3), (4.9) und (4.10) lassen sich die Terme $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{v}}(p) = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1(p), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2(p), \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2(p))$ in den Matrixungleichungen (4.8b) unabhängig vom Selektionsparameter p darstellen und es gilt

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{v}}(p) = \frac{1}{p}\mathbf{D}(p)\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{v},1}\mathbf{D}^{-1}(p),$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{v},1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1 & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & -\hat{\mathbf{a}}_{g,\mathbf{v},1}^T & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & & & 0 & \dots & & & 1 \\ & & & & -\hat{\mathbf{a}}_{g,\mathbf{v},m}^T & & & & & & \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{g,\mathbf{v},i} = \hat{\mathbf{a}}'_{v_i,i} + \sum_{j=2}^m \tilde{b}_{i,j} \hat{\mathbf{a}}'_{v_j,j}$$

und

$$\hat{\mathbf{a}}'_{v_i,i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}'_{1,i}, & \text{wenn } v_i = 1, \\ \hat{\mathbf{a}}'_{2,i}, & \text{wenn } v_i = 2, \\ \hat{\mathbf{a}}'_{*,i}, & \text{wenn } v_i = 3. \end{cases}$$

Nach Einsetzen von $\mathbf{R}(p)$ und Multiplikation mit $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1}$ ergeben sich aus den Bedingungen (4.8b) die Matrixgleichungen (4.12b). Des Weiteren ist $\mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1(p)) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2(p))$ sicherzustellen, wonach $|\mathbf{h}_{1,j}^T(p)\mathbf{x}| \leq v_{\max,j}$ und $|\mathbf{h}_{2,j}^T(p)\mathbf{x}| \leq u_{\max,j}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(p)$ und $j = \{1, \dots, m\}$ gelten muss. Die maximale Stellgröße bzw. Stellrate innerhalb eines Gebietes $\mathcal{G}(p)$ ergibt sich analog zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 3.2 zu

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}(p)} |\mathbf{h}_{k,j}^T(p)\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{h}_{k,j}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{h}_{k,j}(p)}, \quad k = \{1,2\}.$$

Es gilt also $\mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1(p))$ sofern die Ungleichungen

$$v_{\max,j}^2 - \mathbf{h}_{1,j}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{h}_{1,j}(p) \geq 0, \quad \forall p \in [p_{\min}, 1]$$

mit $j \in \{1, \dots, m\}$ erfüllt sind. Da die obigen Ungleichungen nur im Intervall $p \in [p_{\min}, 1]$ sichergestellt werden müssen findet die verallgemeinerte S-Prozedur (siehe hierzu Satz 2.3 Verwendung. In diesem Zusammenhang

wird das Polynom $\gamma(p)$ verwendet, welches die Bedingung $\gamma(p) \geq 0$ für alle $p \in [p_{\min}, 1]$ erfüllt. Die Bedingung $\mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1(p))$ lautet dann

$$v_{\max,j}^2 - \gamma(p)s_{1,j}(p) - \mathbf{h}_{1,j}^T(p)\mathbf{R}^{-1}(p)\mathbf{h}_{1,j}(p) \geq 0,$$

wobei $s_{1,i}(p) \in \Sigma[p]$ ist. Mit Hilfe des Schur-Komplements [21] lässt sich dies auch ausdrücken als

$$\begin{bmatrix} v_{\max,j}^2 - \gamma(p)s_{1,j}(p) & \mathbf{h}_{1,j}^T(p) \\ \mathbf{h}_{1,j}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \succeq 0$$

mit $j \in \{1, \dots, m\}$. Gemäß Lemma 2.4 ist die obige Ungleichung erfüllt, sofern das Matrixpolynom auf der linken Seite ein SOS-Matrixpolynom ist, d.h.,

$$\begin{bmatrix} v_{\max,j}^2 - \gamma(p)s_{1,j}(p) & \mathbf{h}_{1,j}^T(p) \\ \mathbf{h}_{1,j}(p) & \mathbf{R}(p) \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[p]$$

mit $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Einsetzen von $\mathbf{h}_{1,j}^T(p)$ gemäß ihrer Definition und die anschließende beidseitige Multiplikation mit

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}(p) \end{bmatrix}$$

ergibt

$$\begin{bmatrix} v_{\max,j}^2 - \gamma(p)s_{1,j}(p) & \hat{\mathbf{a}}'_{1,j}{}^T - \mathbf{a}'_j{}^T \mathbf{D}(p) \\ \hat{\mathbf{a}}'_{1,j} - \mathbf{D}(p)\mathbf{a}'_j & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[p].$$

Schließlich führt die beidseitige Multiplikation mit

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

zusammen mit den Substitutionen (4.11) zu den Bedingungen (4.12c). Aus der Bedingung $\mathcal{G}(p) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2(p))$ lassen sich die Bedingungen (4.12d) in analoger Weise herleiten. \square

Bemerkung 4.1. Um keine zusätzliche Konservativität in den Entwurf einzubringen, sollte das Polynom $\gamma(p)$ so gewählt werden, dass seine Funktionswerte außerhalb des Intervalls $p \in [p_{\min}, 1]$ negativ sind. Eine sinnvolle Wahl ist $\gamma(p) = (p - p_{\min}) \cdot (1 - p)$.

4.5.1 Einschluss der Anfangsbedingungen

Die in Satz 4.3 angegebenen Stabilitätsbedingungen stellen sicher, dass das Gebiet \mathcal{G}_1 kontraktiv invariant ist. Im Rahmen der praktischen Anwendung ist also dafür Sorge zu tragen, dass alle Anfangszustände, die im Betrieb der Regelung auftreten können, im Gebiet \mathcal{G}_1 eingeschlossen sind. Demnach ist die Forderung $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{G}_1$ sicherzustellen.

Unter der Annahme, dass die Menge \mathcal{X}_0 als ein konvexes Polyeder mit N Eckpunkten $\mathbf{x}_{0,j}$ gegeben ist, startet das System innerhalb von $\mathcal{G}(1)$, wenn für $j = 1, \dots, N$ die Ungleichung

$$g(\mathbf{x}_{0,j}, 1) = \mathbf{x}_{0,j}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_{0,j} - 1 < 0$$

erfüllt ist. Mit Lemma 2.2 und der Substitution $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1}$ ergibt sich schließlich die LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_{0,j}^T \\ \mathbf{x}_{0,j} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

4.5.2 Gütekriterium und Optimierungsproblem

Die Bedingungen aus Satz 4.3 zusammen mit Bedingung (4.13), welche den Einschluss des Anfangsgebietes sicherstellt, bilden die Nebenbedingungen für den Entwurf. Als Gütemaß wird im Folgenden, wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben, die Abklingrate des virtuellen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 - \mathbf{BTK}_2(1)) \mathbf{x} \quad (4.14)$$

optimiert. Wenn für eine positiv definite Matrix \mathbf{Q} und ein positives $\underline{\alpha}$ die Ungleichung

$$\hat{\mathbf{A}}_{*,1}^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_{*,1} \prec -2\alpha \mathbf{R}_1$$

erfüllt ist, so ist $\underline{\alpha} < \alpha$ eine untere Abschätzung der Abklingrate. Wird die obenstehende Ungleichung nun von beiden Seiten mit $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1}$ multipliziert, so ergibt sich unter Verwendung der Substitutionen (4.11) die LMI

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BG})\mathbf{Q} + \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{BG})^T - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{Y}}_* - \tilde{\mathbf{Y}}_*^T \mathbf{B}^T \prec -2\underline{\alpha}\mathbf{Q}. \quad (4.15)$$

Ziel der Optimierung ist die Maximierung der Konvergenzrate bzw. der unteren Abschätzung $\underline{\alpha}$. Dabei ist die LMI-Variable $\tilde{\mathbf{Y}}_*$ bzw. $\hat{\mathbf{a}}_{*,m}$ lediglich durch die LMI (4.15) begrenzt. Dies kann zur Folge haben, dass das

Optimierungsproblem schlecht konditioniert ist. Um dies zu vermeiden, wird die zusätzliche Forderung

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}(1)} |\mathbf{k}_{2,j}^T(1)\mathbf{x}| < \beta u_{\max,j} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{k}_{2,j}^T(1)\mathbf{R}_1\mathbf{k}_{2,j}(1) < \beta^2 u_{\max,j}^2$$

hinzugefügt. Mit den Substitutionen (4.11) ergeben sich schließlich die LMIs

$$\begin{bmatrix} \beta^2 u_{\max,j}^2 & \tilde{\mathbf{y}}_{*,j}^T - (\mathbf{a}'_j - \tau_j^{-1}\mathbf{k}_{1,j})^T \mathbf{Q} \\ \tilde{\mathbf{y}}_{*,j} - \mathbf{Q}(\mathbf{a}'_j - \tau_j^{-1}\mathbf{k}_{1,j}) & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4.16)$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Somit wird der maximale Betrag der kommandierten Stellgröße begrenzt, wobei $\beta \gg 1$ gilt. Dieser Skalar ist der einzige Einstellparameter des Entwurfs und legt eine obere Grenze für den Grad der Sättigung fest. Zusammengefasst ergibt sich das Optimierungsproblem:

$$\text{Maximiere } \underline{\alpha}, \quad \text{u. d. B. d.} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{Q} \succ 0, \tilde{\mathbf{Y}}_1, \tilde{\mathbf{Y}}_2, \tilde{\mathbf{Y}}_*$$

(4.12a) bis (4.12e), (4.13), (4.15), (4.16).

Bedingung (4.15) in Optimierungsproblem (4.17) ist aufgrund des Terms $\underline{\alpha}\mathbf{Q}$ keine LMI. Mit Hilfe einer Bisektion in $\underline{\alpha}$ kann der optimale Wert α_{\max} aber auf einfache Weise bestimmt werden. Die Optimierung der Abklingrate des virtuellen Systems (4.14) führt auch zu einer Verbesserung der Abklingrate des gesättigten Regelkreises unter Verwendung des Regelgesetzes $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_2(p)\mathbf{x}$. Dies wird in Anhang A.3.1 näher erläutert.

Neben der Abklingrate existieren eine Reihe weiterer möglicher Gütemaße, beispielsweise die Größe des Einzugsgebietes, die Ausgangsenergie oder die Vorgabe eines Startreglers $\mathbf{K}_2(1)$ und anschließende Volumen-Maximierung des Gebietes \mathcal{G}_1 . Die Abklingrate liefert im Allgemeinen jedoch eine gute Ausregelzeit bei minimalem Entwurfsaufwand. Eine Untersuchung der Regelgüte in Abhängigkeit verschiedener Gütemaße findet sich in [55] und bestätigt diese Aussage.

4.6 Alternative Auswahlstrategie

An dieser Stelle werden die Unterschiede zwischen der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Auswahlstrategie (4.6) aus [67] und der ursprünglichen Auswahlstrategie aus [1], [4] und den darauf aufbauenden Arbeiten [49], [85], [86] aufgezeigt. In der ursprünglichen Version wird eine Skalierungsfunktion $e(p)$ in die Auswahlstrategie integriert. Diese lautet

$$g(\mathbf{x}, p) = e(p)\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1.$$

Die Motivation zur Verwendung von $e(p)$ ergibt sich aus der Tatsache, dass der Entwurf der in [1], [4] vorgestellten Regelung so erfolgt, dass die Stellgröße nicht in Sättigung geht. Zur Realisierung eines schnellen Ausregelvorgangs ist in diesem Fall sicherzustellen, dass die verfügbare Stellgröße gut ausgenutzt wird. Um die Bedeutung der Skalierungsfunktion zu erläutern, wird im Folgenden ein System mit einer einzelnen Eingangsgröße betrachtet. Übertragen auf den Entwurf eines sättigenden impliziten Reglers für SISO-Systeme unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung wird dazu die Skalierungsfunktion als

$$e(p) = \max\{e_{u_{\max}}(p), e_{v_{\max}}(p)\}$$

mit

$$e_{v_{\max}}(p) = \mathbf{h}_1^T(p)\mathbf{R}_1^{-1}(p)\mathbf{h}_1(p),$$

$$e_{u_{\max}}(p) = \mathbf{h}_2^T(p)\mathbf{R}_1^{-1}(p)\mathbf{h}_2(p)$$

angesetzt. Dies führt zu einer Skalierung der Gebiete $\mathcal{G}(p)$ derart, dass $\mathcal{G}(p)$ entweder die Hyperebene $\{\mathbf{x} : |\mathbf{h}_1^T(p)\mathbf{x}| = v_{\max}\}$ oder/und die Hyperebene $\{\mathbf{x} : |\mathbf{h}_2^T(p)\mathbf{x}| = u_{\max}\}$ tangiert. Welche Hyperebene tangiert wird hängt davon ab, ob für den jeweiligen Wert des Auswahlparameters p die Stellgrößen- oder die Stellratenbegrenzung restriktiver ist. Dies ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Mit Hilfe von Dini-Derivierten und einem Satz aus [34], [147] ist auch bei Verwendung dieser Auswahlstrategie die Formulierung eines konvexen Optimierungsproblems zum Reglerentwurf für Systeme unter simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen möglich. Ein solcher Ansatz für SISO-Systeme wurde in [73] vorgestellt. Eine Erweiterung auf MIMO-Systeme unter Verwendung des Ansatzes aus [49] ist denkbar, jedoch verkompliziert sich in diesem Fall die Skalierungsfunktion zu

$$e(p) = \max\{e_{u_{\max,1}}(p), e_{v_{\max,1}}(p), \dots, e_{u_{\max,m}}(p), e_{v_{\max,m}}(p)\}.$$

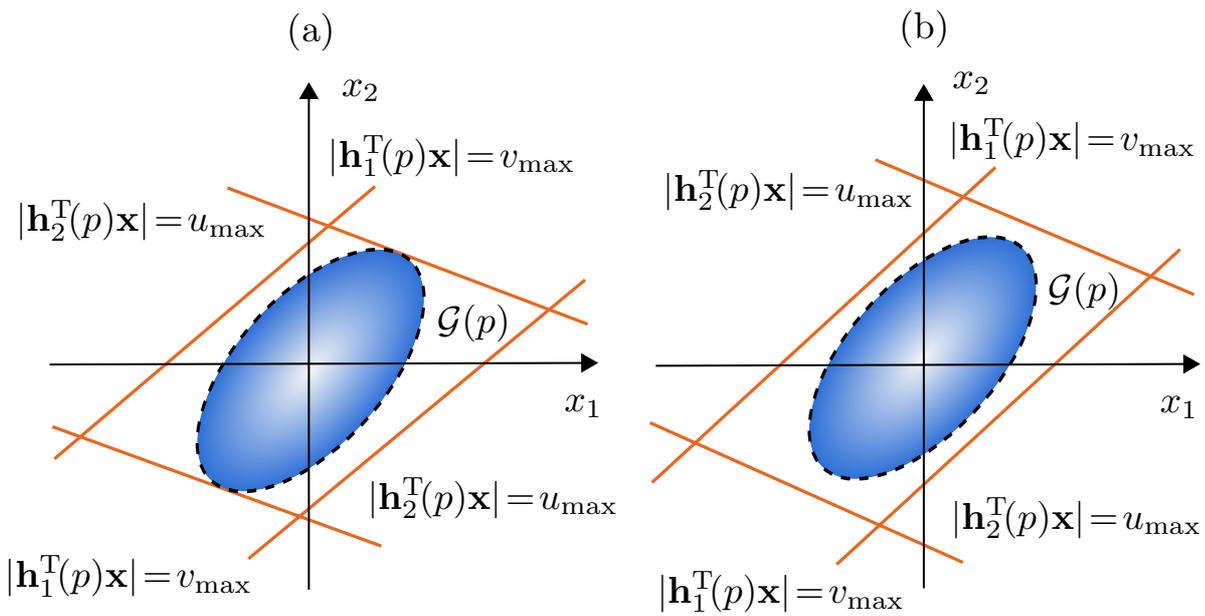


Abbildung 4.3: (a) Skalierung der Gebiete $\mathcal{G}(p)$ bei Verwendung der Skalierungsfunktion $e(p)$: Die Gebiete $\mathcal{G}(p)$ tangieren die Hyperebene der restriktiveren Begrenzung (b) Gebiete $\mathcal{G}(p)$ ohne Verwendung der Skalierungsfunktion $e(p)$.

Des Weiteren wird in [34] bzw. in [67] gezeigt, dass der Entwurf einer impliziten Regelung unter Verwendung der Skalierungsfunktion $e(p)$ für Systeme mit einem positiven Eigenwertschwerpunkt

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \{ \lambda_i(\mathbf{A}) \} > 0$$

nicht möglich ist. Vor allem aus dem letztgenannten Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit die in Abschnitt 4.3 vorgestellte Auswahlstrategie ohne Skalierungsfunktion verwendet.

Bemerkung 4.2. In [34] werden zwar nur Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung betrachtet, die Ergebnisse gelten aber auch für den Fall zusätzlicher Stellratenbegrenzungen. Durch die Erweiterung des Zustands $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \ u_a]^T$ tritt nämlich lediglich ein Eigenwert $\lambda = 0$ hinzu, der die Lage des Eigenwertschwerpunktes λ_S nicht beeinflusst.

4.7 Beispiel: Space-Shuttle

Als Beispielsystem wird das linearisierte Modell eines Space-Shuttles im Landeanflug mit einer Geschwindigkeit von 0,9 Mach betrachtet. Es wird nach [35] durch das Modell

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \begin{bmatrix} -0,095 & 0,141 & -0,990 & 0,036 \\ -3,595 & -0,428 & 0,280 & 0 \\ 0,395 & -0,013 & -0,081 & 0 \\ 0 & 1 & -0,141 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s + \begin{bmatrix} -0,012 & 0,010 \\ 6,571 & 1,256 \\ 0,378 & -0,256 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_a$$

beschrieben. Es besitzt die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0,0936 \pm 0,9125j, \\ \lambda_3 &= -0,3925, \\ \lambda_4 &= -0,0247. \end{aligned}$$

Dabei ist $x_1 = \beta$ der Schiebewinkel in rad, $x_2 = p$ ist die Rollrate in rad/s, $x_3 = r$ ist die Gierrate in rad/s und $x_4 = \Phi$ ist der Rollwinkel in rad. Abbildung 4.4 veranschaulicht die Definition der Zustände. Darin bezeichnet (x_e, y_e, z_e) das erdfeste und (x_b, y_b, z_b) das körperfeste Koordinatensystem.

Ein Space-Shuttle besitzt keine atmosphärischen Triebwerke für den Landeanflug, daher muss bereits der erste Anflug erfolgreich sein, eine Durchstart-Möglichkeit besteht nicht. Um das Shuttle im Gleitflug kontrollieren zu können, stehen ein Seitenruder sowie ein kombiniertes Höhen- und Querruder (Engl: Elevon) zur Verfügung. Diese werden hydraulisch verstellt, wobei der notwendige Druck von einem hydrazinbetriebenen Hilfstriebwerk (Engl.: Auxiliary Power Unit, APU) geliefert wird. Sowohl das Seitenruder als auch das kombinierte Höhen- und Querruder sind einer Stellgrößen- und einer Stellratenbegrenzung unterworfen. Im vorliegenden Fall gilt laut [126] $|u_{a,i}| \leq 22 \frac{\pi}{180} \text{rad}$ und $|\dot{u}_{a,i}| \leq 20 \frac{\pi}{180} \text{rad/s}$ für $i = 1, 2$. Als Gebiet möglicher Anfangszustände wird ein Polyeder der Form

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : |x_{s,1}| \leq \frac{5\pi}{180} \text{rad}, |x_{s,2}| \leq \frac{5\pi}{180} \text{rad/s}, \right. \\ \left. |x_{s,3}| \leq \frac{5\pi}{180} \text{rad/s}, |x_{s,4}| \leq \frac{40\pi}{180} \text{rad} \right\}$$

verwendet. Des Weiteren wird $\mathbf{u}_{a,0} = \mathbf{u}_a(0) = \mathbf{0}$ als Anfangszustand für das Aktormodell zur Modellierung der simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung gewählt. Damit durch das Aktormodell die Dynamik des Gesamtsystems nicht verlangsamt wird, wird $\tau_1 = \tau_2 = 6$ gewählt.

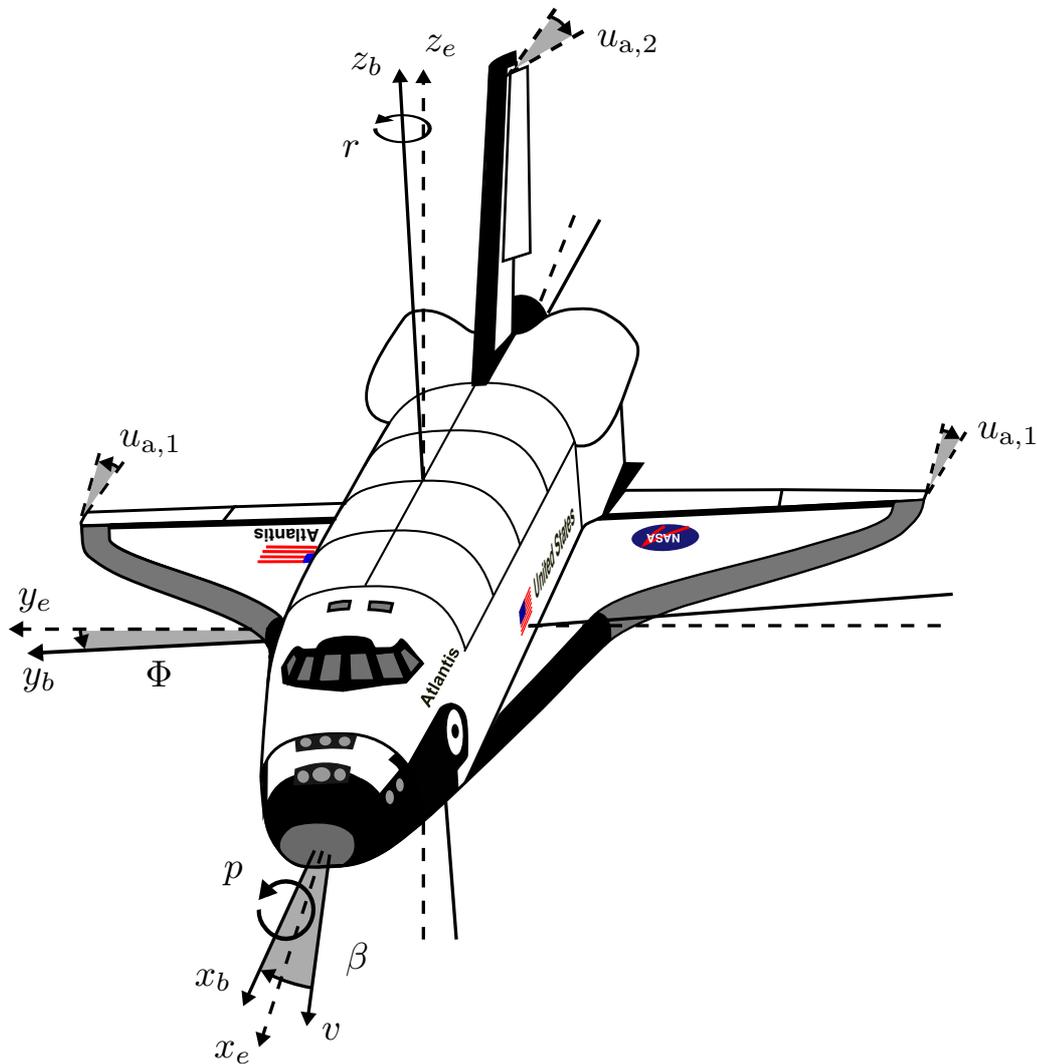


Abbildung 4.4: Space-Shuttle mit körperfestem (x_b, y_b, z_b) und erdfestem (x_e, y_e, z_e) Koordinatensystem.

Abbildung 4.5 zeigt den Verlauf des Rollwinkels x_4 für eine Anfangsauslenkung von $\mathbf{x}_{s,0} = [2\pi/180\text{rad}, -2\pi/180\text{rad/s}, 2\pi/180\text{rad/s}, -10\pi/180\text{rad}]^T$. Zum Vergleich werden ebenfalls ein linearer, nichtsättigender Regler sowie ein linearer Sättigungsregler entworfen. Beide Vergleichsregler werden ebenfalls hinsichtlich der Konvergenzrate und für dasselbe Anfangsgebiet \mathcal{X}_0 entworfen. Die kommandierten Stellgrößen u_1, u_2 sind ebenfalls in Abbildung 4.5 dargestellt. Es zeigt sich deutlich der Unterschied zwischen den beiden sättigenden Reglern und dem nichtsättigenden linearen Regler. Letzterer kommandiert deutlich weniger Stellgröße, weshalb sich ein deutlich längerer Ausregelvorgang ergibt, der erst nach $9s$ abgeschlossen ist. Abbildung 4.6 zeigt die

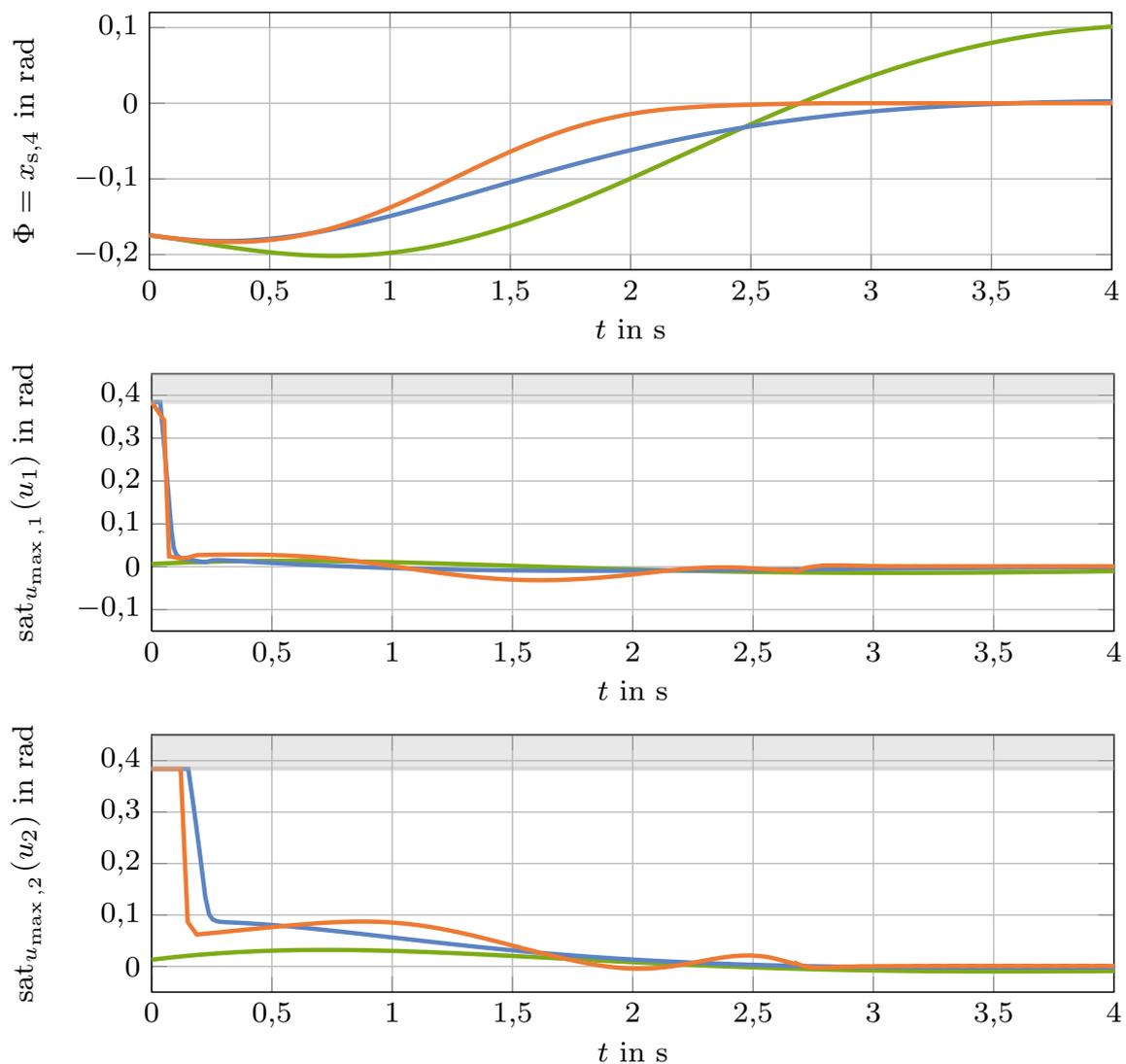


Abbildung 4.5: Verlauf von Rollwinkel $x_{s,4} = \Phi$ und kommandierten Stellgrößen u_1, u_2 für eine Anfangsauslenkung von $\mathbf{x}_{s,0} = [2\pi/180\text{rad}, -2\pi/180\text{rad/s}, 2\pi/180\text{rad/s}, -10\pi/180\text{rad}]^T$ für einen linearen Regler —, einen linearen Sättigungsregler — und die implizite Regelung —.

zugehörigen Stellraten $\dot{u}_{a,1}, \dot{u}_{a,2}$ und die tatsächlich auf das System wirkenden Stellgrößen $u_{a,1}, u_{a,2}$. Es fällt auf, dass der implizite Regler verglichen mit dem linearen Sättigungsregler hinsichtlich der Stellrate für eine kürzere Zeitspanne sättigt. Aufgrund der Tatsache, dass die wirksamen Stellgrößen $u_{a,1}, u_{a,2}$ aber besser genutzt werden, resultiert der im Vergleich zum linearen Sättigungsregler um ca. 30% kürzere Ausregelvorgang.

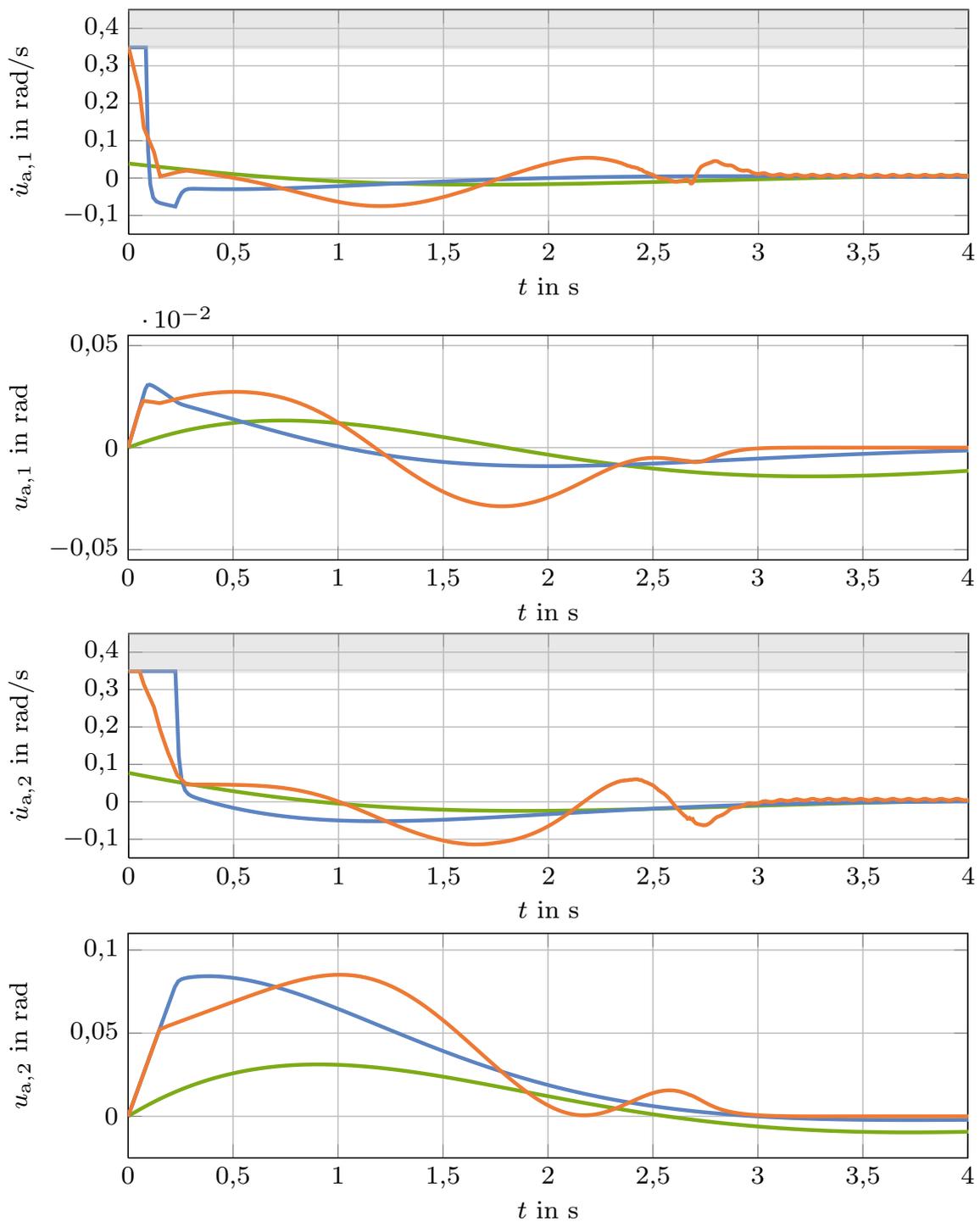


Abbildung 4.6: Verlauf der Stellrate $\dot{u}_{a,1}$ und der wirksamen Stellgröße $u_{a,1}$ (oben) sowie $\dot{u}_{a,2}$ und $u_{a,2}$ (unten) für einen linearen Regler —, einen linearen Sättigungsregler — und die implizite Regelung — mit einer Anfangsauslenkung von $\mathbf{x}_{s,0} = [2\pi/180\text{rad}, -2\pi/180\text{rad/s}, 2\pi/180\text{rad/s}, -10\pi/180\text{rad}]^T$.

4.8 Fazit

Die in diesem Abschnitt vorgestellte weich strukturvariable Regelung für lineare Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung stellt eine Erweiterung der ursprünglichen Methodik [1], [4] dar. Dazu wird eine vereinfachte Auswahlstrategie aus [67] aufgegriffen, welche den Entwurf von Regelungen für eine breitere Systemklasse erlaubt. Der Beitrag dieser Arbeit liegt in der Berücksichtigung zusätzlicher Stellratenbegrenzungen sowie der Erweiterung der Methodik auf allgemeine, steuerbare lineare MIMO-Systeme. Der Entwurf des Reglers kann als konvexes Optimierungsproblem formuliert werden. Dazu wird im Rahmen dieser Arbeit die Sum-of-squares-Methodik verwendet. Prinzipiell kann aber auch auf einen Satz aus [149] zurückgegriffen werden. Die Verwendung der SOS-Methodik erlaubt aber eine im Vergleich dazu deutlich kompaktere Darstellung.

Im Zuge der Erstellung dieser Arbeit konnte ebenfalls eine weich strukturvariable Regelung für lineare SISO-Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen entwickelt werden. Diese basiert auf der klassischen Selektionsstrategie aus [1] bzw. [4] und wurde in [73] publiziert. Die in diesem Kapitel vorgestellte weich strukturvariable Regelung mit der modifizierten Auswahlstrategie aus [67] wurde für SISO-Systeme in und für MIMO-Systeme in [70] veröffentlicht.

5 Ausgangsrückführungen

Zur Implementierung der in den Kapitel 3 und 4 vorgestellten Regelungen wird der gesamte Zustandsvektor benötigt. In vielen Fällen ist jedoch die Messung aller Zustandsgrößen nicht möglich oder mit einem hohen Kostenaufwand verbunden.

Ein klassischer Beobachterentwurf nach Luenberger [89] ist nicht ohne Weiteres möglich, wenn nichtlineare Regelgesetze verwendet werden. Dies liegt darin begründet, dass das für lineare Systeme gültige Separationstheorem in diesem Fall nicht anwendbar ist. Demnach ist ein getrennter Entwurf von Beobachter und sättigendem Regler nicht möglich. In [84] wird für lineare Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbeschränkungen ein Beobachterentwurf unter Verwendung einer sättigenden, linearen Zustandsrückführung angegeben. Das resultierende Optimierungsproblem ist jedoch nicht konvex und kann beispielsweise mit Hilfe eines sogenannten Path-Following Algorithmus [104] gelöst werden.

Ein konvexer Entwurf lässt sich erzielen, wenn eine allgemeine dynamische Ausgangsrückführung verwendet wird. Diese besteht aus einem dynamischen System, dessen Ausgang die kommandierte Stellgröße des Reglers liefert. Ein Beobachter ist eine spezielle Form einer solchen dynamischen Ausgangsrückführung, bei welcher der Zustand des dynamischen Systems ein Schätzwert für den Zustand der Regelstrecke ist. Eine allgemeine dynamische Ausgangsrückführung, deren Zustand kein Schätzwert für den Zustand der Regelstrecke darstellt, bietet dem gegenüber mehr Entwurfsfreiheit und erzielt eine bessere Dynamik des geschlossenen Regelkreises. In der Literatur existieren verschiedene Ansätze für allgemeine dynamische Ausgangsrückführungen. So wird in [100] eine dynamische Ausgangsrückführung zur Störunterdrückung für lineare Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen angegeben, welche in [101] auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen erweitert wird. Jedoch ist die Reglerstruktur deutlich eingeschränkt und außerdem werden alle Anfangszustände $\mathbf{x}_s(0)$ zu null angenommen. In [145] wiederum wird eine dynamische Ausgangsrückführung vorgeschlagen, welche parametervariant ist und daher einen vergleichsweise hohen Implementierungsaufwand für den Regler nach sich zieht. Außerdem werden im Entwurf lediglich Stell-

größenbeschränkungen betrachtet.

In [84] wird eine Ausgangsrückführung für Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen vorgestellt. Sie zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass der Reglerentwurf unter Anwendung der Transformationen aus [114] als konvexes Optimierungsproblem formuliert werden kann. Ein sehr ähnlicher Ansatz wird auch in [40] vorgestellt, auch hier ist ein konvexer Entwurf unter Verwendung der Transformation aus [114] möglich. Im Vergleich zu [145] sind die Optimierungsprobleme aufgrund einer geringeren Anzahl an Reglerparametern in [40] bzw. [84] weniger aufwendig. Daher wird dieses Verfahren im Folgenden aufgegriffen und auf den Fall einer simultanen Stellgrößen- und Stellratenbeschränkung erweitert. Während in [84] ein System ohne Störeinflüsse betrachtet wird, wird in diesem Kapitel auch auf die Störunterdrückung eingegangen.

5.1 Grundlagen

Zum Entwurf von Ausgangsrückführungen für lineare Systeme (2.1) unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung wird wiederum das Gl. (2.1) entsprechende System

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_a$$

mit der Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s$$

betrachtet und das in Abschnitt 2.2 eingeführte Aktormodell verwendet. Des Weiteren wird das erweiterte System (2.7) mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \quad \mathbf{u}_a^T]^T$$

aufgestellt. Da das Aktormodell Teil des Regelalgorithmus ist, kann vorausgesetzt werden, dass der Ausgang \mathbf{u}_a des Aktors bekannt ist. Die Ausgangsgrößen des erweiterten Systems können somit im erweiterten Ausgangsvektor

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_s^T \quad \mathbf{u}_a^T]^T$$

zusammengefasst werden. Somit lautet die Ausgangsgleichung nun

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

mit

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ mit $q = q_s + m$ gilt. Als Regler wird nun die allgemeine dynamische Ausgangsrückführung

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{y} + \mathbf{E}_k \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})), \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_* \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_* \mathbf{y} \end{cases} \quad (5.1)$$

mit $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ verwendet. Aus Gl. (5.1) ergeben sich unmittelbar die Dimensionen der Matrizen \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_* und \mathbf{D}_* . Es ist zu beachten, dass \mathbf{K}_1 durch das Aktormodell (2.5) festgelegt ist und des Weiteren $\mathbf{K}_1 \mathbf{x} = -\mathbf{T} \mathbf{u}_a$ gilt. Demnach werden im Regelalgorithmus lediglich der Aktorausgang \mathbf{u}_a und der Systemausgang \mathbf{y}_s benötigt. Ein Strukturbild des geschlossenen Regelkreises zeigt Abbildung 5.1.

Die Tatsache, dass $\dot{\mathbf{u}}_a = \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(-\mathbf{T} \mathbf{u}_a + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}))$ über die Matrix \mathbf{E}_k die Dynamikgleichung des Reglers beeinflusst, wird sich im Folgenden als nützlich erweisen, insbesondere bei der Formulierung eines konvexen Optimierungsproblems. Der Vorteil, ein Aktormodell in den Regler zu integrieren, zeigt sich in ähnlicher Weise auch im Falle ausschließlicher Stellgrößenbegrenzungen in [84], wobei in diesem Fall der Aktor durch eine einfache Sättigungsfunktion modelliert wird.

Um die Stabilität der Regelung zu analysieren, wird das Gesamtsystem aus der erweiterten Systemdarstellung (2.7) und dem Regler (5.1) gebildet. Es lautet mit $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{z}_k^T]^T$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})), \\ \mathbf{u} &= [\mathbf{D}_* \mathbf{C} \ \mathbf{C}_*] \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Bei Betrachtung des Gesamtsystems (5.2) fällt auf, dass $\mathbf{u} = [\mathbf{D}_* \mathbf{C} \ \mathbf{C}_*] \mathbf{z}$ als ein Zustandsregler für das Gesamtsystem angesehen werden kann. Da aber nur die Ausgangsgrößen \mathbf{y} des erweiterten Systems sowie die Zustände \mathbf{z}_k des dynamischen Reglers \mathcal{K} für die Regelung zur Verfügung stehen, ist die Entwurfsvfreiheit verglichen mit einem Zustandsregler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}$ eingeschränkt.

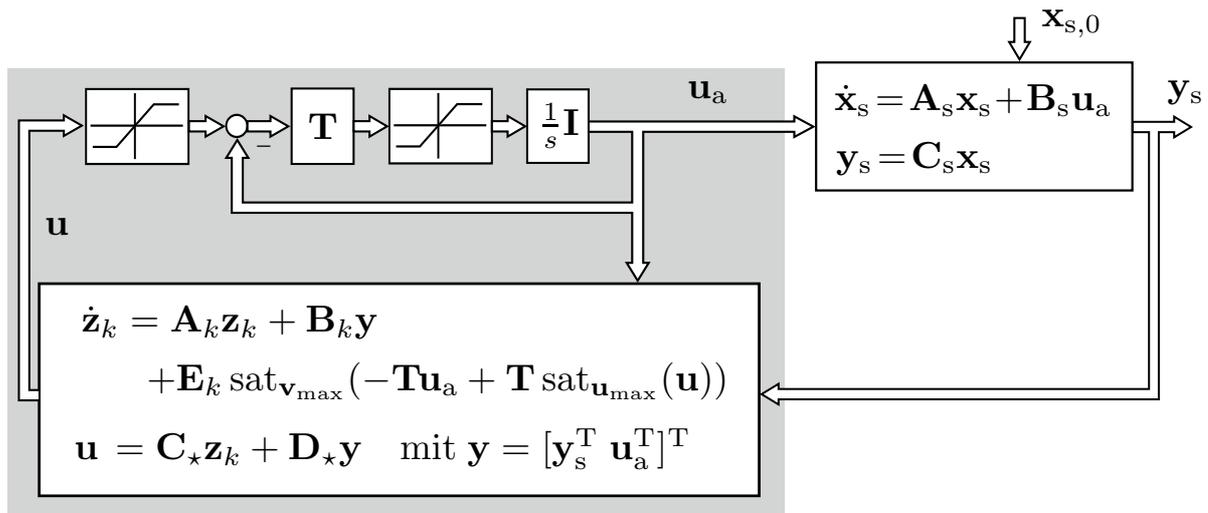


Abbildung 5.1: Strukturbild einer dynamischen Ausgangsrückführung für Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung. Die Dynamikgleichung des Reglers beinhaltet dabei ein Modell des Aktors.

5.2 Stabilität der Regelung

Aufgrund der Darstellung des Gesamtsystems in Gl. (5.2) wird ersichtlich, dass Satz 3.3 aus Abschnitt 3.3 für die Stabilitätsuntersuchung herangezogen werden kann. Gemäß Satz 3.3 werden für den Nachweis der kontraktiven Invarianz zwei virtuelle, nichtsättigende Hilfsregler benötigt.

Zur Herleitung konvexer Entwurfsbedingungen erweist es sich bei Verwendung der dynamischen Ausgangsrückführung \mathcal{K} als sinnvoll, diese virtuellen Hilfsregler wie folgt zu definieren

$$\mathcal{H}_1 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{y} + \mathbf{E}_k \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_1 \mathbf{y} \end{cases} \quad (5.3)$$

und

$$\mathcal{H}_2 : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{y} + \mathbf{E}_k (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{u}_2), \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{C}_2 \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_2 \mathbf{y}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Um Satz 3.3 auf die Ausgangsrückführung anwenden zu können, werden analog zu den Definitionen 3.3 und 3.4 das nichtsättigende Gebiet und das Gebiet nichtsättigender Trajektorien zu einem dynamischen Regler \mathcal{H}_j definiert.

Definition 5.1. Das nichtsättigende Gebiet

$$\mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathcal{H}_j) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_z} : u_{\min,i} \leq \mathbf{d}_{j,i}^{\mathbf{T}} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{c}_{j,i}^{\mathbf{T}} \mathbf{z}_k \leq u_{\max,i}, \right. \\ \left. i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

eines dynamischen Reglers \mathcal{H}_j ist die Menge, in welcher die Rückführung $\mathbf{u}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_j \mathbf{y}$ nicht sättigt, d.h., es gilt $u_{\min,i} \leq \mathbf{d}_{j,i}^{\mathbf{T}} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{c}_{j,i}^{\mathbf{T}} \mathbf{z}_k \leq u_{\max,i}$ für alle $i = \{1, 2, \dots, m\}$.

Definition 5.2. Das Gebiet nichtsättigender Trajektorien

$$\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{U}}(\mathcal{H}_j) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathbf{z}_k(t_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+n_z} : \right. \\ \left. \Psi(t, [\mathbf{x}(t_0)^{\mathbf{T}} \ \mathbf{z}_k(t_0)^{\mathbf{T}}]^{\mathbf{T}}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathcal{H}_j) \ \forall t \geq t_0 \right\}$$

eines Systems mit dem dynamischen Regler \mathcal{H}_j beschreibt die Menge aller Zustände $(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{z}_k(t_0))$, für welche die Begrenzung $u_{\min,i} \leq \mathbf{d}_{j,i}^{\mathbf{T}} \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{c}_{j,i}^{\mathbf{T}} \mathbf{z}_k \leq u_{\max,i}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und für alle zukünftigen Zeiten $t \geq t_0$ eingehalten wird.

In den meisten Fällen werden in dieser Arbeit symmetrische Begrenzungen betrachtet. Zur Verkürzung der Schreibweise werden dann $\mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_j) = \mathcal{L}_{[-\mathbf{u}_{\max} \ \mathbf{u}_{\max}]}(\mathcal{H}_j)$ und $\mathcal{L}_{\infty, \mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_j) = \mathcal{L}_{\infty, [-\mathbf{u}_{\max} \ \mathbf{u}_{\max}]}(\mathcal{H}_j)$ verwendet.

Zur Abschätzung des maximalen Einzugsgebietes wird im Folgenden das Ellipsoid

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+n_z} : \mathbf{z}^{\mathbf{T}} \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 1 \}$$

verwendet. Die kontraktive Invarianz des Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ sichert

Satz 5.1. *Gegeben sei ein dynamisches System nach Gl. (2.7) mit einem Regler \mathcal{K} nach Gl. (5.1) und ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. Wenn die virtuellen Regler (5.3) und (5.4) existieren, so dass für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ die Ungleichungen*

$$\mathbf{P} \succ 0, \tag{5.5}$$

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^{\mathbf{T}} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}) \prec 0 \tag{5.6}$$

mit

$$\Gamma(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{D}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_*\mathbf{C}) \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C} + \mathbf{E}_k\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{D}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_*\mathbf{C}) \\ \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{C}_1, \mathbf{T}\mathbf{C}_2, \mathbf{T}\mathbf{C}_*) \\ \mathbf{A}_k + \mathbf{E}_k\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{C}_1, \mathbf{T}\mathbf{C}_2, \mathbf{T}\mathbf{C}_*) \end{bmatrix}$$

erfüllt sind und außerdem $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ gilt, dann ist der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant bezüglich des mit \mathcal{K} geregelten Systems (2.7).

Beweis. Wie bereits in Abschnitt 5.1 erläutert, lassen sich Regelstrecke und dynamischer Regler unter Verwendung des neuen Zustandsvektors $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{z}_k^T]^T$ zum Gesamtsystem

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})) \\ \mathbf{u} &= [\mathbf{D}_*\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_*] \mathbf{z} \end{aligned}$$

zusammenfassen. Unter Verwendung der virtuellen Hilfsregler \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 gemäß Gl. (5.3) und (5.4) ergeben sich die virtuellen Systeme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix} \mathbf{u}_1, \\ \mathbf{u}_1 &= [\mathbf{D}_1\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_1] \mathbf{z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{u}_2), \\ \mathbf{u}_2 &= [\mathbf{D}_2\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_2] \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Damit entsprechen $\mathbf{u}_1 = [\mathbf{D}_1\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_1] \mathbf{z}$, $\mathbf{u}_2 = [\mathbf{D}_2\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_2] \mathbf{z}$ und $\mathbf{u} = [\mathbf{D}_*\mathbf{C} \quad \mathbf{C}_*] \mathbf{z}$ den Zustandsreglern \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 und \mathbf{K}_2 aus Satz 3.3, woraus sich unmittelbar die Forderungen (5.6) und $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ für die kontraktive Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ ergeben. \square

Die Bedingungen in Satz 5.1 mit den Variablen \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k , \mathbf{C}_1 , \mathbf{C}_2 , \mathbf{C}_* , \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{D}_* und \mathbf{E}_k liegen nicht in Form von linearen Matrixungleichungen vor und die Umwandlung, beispielsweise durch Substitutionen analog zum Entwurf eines linearen Sättigungsreglers, ist nicht offensichtlich.

Im folgenden Kapitel wird jedoch gezeigt, dass eine Umwandlung in lineare Matrixungleichungen sehr wohl möglich ist, sofern die Ordnung n_z des dynamischen Reglers der Ordnung n des erweiterten Systems (2.7) entspricht.

5.3 Konvexe Darstellung der Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt wird eine Transformation vorgestellt, welche die Formulierung der Entwurfsbedingungen als LMIs erlaubt, sofern $n_z = n$ gilt. Die dazu notwendige Transformation wird auch in [84] für den Entwurf von Ausgangsrückführungen für lineare Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung verwendet und entspricht weitestgehend der von Scherer in [114] vorgeschlagenen Transformation.

Zunächst werden dazu die Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{P}^{-1} wie folgt partitioniert

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & * \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & * \end{bmatrix},$$

wobei die mit * gekennzeichneten Einträge unbekannt und für die folgenden Ausführungen nicht von Interesse sind. Aufgrund der Tatsache, dass $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ gelten muss, lässt sich eine Zwangsbedingung für die Matrizen \mathbf{N} und \mathbf{M} herleiten. Aus

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

ergibt sich offensichtlich

$$\mathbf{Y}\mathbf{X} + \mathbf{N}\mathbf{M}^T = \mathbf{I}. \quad (5.7)$$

Zur Transformation der Entwurfsbedingungen findet die reguläre Transformationsmatrix

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

aus [114] Verwendung. Aus Bedingung (5.5) ergibt sich demnach

$$\mathbf{\Pi}^T \mathbf{P} \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.9)$$

Auch Bedingung (5.6) kann auf diese Weise transformiert werden. Es ergibt sich mit Hilfe der Substitutionen

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{A}}_k &= \mathbf{N}\mathbf{A}_k\mathbf{M}^\top + \mathbf{N}\mathbf{B}_k\mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{X}, \\
\hat{\mathbf{B}}_k &= \mathbf{N}\mathbf{B}_k, \\
\hat{\mathbf{C}}_i &= \mathbf{C}_i\mathbf{M}^\top + \mathbf{D}_i\mathbf{C}\mathbf{X}, \\
\hat{\mathbf{D}}_i &= \mathbf{D}_i, \\
\hat{\mathbf{E}}_k &= \mathbf{Y}\mathbf{B} + \mathbf{N}\mathbf{E}_k
\end{aligned} \tag{5.10}$$

mit $i \in \{1, 2, \star\}$ und unter Verwendung der Abkürzung $\text{He}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{X}^\top$ die Bedingung

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Pi}^\top \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^\top \mathbf{P} \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^\top \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}) \mathbf{\Pi} = \\
&\text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{C}}_1, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_2, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_\star) \\ \hat{\mathbf{A}}_k + \hat{\mathbf{E}}_k \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{C}}_1, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_2, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_\star) \\ \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_\star\mathbf{C}) \\ \mathbf{Y}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C} + \hat{\mathbf{E}}_k \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_\star\mathbf{C}) \end{bmatrix} \right) \prec 0, \tag{5.11}
\end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Diese ist aufgrund der Terme $\hat{\mathbf{E}}_k \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_\star\mathbf{C})$ und $\hat{\mathbf{E}}_k \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{C}}_1, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_2, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_\star)$ bilinear in den neuen Matrixvariablen $\hat{\mathbf{E}}_k$, $\hat{\mathbf{C}}_1$, $\hat{\mathbf{C}}_2$, $\hat{\mathbf{C}}_\star$, $\hat{\mathbf{D}}_1$, $\hat{\mathbf{D}}_2$ und $\hat{\mathbf{D}}_\star$. Mit Hilfe des folgenden Lemmas kann diese Bilinearität beseitigt werden. Wird nun, wie in [84] vorgeschlagen, $\hat{\mathbf{E}}_k = \mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{E}_k = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{B}$ gewählt, so entfallen die bilinearen Terme in (5.11) und es ergeben sich die LMIs

$$\text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{C}}_1, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_2, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_\star) \\ \hat{\mathbf{A}}_k \\ \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_\star\mathbf{C}) \\ \mathbf{Y}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \prec 0,$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Eine Wahl $\hat{\mathbf{E}}_k \neq \mathbf{0}$ dagegen führt zu einer Einschränkung der Menge zulässiger Parameter und damit bei der Optimierung zu einem schlechteren Optimum [84].

Die Bedingungen (5.5) und (5.6) können also gemäß der obigen Ausführungen in LMIs umgewandelt werden. In Satz 5.1 wird jedoch zusätzlich $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ gefordert. Um einen konvexen Reglerentwurf zu ermöglichen, muss diese Forderung ebenfalls als LMI formuliert werden.

Zunächst wird die Forderung $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1)$, d.h.,

$$\left| \left[\mathbf{d}_{1,i}^T \mathbf{C} \quad \mathbf{c}_{1,i}^T \right] \mathbf{z} \right| \leq v_{\max,i}$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ betrachtet. Es ergeben sich analog zum Beweis von Satz 3.2 in Abschnitt 3.2 die Matrixungleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{d}_{1,i} \\ \mathbf{c}_{1,i} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{1,i}^T \mathbf{C} & \mathbf{c}_{1,i}^T \end{bmatrix} & v_{\max,i}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (5.12)$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Durch Einführen der Schlupfvariablen $\mathbf{W}_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ wird eine kompaktere Darstellung der Bedingungen (5.12) möglich [21]. Diese lauten dann

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{D}_1^T \\ \mathbf{C}_1^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1^T \mathbf{C} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} & \mathbf{W}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ w_{1,ii} \leq v_{\max,i}^2$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Diese Bedingungen müssen nun ebenfalls durch die in den Substitutionen (5.10) angegebenen neuen LMI-Variablen ausgedrückt werden. Dazu wird eine Kongruenztransformation mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

durchgeführt. Es ergeben sich schließlich die Bedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{C}}_1^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} & \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{D}}_1^T \\ \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{D}}_1 \mathbf{C} & \mathbf{W}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ w_{1,ii} \leq v_{\max,i}^2$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entsprechend lautet die Forderung $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ in LMI-Formulierung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{C}}_2^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} & \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{D}}_2^T \\ \hat{\mathbf{C}}_2 & \hat{\mathbf{D}}_2 \mathbf{C} & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \succeq 0, \\ w_{2,ii} \leq u_{\max,i}^2$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

5.4 Entwurf

Im vorigen Abschnitt wurden die Transformationen vorgestellt, mit deren Hilfe der Reglerentwurf als konvexes Optimierungsproblem formuliert werden kann. Der folgende Satz fasst die Entwurfsbedingungen zusammen.

Satz 5.2. *Gegeben sei ein dynamisches System nach Gl. (2.7) mit einem Regler \mathcal{K} nach Gl. (5.1), ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ und die Substitutionen (5.10). Wenn Matrizen \mathbf{X} , \mathbf{Y} , $\hat{\mathbf{A}}_k$, $\hat{\mathbf{B}}_k$, $\hat{\mathbf{C}}_1$, $\hat{\mathbf{C}}_2$, $\hat{\mathbf{C}}_*$, $\hat{\mathbf{D}}_1$, $\hat{\mathbf{D}}_2$ und $\hat{\mathbf{D}}_*$ existieren, so dass für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ die Ungleichungen*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.14)$$

$$\text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{C}}_1, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_2, \mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_*) \\ \hat{\mathbf{A}}_k \\ \mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_2\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_*\mathbf{C}) \\ \mathbf{Y}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \prec 0, \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{C}}_1^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} & \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{D}}_1^T \\ \hat{\mathbf{C}}_1 & \hat{\mathbf{D}}_1\mathbf{C} & \mathbf{W}_1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.16)$$

$$w_{1,ii} \leq v_{\max,i}^2, \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} & \hat{\mathbf{C}}_2^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} & \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{D}}_2^T \\ \hat{\mathbf{C}}_2 & \hat{\mathbf{D}}_2\mathbf{C} & \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (5.18)$$

$$w_{2,ii} \leq u_{\max,i}^2, \quad (5.19)$$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ erfüllt sind, dann ist der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant bezüglich des mit \mathcal{K} geregelten Systems (2.7).

Beweis. Um zu zeigen, dass der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ kontraktiv invariant ist, müssen die in Satz 5.1 formulierten Bedingungen erfüllt sein. Entsprechend ist an dieser Stelle nachzuweisen, dass deren Einhaltung sichergestellt ist, wenn die Bedingungen aus Satz 5.2 erfüllt sind.

Bedingung (5.14) ergibt sich dabei aus Bedingung (5.5) nach Anwendung der Transformation (5.9). In gleicher Weise lassen sich die Matrixungleichungen (5.15) aus Bedingung (5.6) herleiten. Die Bedingungen (5.16) und (5.17) stellen $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1)$ sicher, während die Matrixungleichungen (5.18) und (5.19) garantieren, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ sichergestellt ist. Somit ist die Forderung $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ aus Satz 5.1 ebenfalls erfüllt. \square

5.4.1 Einschluss der Anfangsbedingungen

Schließlich bleibt noch sicherzustellen, dass das Gebiet möglicher Anfangsauslenkungen im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ enthalten ist. Da ein dynamischer Regler verwendet wird, müssen neben den Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ der Strecke und des Aktormodells auch die Anfangszustände $\mathbf{z}_k(0) = \mathbf{z}_{k0}$ des dynamischen Reglers berücksichtigt werden. Soll die konvexe Hülle

$$\mathcal{Z}_0 = \text{conv} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{z}_{k0,j} \end{bmatrix} : j = 1, \dots, N \right\}$$

als Anfangsgebiet berücksichtigt werden, so ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{z}_{k0,j} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{z}_{k0,j} \end{bmatrix} \leq 1$$

für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ sicherzustellen. Falls auch Anfangszustände $\mathbf{z}_{k0} \neq \mathbf{0}$ angenommen werden, lautet die Bedingung $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{E}(\mathbf{P})$ zunächst

$$1 - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{z}_{k0,j} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{z}_{k0,j} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Die Verwendung des Schur-Komplements aus Lemma 2.2 und die beidseitige Multiplikation mit der regulären Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

liefert schließlich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{z}_{k0,j} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j}^T & \mathbf{z}_{k0,j}^T \end{bmatrix} \mathbf{P} & 1 \end{bmatrix} \succ 0$$

für alle $j \in \{1, \dots, N\}$. Die Transformation mittels der Matrix (5.13) liefert

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} & \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} & \mathbf{Y}\mathbf{x}_{0,j} + \mathbf{N}\mathbf{z}_{k0,j} \\ \mathbf{x}_{0,j}^T & \mathbf{x}_{0,j}^T \mathbf{Y} + \mathbf{z}_{k0,j}^T \mathbf{N}^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.20)$$

Aufgrund der Tatsache, dass es sich bei $\mathbf{z}_{k0,j}$ um Anfangszustände des Reglers handelt, können diese vom Benutzer frei vorgegeben werden. Eine naheliegende Wahl ist $\mathbf{z}_{k0,j} = \mathbf{0}$ für alle $j \in \{1, \dots, N\}$. In diesem Fall vereinfacht sich die Bedingung zum Einschluss des Anfangsgebietes zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{0,j}^T \mathbf{Y} \mathbf{x}_{0,j} \leq 1. \quad (5.21)$$

Es zeigt sich jedoch, dass die Wahl $\mathbf{z}_k(0) = \mathbf{0}$ konservativ ist. Stattdessen erscheint es sinnvoll, die Anfangsbedingung $\mathbf{z}_k(0)$ in Abhängigkeit von $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ zu wählen. Eine Möglichkeit hierzu ist, \mathbf{z}_{k0} als eine lineare Funktion von \mathbf{y}_0 der Form

$$\mathbf{z}_k(0) = \mathbf{z}_{k0} = \mathbf{S}\mathbf{y}_0 = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{x}_0$$

anzusetzen. Unter Verwendung von (5.20) zusammen mit der Substitution $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{N}\mathbf{S}$ ergibt sich daraus die Bedingung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} & \mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} & (\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{S}}\mathbf{C})\mathbf{x}_{0,j} \\ \mathbf{x}_{0,j}^T & \mathbf{x}_{0,j}^T (\mathbf{Y} + \hat{\mathbf{S}}\mathbf{C})^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.22)$$

für alle $j \in \{1, \dots, N\}$. Die neue Variable $\hat{\mathbf{S}}$ wird dann zusammen mit den Reglerparametern optimiert und somit kann der Anfangszustand des Reglers in Abhängigkeit vom Anfangszustand der Strecke gewählt werden.

Bemerkung 5.1. Unbedingt zu beachten ist der Fall, dass $x_i(0) = 0$ für alle $\mathbf{x}_{0,j}$ gilt. Hier kann nämlich die entsprechende Spalte in $\hat{\mathbf{S}}$ beliebig gewählt werden, da sie stets mit null multipliziert wird. Um daraus resultierende Probleme bei der Optimierung zu vermeiden, sollte die entsprechende Spalte keine Variable des Optimierungsproblems sein und beispielsweise auf $\mathbf{0}$ festgelegt werden. Dieser Fall tritt bei Systemen mit simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung häufig auf, da der Anfangszustand $\mathbf{u}_a(0)$ des Aktormodells in der Regel zu null gewählt wird.

5.4.2 Begrenzung der Pollagen

Die Optimierung der Reglerparameter kann unter Umständen zu einer sehr hohen Reglerdynamik führen. Hierdurch wird zum einen die Implementierung auf einem Mikrocontroller erschwert und zum anderen besteht die Gefahr, dass Messrauschen verstärkt wird. Abhilfe schafft die Begrenzung der Pollagen des geschlossenen Regelkreises. Gemäß [31] liegen die Pole einer Matrix \mathbf{A} innerhalb des Gebietes $\mathcal{R} = \{|s| \leq \theta\}$, falls die LMI

$$\begin{bmatrix} -\theta \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^T & -\theta \mathbf{P}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.23)$$

erfüllt ist. Angewendet auf die Ausgangsrückführung ergibt sich nach der Kongruenztransformation mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Pi} \end{bmatrix}$$

die LMI

$$\begin{bmatrix} -\theta \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \mathbf{\Sigma} \\ \mathbf{\Sigma}^T & -\theta \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (5.24)$$

mit

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \hat{\mathbf{C}}_\star) & \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \hat{\mathbf{D}}_\star \mathbf{C}) \\ \hat{\mathbf{A}}_k & \mathbf{Y} \mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k \mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

In [31], [115] werden neben der Begrenzung der Pole auf das Gebiet $\mathcal{R} = \{|s| \leq \theta\}$ auch Beschränkungen auf andere konvexe Gebiete betrachtet. Diese Bedingungen können ebenfalls auf die Ausgangsrückführung angepasst werden.

5.4.3 Optimierungsproblem

Die in Satz 5.2 angegebenen Bedingungen stellen zusammen mit der Matrixungleichung (5.20) bzw. (5.22) zum Einschluss des Anfangsgebietes und Bedingung (5.24) zur Begrenzung der Pollagen die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems dar. Wie schon beim Entwurf des linearen Sättigungsreglers in Abschnitt 3.3, wird die Abklingrate [21] des virtuellen Systems

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \hat{\mathbf{D}}_\star \mathbf{C}) & \mathbf{B} \mathbf{T} \hat{\mathbf{C}}_\star \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} + \mathbf{E}_k (\mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \hat{\mathbf{D}}_\star \mathbf{C}) & \mathbf{A}_k + \mathbf{E}_k \mathbf{T} \hat{\mathbf{C}}_\star \end{bmatrix} \mathbf{z} \quad (5.26)$$

als Gütekriterium verwendet. Als Matrixungleichung ausgedrückt und nach Anwendung der Transformation mit der Matrix (5.8) führt dies auf die LMI

$$\text{He} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{K}_1\mathbf{X} + \mathbf{T}\hat{\mathbf{C}}_*) & \mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\hat{\mathbf{D}}_*\mathbf{C}) \\ \hat{\mathbf{A}}_k & \mathbf{Y}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C} \end{bmatrix} \right) \prec -2\underline{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Ist diese LMI erfüllt, so ist $\underline{\alpha} < \alpha$ eine untere Abschätzung der Abklingrate für das virtuelle System (5.26). Auch hier gilt aufgrund der Analogie zwischen der Ausgangsrückführung in Gl. (5.2) und dem linearen Sättigungsregler aus Abschnitt 3.3, dass durch die Optimierung von $\underline{\alpha}$ auch die untere Schranke der Abklingrate des gesättigten Systems $\underline{\alpha}_{\text{sat}}$ verbessert wird.

Wird der Anfangszustand des Reglers $\mathbf{z}_k(0)$, wie in Abschnitt 5.4.1 beschrieben, in Abhängigkeit vom initialen Ausgangsvektor $\mathbf{y}(0)$ gewählt, so lautet das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \text{Maximiere} && \underline{\alpha}, && \text{u. d. B. d.} \\ & \mathbf{X} \succ 0, \mathbf{Y} \succ 0, \hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{C}}_1, && && (5.28) \\ & \hat{\mathbf{C}}_2, \hat{\mathbf{C}}_*, \hat{\mathbf{D}}_1, \hat{\mathbf{D}}_2, \hat{\mathbf{D}}_*, \hat{\mathbf{S}} \end{aligned}$$

$$(5.14) \text{ bis } (5.19), (5.22), (5.24), (5.27).$$

Soll der Anfangszustand des Reglers nicht in Abhängigkeit von $\mathbf{y}(0)$ gewählt werden, so muss Bedingung (5.22) durch (5.20) bzw. (5.21) ersetzt werden.

Aufgrund der Substitutionen (5.10) liegen nach Lösung des Optimierungsproblems (5.28) die Reglerparameter zunächst nicht in der zur Implementierung notwendigen Form vor. Dazu müssen die Substitutionen zunächst rückgängig gemacht werden.

5.4.4 Rückgewinnung der Reglerparameter

Zur Rückgewinnung der Reglerparameter müssen zunächst die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} so gewählt werden, dass Gleichung (5.7) erfüllt ist. Dazu kann die LU- bzw. QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$ verwendet werden. Die Zerlegung ist stets möglich, da mittels des Schur-Komplements aus Bedingung (5.14) folgt, dass $\mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1} \succ 0$ gilt. Somit ist die Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$ negativ definit. Die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} , die sich aus der LU- bzw. QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$ ergeben, sind stets regulär, was sich leicht

anhand des für quadratische Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} gültigen Zusammenhangs $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$ zeigen lässt. Sind die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} bestimmt, liefert die Inversion der Transformation (5.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_k &= -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{YB}, \\ \mathbf{D}_\star &= \hat{\mathbf{D}}_\star, \\ \mathbf{C}_\star &= \left(\hat{\mathbf{C}}_\star - \mathbf{D}_\star\mathbf{CX}\right)(\mathbf{M}^T)^{-1}, \\ \mathbf{B}_k &= \mathbf{N}^{-1}\hat{\mathbf{B}}_k, \\ \mathbf{A}_k &= \mathbf{N}^{-1}\left(\hat{\mathbf{A}}_k - \mathbf{YAX}\right)(\mathbf{M}^T)^{-1} - \mathbf{B}_k\mathbf{CX}(\mathbf{M}^T)^{-1}.\end{aligned}$$

Wird der Anfangszustand des Reglers in Abhängigkeit der Anfangswerte des Ausgangs $\mathbf{y}(0)$ gewählt, so wird zur Implementierung des Reglers zusätzlich die Matrix \mathbf{S} benötigt. Es ergibt sich in diesem Fall $\mathbf{S} = \mathbf{N}^{-1}\hat{\mathbf{S}}$.

5.5 Beispiel: Regelung eines Helikopters

Als Beispielsystem wird das lineare Modell eines Helikopters ZD 559 der Firma Lynx betrachtet. Der Helikopter wird bei der Entwicklung von zukünftigen Helikoptermodellen zu Forschungszwecken verwendet. Das Modell findet sich in [105] und wurde bei einer Geschwindigkeit von 120 Knoten linearisiert. Es lautet

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \begin{bmatrix} -0,046 & 0,0385 & 2,7192 & -9,8052 \\ 0,0221 & -0,9008 & 61,5464 & 0,3205 \\ 0,0299 & 0,0380 & -2,5919 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9989 & 0 \\ 0,0043 & 0,0129 & -0,1283 & -0,0152 \\ -0,0320 & 0,2281 & -1,8534 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0016 & 0 \\ -0,0237 & 0,0187 & 0,0877 & 0 \\ -0,0001 & -0,0916 & 0 & 0 \\ -0,0236 & -0,7219 & 0,4681 & 0 \\ 0,0058 & 0,4225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0477 \\ -0,2142 & -2,7024 & 9,7940 & -61,2455 \\ -0,1847 & -10,2992 & 0 & -0,3827 \\ 0 & 1 & 0 & -0,0327 \\ 0,0811 & -1,7721 & 0 & -1,3896 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s + \begin{bmatrix} 3,8024 & -7,0223 & 2,1602 & 0 \\ -135,25 & -49,3051 & 0,0001 & 0 \\ 20,9344 & 30,9867 & -6,0002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5360 & -1,2845 & -9,5747 & 4,8851 \\ 34,9038 & -19,4471 & -153,4332 & -0,9776 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17,1838 & -4,6280 & -26,3702 & -13,1671 \end{bmatrix} \mathbf{u}_a$$

und besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -0,6236 \pm 2,5707j,$$

$$\lambda_{3,4} = 0,6236 \pm 0,3577j,$$

$$\lambda_5 = -0,3782,$$

$$\lambda_6 = -0,0397,$$



Abbildung 5.2: Helikopter ZD 559 der Firma Lynx

$$\lambda_7 = -3,8267,$$

$$\lambda_8 = -10,4281.$$

Abbildung 5.2 zeigt ein Bild des Helikopters. Dabei bezeichnet x_1 die Geschwindigkeitsabweichung v_u vom Arbeitspunkt in Längsrichtung in m/s, x_2 die Sinkgeschwindigkeit v_w in m/s, x_3 die Nickwinkelgeschwindigkeit in rad/s, x_4 den Nickwinkel in rad, x_5 die Geschwindigkeitsabweichung v_v vom Arbeitspunkt in Querrichtung in m/s, x_6 die Rollrate rad/s, x_7 den Rollwinkel in rad und x_8 die Gierrate in rad/s. Die Eingangsgrößen des Systems sind der Anstellwinkel $u_{a,1}$ der Rotorblätter des Hauptrotors in rad, welcher auch als Pitch bezeichnet wird, der Winkel der zyklischen Blattverstellung in Richtung der Längsachse $u_{a,2}$ in rad, der Winkel der zyklischen Blattverstellung in Richtung der Querachse $u_{a,3}$ in rad und der Anstellwinkel der Rotorblätter des Heckrotors $u_{a,4}$ in rad. Die Eingangsgrößen unterliegen dabei den folgenden Stellgrößen- bzw. Stellratenbeschränkungen:

$$|u_{a,1}| \leq 12\pi/180 \text{ rad}, \quad |\dot{u}_{a,1}| \leq 25\pi/180 \text{ rad/s},$$

$$|u_{a,2}| \leq 10\pi/180 \text{ rad}, \quad |\dot{u}_{a,2}| \leq 18\pi/180 \text{ rad/s},$$

$$|u_{a,3}| \leq 10\pi/180 \text{ rad}, \quad |\dot{u}_{a,3}| \leq 18\pi/180 \text{ rad/s},$$

$$|u_{a,4}| \leq 12\pi/180 \text{ rad}, \quad |\dot{u}_{a,4}| \leq 25\pi/180 \text{ rad/s}.$$

Messbare Ausgangsgrößen sind die Geschwindigkeitsabweichung in Längsrichtung x_1 , die Sinkgeschwindigkeit x_2 , die Nickwinkelgeschwindigkeit x_3 , die Rollrate x_6 und die Gierrate x_8 . Der Nickwinkel x_4 , die Geschwindigkeit in Querrichtung x_5 und der Rollwinkel x_7 werden nicht gemessen. Als Gebiet möglicher Betriebszustände wird der konvexe Polyeder

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : |x_{s,1}| \leq 5 \text{ m/s}, |x_{s,2}| \leq 5 \text{ m/s}, |x_{s,3}| \leq \frac{7\pi}{180} \text{ rad/s}, \right. \\ \left. |x_{s,4}| \leq \frac{60\pi}{180} \text{ rad}, |x_{s,5}| \leq 5 \text{ m/s}, |x_{s,6}| \leq \frac{7\pi}{180} \text{ rad}, \right. \\ \left. |x_{s,7}| \leq \frac{60\pi}{180} \text{ rad}, |x_{s,8}| \leq \frac{5\pi}{180} \text{ rad/s} \right\}$$

betrachtet. Der Entwurf der Ausgangsrückführung erfolgt dann, wie in Abschnitt 5.4 beschrieben, durch Lösen des Optimierungsproblems (5.28). Dabei werden die Eigenwerte des virtuellen Regelkreises (5.25) auf einen Kreis mit dem Radius $\theta = 20$ beschränkt.

Zum Vergleich wurden auch hier ein linearer, nichtsättigender Zustandsregler sowie ein linearer Sättigungsregler entworfen. Beide Vergleichsregler wurden ebenfalls hinsichtlich der Abklingrate und für das Anfangsgebiet \mathcal{X}_0 entworfen. Dabei wird vom Anfangszustand des Aktormodells $\mathbf{u}_a(0) = \mathbf{0}$ ausgegangen.

Abbildung 5.3 zeigt die Verläufe der Sinkgeschwindigkeit $x_{s,2}$ und der Nickwinkelgeschwindigkeit $x_{s,3}$ für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_{s,0} = [5 \text{ m/s}, 5 \text{ m/s}, 5\pi/180 \text{ rad}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5 \text{ m/s}, 7\pi/180 \text{ rad/s}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5\pi/180 \text{ rad}]^T$. Abbildung 5.4 zeigt die zugehörigen Verläufe der kommandierten Stellgröße \mathbf{u} und der tatsächlich wirksamen Stellgröße \mathbf{u}_a (gestrichelter Verlauf). Der zugehörige Verlauf der Stellraten ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

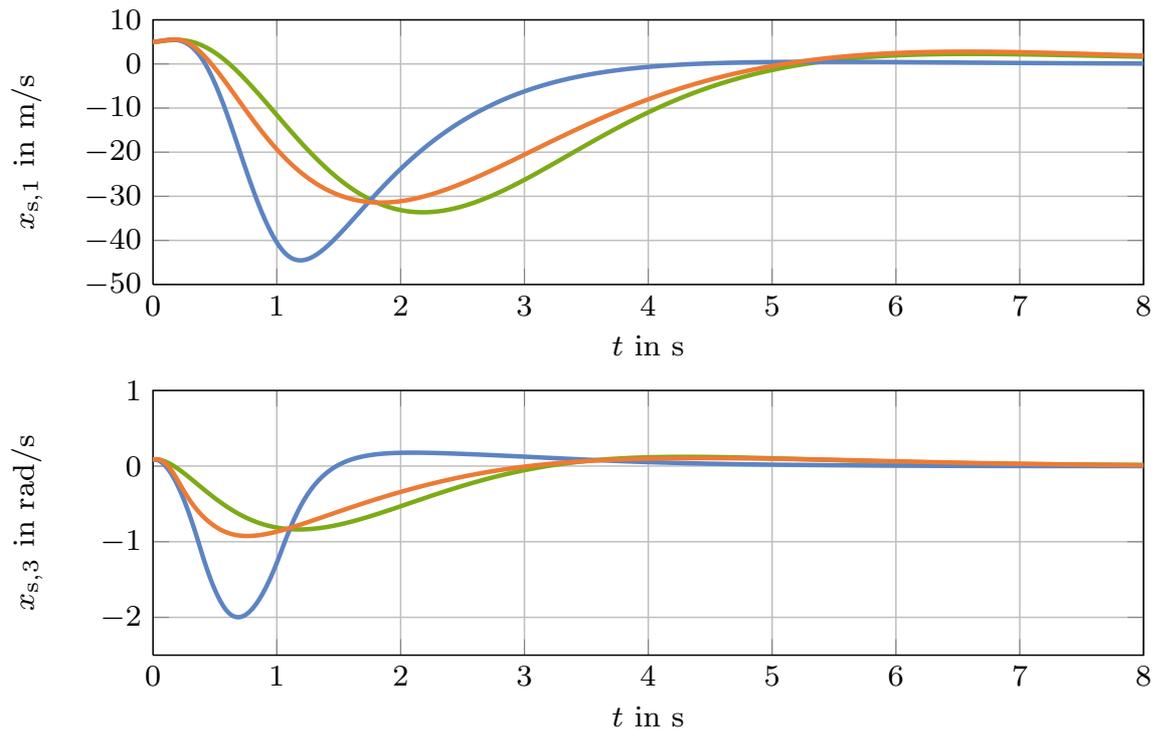


Abbildung 5.3: Vergleich der dynamischen Ausgangsrückführung — mit einem linearen Sättigungsregler — und einem linearen, nichtsättigenden Zustandsregler —. Verlauf der Sinkgeschwindigkeit $x_{s,2}$ (Hinweis: Das negative Vorzeichen bedeutet, der Helikopter steigt) und der Nickwinkelgeschwindigkeit $x_{s,3}$ für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_{s,0} = [5 \text{ m/s}, 5 \text{ m/s}, 5\pi/180 \text{ rad}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5 \text{ m/s}, 7\pi/180 \text{ rad/s}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5\pi/180 \text{ rad}]^T$.

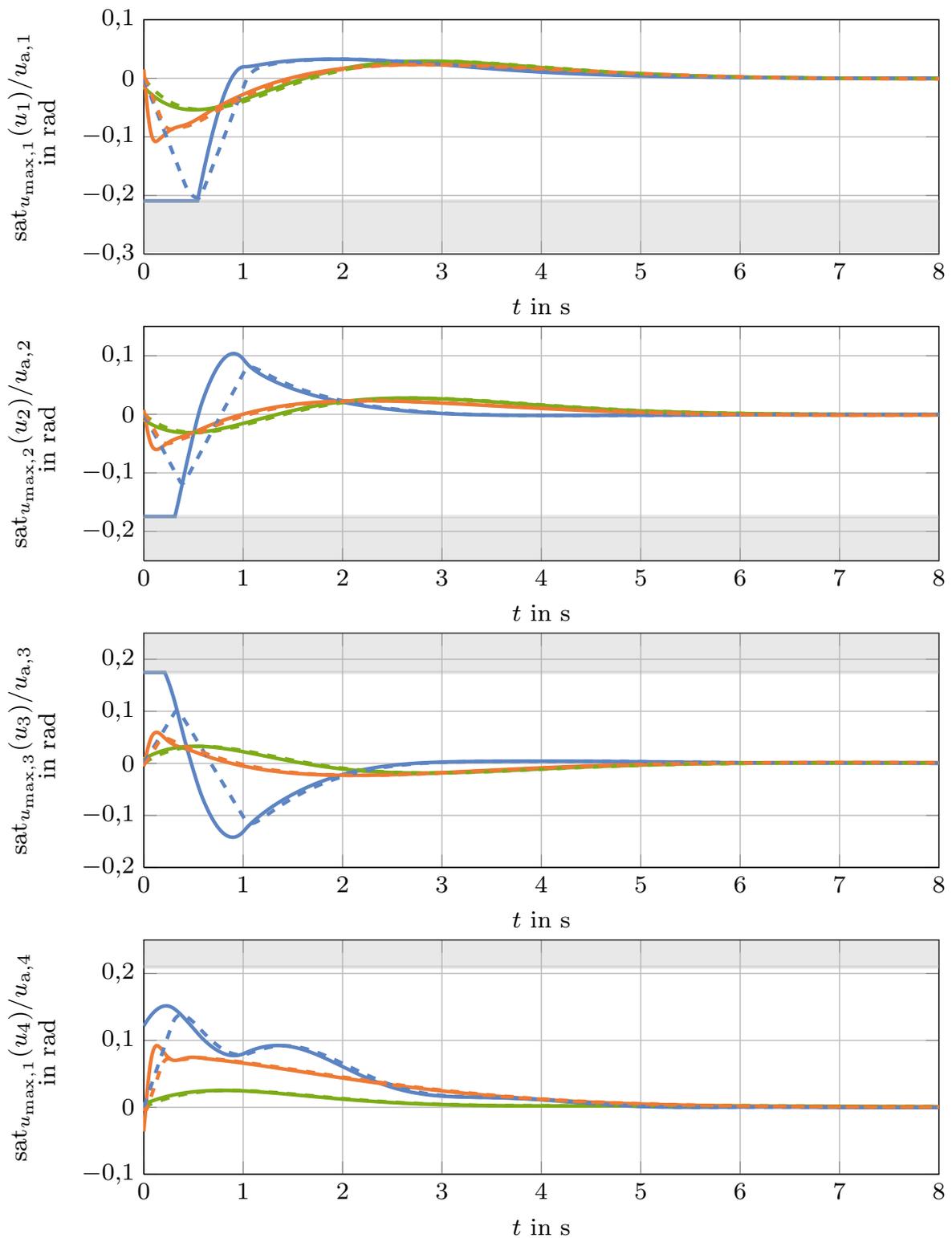


Abbildung 5.4: Verläufe der kommandierten Stellgrößen $\text{sat}_{u_{\max,i}}(u_i)$ und der wirksamen Stellgrößen $u_{a,i}$ (gestrichelt) für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_{s,0} = [5 \text{ m/s}, 5 \text{ m/s}, 5\pi/180 \text{ rad}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5 \text{ m/s}, 7\pi/180 \text{ rad/s}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5\pi/180 \text{ rad}]^T$ für die dynamische Ausgangsrückführung —, den linearen Sättigungsregler — und den linearen, nichtsättigenden Zustandsregler —.

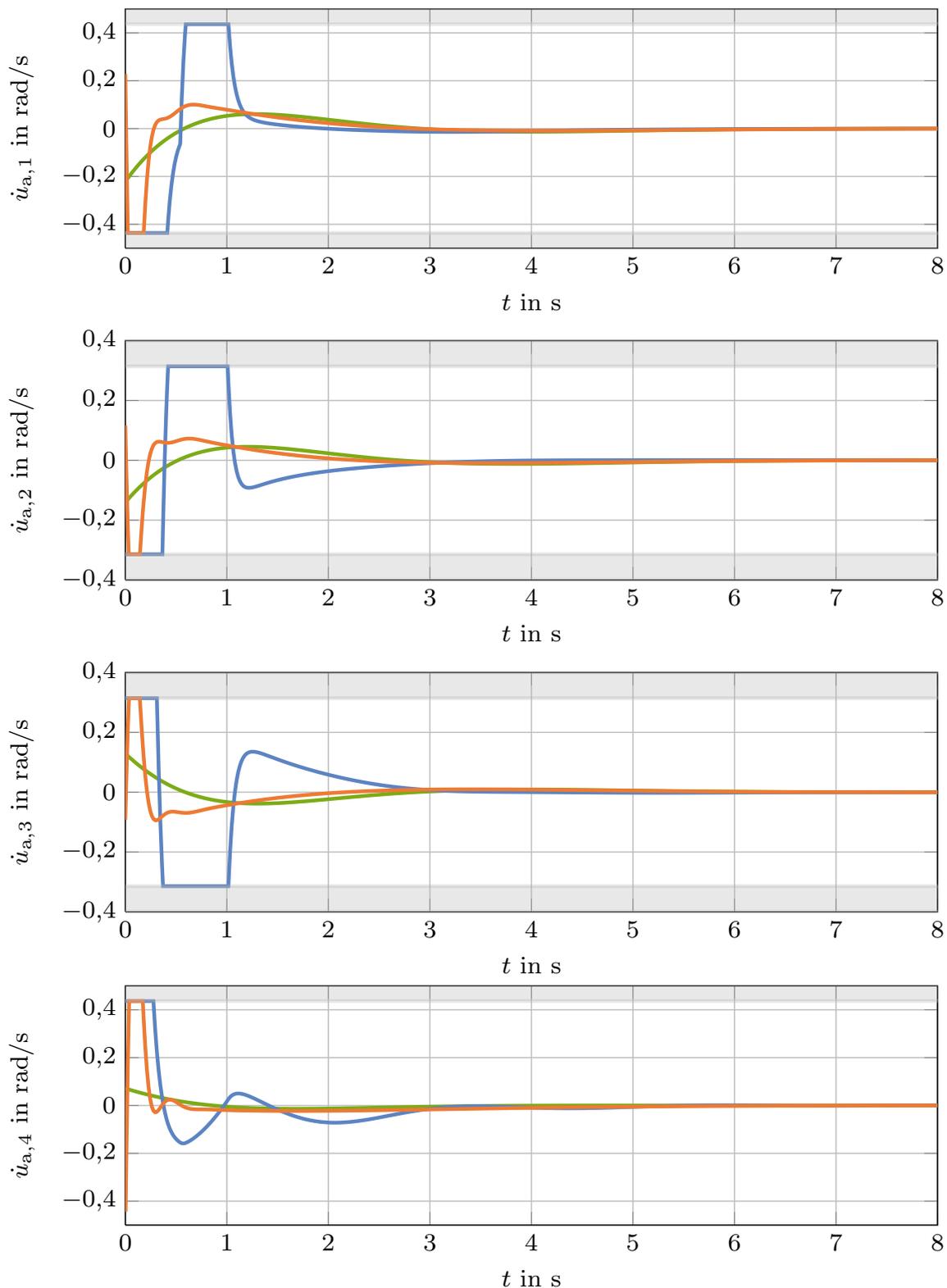


Abbildung 5.5: Vergleich der dynamischen Ausgangsrückführung — mit einem linearen Sättigungsregler — und einem linearen, nichtsättigenden Zustandsregler —. Verlauf der Stellraten $\dot{u}_{a,1}$ bis $\dot{u}_{a,4}$ für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_{s,0} = [5 \text{ m/s}, 5 \text{ m/s}, 5\pi/180 \text{ rad}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5 \text{ m/s}, 7\pi/180 \text{ rad/s}, 60\pi/180 \text{ rad/s}, 5\pi/180 \text{ rad}]^T$.

Erwartungsgemäß erzielt der lineare Sättigungsregler im Vergleich die kürzeste Ausregelzeit. Dies wird durch eine gute Ausnutzung des Stellbereichs möglich, die kommandierte Stellgröße, wie auch die Stellrate sättigen. Der nichtsättigende lineare Zustandsregler weist die längste Ausregelzeit und die schlechteste Ausnutzung des Stellbereichs auf. Die zuvor vorgestellte Ausgangsrückführung erzielt eine bessere Ausregelzeit als der nichtsättigende lineare Zustandsregler und es tritt eine Sättigung hinsichtlich der Stellrate auf. Die Ausregelzeit des linearen Sättigungsreglers und dessen bessere Ausnutzung des Stellbereichs kann jedoch nicht erzielt werden. Während der lineare Sättigungsregler und die nichtsättigende lineare Zustandsrückführung aber die Kenntnis aller Systemzustände erfordern, genügt im Falle der Ausgangsrückführung die Messung von 5 der insgesamt 8 Streckenzustände.

5.6 Störunterdrückung

In diesem Abschnitt werden Systeme betrachtet, welche von einer konstanten Störung \mathbf{w} beeinflusst werden. Sie werden durch

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_a + \mathbf{E}_s \mathbf{w}, \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s\end{aligned}$$

mit $\mathbf{A}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$, $\mathbf{B}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times m}$ und $\mathbf{E}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times l}$ beschrieben, wobei \mathbf{u}_a wiederum einer Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung unterliegt, d.h., es gilt $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ und $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ für $i = 1, \dots, m$. Unter Verwendung des Aktormodells (2.5) und mit dem erweiterten Zustand $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \ \mathbf{u}_a^T]^T$ lautet die erweiterte Systemdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u})) + \mathbf{E} \mathbf{w}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x},\end{aligned}\tag{5.29}$$

mit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{K}_1 sind in Gl. (2.8) angegeben. Als Störungen werden Vektoren \mathbf{w} betrachtet, die zu der Menge

$$\mathcal{W} = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^l : \mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{w} \leq 1 \}\tag{5.30}$$

gehören, wobei \mathbf{G} eine positiv definite Matrix ist. Ziel des Reglerentwurfs ist es zunächst sicherzustellen, dass für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ im Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ verbleibt. Dazu wird der Begriff eines strikt invarianten Gebietes benötigt.

Definition 5.3. Ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ ist strikt invariant für das System (5.29) falls $\dot{v}(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{E}(\mathbf{P})$ und alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ gilt.

Unter Verwendung der dynamischen Ausgangsrückführung \mathcal{K} gemäß Gl. (5.1) mit den virtuellen Hilfsreglern \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 aus Gl. (5.3) und (5.4) kann wiederum das erweiterte Gesamtsystem mit dem Zustand $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{z}_k^T]^T$ gebildet werden. Es lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})) + \mathbf{E}_g \mathbf{w}, \\ \mathbf{u} &= [\mathbf{D}_* \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_*] \mathbf{z}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

mit

$$\mathbf{E}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Damit kann nun ein Satz angegeben werden, welcher eine Erweiterung eines Satzes aus [10] auf die dynamische Ausgangsrückführung ist.

Satz 5.3. Gegeben sei die Strecke (5.29), die dynamische Ausgangsrückführung \mathcal{K} aus Gl. (5.1) und der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. Falls ein positiver Skalar η , sowie virtuelle Regler \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 existieren, so dass die Bedingungen

$$\Gamma(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Gamma(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} + \eta \mathbf{P} \prec 0 \tag{5.32}$$

mit

$$\Gamma(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{D}_1 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_2 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_* \mathbf{C}) \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} + \mathbf{E}_k \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{D}_1 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_2 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_* \mathbf{C}) \\ \mathbf{B} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{C}_1, \mathbf{T} \mathbf{C}_2, \mathbf{T} \mathbf{C}_*) \\ \mathbf{A}_k + \mathbf{E}_k \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{C}_1, \mathbf{T} \mathbf{C}_2, \mathbf{T} \mathbf{C}_*) \end{bmatrix}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ gelten und außerdem die Bedingung $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(H_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(H_2)$ sichergestellt ist, dann ist $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ ein strikt invariantes Gebiet des Systems (5.29) mit dem Regler \mathcal{K} .

Beweis. Zum Beweis von Satz 5.3 ist zu zeigen, dass $\dot{v}(\mathbf{z}) < 0$ für alle $\mathbf{z} \in \partial\mathcal{E}(\mathbf{P})$ und alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ gilt. Im Fall der Störunterdrückung lassen sich die Regelstrecke (5.29) und der dynamische Regler \mathcal{K} zum Gesamtsystem (5.31) zusammenfassen. Aus Satz 3.3 folgt, dass

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} \\ & \quad + 2\mathbf{z}^T \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E}_k \end{bmatrix} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} ([\mathbf{D}_* \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_*] \mathbf{z})) \\ & \leq \mathbf{z}^T (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})) \mathbf{z} \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gilt. Da außerdem gemäß [28], [60] die Ungleichung

$$2\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{w} \leq \frac{1}{\eta} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \eta \mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{w} \leq \frac{1}{\eta} \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \eta$$

gilt, ergibt sich mit $v(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$ die Ungleichung

$$\dot{v}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{z}^T \left(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} \right) \mathbf{z} + \eta.$$

Aus der in Satz 5.3 formulierten Matrixungleichung (5.32) folgt

$$\mathbf{z}^T \left(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} \right) \mathbf{z} < -\eta \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z},$$

weshalb des Weiteren

$$\dot{v}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{z}^T \left(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} \right) \mathbf{z} + \eta < -\eta \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} + \eta$$

gilt. Da für alle $\mathbf{z} \in \partial\mathcal{E}(\mathbf{P})$ die Gleichung $\mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} = 1$ gilt, ist auf dem Rand $\dot{v}(\mathbf{z}) < 0$ sichergestellt. Außerhalb dieses Gebietes ist $\dot{v}(\mathbf{z})$ ebenfalls negativ, weshalb eine Trajektorie, die im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ startet, im weiteren Verlauf darin verbleibt. Somit ist $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ ein strikt invariantes Gebiet. \square

Zum Entwurf des Reglers \mathcal{K} soll wieder ein konvexes Optimierungsproblem formuliert werden. Dazu müssen zunächst die Bedingungen (5.32) in geeigneter Weise transformiert werden. Dies erfolgt wiederum mit Hilfe der Matrix $\mathbf{\Pi}$ aus Gl. (5.8). Nach Anwendung des Schur-Komplements

ergeben sich die LMIs

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})) \mathbf{\Pi} - \eta \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y} \mathbf{E} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{E}^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \eta \mathbf{G} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (5.33)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Unter Verwendung der Substitutionen (5.10) ist der Term $\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v})) \mathbf{\Pi}$ linear in den Matrixvariablen und entspricht mit $\mathbf{E}_k = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{B}$ der linken Seite der Matrixungleichung (5.15). Im Zuge der Optimierung ist sicherzustellen, dass ein gegebenes Anfangsgebiet \mathcal{Z}_0 trotz Einwirkung der konstanten Störung \mathbf{w} stabilisiert werden kann. Um ein möglichst großes Gebiet von Störsignalen abzudecken, wird $\xi \cdot \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ gefordert und ξ maximiert. Wird \mathcal{W}_0 durch ein konvexes Polyeder mit den Eckpunkten $\mathbf{w}_{0,j}$ und $j = 1, \dots, N_{\mathbf{w}}$ beschrieben, so lautet das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{l} \text{Minimiere} \quad \delta \quad \text{u. d. B. d.} \\ \mathbf{X} \succ 0, \mathbf{Y} \succ 0, \hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{C}}_1, \hat{\mathbf{C}}_2 \\ \hat{\mathbf{C}}_*, \hat{\mathbf{D}}_1, \hat{\mathbf{D}}_2, \hat{\mathbf{D}}_*, \mathbf{G}, \hat{\mathbf{S}}, \eta \succ 0 \end{array} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{w}_{0,j}^T \mathbf{G} \mathbf{w}_{0,j} \leq \delta, \quad j = 1, \dots, N_{\mathbf{w}},$$

$$(5.14), (5.16) \text{ bis } (5.19), (5.22), (5.33)$$

mit $\delta = 1/\xi^2$.

Bemerkung 5.2. Aufgrund des Parameters $\eta > 0$ in den Matrixungleichungen (5.33) ist das Optimierungsproblem (5.34) nicht konvex. Diese Problematik lässt sich jedoch umgehen, indem ein fixes $\eta > 0$ vorgegeben wird und das Optimierungsproblem gelöst wird. Das Optimum für δ ergibt sich dann, indem η zwischen 0 und ∞ variiert wird [63].

Falls das Gebiet \mathcal{W}_0 , in dem mögliche Störungen \mathbf{w} liegen, vorab bekannt ist und sich aus der Lösung des Optimierungsproblems (5.34) ein $\xi > 1$ ergibt, lässt sich mit Hilfe der Regelung eine weitere Zielsetzung verfolgen. Der oben beschriebene Reglerentwurf stellt sicher, dass alle Trajektorien ausgehend von $\mathbf{z}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ in $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ verbleiben.

Eine etwas andere Zielsetzung ist aber der Wunsch nach einem möglichst kleinen invarianten Gebiet, welches den Ursprung enthält. Dann nämlich verbleibt jede Trajektorie, die im Ursprung startet, in der Nähe des Ursprungs für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Mit Hilfe der nun beschriebenen Vorgehensweise lässt sich diese Zielsetzung verfolgen, wobei gleichzeitig sichergestellt wird,

dass das Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ für eine feste Menge \mathcal{W}_0 möglicher Störungen strikt invariant ist. Das invariante Gebiet um den Ursprung wird dabei durch eine Höhenlinie der Ljapunov-Funktion begrenzt und lautet

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1) = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+n_z} : \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \leq \rho_1 \}$$

mit $0 < \rho_1 < 1$. Die nun folgenden Ausführungen stellen eine Erweiterung der in [60] beschriebenen Methodik auf die Verwendung einer dynamischen Ausgangsrückführung dar. Unter Verwendung von zwei weiteren Hilfsreglern

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 : & \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{y} + \mathbf{E}_k \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{C}_3 \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_3 \mathbf{y}, \end{cases} \\ \mathcal{H}_4 : & \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{y} + \mathbf{E}_k (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{u}_4), \\ \mathbf{u}_4 = \mathbf{C}_4 \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_4 \mathbf{y} \end{cases} \end{aligned}$$

und mit

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{D}_3 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_4 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_* \mathbf{C}) \\ \mathbf{B}_k \mathbf{C} + \mathbf{E}_k \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{D}_3 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_4 \mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T} \mathbf{D}_* \mathbf{C}) \\ \mathbf{B} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{C}_3, \mathbf{T} \mathbf{D}_4, \mathbf{T} \mathbf{C}_*) \\ \mathbf{A}_k + \mathbf{E}_k \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{C}_3, \mathbf{T} \mathbf{D}_4, \mathbf{T} \mathbf{C}_*) \end{bmatrix}$$

kann der folgende Satz zum Entwurf einer solchen Regelung verwendet werden.

Satz 5.4. *Gegeben sei die Regelstrecke (5.29) und die Menge an Störungen \mathcal{W} . Wenn eine Matrix $\mathbf{P} \succ 0$, die Regler $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ und ein Skalar $\eta > 0$ existieren, so dass die Bedingungen*

$$\Gamma(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \Gamma(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} + \eta \mathbf{P} \prec 0, \quad (5.35)$$

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{v})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\Gamma}(\mathbf{v}) + \frac{1}{\eta} \mathbf{P} \mathbf{E}_g \mathbf{G}^{-1} \mathbf{E}_g^T \mathbf{P} + \frac{\eta}{\rho_1} \mathbf{P} \prec 0 \quad (5.36)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ und $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ und $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_3) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_4)$ erfüllt sind, dann ist der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ strikt invariant. Des Weiteren wird jede Trajektorie, die im Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1)$ startet, für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ in $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1)$ verbleiben.

Beweis. Es gilt $\mathcal{E}(\mathbf{P}, 1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1)$ und $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_3)$. Da $\rho \in [\rho_1, 1]$, existiert ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass $1/\rho = \lambda \cdot 1/1 + (1 - \lambda) \cdot 1/\rho_1$ ist.

Demnach existiert ein $\mathcal{H}_{\rho,v}$, welches eine konvexe Kombination aus \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_3 ist, so dass $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_{\rho,v})$ gilt. Des Weiteren existiert ein $\mathcal{H}_{\rho,u}$, welches eine konvexe Kombination aus \mathcal{H}_2 und \mathcal{H}_4 ist, so dass $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_{\rho,u})$ gilt. Da $\mathcal{H}_{\rho,v}$ und $\mathcal{H}_{\rho,u}$ als konvexe Kombination der Regler \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_3 bzw. \mathcal{H}_2 und \mathcal{H}_4 ausgedrückt werden können, gilt sofern die Bedingungen (5.35) und (5.36) erfüllt sind für alle $\rho \in [\rho_1,1]$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{\Gamma}_{\rho}(\mathbf{v}))^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}_{\rho}(\mathbf{v}) \mathbf{\Pi} - \frac{\eta}{\rho} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y}\mathbf{E} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{E}^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \eta \mathbf{G} \end{bmatrix} \succ 0,$$

mit

$$\mathbf{\Gamma}_{\rho}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{D}_{\rho,v}\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_{\rho,u}\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_{\star}\mathbf{C}) \\ \mathbf{B}_k\mathbf{C} + \mathbf{E}_k\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{D}_{\rho,v}\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_{\rho,u}\mathbf{C}, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{D}_{\star}\mathbf{C}) \\ \mathbf{B}\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{C}_{\rho,v}, \mathbf{T}\mathbf{D}_{\rho,u}, \mathbf{T}\mathbf{C}_{\star}) \\ \mathbf{A}_k + \mathbf{E}_k\mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, \mathbf{C}_{\rho,v}, \mathbf{T}\mathbf{D}_{\rho,u}, \mathbf{T}\mathbf{C}_{\star}) \end{bmatrix}.$$

Somit wird eine Trajektorie, die in $\mathcal{E}(\mathbf{P}) = \mathcal{E}(\mathbf{P},1)$ startet, für $t \rightarrow \infty$ in den Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho_1)$ einlaufen. Da der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho_1)$ strikt invariant ist, wird außerdem eine Trajektorie, die in $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho_1)$ startet, für alle $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ in $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho_1)$ verbleiben. \square

Die Bedingungen aus Satz 5.4 können mit Hilfe der in Abschnitt 5.3 eingeführten Substitutionen in LMIs überführt werden. Die Bedingungen (5.35) und (5.36) lassen sich unter Anwendung des Schur-Komplement Lemmas in die LMIs

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}))^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}(\mathbf{v}) \mathbf{\Pi} - \eta \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y}\mathbf{E} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{E}^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \eta \mathbf{G} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.37)$$

und

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{\Pi}^T (\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{v}))^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{v}) \mathbf{\Pi} - \frac{\eta}{\rho_1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y}\mathbf{E} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{E}^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \eta \mathbf{G} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.38)$$

umformen. Die Bedingung $\mathcal{E}(\mathbf{P},\rho_1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_3)$ führt schließlich auf die LMIs

$$\begin{bmatrix} \rho_1^{-1}\mathbf{X} & \rho_1^{-1}\mathbf{I} & \mathbf{C}_3^T \\ \rho_1^{-1}\mathbf{I} & \rho_1^{-1}\mathbf{Y} & \mathbf{C}_3^T \mathbf{D}_3^T \\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{D}_3 \mathbf{C} & \mathbf{W}_3 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (5.39)$$

und

$$w_{3,ii} \leq v_{\max,i}^2 \quad (5.40)$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. In analoger Weise wird die Bedingung $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_4)$ durch

$$\begin{bmatrix} \rho_1^{-1} \mathbf{X} & \rho_1^{-1} \mathbf{I} & \mathbf{C}_4^T \\ \rho_1^{-1} \mathbf{I} & \rho_1^{-1} \mathbf{Y} & \mathbf{C}_4^T \mathbf{D}_4^T \\ \mathbf{C}_4 & \mathbf{D}_4 \mathbf{C} & \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad (5.41)$$

und

$$w_{4,ii} \leq u_{\max,i}^2 \quad (5.42)$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ ausgedrückt. Zum Entwurf wird gefordert, dass $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho_1) \subset \zeta \cdot \mathcal{Z}_\infty$ gilt. Wird nun ζ minimiert, bzw. $\gamma_\infty = 1/\zeta^2$ maximiert, führt dies zu folgendem Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{l} \text{Minimiere} \quad -\gamma_\infty, \quad \text{u. d. B. d.} \\ \mathbf{X} \succ 0, \mathbf{Y} \succ 0, \hat{\mathbf{A}}_k, \hat{\mathbf{B}}_k, \hat{\mathbf{C}}_1, \hat{\mathbf{C}}_2 \\ \hat{\mathbf{C}}_*, \hat{\mathbf{D}}_1, \hat{\mathbf{D}}_2, \hat{\mathbf{D}}_*, \mathbf{G}, \hat{\mathbf{S}}, \eta \succ 0 \end{array} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{w}_{0,j}^T \mathbf{G} \mathbf{w}_{0,j} \leq 1,$$

$$\mathbf{x}_{\infty,j}^T \mathbf{Y} \mathbf{x}_{\infty,j} \geq \gamma_\infty,$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{\Pi}^T (\mathbf{\Gamma}_\rho(\mathbf{v}))^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{\Gamma}_\rho(\mathbf{v}) \mathbf{\Pi} - \frac{\eta}{\rho_1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{Y} \mathbf{E} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{E}^T & \mathbf{E}^T \mathbf{Y} \end{bmatrix} & \eta \mathbf{G} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

(5.14), (5.16) bis (5.19), (5.22), (5.37) bis (5.42).

In Kapitel 7 wird dieses Optimierungsproblem dazu verwendet, um im Rahmen des Entwurfs einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung eine dynamische Ausgangsrückführung zur Störunterdrückung zu entwerfen.

5.7 Fazit

Die in diesem Kapitel vorgestellte Ausgangsrückführung stellt eine Erweiterung der sättigenden Ausgangsrückführung aus [84] auf Systeme unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung dar. Auch im Falle zusätzlicher Stellratenbegrenzungen können durch geeignete Wahl virtueller Hilfsregler alle Entwurfsbedingungen mit Hilfe der von Scherer in [114] angegebenen Transformation als konvexe Nebenbedingungen formuliert werden. Dies erlaubt den Entwurf mittels konvexer Optimierung. Voraussetzung dazu ist, dass die Ordnung der dynamischen Ausgangsrückführung der Ordnung n des um den Aktorzustand erweiterten Systems entspricht. Während in [84] nur die Stabilisierung von Anfangszuständen betrachtet wird, befasst sich diese Arbeit auch mit der, für die Praxis relevanten, Unterdrückung von Störungen.

Der besondere Vorteil der Ausgangsrückführung gegenüber den in Kapitel 3 und 4 beschriebenen Verfahren ist die Tatsache, dass ihr Regelalgorithmus lediglich die Kenntnis der Ausgangsgrößen des Systems erfordert. Das betrachtete Beispiel zeigt, dass die Ausgangsrückführung ein besseres Ausregelverhalten erzielen kann als ein linearer Zustandsregler, welcher die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors erfordert. Die Ausgangsrückführung wird in Kapitel 7 im Rahmen der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung wieder aufgegriffen. Auf diese Weise wird eine Führungsregelung möglich, welche lediglich auf der Messung von Ausgangsgrößen des Systems basiert.

6 Festwert- Führungsregelungen

Die zuvor vorgestellten Regelverfahren dienen zur Stabilisierung einer gegebenen Ruhelage. Zu diesem Zweck wird der Ursprung des Systems in die jeweilige Ruhelage transformiert. Oftmals soll eine Regelung jedoch dazu verwendet werden, ein System - möglicherweise in Abhängigkeit von einem Referenzsignal - von einer Ruhelage in eine andere Ruhelage zu überführen. Dieser Aufgabenstellung widmet sich dieses Kapitel.

6.1 Ausschließliche Stellgrößenbegrenzungen

Um zu erläutern, welche Probleme sich beim Entwurf von Festwert-Führungsregelungen unter Berücksichtigung von Stellbegrenzungen ergeben, wird zunächst der Fall ausschließlicher Stellgrößenbegrenzungen betrachtet. Die Effekte, die dabei beobachtet werden können, treten in gleicher Weise auch bei Systemen mit zusätzlicher Stellratenbegrenzung in Erscheinung.

Dazu wird das System

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} u_a \quad (6.1)$$

betrachtet. Bei diesem System handelt es sich um das stark vereinfachte Modell der Nickbewegung der McDonnell X-36, welche kein Seitenleitwerk besitzt (abgekürzt TAFE Engl.: Tailless Fighter Aircraft). Das Modell wurde [69] entnommen und besitzt die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -4, \\ \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Der Zustand $x_{s,1}$ bezeichnet dabei den Anstellwinkel in rad und $x_{s,2}$ die Pitchrate in rad/s. Der Eingang u_a des Systems ist der Höhenruderwinkel in rad, welcher auf $|u_a| \leq 20/180\pi$ rad begrenzt ist. Für dieses System

wurde ein linearer, nichtsättigender Zustandsregler $u = \mathbf{k}_{lin}^T \mathbf{x}_s$ zur Stabilisierung der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ entworfen, wobei die Konvergenzrate des geschlossenen Kreises optimiert wurde. Der Entwurf ist in Anhang A.6 beschrieben. Neben den Reglerparametern liefert der Entwurf ebenfalls ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$, der das garantierte Einzugsgebiet charakterisiert.

Nun soll ein Regelgesetz aufgestellt werden, welches eine Pitchrate von $\bar{x}_{s,2} = 15\pi/180$ rad/s einstellt. Aus Gl. (6.1) ergibt sich, dass hierzu ein stationärer Anstellwinkel von $\bar{x}_{s,1} = 15\pi/180$ rad, sowie eine stationäre Stellgröße von $\bar{u} = -0,1309$ rad erforderlich sind. Um diese neue Ruhelage zu stabilisieren, wird das Regelgesetz

$$u = \bar{u} + \mathbf{k}_{lin}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \quad (6.2)$$

verwendet. Soll nun wiederum ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ zur Abschätzung des garantierten Einzugsgebiets der neuen Ruhelage bestimmt werden, so ist sicherzustellen, dass der Regler auf diesem Ellipsoid nicht sättigt. Damit wird der Ellipsoid begrenzt durch die Höhenlinie $\rho(\bar{u})$, bei der das Regelgesetz (6.2) die Stellgrößenbegrenzung tangiert. Gesucht ist also

$$\rho(\bar{u}) = \min_{\bar{u} + \mathbf{k}_{lin}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) = u_{max}} (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{P} (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s).$$

Mit Hilfe des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren (siehe Anhang A.6.1) ergibt sich

$$\rho(\bar{u}) = \frac{(u_{max} - |\bar{u}|)^2}{\mathbf{k}_{lin}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{lin}}.$$

Gilt also wie im vorliegenden Fall $\bar{u} \neq 0$, wird der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ kleiner als der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$. Für das hier betrachtete Beispiel zeigt Abbildung 6.1 die Ellipsoide der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$, sowie der neuen Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = [15\pi/180 \text{ rad } 15\pi/180 \text{ rad/s}]^T$. Es ist deutlich erkennbar, dass nicht alle Zustände, die im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ liegen auch im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ enthalten sind. Für die Trajektorien, die nicht in $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ starten, ist somit nicht sichergestellt, dass sie tatsächlich in die neue Ruhelage einlaufen. Beim Entwurf einer Führungsregelung ist dieser Umstand problematisch.

Diese Problematik bleibt auch bestehen, wenn ein sättigendes Regelgesetz verwendet wird. Bei dessen Entwurf wird nämlich im Stabilitätsnachweis ein nichtsättigender, virtueller Hilfsregler benötigt. Soll eine neue Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s \neq \mathbf{0}$ stabilisiert werden, ist sicherzustellen, dass der

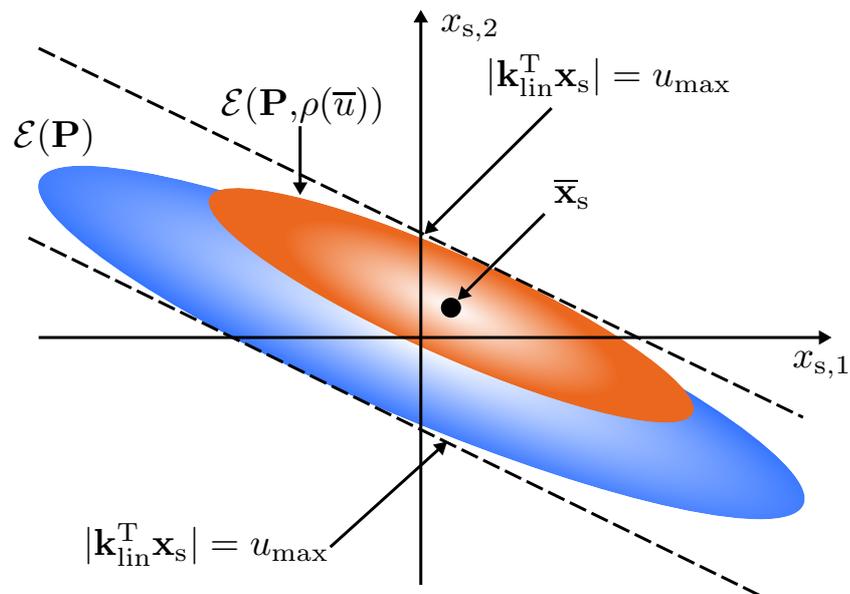


Abbildung 6.1: Abschätzung des maximalen Einzugsgebietes der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ (blau) und der neuen Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = [15\pi/180\text{rad } 15\pi/180\text{rad/s}]^T$ (orange) mit Hilfe von Ellipsoiden.

Hilfsregler die Stellgrößenbegrenzung einhält, was wiederum die zuvor beschriebene Problematik zur Folge hat.

Im Falle von Systemen mit simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung bleibt diese Problematik ebenfalls bestehen. Dabei ist festzuhalten, dass für im Falle eines Arbeitspunktwechsels primär die Stellgrößenbegrenzung entscheidend ist. Zwar begrenzt die Stellratenbeschränkung im Fall der Stabilisierung der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ zusätzlich die Größe des Ellipsoids, jedoch beeinflusst ausschließlich die Stellgrößenbegrenzung dessen Verkleinerung bei Stabilisierung der neuen Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s \neq \mathbf{0}$. Die Ursache dafür ist, dass die Stellrate im stationären Fall stets null ist.

6.2 Literaturüberblick

Zur Führungsregelung linearer Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen existieren eine Reihe von Ansätzen. Dieser Abschnitt soll einen Überblick über die wichtigsten Verfahren bieten.

Ein Ansatz zur Führungsregelung basiert auf der Verwendung eines sogenannten Referenz-Regulators (Engl. Reference Governor). Dazu wird zunächst, ähnlich wie beim Entwurf von Anti-Windup Verfahren, ein Reg-

ler für das unbeschränkte System entworfen. Der Referenz-Regulator hat anschließend die Aufgabe, das Referenzsignal so zu modifizieren, dass keine Sättigung der Stellgröße auftritt. In [13], [43], [44] wird der Entwurf von Referenz-Regulatoren für lineare Systeme beschrieben. Erweiterungen auf nichtlineare Systeme werden in [12] und [42] vorgestellt. Alle diese Verfahren verwenden die diskretisierte Darstellung des geregelten Systems. Neben der Messung des Zustandsvektors ist zur Berechnung des modifizierten Referenzsignals eine Online-Optimierung erforderlich. Die Berücksichtigung von Stellratenbegrenzungen ist zwar prinzipiell möglich [42], führt aber zu einer weiteren Zunahme des Online-Rechenaufwands.

Ein anderer, weit verbreiteter Ansatz nutzt die Darstellung des Systems in Fehlerkoordinaten. Diese Herangehensweise wird beispielsweise in [82] verfolgt. Darin wird das System so umgeformt, dass die Regeldifferenz $\bar{\mathbf{y}}_s - \mathbf{r}$ Teil des Zustandsvektors des umgeformten Systems ist. Außerdem wird ein Integrierer zur Sicherstellung der stationären Genauigkeit hinzugefügt. Für dieses System wird anschließend ein Zustandsregler mit Hilfe der linear-quadratischen Regelung entworfen. Im Anschluss an diesen Entwurf wird die Sättigungsfunktion der Stellgröße in die Betrachtungen einbezogen und ein Stabilitätsgebiet bestimmt. In dieser nachträglichen Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung liegt ein entscheidender Nachteil dieses Verfahrens. In der Erweiterung des Ansatzes in [134] ist die simultane Bestimmung des Reglers und des Stabilitätsgebietes möglich, die verwendete Repräsentation der Sättigungsfunktion ist jedoch sehr konservativ. Schließlich wird dieser Ansatz in [28] um ein Anti-Windup Netzwerk erweitert und es wird ein weniger konservativer Entwurf vorgestellt.

Alle zuvor angesprochen Verfahren weisen die Gemeinsamkeit auf, dass der Reglerentwurf anhand eines umgeformten Systems erfolgen muss. Ein alternativer Ansatz wird von Buhl in [24], [26] vorgestellt. Darin wird ein zustandsabhängiges Vorfilter entworfen. Zu seiner Parametrierung ist lediglich der Entwurf eines stabilisierenden Reglers für die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ erforderlich. Um das System in die neue Ruhelage zu überführen, wird zunächst eine weitere Ruhelage bestimmt, deren zugehöriger Ellipsoid den aktuellen Systemzustand beinhaltet und die Trajektorie des Systems in Richtung der neuen Ruhelage bewegt. Dies geschieht so lange, bis die Trajektorie in den zur Zielruhelage gehörenden Ellipsoid einläuft. Dabei sind sättigende Stellgrößen zugelassen. Das Verfahren ist jedoch im Allgemeinen nur für SISO-Systeme anwendbar. Eine Begrenzung der Stellrate ist ebenfalls nicht berücksichtigt.

Ein weiteres Verfahren für lineare Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung, welches ein zustandsabhängiges Vorfilter zur Stabili-

sierung einer von null verschiedenen Ruhelage nutzt, wird in [17], [18] beschrieben. Zentrale Idee des Ansatzes ist, zum Nachweis der Stabilität der gewünschten neuen Ruhelage nicht quadratische Ljapunov-Funktionen zu verwenden, sondern stattdessen die Ljapunov-Funktion zum Nachweis der Stabilität der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s$ in geeigneter Weise zu verformen. Genau wie beim Vorfilterentwurf in [24] bzw. [26] genügt zur Parametrierung des Vorfilters der Entwurf eines die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ stabilisierenden Zustandsreglers. Allerdings sind sättigende Stellgrößen nicht erlaubt. Zwar wird dieser Regler in [19] verwendet, um einen sättigenden Führungsregler für ein Positioniersystem zu entwerfen, jedoch basiert der Stabilitätsnachweis auf der speziellen Anwendung und ist nicht auf allgemeine Systeme übertragbar. Des Weiteren erfordert der Ansatz eine Backstepping-Prozedur, wodurch Herleitung und Stabilitätsnachweis kompliziert werden.

In diesem Kapitel wird der Ansatz aus [17], [18] aufgegriffen, um eine sättigende Festwert-Führungsregelung für Systeme unter simultaner Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung zu entwerfen. Diese ist auf MIMO-Systeme anwendbar. Während in [17], [18] vorausgesetzt wird, dass ein nichtsättigender Regler mit einer zugehörigen Ljapunov-Funktion bereits entworfen wurde, wird im Rahmen dieser Arbeit auch auf den Entwurf des stabilisierenden sättigenden Reglers eingegangen.

6.3 Vorbemerkungen

Zum Entwurf einer sättigenden Festwert-Führungsregelung wird zunächst davon ausgegangen, dass im Vorfeld ein linearer Sättigungsregler gemäß Abschnitt 3.3, beispielsweise durch Lösen des Optimierungsproblems (3.22), zur Stabilisierung der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ entworfen wurde. Neben den Reglerparametern liefert der Entwurf auch ein kontraktiv invariantes Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. Dieses Gebiet ist für die im Folgenden angegebenen Definitionen von Interesse.

Dazu wird zunächst die Berechnung von Ruhelagen erläutert, bevor anschließend die Menge zulässiger Referenzsignale definiert wird.

6.3.1 Berechnung von Ruhelagen

Zur Bestimmung der Ruhelagen wird wiederum das der Form (2.1) entsprechende System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_a, \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s\end{aligned}$$

mit $\mathbf{A}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$, $\mathbf{B}_s \in \mathbb{R}^{n_s \times m}$ und $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{q_s \times n_s}$ betrachtet. Unter Verwendung des Aktormodells (2.5) ergibt sich analog zu Gl. (2.7) das erweiterte System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

mit $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \ \mathbf{u}_a^T]^T$. Um nun den Referenzzustand, d.h., die zu einem konstanten Referenzsignal \mathbf{r} gehörende Ruhelage, zu ermitteln, werden die Bedingungen im stationären Fall betrachtet. Hier muss gelten

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}_s = \mathbf{0} = \mathbf{A}_s \bar{\mathbf{x}}_s + \mathbf{B}_s \bar{\mathbf{u}}_a, \quad (6.3)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a = \mathbf{0} = \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (-\mathbf{T} \bar{\mathbf{u}}_a + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\bar{\mathbf{u}})). \quad (6.4)$$

Außerdem soll der Ausgang des Systems im Idealfall dem Referenzsignal entsprechen, d.h., Gleichung

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{y}}_s = \mathbf{C}_s \bar{\mathbf{x}}_s \quad (6.5)$$

soll erfüllt sein. Es ist offensichtlich, dass nur stationäre Zustände erreichbar sind, für die $|\bar{u}_{a,i}| < u_{\max,i}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt. In diesem Fall ergibt sich aus den Gleichungen (6.3) und (6.4) sowie aus der Definition von \mathbf{A} in Gl. (2.8), dass $\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ und $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_a$ gilt. Die Bedingungen (6.3) und (6.5) lassen sich zusammenfassen zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_s \\ \bar{\mathbf{y}}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s \\ \bar{\mathbf{u}}_a \end{bmatrix} = \mathbf{S} \bar{\mathbf{x}}.$$

Ist die Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

regulär, kann der zugehörige stationäre Zustand, sowie der zugehörige stationäre Stellgrößenvektor $\bar{\mathbf{u}}_a$ gemäß

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s(\mathbf{r}) \\ \bar{\mathbf{u}}_a(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

berechnet werden. In diesem Fall konvergiert der Fehler $\|\mathbf{y}_s - \mathbf{r}\|$ für $t \rightarrow \infty$ zu null. Zur Verkürzung der Schreibweise wird im Folgenden $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r})$, $\bar{\mathbf{x}}_s = \bar{\mathbf{x}}_s(\mathbf{r})$ und $\bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{u}}_a(\mathbf{r})$ verwendet.

Falls die Matrix \mathbf{S} nicht regulär ist, kann Bedingung (6.5) im Allgemeinen nicht exakt erfüllt werden. Stattdessen wird gefordert, dass die quadratische Fehlersumme

$$e = \sum_{i=1}^{q_s} (y_i - r_i)^2$$

minimal ist. Zusätzlich ist sicherzustellen, dass die Bedingung $\dot{\bar{\mathbf{x}}}_s = \mathbf{0}$ eingehalten wird und der berechnete Referenzzustand tatsächlich stationär ist. Aufgrund dieser Gleichungsnebenbedingung, kann die Lösung nicht unmittelbar mit Hilfe der Pseudoinversen

$$\mathbf{S}^+ = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$$

erfolgen. Stattdessen muss zur Bestimmung des stationären Zustands und des zugehörigen stationären Stellgrößenvektors ein Least-squares-Optimierungsproblem der Form

$$\text{Minimiere}_{\bar{\mathbf{x}}_s, \bar{\mathbf{u}}_a} \sum_{i=1}^{q_s} (y_i - r_i)^2, \quad \text{u. d. B. d.}$$

$$\mathbf{L} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s \\ \bar{\mathbf{u}}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s \\ \bar{\mathbf{u}}_a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

formuliert werden. Die Lösung für ein Optimierungsproblem dieser Form findet sich beispielsweise in [97] und lautet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_s \\ \bar{\mathbf{u}}_a \end{bmatrix} &= \tilde{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ &= \left(\mathbf{S}^+ + (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{L}^T \left(\mathbf{L} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{L}^T \right)^{-1} \mathbf{L} \mathbf{S}^+ \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}, \quad (6.6) \end{aligned}$$

wobei \mathbf{S}^+ die Pseudoinverse der Matrix \mathbf{S} bezeichnet.

6.3.2 Zulässige Referenzzustände und -signale

Da im Rahmen dieser Arbeit auch instabile Systeme betrachtet werden, wird auch zur Führungsregelung linearer Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen ein lokaler Ansatz verfolgt. Demnach kann die Regelung nur innerhalb eines bestimmten Gebietes betrieben werden. Auch im Falle stabiler Systeme kann in der gewünschten neuen Ruhelage eine stationäre Stellgröße $\bar{\mathbf{u}}_a \neq \mathbf{0}$ erforderlich sein, so dass auch in diesem Fall nicht beliebige Ruhelagen angefahren werden können. Somit ergeben sich Einschränkungen hinsichtlich der zulässigen Referenzzustände und -signale, auf welche in diesem Abschnitt genauer eingegangen werden soll.

Im vorigen Abschnitt wurde beschrieben, wie die gewünschte neue Ruhelage in Abhängigkeit von einem Referenzsignal \mathbf{r} berechnet werden kann. Gemäß der obigen Ausführungen muss für die gewünschte Ruhelage zum einen die Bedingung $|\bar{u}_{a,i}| < u_{\max,i}$ sichergestellt sein, zum anderen muss die neue Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_s^T \ \bar{\mathbf{u}}_a^T]^T$ im Inneren des Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ liegen, d.h., es gilt $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$. In Anlehnung an [17] werden zunächst zulässige Referenzzustände definiert:

Definition 6.1 ([17]). Ein Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_s^T \ \bar{\mathbf{u}}_a^T]^T$ heißt zulässig, falls die Bedingungen

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &\in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P}), \\ |\bar{u}_{a,i}| &= |\bar{u}_i| \leq u_{\max,i} \end{aligned}$$

für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gelten.

Aufgrund der Beschränkung der gewünschten neuen Arbeitspunkte auf zulässige Referenzzustände ergeben sich auch Beschränkungen hinsichtlich der Referenzsignale. Es sind daher nur Referenzsignale zulässig, deren zugehörige Referenzzustände ebenfalls zulässig sind. Dies wird mit Hilfe der Menge

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{q_s} : |\bar{u}_{a,i}| < u_{\max,i}, \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}) \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})\}$$

und der folgenden Definition ausgedrückt.

Definition 6.2 ([17]). Ein Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ heißt zulässig, falls es kontinuierlich ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}} \in \mathcal{R}$$

gilt.

Wird das Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ in geeigneter Weise begrenzt, so darf ein zulässiges Referenzsignal einen beliebigen Verlauf besitzen, vorausgesetzt es konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen einen stationären Wert $\bar{\mathbf{r}} \in \mathcal{R}$.

Begrenzung von Referenzsignalen

Für den Fall, dass ein Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ zumindest zeitweise nicht in der Menge \mathcal{R} liegt, ist entweder $|\bar{u}_{a,i}(\mathbf{r}(t))| \geq u_{\max,i}$ oder/und $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}(t)) \notin \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$. In solchen Fällen muss es in geeigneter Weise begrenzt werden. Eine Begrenzung kann, wie in [17] vorgeschlagen, mit Hilfe der Funktion

$$P(\mathbf{r}_u(t)) = (1 + \epsilon) \max \left\{ \sqrt{\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}_u(t))^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}_u(t))}, \left\| \frac{\bar{u}_{a,i}(\mathbf{r}_u(t))}{u_{\max,i}} \right\|_{\infty} \right\}$$

mit $\epsilon > 0$ erfolgen, wobei $\mathbf{r}_u(t)$ das unbeschränkte Referenzsignal und $\|u\|_{\infty}$ die Maximum-Norm bezeichnet. Der Parameter ϵ dient dazu, sicherzustellen, dass $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt und kann beliebig klein gewählt werden. Wird nun das Referenzsignal $\mathbf{r}_u(t)$ gemäß

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_u(t) \cdot P(\mathbf{r}_u(t))^{-1}, & \text{wenn } P(\mathbf{r}_u(t)) > 1, \\ \mathbf{r}_u(t) & \text{sonst} \end{cases}$$

beschränkt, so ist das modifizierte Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ zulässig. Der zu einem in dieser Form begrenzten Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ korrespondierende Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{r}(t))$ verbleibt stets im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. Des Weiteren hält die erforderliche stationäre Stellgröße $\bar{\mathbf{u}}_a$ die Stellgrößenbegrenzung ein.

6.4 Sättigende Festwert-Führungsregelung

Wie bereits eingangs des vorigen Abschnitts erwähnt, wird zum Entwurf der sättigenden Führungsregelung zunächst ein linearer Sättigungsregler zur Stabilisierung der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ entworfen. Dazu wird Satz 3.3 aus Abschnitt 3.3 verwendet. Der Entwurf liefert neben der Reglermatrix \mathbf{K}_2 auch die Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ und das durch den Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ beschriebene kontraktiv invariante Gebiet.

Der zu entwickelnde Führungsregler soll nun eine neue Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ stabilisieren. Außerdem soll sichergestellt sein, dass die neue Ruhelage dasselbe garantierte Einzugsgebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ besitzt wie die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, für welche der lineare Sättigungsregler entworfen wurde. Dies wird formal in der folgenden Definition ausgedrückt:

Definition 6.3. Das Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ ist Einzugsgebiet der sättigenden Führungsregelung, wenn eine Zustandsrückführung

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$$

existiert, so dass für jedes $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und jedes zulässige Referenzsignal $\mathbf{r}(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}}$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &\in \mathcal{E}(\mathbf{P}), \quad \forall t \geq 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) &= \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{r}}) \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Da $\mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$ ein zulässiges Referenzsignal darstellt, ist jedes Einzugsgebiet einer sättigenden Führungsregelung ebenfalls ein Einzugsgebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Es wird sich zeigen, dass bei Verwendung des im Folgenden beschriebenen sättigenden Führungsreglers das kontraktiv invariante Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ebenfalls kontraktiv invariant ist für einen zulässigen Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$.

Zum Erbringen dieses Nachweises wird eine neue Ljapunov-Funktion benötigt. Dazu wird zunächst jedoch nochmals auf die Ljapunov-Funktion zur Stabilisierung der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ eingegangen. Der Entwurf eines linearen Sättigungsreglers liefert die Ljapunov-Funktion

$$v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}.$$

In diesem Kapitel wird jedoch die abgewandelte Ljapunov-Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \inf \left\{ \gamma > 0 : \frac{1}{\gamma} \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \right\} \quad (6.7)$$

benötigt. Dabei gilt $\gamma^{-1} \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ sofern die Ungleichung $\gamma^{-2} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 1$ bzw.

$$\gamma^2 \geq \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

erfüllt ist. Da $V(\mathbf{x})$ in Gl. (6.7) dem kleinsten, positiven γ entspricht, gilt

$$V(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}.$$

Falls $v(\mathbf{x})$ eine Ljapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises ist, so ist $V(\mathbf{x})$ ebenfalls eine Ljapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises. Die Gradienten der Ljapunov-Funktionen $v(\mathbf{x})$ und $V(\mathbf{x})$ lauten

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{P}$$

bzw.

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}} \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{P}.$$

Die Richtung der Gradienten ist jeweils durch den Vektor $\mathbf{x}^T \mathbf{P}$ festgelegt, d.h., die Gradienten von $v(\mathbf{x})$ und $V(\mathbf{x})$ sind parallel. Diese Tatsache wird beim Beweis der kontraktiven Invarianz des Gebiets $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ unter Anwendung der sättigenden Führungsregelung von Bedeutung sein.

Neben der Funktion $V(\mathbf{x})$ wird noch eine weitere Ljapunov-Funktion benötigt. Sie wird auch in [17] verwendet und lautet

$$V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \inf \left\{ \gamma > 0 : \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{\gamma}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \right\}. \quad (6.8)$$

Um deren Bedeutung genauer zu erläutern, sind in Abbildung 6.2 die Höhenlinien der Funktion $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$, ein aktueller Systemzustand \mathbf{x} und der gewünschte Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}}$ dargestellt. Zur Bestimmung der größten unteren Schranke von γ in Gl. (6.8) wird zum Vektor $\bar{\mathbf{x}}$ ein Vektor in Richtung $\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ addiert, der mit $1/\gamma$ gewichtet wird. Der Parameter γ wird nun so lange verkleinert, bis $\bar{\mathbf{x}} + \gamma^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Dieser Wert von γ entspricht dem Funktionswert $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$, da eine weitere Verkleinerung von γ offenbar zu $\bar{\mathbf{x}} + \gamma^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \notin \mathcal{E}(\mathbf{P})$ führt. Aus dieser Betrachtung wird ersichtlich, dass der Zustand

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (6.9)$$

auf dem Rand des Ellipsoids liegt, d.h., es gilt $\hat{\mathbf{x}} \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Die Funktion $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ kann als eine verformte Version der Funktion $V(\mathbf{x})$ aufgefasst werden. Außerdem weist sie für alle $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und $\mathbf{x} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$ die folgenden nützlichen Eigenschaften auf:

$$\begin{aligned} V_\star(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) &= 0, \\ V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &< 1, \quad \text{falls } \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}), \\ V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= 1, \quad \text{falls } \mathbf{x} \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

Demnach liegt ihr Minimum im gewünschten Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}}$. Ferner ist ihr Funktionswert für alle \mathbf{x} auf dem Rand $\partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ eins. Abbildung 6.3 zeigt die Funktion $V(\mathbf{x})$ und die verformte Version $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$. Dabei fällt auf, dass die durch $\{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = 1\}$ und $\{\mathbf{x} : V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = 1\}$ beschriebenen Höhenlinien identisch sind.

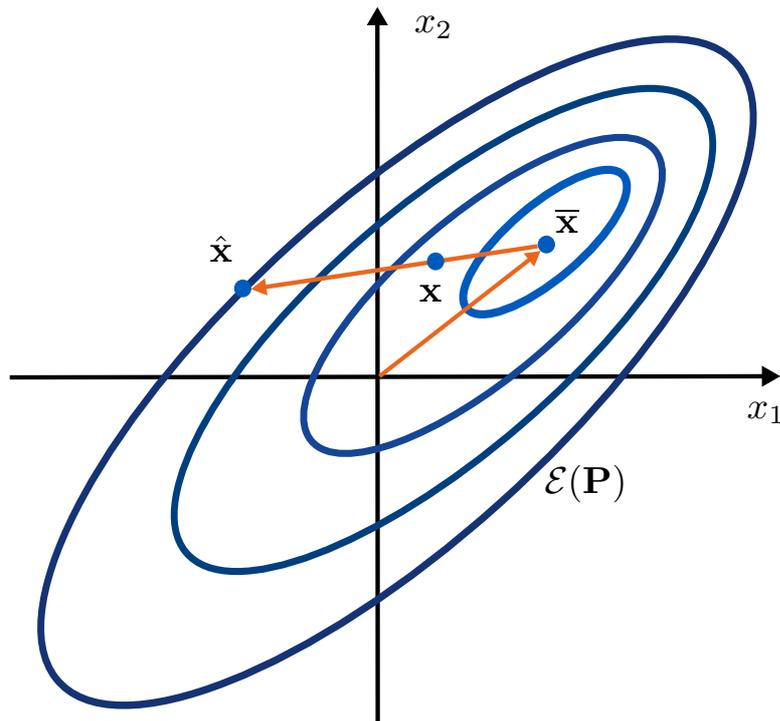


Abbildung 6.2: Verschiedene Höhenlinien der Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$. Die Höhenlinie $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = 1$ ist identisch mit $\partial\mathcal{E}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) = 1\} = \{\mathbf{x} : V(\mathbf{x}) = 1\}$.

6.4.1 Regelgesetz des sättigenden Führungsreglers

In diesem Abschnitt wird auf das Regelgesetz $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ der sättigenden Führungsregelung eingegangen. Dieses kann auch im sättigenden Fall und bei zusätzlichen Stellratenbegrenzungen analog zu [17] gewählt werden. Da hier aber nicht vorausgesetzt wird, dass der die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ stabilisierende Regler die Stellbegrenzungen einhält, ergeben sich grundlegende Änderungen im Stabilitätsnachweis, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

Zuvor wird aber das Regelgesetz selbst genauer erläutert. Dieses soll so beschaffen sein, dass sich im Fall der Zielruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ wieder das Regelgesetz des linearen Sättigungsreglers aus Abschnitt 3.3 ergibt, d.h., es soll

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}) = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}$$

gelten. Vor diesem Hintergrund erscheint es sinnvoll, die Zustandsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}$ um ein zustandsabhängiges Vorfilter zu ergänzen. Dieses sollte so beschaffen sein, dass es bei der Aufgabe, das

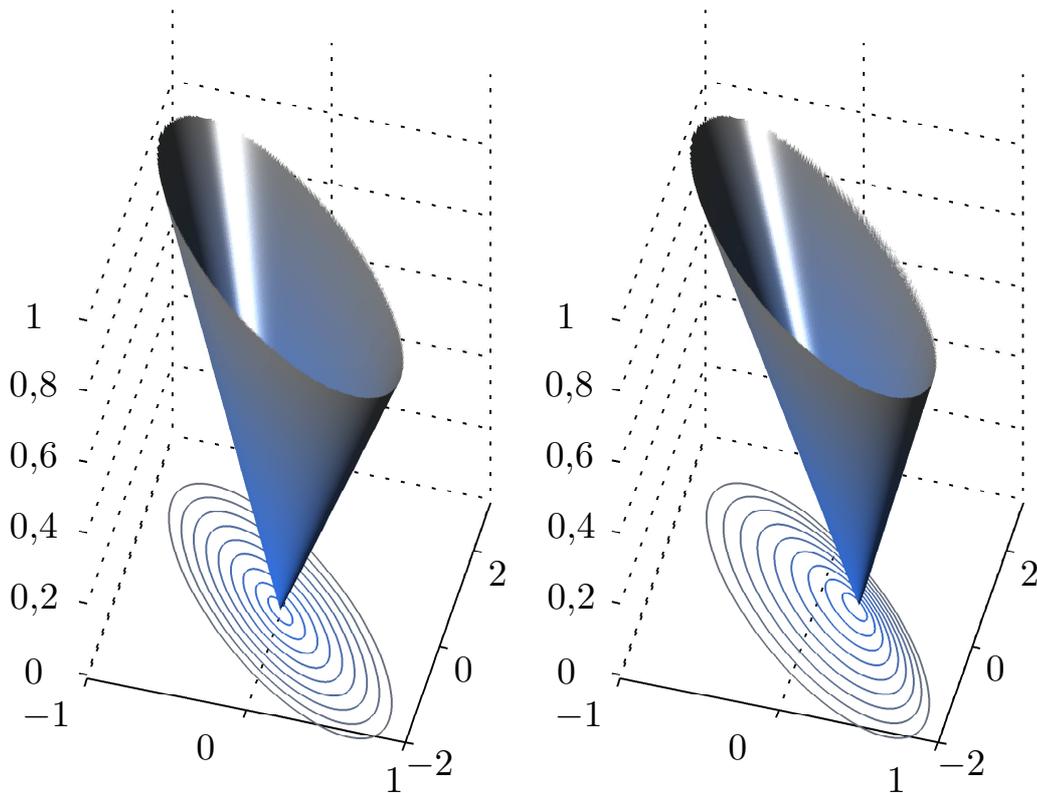


Abbildung 6.3: Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x})$ der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ (links) und verformte Ljapunov-Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ einer von null verschiedenen Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ (rechts).

System in eine Zielruhelage $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ zu überführen, die stationär die Stellgröße $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_a$ liefert. Da stationär $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ und $V_*(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = 0$ gilt, erscheint hier das Regelgesetz

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_2 \mathbf{x} + (1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_2 \bar{\mathbf{x}}) \quad (6.13)$$

sinnvoll. Mit Hilfe des sich aus Gl. (6.9) ergebenden Zusammenhangs

$$\mathbf{x} = (1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{x}} + V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}}$$

kann das Regelgesetz auch in der, für den Stabilitätsnachweis günstigen, Darstellung

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_2 \hat{\mathbf{x}} V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + (1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{u}} \quad (6.14)$$

angegeben werden. Der Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ liegt dabei, wie bereits zuvor erwähnt, auf dem Rand von $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. Bei Verwendung von Ellipsoiden $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ lässt sich

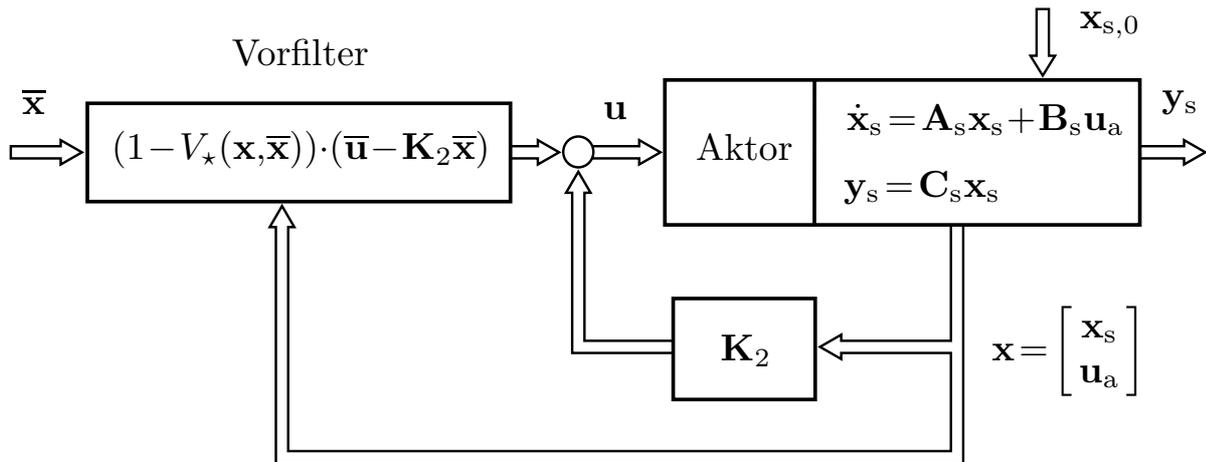


Abbildung 6.4: Struktur der sättigenden Führungsregelung mit Zustandsrückführung \mathbf{K}_2 und zustandsabhängigem Vorfilter.

$V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ auch unmittelbar als Funktion von \mathbf{x} und $\bar{\mathbf{x}}$ schreiben. Dazu wird erneut Gl. (6.8) betrachtet: Der Funktionswert $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ entspricht demnach dem kleinsten positiven γ , für das $\bar{\mathbf{x}} + \gamma^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Anhand von Abbildung 6.2 wird deutlich, dass der Wert γ minimal ist, falls $\bar{\mathbf{x}} + \gamma^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in \partial\mathcal{E}(\mathbf{P})$, d.h.,

$$\left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{\gamma}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right)^T \mathbf{P} \left(\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{\gamma}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right) = 1$$

gilt. Mit $\mathbf{e}_x = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ folgt

$$\gamma = \frac{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_x \pm \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_x)^2 + \mathbf{e}_x^T \mathbf{P} \mathbf{e}_x (1 - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}})}}{1 - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}}$$

und mit der Forderung $\gamma > 0$ schließlich

$$V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_x + \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_x)^2 + \mathbf{e}_x^T \mathbf{P} \mathbf{e}_x (1 - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}})}}{1 - \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}}. \quad (6.15)$$

Das Regelgesetz (6.13) kann als Kombination eines Zustandsreglers $\mathbf{K}_2 \mathbf{x}$ mit einem zustandsabhängigen Vorfilter angesehen werden. Ein Strukturbild der Regelung zeigt Abbildung 6.4.

6.4.2 Stabilität des sättigenden Führungsreglers

Nachdem nun im vorigen Abschnitt das Regelgesetz der sättigenden Führungsregelung erläutert wurde, wird in diesem Abschnitt der Stabilitätsnachweis geführt. Es wurde bereits erwähnt, dass sich die Reglermatrix \mathbf{K}_2 und die Matrix \mathbf{P} in Gl. (6.13) bzw. Gl. (6.15) aus dem Entwurf eines linearen Sättigungsreglers gemäß Abschnitt 3.3 ergeben. Der folgende Satz stellt die kontraktive Invarianz des Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ unter Verwendung des Führungsreglers (6.13) sicher. Des Weiteren ist garantiert, dass jede Trajektorie, die im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ startet, für $t \rightarrow \infty$ in die gewünschte Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}$ einläuft.

Satz 6.1. *Gegeben sei das kontraktiv invariante Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ für das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

mit dem Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$. Wenn die Bedingungen aus Satz 3.3 erfüllt sind, d.h., $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2)$ und

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2)) \\ & + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2))^T \mathbf{P} \prec 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gilt, dann gilt für jeden zulässigen Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{E}(\mathbf{P})$ unter Verwendung des Regelgesetzes

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_2\mathbf{x} + (1 - V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_2\bar{\mathbf{x}})$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ für alle $t \geq 0$ und $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$, sowie $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ für alle $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$.

Beweis. Zum Beweis von Satz 6.1 ist zu zeigen, dass für jeden Zustand $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ und jeden gewünschten stationären Zustand $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{E}(\mathbf{P})$

$$\dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} < 0$$

gilt. Es muss also die Ungleichung

$$\begin{aligned} \dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}\mathbf{x} \\ &+ \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}))) < 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ und alle $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$ erfüllt sein. Um zu zeigen, dass diese Ungleichung unter den in Satz 6.1 angegebenen Bedingungen tatsächlich erfüllt ist, wird eine obere Grenze für $\dot{V}_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ hergeleitet. Dies erfolgt zunächst in ähnlicher Weise wie beim Beweis von Satz 3.4 in Abschnitt 3.4. Unter Verwendung der nichtsättigenden Hilfsregler $\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ und $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ gilt

$$\dot{V}_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^m \max \left\{ \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i h_{1,i}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \right. \\ \left. \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i (\mathbf{k}_{1,i}^T \mathbf{x} + \tau_i h_{2,i}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})), \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}_i (k_{1,i}^T \mathbf{x} + \tau_i \mathbf{k}_i(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \right\}.$$

Entsprechend ist $\dot{V}_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < 0$, falls die Bedingungen $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}))$ und

$$\frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{A} \mathbf{x} + \\ \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) < 0$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ erfüllt sind. Nun wird das Regelgesetz in der Darstellung aus Gl. (6.14) eingesetzt. Außerdem ist zur Fortführung des Beweises eine geschickte Wahl der nichtsättigenden Hilfsregler erforderlich. Als besonders nützlich stellen sich hierbei die virtuellen Hilfsregler

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{x}} V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$$

und

$$\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{x}} V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + (1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{u}}$$

heraus. Aufgrund der Definition von $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ gilt $0 \leq V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq 1$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$, $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Des Weiteren werden nur solche Ruhelagen $\bar{\mathbf{x}}$ zugelassen, für die $|\bar{u}_i| < u_{\max,i}$ gilt. Ferner gilt $|\mathbf{h}_{1,i}^T \mathbf{x}| \leq v_{\max,i}$ und $|\mathbf{h}_{2,i}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max,i}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Daher erfüllen auch die virtuellen Regler die Forderung $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}))$ ¹. Unter Verwendung der Hilfsregler und der Substitution $\mathbf{x} = V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + (1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{x}}$ ergibt sich aus obiger Ungleichung für $\dot{V}_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < 0$ die hinreichende Be-

¹Dies ist offensichtlich, da es sich bei $\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ um eine konvexe Kombination aus $\mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{x}}$ und $\bar{\mathbf{u}}$ handelt.

dingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta (\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \\ + (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}})(1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\ + (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}})(1 - V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}))) < 0. \end{aligned}$$

Im neuen stationären Zustand gilt $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s\bar{\mathbf{x}}_s + \mathbf{B}_s\bar{\mathbf{u}}_a = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{u}}$ und somit auch $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a = \mathbf{B}\mathbf{K}_1\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}}_a + \mathbf{T}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Deshalb vereinfacht sich die oben stehende Bedingung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \leq \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta (\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) < 0, \end{aligned}$$

wobei $\hat{\mathbf{x}} \in \partial\mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Auf dem Rand $\partial\mathcal{E}(\mathbf{P})$ sind die Gradienten von $V(\mathbf{x})$ und $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ parallel. Da die Gradienten von $v(\mathbf{x})$ und $V(\mathbf{x})$ ebenfalls parallel sind, gilt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \leq \zeta \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta (\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}})V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) < 0 \end{aligned}$$

mit $\zeta > 0$. Sind nun die Bedingungen $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2)$ sowie die Matrixungleichungen (6.16) erfüllt, so ist mit $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ auch die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta (\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}}), (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}}), \\ (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}})) < 0 \end{aligned}$$

sichergestellt. Demnach ist die Bedingung $\dot{V}_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ erfüllt. Aus diesem Grunde gilt $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und außerdem ist $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ für $t \rightarrow \infty$. \square

6.4.3 Entwurf des sättigenden Führungsreglers

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, erfordert die Parametrierung des sättigenden Führungsreglers lediglich den Entwurf eines die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ stabilisierenden linearen Sättigungsreglers. Dazu kann Optimierungsproblem (3.22) zur Maximierung der Konvergenzrate verwendet werden. Es zeigt sich jedoch, dass die auf diese Weise entworfenen Führungsregler zwar einen sehr schnellen Ausregelvorgang, aber auch ein deutliches Überschwingen aufweisen. Um diesem Effekt entgegen zu wirken, kann, wie bereits im Falle des Entwurfs der Ausgangsrückführung, die Eigenwertlage des virtuellen geschlossenen Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 + \mathbf{BTK}_2)\mathbf{x} \quad (6.17)$$

auf das Gebiet $\mathcal{R} = \{|s| \leq \theta\}$ begrenzt werden. Aus der Matrixungleichung (5.23) folgt dann unmittelbar die zusätzliche LMI

$$\begin{bmatrix} -\theta\mathbf{Q} & \mathbf{AQ} + \mathbf{BK}_1\mathbf{Q} + \mathbf{BY}_k \\ \mathbf{QA}^T + \mathbf{QK}_1^T\mathbf{B}^T + \mathbf{Y}_k^T\mathbf{B}^T & -\theta\mathbf{Q} \end{bmatrix} \prec 0,$$

welche dem Optimierungsproblem hinzugefügt wird.

Konvergenzgeschwindigkeit des sättigenden Führungsreglers

Gemäß Satz 6.1 ist die Stabilität des sättigenden Führungsreglers gesichert, sofern die Bedingungen aus Satz 3.3 erfüllt sind. Es werden aber keine Aussagen betreffend der Konvergenzgeschwindigkeit des sättigenden Führungsreglers getroffen. Eine solche Aussage erlaubt das in diesem Abschnitt angegebene Lemma.

Durch die zuvor beschriebene Vorgehensweise, mit Hilfe von Optimierungsproblem (3.22) die Konvergenzrate des virtuellen Regelkreises (6.17) zu maximieren, wird zunächst lediglich der stabilisierende Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$ optimiert. Wie beim Entwurf des linearen Sättigungsreglers in Abschnitt 3.3 erläutert, wird die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ mit der Konvergenzrate

$$\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x}) \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$$

stabilisiert. Das folgende Lemma zeigt, dass durch Lösen des Optimierungsproblems (3.22) auch die Konvergenzrate zur Stabilisierung der neuen Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ unter Verwendung des sättigenden Führungsreglers positiv beeinflusst wird.

Lemma 6.1. *Gegeben sei das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

und das Regelgesetz des sättigenden Führungsreglers

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_2\mathbf{x} + (1 - V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_2\bar{\mathbf{x}})$$

mit $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Sind die Bedingungen aus Satz (6.1) erfüllt, so wird die neue Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{E}(\mathbf{P})$ mit der Konvergenzrate

$$\alpha_{\operatorname{sat}, \operatorname{Tr}}(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{2} \alpha_{\min}$$

stabilisiert.

Beweis. Zum Beweis von Lemma 6.1 werden die in Abschnitt A.7 diskutierten Eigenschaften der Funktion $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ benötigt. Es ist zu zeigen, dass

$$\dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = -\alpha_{\operatorname{sat}, \operatorname{Tr}}(\mathbf{x}) V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq -\frac{1}{2} \alpha_{\min} V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$$

gilt. Aus der im Beweis zu Satz (6.1) hergeleiteten Bedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} &\leq \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \left(\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}}) V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}}) V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}), \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}}) V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right) < 0 \end{aligned}$$

folgt aufgrund der Tatsache, dass die Gradienten der Funktionen $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ und $V(\mathbf{x})$ auf dem Rand $\partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ parallel sind, d.h., dass

$$\frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = \zeta \cdot \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

für alle $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ mit $\zeta > 0$ gilt, die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} &\leq \zeta \cdot \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \left(\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}}), (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}}), \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}}) \cdot V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \right) < 0. \end{aligned}$$

Aus den Ausführungen in Abschnitt A.3 folgt außerdem

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta(\mathbf{v}, (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{H}_1\hat{\mathbf{x}}), (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{H}_2\hat{\mathbf{x}}), (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2\hat{\mathbf{x}})) \in [-\alpha_{\min}V(\hat{\mathbf{x}}), -\alpha_{\max}V(\hat{\mathbf{x}})].$$

Mit Hilfe von Lemma A.3 und dem Zusammenhang

$$V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x},$$

welcher leicht durch Einsetzen von $V(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}$ überprüft werden kann, ergibt sich für $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = 1\}$ und $\bar{\mathbf{x}} \in (1 - \epsilon)\mathcal{E}(\mathbf{P})$ mit $\epsilon > 0$ die Gleichung

$$V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \zeta \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = \zeta \left(1 - \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} \right) = 1.$$

Aufgrund der Nullpunkt-Symmetrie von $V(\mathbf{x})$ gilt $V(\mathbf{x}) = V(-\mathbf{x}) \leq 1 - \epsilon$, woraus sich die Ungleichung

$$\zeta \geq \frac{1}{2 - \epsilon} \geq \frac{1}{2}$$

ergibt. Schließlich führen diese Überlegungen zu der Ungleichung

$$\dot{V}_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \leq -\frac{1}{2} \alpha_{\min} \cdot V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}),$$

womit Lemma 6.1 bewiesen ist. \square

Wie in Abschnitt A.3 erläutert, wird durch Maximieren der Konvergenzrate des virtuellen Systems (6.17) auch die Grenze α_{\min} in Richtung von α_{\max} verschoben, wodurch nach Lemma 6.1 auch eine Verbesserung der Konvergenzrate der Führungsregelung erzielt wird.

6.4.4 Entwurf des nichtsättigenden Führungsreglers

Für die folgenden Beispiele wird ein nichtsättigender Führungsregler als Vergleichsregler entworfen. Dieser stellt die unmittelbare Erweiterung des nichtsättigenden Führungsreglers für Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen aus [17] auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen dar. Die Parametrierung dieses Reglers erfolgt, wie auch beim sättigenden Führungsregler, auf Basis des Entwurfs eines die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ stabilisierenden Zustandsreglers. Dieser sättigt jedoch weder hinsichtlich der Stellgröße noch hinsichtlich der Stellrate. Zum Entwurf bietet sich die in Abschnitt 3.2 beschriebene Vorgehensweise an. Es gilt

Lemma 6.2. *Gegeben sei das kontraktiv invariante Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ für das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u}))$$

mit dem linearen Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{x}$. Wenn die Bedingungen aus Satz 3.2 erfüllt sind, d.h., die Matrixungleichungen

$$\begin{bmatrix} u_{\max,i}^2 & \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^{\text{T}} \\ \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.18)$$

$$\begin{bmatrix} v_{\max,i}^2 & \mathbf{k}_{1,i}^{\text{T}} + \tau_i \mathbf{k}_{2,\text{lin},i}^{\text{T}} \\ \mathbf{k}_{1,i} + \tau_i \mathbf{k}_{2,\text{lin},i} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_{2,\text{lin}})^{\text{T}}\mathbf{B}^{\text{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_{2,\text{lin}}) \prec 0, \quad (6.20)$$

gelten, dann gilt für jeden zulässigen Referenzzustand $\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} \mathcal{E}(\mathbf{P})$ unter Verwendung des Regelgesetzes

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\mathbf{x} + (1 - V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_{2,\text{lin}}\bar{\mathbf{x}})$$

$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ für alle $t \geq 0$ und $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$.

Beweis. Der Beweis findet sich in Anhang A.8. □

Zum Entwurf des nichtsättigenden Führungsreglers kann demnach das Optimierungsproblem (3.15) verwendet werden.

6.5 Beispiel: Tailless Fighter Aircraft

Als erstes Beispielsystem wird das Flugzeugmodell aus Abschnitt 6.1 betrachtet. Es wird durch Gl. (6.1) beschrieben und ist den Stellbegrenzungen

$$|u_a| \leq 20\pi/180 \text{ rad}, \quad |\dot{u}_a| \leq 40\pi/180 \text{ rad/s}$$

unterworfen. Des Weiteren werden $\tau = 10$ und $\beta = 5$ gewählt und ein stabilisierender Regler für das Anfangsgebiet

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : |x_{s,1}| \leq \frac{20}{180}\pi \text{ rad}, |x_{s,2}| \leq \frac{25}{180}\pi \text{ rad/s} \right\} \quad (6.21)$$

entworfen. Ferner wird davon ausgegangen, dass der Aktor initial nicht ausgelenkt ist, d.h., es gilt $u_a(0) = 0$. Im Folgenden soll die Pitchrate $y_s = x_{s,2}$ geregelt werden. Abbildung 6.5 zeigt den Verlauf der Pitchrate für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_{s,0} = \mathbf{0}$. Bei $t = 1$ s wird ein Referenzsignal $r = 20/180\pi \text{ rad/s}$ aufgeschaltet. Abbildung 6.6 zeigt die zugehörigen Verläufe der kommandierten und tatsächlichen Stellgrößen, sowie der Stellrate.

Der in diesem Kapitel vorgestellte sättigende Führungsregler erzielt verglichen mit dem nichtsättigenden Führungsregler nach Abschnitt 6.4.4 ein deutlich schnelleres Ausregelverhalten. Die Ursache für diesen deutlichen Performance-Gewinn zeigt Abbildung 6.6. Offenbar wird sowohl die Stellgröße als auch die Stellrate deutlich besser ausgenutzt. Dabei sättigen die kommandierte Stellgröße und die Stellrate.

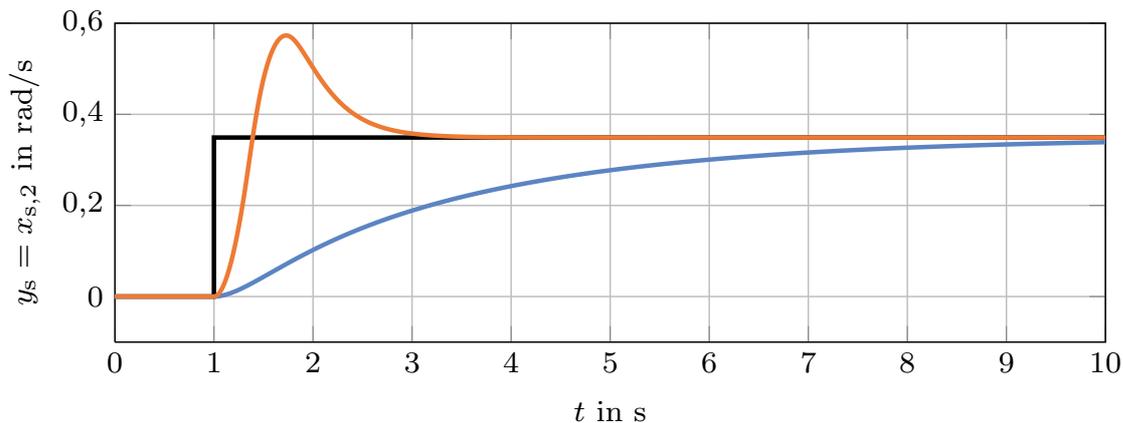


Abbildung 6.5: Verlauf der Pitchrate $y_s = x_{s,2}$ für einen nichtsättigenden Führungsregler — und den vorgestellten sättigenden Führungsregler —. Bei $t = 1$ s wird ein Referenzwert von $r = 20\pi/180 \text{ rad/s}$ — für die Pitchrate aufgeschaltet.

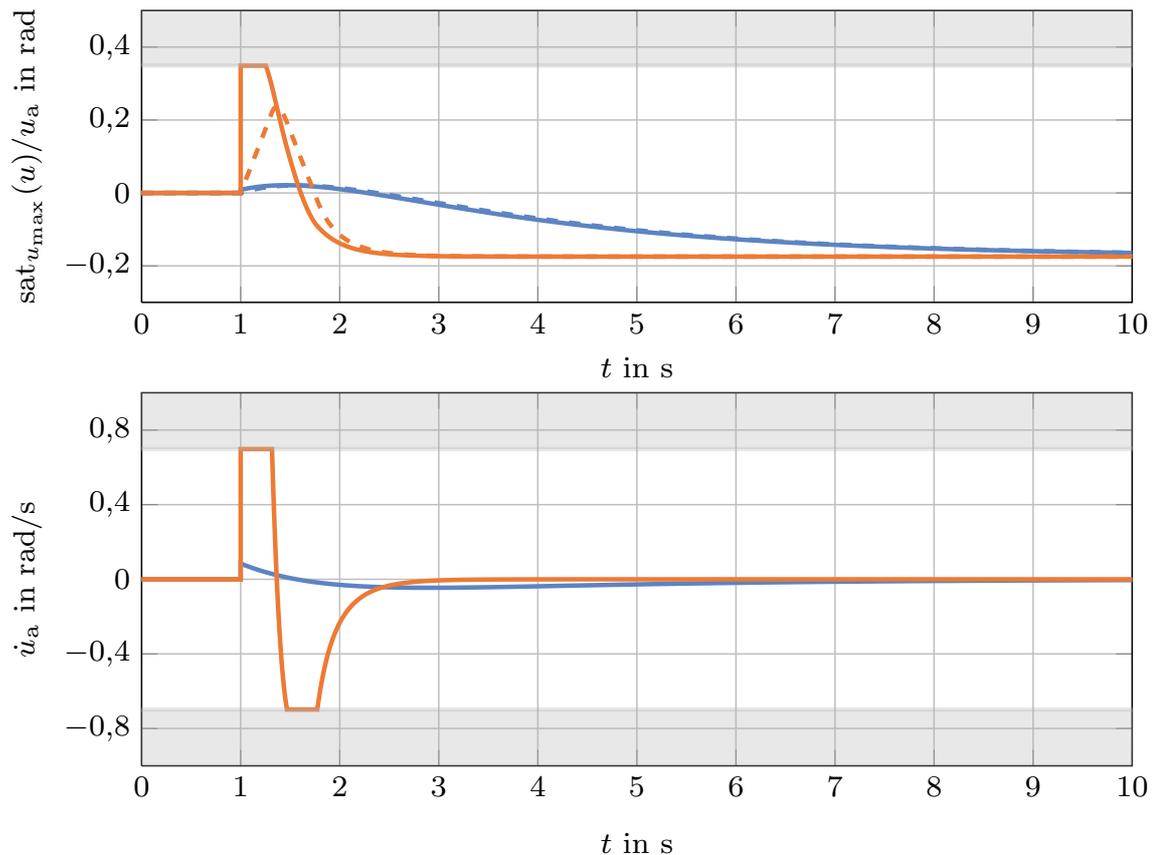


Abbildung 6.6: Verlauf der kommandierten und der wirksamen Stellgröße u bzw. u_a (gestrichelter Verlauf) sowie der Stellrate \dot{u}_a für einen nichtsättigenden Führungsregler — (blau) und den vorgestellten sättigenden Führungsregler — (orange). Bei $t = 1$ s wird ein Referenzwert von $r = 20\pi/180$ rad/s für die Pitchrate aufgeschaltet.

6.6 Beispiel: Space-Shuttle

Um zu demonstrieren, dass der sättigende Führungsregler auch für MIMO-Systeme geeignet ist, wird an dieser Stelle das Modell des Space-Shuttles aus Abschnitt 4.7 erneut herangezogen. Die Führungsregelung soll dazu dienen, die Ausgangsgrößen $y_{s,1} = x_{s,3}$ und $y_{s,2} = x_{s,4}$, d.h. Gierrate und Rollwinkel, zu beeinflussen. Das Gebiet möglicher Anfangszustände wird dabei wieder als Polyeder angesetzt und lautet

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : \left| x_{s,1} \right| \leq \frac{10\pi}{180} \text{ rad}, \left| x_{s,2} \right| \leq \frac{15\pi}{180} \text{ rad/s}, \right. \\ \left. \left| x_{s,3} \right| \leq \frac{15\pi}{180} \text{ rad/s}, \left| x_{s,4} \right| \leq \frac{70\pi}{180} \text{ rad} \right\}.$$

Es ist zu beachten, dass der Aktorzustand \mathbf{u}_a Teil des erweiterten Zustandsvektors ist. Somit wird die wirksame Stellgröße auch durch die Ellipse $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ begrenzt, was aufgrund der Forderung $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{\mathbf{x}}_s^T \bar{\mathbf{u}}_a^T]^T \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ die Menge der zulässigen Ruhelagen und somit auch die Menge zulässiger Referenzsignale \mathbf{r} begrenzt. Um sicherzustellen, dass diese Begrenzung nicht zu restriktiv ausfällt, wird in diesem Beispiel gefordert, dass der Anfangszustand $\mathbf{u}_{a,0} = \mathbf{u}_a(0) = [0,75u_{\max,1}, 0,75u_{\max,2}]^T$ ebenfalls im Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ liegt. Des Weiteren wird $\tau_1 = \tau_2 = 6$ gewählt.

Abbildung 6.7 zeigt den Verlauf der Ausgangsgrößen für eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Bei $t = 1$ s wird das Referenzsignal $\mathbf{r} = [2,5\pi/180 \text{ rad/s}, 55\pi/180 \text{ rad}]^T$ eingestellt. Die sättigende Führungsregelung erzielt dabei im Vergleich zur nichtsättigenden Regelung ein deutlich schnelleres und besser gedämpftes Ausregelverhalten. Die Ursache hierfür liegt in einer besseren Ausnutzung des Stellbereiches, was in Abbildung 6.8 gezeigt ist. Darin sind neben den kommandierten und wirksamen Stellgrößen auch die Stellraten dargestellt.

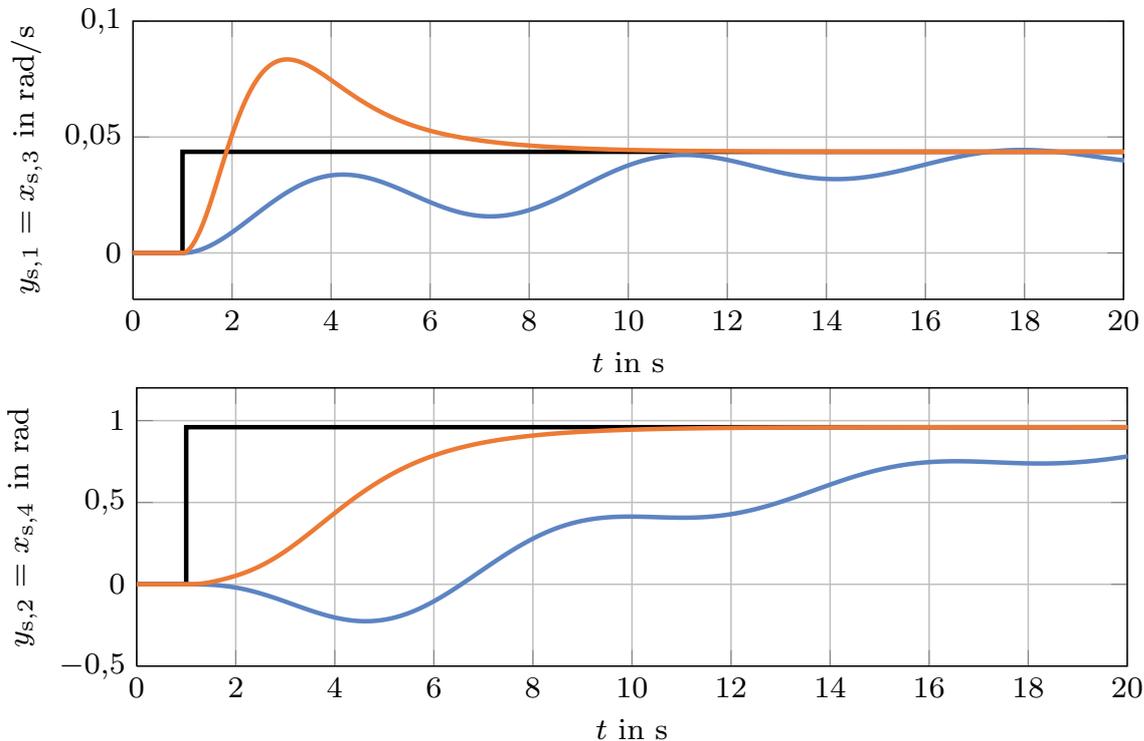


Abbildung 6.7: Verläufe der Gierrate $y_{s,1} = x_{s,3}$ und des Rollwinkels $y_{s,2} = x_{s,4}$ für einen nichtsättigenden Führungsregler — und den vorgestellten sättigenden Führungsregler —. Bei $t = 1$ s wird ein Referenzwert von $\mathbf{r} = [2,5\pi/180 \text{ rad/s}, 55\pi/180 \text{ rad}]^T$ — aufgeschaltet.

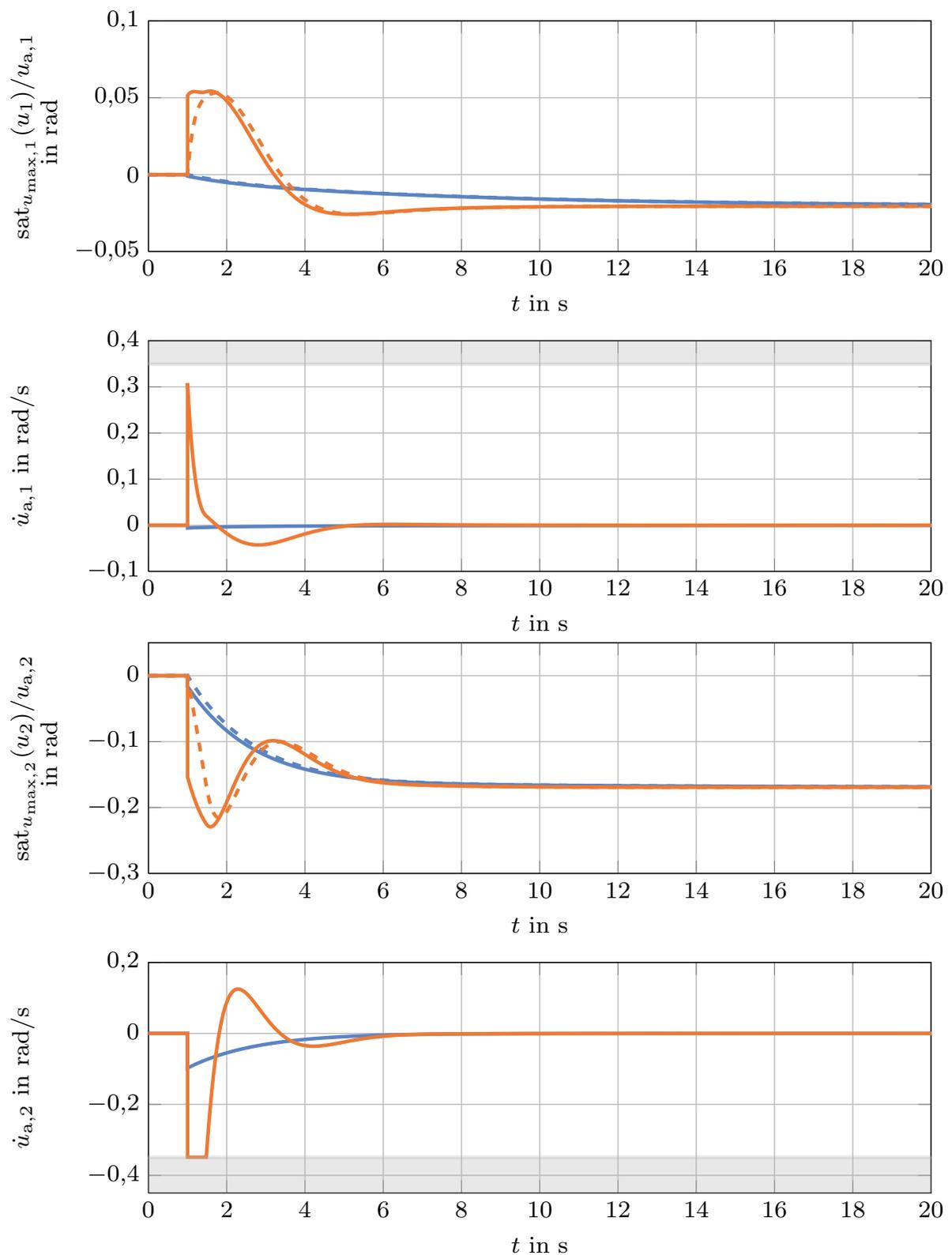


Abbildung 6.8: Verlauf der kommandierten und der tatsächlich wirksamen Stellgrößen u_1 , u_2 bzw. $u_{a,1}$, $u_{a,2}$ (gestrichelter Verlauf) sowie der Stellraten $\dot{u}_{a,1}$, $\dot{u}_{a,2}$ für einen nichtsättigenden Führungsregler — und den vorgestellten sättigenden Führungsregler —. Bei $t = 1$ s wird ein Referenzwert von $\mathbf{r} = [2,5\pi/180 \text{ rad/s}, 55\pi/180 \text{ rad}]^T$ aufgeschaltet.

6.7 Erweiterung auf eine Klasse nichtlinearer Systeme

Der im vorigen Abschnitt vorgestellte sättigende Führungsregler für lineare Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen kann auf eine spezielle Klasse nichtlinearer Systeme erweitert werden. Dazu werden nichtlineare SISO-Systeme der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{a}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_s)u_s, \\ y_s &= c_s(\mathbf{x}_s)\end{aligned}\tag{6.22}$$

mit $c_s(\mathbf{0}) = 0$, $\mathbf{a}_s(\mathbf{x}_s), \mathbf{b}_s(\mathbf{x}_s) \in \mathbb{R}^{n_s}$, relativem Grad $\delta = n_s$ und einer Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ für $\bar{u}_s = 0$ betrachtet. Der Systemeingang u_s ist dabei einer Stellgrößenbegrenzung $u_{\min} \leq u_s \leq u_{\max}$ sowie einer Stellratenbegrenzung $v_{\min} \leq \dot{u}_s \leq v_{\max}$ mit $u_{\min} < 0 < u_{\max}$, $v_{\min} < 0 < v_{\max}$ unterworfen.

Die zugrunde liegende Idee beim Entwurf einer sättigenden Festwert-Führungsregelung für das System (6.22) ist, das System zunächst mit Hilfe der exakten Linearisierung (siehe beispielsweise [3], [64], [125]) in eine äquivalente lineare Systemdarstellung zu überführen. Dazu muss vorausgesetzt werden, dass der verfügbare Stellbereich ausreichend und das System (6.22) exakt linearisierbar ist.

Für Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen wurden Ansätze zur Regelung nichtlinearer Systeme unter Verwendung der exakten Linearisierung mittels Anti-Windup-Verfahren [36], [56] und modellprädiktiver Regelung [99] beschrieben. In [50], [51], [68] wurde ebenfalls eine solche Herangehensweise gewählt, um die Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ nichtlinearer Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbeschränkung zu stabilisieren. Die Aufgabe eines Arbeitspunktwechsels sowie zusätzliche Stellratenbegrenzungen wurden darin jedoch nicht betrachtet. Die im Folgenden vorgestellte Methode erweitert die Ansätze aus [50], [51], [68] auf diese Fälle.

6.7.1 Exakte Linearisierung

Grundidee der exakten Linearisierung ist es, einen nichtlinearen Regler so zu entwerfen, dass die Nichtlinearität der Strecke durch das Regelgesetz vollständig kompensiert wird. Bei Abwesenheit von Stellbegrenzungen entsteht auf diese Weise ein äquivalenter linearer geschlossener Regelkreis. Dazu werden n_s Ableitungen der Ausgangsgröße y_s berechnet. Falls der

relative Grad $\delta = n_s$ ist, gilt unter Verwendung von Lie-Derivierten (siehe Anhang A.9)

$$\begin{aligned} y_s &= c_s(\mathbf{x}_s), \\ \dot{y}_s &= L_{\mathbf{a}_s} c_s(\mathbf{x}_s), \\ &\vdots \\ y_s^{(n_s-1)} &= L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s), \\ y_s^{(n_s)} &= L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) u_s. \end{aligned}$$

In den neuen Zustandskoordinaten

$$\mathbf{z}_1 = \Phi(\mathbf{x}_s) = \left[c_s(\mathbf{x}_s) \quad L_{\mathbf{a}_s} c_s(\mathbf{x}_s) \quad \dots \quad L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) \right]^T \quad (6.23)$$

ergibt sich so die sogenannte Byrnes-Isidori Normalform

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2}, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{1,n_s-1} &= z_{1,n_s}, \\ \dot{z}_{1,n_s} &= L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) u_s. \end{aligned}$$

Offenbar taucht der Eingang u_s lediglich in der n_s -ten Ableitung auf. Angenommen, das System (6.22) sei für alle \mathbf{x}_s innerhalb des Gebietes $\mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ exakt linearisierbar, d.h., es gilt² $L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) > 0$ für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$. Wird nun das Regelgesetz

$$u_s = \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \quad (6.24)$$

verwendet, ergibt sich mit dem neuen Zustandsvektor $\mathbf{z}_1 = [y_s \ \dot{y}_s \ \dots \ y_s^{(n_s-1)}]^T$ das lineare System

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 u_a$$

²Auch der Fall $L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) < 0$ für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ ist eingeschlossen, da bei Verwendung von $\tilde{y}_s = -y_s = \tilde{c}_s(\mathbf{x}_s)$ die Bedingung $L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} \tilde{c}_s(\mathbf{x}_s) > 0$ erfüllt ist.

mit

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und dem künstlichen Eingang u_a . Dieser neue Eingang u_a soll im Folgenden dazu verwendet werden, das System mit Hilfe des sättigenden Führungsreglers in einen neuen Arbeitspunkt $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ zu überführen. Im Unterschied zur Regelung von Systemen mit linearer Dynamik steht für u_a jedoch nicht mehr der gesamte Stellbereich zur Verfügung. Die Ursache hierfür ist, dass ein gewisser Anteil der verfügbaren Stellgröße und Stellrate zur Durchführung der exakten Linearisierung benötigt wird. Aus den Begrenzungen $u_{\min} \leq u_s \leq u_{\max}$ und $v_{\min} \leq \dot{u}_s \leq v_{\max}$ folgt also

$$u_{\min} \leq \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \leq u_{\max} \quad (6.25)$$

und

$$v_{\min} \leq \frac{d}{dt} \left(\frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) \leq v_{\max}. \quad (6.26)$$

Aus Gl. (6.25) lässt sich die Stellgrößenbegrenzung für u_a ermitteln. Die Begrenzung wird dabei zustandsabhängig und lautet $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}_1) \leq u_a \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}_1)$ mit

$$\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}_1) = [u_{\min} L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) + L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s)] |_{\mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)}, \quad (6.27)$$

$$\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}_1) = [u_{\max} L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) + L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s)] |_{\mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)}. \quad (6.28)$$

Die zustandsabhängige Stellratenbegrenzung ergibt sich aus Gl. (6.26). Dazu wird zunächst die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) &= \left[-\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} \left(\frac{L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s)}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} \left(\frac{1}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) u_a \right] \dot{\mathbf{x}}_s + \frac{1}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \dot{u}_a \end{aligned}$$

berechnet. Aus der Verwendung des Diffeomorphismus (6.23) ergibt sich $\mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)$ und

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \frac{\partial \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)}{\partial \mathbf{z}_1} \dot{\mathbf{z}}_1 = \frac{\partial \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)}{\partial \mathbf{z}_1} (\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 u_a).$$

Schließlich ergeben sich die Begrenzungen hinsichtlich der Stellrate $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}_1, u_a) \leq \dot{u}_a \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}_1, u_a)$. Im Gegensatz zu der Begrenzung der Stellgröße hängt die Stellratenbegrenzung nicht nur vom Zustand \mathbf{z}_1 der Strecke, sondern auch von u_a ab. Sie lauten

$$\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}_1, u_a) = \left[L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) \cdot \left(v_{\min} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} \left(\frac{L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s)}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} \left(\frac{1}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) u_a \right] \right) \right] \bigg|_{\mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)} \frac{\partial \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)}{\partial \mathbf{z}_1} (\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 u_a)$$

und

$$\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}_1, u_a) = \left[L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) \cdot \left(v_{\max} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} \left(\frac{L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s)}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} \left(\frac{1}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right) u_a \right] \right) \right] \bigg|_{\mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)} \frac{\partial \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1)}{\partial \mathbf{z}_1} (\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 u_a). \quad (6.29)$$

Nun kann die Menge

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}_s, u_a} = \{ \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{n_s}, u_a \in \mathbb{R} : \tilde{u}_{\min}(\Phi(\mathbf{x}_s)) < 0, \tilde{u}_{\max}(\Phi(\mathbf{x}_s)) > 0, \\ \tilde{v}_{\min}([\Phi(\mathbf{x}_s)]^T u_a)^T < 0, \tilde{v}_{\max}([\Phi(\mathbf{x}_s)]^T u_a)^T > 0 \},$$

definiert werden, welche der Menge aller (\mathbf{x}_s, u_a) entspricht, für die das System (6.22) mit der gegebenen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung exakt linearisiert werden kann. Unter Verwendung der Menge $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_s, u_a}$, der Abkürzungen $\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{z}) = [\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}_1), \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}_1)]$, $\tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{z}) = [\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}_1, u_a), \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}_1, u_a)]$ und dem idealen Aktormodell $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ aus Abschnitt 2.2 wird das folgende Lemma angegeben:

Lemma 6.3. *Gegeben sei das nichtlineare System (6.22) mit dem Relativgrad $\delta = n_s$, welches für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ mit $\mathbf{0} \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ exakt linearisierbar ist. Es gelte $u_{\min} < 0 < u_{\max}$, $v_{\min} < 0 < v_{\max}$ und*

$L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) > 0, \forall \mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$. Dann sind das System (6.22) mit den Stellbegrenzungen $u_{\min} \leq u_s \leq u_{\max}, v_{\min} \leq \dot{u}_s \leq v_{\max}$ und das System

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 \sigma_{[\tilde{u}_0(\mathbf{z}_1), \tilde{v}_0(\mathbf{z}_1, u_a)]}(u), \quad (6.30)$$

mit den Stellbegrenzungen $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}_1) \leq u_a \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}_1), \tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}_1, u_a) \leq \dot{u}_a \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}_1, u_a)$, dem Diffeomorphismus $\mathbf{z}_1 = \Phi(\mathbf{x}_s)$ gemäß Gl. (6.23) und $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}_1), \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}_1), \tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}_1, u_a), \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}_1, u_a)$ entsprechend der Gleichungen (6.27) bis (6.29) äquivalent für alle $\mathbf{x}_s, u_a \in \mathcal{F}_{\mathbf{x}_s, u_a}$.

Beweis. Um Lemma 6.3 zu beweisen, wird zunächst das Regelgesetz (6.24) wie folgt umgeschrieben

$$u_s = \begin{cases} u_{\max}, & \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \geq u_{\max}, \\ \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)}, & \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \in (u_{\min}, u_{\max}), \\ u_{\min}, & \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \leq u_{\min}. \end{cases}$$

Da $L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s) > 0$ für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ gilt, gilt mit $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{x}_s)$ und $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{x}_s)$ aus Gl. (6.27) und (6.28) für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$

$$u_s = \begin{cases} u_{\max} = \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + \tilde{u}_{\max}(\mathbf{x}_s)}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)}, & u_a \geq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{x}_s), \\ \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)}, & u_a \in (\tilde{u}_{\min}(\mathbf{x}_s), \tilde{u}_{\max}(\mathbf{x}_s)), \\ u_{\min} = \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + \tilde{u}_{\min}(\mathbf{x}_s)}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)}, & u_a \leq \tilde{u}_{\min}(\mathbf{x}_s). \end{cases}$$

In analoger Weise wird die Stellrate betrachtet. Es ergibt sich

$$\dot{u}_s = \begin{cases} v_{\max}, & \dot{u}_a \geq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{x}_s, u_a), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + u_a}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)} \right), & \dot{u}_a \in (\tilde{v}_{\min}(\mathbf{x}_s, u_a), \tilde{v}_{\max}(\mathbf{x}_s, u_a)), \\ v_{\min}, & \dot{u}_a \leq \tilde{v}_{\min}(\mathbf{x}_s, u_a). \end{cases}$$

Diese Überlegungen liefern schließlich

$$u_s = \frac{-L_{\mathbf{a}_s}^{n_s} c_s(\mathbf{x}_s) + \sigma_{[\tilde{u}_0(\mathbf{z}_1), \tilde{v}_0(\mathbf{z}_1, u_a)]}(u)}{L_{\mathbf{b}_s} L_{\mathbf{a}_s}^{n_s-1} c_s(\mathbf{x}_s)}.$$

Einsetzen in Gl. (6.22) führt bei Anwendung des Diffeomorphismus (6.23) schließlich zu

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 \sigma_{[\tilde{u}_0(\mathbf{z}_1), \tilde{v}_0(\mathbf{z}_1, u_a)]}(u).$$

□

Im Folgenden werden die Mengen $\mathcal{F}_{\mathbf{x}_s, u_a}$ und $\mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ in \mathbf{z} -Koordinaten benötigt, weshalb

$$\mathcal{F}_{\mathbf{z}} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{x}_s, u_a) \in \mathcal{F}_{\mathbf{x}_s, u_a}, \mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1) \}$$

und

$$\mathcal{G}_{\mathbf{z}} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}, \mathbf{x}_s = \Phi^{-1}(\mathbf{z}_1) \}$$

mit $n = n_s + 1$ definiert werden. Zur Modellierung der Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung in Gl. (6.30) wird analog zu Gl. (2.2) das Modell

$$\mathcal{A}: \quad \dot{u}_a = \text{sat}_{\tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{z})}(-\tau u_a + \tau \text{sat}_{\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{z})}(u)), \quad (6.31)$$

des Aktors verwendet und in den Regelalgorithmus integriert. Unter Verwendung des Zustands $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \ u_a]^T$ ergibt sich das erweiterte Gesamtsystem

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{\mathbf{z}} \mathbf{z} + \mathbf{b}_{\mathbf{z}} \text{sat}_{\tilde{\mathbf{v}}_0(\mathbf{z})}(\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \text{sat}_{\tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{z})}(u)), \quad (6.32)$$

mit

$$\mathbf{A}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_1 = [\mathbf{0} \quad -\tau]^T.$$

Im Unterschied zum erweiterten System (2.7) beinhaltet das System (6.32) zustandsabhängige Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen. Diese müssen in den nun folgenden Betrachtungen Berücksichtigung finden.

Bemerkung 6.1. Um sicherzustellen, dass bei Verwendung des Aktormodells mit zustandsabhängigen Begrenzungen die Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung in jedem Fall eingehalten wird, muss der Parameter τ so gewählt werden, dass die Aktordynamik im Vergleich zur Systemdynamik des geschlossenen Regelkreises vernachlässigt werden kann.

Ziel ist es nun, einen sättigenden Führungsregler $u = k(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ für das System (6.32) zu entwickeln. Das Strukturbild des gesamten Regelkreises ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Die Parametrierung des Führungsreglers erfolgt, wie schon im Falle des Führungsreglers für lineare Systeme, auf Basis eines die Ruhelage $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ stabilisierenden Reglers.

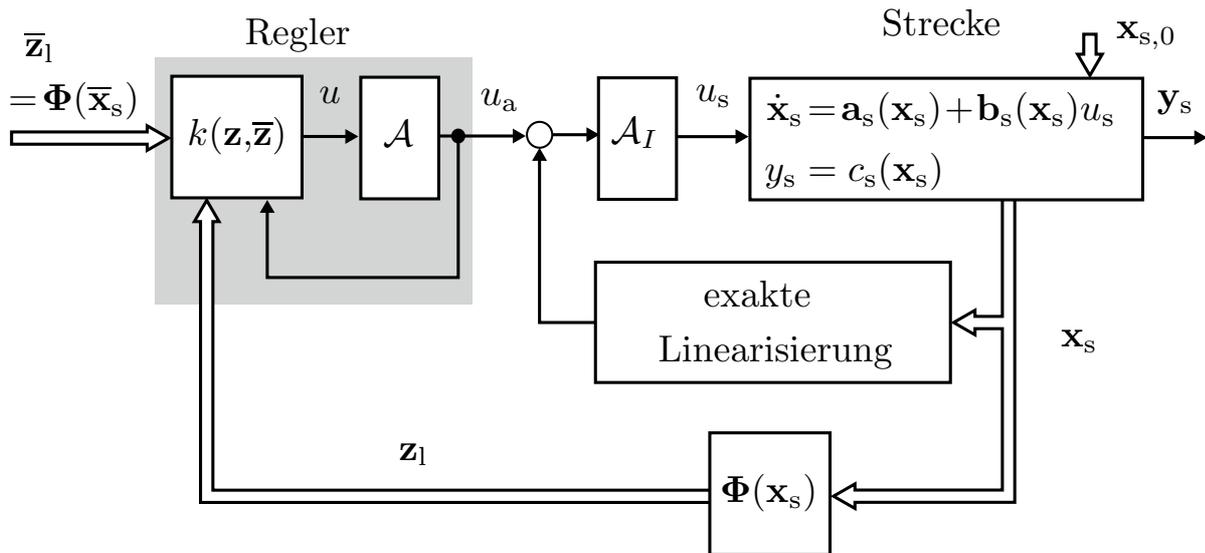


Abbildung 6.9: Struktur der sättigenden Führungsregelung unter Verwendung der exakten Linearisierung mit idealem Aktor \mathcal{A}_I , welcher durch den Operator $\sigma_{u_{\max}, v_{\max}}(u)$ beschrieben wird, und dem im Regler integrierten Aktormodell \mathcal{A} .

6.7.2 Entwurf eines stabilisierenden Reglers

Im vorigen Abschnitt wurde das nichtlineare System (6.22) in das äquivalente lineare System (6.30) mit einer zustandsabhängigen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung umgeformt. Werden diese Begrenzungen mit Hilfe des Aktormodells (6.31) modelliert und wird ein stabilisierender Regler so entworfen, dass der Ursprung $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ des mit dem Aktor erweiterten Systems (6.32) eine asymptotisch stabile Ruhelage ist, so ist auch der Ursprung $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ des Systems (6.22) eine asymptotisch stabile Ruhelage. In diesem Abschnitt soll daher ein stabilisierender Regler für das System (6.32) entworfen werden. Wie schon bei der Herleitung des sättigenden Führungsreglers für lineare Systeme werden dessen Reglerparameter zum Entwurf des Führungsreglers benötigt. Zur Abschätzung des maximalen Einzugsgebietes wird das Gebiet

$$\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P}) = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z} \leq 1 \}$$

mit $n = n_s + 1$ verwendet, welches ein Einzugsgebiet ist, falls die Bedingungen des folgenden Lemmas erfüllt sind.

Lemma 6.4. Gegeben sei das System (6.32) mit der sättigenden Zustandsrückführung $u = \mathbf{k}_2^T \mathbf{z}$, der positiv definiten Funktion $v(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{P} \mathbf{z}$ und dem Gebiet $\mathcal{E}_z(\mathbf{P}) \subset \mathcal{F}_z \cap \mathcal{G}_z$. Falls virtuelle Regler $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass die Bedingungen

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{b}_z \mathbf{h}_1^T \mathbf{z}) < 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{E}_z(\mathbf{P}) \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{b}_z (\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \mathbf{h}_2^T \mathbf{z})) < 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{E}_z(\mathbf{P}) \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (6.34)$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{b}_z (\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \mathbf{k}_2^T \mathbf{z})) < 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{E}_z(\mathbf{P}) \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad (6.35)$$

$$\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_1^T \mathbf{z} \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}), \quad (6.36)$$

$$\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_2^T \mathbf{z} \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}) \quad (6.37)$$

für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_z(\mathbf{P})$ erfüllt sind, dann ist das Gebiet $\mathcal{E}_z(\mathbf{P})$ ein Einzugsgebiet der Ruhelage $\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ des geschlossenen Regelkreises.

Beweis. Der Beweis von Lemma 6.4 kann in ähnlicher Weise erfolgen wie der Beweis zu Satz 3.4 in Abschnitt 3.4. Es ist zu zeigen, dass, falls die Bedingungen aus Lemma 6.4 erfüllt sind,

$$\dot{v}(\mathbf{z}) = \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})} (\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \text{sat}_{\tilde{u}_0(\mathbf{z})} (\mathbf{k}_2^T \mathbf{z}))) < 0$$

für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_z(\mathbf{P})$ gilt. Auch hier werden zunächst die Fälle untersucht, in denen $f(\mathbf{z}) = \mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \text{sat}_{\tilde{u}_0(\mathbf{z})} (\mathbf{k}_2^T \mathbf{z})$ sättigt, d.h., wenn $f(\mathbf{z}) \leq \tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$ bzw. $f(\mathbf{z}) \geq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ ist. Mit Hilfe des virtuellen nichtsättigenden Hilfsreglers $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_1^T \mathbf{z} \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ ergibt sich

- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \geq 0$ und $f(\mathbf{z}) \leq \tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$, dann:

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})} (f(\mathbf{z})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \mathbf{h}_1^T \mathbf{z},$$

- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \geq 0$ und $f(\mathbf{z}) \geq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$, dann:

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})} (f(\mathbf{z})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z f(\mathbf{z}),$$

- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \leq 0$ und $f(\mathbf{z}) \geq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$, dann:

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})}(f(\mathbf{z})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \mathbf{h}_1^T \mathbf{z},$$

- wenn $\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \leq 0$ und $f(\mathbf{z}) \leq \tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$, dann:

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})}(f(\mathbf{z})) \leq \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z f(\mathbf{z}).$$

Im ungesättigten Fall ist offensichtlich $\text{sat}_{\tilde{v}_0}(f(\mathbf{z})) = f(\mathbf{z})$. Die Kombination dieser Fälle liefert dann

$$\frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})}(f(\mathbf{z})) \leq \max \left\{ \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \mathbf{h}_1^T \mathbf{z}, \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z f(\mathbf{z}) \right\}.$$

Wird in gleicher Weise mit dem Term $\text{sat}_{\tilde{u}_0(\mathbf{z})}(\mathbf{k}_2^T \mathbf{z})$ in $f(\mathbf{z})$ verfahren und der Hilfsregler $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_2^T \mathbf{z} \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ verwendet, ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}_z \mathbf{z} + \mathbf{b}_z \text{sat}_{\tilde{v}_0(\mathbf{z})}(\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \text{sat}_{\tilde{u}_0(\mathbf{z})}(\mathbf{k}_2^T \mathbf{z}))) \leq \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{A}_z \mathbf{z} \\ & + \max \left\{ \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z \mathbf{h}_1^T \mathbf{z}, \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z (\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \mathbf{h}_2^T \mathbf{z}), \frac{\partial v(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_z (\mathbf{k}_1^T \mathbf{z} + \tau \mathbf{k}_2^T \mathbf{z}) \right\}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der obigen Ungleichung ist negativ, falls die Bedingungen aus Lemma 6.4 erfüllt sind. Dies ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass $\dot{v}(\mathbf{z}) < 0$ für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_z(\mathbf{P})$ gilt. \square

Entwurf mittels konvexer Optimierung

Die in Lemma 6.4 formulierten Bedingungen liegen nicht in der Form von linearen Matrixungleichungen bzw. Sum-of-squares-Bedingungen vor. Daher ist Lemma 6.4 nicht unmittelbar für einen Reglerentwurf mittels konvexer Optimierung geeignet. In diesem Abschnitt sollen die Bedingungen daher als LMIs bzw. SOS-Bedingungen formuliert werden. Dabei wird zunächst angenommen, dass die zustandsabhängigen Begrenzungen $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ polynomial in \mathbf{z} sind. Unter Verwendung der Substitutionen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{h}_1$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{h}_2$ und $\mathbf{y}_k = \mathbf{Q}\mathbf{k}_k$ kann in diesem Fall das folgende Lemma angegeben werden:

Lemma 6.5. *Gegeben sei das System (6.22) mit relativem Grad $\delta = n_s$, so dass das System exakt linearisierbar ist für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ mit $\mathbf{0} \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$. Die Stellbegrenzungen $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ seien polynomial in \mathbf{z} . Außerdem sei $\mathbf{L} \succ 0$ eine Matrix, mit deren Hilfe das Gebiet*

$$\mathcal{D}_{\mathbf{z}} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z} \leq 1\} \supset \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{z} \leq 1\}$$

definiert wird, so dass $\mathcal{D}_{\mathbf{z}} \subset \mathcal{F}_{\mathbf{z}} \cap \mathcal{G}_{\mathbf{z}}$ gilt. Falls eine Matrix $\mathbf{Q} \succ 0$, Vektoren $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_k, \in \mathbb{R}^n$ und Hilfspolynome $s_1(\mathbf{z}), s_2(\mathbf{z}), s_3(\mathbf{z}), s_4(\mathbf{z}) \in \Sigma[\mathbf{z}]$ existieren, so dass die Bedingungen

$$\mathbf{Q} - \mathbf{L}^{-1} \prec 0, \quad (6.38)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^T + \mathbf{A}_{\mathbf{z}} \mathbf{Q} + \mathbf{b}_{\mathbf{z}} \mathbf{y}_1^T + \mathbf{y}_1 \mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T \prec 0, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^T + \mathbf{A}_{\mathbf{z}} \mathbf{Q} + \mathbf{b}_{\mathbf{z}} \mathbf{k}_1^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{k}_1 \mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T + \tau \mathbf{b}_{\mathbf{z}} \mathbf{y}_2^T + \tau \mathbf{y}_2 \mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T \prec 0, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{Q} \mathbf{A}_{\mathbf{z}}^T + \mathbf{A}_{\mathbf{z}} \mathbf{Q} + \mathbf{b}_{\mathbf{z}} \mathbf{k}_1^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{k}_1 \mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T + \tau \mathbf{b}_{\mathbf{z}} \mathbf{y}_k^T + \tau \mathbf{y}_k \mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T \prec 0, \quad (6.41)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_{\min}^2(\mathbf{z}) - (1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}) s_1(\mathbf{z}) & \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[\mathbf{z}], \quad (6.42)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_{\max}^2(\mathbf{z}) - (1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}) s_2(\mathbf{z}) & \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[\mathbf{z}], \quad (6.43)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{\min}^2(\mathbf{z}) - (1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}) s_3(\mathbf{z}) & \mathbf{y}_2^T \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[\mathbf{z}], \quad (6.44)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{\max}^2(\mathbf{z}) - (1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}) s_4(\mathbf{z}) & \mathbf{y}_2^T \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[\mathbf{z}] \quad (6.45)$$

erfüllt sind, dann ist das Gebiet $\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ ein Einzugsgebiet der Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{0}$ unter dem Regler $u = \mathbf{k}_2^T \mathbf{z}$ mit $\mathbf{k}_2^T = \mathbf{y}_k^T \mathbf{Q}^{-1}$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass, wenn die in Lemma 6.5 angegebenen Bedingungen erfüllt sind, auch die Bedingungen aus Lemma 6.4 erfüllt sind. Die Bedingung $\mathbf{Q} \succ 0$ stellt sicher, dass $v(\mathbf{z})$ positiv definit ist. Aufgrund von Bedingung (6.38) gilt $\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P}) \subset \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$. Die Bedingungen (6.39), (6.40) und (6.41) stellen wiederum die Bedingungen (6.33), (6.34) und (6.35) aus Lemma 6.4 sicher. Schließlich ist noch sicherzustellen, dass die beiden virtuellen Hilfsregler \mathbf{h}_1 und \mathbf{h}_2 nicht sättigen. Dazu müssen die Forderungen (6.36) und (6.37) aus Lemma 6.4 erfüllt sein, sofern die Bedingungen (6.42) bis (6.45) sichergestellt sind. Es wird zunächst Bedingung (6.42) mit $\mathbf{y}_1 = \mathbf{Q} \mathbf{h}_1$ betrachtet. Aus

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_{\min}^2(\mathbf{z}) - (1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}) s_1(\mathbf{z}) & \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \in \Sigma^{n+1}[\mathbf{z}],$$

folgt

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}_{\min}^2(\mathbf{z}) - (1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}) s_1(\mathbf{z}) & \mathbf{h}_1^T \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \mathbf{h}_1 & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Mit Hilfe des Schur-Komplement Lemmas ergibt sich mit $l(\mathbf{z}) = 1 - \mathbf{z}^T \mathbf{L} \mathbf{z}$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\min}^2(\mathbf{z}) - l(\mathbf{z}) s_1(\mathbf{z}) - \mathbf{h}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{h}_1 &\geq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \xrightarrow{s_1 \in \Sigma[\mathbf{z}]} \mathbf{h}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{h}_1 &\leq \tilde{v}_{\min}^2(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{D}_{\mathbf{z}} \supset \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Ausführungen im Beweis zu Satz 3.2 aus Abschnitt 3.2 gilt $\sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})} |\mathbf{h}_1^T \mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{h}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{h}_1}$. Somit stellt die obige Bedingung sicher, dass $|\mathbf{h}_1^T \mathbf{z}| \leq |\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})|$ für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ gilt. In gleicher Weise wird durch (6.43) sichergestellt, dass auch $|\mathbf{h}_1^T \mathbf{z}| \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ gilt. Ebenso lässt sich zeigen, dass die Forderungen $|\mathbf{h}_2^T \mathbf{z}| \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ und $|\mathbf{h}_2^T \mathbf{z}| \leq |\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})|$ durch die Bedingungen (6.44) und (6.45) sichergestellt werden. Somit sind also auch die Bedingungen (6.36) und (6.37) aus Lemma 6.4 erfüllt. \square

Zur Anwendung von Lemma 6.5 ist die Wahl des Gebietes $\mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ erforderlich. Mit dessen Hilfe wird die Forderung $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_1^T \mathbf{z} \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ und $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_2^T \mathbf{z} \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ nicht global, sondern nur auf dem Gebiet $\mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ sichergestellt. Gemäß Lemma 6.4 muss $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_1^T \mathbf{z} \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ und $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_2^T \mathbf{z} \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ gelten, weshalb die zusätzliche Forderung $\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ eingehalten werden muss. Dies ist in Abbildung 6.10 gezeigt. Die Menge $\mathcal{D}_{\mathbf{z}}$ bzw. die Matrix \mathbf{L} kann nicht mit optimiert werden, da das resultierende Optimierungsproblem in diesem Fall bilinear wäre. Zur Optimierung muss die Matrix \mathbf{L} im Vorhinein festgelegt werden.

Erweiterung auf nicht-polynomiale Systeme

Zur Anwendbarkeit von Lemma 6.5 wurde vorausgesetzt, dass es sich bei $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ um Polynome in \mathbf{z} handelt. Dies ist in der Praxis jedoch selten der Fall. Da es sich bei $v_{\min}(\mathbf{z})$, $v_{\max}(\mathbf{z})$, $u_{\min}(\mathbf{z})$ und $u_{\max}(\mathbf{z})$ um Stellbegrenzungen handelt, ist es aber möglich, den in [50], [51] und [68] beschriebenen Ansatz zu verwenden. Dazu werden Polynome zur Approximation von $\bar{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ bestimmt, so dass die Ungleichungen

$$\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}) \geq \bar{u}_{\max}(\mathbf{z}), \quad \tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \bar{u}_{\min}(\mathbf{z}), \quad (6.46)$$

$$\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}) \geq \bar{v}_{\max}(\mathbf{z}), \quad \tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \bar{v}_{\min}(\mathbf{z}) \quad (6.47)$$

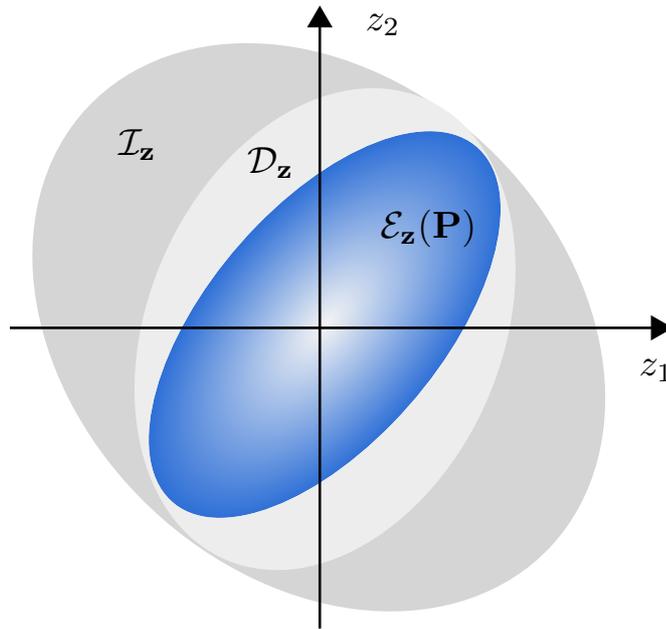


Abbildung 6.10: Darstellung der Gebiete $\mathcal{E}_z(\mathbf{P})$, \mathcal{D}_z und \mathcal{I}_z : Das Gebiet \mathcal{D}_z wird vor dem Entwurf festgelegt, für das Einzugsgebiet $\mathcal{E}_z(\mathbf{P})$ wird dann $\mathcal{E}_z(\mathbf{P}) \subset \mathcal{D}_z$ gefordert. Die Stellbegrenzungen werden auf dem Gebiet $\mathcal{I}_z \supset \mathcal{D}_z$ approximiert.

für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{I}_z \supset \mathcal{D}_z$ gelten (siehe hierzu Abbildung 6.10). Wird nun in Lemma 6.5 $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})$ durch $\bar{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ durch $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$, $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$ durch $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ durch $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ ersetzt, so ist der Reglerentwurf auch für nicht-polynomiale Systeme möglich. Im Folgenden wird beschrieben, wie polynomiale Approximationen $\bar{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ für ein gegebenes Gebiet \mathcal{I}_z bestimmt werden können.

Dazu bieten sich insbesondere Approximationsverfahren an, die auf orthogonale Polynome $p_i(x)$ zurückgreifen. Die Polynome $p_i(x)$ bilden in diesem Fall eine Polynombasis und sind in der Lage, Funktionen auf einem Intervall anzunähern. Solche Verfahren werden in [32] bzw. in [98] ausführlich diskutiert. Im Rahmen dieser Arbeit finden zur Approximation Legendre-Polynome Verwendung, welche wie folgt berechnet werden:

$$p_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i.$$

Mit ihrer Hilfe kann eine Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-1,1]$ mit

$$f(x) \approx \bar{f}(x) = \sum_{i=0}^d a_i p_i(x)$$

approximiert werden, wobei die Koeffizienten a_i gemäß [98] aus der Vorschrift

$$a_i = \frac{\int_{-1}^1 f(x)p_i(x)dx}{\int_{-1}^1 p_i(x)p_i(x)dx}$$

berechnet werden. Soll die Funktion $f(x)$ auf einem beliebigen Intervall $[a,b]$ approximiert werden, muss zuvor eine entsprechende Intervalltransformation durchgeführt werden (siehe hierzu Anhang A.10). Sollen multivariate Funktionen wie beispielsweise $f(x_1, x_2)$ approximiert werden, so kann die dazu notwendige multivariate Polynombasis aus den univariaten Legendre-Polynomen erzeugt werden. Es wird also die Polynombasis

$$p_{ij}(x_1, x_2) = p_i(x_1)p_j(x_2)$$

mit den Koeffizienten

$$a_{ij} = \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2)p_{ij}(x_1, x_2)dx_1dx_2}{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_{ij}(x_1, x_2)p_{ij}(x_1, x_2)dx_1dx_2}$$

verwendet. Die Approximation lautet dann

$$f(x_1, x_2) \approx \bar{f}(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} a_{ij}p_{ij}(x_1, x_2).$$

Zur Bestimmung der polynomialen Approximationen $\bar{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ werden zunächst die Approximation $\hat{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\hat{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\hat{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\hat{v}_{\max}(\mathbf{z})$ berechnet. Im Anschluss daran werden diese so modifiziert, dass die Forderungen (6.46) und (6.47) erfüllt sind. Im ersten Schritt wird ein Approximations-Algorithmus basierend auf Legendre-Polynomen verwendet, wie er zuvor beschrieben wurde. Hieraus ergibt sich als Approximation von $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ das Polynom $\hat{u}_{\max}(\mathbf{z})$. Nun wird der maximale Approximationsfehler

$$\Delta_{\max} = \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{I}_{\mathbf{z}}} |\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}) - \hat{u}_{\max}(\mathbf{z})|$$

berechnet. Eine polynomiale Approximation, welche die Bedingung $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}) \geq \bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$ erfüllt ergibt sich mit

$$\bar{u}_{\max}(\mathbf{z}) = \hat{u}_{\max}(\mathbf{z}) - \Delta_{\max}.$$

Diese Prozedur wird in analoger Weise für $\bar{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ und $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ durchgeführt. Die Berechnung von Δ_{\max} bzw. Δ_{\min} kann für komplizierte Funktionen $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$ bzw. $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ relativ aufwendig werden. In vielen Fällen kann dieses Problem jedoch in mehrere kleinere Probleme zerlegt werden. Falls $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ beispielsweise eine Summe $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z}) = \sum_i \tilde{v}_{\max,i}(\mathbf{z})$ ist, kann die polynomiale Approximation $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ ebenfalls als Summe $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z}) = \sum_i \bar{v}_{\max,i}(\mathbf{z})$ geschrieben werden. In diesem Fall können die Summanden $\bar{v}_{\max,i}(\mathbf{z})$ mit $\bar{v}_{\max,i}(\mathbf{z}) \leq \tilde{v}_{\max,i}(\mathbf{z})$ separat berechnet werden. Falls $\tilde{v}_{\max,i}(\mathbf{z})$ als Produkt eines Polynoms $p_i(\mathbf{z})$ mit einer nicht-polynomialen Funktion $f_i(\mathbf{z})$, d.h. als $\tilde{v}_{\max,i}(\mathbf{z}) = p_i(\mathbf{z})f_i(\mathbf{z})$, geschrieben werden kann, lässt sich $\bar{v}_{\max,i}(\mathbf{z})$ aus

$$\bar{v}_{\max,i}(\mathbf{z}) = p_i(\mathbf{z})\tilde{f}_i(\mathbf{z}) - \Delta_i \sup_{\mathbf{z} \in \mathcal{I}_{\mathbf{z}}} p_i(\mathbf{z})$$

berechnen. Die kleinste obere Schranke eines Polynoms $p_i(\mathbf{z})$ innerhalb von $\mathcal{I}_{\mathbf{z}}$ kann mittels SOS-Methoden berechnet werden [107].

6.7.3 Optimierungsproblem

Zum Entwurf des stabilisierenden Reglers kann nun dank Lemma 6.5 ein konvexes Optimierungsproblem formuliert werden. Bei der Optimierung ist jedoch sicherzustellen, dass alle relevanten Betriebszustände im Einzugsgebiet $\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ liegen. Wird die Menge dieser Zustände mit Hilfe eines konvexen Polyeders \mathcal{Z}_0 mit den N Eckpunkten $\mathbf{z}_{0,j}$ beschrieben, so liefert die Forderung $\mathcal{Z}_0 \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ die zusätzliche LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{z}_{0,j}^T \\ \mathbf{z}_{0,j} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (6.48)$$

Als Gütekriterium wird auch hier die Abklingrate des virtuellen Systems $\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T + \mathbf{b}\tau\mathbf{k}_2^T)\mathbf{z}$ verwendet. Es ergibt sich dann das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{l} \text{Maximiere} \quad \underline{\alpha}, \quad \text{u. d. B. d.} \\ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_k, \mathbf{Q} \succ 0, \\ s_1(\mathbf{z}), s_2(\mathbf{z}), s_3(\mathbf{z}), s_4(\mathbf{z}) \end{array}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_{\mathbf{z}}^T + \mathbf{A}_{\mathbf{z}}\mathbf{Q} + \mathbf{b}_{\mathbf{z}}\mathbf{k}_1^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{k}_1\mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T + \tau\mathbf{b}_{\mathbf{z}}\mathbf{y}_k^T + \tau\mathbf{y}_k\mathbf{b}_{\mathbf{z}}^T \prec -2\underline{\alpha}\mathbf{Q}$$

$$\begin{array}{l} s_1(\mathbf{z}), s_2(\mathbf{z}), s_3(\mathbf{z}), s_4(\mathbf{z}) \in \Sigma[\mathbf{z}], \\ (6.38) \text{ bis } (6.40), (6.42) \text{ bis } (6.45), (6.48). \end{array}$$

Dieses kann mittels gängiger LMI-Solver gelöst werden. Die Lösbarkeit hängt dabei nicht zuletzt von der Wahl des Gebietes \mathcal{D}_z ab. Dessen Größe muss so gewählt sein, dass \mathcal{Z}_0 vom Einzugsgebiet $\mathcal{E}_z(\mathbf{P})$ eingeschlossen werden kann. Eine zu große Wahl von \mathcal{D}_z kann jedoch zu Schwierigkeiten bei der Erfüllung der Ungleichungen (6.42) bis (6.45) führen.

6.7.4 Regelgesetz des Führungsreglers und Stabilität

Das Regelgesetz der sättigenden Führungsregelung für die betrachtete Klasse nichtlinearer Systeme erfordert, wie schon im Fall der sättigenden Führungsregelung aus Abschnitt 6.4, die Kenntnis der gewünschten neuen Ruhelage \bar{x}_s bzw. \bar{z} . Aufgrund der Umformung des nichtlinearen Systems in die Darstellung (6.32) mit dem neuen Zustand $\mathbf{z}_1 = [y_s \ \dot{y}_s \ \dots \ y_s^{(n)}]^T$ ergibt sich die gewünschte neue Ruhelage $\bar{z}(r)$ in Abhängigkeit von einem Referenzsignal r auf besonders einfache Weise. In der neuen Ruhelage müssen die zeitlichen Ableitungen von y_s verschwinden, weshalb

$$\bar{z}(r) = [r \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

gilt. Aufgrund der besonderen Struktur von \mathbf{A}_1 in Gl. (6.32) folgt dann unmittelbar $\bar{u} = \bar{u}_a = 0$. Das bedeutet wiederum, dass das stationäre Eingangssignal $\bar{u}_s \neq 0$ von dem Teil des Regelgesetzes (6.24) aufgebracht wird, durch den das System exakt linearisiert wird. Um sicherzustellen, dass die zum Referenzsignal gehörende neue Ruhelage auch wirklich vom System unter den gegebenen Stellbegrenzungen angenommen werden kann, muss zunächst für jedes Referenzsignal $r \neq 0$ überprüft werden, ob $u_{\min} \leq \bar{u}_s(r) \leq u_{\max}$ gilt. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass nur solche Referenzsignale r auftreten, für welche dies der Fall ist.

Um das System (6.32) in die neue Ruhelage $\bar{z}(r)$ zu überführen, wird in Analogie zu Abschnitt 6.4.3 das Regelgesetz in den linearisierten Koordinaten \mathbf{z}

$$u = k_2(\mathbf{z}, \bar{z}) = \mathbf{k}_2^T \hat{\mathbf{z}} V_\star(\mathbf{z}, \bar{z})$$

mit

$$\hat{\mathbf{z}} = \bar{z} + \frac{1}{V_\star(\mathbf{z}, \bar{z})} (\mathbf{z} - \bar{z})$$

verwendet. Dabei wurde bereits ausgenutzt, dass aufgrund der exakten Linearisierung stets $\bar{u} = \bar{u}_a = 0$ gilt. Die Funktion $V_\star(\mathbf{z}, \bar{z})$ ergibt sich in

Analogie zu Abschnitt 6.4.3 und lautet

$$\begin{aligned} V_\star(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \inf \{ \gamma \in \mathbb{R}^+ : \bar{\mathbf{z}} + \gamma^{-1}(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \in \mathcal{E}_\mathbf{z}(\mathbf{P}) \} \\ &= \frac{\bar{\mathbf{z}}^\top \mathbf{P} \mathbf{e}_\mathbf{z} + \sqrt{(\bar{\mathbf{z}}^\top \mathbf{P} \mathbf{e}_\mathbf{z})^2 + \mathbf{e}_\mathbf{z}^\top \mathbf{P} \mathbf{e}_\mathbf{z} (1 - \bar{\mathbf{z}}^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{z}})}}{1 - \bar{\mathbf{z}}^\top \mathbf{P} \bar{\mathbf{z}}} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{e}_\mathbf{z} = \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}$. Aufgrund der Definition von $V_\star(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ liegt der Zustand $\hat{\mathbf{z}}$ auf dem Rand des Gebietes $\mathcal{E}_\mathbf{z}(\mathbf{P})$.

Satz 6.2. *Gegeben sei das System (6.22) mit relativem Grad $\delta = n_s$, welches exakt zustandslinearisierbar ist für alle \mathbf{x}_s in einem Gebiet $\mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ mit $\mathbf{0} \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}_s}$ sowie das Gebiet*

$$\mathcal{D}_\mathbf{z} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{z}^\top \mathbf{L} \mathbf{z} \leq 1 \} \subset \mathcal{F}_\mathbf{z} \cap \mathcal{G}_\mathbf{z}.$$

Außerdem sei das Regelgesetz (6.24) gegeben, welches das System mit dem Diffeomorphismus (6.23) in die äquivalente lineare Darstellung (6.30) mit zustandsabhängigen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z})$, und $\tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ transformiert. Diese Begrenzungen seien polynomial in \mathbf{z} . Des Weiteren sei das Regelgesetz $k_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ des sättigenden Führungsreglers mit dem internen Aktormodell (6.31) gegeben.

Falls Vektoren $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ existieren, so dass die in Lemma 6.5 angegebenen Bedingungen erfüllt sind, dann gilt für alle $(\mathbf{x}_s(t), u_a(t)) \in \mathcal{E}_{(\mathbf{x}_s, u_a)}(\mathbf{P})$ mit

$$\mathcal{E}_{(\mathbf{x}_s, u_a)}(\mathbf{P}) = \{ \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{n_s}, u_a \in \mathbb{R} : [\Phi^\top(\mathbf{x}_s) u_a] \mathbf{P} [\Phi^\top(\mathbf{x}_s) u_a]^\top \leq 1 \}$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \bar{r}$$

für alle $(\mathbf{x}_s(0), u_a(0)) \in \mathcal{E}_{(\mathbf{x}_s, u_a)}(\mathbf{P})$.

Beweis. Um Satz 6.2 zu beweisen, ist zu zeigen, dass $\dot{V}_\star(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) < 0$ für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_\mathbf{z}(\mathbf{P}) \setminus \{ \bar{\mathbf{z}} \}$ und $\bar{\mathbf{z}} \in \text{int } \mathcal{E}_\mathbf{z}(\mathbf{P})$ gilt. Aufgrund der Tatsache, dass das nichtlineare System (6.22) mit konstanten Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen in das äquivalente lineare System (6.32) mit zustandsabhängigen Begrenzungen umgewandelt werden kann, entspricht der Beweis weitestgehend dem Beweis von Satz 6.1 und wird daher in knapper Form angegeben. Hierzu werden die beiden virtuellen Hilfsregler

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \mathbf{h}_1^\top \hat{\mathbf{z}} V_\star(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}), \\ h_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &= \mathbf{h}_2^\top \hat{\mathbf{z}} V_\star(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \end{aligned}$$

benötigt. Da die Bedingungen aus Lemma 6.5 erfüllt sind, gilt $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_1^T \mathbf{z} \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ und $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{h}_2^T \mathbf{z} \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$. Außerdem ist $V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \leq 1$ für alle $\bar{\mathbf{z}} \in \text{int } \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ und $\mathbf{z} \in \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$, weshalb die Hilfsregler die Bedingungen $\tilde{v}_{\min}(\mathbf{z}) \leq h_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \leq \tilde{v}_{\max}(\mathbf{z})$ und $\tilde{u}_{\min}(\mathbf{z}) \leq h_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \leq \tilde{u}_{\max}(\mathbf{z})$ erfüllen. Daher ist $\dot{V}_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) < 0$ sichergestellt, falls die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}h_1(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})) &< 0, \\ \frac{\partial V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T + \mathbf{b}h_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})) &< 0, \\ \frac{\partial V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T + \mathbf{b}k_2(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})) &< 0 \end{aligned}$$

gelten. An dieser Stelle wird nun $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + (1 - V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}))\bar{\mathbf{z}}$ substituiert und die Bedingungen $\mathbf{A}\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, $\bar{u} = \bar{u}_a = 0$ ausgenutzt. Es ergeben sich als hinreichende Bedingungen für $\dot{V}_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) < 0$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\mathbf{h}_1^T \hat{\mathbf{z}}) V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &< 0, \\ \frac{\partial V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T \hat{\mathbf{z}} + \tau\mathbf{h}_2^T \hat{\mathbf{z}}) V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &< 0, \\ \frac{\partial V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})}{\partial \mathbf{z}} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}\mathbf{k}_1^T \hat{\mathbf{z}} + \tau\mathbf{k}_2^T \hat{\mathbf{z}}) V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) &< 0. \end{aligned}$$

Die Gradienten von $v(\mathbf{z})$ und $V_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}})$ sind für alle $\hat{\mathbf{z}} \in \partial\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{P})$ parallel. Da die Erfüllung der Bedingungen aus Lemma 6.5 vorausgesetzt wird, sind die oberen Ungleichungen erfüllt und somit ist $\dot{V}_*(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) < 0$ sichergestellt. \square

6.7.5 Beispiel: Roboterarm

Als Beispielsystem wird der Roboterarm mit flexiblem Gelenk aus [128] betrachtet. Dieser wird durch das nichtlineare Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s,1} &= x_{s,2}, \\ \dot{x}_{s,2} &= -a \sin(x_{s,1}) - b(x_{s,1} - x_{s,3}), \\ \dot{x}_{s,3} &= x_{s,4}, \\ \dot{x}_{s,4} &= c(x_{s,1} - x_{s,3}) + du_s \end{aligned}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet $x_{s,1}$ den Winkel des Roboterarms in rad, $x_{s,2}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Roboterarms in rad/s, $x_{s,3}$ ist der

Winkel des Motors in rad und $x_{s,4}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Motors in rad/s. Die Eingangsgröße u_s des Systems ist das Drehmoment des Motors und unterliegt den Begrenzungen $-20 \text{ Nm} \leq u_s \leq 20 \text{ Nm}$ und $-50 \text{ Nms}^{-1} \leq \dot{u}_s \leq 50 \text{ Nms}^{-1}$. Der Ausgang $y_s = x_{s,1}$ soll im Folgenden auf einen festen Wert geregelt werden. Außerdem wird $\tau = 2$ festgelegt. Mit dem Ausgang y_s hat das System den relativen Grad n_s und kann demnach mit dem Diffeomorphismus (6.23) in

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1,1} &= z_{1,2}, & \dot{z}_{1,2} &= z_{1,3}, & \dot{z}_{1,3} &= z_{1,4}, \\ \dot{z}_{1,4} &= -(a \cos(z_{1,1}) + b + c)z_{1,3} + a(z_{1,2}^2 - c) \sin(z_{1,1}) + bdu_s \end{aligned}$$

umgeformt werden. Zum Entwurf der Regelung wird $a = b = c = d = 1$ gewählt. Die hieraus resultierenden zustandsabhängigen Stellbegrenzungen sind aufgrund trigonometrischer Funktionen nichtpolynomial. Um den Führungsregler entwerfen zu können, wird daher die in Abschnitt 6.7.2 beschriebene Polynom-Approximation verwendet. Die Vorgehensweise wird im Anhang B.3.4 genauer erläutert. Außerdem werden Hilfspolynome $s_i(\mathbf{z})$ zweiter Ordnung sowie der Polyeder $\mathcal{Z}_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^5 : |z_{1,1}| \leq \pi/2, z_{1,2} = z_{1,3} = z_{1,4} = 0, u_{a,0} = 0\}$ zur Beschreibung des Gebiets möglicher Anfangszustände angesetzt. Die Matrix \mathbf{L} muss nun so gewählt werden, dass $\mathcal{D}_{\mathbf{z}} \subset \mathcal{I}_{\mathbf{z}}$ gilt. Im vorliegenden Beispiel wird die Matrix $\mathbf{L} = \text{diag}(\pi, \pi, \pi, \pi, (1.1 \cdot \mathbf{u}_{\max})^{-2})$ verwendet. Abbildung 6.11 zeigt die Verläufe der Ausgangsgröße $y_s = x_{s,1}$ für eine den Anfangszustand $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$ und ein Referenzsignal von $r = \pi/2$ rad, welches bei $t = 0,5$ s aufgeschaltet wird. Darunter sind die zugehörigen Verläufe der kommandierten und tatsächlich wirksamen Stellgröße u_a (gestrichelter Verlauf) sowie der Stellrate \dot{u}_a dargestellt.

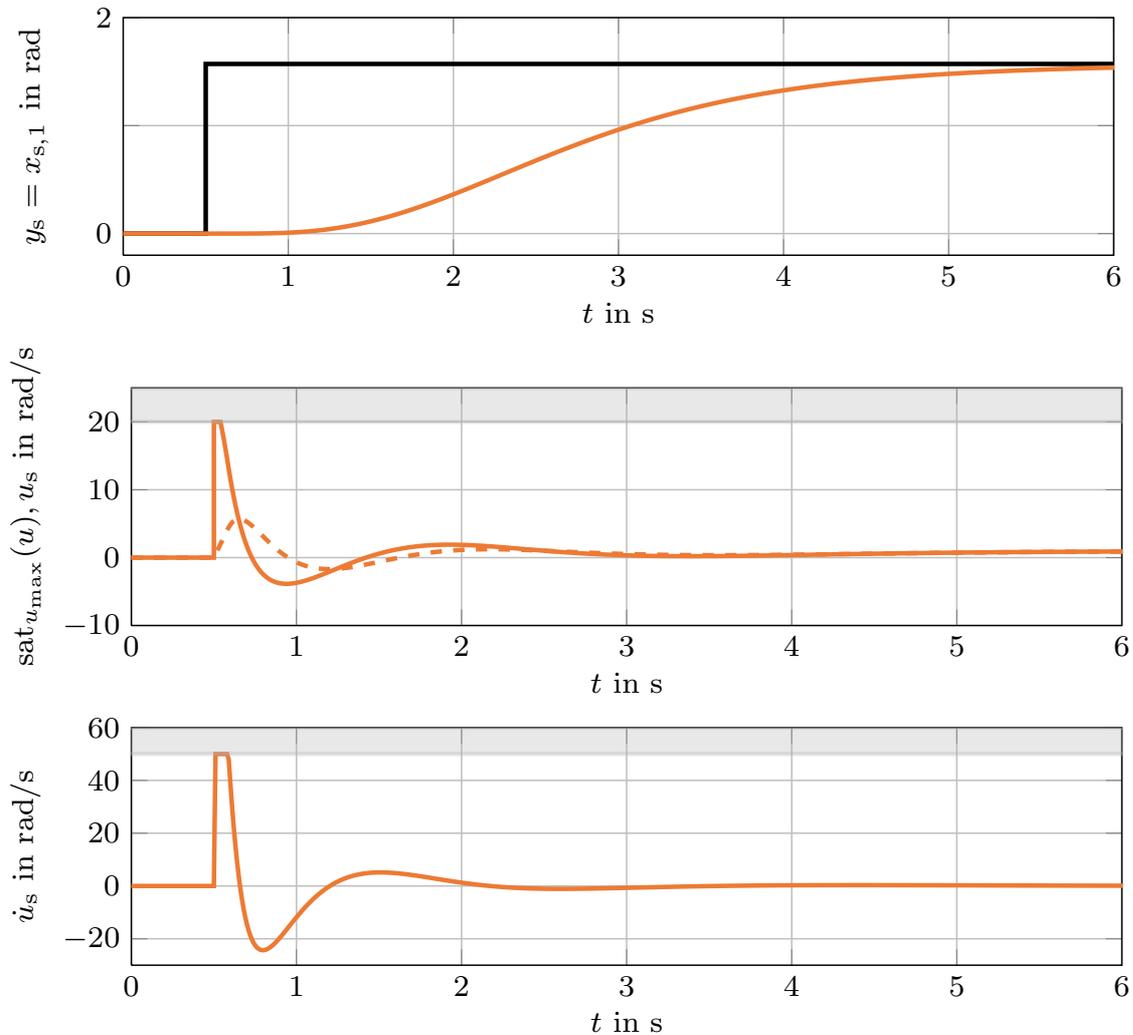


Abbildung 6.11: Verlauf des Winkels des Roboterarms $y_s = x_{s,1}$ (oben), sowie der kommandierten Stellgröße u (mitte) und wirksamen Stellgröße u_s (mitte) und der Stellrate \dot{u}_s (unten) für den Anfangszustand $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$. Bei $t = 0,5$ s wird ein Referenzwert von $r = \pi/2$ rad aufgeschaltet.

6.8 Fazit

Die in diesem Kapitel vorgestellte sättigende Festwert-Führungsregelung für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen entsteht durch eine Erweiterung des Ansatzes aus [17], in welchem ausschließliche Stellgrößenbegrenzungen und nichtsättigende Regelgesetze betrachtet werden. Die in dieser Arbeit vorgestellte Führungsregelung zeichnet sich durch eine sehr gute Reglerperformance aus und kann auf einfache Weise entworfen werden. Die Stabilität der Regelung wird durch einen gegenüber [17] deutlich modifizierten Stabilitätssatz sichergestellt. Zur Parametrierung des Führungsreglers muss lediglich ein linearer Sättigungsregler entworfen werden, was durch Lösen eines konvexen Optimierungsproblems geschieht. Im Gegensatz zu üblichen Ansätzen, den Regelfehler in den Zustandsvektor zu integrieren bzw. ein Exosystem zur Generierung der Referenzsignale zu verwenden, ist die Menge der erreichbaren Referenzzustände $\bar{\mathbf{x}}$ keine Funktion des Anfangszustandes $\mathbf{x}(0)$. Der Vorteil gegenüber dem Führungsregler von Buhl [24] liegt abgesehen von der expliziten Berücksichtigung der Stellratenbegrenzung in der unmittelbaren Anwendbarkeit des Verfahrens auf MIMO-Systeme.

Im Zuge der Entwicklung des Verfahrens wurde zunächst eine ausschließliche Stellgrößenbegrenzung angenommen und der ursprüngliche Ansatz aus [17] derart erweitert, dass ein sättigendes Regelgesetz verwendet werden kann. Dieses vorläufige Ergebnis wurde in [72] publiziert. Die in diesem Kapitel entwickelte Führungsregelung unter Berücksichtigung der Stellratenbegrenzungen wurde in [71], [74] veröffentlicht.

Wie in diesem Kapitel gezeigt, kann die sättigende Führungsregelung auch auf exakt zustandslinearisierbare nichtlineare Systeme erweitert werden. Der Einsatz der exakten Linearisierung zusammen mit der SOS-Methodik erlaubt auch in diesem Fall einen effizienten Reglerentwurf mittels konvexer Optimierung. Dieses Ergebnis wurde in [75] publiziert.

7 Zwei-Freiheitsgrade Regelung

Die im vorigen Kapitel vorgestellten Führungsregelungen haben den Nachteil, dass die Messung des gesamten Zustandsvektors erforderlich ist. Außerdem kann keine Robustheit der Regelung gegenüber angreifenden Störungen garantiert werden. In diesem Kapitel wird eine Regelung vorgestellt, die lediglich auf der Messung der Ausgangsgrößen des Systems beruht und auch den Einfluss von Störungen berücksichtigt.

Wie schon zur Realisierung einer Führungsregelung unter Kenntnis des Systemzustands \mathbf{x}_s , basieren die meisten bestehenden Verfahren zur Führungsregelung unter ausschließlicher Kenntnis des Systemausgangs \mathbf{y}_s darauf, den Zustandsvektor des Systems in Fehlerkoordinaten $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s$ darzustellen [28], [62], [138]. Die Aufgabe beschränkt sich dann darauf, den Ursprung $\mathbf{e}_x = \mathbf{0}$ des transformierten Systems zu stabilisieren. Hieraus ergibt sich jedoch der bereits eingangs von Kapitel 6 erwähnte Nachteil, dass die Menge an erreichbaren Referenzzuständen vom Anfangszustand $\mathbf{x}_s(0)$ der Strecke abhängt. Der Entwurf eines Führungsreglers basierend auf der Darstellung in Fehlerkoordinaten $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s$ lässt sich auch für die in Kapitel 5 vorgestellte Ausgangsrückführung angeben. Hierzu muss das System lediglich in eine entsprechende Darstellung transformiert und der Entwurf für das transformierte System durchgeführt werden. Der Entwurf der Regelung erfolgt dann wie in Kapitel 5 beschrieben. Solche Transformationen finden sich beispielsweise in [28], [62] für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung. Für Systeme unter simultanen Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen sind entsprechende Ansätze in [130] angegeben.

Im Folgenden soll ein alternativer Ansatz vorgestellt werden, welcher nicht auf der Darstellung des Systems in Fehlerkoordinaten beruht. Zu diesem Zweck wird die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur von Horowitz [59] aufgegriffen. Eine gute Einführung, speziell im Hinblick auf die Anwendung für lineare Systeme liefert auch [111]. Die Grundidee ist, möglichst viele Informationen über das System zur Vorsteuerung zu verwenden. Die Regelung übernimmt dann lediglich die Aufgabe, auftretende Störungen

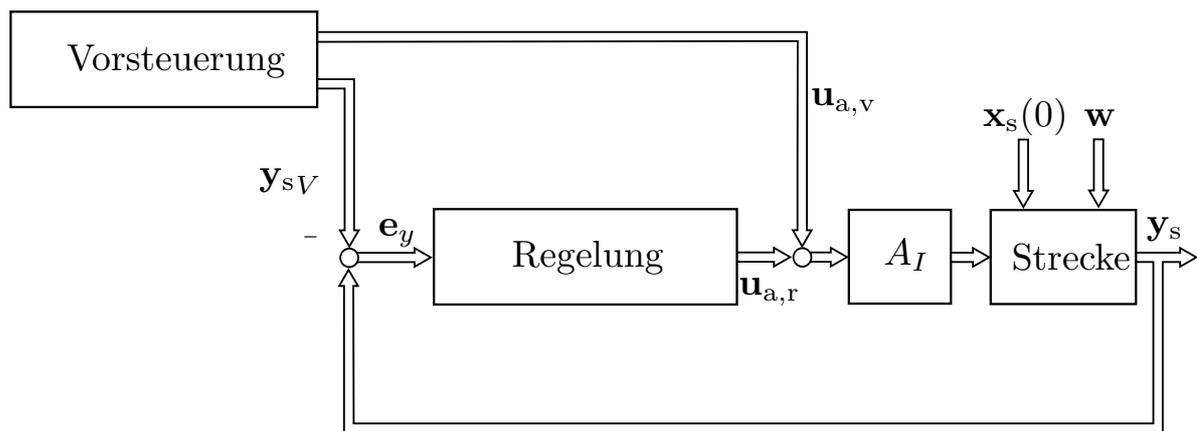


Abbildung 7.1: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur bestehend aus Vorsteuerung und Regelung. Darin bezeichnet A_I das Modell eines idealen Aktors.

und/oder unterschiedliche Anfangszustände zu kompensieren. Ein wesentlicher Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass Führungs- und Störverhalten unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Ein Blockschaltbild der Zwei-Freiheitsgrade Struktur ist in Abbildung 7.1 dargestellt. In [33] wird diese Struktur verwendet, um für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung eine Regelung mit Vorsteuerung zu entwerfen. Der Entwurf der Ausgangsrückführung erfolgt dabei ohne Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung. Ein Anti-Windup Netzwerk wird verwendet, um die negativen Effekte bei auftretender Sättigung zu mildern.

7.1 Grundlagen

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Ansätze verfolgt, die sich hinsichtlich der Realisierung der Vorsteuerung unterscheiden. In Abschnitt 7.2 wird eine modellbasierte Vorsteuerung vorgestellt. Dabei wird ein Modell der Strecke in die Vorsteuerung integriert und der in Abschnitt 6.4 vorgestellte sättigende Führungsregler zur Regelung des Modells verwendet. In Abschnitt 7.3 erfolgt die Realisierung der Vorsteuerung mittels einer Trajektorienplanung. Dazu wird die inversionsbasierte Vorsteuerung für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung aus [45], [46], [47] auf Systeme unter zusätzlicher Stellratenbegrenzung erweitert.

Wie in Abbildung 7.1 gezeigt, wird die wirksame Stellgröße \mathbf{u}_a von einem idealen Aktor A_I aufgebracht. Dabei ist die wirksame Stellgröße hinsichtlich Stellgröße und Stellrate begrenzt, d.h., es gilt wiederum $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ und $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$. Der Eingang des idealen Aktors setzt sich dabei aus

einem Anteil $\mathbf{u}_{a,v}$ der Vorsteuerung und dem Anteil $\mathbf{u}_{a,r}$ der Regelung zusammen. Wird nun die verfügbare Stellgröße und Stellrate in geeigneter Weise zwischen der Vorsteuerung und der Regelung aufgeteilt, so erfüllt die Summe $\mathbf{u}_{a,v} + \mathbf{u}_{a,r}$ die Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung und die Begrenzungen des idealen Aktors werden nicht verletzt. Dies geschieht im Folgenden mit Hilfe der Vektoren $\boldsymbol{\kappa}_u \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{\kappa}_v \in \mathbb{R}^m$ mit $\kappa_{u,i} \in [0,1]$, $\kappa_{v,i} \in [0,1]$. Damit lauten die Stellbegrenzungen für die Vorsteuerung

$$|u_{a,v,i}| \leq \kappa_{u,i} u_{\max,i}, \quad |\dot{u}_{a,v,i}| \leq \kappa_{v,i} v_{\max,i} \quad (7.1)$$

und für die Regelung

$$|u_{a,r,i}| \leq (1 - \kappa_{u,i}) u_{\max,i}, \quad |\dot{u}_{a,r,i}| \leq (1 - \kappa_{v,i}) v_{\max,i}. \quad (7.2)$$

Wird die Aufteilung in dieser Form gewählt, so gilt $\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_{a,v} + \mathbf{u}_{a,r}$ und $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ sowie $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$.

7.2 Modellbasierte Vorsteuerung

Aufgabe der Vorsteuerung ist die Generierung einer Steuerfunktion $\mathbf{u}_{a,v}$. Im Fall einer modellbasierten Vorsteuerung findet dazu die sättigende Festwert-Führungsregelung aus Abschnitt 6.4 Verwendung. Diese wird dazu eingesetzt, das Modell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{s,v} &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_{s,v} + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,v}, \\ \mathbf{y}_{s,v} &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_{s,v} \end{aligned}$$

der Strecke zu regeln, wobei hierzu alle Modellzustände $\mathbf{x}_{s,v}$ zur Verfügung stehen. Es müssen aber die neuen Begrenzungen (7.1) und (7.2), die sich aufgrund der Aufteilung der Stellgröße und Stellrate ergeben, im Entwurf berücksichtigt werden. Dazu wird das Aktormodell A_V

$$\dot{\mathbf{u}}_{a,v} = \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max,v}} \left(-\mathbf{T} \mathbf{u}_{a,v} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max,v}}(\mathbf{u}_v) \right)$$

mit $\mathbf{u}_{\max,v} = [u_{\max,v,1}, \dots, u_{\max,v,m}]$ und $\mathbf{v}_{\max,v} = [v_{\max,v,1}, \dots, v_{\max,v,m}]$ in die Vorsteuerung integriert. Anschließend wird, wie schon in Abschnitt 2.2, ein erweiterter Zustandsvektor $\mathbf{x}_v = [\mathbf{x}_{s,v}^T \quad \mathbf{u}_{a,v}^T]^T$ verwendet und das erweiterte System

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{A} \mathbf{x}_v + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x}_v + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u}_v))$$

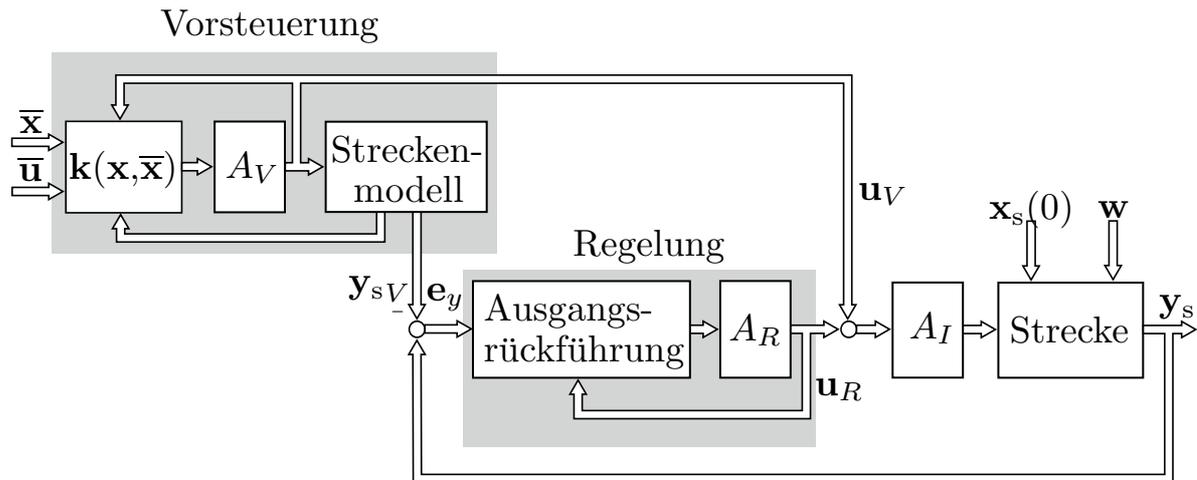


Abbildung 7.2: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur unter Verwendung der dynamischen Ausgangsrückführung. Die Vorsteuerung beinhaltet ein Modell der Strecke sowie ein zugehöriges Aktormodell A_V . Der dynamische Regler besteht aus einer Ausgangsrückführung und beinhaltet das Aktormodell A_R .

mit \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{K}_1 entsprechend Gl. (2.8) gebildet. Damit kann das Regelgesetz aus Abschnitt 6.4, d.h.

$$\mathbf{u}_v = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}_v + (1 - V_*(\mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_v)) \cdot (\bar{\mathbf{u}}_v - \mathbf{K}_2 \bar{\mathbf{x}}_v)$$

mit

$$V_*(\mathbf{x}_v, \bar{\mathbf{x}}_v) = \frac{\bar{\mathbf{x}}_v^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{\mathbf{x},v} + \sqrt{(\bar{\mathbf{x}}_v^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{\mathbf{x},v})^2 + \mathbf{e}_{\mathbf{x},v}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{\mathbf{x},v} (1 - \bar{\mathbf{x}}_v^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_v)}}{1 - \bar{\mathbf{x}}_v^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}_v}$$

und $\mathbf{e}_{\mathbf{x},v} = \mathbf{x}_v - \bar{\mathbf{x}}_v$ zur Regelung des Streckenmodells genutzt werden. Der Entwurf der Reglermatrix \mathbf{K}_2 und der Matrix \mathbf{P} erfolgt, wie in Abschnitt 6.4.3 beschrieben, durch Lösen des Optimierungsproblems (3.22). Dazu müssen im Entwurf lediglich die Stellbegrenzungen (7.1) anstelle von $|u_{a,i}| \leq u_{\max,i}$ und $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ verwendet werden. Außerdem muss der Anfangszustand $\mathbf{x}_v(0)$ festgelegt werden. Liegt wie im allgemeinen Fall keine Information über den Anfangszustand der realen Strecke vor, ist jedes beliebige $\mathbf{x}_v(0) \in \mathcal{X}_0$ eine zulässige Wahl. Im Rahmen dieser Arbeit wird $\mathbf{x}_v(0) = \mathbf{0}$ gewählt. Falls jedoch eine Information über den Anfangszustand der realen Strecke vorliegt, sollte $\mathbf{x}_v(0)$ entsprechend gewählt werden. Abbildung 7.2 zeigt die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur mit modellbasierter Vorsteuerung.

7.3 Vorsteuerung mit Trajektorien-Planung

Die Vorsteuerung wird für das Modell der Strecke

$$\dot{\mathbf{x}}_{s,v} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_{s,v} + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,v} \quad (7.3)$$

entworfen. Die Aufgabe besteht nun in der Bestimmung der Steuerfunktion $\mathbf{u}_{a,v}$, die das System von einem Arbeitspunkt $\mathbf{x}_s(0)$ in den Arbeitspunkt $\mathbf{x}_s(T)$ in der Zeitspanne T überführen soll. In [45], [46], [47] wird für diese Aufgabe ein inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen vorgestellt, der im Folgenden erläutert wird.

7.3.1 Stellgrößenbeschränkungen

Der Vorsteuerungsentwurf aus [45], [46], [47] ist auch für nichtlineare Systeme möglich. Aus diesem Grund wird die Methodik anhand dieses allgemeineren Falls vorgestellt. Lineare Systeme der Form (2.1) sind darin als Spezialfall enthalten. Betrachtet wird also ein nichtlineares MIMO-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a), & \mathbf{x}_s(0) &= \mathbf{x}_{s,0}, \\ y_{s,i} &= c_{s,i}(\mathbf{x}_s), & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (7.4)$$

mit $\mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{n_s}$ und den Begrenzungen für $\mathbf{u}_a = [u_{a,1}, \dots, u_{a,m}]^T$:

$$u_{\min,i} \leq u_{a,i}(t) \leq u_{\max,i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Nun soll eine Steuerfunktion $\mathbf{u}_a(t)$ berechnet werden, die das System in einer endlichen Zeit T vom Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_{s,0}^*, \mathbf{u}_{a,0}^*)$ zum Arbeitspunkt $(\mathbf{x}_{s,T}^*, \mathbf{u}_{a,T}^*)$ überführt. Dabei wird vorausgesetzt, dass das System in den Arbeitspunkten stationär ist, d.h., es gilt

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_{s,0}^*, \mathbf{u}_{a,0}^*) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_{s,T}^*, \mathbf{u}_{a,T}^*) = \mathbf{0}.$$

Für die Ausgänge wiederum gilt

$$y_{s,i,0}^* = c_{s,i}(\mathbf{x}_{s,0}^*), \quad y_{s,i,T}^* = c_{s,i}(\mathbf{x}_{s,T}^*), \quad i = 1, \dots, m.$$

Die Bestimmung der Steuerfunktion $\mathbf{u}_a(t)$ kann als Zwei-Punkt-Randwertaufgabe mit den Randbedingungen

$$\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{x}_{s,0}^*, \quad \mathbf{x}_s(T) = \mathbf{x}_{s,T}^* \quad (7.5)$$

formuliert werden. Dazu wird vorausgesetzt, dass der Anfangszustand des Systems $\mathbf{x}_{s,0} = \mathbf{x}_{s,0}^*$ ist. Somit ergeben sich n_s Differentialgleichungen mit $2n_s$ Randbedingungen für die n_s Zustände $\mathbf{x}_s = [x_{s,1}, \dots, x_{s,n_s}]^T$.

7.3.2 Ein-/Ausgangsnormalform

Basis für den Entwurf bildet die Ein-/Ausgangsnormalform (E/A-Normalform) eines MIMO-Systems. Um sie zu erhalten, wird zunächst der relative Grad definiert. Das System (7.4) hat den relativen Grad $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]^T$, wenn

$$\frac{\partial}{\partial u_{a,i}} L_{\mathbf{f}_s}^j c_{s,k}(\mathbf{x}_s) = 0, \quad j = 1, \dots, r_k - 1$$

für alle $i, k \in \{1, \dots, m\}$ gilt und die nichtlineare Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_1} c_{s,1}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_1} c_{s,1}(\mathbf{x}_s) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_2} c_{s,2}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_2} c_{s,2}(\mathbf{x}_s) & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_m} c_{s,m}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_m} c_{s,m}(\mathbf{x}_s) & \dots \\ & \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_1} c_{s,1}(\mathbf{x}_s) & \\ & \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_2} c_{s,2}(\mathbf{x}_s) & \\ & \vdots & \\ & \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_m} c_{s,m}(\mathbf{x}_s) & \end{bmatrix}$$

für alle relevanten Zustände \mathbf{x}_s regulär ist [64] (siehe zur Definition des relativen Grades auch Anhang A.11). Ist dies der Fall, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial u_{a,i}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_k} c_{s,k}(\mathbf{x}_s) \neq 0$$

für mindestens ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Dabei wird durch den Operator $L_{\mathbf{f}_s}$ die Lie-Ableitung entlang des Vektorfeldes \mathbf{f}_s dargestellt. Ist der relative Grad bestimmt, kann die E/A-Normalform des Systems berechnet werden. Als neue Koordinaten dienen dabei

$$[\mathbf{y}_{s,1}^T, \dots, \mathbf{y}_{s,m}^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}_s)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{s,k} &= [y_{s,k}, \dot{y}_{s,k}, \dots, y_{s,k}^{(r_k-1)}]^\top \\ &= [c_{s,k}(\mathbf{x}_s), L_{\mathbf{f}_s} c_{s,k}(\mathbf{x}_s), \dots, L_{\mathbf{f}_s}^{r_k-1} c_{s,k}(\mathbf{x}_s)]^\top, \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, m$ und dem ergänzenden Vektor

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\phi}_\eta(\mathbf{x}_s) \in \mathbb{R}^{n_s-r}, \quad \delta = \sum_{i=1}^m r_i.$$

Damit lautet das System in der nichtlinearen E/A-Normalform

$$y_{s,k}^{(r_k)} = \alpha_k(\mathbf{y}_{s,1}, \dots, \mathbf{y}_{s,m}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_a), \quad (7.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}_{s,1}, \dots, \mathbf{y}_{s,m}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{u}_a) \quad (7.7)$$

mit $k = 1, \dots, m$. Die Gleichung (7.6) stellt dabei die E/A-Dynamik mit der Ordnung δ dar und Gleichung (7.7) repräsentiert die interne Dynamik des Systems mit der Ordnung $n_s - \delta$.

Schließlich werden auch die Randbedingungen in die E/A-Normalform transformiert:

$$y_{s,k}(0) = y_{s,k,0}^*, \quad y_{s,k}(T) = y_{s,k,T}^*, \quad y_{s,k}^{*(i)} \Big|_{t=0,T} = 0$$

mit $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, r_k - 1$ und

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0^* = \boldsymbol{\phi}_\eta(\mathbf{x}_{s,0}^*), \quad \boldsymbol{\eta}(T) = \boldsymbol{\eta}_T^* = \boldsymbol{\phi}_\eta(\mathbf{x}_{s,T}^*).$$

Für den Fall, dass $\delta = n_s$ gilt, existiert keine interne Dynamik und es handelt sich um ein flaches System mit flachen Ausgängen $y_{s,k}$.

7.3.3 Systeminversion

Aus Gl. (7.6) ist ersichtlich, dass die Eingangsgrößen $u_{a,k}^*$ direkt auf die höchsten Ableitungen $y_{s,k}^{*(r_k)}$ der Ausgänge wirken. Um Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigen zu können, werden nun Funktionen

$$y_{s,k}^{*(r_k)} = \hat{\alpha}_k$$

angesetzt. Diese Funktionen werden später so gewählt, dass die Stellgrößenbegrenzungen nicht verletzt werden.

Unter der Voraussetzung, dass die nichtlineare Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x}_s)$ für alle relevanten Zustände regulär ist, kann die Inverse der E/A-Normalform mit $\mathbf{y}_k^{*(r_k)} = \hat{\alpha}_k$ gebildet werden und es ergibt sich

$$\mathbf{u}_a = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{y}_{s,1}^*, \hat{\alpha}_1, \dots, \mathbf{y}_{s,m}^*, \hat{\alpha}_m, \boldsymbol{\eta}^*) \quad (7.8)$$

mit $\boldsymbol{\alpha}^{-1} = [\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_m^{-1}]^T$. Aus Gl. (7.8) lässt sich demnach die Steuerfunktion $\mathbf{u}_a(t)$ in Abhängigkeit der Ausgangstrajektorie $\mathbf{y}_s^*(t)$, der internen Dynamik $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ und den Ansatzfunktionen $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = [\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m]$ ermitteln. Die interne Dynamik kann berechnet werden, indem die Ausgangstrajektorie in (7.7) eingesetzt wird:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^* = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\eta}^*, \mathbf{y}_{s,1}^*, \hat{\alpha}_1, \dots, \mathbf{y}_{s,m}^*, \hat{\alpha}_m), \quad \boldsymbol{\eta}^*(0) = \boldsymbol{\eta}_0^*, \quad \boldsymbol{\eta}^*(T) = \boldsymbol{\eta}_T^*. \quad (7.9)$$

Ist die interne Dynamik bestimmt, lässt sich mit Gl. (7.8) auch die Steuerfunktion $\mathbf{u}_a(t)$ bestimmen.

Die Lösungen von $\mathbf{y}_s^*(t)$, $\boldsymbol{\eta}^*(t)$ sowie $\mathbf{u}_a(t)$ hängen also von der Wahl von $\hat{\alpha}_k$ ab, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird. Dabei müssen zusätzliche Randbedingungen sichergestellt werden, die gewährleisten, dass das Stellsignal bei $t = 0$ und $t = T$ stetig ist. Sie lauten

$$\mathbf{y}_{s,k}^{*(r_k)}(0) = 0, \quad \mathbf{y}_{s,k}^{*(r_k)}(T) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (7.10)$$

7.3.4 Lösung der Randwertaufgabe

Um die Randwertaufgabe mit den n_s Differentialgleichungen und $2n_s$ Randbedingungen zu lösen, werden für den Ansatz der $\hat{\alpha}_k$ -Funktionen n_s freie Parameter

$$\mathbf{p}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,q_k}), \quad \sum_{k=1}^m q_k = n_s$$

benötigt, die zunächst in m initialen Ansatzfunktionen $\Psi_k(t, \mathbf{p}_k)$ mit $t \in [0, T]$ vorgesehen werden. Bei der Wahl von $\Psi_k(t, \mathbf{p}_k)$ ist ebenfalls zu berücksichtigen, dass die Steuerfolge bei $t = 0$ und $t = T$ stetig ist, d.h. Bedingung (7.10) erfüllt ist. Die Funktion

$$\Psi_k(t, \mathbf{p}_k) = \sum_{i=1}^{q_k} p_{k,i} \left[\left(\frac{t}{T} \right)^{i+1} - \frac{t}{T} \right] \quad (7.11)$$

erfüllt diese Forderung. Einsetzen in die Gleichungen (7.8) und (7.9) liefert das Stellsignal

$$\mathbf{u}_{\Psi}^* = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{y}_{s,1}^*, \Psi_1(t, \mathbf{p}_1), \dots, \mathbf{y}_{s,m}^*, \Psi_m(t, \mathbf{p}_m), \boldsymbol{\eta}^*).$$

Anhand von \mathbf{u}_Ψ^* kann nun überprüft werden, ob die Stellgrößenbeschränkungen eingehalten werden. Wird eine Beschränkung verletzt, müssen die Ansatzfunktionen $\Psi_k(t, \mathbf{p}_k)$ modifiziert werden. Mit diesen Modifikationen lauten die endgültigen Ansatzfunktionen $\hat{\alpha}_k$

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} \Psi_k(t, \mathbf{p}_k), & \text{wenn } u_{\Psi,j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}] \\ & \forall j = 1, \dots, m, \\ \alpha_k(\mathbf{y}_{s,1}^*, \dots, \mathbf{y}_{s,m}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \hat{\mathbf{u}}), & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $k = 1, \dots, m$ mit $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m]^T$ und

$$\hat{u}_j = \begin{cases} u_{\min,j}, & \text{wenn } u_{\Psi,j} < u_{\min,j}, \\ u_{\Phi,j}, & \text{wenn } u_{\Psi,j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}], \\ u_{\max,j}, & \text{wenn } u_{\Psi,j} > u_{\max,j}. \end{cases}$$

Um die Steuerfunktion zu berechnen, muss ein Randwertproblem mit den $\hat{\alpha}_k$ -Funktionen in Abhängigkeit der Parameter \mathbf{p}_k gelöst werden. Dabei ist die Transitionszeit T im Hinblick auf die Stellgrößenbegrenzungen so zu wählen, dass eine Lösung gefunden werden kann. Ist sie zu klein gewählt, ist das Problem aufgrund der Stellgrößenbeschränkung nicht lösbar und T muss vergrößert werden. Zur Lösung der Randwertaufgabe kann, wie in [45], [46], [47] gezeigt, die MATLAB-Funktion `bvp4c` [79] verwendet werden.

7.3.5 Stellratenbegrenzungen

Betrachtet wird wieder das nichtlineare MIMO-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a), & \mathbf{x}_s(0) &= \mathbf{x}_{s,0} \\ y_{s,i} &= c_{s,i}(\mathbf{x}_s), & i &= 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Neben der Stellgrößenbegrenzung soll nun auch die Begrenzung der Stellrate $\dot{\mathbf{u}}_a = [\dot{u}_{a,1}, \dots, \dot{u}_{a,m}]^T$ berücksichtigt werden. Dabei wird zur Vereinfachung der Schreibweise \mathbf{x}_s anstelle von $\mathbf{x}_{s,v}$ und \mathbf{u}_a anstelle von $\mathbf{u}_{a,v}$ verwendet. Es gilt also

$$u_{\min,i} \leq u_{a,i} \leq u_{\max,i}, \quad (7.12)$$

$$v_{\min,i} \leq \dot{u}_{a,i} \leq v_{\max,i} \quad (7.13)$$

für $i = 1, \dots, m$. Angesichts der Ausführungen des vorigen Abschnitts ist es naheliegend, auch der zusätzlichen Stellratenbegrenzung durch Umplanen

der Ansatzfunktion zu begegnen. Dazu findet das Aktormodell (2.5) zur Modellierung der Begrenzungen Verwendung. Durch das Umplanen der Ansatzfunktionen wird sichergestellt, dass die Begrenzungen (7.12) und (7.13) erfüllt sind. Ist dies der Fall, wirken sich die Sättigungsfunktionen in (2.5) nicht aus und die Differentialgleichung des Aktormodells lautet dann

$$\dot{\mathbf{u}}_a = -\mathbf{T}\mathbf{u}_a + \mathbf{T}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_a(0) = \mathbf{u}_{a,0}. \quad (7.14)$$

Zur Durchführung des Vorsteuerungsentwurfs wird nun der erweiterte Zustandsvektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s^T \ \mathbf{u}_a^T]^T \in \mathbb{R}^n$ mit $n = n_s + m$ verwendet und das erweiterte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ y_i &= c_i(\mathbf{x}), & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (7.15)$$

mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a) \\ -\mathbf{T}\mathbf{u}_a + \mathbf{T}\mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad c_i(\mathbf{x}) = c_{s,i}(\mathbf{x}_s)$$

gebildet. Die Erweiterung des Systems muss auch bei den Randbedingungen berücksichtigt werden. Für \mathbf{x}_s sind diese wiederum durch die Gleichungen (7.5) gegeben. Hinzu kommen jedoch die Bedingungen

$$\mathbf{u}_a(0) = \mathbf{u}_{a,0}^*, \quad \mathbf{u}_a(T) = \mathbf{u}_{a,T}^*$$

für das Aktormodell. Dabei entsprechen $u_{a,0}^*$ und $\mathbf{u}_{a,T}^*$ den stationären Stellgrößen in den jeweiligen Arbeitspunkten. Insgesamt ergeben sich also die Randbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{s,0}^* \\ \mathbf{u}_{a,0}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{s,T}^* \\ \mathbf{u}_{a,T}^* \end{bmatrix}.$$

Lösung der Randwertaufgabe

Die Steuerfolge \mathbf{u}_{Φ}^* kann nach der Transformation des Systems in die E/A-Normalform und unter Verwendung der Ansatzfunktionen (7.11) bestimmt werden. Dabei ist zum einen zu beachten, dass bei Bildung der E/A-Normalform bzw. bei der Berechnung des relativen Grades und der nichtlinearen Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ das erweiterte System (7.15) mit dem neuen Eingangsvektor \mathbf{u} anstelle von \mathbf{u}_a verwendet werden muss. Zum

anderen gilt für die Parameter der Ansatzfunktion nun aufgrund des erweiterten Zustandsvektors

$$\mathbf{p}_k = (p_{k,1}, \dots, p_{k,q_k}), \quad \sum_{k=1}^m q_k = n.$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\mathbf{u}_\Psi^* = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{y}_1^*, \Psi_1(t, \mathbf{p}_1), \dots, \mathbf{y}_m^*, \Psi_m(t, \mathbf{p}_m), \boldsymbol{\eta}^*)$$

kann die zur Realisierung der Trajektorie benötigte Stellgröße berechnet werden. Aufgrund der zusätzlichen Stellratenbegrenzung erfolgt das Umplanen der Ansatzfunktion gemäß

$$\hat{\alpha}_k = \begin{cases} \Psi_k(t, \mathbf{p}_k), & \text{wenn } u_{\Psi,j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}], \\ & \wedge \dot{u}_{a,j} \in [v_{\min,j}, v_{\max,j}], \\ & \forall j = 1, \dots, m, \\ \alpha_k(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_m^*, \boldsymbol{\eta}^*, \hat{\mathbf{u}}), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zur Berechnung von $\dot{u}_{a,j}$ wird Gl. (7.14) herangezogen. Unter Verwendung der inversen E/A-Transformation

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{u}_a \end{bmatrix} = \boldsymbol{\phi}^{-1}([\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_m^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T)$$

kann \mathbf{u}_a ermittelt werden. Zusammen mit \mathbf{u}_Ψ^* lässt sich $\hat{\mathbf{u}}_a$ ermitteln und zum Umplanen der Ansatzfunktion nutzen.

Nun muss $\hat{\mathbf{u}}$ so berechnet werden, dass weder die Stellgrößen- noch die Stellratenbeschränkung verletzt wird. In einem ersten Schritt wird $\hat{\mathbf{u}}$, wie schon in [45], [46], [47] vorgeschlagen, so modifiziert, dass die Stellgrößenbegrenzung eingehalten wird, d.h.

$$\tilde{u}_j = \begin{cases} u_{\min,j}, & \text{wenn } u_{\Psi,j} < u_{\min,j}, \\ u_{\Psi,j}, & \text{wenn } u_{\Psi,j} \in [u_{\min,j}, u_{\max,j}], \\ u_{\max,j}, & \text{wenn } u_{\Psi,j} > u_{\max,j} \end{cases} \quad (7.16)$$

mit $j = 1, \dots, m$. Anschließend wird zusätzlich zur Vorgehensweise in [45], [46], [47] die Einhaltung der Stellratenbegrenzung überprüft. Dazu wird abhängig von $\tilde{\mathbf{u}}$ die modifizierte Steuerfunktion $\hat{\mathbf{u}}$ gemäß

$$\hat{u}_j = \begin{cases} v_{\min,j}/\tau_j + u_{a,j}, & \text{wenn } \dot{u}_{a,j} < v_{\min,j} \\ \tilde{u}_j, & \text{wenn } \dot{u}_{a,j} \in [v_{\min,j}, v_{\max,j}] \\ v_{\max,j}/\tau_j + u_{a,j}, & \text{wenn } \dot{u}_{a,j} > v_{\max,j} \end{cases} \quad (7.17)$$

berechnet. Schließlich kann das Stellsignal bestimmt werden, indem wiederum das Randwertproblem mit den $\hat{\alpha}_k$ -Funktionen in Abhängigkeit der Parameter \mathbf{p}_k gelöst wird.

Dabei ist zu beachten, dass für den Vorsteuerungsentwurf die Stellbegrenzungen angepasst werden müssen. Es gilt im vorliegenden Fall $-\kappa_{u,i}u_{\max,i} \leq u_{a,i}(t) \leq \kappa_{u,i}u_{\max,i}$ und $-\kappa_{v,i}v_{\max,i} \leq \dot{u}_{a,i}(t) \leq \kappa_{v,i}v_{\max,i}$ mit $i = \{1, 2, \dots, m\}$.

Bemerkung 7.1. Wird der Eingang \mathbf{u} des Aktormodells (2.5) gemäß Gl. (7.16) auf $\pm u_{\max,i}$ beschränkt, so wird nach einigen Iterationen der Matlab-Funktion `bvp4c` [79] auch der Aktorausgang beschränkt sein. Eine deutliche Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit lässt sich erzielen, wenn vor dem Umplanen gemäß Gl. (7.17) noch der Ausgang \mathbf{u}_a des Aktormodells hinsichtlich der Stellgröße beschränkt wird.

Bemerkung 7.2. In [47] werden neben Stellgrößenbegrenzungen auch Begrenzungen der Ausgangsgrößen berücksichtigt. Dies ist natürlich auch bei der vorgestellten Erweiterung möglich und kann in analoger Weise erfolgen.

7.3.6 Beispiel: Tailless Fighter Aircraft

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll die Leistungsfähigkeit der inversionsbasierten Vorsteuerung anhand des vereinfachten Modells (6.1) der McDonnell X-36 aus Abschnitt 6.1 erfolgen. Es unterliegt den Begrenzungen

$$|u_a| \leq 20\pi/180 \text{ rad}, \quad |\dot{u}_a| \leq 40\pi/180 \text{ rad/s}.$$

Es wird nun das Aktormodell (2.6) mit $\tau = 10$ verwendet und die Steuerungsfunktion mit Hilfe des zuvor beschriebenen inversionsbasierten Ansatzes berechnet. Dabei soll das System vom Arbeitspunkt $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$ nach $\mathbf{x}_s(T) = [15\pi/180 \text{ rad}, 15\pi/180 \text{ rad/s}]$ überführt werden, d.h., die Ausgangstrajektorie beginnt bei $y_s(0) = x_{s,2}(0) = 0$ und endet bei $y_s(T) = x_{s,2}(T) = 15\pi/180 \text{ rad/s}$. Als Übergangszeit wurde $T = 1,38 \text{ s}$ gewählt. Zum Vergleich wurde ebenfalls ein sättigender Führungsregler aus Abschnitt 6.4 für das Anfangsgebiet (6.21) entworfen. Die sich ergebenden Verläufe des Ausgangs $y_s = x_{s,2}$ sowie der zugehörigen wirksamen Stellgröße u_a und der Stellrate \dot{u}_a sind in Abbildung 7.3 dargestellt.

Es zeigt sich, dass mit Hilfe der inversionsbasierten Vorsteuerung eine schnellere Überführung des Systems in den gewünschten neuen Arbeitspunkt möglich ist. Dies gelingt durch eine bessere Ausnutzung des

verfügbaren Stellbereichs. Natürlich muss bei diesem Vergleich der Tatsache Rechnung getragen werden, dass an dieser Stelle eine Steuerung mit einer Regelung verglichen wird.

7.4 Entwurf der Regelung

Aufgrund der Tatsache, dass sich die Anfangszustände des Streckenmodells $\mathbf{x}_{s,v}(0)$ im Allgemeinen vom tatsächlichen Anfangszustand $\mathbf{x}_s(0)$ der Stre-

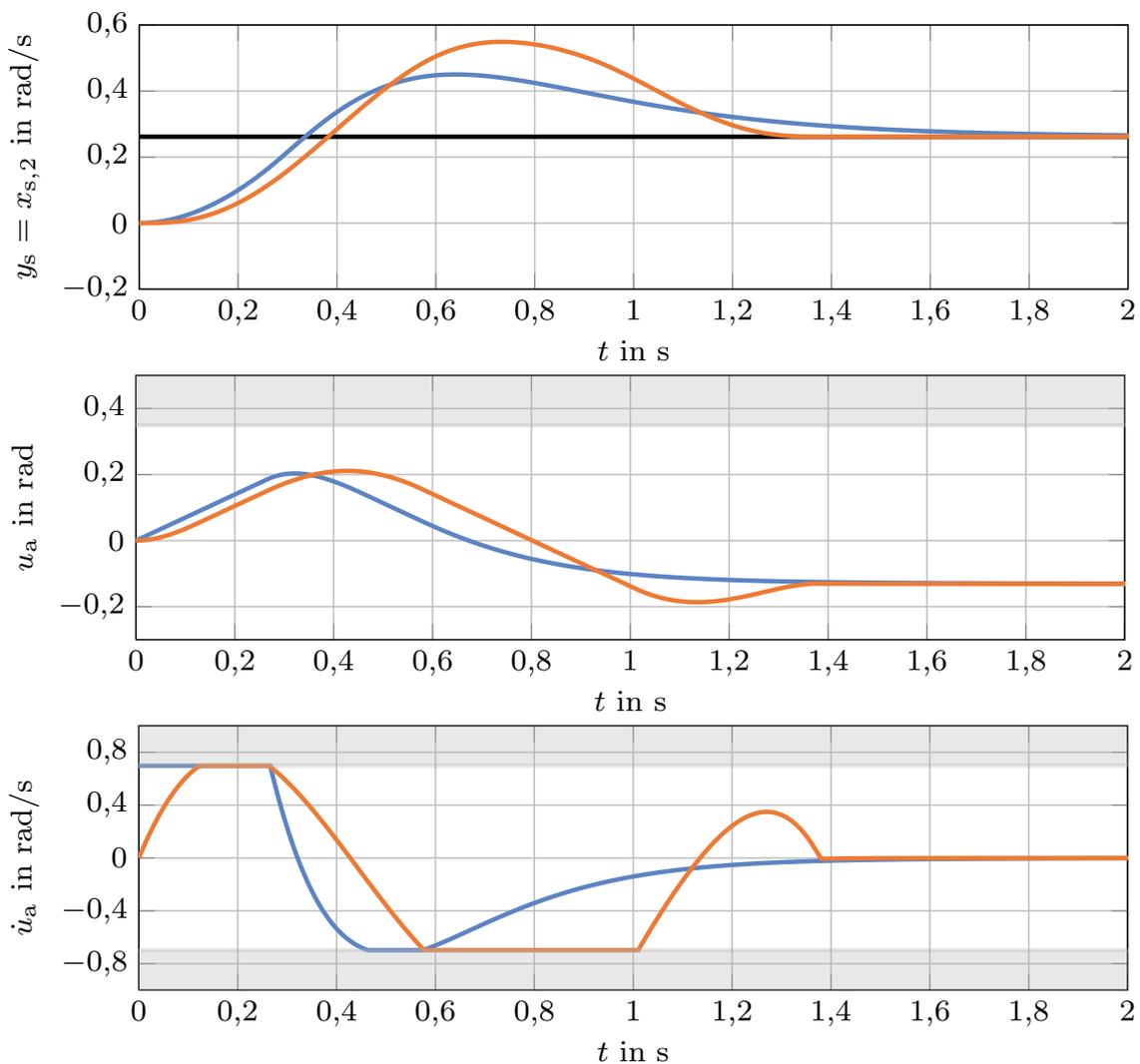


Abbildung 7.3: Vergleich der Verläufe der Pitchrate $y_s = x_{s,2}$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$ bei Verwendung der sättigenden Führungsregelung — und der inversionsbasierten Trajektorienplanung — für den angestrebten stationären Endwert $15\pi/180$ rad/s —. Darunter sind die Verläufe der wirksamen Stellgröße u_a und \dot{u}_a dargestellt.

cke unterscheiden und außerdem die reale Strecke Störeinflüssen unterliegt, bzw. nicht exakt dem in der Vorsteuerung verwendeten Modell entspricht, ist eine Regelung erforderlich. Bei deren Entwurf sind die Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen zu berücksichtigen. Im Falle linearer Systeme kann dazu auf die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren zurückgegriffen werden. Insbesondere bietet sich die in Kapitel 5 vorgestellte dynamische Ausgangsrückführung an, da ihr Regelalgorithmus nur die Kenntnis der Ausgangsgrößen des Systems erfordert. Um sie einsetzen zu können, werden im Folgenden Systeme mit linearer Dynamik betrachtet.

Es wird davon ausgegangen, dass die Matrizen \mathbf{A}_s , \mathbf{B}_s des Streckenmodells der Vorsteuerung mit den entsprechenden Matrizen des realen Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_a + \mathbf{E}_s \mathbf{w}, \\ \mathbf{y}_s &= \mathbf{C}_s \mathbf{x}_s\end{aligned}\quad (7.18)$$

übereinstimmen. Nun wird, wie in [111] vorgeschlagen, der Fehlerzustand $\mathbf{e}_x = \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{s,v}$ eingeführt. Die Berechnung der zeitlichen Ableitung von \mathbf{e}_x und Einsetzen der Differenzialgleichungen (7.3) und (7.18) liefert

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_s &= \dot{\mathbf{x}}_s - \dot{\mathbf{x}}_{s,v} \\ &= \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_s (\mathbf{u}_{a,v} + \mathbf{u}_{a,r}) + \mathbf{E}_s \mathbf{w} - \dot{\mathbf{x}}_{s,v}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\mathbf{x}_s = \mathbf{e}_s + \mathbf{x}_{s,v}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_s &= \mathbf{A}_s \mathbf{e}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,r} + \mathbf{E}_s \mathbf{w} + \underbrace{\mathbf{A}_s \mathbf{x}_{s,v} + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,v}}_{\dot{\mathbf{x}}_{s,v}} - \dot{\mathbf{x}}_{s,v} \\ &= \mathbf{A}_s \mathbf{e}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{u}_{a,r} + \mathbf{E}_s \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Zum Entwurf einer Regelung wird wiederum das Aktormodell aus Abschnitt 2.2 verwendet. Es wird in den Regelalgorithmus integriert und lautet in diesem Fall

$$\dot{\mathbf{u}}_{a,r} = \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max,r}} \left(-\mathbf{T} \mathbf{u}_{a,r} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max,r}} (\mathbf{u}_r) \right)$$

mit $u_{\max,r,i} = (1 - \kappa_{u,i}) u_{\max,i}$ und $v_{\max,r,i} = (1 - \kappa_{v,i}) v_{\max,i}$. Unter Verwendung des Zustandsvektors $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_s^T \ \mathbf{u}_{a,r}^T]^T$ ergibt sich das erweiterte System

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max,r}} \left(\mathbf{K}_1 \mathbf{e} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max,r}} (\mathbf{u}_r) \right) + \mathbf{E} \mathbf{w} \quad (7.19)$$

mit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

und \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{K}_1 aus Gl. (2.8). Da bei vielen praktischen Anwendungen nicht der gesamte Zustandsvektor der realen Strecke messbar ist, sollen zur Regelung lediglich die Ausgangsgrößen der realen Strecke verwendet werden. Damit steht nur der messbare Fehler

$$\mathbf{e}_{y,s} = \mathbf{y}_s - \mathbf{y}_{s,v} = \mathbf{C}_s \mathbf{e}_s,$$

sowie der Aktorzustand $\mathbf{u}_{a,r}$ als Information für den Regelalgorithmus zur Verfügung. Demnach ist

$$\mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{y,s} \\ \mathbf{u}_{a,r} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{e} \quad (7.20)$$

mit

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

der zu verwendende Ausgang des Systems (7.19), wobei $\mathbf{e}_y \in \mathbb{R}^q$ mit $q = q_s + m$ gilt. Als Regelung bietet sich die in Kapitel 5 vorgestellte dynamische Ausgangsrückführung mit dem Regelgesetz

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{y} + \mathbf{E}_k \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{e} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u})), \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_* \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_* \mathbf{y} \end{cases}$$

aus Gl. (5.1) an. Da $\mathbf{K}_1 \mathbf{e} = -\mathbf{T} \mathbf{u}_a$ gilt, werden lediglich die messbaren Ausgangsgrößen des Systems zur Regelung verwendet. Analog zu der in Kapitel 5 beschriebenen Vorgehensweise wird zum Entwurf zunächst das erweiterte Gesamtsystem, bestehend aus dem erweiterten System (7.19) und dem Regler \mathcal{K} , mit dem Zustand $\mathbf{z}_e = [\mathbf{e}_y^T \mathbf{z}_k^T]^T$ gebildet. Die Aufgabe des Reglers \mathcal{K} ist nun, im Fall $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ die Ruhelage $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ zu stabilisieren und für $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ die strikte Invarianz des Gebietes

$$\mathcal{E}_e(\mathbf{P}) = \{ \mathbf{z}_e : \mathbf{z}_e^T \mathbf{P} \mathbf{z}_e \leq 1 \}$$

unter der Störung \mathbf{w} sicherzustellen. Dabei wird für die Störung \mathbf{w} angenommen, dass $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ mit \mathcal{W} entsprechend Gl. (5.30) gilt. Zum Entwurf der Regelung für das System (7.19) mit dem Ausgang (7.20) kann die in Abschnitt 5.6 beschriebene Methodik gewählt werden, wobei in diesem Fall lediglich \mathbf{x} durch \mathbf{e} , \mathbf{y} durch \mathbf{e}_y , \mathbf{u}_{\max} durch $\mathbf{u}_{\max,r}$ und \mathbf{v}_{\max} durch $\mathbf{v}_{\max,r}$ ersetzt werden müssen.

Stationäre Genauigkeit

Auch wenn durch den in Abschnitt 5.6 beschriebenen Reglerentwurf die Wirkung der Störung auf die Systemzustände unterdrückt wird, wird bei einer konstanten Störung \mathbf{w} im Allgemeinen eine bleibende Regelabweichung $\bar{\mathbf{e}}_{y,s} = \bar{\mathbf{y}}_s - \bar{\mathbf{y}}_{s,v} \neq \mathbf{0}$ auftreten. Diese bleibende Regelabweichung kann durch Hinzufügen von Integrierern

$$\dot{q}_i = e_{y,s,i} = \mathbf{c}_{s,i}^T \mathbf{e}_s$$

beseitigt werden. Dazu wird das System (7.19) nochmals erweitert und der modifizierte Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{e}} = [\mathbf{e}_s^T \mathbf{q}^T \mathbf{u}_{a,r}^T]^T$ mit $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}_q \mathbf{e}_s$ verwendet. Die Matrix \mathbf{C}_q setzt sich dabei aus den Zeilen von \mathbf{C}_s zusammen, welche mit den Ausgangsgrößen korrespondieren, die stationär ausgeregelt werden sollen.

Es ergibt sich dann das neue erweiterte System

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{B}} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max,r}} \left(\tilde{\mathbf{K}}_1 \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max,r}} (\mathbf{u}_r) \right) + \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{w} \quad (7.21)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} & \mathbf{B}_s \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{T}]$$

und dem neuen Ausgang

$$\mathbf{e}_y = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{e}}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Unter Verwendung der modifizierten Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ und $\tilde{\mathbf{C}}$ anstelle von \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} kann der oben beschriebene Entwurf durchgeführt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, dass sich auch die Ordnung der dynamischen Ausgangsrückführung um die Anzahl der hinzugefügten Integrierer erhöht.

7.4.1 Variable Aufteilung der Stellrate

Die Aufteilung der Stellgröße und Stellrate zwischen Vorsteuerung und Regelung in Gl. (7.1) bzw. (7.2) bringt eine gewisse Konservativität in das

Verfahren ein. Zumindest im Falle der Stellratenbegrenzung kann diese jedoch abgemildert werden.

Die Aufteilung der Stellrate in Gl. (7.2) wurde so gewählt, dass für $\dot{u}_{a,i} = \dot{u}_{a,v,i} + \dot{u}_{a,r,i}$ stets $|\dot{u}_{a,i}| \leq v_{\max,i}$ sichergestellt ist. Diese Wahl garantiert, dass selbst im ungünstigsten Fall, wenn $|\dot{u}_{a,v,i}| = \kappa_{v,i} v_{\max,i}$ ist, die Stellratenbegrenzung eingehalten wird. Im Betrieb der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung wird aber zumeist der Fall $|\dot{u}_{a,v,i}| < \kappa_{v,i} v_{\max,i}$ vorliegen, zumal bei Erreichen des gewünschten stationären Zustands $\bar{\mathbf{x}}_v$ stets $\dot{\mathbf{u}}_{a,v} = \mathbf{0}$ gilt. Eine effektivere Aufteilung ergibt sich also, wenn die Stellratenbegrenzung der Regelung in Abhängigkeit von der momentan genutzten Stellrate $\dot{\mathbf{u}}_{a,v}$ der Vorsteuerung gewählt wird. Es gilt dann

$$v_{\max,r,i}(t) = \begin{cases} v_{\max,i} & \text{falls } \dot{u}_{a,r,i}(t) \leq 0, \\ v_{\max,i} - |\dot{u}_{a,v,i}(t)| & \text{falls } \dot{u}_{a,r,i}(t) > 0 \end{cases}$$

und

$$v_{\min,r,i}(t) = \begin{cases} -v_{\max,i} & \text{falls } \dot{u}_{a,r,i}(t) \geq 0, \\ -(v_{\max,i} - |\dot{u}_{a,v,i}(t)|) & \text{falls } \dot{u}_{a,r,i}(t) < 0. \end{cases}$$

Aufgrund der Auslegung der Vorsteuerung auf die Begrenzungen (7.1) gilt stets $v_{\min,r,i}(t) \leq -(1 - \kappa_{v,i})v_{\max,i}$ und $v_{\max,r,i}(t) \geq (1 - \kappa_{v,i})v_{\max,i}$. Das folgende Lemma bildet die Grundlage für eine effizientere und variable Aufteilung der verfügbaren Stellrate auf Basis der zuvor angegebenen zeitvariablen Beschränkungen.

Lemma 7.1. *Gegeben seien das System*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{[\mathbf{v}_{\min}(t) \ \mathbf{v}_{\max}(t)]} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})) + \mathbf{E}\mathbf{w}$$

mit $\mathbf{v}_{\min}(t) \leq \mathbf{v}_{\min} = -\mathbf{v}_{\max}$, $\mathbf{v}_{\max}(t) \geq \mathbf{v}_{\max}$ und $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ sowie das Gebiet $\mathcal{E}_e(\mathbf{P})$. Falls das Gebiet $\mathcal{E}_e(\mathbf{P})$ strikt invariant für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})) + \mathbf{E}\mathbf{w}$$

unter der dynamischen Ausgangsrückführung \mathcal{K} ist, so ist es ebenfalls strikt invariant für das System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{[\mathbf{v}_{\min}(t) \ \mathbf{v}_{\max}(t)]} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{u})) + \mathbf{E}\mathbf{w}$$

bei Verwendung der dynamischen Ausgangsrückführung \mathcal{K} .

Beweis. Der Beweis von Lemma 7.1 ergibt sich als eine direkte Konsequenz aus Satz 5.3 bzw. Lemma A.1. Für die virtuellen, dynamischen Hilfsregler \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 gilt $\mathcal{E}_e(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ und da des Weiteren $\mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max},r}(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{L}_{[\mathbf{v}_{\min}(t) \ \mathbf{v}_{\max}(t)]}(\mathcal{H}_1)$ gilt, ist offensichtlich auch mit zeitvariablen Begrenzungen die Bedingung $\mathcal{E}_e(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{V}_{[\mathbf{v}_{\min}(t) \ \mathbf{v}_{\max}(t)]}(t)}}(\mathcal{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathcal{H}_2)$ sichergestellt. Der Rest des Beweises kann analog zum Beweis von Satz 5.3 bzw. Lemma A.1 erfolgen. \square

Auf Basis von Lemma 7.1 kann die Regelung also mit den Stellratenbegrenzungen $v_{\min,r,i}(t)$ bzw. $v_{\max,r,i}(t)$ anstelle der Begrenzungen (7.1) betrieben werden. Gemäß Lemma 7.1 muss dazu die Voraussetzung erfüllt sein, dass der Reglerentwurf mit den Begrenzungen (7.1) erfolgt ist. Eine Vergrößerung der Menge möglicher Störungen \mathbf{w} bzw. des Gebietes möglicher Anfangszustände kann also auf diese Weise nicht erzielt werden.

Bemerkung 7.3. Es könnte die Vermutung aufkommen, dass zum Zwecke einer Verbesserung der Aufteilung der Stellgröße eine analoge Vorgehensweise möglich sei. Leider ist dies jedoch nicht der Fall. Die Ursache hierfür liegt darin begründet, dass $\mathbf{u}_{a,r}$ als ein Zustand des erweiterten Systems (7.19) auftritt. Somit wird $\mathbf{u}_{a,r}$ zusätzlich durch den Ellipsoid $\mathcal{E}_e(\mathbf{P})$ beschränkt. Eine variable Aufteilung mit $u_{\max,r,i} \geq (1 - \kappa_{u,i})u_{\max,i}$ bzw. $u_{\min,r,i} \leq -(1 - \kappa_{u,i})u_{\max,i}$ könnte demnach zu einem Zustand $\mathbf{u}_{a,r}$ führen, der nicht im Ellipsoid $\mathcal{E}_e(\mathbf{P})$ enthalten ist. Dann aber wäre die strikte Invarianz von $\mathcal{E}_e(\mathbf{P})$ nicht länger gewährleistet.

7.5 Beispiel: Tailless Fighter Aircraft

Als Beispielsystem wird zunächst nochmals das vereinfachte Modell der McDonnell X-36 aus Abschnitt 6.1 verwendet, jedoch wird hier eine zusätzliche Störung w angenommen, die auf das Modell wirkt. Das System mit Störung lautet dann

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} u_A + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} w.$$

Dabei wird angenommen, die Störung sei begrenzt auf $|w| \leq 8\pi/180\text{rad}$. Bei der Aufteilung der Stellgröße und Stellrate wird ein gutes Führungsverhalten angestrebt. Daher wird $\kappa_u = \kappa_v = 0,7$ gewählt. Im Folgenden werden die beiden zuvor vorgestellten Vorsteuerungskonzepte

miteinander verglichen. Dazu wird zunächst die modellbasierte Vorsteuerung entworfen. Es wird $\tau = 5$ und $\beta = 5$ und

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : |x_{s,1}| \leq \frac{10}{180} \pi \text{rad}, |x_{s,2}| \leq \frac{20}{180} \pi \text{rad/s} \right\}$$

als Gebiet möglicher Anfangszustände gewählt. Außerdem wird der Anfangszustand des Aktormodells zu null gesetzt, d.h., es gilt $u_{a,v}(0) = 0$. Obwohl der Anfangszustand für das Modell der Vorsteuerung prinzipiell beliebig gewählt werden kann, ist diese Vorgabe sinnvoll, da mit Hilfe von \mathcal{X}_0 auch die Menge der erreichbaren Referenzzustände beeinflusst werden kann. Somit kann der sättigende Führungsregler, wie in Abschnitt 6.4.3 beschrieben, entworfen werden. Zur Implementierung der Vorsteuerung wird für das Streckenmodell $\mathbf{x}_{s,v}(0) = \mathbf{0}$ als Anfangszustand verwendet.

Der Entwurf der Vorsteuerung mittels Trajektorienplanung erfolgt, wie in Abschnitt 7.3 beschrieben, für einen Arbeitspunktwechsel von der Ruhelage $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ nach $\mathbf{x}(T) = [15\pi/180 \text{ rad}, 15\pi/180 \text{ rad/s}]$ mit einer Übergangszeit von $T = 1,625 \text{ s}$. Aus der Lösung des Randwertproblems ergibt sich dann die Steuerfunktion $u_{a,v}(t)$.

Unabhängig davon, welche Vorsteuerung implementiert wird, muss der Anfangszustand der realen Strecke als unbekannt angenommen werden, d.h., der für die Vorsteuerung angesetzte Anfangszustand wird sich vom Anfangszustand der realen Strecke im Allgemeinen unterscheiden. Für den hier durchgeführten Entwurf wird von der Menge $1/3 \cdot \mathcal{X}_0$ möglicher Anfangszustände der Strecke ausgegangen. Diese Abweichung wird mit Hilfe der dynamischen Ausgangsrückführung aus Abschnitt 5.6 kompensiert. Außerdem dient sie dazu, die Einwirkungen von Störungen auf das Gesamtsystem zu minimieren. Zum Entwurf der dynamischen Ausgangsrückführung wurde das Optimierungsproblem (5.43) mit $\eta = 0,0195$ gelöst.

Abbildung 7.4 zeigt den Verlauf der Ausgangsgröße $y_s = x_{s,2}$, sowie der wirksamen Stellgröße u_a und der Stellrate \dot{u}_a für eine Anfangsauslenkung der realen Strecke von $\mathbf{x}_s(0) = -[10\pi/(3 \cdot 180) \text{ rad}, 20\pi/(3 \cdot 180) \text{ rad/s}]^T$ und das konstante Führungssignal $r = 15\pi/180 \text{ rad/s}$. Bei $t = 5 \text{ s}$ wird die konstante Störung $w = 8\pi/180 \text{ rad/s}$ auf das System aufgeschaltet. Die Ausgangsrückführung ist offensichtlich in der Lage, die unterschiedlichen Anfangszustände von Vorsteuerungsmodell und realer Strecke zu kompensieren. Dabei wird der Stellbereich gut ausgenutzt und die Stellrate $\dot{u}_a = \dot{u}_{a,v} + \dot{u}_{a,r}$ sättigt. Trotz der auftretenden Störungen bleibt der Zustand beschränkt, jedoch verbleibt eine kleine aber bleibende Regelabweichung.

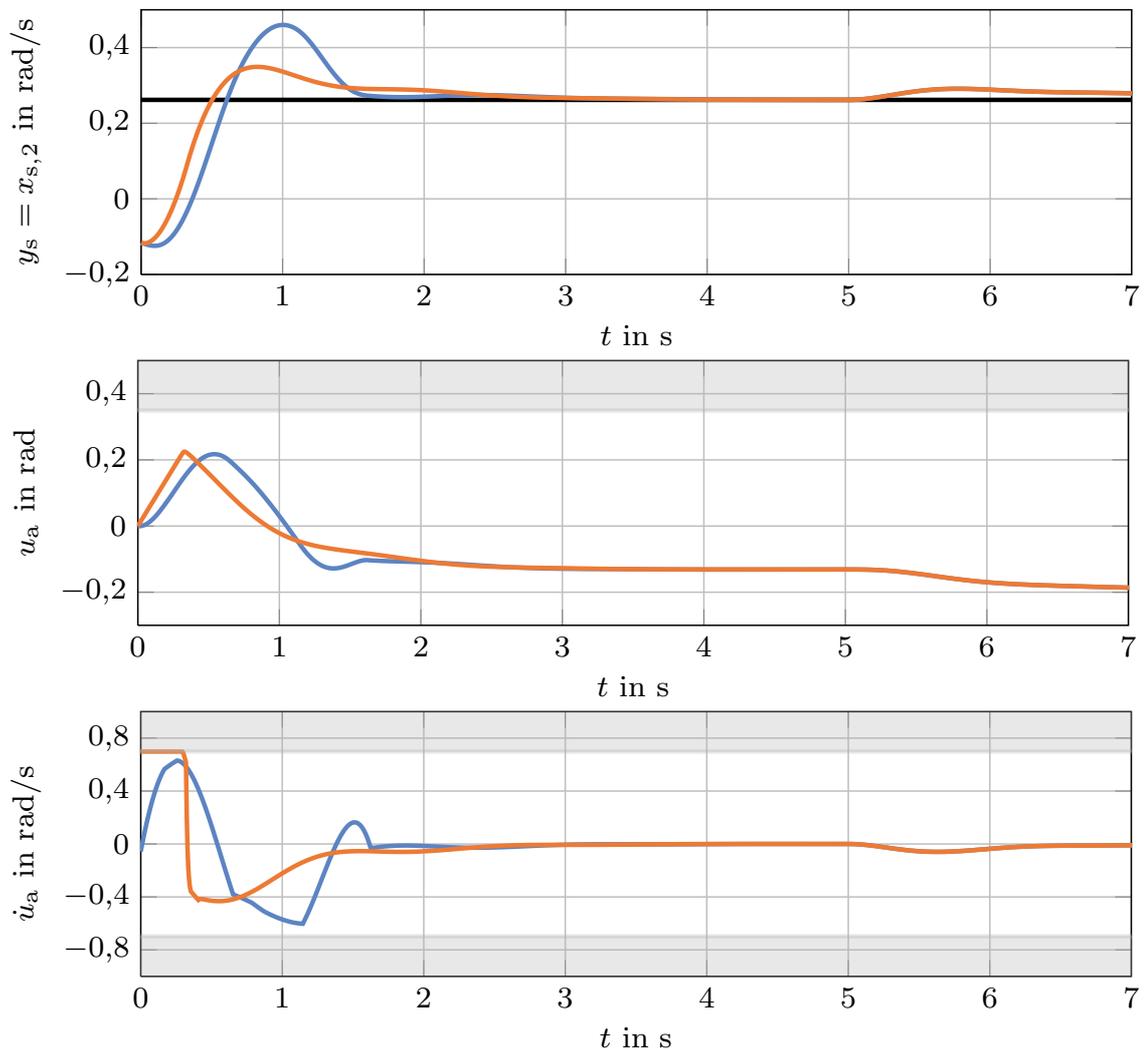


Abbildung 7.4: Vergleich der Verläufe der Pitchrate $y_s = x_{s,2}$ für eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung mit modellbasierter Vorsteuerung — und mit der inversionsbasierten Trajektorienplanung —. Der Anfangszustand der realen Strecke ist $\mathbf{x}_s(0) = -[10\pi/(3 \cdot 180) \text{ rad}, 20\pi/(3 \cdot 180) \text{ rad/s}]$ und es wird der stationäre Endwert $r = 15\pi/180 \text{ rad/s}$ — angestrebt (oben). Bei $t = 5 \text{ s}$ wird ein konstantes Störsignal $w = 8\pi/180$ aufgeschaltet. Die Verläufe der wirksamen Stellgröße u_a und der Stellrate \dot{u}_a sind ebenfalls dargestellt (unten).

7.6 Beispiel: Space-Shuttle

Als zweites Beispiel wird das Space-Shuttle aus Abschnitt 4.7 aufgegriffen. Auch hier wird ein Störeingriff hinzugefügt:

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \begin{bmatrix} -0,095 & 0,141 & -0,990 & 0,036 \\ -3,595 & -0,428 & 0,280 & 0 \\ 0,395 & -0,013 & -0,081 & 0 \\ 0 & 1 & -0,141 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_s + \begin{bmatrix} -0,012 & 0,010 \\ 6,571 & 1,256 \\ 0,378 & -0,256 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}_a + \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \\ -0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \\ 0,3 & -0,2 \end{bmatrix} \mathbf{w}.$$

Dabei wird angenommen, dass die Menge möglicher Störungen mit Hilfe des konvexen Polyeders

$$\mathcal{W}_0 = \left\{ \mathbf{w} : |w_1| \leq \frac{5}{180}\pi, |w_2| \leq \frac{5}{180}\pi \right\}$$

beschrieben werden kann. Eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung soll nun verwendet werden, um die Ausgangsgrößen $y_{s,1} = x_{s,3}$ und $y_{s,2} = x_{s,4}$, d.h., die Gierrate und den Rollwinkel zu beeinflussen. Die Aufteilung der Stellgröße bzw. Stellrate erfolgt wiederum unter dem Fokus eines guten Führungsverhaltens mit $\kappa_{u,i} = \kappa_{v,i} = 0,6$ für $i = 1,2$.

Zum Entwurf der modellbasierten Vorsteuerung wird das Gebiet

$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x}_s : |x_{s,1}| \leq \frac{10\pi}{180} \text{ rad}, |x_{s,2}| \leq \frac{10\pi}{180} \text{ rad/s}, \right. \\ \left. |x_{s,3}| \leq \frac{10\pi}{180} \text{ rad/s}, |x_{s,4}| \leq \frac{60\pi}{180} \text{ rad} \right\}$$

verwendet. Seine Wahl beeinflusst die Menge erreichbarer Referenzzustände. Auch in diesem Beispiel wird der Anfangszustand des Aktormodells zu null gesetzt, es gilt also $\mathbf{u}_{a,v}(0) = \mathbf{0}$. Zur Implementierung der Vorsteuerung wird wie schon im vorigen Beispiel vom Anfangszustand $\mathbf{x}_v(0) = \mathbf{0}$ des Streckenmodells ausgegangen.

Der Entwurf der inversionsbasierten Vorsteuerung erfolgt für die Randbedingungen

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}, \\ \bar{\mathbf{x}}(T) = \tilde{\mathbf{S}} \cdot [0, 0, 0, 0, 55\pi/180 \text{ rad}, 2,5\pi/180 \text{ rad/s}]^T$$

und eine Übergangszeit von $T = 4,5$ s. Dabei ist die Matrix $\tilde{\mathbf{S}}$ in Gl. (6.6) gegeben.

Die dynamische Ausgangsrückführung dient nun wiederum dazu, Anfangszustände $\mathbf{x}_s(0) \neq \mathbf{0}$ der realen Strecke sowie die Auswirkungen der Störung \mathbf{w} zu kompensieren. Zum Entwurf wird von der Menge $1/3 \cdot \mathcal{X}_0$ möglicher Anfangszustände der Strecke ausgegangen. Um die gewünschte Gierrate $y_{s,1}$ stationär genau auszuregeln, wird in diesem Fall der Integrierer

$$\dot{q} = y_{s,1} - y_{s,v,1} = \mathbf{c}_{s,1}^T \mathbf{e}$$

hinzugefügt und der Reglerentwurf für das System (7.21) mit $\mathbf{c}_q^T = \mathbf{c}_{s,1}^T$ durchgeführt. Dazu wurde diesmal das Optimierungsproblem (5.43) mit $\eta = 0,59$ gelöst.

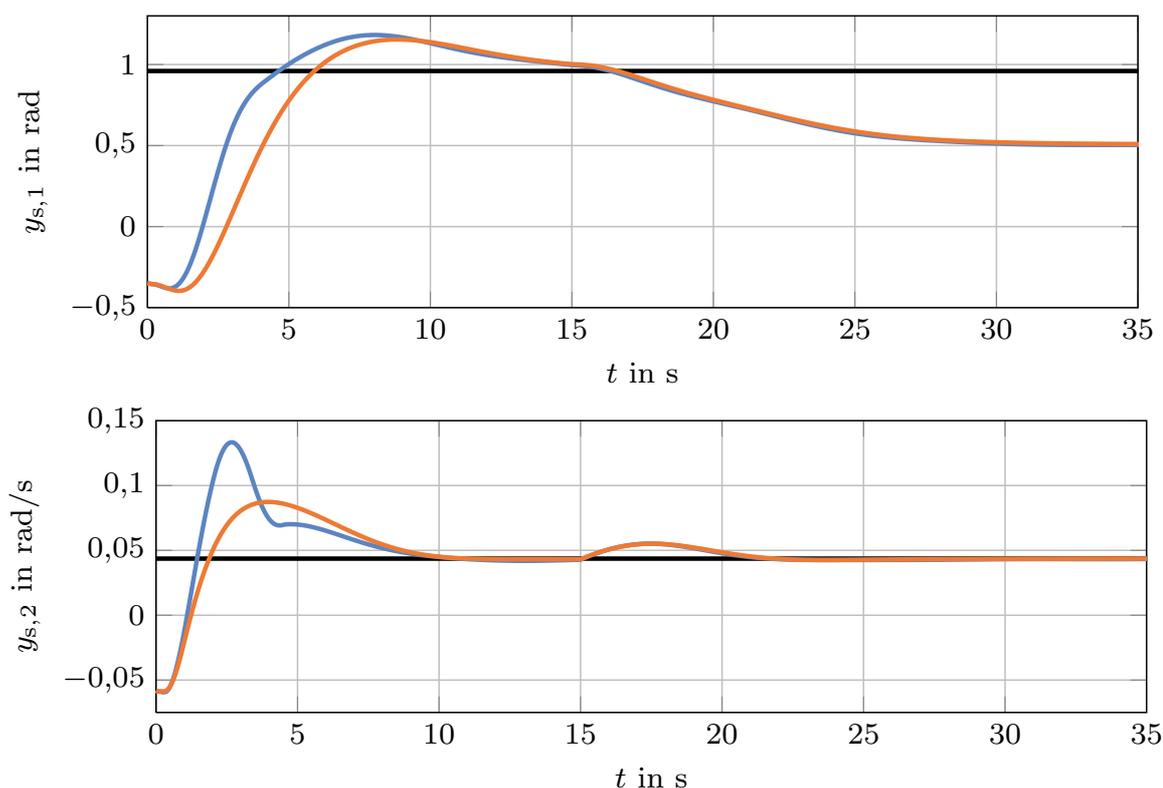


Abbildung 7.5: Vergleich der Verläufe des Rollwinkels $y_{s,1}$ und der Gierrate $y_{s,2}$ für eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung mit modellbasierter Vorsteuerung — und mit der inversionsbasierten Trajektorienplanung —. Der Anfangszustand der realen Strecke ist $\mathbf{x}_{s,0} = [-10/(3 \cdot 180) \text{ rad}, -10/(3 \cdot 180) \text{ rad/s}, -10/(3 \cdot 180) \text{ rad/s}, -20/(180) \text{ rad}]^T$ und es wird der stationäre Endwert $\bar{\mathbf{r}} = [55\pi/180 \text{ rad}, 2,5\pi/180 \text{ rad/s}]^T$ — angestrebt. Bei $t = 15$ s wird eine konstante Störung von $\mathbf{w} = [5\pi/180, 5\pi/180]^T$ aufgeschaltet.

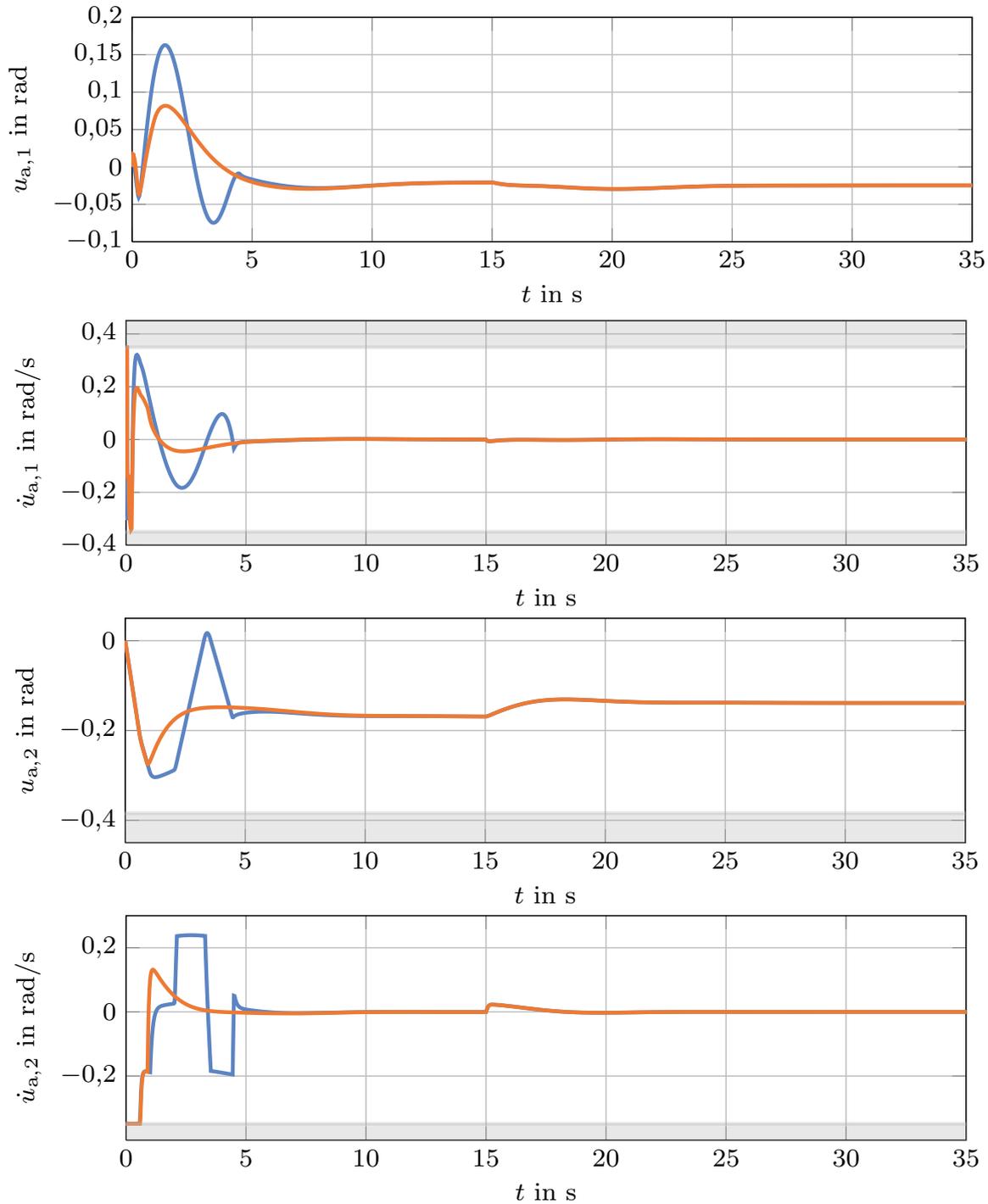


Abbildung 7.6: Vergleich der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung bei Verwendung der modellbasierten Vorsteuerung — und der inversionsbasierten Trajektorienplanung —. Gezeigt sind die Verläufe der wirksamen Stellgrößen $u_{a,1}$, $u_{a,2}$ und der Stellraten $\dot{u}_{a,1}$, $\dot{u}_{a,2}$ für den Anfangszustand $\mathbf{x}_{s,0} = [-10/(3 \cdot 180) \text{ rad}, -10/(3 \cdot 180) \text{ rad/s}, -10/(3 \cdot 180) \text{ rad/s}, -20/(180) \text{ rad}]^T$ und einen gewünschten stationären Endwert $\bar{\mathbf{r}} = [55\pi/180 \text{ rad}, 2,5\pi/180 \text{ rad/s}]^T$.

Abbildung 7.5 zeigt den Verlauf der Ausgangsgrößen des Systems. Dabei wurde bei $t = 15\text{s}$ eine konstante Störung von $\mathbf{w} = [5\pi/180, 5\pi/180]^T$ eingeschaltet. Abbildung 7.6 zeigt die zugehörigen Verläufe der wirksamen Stellgröße \mathbf{u}_a sowie der Stellrate $\dot{\mathbf{u}}_a$. Dabei ist deutlich ersichtlich, dass bei Verwendung einer Vorsteuerung mit Trajektorienplanung der Stellbereich besser ausgenutzt wird, was bzgl. $y_{s,1}$ zu einer kürzeren Anregelzeit führt. Im Falle des zweiten Ausgangs $y_{s,2}$ bringt die Verwendung der inversionsbasierten Vorsteuerung jedoch keinen Vorteil. Stattdessen weist der Verlauf hier ein deutlich ausgeprägteres Überschwingen auf. Dieser Vorteil ist abhängig vom Anfangszustand der Strecke. Im Falle eines Anfangszustands von $\mathbf{x}_s(0) = \mathbf{0}$ lassen sich, wie im Beispiel aus Abschnitt (7.3.6) gezeigt, mit der inversionsbasierten Vorsteuerung im Allgemeinen kürzere Ausregelzeiten erzielen.

7.7 Fazit

In diesem Kapitel wurde eine Zwei-Freiheitsgrade-Struktur nach Horowitz [59] verwendet, um ein System von einem Arbeitspunkt in einen anderen Arbeitspunkt zu überführen. Dabei ist lediglich die Messung der Ausgangsgrößen des Systems erforderlich. Der Ansatz erlaubt es, Führungs- und Störverhalten des geschlossenen Regelkreises weitestgehend getrennt voneinander zu berücksichtigen. Während zur Realisierung der modellbasierten Vorsteuerung auf den sättigenden Führungsregler aus Kapitel 6 zurückgegriffen werden kann, wird zur Realisierung der inversionsbasierten Vorsteuerung ein Ansatz von Graichen [47] für Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen aufgegriffen und auf den Fall zusätzlicher Stellratenbegrenzungen erweitert. Die Bestimmung des Steuersignals erfordert die Lösung eines Zwei-Punkt Randwertproblems und wird numerisch durchgeführt.

Zur Regelung findet die dynamische Ausgangsrückführung aus Abschnitt 5 Verwendung. Sie dient dazu, neben etwaigen Anfangszuständen $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ der realen Strecke auch den Einfluss von Störungen zu unterdrücken. Prinzipiell ist auch die Verwendung anderer Regelungen, beispielsweise der in Kapitel 4 erläuterten weich strukturvariablen Regelung, denkbar. Die in diesem Kapitel vorgestellte Zwei-Freiheitsgrade-Regelung unter Verwendung der Vorsteuerung mittels Trajektorienplanung und der weich strukturvariablen Regelung aus Kapitel 4 wurde in [70] veröffentlicht.

Unabhängig von der verwendeten Vorsteuerung bzw. Regelung müssen

die verfügbare Stellgröße und Stellrate zwischen Vorsteuerung und Regelung aufgeteilt werden. Durch eine variable Aufteilung der Stellrate kann dieser Nachteil jedoch abgemildert werden.

8 Zusammenfassung

Zielsetzung dieser Arbeit war die Entwicklung neuer bzw. die Erweiterung bestehender Regelverfahren für Systeme unter simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen. Nach der Konkretisierung der Aufgabenstellung in Kapitel 1 wurden in Kapitel 2 zunächst die für die Arbeit wesentlichen Grundlagen erläutert. Der Fokus lag dabei vor allem auf der Modellierung einer simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzung mittels eines Aktormodells. Anschließend erfolgte die Erläuterung verschiedener, bereits bestehender Regelungsverfahren für diese Systemklasse. Des Weiteren wurden Ansätze für Systeme unter ausschließlichen Stellgrößenbegrenzungen erläutert, welche im Zuge der Arbeit auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen hin erweitert wurden. Den Abschluß des Kapitels bildet eine Einführung in die konvexe Optimierung, die für den Entwurf der entwickelten Verfahren wesentlich ist.

In Kapitel 3 wurden zunächst einige relevante Grundbegriffe erläutert. Anschließend wurden verschiedene Stabilitätssätze eingeführt, auf deren Basis lineare Zustandsregler sowie lineare Sättigungsregler entworfen werden können. Den Abschluss des Kapitels bildet ein Stabilitätssatz für nicht-lineare Systeme unter nichtlinearen, sättigenden Zustandsrückführungen, welcher bereits ein erstes Ergebnis dieser Arbeit darstellt.

Ansätze zur Stabilisierung konstanter Ruhelagen wurden in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellt. Die weich strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen in Kapitel 4 stellt seine Erweiterung des ursprünglichen Ansatzes aus [1], [4] dar. Unter Verwendung einer modifizierten Auswahlstrategie aus [67] konnte eine sättigende weich strukturvariable Regelung für allgemeine MIMO-Systeme unter simultanen Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen entwickelt werden. Diese Regelung weist eine sehr gute Regelgüte auf, erfordert jedoch die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors. Die Stabilisierung eines Systems nur auf Basis der Ausgangsgrößen gelingt mit der in Kapitel 5 vorgestellten Ausgangsrückführung. Dieser Ansatz stellt eine Erweiterung der sättigenden dynamischen Ausgangsrückführung aus [84] auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen dar. Außerdem wurden zusätzlich zum ursprünglichen Ansatz aus [84] auch Störeinflüsse berücksichtigt. Die Ausgangsrückführung er-

zielt eine hohe Regelgüte, indem sättigende Stellgrößen und Stellraten zugelassen sind. Zum Entwurf beider Regelverfahren, sowohl der weich strukturvariablen Regelung als auch der Ausgangsrückführung, konnte ein konvexes Optimierungsproblem angegeben werden.

Während in den Kapiteln 4 und 5 die Aufgabe der Regelung in der Stabilisierung einer konstanten Ruhelage lag, widmeten sich die Kapitel 6 und 7 der Überführung des Systems zwischen Ruhelagen. Zur Herleitung einer sättigenden Festwert-Führungsregelung in Kapitel 6 wurde der Ansatz für lineare Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung aus [17] aufgegriffen. Dieser Ansatz wurde auf den Fall zusätzlicher Stellratenbegrenzungen erweitert. Eine sehr gute Regelgüte konnte dadurch erzielt werden, dass im Gegensatz zum Ansatz aus [17] sättigende Stellsignale zugelassen wurden. Während klassische Ansätze auf einer Transformation des Systems beruhen und zu einer Abhängigkeit zwischen der Menge der Anfangsauslenkungen und der Menge stabilisierbarer Ruhelagen führen, ist zur Parametrierung des sättigenden Führungsreglers lediglich der Entwurf eines stabilisierenden, linearen Sättigungsreglers für das Originalsystem erforderlich. Dies kann mittels konvexer Optimierung auf einfache Weise erfolgen. Außerdem tritt dabei der Nachteil einer Abhängigkeit zwischen Anfangszuständen und stabilisierbaren Ruhelagen nicht auf. Im zweiten Teil von Kapitel 6 konnte der Ansatz auf eine bestimmte Klasse nichtlinearer Systeme erweitert werden. Dazu wird ein Ansatz zur Stabilisierung konstanter Ruhelagen für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung aus [50], [51] aufgegriffen und auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen erweitert. Zur Approximation der dabei auftretenden zustandsabhängigen Stellbegrenzungen wurden Legendresche Polynome verwendet. Durch Verwendung von SOS-Zerlegungen konnten konvexe Optimierungsprobleme angegeben werden, welche einen effizienten Entwurf erlauben.

Die Kombination einer Vorsteuerung mit der dynamischen Ausgangsrückführung im Rahmen einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur nach [59] in Kapitel 7 erlaubt die Überführung des Systems zwischen verschiedenen Ruhelagen unter Verwendung der Ausgangsgrößen des Systems. Zwar kann alternativ auch eine dynamische Ausgangsrückführung für ein entsprechend transformiertes System entworfen werden, jedoch erlaubt die Verwendung einer Zwei-Freiheitsgrade-Struktur eine weitestgehend getrennte Beeinflussung von Führungs- und Störverhalten. So kann die Menge möglicher Anfangsauslenkungen unabhängig von der Menge stabilisierbarer Ruhelagen angegeben werden. Zur Realisierung der Vorsteuerung wurden dabei zwei Ansätze verfolgt. Zunächst wurde eine mo-

dellbasierte Vorsteuerung vorgestellt, bei welcher ein Modell der Strecke mit dem Festwert-Führungsregler aus Kapitel 6 geregelt wird. Die vom Führungsregler generierte Stellgröße bildet dabei das Stellsignal der Vorsteuerung. Als alternativer Ansatz wurde der Vorsteuerungsentwurf mittels Trajektorienplanung aus [45], [46], [47] für Systeme unter ausschließlicher Stellgrößenbegrenzung auf zusätzliche Stellratenbegrenzungen hin erweitert. Zur Parametrierung der Vorsteuerung mittels Trajektorienplanung muss eine Randwertaufgabe gelöst werden. Sowohl mit der modellbasierten Vorsteuerung wie auch bei Verwendung der Trajektorienplanung konnte eine hohe Regelgüte erzielt werden.

Alle Verfahren nutzen die verfügbare Stellgröße und Stellrate aus und erlauben so kurze Ausregelzeiten. Dies wird anhand verschiedener Beispielsysteme demonstriert.

A Anhang

A.1 Lipschitz-Stetigkeit und Cauchy-Folge

Zum Beweis von Lemma 2.1 spielen die Eigenschaften von Cauchy-Folgen sowie die Lipschitz-Stetigkeit von Funktionen eine entscheidende Rolle. Daher werden diese Begriffe im Folgenden erläutert und es wird auf ihren Zusammenhang näher eingegangen.

Definition A.1. ([22]) Eine Menge \mathcal{S} mit einer globalen Metrik $d : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$, welche für zwei beliebige Punkte $x, y \in \mathcal{S}$ eine Distanz in Form einer nichtnegativen reellen Zahl angibt und die Eigenschaften

1. $d(x, y) = 0$, falls $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

aufweist, heißt metrischer Raum.

Definition A.2. ([22]) Falls für eine Funktion $f : D \rightarrow W$ eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in D$ gilt, so ist die Funktion Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante L .

Lipschitz-Stetigkeit bedeutet demnach, dass die Funktionswerte an zwei dicht beieinanderliegenden Stellen x und y ebenfalls dicht beieinander liegen müssen. Eine differenzierbare Funktion $f : D \rightarrow W$ ist auf dem Gebiet D Lipschitz-stetig, falls ihre Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in D$ endlich ist.

Definition A.3. ([22]) Sei X ein metrischer Raum mit der Metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in X$ heißt Cauchy-Folge, wenn es für alle $\epsilon > 0$ einen Index n_ϵ gibt, so dass für alle $n, m > n_\epsilon$

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

gilt.

Ist die verwendete Metrik $d(x,y)$ Lipschitz-stetig, so ist die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, wie beispielsweise in [96] gezeigt, eine Cauchy-Folge. Dies wird im Beweis zu Lemma 2.1 aufgegriffen, um zu zeigen, dass $u_{a,\tau}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu wird die Metrik $d(u_{a,\tau_1}, u_{a,\tau_2}) = \|u_{a,\tau_1} - u_{a,\tau_2}\|_{\infty}$ verwendet.

A.2 Duales Problem

Im Zusammenhang mit konvexen Optimierungsproblemen spielt das sogenannte duale Problem eine wichtige Rolle. Zur Erklärung eines dualen Problems wird zunächst das Optimierungsproblem

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{Minimiere}} \quad f_0(\mathbf{x}), \quad \text{u. d. B. d.} \quad (\text{A.1})$$

$$f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ betrachtet, welches im Folgenden als das primale Problem bezeichnet wird. Unter der Voraussetzung, dass die Menge \mathcal{X} zulässiger Lösungen nicht leer ist, können die Nebenbedingungen unter der Verwendung der Lagrange-Multiplikatoren in der Gütefunktion berücksichtigt werden. Es ergibt sich dann die Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}),$$

wobei die Faktoren λ_i die sogenannten Lagrange-Multiplikatoren sind. Das Minimum dieser Funktion über \mathbf{x} für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$

$$g(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \left(f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) \right)$$

wird als duale Funktion bezeichnet. Nach [140] hat diese duale Funktion die Eigenschaft, dass sie immer konkav ist, selbst wenn das primale Problem nicht konvex ist. Außerdem liefert sie die untere Grenze für das Optimum p^* des primalen Problems (A.1). Für beliebige $\lambda_i \geq 0$ mit $i = 1, \dots, m$ gilt $g(\boldsymbol{\lambda}) \leq p^*$. Die beste untere Grenze für p^* liefert schließlich das duale Problem

$$\underset{\boldsymbol{\lambda}}{\text{Maximiere}} \quad g(\boldsymbol{\lambda}), \quad \text{u. d. B. d.}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Da die Funktion $g(\boldsymbol{\lambda})$ immer konkav und die Maximierung von $g(\boldsymbol{\lambda})$ gleichbedeutend mit einer Minimierung von $-g(\boldsymbol{\lambda})$ ist, ist das duale Problem stets konvex unabhängig davon, ob das primale Problem konvex ist.

Im Folgenden soll nun der Begriff des dualen Problems auf LMI-Optimierungsprobleme übertragen werden. Dazu wird das Optimierungsproblem

$$\underset{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m}{\text{Minimiere}} \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \text{u. d. B. d} \quad (\text{A.2})$$

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}) \preceq 0, \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i$$

betrachtet. Zur Aufstellung der Lagrange-Funktion wird zunächst der folgende Satz aus [53] benötigt:

Satz A.1. ([53]) *Für eine symmetrische Matrix \mathbf{S} sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. \mathbf{S} ist positiv definit
2. $\text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{P}) \geq 0$ für alle $\mathbf{P} \succ 0$

Die Anwendung dieses Satzes liefert unmittelbar

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}) \preceq 0 \Leftrightarrow -\text{Tr}(\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{Z}) \leq 0, \quad \mathbf{Z} \succeq 0$$

mit $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Angewendet auf das Problem (A.2) ergibt sich damit die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \text{Tr}(\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{Z}) \\ &= \sum_{i=1}^m \text{Tr}(c_i x_i) - \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) - \sum_{i=1}^m \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z} x_i) \\ &= -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) + \sum_{i=1}^m (\text{Tr}(c_i x_i) - \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z} x_i)) \end{aligned}$$

Es gilt nun $\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z} x_i) = x_i \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z})$ und $\text{Tr}(c_i x_i) = \text{Tr}(c_i) x_i = c_i x_i$, woraus schließlich

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) = -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) + \sum_{i=1}^m (c_i - \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z})) x_i$$

folgt. Die duale Funktion lautet dann

$$g(\mathbf{Z}) = \inf_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) = -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) + \inf_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^m (c_i - \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z})) x_i.$$

Im Fall, dass $c_i \neq \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z})$ ist, ergibt sich für alle $\mathbf{Z} \geq 0$ das Infimum dieser Funktion über alle \mathbf{x} zu $-\infty$. Eine sinnvolle untere Grenze ergibt sich demnach nur im Fall $\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i$. Damit lautet das duale Problem zu (A.2)

$$\text{Maximiere}_{\mathbf{Z}} \quad -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}), \quad \text{u. d. B. d.}$$

$$\mathbf{Z} \succeq 0,$$

$$\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i, \quad \forall i = \{1, \dots, m\}.$$

A.3 Abklingrate sättigender Regler

Zur Optimierung der Konvergenzrate des Systems (2.7) unter der sättigenden Zustandsrückführung $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2 \mathbf{x}$ wird in Abschnitt 3.3 die Konvergenzrate des virtuellen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}$ optimiert. In diesem Abschnitt soll genauer erläutert werden, weshalb durch dieses Vorgehen auch die tatsächliche Konvergenzrate des geschlossenen Regelkreises positiv beeinflusst wird. Dazu wird zunächst die Konvergenzrate des Systems in Sättigung betrachtet:

$$\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x}) = \max \{ \alpha > 0 : \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{v_{\max}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{u_{\max}}(\mathbf{K}_2 \mathbf{x}))) < -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \}.$$

Da die Differentialgleichung des Aktormodells (2.5) mittels der Formulierung als Element einer konvexen Hülle

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \text{sat}_{v_{\max}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{u_{\max}}(\mathbf{K}_2 \mathbf{x})) \in \text{conv} \{ \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1 \mathbf{x}, \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{H}_2 \mathbf{x}, \mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{K}_2 \mathbf{x}) \}$$

mit $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ausgedrückt werden kann, gilt

$$\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x}) \in [\alpha_{\text{min}}, \alpha_{\text{max}}].$$

Darin ist $\alpha_{\text{min}} = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{\alpha(\mathbf{v})\}$ mit

$$\alpha(\mathbf{v}) = \max \{ \alpha > 0 : \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}) < -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} \}$$

und α_{max} entspricht der Lösung des Optimierungsproblems (3.22). Tritt keine Sättigung auf, so gilt $\alpha_{\text{sat}}(\mathbf{x}) = \alpha_{\text{max}}$. Die virtuellen Regler \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 , die sich aus der Optimierung ergeben, liegen an der Grenze des Lösungsgebietes, andernfalls wäre über die Variation von \mathbf{K}_2 eine Verbesserung von α_{max} möglich. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass α_{max} bzw. \mathbf{K}_2 nur zwei Bedingungen genügen muss: Zum einen muss Bedingung (3.21) erfüllt sein, zum anderen muss das System $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 + \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}$ eine gemeinsame Ljapunov-Funktion mit den Systemen $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2)\mathbf{x}$ besitzen. Demnach sind \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 und \mathbf{K}_2 über die Matrix \mathbf{P} verkoppelt und im Verlauf der Optimierung wird auch α_{min} in Richtung α_{max} geschoben. Dies geschieht so lange bis \mathbf{H}_1 und/oder \mathbf{H}_2 die Grenze des Lösungsgebietes erreichen, weshalb nicht nur α_{max} sondern auch α_{min} verbessert wird.

A.3.1 Sättigende weich strukturvariable Regelung

Die Optimierung der Abklingrate des virtuellen Systems (4.14) in Optimierungsproblem (4.17) führt auch zu einer Verbesserung der Abklingrate

$$\alpha(p, \mathbf{x}) = \max \{ \alpha > 0 : \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p) (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\text{max}}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\text{max}}}(-\mathbf{K}_2(p)\mathbf{x}))) < -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} \}$$

des gesättigten Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\text{max}}}(\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\text{max}}}(-\mathbf{K}_2(p)\mathbf{x})).$$

Um dies zu zeigen, werden zunächst die Sättigungsfunktionen in obiger Ungleichung außer Acht gelassen. Dann ist

$$\alpha(p) = p^{-1} \max \{ \alpha > 0 : \mathbf{R}_1 (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} - \mathbf{T}\mathbf{K}_2(1))) < -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} \}$$

die Abklingrate des ungesättigten Regelkreises

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_1 - \mathbf{BTK}_2(p)) \mathbf{x}.$$

Unter Verwendung der konvexen Hülle

$$\dot{\mathbf{u}}_a = \text{sat}_{v_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{u_{\max}} (-\mathbf{K}_2(p) \mathbf{x})) \in \text{conv} \{ \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, -\mathbf{H}_1(p) \mathbf{x}, \mathbf{K}_1 \mathbf{x} - \mathbf{TH}_2(p) \mathbf{x}, \mathbf{K}_1 \mathbf{x} - \mathbf{TK}_2(p) \mathbf{x}) \}$$

gilt demnach

$$\alpha(p, \mathbf{x}) \in p^{-1} [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$$

mit $\alpha_{\min} = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{ \alpha(\mathbf{v}) \}$ und

$$\alpha(\mathbf{v}) = \max \{ \alpha > 0 : \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 (\mathbf{Ax} + \mathbf{B} \mathbf{\Delta}(\mathbf{v}, -\mathbf{H}_1(1), \mathbf{K}_1 - \mathbf{TH}_2(1), \mathbf{K}_1 - \mathbf{TK}_2(1)) \mathbf{x}) < -\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} \}.$$

Die virtuellen Regler $\mathbf{H}_1(p)$ und $\mathbf{H}_2(p)$, deren Parameter sich aus der Optimierung ergeben, liegen an der Grenze des Lösungsgebietes, andernfalls wäre über die Variation der Parameter von $\mathbf{K}_2(p)$ eine Verbesserung von α_{\max} möglich. Im Verlauf der Optimierung wird somit α_{\min} in Richtung α_{\max} geschoben, wodurch auch die Abklingrate $\alpha(p, \mathbf{x})$ des gesättigten Regelkreises verbessert wird.

A.4 Eigenwertgebiete

Um beim Entwurf von Regelungen mit Hilfe der konvexen Optimierung Charakteristika wie die Überschwingweite und die Dämpfung beeinflussen zu können, erweist sich die Methode der Festlegung von Eigenwertgebieten als hilfreich. In [31] werden Nebenbedingungen in Form linearer Matrixungleichungen angegeben, die zur Beschränkung auf Eigenwertgebiete geeignet sind, wie sie in Abbildung A.1 dargestellt sind. Wie in [31] gezeigt, liegen die Eigenwerte eines geschlossenen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}$ innerhalb eines Kreises mit dem Radius ς und dem Mittelpunkt in $\mathbf{0}$, falls die LMI

$$\begin{bmatrix} -\varsigma \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{A}} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \hat{\mathbf{A}}^T & -\varsigma \mathbf{Q} \end{bmatrix} \prec 0$$

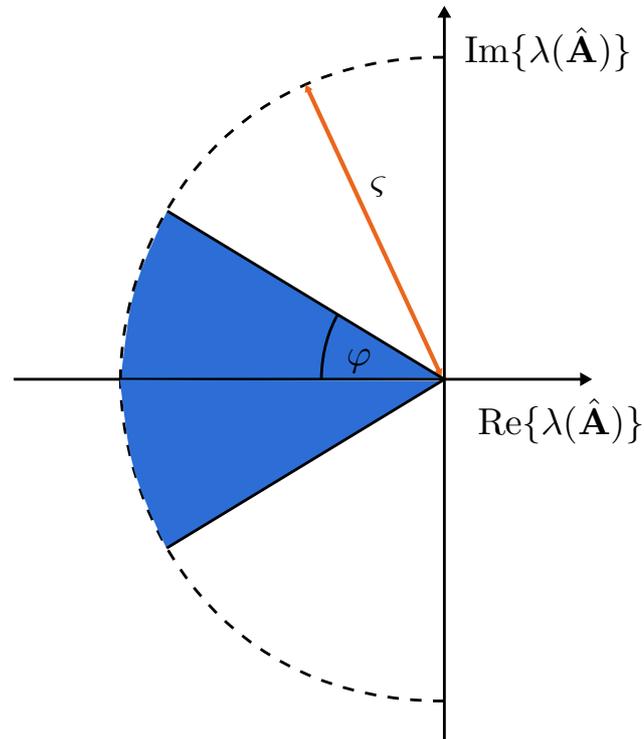


Abbildung A.1: Begrenzung der Eigenwerte eines geschlossenen Regelkreises $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}$ auf bestimmte Eigenwertgebiete

mit $\mathbf{Q} \succ 0$ erfüllt ist. Soll das Eigenwert-Gebiet außerdem auf einen bzgl. der reellen Achse symmetrischen Kreissektor spezifiziert durch den Winkel φ eingeschränkt werden, so wird die LMI

$$\begin{bmatrix} \sin(\varphi) \cdot (\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}^T) & \cos(\varphi) \cdot (\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}^T) \\ \cos(\varphi) \cdot (\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}^T - \hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}) & \sin(\varphi) \cdot (\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}^T) \end{bmatrix} \prec 0$$

hinzugefügt.

A.5 Strikte Invarianz

In diesem Abschnitt wird auf die strikte Invarianz eines Ellipsoids $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ bei Verwendung eines linearen Sättigungsreglers eingegangen. Die Ausführungen beruhen dabei auf [10] und das im Folgenden zitierte Lemma wird in Abschnitt 5.6 für den Reglerentwurf von sättigenden dynamischen Ausgangsrückführungen für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen verwendet. Ist die auftretende Störung auf die Menge

$$\mathcal{W} = \{\mathbf{w} : \mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{w} \leq 1\}$$

begrenzt, so gilt das folgende Lemma aus [10]:

Lemma A.1. ([10]) Gegeben sei die Strecke

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u})) + \mathbf{E}\mathbf{w}$$

mit der Störung $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, der Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$ und der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P})$. Falls ein positiver Skalar η sowie Matrizen $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren, so dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2)) \\ & + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{H}_1, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{H}_2, \mathbf{K}_1 + \mathbf{T}\mathbf{K}_2))^T \mathbf{P} + \frac{1}{\eta} \mathbf{P}\mathbf{E}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{E}^T\mathbf{P} + \eta\mathbf{P} < 0 \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ gelten und außerdem $\mathcal{E}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{v}_{\max}}(\mathbf{H}_1) \cap \mathcal{L}_{\mathbf{u}_{\max}}(\mathbf{H}_2)$ gilt, dann ist $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ ein strikt invariantes Gebiet des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \operatorname{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{T} \operatorname{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{u})) + \mathbf{E}\mathbf{w}$ mit dem Regler $\mathbf{u} = \mathbf{K}_2\mathbf{x}$.

A.6 Linearer Zustandsregler bei Stellgrößenbegrenzung

Im Folgenden soll kurz auf den Entwurf des nichtsättigenden linearen Zustandsreglers aus Abschnitt 6.1 eingegangen werden. Ein ähnlicher Entwurf wird auch in [63] gezeigt. Dazu wird das System (2.1)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s + \mathbf{b}_s u_a, \\ y_s &= \mathbf{c}_s^T \mathbf{x}_s \end{aligned}$$

mit einer einzelnen Eingangsgröße und mit der Stellgrößenbegrenzung $|u_a| \leq u_{\max}$ betrachtet. Diese Begrenzung wird durch eine einfache Sättigungsfunktion modelliert, so dass $u_a = \operatorname{sat}_{u_{\max}}(u)$ gilt. Unter Verwendung des Gebietes

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) = \{ \mathbf{x}_s : \mathbf{x}_s^T \mathbf{P} \mathbf{x}_s \leq 1 \}$$

und mit der Menge möglicher Anfangszustände \mathcal{X}_0 , die wiederum als konvexes Polyeder mit den N -Eckpunkten $\mathbf{x}_{0,j}$ angesetzt wird, lautet das Optimierungsproblem zum Entwurf eines nichtsättigenden, linearen Zustandsreglers $u = \mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{x}_s$

$$\begin{aligned} & \text{Maximiere } \alpha, \quad \text{u. d. B. d.} \\ & \mathbf{Q} \succ 0, \mathbf{Y}, \alpha > 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_s^T + \mathbf{A}_s\mathbf{Q} + \mathbf{y}\mathbf{b}_s^T + \mathbf{b}_s\mathbf{y}^T \prec -2\alpha\mathbf{Q},$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{y}^T \\ \mathbf{y} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_{0,j}^T \\ \mathbf{x}_{0,j} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad j = 1, \dots, N$$

mit $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{k}_{\text{lin}}$. Die erste Nebenbedingung stellt dabei $\dot{v}(\mathbf{x}_s) < -\alpha v(\mathbf{x}_s) < 0$ sicher. Mit Hilfe der zweiten Bedingung ist gewährleistet, dass $|\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{x}_s| \leq u_{\max}$ für alle $\mathbf{x}_s \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Die letzte Bedingung garantiert schließlich $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{E}(\mathbf{P})$.

A.6.1 Garantiertes Einzugsgebiet

In diesem Abschnitt soll das Einzugsgebiet einer Ruhelage $\bar{\mathbf{x}}_s \neq \mathbf{0}$ unter Verwendung des Führungsreglers

$$u = \bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \quad (\text{A.4})$$

und des Ellipsoids

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u})) = \{ \mathbf{x}_s : (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{P} (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \leq \rho(\bar{u}) \}$$

approximiert werden. Der Reglervektor \mathbf{k}_{lin} und die Matrix \mathbf{P} werden aus der Lösung des Optimierungsproblems (A.3) bestimmt. Um die kontraktive Invarianz von $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ sicherzustellen, darf der Regler (A.4) auf $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ nicht sättigen. Entsprechend muss der Skalar $\rho(\bar{u})$ so bestimmt werden, dass diese Bedingung erfüllt und gleichzeitig möglichst groß ist. Dies ist der Fall, wenn der Ellipsoid $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ erstmals die eine der Hyperebenen $\{ \mathbf{x}_s : |\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)| = u_{\max} \}$ tangiert. Gesucht ist also

$$\rho(\bar{u}) = \min(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{P} (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \quad \text{u. d. B. d.}$$

$$|\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)| = u_{\max}, \quad \text{für alle } \mathbf{x}_s \in \mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u})).$$

Zunächst werden die Fälle betrachtet, in denen $|\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)| = u_{\max}$ gilt:

- wenn $\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) = 0$ und $\bar{u} > 0$, dann $\mathbf{k}_{\text{lin}}^T (\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \leq u_{\max} - \bar{u}$

- wenn $\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) = 0$ und $\bar{u} < 0$, dann $\mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \leq u_{\text{max}} + |\bar{u}|$
- wenn $\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) = 0$ und $\bar{u} > 0$, dann $\mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \geq -(u_{\text{max}} + \bar{u})$
- wenn $\bar{u} + \mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) = 0$ und $\bar{u} < 0$, dann $\mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s) \geq -(u_{\text{max}} - |\bar{u}|)$

Der Ellipsoid wird begrenzt durch den betragsmäßig kleinsten Wert $|\mathbf{k}_{\text{lin}}^T(\mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s)| = u_{\text{max}} - |\bar{u}|$. Unter Verwendung von $\mathbf{e}_{\mathbf{x}_s} = \mathbf{x}_s - \bar{\mathbf{x}}_s$ und unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u}))$ bzgl. $\mathbf{e}_{\mathbf{x}_s} = \mathbf{0}$ lautet die Aufgabe nun

$$\rho(\bar{u}) = \min \mathbf{e}_{\mathbf{x}_s}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{\mathbf{x}_s} \quad \text{u. d. B. d.} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{e}_{\mathbf{x}_s} = u_{\text{max}} - |\bar{u}|, \quad \text{für alle } \mathbf{x}_s \in \mathcal{E}(\mathbf{P}, \rho(\bar{u})).$$

Unter Verwendung des Lagrange-Multiplikators $\lambda > 0$ lautet die Optimalitätsbedingung für das Optimierungsproblem (A.5)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} (\mathbf{e}_{\mathbf{x}_s}^T \mathbf{P} \mathbf{e}_{\mathbf{x}_s} - \lambda (+\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{e}_{\mathbf{x}_s} - (u_{\text{max}} - |\bar{u}|))) = 0,$$

woraus sich

$$\mathbf{e}_{\mathbf{x}_s}^* = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{\text{lin}}$$

ergibt. Des Weiteren folgt aus $\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{e}_{\mathbf{x}_s}^* = u_{\text{max}} - |\bar{u}|$ unmittelbar

$$\lambda = \frac{2(u_{\text{max}} - |\bar{u}|)}{\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{\text{lin}}}$$

und somit schließlich

$$\rho(\bar{u}) = \frac{(u_{\text{max}} - |\bar{u}|)^2}{\mathbf{k}_{\text{lin}}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{k}_{\text{lin}}}.$$

A.7 Eigenschaften der Funktion $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$

Im Zuge der in Kapitel 6 vorgestellten Führungsregelung wird die (6.8) entsprechende Funktion

$$V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \inf \left\{ \gamma > 0 : \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{\gamma}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \right\}$$

benötigt. Diese weist eine Reihe von Eigenschaften auf, auf die im Folgenden näher eingegangen wird. Dazu wird jedoch zunächst die Funktion

$$V(\mathbf{x}) = \inf \left\{ \gamma > 0 : \frac{1}{\gamma} \mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \right\} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}}$$

betrachtet, welche auch als Minkowski-Funktion bezeichnet wird. Diese Minkowski-Funktion hat die wichtige Eigenschaft, dass sie konvex ist, wenn das Gebiet $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ konvex ist [17].

Lemma A.2. ([17]) *Die Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ ist konvex für jedes festes $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$.*

Beweis. Die Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ lässt sich auch darstellen als

$$V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \inf \left\{ \gamma > 0 : \frac{1}{\gamma} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) - \bar{\mathbf{x}} \right\},$$

wobei das Gebiet

$$\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \bar{\mathbf{x}} = \{ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} : \mathbf{x}'^T \mathbf{P} \mathbf{x}' \leq 1 \}$$

konvex ist. Daher ist $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ eine Minkowski-Funktion, die aufgrund der Konvexität von $\mathcal{E}(\mathbf{P}) - \bar{\mathbf{x}}$ ebenfalls konvex ist. \square

Des Weiteren ist die Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ für ein konstantes $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$ homogen mit Homogenitätsgrad eins bezüglich $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, d.h., es gilt

$$V_*(\mu \mathbf{x}' + \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \mu V_*(\mathbf{x}' + \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}), \quad (\text{A.6})$$

für alle $\mu > 0$, was auch leicht anhand von (6.15) überprüft werden kann.

Lemma A.3. ([17]) *Für die Funktion $V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ mit einem konstanten $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt*

$$V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Beweis. Um Lemma A.3 zu beweisen, werden beide Seiten von (A.6) nach μ abgeleitet. Es ergibt sich

$$\frac{\partial V_*(\mu \mathbf{x}' + \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial (\mu \mathbf{x}')} \mathbf{x}' = V_*(\mathbf{x}' + \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}).$$

Wird nun $\mu = 1$ und $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ eingesetzt, so führt dies auf

$$\frac{\partial V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial (\mathbf{x})} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = V_*(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}),$$

womit Lemma A.3 bewiesen ist. \square

A.8 Nichtsättigender Führungsregler

In diesem Abschnitt wird der Beweis von Satz 6.2 erbracht, welcher die kontraktive Invarianz des Gebietes $\mathcal{E}(\mathbf{P})$ unter Verwendung des nichtsättigenden Führungsreglers

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{K}_{2, \text{lin}} \hat{\mathbf{x}} V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + (1 - V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{K}_{2, \text{lin}} \mathbf{x} + (1 - V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \cdot (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{K}_{2, \text{lin}} \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

mit

$$\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

sicherstellt.

Beweis. Zum Beweis von Satz 6.2 ist zu zeigen, dass für jeden Zustand $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ und den gewünschten stationären Zustand $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int } \mathcal{E}(\mathbf{P})$

$$\dot{V}_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} < 0$$

gilt. Es sei $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$. Es muss also

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x} \\ &\quad + \frac{\partial V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B} \text{sat}_{\mathbf{v}_{\max}} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \text{sat}_{\mathbf{u}_{\max}} (\mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}))) < 0 \end{aligned}$$

gelten. Der Regler $\mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ aus Gleichung (A.7) ist eine konvexe Kombination aus $\mathbf{K}_{2, \text{lin}} \mathbf{x}$ und $\bar{\mathbf{u}}$. Da zulässige Referenzruhelagen $\bar{\mathbf{x}}$ vorausgesetzt werden, gilt stets $|u_i| \leq u_{\max, i}$. Des Weiteren ist durch Bedingung (6.18) sichergestellt, dass $|\mathbf{k}_{2, \text{lin}, i}^{\text{T}} \mathbf{x}| \leq u_{\max, i}$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und somit auch $|\mathbf{k}_{2, \text{lin}, i}^{\text{T}} \hat{\mathbf{x}}| \leq u_{\max, i}$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$ für alle $\hat{\mathbf{x}} \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Aus diesem Grunde ist auf dem betrachteten Gebiet $|\mathbf{k}_{\text{lin}, i}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})| \leq u_{\max, i}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und die innere Sättigungsfunktion in $V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ muss nicht berücksichtigt werden. Auch die zweite Sättigungsfunktion muss nicht betrachtet werden, sofern die Forderung $|\mathbf{k}_1^{\text{T}} \mathbf{x} + \tau_i \mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})| \leq v_{\max, i}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und alle $i \in \{1, \dots, m\}$ eingehalten wird. Einsetzen des Regelgesetzes (A.7) zusammen mit der Substitution $\mathbf{x} = V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + (1 - V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{x}}$ liefert

$$\begin{aligned} &|\mathbf{k}_1^{\text{T}} \mathbf{x} + \tau_i \mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})| \\ &= |(\mathbf{k}_1^{\text{T}} \bar{\mathbf{x}} + \tau_i \bar{\mathbf{u}}) (1 - V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) + (\mathbf{k}_1^{\text{T}} \hat{\mathbf{x}} + \tau_i \mathbf{k}_{2, \text{lin}, i}^{\text{T}} \hat{\mathbf{x}}) V_{\star}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})| \leq v_{\max, i}. \end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Struktur von \mathbf{K}_1 gilt $\mathbf{k}_1^T \bar{\mathbf{x}} = -\tau_i \bar{\mathbf{u}}$, so dass der erste Summand in der obigen Gleichung Null ist. Da außerdem $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \leq 1$ ist, gilt $|\mathbf{k}_1^T \mathbf{x} + \tau_i \mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})| \leq v_{\max, i}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$, falls $|(\mathbf{k}_1^T + \tau_i \mathbf{k}_{2, \text{lin}, i}^T) \hat{\mathbf{x}}| \leq v_{\max, i}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Dies wird in Satz 6.2 durch Forderung (6.19) sichergestellt. Demnach müssen beide Sättigungsfunktionen $\dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ entfallen, so dass sich die Bedingung

$$\dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{B} (\mathbf{K}_1 \mathbf{x} + \mathbf{T} \mathbf{k}_{\text{lin}}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) < 0$$

ergibt. Auch hier wird nun der Regler (A.7) zusammen mit der Substitution $\mathbf{x} = V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{x}} + (1 - V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) \bar{\mathbf{x}}$ eingesetzt. Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{x}}) V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \\ &+ \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{T} \bar{\mathbf{u}}) (1 - V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})) < 0. \end{aligned}$$

Im neuen stationären Zustand gilt $\mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s \bar{\mathbf{x}}_s + \mathbf{B}_s \bar{\mathbf{u}}_a = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{u}}_a = \bar{\mathbf{u}}$ und somit auch $\dot{\bar{\mathbf{u}}}_a = \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{T} \bar{\mathbf{u}} = -\mathbf{T} \bar{\mathbf{u}}_a + \mathbf{T} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$. Deshalb vereinfacht sich die oben stehende Bedingung zu

$$\dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{x}}) V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < 0,$$

wobei $\hat{\mathbf{x}} \in \partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ gilt. Auf dem Rand $\partial \mathcal{E}(\mathbf{P})$ sind die Gradienten $V(\mathbf{x})$ und $V_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ parallel. Aufgrund von Forderung (6.20) ist $\dot{v}(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$. Da die Gradienten von $v(\mathbf{x})$ und $V(\mathbf{x})$ ebenfalls parallel sind, ist $\dot{V}_\star(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbf{P}) \setminus \{\bar{\mathbf{x}}\}$ sichergestellt. Aus diesem Grunde gilt $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{P})$ und außerdem ist $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ für $t \rightarrow \infty$. \square

A.9 Lie-Derivierte

Zur Durchführung der exakten Linearisierung in Abschnitt 6.7 ist die Berechnung von sogenannten Lie-Derivierten erforderlich. Diese sind wie folgt definiert:

Definition A.4. ([125]) Gegeben sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, eine stetig differenzierbare skalare Funktion $h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ und ein Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$. Die Lie-Derivierte von $h(\mathbf{x})$ bezüglich $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist definiert als

$$L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Die Lie-Derivierte bezeichnet somit die Veränderung von $h(\mathbf{x})$ in Richtung des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Wird die Lie-Derivierte mehrfach angewandt, d.h. die Lie-Derivierte von $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$ bezüglich $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gesucht, so wird die Schreibweise

$$L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

verwendet. In ähnlicher Weise wird die Lie-Derivierte von $L_{\mathbf{g}}h(\mathbf{x})$ bezüglich $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ abkürzend als

$$L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = \frac{\partial L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

bezeichnet.

A.10 Intervalltransformation

Im Rahmen des Entwurfs sättigender Führungsregler in Abschnitt 6.7.2 wird eine Näherung unter Verwendung orthogonaler Basispolynome verwendet. Die dort beschriebene Approximation ist für das Intervall $[-1,1]$ gültig. Soll eine Funktion $f(x)$ auf einem beliebigen Intervall $[a,b]$ approximiert werden, muss zuvor eine Intervalltransformation durchgeführt werden, auf die im Folgenden näher eingegangen wird. Um $x \in [a,b]$ auf $y \in [-1,1]$ abzubilden, wird zunächst die Funktion

$$x = h(y) = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}$$

definiert. Durch die Verkettung $f(h(y))$ kann die Funktion $f(x)$ nun auf das Intervall $[-1,1]$ zurückgeführt und die in Abschnitt 6.7.2 beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung der Koeffizienten a_i bzw. a_{ij} verwendet werden. Die ermittelte Lösung muss schließlich mit Hilfe der Umkehrfunktion von $h(y)$, d.h., unter Verwendung von

$$y = h^{-1}(x) = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$$

auf das ursprüngliche Intervall $[a,b]$ zurücktransformiert werden.

A.11 Relativer Grad

Zum Entwurf der Vorsteuerung mit Trajektorienplanung in Abschnitt 7.3 wird zur Angabe der Ein-/Ausgangsnormalform für nichtlineare MIMO-Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_a), & \mathbf{x}_s(0) &= \mathbf{x}_{s,0} \\ y_{s,i} &= c_{s,i}(\mathbf{x}_s), & i &= 1, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

der Begriff des relativen Grades benutzt. Dessen Definition findet sich für Systeme in eingangs-affiner Darstellung in [64] und lautet für ein allgemeines System der Form (A.8):

Definition A.5. ([64]) Ein nichtlineares MIMO-System der Form (A.8) hat am Punkt \mathbf{x}_s° einen relativen Grad $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_m]^T$, falls die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial u_{a,i}} L_{\mathbf{f}_s}^j c_{s,k}(\mathbf{x}_s) = 0, \quad j = 1, \dots, r_k - 1$$

für alle $i, k \in \{1, \dots, m\}$ und alle \mathbf{x}_s in einer Umgebung von \mathbf{x}_s° gelten und die nichtlineare Entkopplungsmatrix

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}_s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_1} c_{s,1}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_1} c_{s,1}(\mathbf{x}_s) & \dots \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_2} c_{s,2}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_2} c_{s,2}(\mathbf{x}_s) & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,1}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_m} c_{s,m}(\mathbf{x}_s) & \frac{\partial}{\partial u_{a,2}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_m} c_{s,m}(\mathbf{x}_s) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_1} c_{s,1}(\mathbf{x}_s) \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_2} c_{s,2}(\mathbf{x}_s) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_{a,m}} L_{\mathbf{f}_s}^{r_m} c_{s,m}(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}$$

für $\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_s^\circ$ regulär ist.

B Reglerparameter der Beispiele

B.1 Implizite Regelung: Space-Shuttle

Tabelle B.1: Reglerparameter der impliziten Regelung

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 19,422 & 20,368 & 8,676 & 8,980 & 4,582 & 3,278 \\ 20,368 & 36,507 & 15,999 & 7,571 & 6,833 & -1,279 \\ 8,676 & 15,999 & 13,012 & 3,572 & 3,789 & 2,139 \\ 8,980 & 7,571 & 3,572 & 6,823 & 6,777 & 5,303 \\ 4,583 & 6,834 & 3,789 & 6,777 & 13,428 & 8,847 \\ 3,278 & -1,279 & 2,139 & 5,303 & 8,847 & 11,6094 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{*,1}^T = [25,261 \quad 46,651 \quad 37,904 \quad 10,395 \quad 11,043 \quad 6,201]$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{*,2}^T = [10,163 \quad -3,890 \quad 6,591 \quad 16,477 \quad 27,600 \quad 36,139]$$

Tabelle B.2: Reglerparameter des linearen Sättigungsreglers

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 31,074 & 2,619 & -16,772 & 0,145 & 0,972 & 1,925 \\ 2,619 & 0,466 & -1,889 & 0,193 & 0,442 & 0,283 \\ -16,772 & -1,889 & 31,914 & 1,432 & -0,336 & -3,037 \\ 0,145 & 0,199 & 1,432 & 0,338 & 0,288 & -0,007 \\ 0,972 & 0,442 & -0,336 & 0,288 & 1,304 & 0,202 \\ 1,925 & 0,283 & -3,037 & -0,007 & 0,202 & 0,754 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,\text{lin}} = \begin{bmatrix} -15,558 & -6,485 & 4,377 & -4,316 & -17,136 & -2,880 \\ -35,080 & -5,229 & 56,336 & 0,167 & -3,754 & -12,777 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.3: Reglerparameter des linearen Zustandsreglers

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 23,825 & 2,841 & 3,055 & 1,302 & 8,202 & -4,100 \\ 2,841 & 1,436 & -4,512 & 0,525 & 4,993 & 1,176 \\ 3,055 & -4,512 & 68,692 & 0,243 & 1,874 & -22,981 \\ 1,302 & 0,525 & 0,243 & 0,271 & 2,394 & -0,157 \\ 8,202 & 4,993 & 1,874 & 2,394 & 32,180 & -4,032 \\ 4,100 & 1,176 & -22,981 & -0,157 & -4,032 & 14,804 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,\text{lin}} = \begin{bmatrix} 0,025 & -0,035 & 0,056 & -0,014 & 0,728 & -0,039 \\ 0,126 & -0,019 & 0,211 & -0,003 & -0,044 & 0,814 \end{bmatrix}$$

B.2 Ausgangsrückführung: Helikopter Lynx ZD 559

Tabelle B.4: Reglerparameter der sättigenden Ausgangsrückführung

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k11} & \mathbf{A}_{k12} \\ \mathbf{A}_{k21} & \mathbf{A}_{k22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{k11} = \begin{bmatrix} -6,773 & -0,086 & -0,016 & 0,063 & 0,006 & -4,09 \cdot 10^{-5} \\ -4,500 & -6,352 & -0,105 & 7,322 & -0,226 & 5,89 \cdot 10^{-4} \\ 5,87 \cdot 10^1 & 9,323 & -3,970 & 3,51 \cdot 10^1 & 1,007 & -0,002 \\ 1,64 \cdot 10^3 & 4,61 \cdot 10^1 & 2,194 & 3,003 & 0,960 & -0,002 \\ 9,94 \cdot 10^3 & 1,36 \cdot 10^2 & -1,28 \cdot 10^1 & 1,07 \cdot 10^2 & 1,84 \cdot 10^1 & -0,068 \\ -7,55 \cdot 10^5 & -3,35 \cdot 10^4 & -3,49 \cdot 10^3 & -3,48 \cdot 10^3 & -6,29 \cdot 10^2 & -1,042 \cdot 10^1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{k12} = \begin{bmatrix} -5,88 \cdot 10^{-6} & -2,20 \cdot 10^{-6} & -6,26 \cdot 10^{-7} & -1,20 \cdot 10^{-7} & -4,88 \cdot 10^{-8} & 3,55 \cdot 10^{-7} \\ 2,22 \cdot 10^{-4} & 5,46 \cdot 10^{-5} & 1,18 \cdot 10^{-6} & 9,16 \cdot 10^{-6} & 6,35 \cdot 10^{-6} & -2,20 \cdot 10^{-5} \\ -9,84 \cdot 10^{-4} & -2,67 \cdot 10^{-4} & -1,25 \cdot 10^{-5} & -4,46 \cdot 10^{-5} & -3,05 \cdot 10^{-5} & 5,86 \cdot 10^{-5} \\ 3,49 \cdot 10^{-6} & -4,87 \cdot 10^{-5} & -5,51 \cdot 10^{-6} & 3,17 \cdot 10^{-5} & 1,86 \cdot 10^{-5} & -7,99 \cdot 10^{-5} \\ -0,006 & -0,002 & 2,60 \cdot 10^{-4} & 2,21 \cdot 10^{-4} & 1,45 \cdot 10^{-4} & 9,76 \cdot 10^{-5} \\ 0,003 & 0,021 & -0,009 & -0,016 & -0,011 & 0,049 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{k21} = \begin{bmatrix} 1,41 \cdot 10^9 & -4,13 \cdot 10^5 & -2,18 \cdot 10^5 & 1,29 \cdot 10^5 & -4,15 \cdot 10^4 & -1,79 \cdot 10^2 \\ -2,34 \cdot 10^8 & 5,01 \cdot 10^6 & 6,65 \cdot 10^5 & 4,36 \cdot 10^5 & 4,26 \cdot 10^5 & -1,28 \cdot 10^1 \\ 1,33 \cdot 10^8 & -8,19 \cdot 10^6 & -7,29 \cdot 10^5 & -1,07 \cdot 10^6 & -7,07 \cdot 10^5 & 5,38 \cdot 10^2 \\ -9,11 \cdot 10^8 & 1,41 \cdot 10^4 & 1,46 \cdot 10^6 & -1,16 \cdot 10^6 & -1,55 \cdot 10^5 & 3,26 \cdot 10^3 \\ 1,33 \cdot 10^9 & -1,01 \cdot 10^7 & -3,11 \cdot 10^6 & 1,97 \cdot 10^5 & -4,84 \cdot 10^5 & -4,36 \cdot 10^3 \\ 1,94 \cdot 10^8 & -7,80 \cdot 10^5 & -3,00 \cdot 10^5 & 1,56 \cdot 10^5 & -7,62 \cdot 10^4 & -2,53 \cdot 10^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{k22} = \begin{bmatrix} -29,504 & -20,304 & -10,289 & -1,249 & -0,579 & -1,500 \\ 15,880 & 34,245 & 32,214 & 7,219 & 3,928 & 0,349 \\ 34,171 & -21,172 & -38,702 & -10,689 & -6,014 & 2,167 \\ 239,160 & 161,770 & 62,628 & 3,411 & 3,979 & 17,776 \\ -279,874 & -259,271 & -131,356 & -17,396 & -15,608 & -26,063 \\ -39,247 & -26,308 & -14,101 & -1,951 & -0,689 & -2,184 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.5: Reglerparameter der sättigenden Ausgangsrückführung - Fortsetzung

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,002 & 0,001 & 0 & -0,001 & 0 \\
 0,050 & -0,076 & 0,003 & 0,039 & 0,009 \\
 -15,541 & 0,817 & 0,730 & -6,801 & 0,817 \\
 42,424 & 16,309 & -1,449 & 10,998 & -3,832 \\
 -46,095 & -31,912 & 1,072 & -6,000 & 5,322 \\
 74,237 & -24,371 & -5,195 & 43,701 & -3,278 \\
 -147,391 & 2,662 & 8,189 & -63,867 & 10,599 \\
 -21,747 & -0,152 & 1,031 & -9,278 & 1,209
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2,032 & 0,609 & -0,126 & -0,043 \\
 -460,710 & -157,849 & 23,749 & 2,774 \\
 895,673 & 378,265 & -51,761 & -11,368 \\
 -693,578 & -369,564 & 46,269 & 15,779 \\
 2779,037 & 835,283 & -159,131 & -11,062 \\
 -4337,816 & -1484,865 & 295,242 & 34,691 \\
 -635,093 & -221,188 & 29,521 & 4,047
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_k = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -0,001 & -0,001 & 0 & 0 \\
 0,118 & 0,103 & -0,025 & -0,001 \\
 -4,535 & -2,224 & 0,785 & 0,030 \\
 -9,830 & -15,734 & 3,890 & -0,161 \\
 18,199 & 33,644 & -8,855 & 0,251 \\
 25,790 & 3,687 & -10,692 & 0,228 \\
 -1,123 & -1,155 & 14,231 & 0,187 \\
 0,011 & -0,078 & 0,014 & 0,657
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\star = \begin{bmatrix}
 -1,28 \cdot 10^5 & 5,77 \cdot 10^3 & -3,65 \cdot 10^2 & 2,51 \cdot 10^3 & 1,05 \cdot 10^3 & -0,06 \\
 -1,72 \cdot 10^6 & -2,94 \cdot 10^4 & -5,72 \cdot 10^3 & -3,77 \cdot 10^2 & 1,20 \cdot 10^3 & -5,95 \\
 -4,98 \cdot 10^6 & -5,98 \cdot 10^4 & -8,74 \cdot 10^3 & 4,92 \cdot 10^3 & 2,00 \cdot 10^3 & 11,61 \\
 -1,60 \cdot 10^7 & -4,95 \cdot 10^5 & -8,85 \cdot 10^4 & -3,76 \cdot 10^4 & 5,97 \cdot 10^3 & -78,69 \\
 -0,28 & -0,11 & -0,01 & -0,02 & -0,01 & 0 \\
 -0,89 & -0,48 & -0,20 & -0,02 & 0 & 0,03 \\
 -1,52 & -0,75 & -0,32 & -0,05 & -0,02 & 0,06 \\
 -0,50 & 0,01 & 0,17 & 0,02 & 0,10 & -1,16
 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.7: Reglerparameter der sättigenden Ausgangsrückführung -
Fortsetzung

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{12}^T & \mathbf{Y}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{11} = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,82 & 1,53 & 0,12 & 0 & -0,11 \\ 0,82 & 29,88 & 49,03 & -0,05 & -0,02 & -3,53 \\ 1,53 & 49,03 & 3,21 \cdot 10^7 & 0,35 & -0,10 & -4,21 \cdot 10^5 \\ 0,12 & -0,05 & 0,35 & 0,73 & 0 & 0,01 \\ 0 & -0,02 & -0,10 & 0 & 0 & 0,02 \\ -0,11 & -3,53 & -4,21 \cdot 10^5 & 0,01 & 0,02 & 1,72 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{12} = \begin{bmatrix} -0,02 & 0 & 43,32 & 16,93 & -2,47 & 0,39 \\ -0,61 & -0,40 & 1,53 \cdot 10^3 & 5,393 \cdot 10^2 & -7,38 \cdot 10^1 & 6,62 \\ -0,99 & -3,25 \cdot 10^6 & 9,42 \cdot 10^3 & -2,89 \cdot 10^6 & 2,58 \cdot 10^6 & -5,13 \cdot 10^6 \\ 0 & -0,01 & 2,08 & 3,92 & -1,16 & 0,06 \\ 0 & -0,04 & -1,67 & -0,60 & 0,13 & -0,37 \\ 0,07 & 4,23 \cdot 10^5 & -2,85 \cdot 10^2 & 1,40 \cdot 10^5 & 7,22 \cdot 10^5 & 1,70 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{22} = \begin{bmatrix} 0,08 & 0,03 & -25,46 & -9,20 & 0,69 & -0,12 \\ 0,03 & 1,20 \cdot 10^6 & -7,01 \cdot 10^2 & 5,26 \cdot 10^5 & 1,46 \cdot 10^6 & 7,55 \cdot 10^5 \\ -2,55 \cdot 10^1 & -7,01 \cdot 10^2 & 3,81 \cdot 10^7 & 2,32 \cdot 10^4 & -3,12 \cdot 10^3 & -1,55 \cdot 10^2 \\ -9,20 \cdot 10^5 & 5,26 \cdot 10^5 & 2,32 \cdot 10^4 & 3,82 \cdot 10^7 & 2,76 \cdot 10^5 & 2,67 \cdot 10^5 \\ 0,69 & 1,46 \cdot 10^6 & -3,12 \cdot 10^3 & 2,76 \cdot 10^5 & 4,09 \cdot 10^7 & 2,05 \cdot 10^5 \\ 0,12 & 7,55 \cdot 10^5 & -1,55 \cdot 10^2 & 2,67 \cdot 10^5 & 2,05 \cdot 10^5 & 3,85 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.8: Reglerparameter des nichtsättigenden Zustandsreglers

$$\mathbf{K}_{2,\text{lin}} = \begin{bmatrix} 1,17 \cdot 10^{-4} & -1,19 \cdot 10^{-4} & -5,21 \cdot 10^{-3} & -1,04 \cdot 10^{-2} & -2,70 \cdot 10^{-6} & -2,10 \cdot 10^{-4} \\ -2,82 \cdot 10^{-5} & -1,10 \cdot 10^{-4} & -4,47 \cdot 10^{-3} & -7,16 \cdot 10^{-3} & -5,28 \cdot 10^{-6} & -1,14 \cdot 10^{-4} \\ -2,00 \cdot 10^{-4} & 1,04 \cdot 10^{-4} & 2,82 \cdot 10^{-3} & 4,48 \cdot 10^{-3} & -1,16 \cdot 10^{-5} & 3,04 \cdot 10^{-4} \\ -3,36 \cdot 10^{-4} & 5,34 \cdot 10^{-5} & -3,55 \cdot 10^{-6} & -1,08 \cdot 10^{-4} & -2,31 \cdot 10^{-5} & 3,60 \cdot 10^{-4} \\ -4,02 \cdot 10^{-4} & -1,29 \cdot 10^{-4} & 0,80 & 2,29 \cdot 10^{-2} & 1,04 \cdot 10^{-2} & -8,16 \cdot 10^{-3} \\ 5,94 \cdot 10^{-4} & 3,65 \cdot 10^{-5} & 1,33 \cdot 10^{-2} & 0,72 & -5,77 \cdot 10^{-3} & 8,13 \cdot 10^{-3} \\ 0,29 & 4,95 \cdot 10^{-4} & 1,21 \cdot 10^{-2} & -1,32 \cdot 10^{-2} & 7,99 \cdot 10^{-1} & 4,63 \cdot 10^{-3} \\ 5,12 \cdot 10^{-3} & 8,03 \cdot 10^{-4} & -9,40 \cdot 10^{-2} & 1,63 \cdot 10^{-1} & 4,27 \cdot 10^{-2} & 7,91 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} 1,17 \cdot 10^{-3} & 3,14 \cdot 10^{-4} & 6,70 \cdot 10^{-3} & -9,42 \cdot 10^{-3} & 1,81 \cdot 10^{-5} & -2,13 \cdot 10^{-5} \\ 3,14 \cdot 10^{-4} & 3,18 \cdot 10^{-4} & 7,62 \cdot 10^{-3} & 1,55 \cdot 10^{-3} & -8,18 \cdot 10^{-6} & 3,45 \cdot 10^{-4} \\ 6,70 \cdot 10^{-3} & 7,62 \cdot 10^{-3} & 2,27 \cdot 10^{-1} & 1,88 \cdot 10^{-1} & 4,34 \cdot 10^{-5} & 7,37 \cdot 10^{-3} \\ -9,42 \cdot 10^{-3} & 1,55 \cdot 10^{-3} & 1,88 \cdot 10^1 & 5,95 \cdot 10^1 & 4,75 \cdot 10^{-2} & 4,13 \cdot 10^{-1} \\ 1,81 \cdot 10^{-5} & -8,18 \cdot 10^{-6} & 4,34 \cdot 10^{-5} & 4,75 \cdot 10^{-4} & 2,60 \cdot 10^{-6} & -3,42 \cdot 10^{-5} \\ 2,13 \cdot 10^{-4} & 3,45 \cdot 10^{-4} & 7,37 \cdot 10^{-3} & 4,13 \cdot 10^{-3} & -3,42 \cdot 10^{-5} & 7,74 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} -6,37 \cdot 10^{-3} & -9,14 \cdot 10^{-4} & -1,51 & 1,90 & -0,89 & 0,29 \\ 1,11 \cdot 10^{-3} & 2,70 \cdot 10^{-4} & -1,03 & 1,30 & -7,39 \cdot 10^{-1} & 1,75 \cdot 10^{-1} \\ -8,23 \cdot 10^{-3} & 1,59 \cdot 10^{-3} & -2,34 \cdot 10^1 & 3,12 \cdot 10^1 & -1,66 \cdot 10^1 & 4,25 \\ -3,42 \cdot 10^{-2} & -2,98 \cdot 10^{-3} & 4,12 & 4,22 \cdot 10^{-1} & 1,42 & -5,00 \cdot 10^{-2} \\ -5,07 \cdot 10^{-4} & -7,90 \cdot 10^{-3} & 1,73 \cdot 10^{-2} & -1,14 \cdot 10^{-2} & 1,97 \cdot 10^{-2} & 2,04 \cdot 10^{-5} \\ 7,33 \cdot 10^{-3} & 1,24 \cdot 10^{-3} & -8,38 \cdot 10^{-1} & 1,00 & -7,28 \cdot 10^{-1} & 1,10 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 0,11 & 0,02 & -0,25 & -1,33 & -2,06 & -0,55 \\ 0,02 & 0 & -0,34 & 0,19 & -0,53 & -0,032 \\ -0,25 & -0,34 & 5,03 \cdot 10^3 & -8,23 \cdot 10^3 & 3,74 \cdot 10^2 & 8,33 \cdot 10^2 \\ -1,33 & 0,19 & -8,23 \cdot 10^3 & 2,00 \cdot 10^4 & 8,09 \cdot 10^3 & -6,15 \cdot 10^3 \\ -2,06 & -0,53 & 3,74 \cdot 10^2 & 8,09 \cdot 10^3 & 1,21 \cdot 10^4 & -6,55 \cdot 10^3 \\ -0,55 & -3,18 \cdot 10^{-2} & 8,33 \cdot 10^2 & -6,15 \cdot 10^3 & -6,55 \cdot 10^3 & 3,83 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.9: Reglerparameter des sättigenden Zustandsreglers

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0,0921 & 0,0053 & -0,5757 & -3,0227 & -0,0016 & -0,0230 \\ 0,0782 & -0,0070 & -0,5180 & -1,6849 & -0,0011 & -0,0134 \\ -0,0206 & 0,0083 & 0,3425 & 0,7495 & -0,0003 & 0,0216 \\ -0,1160 & -0,0030 & 0,0975 & 1,2246 & 0,0003 & 0,0085 \\ \\ -0,0478 & -0,0168 & -5,8354 & -2,5860 & 1,3948 & -0,0120 \\ 0,0527 & -0,0058 & -1,4143 & -5,3287 & 0,7786 & 0,0401 \\ 0,1271 & 0,0173 & 1,2623 & 1,2728 & -3,4643 & 0,0340 \\ 0,1757 & 0,0630 & -0,0476 & 0,5138 & 0,2373 & -1,2669 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \begin{bmatrix} -1,70 \cdot 10^{-3} & 5,72 \cdot 10^{-5} & -3,76 \cdot 10^{-3} & 2,63 \cdot 10^{-2} & -1,54 \cdot 10^{-5} & -1,13 \cdot 10^{-4} \\ 5,72 \cdot 10^{-5} & 2,79 \cdot 10^{-5} & 2,58 \cdot 10^{-4} & -1,58 \cdot 10^{-3} & -1,25 \cdot 10^{-6} & 8,64 \cdot 10^{-6} \\ -3,76 \cdot 10^{-3} & 2,58 \cdot 10^{-4} & 2,36 \cdot 10^{-2} & 8,32 \cdot 10^{-2} & 4,72 \cdot 10^{-5} & 7,40 \cdot 10^{-4} \\ -2,63 \cdot 10^{-2} & -1,58 \cdot 10^{-3} & 8,32 \cdot 10^{-2} & 5,56 \cdot 10^{-1} & 3,31 \cdot 10^{-4} & 2,78 \cdot 10^{-3} \\ -1,54 \cdot 10^{-5} & -1,25 \cdot 10^{-6} & 4,72 \cdot 10^{-5} & 3,31 \cdot 10^{-4} & 3,77 \cdot 10^{-7} & -3,77 \cdot 10^{-7} \\ -1,13 \cdot 10^{-4} & 8,64 \cdot 10^{-6} & 7,40 \cdot 10^{-4} & 2,78 \cdot 10^{-3} & -3,77 \cdot 10^{-7} & 5,66 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{bmatrix} 7,00 \cdot 10^{-5} & -1,19 \cdot 10^{-4} & -5,01 \cdot 10^{-3} & -9,94 \cdot 10^{-3} & 1,35 \cdot 10^{-4} & 1,62 \cdot 10^{-3} \\ -6,58 \cdot 10^{-6} & 2,55 \cdot 10^{-6} & -4,84 \cdot 10^{-4} & 9,47 \cdot 10^{-4} & -7,66 \cdot 10^{-4} & 5,71 \cdot 10^{-5} \\ -8,44 \cdot 10^{-4} & 3,27 \cdot 10^{-4} & 3,60 \cdot 10^{-2} & 6,45 \cdot 10^{-2} & -2,62 \cdot 10^{-2} & -6,63 \cdot 10^{-4} \\ 4,19 \cdot 10^{-4} & 2,02 \cdot 10^{-3} & 1,99 \cdot 10^{-1} & 2,04 \cdot 10^{-1} & -4,10 \cdot 10^{-2} & -1,53 \cdot 10^{-2} \\ -2,71 \cdot 10^{-5} & -3,29 \cdot 10^{-6} & 9,92 \cdot 10^{-5} & 1,34 \cdot 10^{-4} & 3,17 \cdot 10^{-5} & -1,95 \cdot 10^{-6} \\ 4,17 \cdot 10^{-4} & 7,07 \cdot 10^{-5} & 1,61 \cdot 10^{-3} & 1,68 \cdot 10^{-3} & 1,65 \cdot 10^{-3} & -1,07 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \begin{bmatrix} 0,0062 & 0,0009 & 0,0049 & -0,0069 & -0,0094 & -0,0017 \\ 0,0009 & 0,0002 & 0,0011 & 0,0003 & -0,0014 & -0,0005 \\ 0,0049 & 0,0011 & 0,5431 & 0,2145 & -0,1443 & 0,0074 \\ -0,0069 & 0,0003 & 0,2145 & 0,8657 & -0,1321 & -0,0002 \\ -0,0094 & -0,0014 & -0,1443 & -0,1321 & 0,4026 & -0,0098 \\ -0,0017 & -0,0005 & 0,0074 & -0,0002 & -0,0098 & 0,0258 \end{bmatrix}$$

B.3 Festwert-Führungsregelungen

B.3.1 Einführungsbeispiel: Tailless Fighter Aircraft

Tabelle B.10: Reglerparameter des linearen Zustandsreglers für ausschließliche Stellgrößenbegrenzungen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2,6881 & 0,8637 \\ 0,8637 & 0,3541 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\text{lin}} = \begin{bmatrix} -0,5709 & -0,1902 \end{bmatrix}^{\text{T}}$$

B.3.2 Beispiel: Tailless Fighter Aircraft

Tabelle B.11: Reglerparameter des linearen Zustandsreglers für ausschließliche Stellgrößenbegrenzungen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4,1862 & 1,3334 & 1,3386 \\ 1,3334 & 0,4294 & 0,4364 \\ 1,3386 & 0,4364 & 0,6500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{\text{lin}} = \begin{bmatrix} -2,2242 & -0,7261 & -0,2617 \end{bmatrix}^{\text{T}}$$

B.3.3 Beispiel: Space-Shuttle

Tabelle B.12: Reglerparameter des sättigenden Führungsreglers

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3,302 & 0,295 & -1,425 & 0,059 & 0,109 & 0,157 \\ 0,295 & 0,085 & -0,336 & 0,031 & 0,097 & 0,055 \\ -1,425 & -0,336 & 5,990 & 0,131 & -0,030 & -0,679 \\ 0,059 & 0,031 & 0,131 & 0,032 & 0,053 & 0,002 \\ 0,109 & 0,097 & -0,030 & 0,053 & 0,530 & 0,041 \\ 0,157 & 0,055 & -0,679 & 0,002 & 0,041 & 0,280 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -0,522 & -0,277 & -0,032 & -0,159 & -0,007 & -0,105 \\ -0,302 & -0,156 & 0,801 & -0,001 & -0,125 & 0,483 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.13: Reglerparameter des nichtsättigenden Führungsreglers

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,0045 & -0,0004 & -0,0056 & -0,0008 & -0,0150 & 0,0034 \\ -0,0004 & 0,0030 & 0,0300 & 0,0015 & 0,0290 & -0,0085 \\ -0,0056 & 0,0300 & 0,3169 & 0,0160 & 0,3045 & -0,0891 \\ -0,0008 & 0,0015 & 0,0160 & 0,0010 & 0,0185 & -0,0050 \\ -0,0150 & 0,0290 & 0,3045 & 0,0185 & 5,6364 & 0,1123 \\ 0,0034 & -0,0085 & -0,0891 & -0,0050 & 0,1123 & 5,1593 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{2,\text{lin}} = \begin{bmatrix} 0,0005 & -0,0013 & -0,0135 & -0,0008 & 0,8645 & 0,0004 \\ -0,0001 & 0,0003 & 0,0033 & 0,0002 & 0,0005 & 0,8679 \end{bmatrix}$$

B.3.4 Beispiel: Roboter-Arm

Neben den Reglerparametern wird im Folgenden auch auf die Approximation der zustandsabhängigen Stellbegrenzungen mittels der Legendre-Polynome aus Abschnitt 6.7.2 eingegangen. Dazu werden zunächst die zustandsabhängigen Stellbegrenzungen berechnet. Sie lauten im Fall $a = b = c = d = 1$

$$\bar{u}_{\max}(\mathbf{z}) = u_{\max} - (2 + \cos(z_{1,1}))z_{1,3} + (z_{1,2}^2 - 1) \sin(z_{1,1}),$$

$$\bar{u}_{\min}(\mathbf{z}) = u_{\min} - (2 + \cos(z_{1,1}))z_{1,3} + (z_{1,2}^2 - 1) \sin(z_{1,1})$$

und

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\max}(\mathbf{z}) = v_{\max} + 3z_{1,2}z_{1,3} \sin(z_{1,1}) + z_{1,2}(z_{1,2}^2 - 1) \cos(z_{1,1}) \\ - (2 + \cos(z_{1,1}))z_{1,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{\min}(\mathbf{z}) = v_{\min} + 3z_{1,2}z_{1,3} \sin(z_{1,1}) + z_{1,2}(z_{1,2}^2 - 1) \cos(z_{1,1}) \\ - (2 + \cos(z_{1,1}))z_{1,4} \end{aligned}$$

mit $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^T \ u_a]^T$. Die Begrenzungen $\bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$, $\bar{u}_{\min}(\mathbf{z})$, $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ und $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ liegen nicht in polynomialer Form vor und sollen im Folgenden auf dem Approximationsgebiet $\mathcal{I}_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : |z_i| \leq \pi, i = 1, \dots, n_s, u_a \leq u_{\max}\}$ angenähert werden.

Anhand von

$$\bar{u}_{\max}(\mathbf{z}) = u_{\max} - 2z_{1,3} - \cos(z_{1,1})z_{1,3} + z_{1,2}^2 \sin(z_{1,1}) - \sin(z_{1,1})$$

wird im Folgenden die Vorgehensweise bei der Approximation erläutert. Da $-2z_{1,3}$ bereits ein Polynom ist, müssen dazu nur die letzten drei Summanden von $\bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$ betrachtet werden. Dabei wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich diese Summanden als Produkt $p_i(\mathbf{z})\tilde{f}_i(\mathbf{z})$ aus einer trigonometrischen Funktion $f_i(\mathbf{z})$ und einem Polynom $p_i(\mathbf{z})$, darstellen lassen. Zunächst wird $\cos(z_{1,1})z_{1,3}$ durch ein Polynom vierter Ordnung approximiert. Es ergibt sich

$$\cos(z_{1,1}) \approx 0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4,$$

wobei der Approximationsfehler

$$\Delta_{\cos} = \max_{\mathbf{z}_1 \in \mathcal{I}_{\mathbf{z}}} |\cos(z_{1,1}) - 0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4| = 0,1912.$$

auftritt. Insgesamt gilt somit

$$z_{1,3} \cos(z_{1,1}) \approx (0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4)z_{1,3}$$

Aufgrund der Wahl von $\mathcal{I}_{\mathbf{z}}$ gilt $|z_{1,3}| \leq \pi$ und der maximale Approximationsfehler beträgt

$$\Delta = \max_{\mathbf{z}_1 \in \mathcal{I}_{\mathbf{z}}} |\cos(z_{1,1})z_{1,3} - 0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4| = 0,1912 \cdot \pi.$$

Auf diese Weise wird auch mit den anderen Summanden in $\bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$ verfahren. Es ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\max}(\mathbf{z}) \approx \hat{u}_{\max}(\mathbf{z}) = & u_{\max} - 2z_{1,3} - z_{1,3}(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & + (0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3)(z_{1,2}^2 - 1) \end{aligned}$$

mit dem maximalen Approximationsfehler

$$\Delta_{\max} = \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{I}_{\mathbf{z}}} |\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}) - \hat{u}_{\max}(\mathbf{z})| = 2,297.$$

Damit die Bedingung $\tilde{u}_{\max}(\mathbf{z}) \geq \bar{u}_{\max}(\mathbf{z})$ erfüllt ist, wird für den Entwurf die Begrenzung

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\max}(\mathbf{z}) = & 17,703 - 2z_{1,3} - z_{1,3}(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & + (0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3)(z_{1,2}^2 - 1) \end{aligned}$$

verwendet. Für die zustandsabhängige Stellgrößenbegrenzung

$$\bar{u}_{\min}(\mathbf{z}) = -u_{\max} - 2z_{1,3} - \cos(z_{1,1})z_{1,3} + z_{1,2}^2 \sin(z_{1,1}) - \sin(z_{1,1})$$

ergibt die Approximation

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\min}(\mathbf{z}) = & -17,703 - 2z_{1,3} - z_{1,3}(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & + (0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3)(z_{1,2}^2 - 1). \end{aligned}$$

Auch die zustandsabhängigen Stellratenbegrenzungen $\bar{v}_{\max}(\mathbf{z})$ und $\bar{v}_{\min}(\mathbf{z})$ lassen sich wie folgt approximieren

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\max}(\mathbf{z}) = & v_{\max} - 3z_{1,2}z_{1,3}(0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3) \\ & + z_{1,2}(z_{1,2}^2 - 1)(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & - (2,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4)z_{1,4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{\min}(\mathbf{z}) = & -v_{\max} - 3z_{1,2}z_{1,3}(0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3) \\ & + z_{1,2}(z_{1,2}^2 - 1)(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & - (2,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4)z_{1,4},\end{aligned}$$

wobei auf dem Gebiet $\mathcal{I}_{\mathbf{z}}$ der maximale Approximationsfehler $\Delta_{\max} = 7,961$ ergibt. Für den Entwurf der Regelung werden daher die Begrenzungen

$$\begin{aligned}\hat{v}_{\max}(\mathbf{z}) = & 42,040 - 3z_{1,2}z_{1,3}(0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3) \\ & + z_{1,2}(z_{1,2}^2 - 1)(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & - (2,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4)z_{1,4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}_{\min}(\mathbf{z}) = & -42,040 - 3z_{1,2}z_{1,3}(0,857z_{1,1} - 0,093z_{1,1}^3) \\ & + z_{1,2}(z_{1,2}^2 - 1)(0,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4) \\ & - (2,978 - 0,452z_{1,1}^2 + 0,026z_{1,1}^4)z_{1,4}\end{aligned}$$

verwendet. Die Reglerparameter sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Tabelle B.14: Reglerparameter des sättigenden Führungsreglers

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,4042 & 0,6214 & 0,3680 & 0,1008 & 0,0111 \\ 0,6214 & 1,0004 & 0,6198 & 0,1777 & 0,0205 \\ 0,3680 & 0,6198 & 0,4048 & 0,1232 & 0,0152 \\ 0,1008 & 0,1777 & 0,1232 & 0,0407 & 0,0056 \\ 0,0111 & 0,0205 & 0,0152 & 0,0056 & 0,0009 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = [-30,6449 \quad -57,1699 \quad -43,2245 \quad -16,5543 \quad -2,1650]$$

B.4 Zwei-Freiheitsgrade Regelung

B.4.1 Vergleich der Vorsteuerungskonzepte

Tabelle B.15: Reglerparameter der modellbasierten Vorsteuerung bzw. der Trajektorienplanung

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8,7345 & 2,5340 & 2,1787 \\ 2,5340 & 0,7587 & 0,6752 \\ 2,1787 & 0,6752 & 0,8742 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -2,7283 & -0,8495 & -0,3143 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -577,3583$$

$$p_2 = 935,0518$$

$$p_3 = -457,3644$$

B.4.2 Beispiel: Tailless Fighter Aircraft

Tabelle B.16: Reglerparameter der modellbasierten Vorsteuerung bzw. der Trajektorienplanung

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9,2593 & 3,0854 & 4,1806 \\ 3,0854 & 1,0288 & 1,3924 \\ 4,1806 & 1,3924 & 2,8038 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -29,4028 & -9,7939 & -18,9283 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = -328,5423$$

$$p_2 = 529,7248$$

$$p_3 = -258,9138$$

Tabelle B.17: Reglerparameter der Ausgangsrückführung

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 6,21 & 0 & 0 \\ -1,02 \cdot 10^6 & -9,25 & -0,01 \\ -9,20 \cdot 10^5 & -7,50 & -0,90 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} -0,01 & -0,01 \\ 562,6654 & 552,2604 \\ 505,6337 & 466,7302 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_* = [927,3192 \quad 0,0052 \quad 0]$$

$$\mathbf{D}_* = [-0,5094 \quad 0,5875]$$

Tabelle B.18: Reglerparameter der Ausgangsrückführung - Fortsetzung

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 404,5740 & -606,7976 & -0,0307 \\ -606,7976 & 910,2097 & 0,0004 \\ -0,0307 & 0,0004 & 0,0273 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2,51 \cdot 10^2 & -4,89 \cdot 10^1 & 2,70 \cdot 10^2 \\ -4,89 \cdot 10^1 & 5,86 \cdot 10^2 & 1,70 \cdot 10^2 \\ 2,70 \cdot 10^2 & 1,70 \cdot 10^2 & 4,86 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

B.4.3 Beispiel: Space-Shuttle

Tabelle B.19: Reglerparameter der modellbasierten Vorsteuerung bzw. der Trajektorienplanung

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8,0967 & 0,6711 & -2,6988 & 0,1680 & 0,1752 & 0,2659 \\ 0,6711 & 0,1865 & -0,6469 & 0,0729 & 0,1502 & 0,0784 \\ -2,6988 & -0,6469 & 12,2183 & 0,2769 - 0,0919 & -0,9125 & \\ 0,1680 & 0,0729 & 0,2769 & 0,0704 & 0,0777 & 0,0064 \\ 0,1752 & 0,1502 & -0,0919 & 0,0777 & 0,8446 & 0,0767 \\ 0,2659 & 0,0784 & -0,9125 & 0,0064 & 0,0767 & 0,4049 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -0,9786 & -0,6001 & 0,1902 & -0,3228 & -1,7047 & -0,2717 \\ -1,3516 & -0,4321 & 4,8752 & -0,0319 & -0,4174 & -0,8611 \end{bmatrix}$$

$$p_{1,1} = 117,50$$

$$p_{1,2} = -146,75$$

$$p_{1,3} = 59,66$$

$$p_{2,1} = -47,18$$

$$p_{2,2} = 68,53$$

$$p_{2,3} = -31,42$$

Tabelle B.20: Reglerparameter der Ausgangsrückführung

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} -2,46 \cdot 10^1 & 0 & 0 & 0 \\ -5,60 \cdot 10^5 & -1,83 \cdot 10^1 & 1,00 \cdot 10^{-1} & 6,30 \cdot 10^{-3} \\ -5,84 \cdot 10^7 & 1,07 \cdot 10^3 & -6,12 & -7,21 \cdot 10^{-1} \\ -6,49 \cdot 10^{-1} & 9,20 \cdot 10^{-1} & 7,20 \cdot 10^{-3} & \\ -1,34 \cdot 10^8 & -8,50 & 2,67 & -3,64 \cdot 10^{-1} \\ 2,54 \cdot 10^8 & -2,29 \cdot 10^3 & 8,24 & 1,79 \\ -7,28 \cdot 10^8 & -2,46 \cdot 10^2 & 1,58 \cdot 10^1 & -1,52 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6,95 \cdot 10^{-2} & -9,95 \cdot 10^{-2} & 1,10 \cdot 10^{-3} \\ -6,49 \cdot 10^{-1} & 9,20 \cdot 10^{-1} & 7,20 \cdot 10^{-3} \\ -1,32 & 3,12 \cdot 10^{-1} & -2,60 \cdot 10^{-3} \\ 1,13 \cdot 10^{-1} & -1,26 & 0 \\ -1,41 & 2,00 & -1,14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,55 & 5,64 \cdot 10^1 & 3,75 \cdot 10^{-2} & 1,30 & -2,21 \cdot 10^{-1} \\ 1,05 \cdot 10^1 & -2,20 \cdot 10^3 & -7,55 & 4,00 & 3,22 \cdot 10^1 \\ 4,94 \cdot 10^2 & 2,83 \cdot 10^3 & 8,36 \cdot 10^1 & 2,04 \cdot 10^2 & -5,34 \cdot 10^1 \\ 1,49 \cdot 10^2 & 1,77 \cdot 10^3 & 4,42 \cdot 10^1 & 7,28 \cdot 10^1 & -2,54 \cdot 10^1 \\ -1,65 \cdot 10^2 & 3,14 \cdot 10^3 & 1,15 \cdot 10^1 & -5,73 & -2,92 \cdot 10^1 \\ 8,20 \cdot 10^2 & 9,89 \cdot 10^3 & 1,30 \cdot 10^2 & 1,96 \cdot 10^2 & -8,87 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_\star = \begin{bmatrix} 4,32 \cdot 10^5 & 1,61 & 3,11 \cdot 10^{-3} & -1,38 \cdot 10^{-2} \\ -1,62 \cdot 10^5 & 1,15 \cdot 10^{-1} & -6,29 \cdot 10^{-2} & 9,00 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 1,30 \cdot 10^{-3} & 0 \\ -4,74 \cdot 10^{-3} & 5,64 \cdot 10^{-3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\star = \begin{bmatrix} -0,3969 & -1,0707 & -0,0601 & 0,8708 & -0,0012 \\ 0,1730 & 1,4191 & -0,0819 & -0,1477 & 1,0423 \end{bmatrix}$$

Tabelle B.21: Reglerparameter der Ausgangsrückführung - Fortsetzung

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}
 7,06 & -1,12 \cdot 10^3 & -5,30 \cdot 10^1 & 2,82 \cdot 10^3 \\
 -1,12 \cdot 10^3 & 1,78 \cdot 10^5 & 8,42 \cdot 10^3 & -4,49 \cdot 10^5 \\
 -5,30 \cdot 10^1 & 8,42 \cdot 10^3 & 4,00 \cdot 10^2 & -2,13 \cdot 10^{-4} \\
 2,82 \cdot 10^3 & -4,49 \cdot 10^5 & -2,13 \cdot 10^4 & 1,14 \cdot 10^6 \\
 1,35 \cdot 10^2 & -1,15 \cdot 10^4 & -1,02 \cdot 10^3 & 5,43 \cdot 10^4 \\
 1,68 \cdot 10^{-2} & 4,56 \cdot 10^{-1} & 1,09 \cdot 10^{-2} & -1,87 \\
 6,82 \cdot 10^{-3} & -3,10 \cdot 10^{-1} & 2,17 \cdot 10^{-2} & 1,01
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1,35 \cdot 10^2 & 1,68 \cdot 10^{-2} & 6,82 \cdot 10^{-3} \\
 -2,15 \cdot 10^4 & 4,56 \cdot 10^{-1} & -3,10 \cdot 10^{-1} \\
 -1,02 \cdot 10^3 & 1,09 \cdot 10^{-2} & 2,17 \cdot 10^{-2} \\
 5,43 \cdot 10^4 & -1,87 & 1,01 \\
 2,60 \cdot 10^3 & -8,27 \cdot 10^{-2} & 1,53 \cdot 10^{-2} \\
 -8,27 \cdot 10^{-2} & 4,75 \cdot 10^{-2} & -5,35 \cdot 10^{-3} \\
 1,53 \cdot 10^{-2} & -5,35 \cdot 10^{-3} & 7,44 \cdot 10^{-2}
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}
 1,28 \cdot 10^2 & 1,06 \cdot 10^1 & -1,83 \cdot 10^3 & -1,71 \cdot 10^2 \\
 1,06 \cdot 10^1 & 1,22 \cdot 10^1 & -2,54 \cdot 10^2 & -1,11 \cdot 10^2 \\
 -1,83 \cdot 10^3 & -2,54 \cdot 10^2 & 1,13 \cdot 10^5 & 7,08 \cdot 10^3 \\
 -1,71 \cdot 10^2 & -1,11 \cdot 10^2 & 7,08 \cdot 10^3 & 3,15 \cdot 10^3 \\
 7,22 \cdot 10^1 & 1,15 \cdot 10^1 & 1,05 \cdot 10^2 & -1,99 \cdot 10^1 \\
 2,51 \cdot 10^1 & 4,35 \cdot 10^1 & 1,10 \cdot 10^1 & 1,21 \cdot 10^1 \\
 -7,55 \cdot 10^1 & 2,89 \cdot 10^1 & 3,49 \cdot 10^2 & 5,22 \cdot 10^1
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 7,22 \cdot 10^1 & 2,51 \cdot 10^1 & -7,55 \cdot 10^1 \\
 1,15 \cdot 10^1 & 4,35 \cdot 10^1 & 2,89 \cdot 10^1 \\
 -1,05 \cdot 10^2 & 1,10 \cdot 10^1 & 3,49 \cdot 10^2 \\
 -1,99 \cdot 10^1 & 1,21 \cdot 10^1 & 5,22 \cdot 10^1 \\
 8,27 \cdot 10^5 & 1,11 \cdot 10^2 & -2,73 \cdot 10^1 \\
 1,11 \cdot 10^2 & 8,27 \cdot 10^5 & 4,76 \cdot 10^1 \\
 -2,73 \cdot 10^1 & 4,76 \cdot 10^1 & 8,27 \cdot 10^5
 \end{bmatrix}$$

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J.: *Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen*. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 271, VDI Verlag, Düsseldorf, Universität Dortmund, Diss., 1991
- [2] ADAMY, J.: Implicit Lyapunov Functions and Isochrones of Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), S. 874–879
- [3] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Springer Berlin, 2009
- [4] ADAMY, J. ; FLEMMING, A.: Soft variable-structure controls: a survey. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1821–1844
- [5] ADAMY, J. ; LENS, H.: Stabilitätsnachweis für weiche strukturvariable Regelungen mit Zustandsbeobachter. In: *at-Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 3, S. 107–118
- [6] ALAMO, T. ; CEPEDA, A. ; LIMON, D.: Improved Computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Seville, Spain, 2005
- [7] ALBERS, K.: *Syntheseverfahren für nichtlineare parameter- und strukturvariable Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen*, Universität Dortmund, Diss., 1983
- [8] BACCIOTTO, A. ; ROSIER, L.: *Ljapunov functions and stability in control theory*. Springer, Berlin, 2005
- [9] BARBU, C. ; REGINATTO, R. ; TEEL, A ; ZACCARIAN, L: Antiwindup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Chicago, USA, , S. 1230–1234
- [10] BATEMAN, A. ; LIN, Z.: An analysis and design method for linear systems under nested saturation. In: *System & Control Letters* 48 (2003), S. 41–52

-
- [11] BAYAT, F. ; JOHANSON, T. A. ; JALALI, A. A.: Using hash tables to manage the time-storage complexity in a point location problem: Application to explicit model predictive control. In: *Automatica* 47 (2011), S. 571–577
- [12] BEMPORAD, A.: Reference Governor for Constrained Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (1998), Nr. 3, S. 415–419
- [13] BEMPORAD, A. ; CASAVOLA, A. ; MOSCA, E.: Nonlinear Control of Constrained Linear Systems via Predictive Reference Management. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (1997), Nr. 3, S. 340–349
- [14] BEMPORAD, A. ; MORARI, M. ; DUA, V. ; PISTIKOPOULOS, E.N.: The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. In: *Automatica* (2002), S. 3–20
- [15] BERNSTEIN, D. S.: *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2005
- [16] BLANCHINI, F.: Set invariance in control. In: *Automatica* 35 (1999), S. 1747–1767
- [17] BLANCHINI, F. ; MIANI, S.: Any Domain of Attraction for a Linear Constrained System ist a Tracking Domain of Attraction. In: *SIAM Journal of Optimal Control* 38 (2000), S. 971–994
- [18] BLANCHINI, F. ; MIANI, S.: *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhäuser, 2008
- [19] BLANCHINI, F. ; PELLEGRINO, F. A. ; MIANI, S. ; ARKEL, B. van: Enhancing controller performance for robot positioning in a constrained environment. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004
- [20] BLAND, R. G. ; GOLDFARB, D. ; TODD, M. J.: The ellipsoid method: a survey. In: *Operations Research* 29 (1981), S. 1039–1091
- [21] BOYD, S. ; GHOULI, L. E. ; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V.: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. In: *Philadelphia SIAM* (1994)

-
- [22] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch GmbH, 2005
- [23] BRONSTEIN, L. N. ; GROSCHE, G. ; ZEIDLER, E.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig : Teubner, 1996
- [24] BUHL, M.: *Sättigende strukturvariable Regelungen*, Technische Universität München, Diss., 2008
- [25] BUHL, M. ; JOOS, P. ; LOHMANN, B.: Sättigende weiche strukturvariable Regelung. In: *at-Automatisierungstechnik* 56 (2008), Nr. 6, S. 316–323
- [26] BUHL, M. ; LOHMANN, B.: Lyapunov-Funktionen-basiertes Führungfilter. In: *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 10, S. 499–504
- [27] CAMACHO, E. ; BORDONS, C.: *Model Predictive Control*. 2. Springer, Berlin, 2004
- [28] CAO, Y. Y. ; LIN, Z. ; WARD, D. G.: Anti-Windup Design of Output Tracking Systems subject to Actuator Saturation and Constant Disturbances. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1221–1228
- [29] CHESI, G.: LMI Techniques for Optimization over Polynomials in Control: A Survey. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 55 (2010), Nr. 11, S. 2500–2510
- [30] CHESI, G. ; TESI, A. ; VICINO, A. ; GENESIO, R.: On convexification of some minimal distance problems. In: *Proceedings of the 5th European Control Conference*. Karlsruhe, Deutschland, 1999
- [31] CHILALI, M. ; GAHINET, P.: H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 3, S. 358–367
- [32] COURANT, Richard ; HILBERT, David: *Methods of Mathematical Physics*. Wiley, 1989
- [33] DEUTSCHER, J.: Entwurf von Ausgangsrückführungen für Strecken mit Stellsignalbegrenzung. In: *at-Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 6, S. 332–340

-
- [34] DOMONT-YANKULOVA, D.: *Entwurf strukturvariabler Regelungen mittels linearer Matrixungleichungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2010
- [35] DOYLE, J. ; LENZ, K ; PACKARD, A.: Design Examples using μ -Synthesis: Space Shuttle Lateral Axis FCS during Reentry. In: *Proceedings of the 25 th Conference on Decision and Control*. Athen, 1986, S. 2218–2222
- [36] DOYLE III, F.J.: An anti-windup input-output linearization scheme for SISO systems. In: *Journal of Process Control* 9 (1999), Nr. 3, S. 213–220
- [37] FRANKE, D.: Ausschöpfen von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. In: *Regelungstechnik* 30 (1982), Nr. 10, S. 348–355
- [38] FRANKE, D.: Ein nichtlinearer dynamischer Regler mit adaptiven Eigenschaften. In: *Regelungstechnik* 31 (1983), Nr. 11, S. 369–374
- [39] GALEANI, S. ; ONORI, S. ; ZACCARIAN, L.: Nonlinear scheduled control for linear systems subject to saturation with application to anti-windup control. In: *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA, 2007, S. 1168–1173
- [40] GARCIA, G. ; TARBOURIECH, S. ; SILVA JR, J. M. d. ; ECKHARD, D.: Finite \mathcal{L}_2 gain and internal stabilisation of linear systems subject to actuator and sensor saturations. In: *IET Control Theory and Applications* 3 (2009), Nr. 7, S. 799–812
- [41] GENESIO, R. ; TARTAGLIA, M. ; VICINO, A.: On the estimation of asymptotic stability regions: state of the art and new proposals. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), S. 747–755
- [42] GILBERT, E. G. ; I., Kolmanovsky: Nonlinear tracking control in the presence of state and control constraints: a generalized reference governor. In: *Automatica* 38 (2002), S. 2063–2073
- [43] GILBERT, E. G. ; ONG, C.-J.: Constrained linear systems with hard constraints and disturbances: An extended command governor with large domain of attraction. In: *Automatica* 47 (2011), S. 334–340

-
- [44] GILBERT, E.G. ; KOLMANOVSKY, I. ; TAN, K. T.: Discrete-Time Reference Governors and the Nonlinear Control of Systems with State and Control Constraints. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 5 (1995), S. 487–504
- [45] GRAICHEN, K.: *Feedforward Control Design for Finite-Time Transition Problems of Nonlinear Systems with Input and Output Constraints*, Universität Stuttgart, Diss., 2006
- [46] GRAICHEN, K. ; HAGENMEYER, V. ; ZEITZ, M.: A new approach to inversion-based feedforward control design for nonlinear systems. In: *Automatica* 41 (2005), S. 2033–2041
- [47] GRAICHEN, K. ; ZEITZ, M.: Inversionsbasierter Vorsteuerungsentwurf mit Ein- und Ausgangsbeschränkungen. In: *at-Automatisierungstechnik* 54 (2006), Nr. 4, S. 187–199
- [48] GRIMM, G. ; POSTLETHWAITE, I. ; TEEL, A. R. ; C., Turner M. ; ZACCARIAN, L: Linear Matrix Inequalities for full and reduced order anti-windup synthesis. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Arlington, USA, Juni 2001
- [49] GUSSNER, T.: *Weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunovfunktionen für Mehrgrößensysteme*, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2007
- [50] GUSSNER, T.: *Reglerentwurf für nichtlineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2011
- [51] GUSSNER, T. ; JOST, M. ; ADAMY, J.: Controller design for a class of nonlinear systems with input saturation using convex optimization. In: *System & Control Letters* 61 (2012), S. 258–265
- [52] GUTMAN, P.-O. ; HAGANDER, P.: A new design of constrained controllers for linear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 1, S. 22–33
- [53] HELMBERG, C.: Semidefinite Programming. In: *Forschungsbericht, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin* (1999)
- [54] HENRION, D. ; TARBOURIECH, S. ; GARCIA, G.: Output Feedback Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems with Saturating

- Controls: An LMI Approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), Nr. 11, S. 2230–2237
- [55] HERMANN, X.: *Untersuchung von Gütemaßen zum konvexen Entwurf weich-strukturvariabler Regler*, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2011
- [56] HERRMANN, G. ; TURNER, M.C. ; MENON, P.P. ; BATES, D.G. ; POSTLETHWAITE, I.: Anti-windup synthesis for nonlinear dynamic inversion controllers. In: *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Controller Design*. Toulouse, France, 2006
- [57] HIPPE, P.: *Windup in Control*. Springer, Berlin, 2006
- [58] HIPPE, P.: Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints. Springer, 2007, Kapitel Stable and Unstable Systems with Amplitude and Rate Saturation, S. 31–60
- [59] HOROWITZ, I. M.: *Synthesis of Feedback Systems*. Academic Press Inc., 1963
- [60] HU, T. ; LIN, Z.: *Control systems with actuator saturation*. Boston : Birkhäuser, 2001
- [61] HU, T. ; LIN, Z.: On improving the performance with bounded continuous feedback laws. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), S. 1570 – 1575
- [62] HU, T. ; LIN, Z.: Output Regulation of Linear Systems with Bounded Continuous Feedback. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (2004), Nr. 11, S. 1941–1953
- [63] HU, T. ; LIN, Z. ; CHEN, B. M.: An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 38, S. 351–359
- [64] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. 3. Springer London, 1995
- [65] JARVIS-WLOSZEK, Z. W.: *Lyapunov Based Analysis and Controller Synthesis for Polynomial Systems using Sum-of-Squares Optimization*, University of Berkeley, Diss., 2003
- [66] JASNIEWICZ, B.: *Über weiche strukturvariable Regelungen mittels impliziter Lyapunov-Funktionen - Von der impliziten zur expliziten Regelung*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2009

- [67] JASNIEWICZ, B. ; ADAMY, J. ; DOMONT-YANKULOVA, D.: Vereinfachte schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen. In: *at-Automatisierungstechnik* 59 (2011), Nr. 2, S. 84–93
- [68] JOST, M.: *Reglerentwurf für nichtlineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkung basierend auf exakter Linearisierung und konvexer Optimierung*, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2010
- [69] KAPILA, V. (Hrsg.) ; GRIGORIADIS, K.M. (Hrsg.): *Actuator saturation control*. New York : Marcel Dekker, Inc., 2002
- [70] KEFFERPÜTZ, K. ; ACKERMANN, C. ; ADAMY, J.: Zwei-Freiheitsgrade-Regelung linearer Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen. In: *at-Automatisierungstechnik* 60 (2012), Nr. 3, S. 155–167
- [71] KEFFERPÜTZ, K. ; ADAMY, J.: Sättigende Führungsregelung für Systeme unter Stellgrößen- und Stellratenbeschränkungen. In: *GMA-Fachausschuss 1.40*. Salzburg, September 2010
- [72] KEFFERPÜTZ, K. ; ADAMY, J.: Saturating Set Point Tracking Control for Linear Systems subject to Input Constraints. In: *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*. Atlanta, USA, Dezember 2010, S. 5174 – 5179
- [73] KEFFERPÜTZ, K. ; ADAMY, J.: Schnelle Regelung linearer Systeme mit Stellgrößen- und Stellratenbegrenzungen. In: *at-Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 7, S. 361–369
- [74] KEFFERPÜTZ, K. ; ADAMY, J.: A Tracking Controller for Linear Systems subject to Input Amplitude and Rate Constraints. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Francisco, USA, Juli 2011, S. 3790–3795
- [75] KEFFERPÜTZ, K. ; JOST, M. ; GUSSNER, T. ; ADAMY, J.: A Saturating Set Point Tracking Controller for a Class of Nonlinear Systems subject to Input Amplitude and Rate Constraints. In: *Proceedings of the Australian Control Conference*. Melbourne, Australien, November 2011, S. 404–409
- [76] KHALIL, K.H.: *Nonlinear systems, 3. ed.* Prentice Hall, 2002

- [77] KIENDL, H.: *Suboptimale Regler mit abschnittweise linearer Struktur*. New York : Springer, 1972
- [78] KIENDL, H. ; SCHNEIDER, G.: Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke const/s^2 aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. In: *Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung* 20 (1972), Nr. 7, S. 289–296
- [79] KIERZENKA, J. ; SHAMPINE, L. F.: A BVP Solver based on Residual Control and the MATLAB PSE. In: *ACM TOMS* 27 (2011), Nr. 3, S. 299–316
- [80] KIM, J.-H. ; JABBARI, F.: Tracking with bounded actuators, scheduled controllers. In: *Proceedings of the IFAC World Congress*. Prag, Tschechische Republik, Juli 2005
- [81] KOJIMA, M.: Sum of Squares Relaxations of Polynomial Semidefinite Programs. In: *Research Report B-397* (2003)
- [82] KRIKELIS, N. J. ; BARKAS, S. K.: Design of tracking systems subject to actuator saturation and integrator wind-up. In: *International Journal of Control* 39 (1984), Nr. 4, S. 667–682
- [83] LEE, J. H.: Model Predictive Control: Review of the Three Decades of Development. In: *International Journal of Control, Automation and Systems* 9 (2011), Nr. 3, S. 415–424
- [84] LENS, H.: *Schnelle Regelung mit Ausgangsrückführung für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2009
- [85] LENS, H. ; ADAMY, J.: Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen. In: *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 2, S. 70–79
- [86] LENS, H. ; DOMONT-YANKULOVA, D. ; ADAMY, J.: A fast nonlinear control method for linear systems with input saturation. In: *Automatica* 47 (2011), S. 857–860
- [87] LÖFBERG, J.: YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan, 2004

-
- [88] LOZIER, J. C.: A steady-state approach to the theory of saturable servo systems. In: *IRE Transactions on Automatic Control* (1956), S. 19–39
- [89] LUENBERGER, D. G.: Observing the state of a linear system. In: *IEEE Transactions on Military Electronics* 8 (1964), S. 74–80
- [90] LUENBERGER, D. G.: Canonical Forms for Linear Multivariable Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* (1967), S. 290–293
- [91] MACIEJOWSKI, J.: *Predictive control with constraints*. Prentice Hall, 2002
- [92] MAYNE, D. Q.: Constrained model predictive control: Stability and optimality. In: *Automatica* 36 (2000), S. 789–814
- [93] MEMON, A. Y. ; KHALIL, H. K.: Output Regulation of Linear Systems Subject to Input Constraints. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexiko, 2008
- [94] MIOTTO, P. ; SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E. ; PADUANO, J. D.: High performance bounded control synthesis with application to the F18. In: *AIAA, Guidance, Navigation and Control Conference*. San Diego, USA, 1996
- [95] MÖNNIGMANN, M. ; KASTSIAN, M.: Fast explicit MPC with multiway trees. In: *Preprints of the 18th IFAC World Congress*. Mailand, Italien, 2011, S. 1356–1361
- [96] MURESAN, M.: *A Concrete Approach to Classical Analysis*. New York : Springer Science+Business, 2009
- [97] NELLES, O.: *Nonlinear System Identification*. Springer, 2000
- [98] NEUNDORF, W: *Numerische Mathematik: Vorlesung, Übungen und Algorithmen*. Shaker Verlag, 2002
- [99] NEVISTIC, V. ; MORARI, M.: Constrained control of feedback-linearizable systems. In: *Proceedings of the European Control Conference*. Rom, Italy, 1995
- [100] NGUYEN, T. ; JABBARI, F.: Disturbance attenuation for systems with input saturation: an LMI approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 44 (1999), S. 852–857

-
- [101] NGUYEN, T. ; JABBARI, F.: Output Feedback Controllers for disturbance attenuation with actuator amplitude and rate saturation. In: *Automatica* 36 (2000), S. 1339–1346
- [102] ORTSEIFEN, A. ; ADAMY, J.: A new Design Method for Mismatch-based Anti-Windup Compensators: Achieving Local Performance and Global Stability in the SISO Case. In: *Proceedings of the American Control Conference*. San Francisco, USA, 2011
- [103] ORTSEIFEN, J. ; ADAMY, J.: A performance-oriented, non-iterative, local design method for mismatch-based anti-windup compensators. In: *Proceedings of the Multi Conference on Systems and Control*. Denver, USA, 2011
- [104] OSTERTAG, E.: An improved path-following method for mixed H_2/H_∞ controller design. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (2008), S. 1967–1971
- [105] PADFIELD, G. D.: *Helicopter Flight Dynamics. 2*. Blackwell Publishing, 2007
- [106] PAPACHRISTODOULOU, A. ; PRAJNA, S.: A tutorial on Sum of Squares Techniques for System Analysis. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Portland, USA, 2005, S. 2686–2700
- [107] PARILLO, P.: *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*, California Institute of Technology, Pasadena, Diss., 2000
- [108] POWERS, V. ; WÖRMANN, T.: An algorithm for sum of squares of real polynomials. In: *Journal of Pure and Applied Linear Algebra* 127 (1998), Nr. 1, S. 99–104
- [109] RAWLINGS, J. B.: Tutorial Overview of Model Predictive Control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 20 (2000), S. 38–52
- [110] ROCKAFELLAR, R. T.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970
- [111] ROPPENECKER, G.: Zustandsregelung linearer Systeme - Eine Neubetrachtung. In: *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 10, S. 491–498

-
- [112] SABERI, A. ; LIN, Z. ; TEEL, A. R.: Control of Linear Systems with Saturating Actuators. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 41 (1996), Nr. 3, S. 368–378
- [113] SABERI, A. ; STOORVOGEL, A. ; SANNUTI, P.: *Control of linear systems with regulation and input constraints*. London : Springer, 2003
- [114] SCHERER, C. ; GAHINET, P. ; CHILALI, M.: Multi-Objective Output-Feedback Control via LMI Optimization. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 42 (1997), S. 896–911
- [115] SCHERER, C. W.: Lineare Matrixungleichungen in der Theorie der robusten Regelung. In: *at-Automatisierungstechnik* 45 (1997), Nr. 7, S. 306–318
- [116] SCHERER, C. W. ; HOL, C. W. J.: Matrix Sum-of-Squares Relaxations for Robust Semi-Definite Programs. In: *Mathematical Programming* 107 (2006), Nr. 1-2, S. 189–211
- [117] SCHMITENDORF, W. E. ; BARMISH, B.R.: Null controllability of linear systems. In: *SIAM Journal of Control and Optimization* 18 (1980), S. 327–345
- [118] SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E.: High Performance bounded control. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Albuquerque, USA, 1997, S. 3250 – 3254
- [119] SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E.: High Performance Control with Position and Rate Limited Actuators. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 9 (1999), S. 617–630
- [120] SHI, G. ; SABERI, A. ; STOORVOGEL, P. A. A. and S. A. A. and Sannuti: Semi-global stabilization and output regulation of constrained linear plants via measurement feedback. In: *International Journal of Control* 75 (2002), S. 1525–1538
- [121] SILVA JR., J. M. d. ; TARBOURIECH, S.: Anti-windup Design with Guaranteed Regions of Stability: an LMI-based Approach. In: *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, Hawaii USA, 2003

- [122] SILVA JR., J. M. d. ; TARBOURIECH, S.: Local Stabilization of Linear Systems under Amplitude and Rate Saturating Actuators. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), S. 842–847
- [123] SILVA JR., J. M. d. ; TARBOURIECH, S. ; REGINATTO, R.: Conservativity of Ellipsoidal Stability Regions Estimates for Input Saturated Linear Systems. In: *Proceedings of the 19th IFAC World Congress*. Barcelona, Spain, 2002
- [124] SINHA, N. K. ; ROOZSA, P.: Some canonical forms for linear multivariable systems. In: *International Journal of Control* 23 (1976), Nr. 6, S. 865–883
- [125] SLOTINE, J.-J. E. ; LI, W.: *Applied Nonlinear Control*. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 1991
- [126] SMITH, J. W.: Analysis of a Longitudinal Pilot-Induced Oscillation experienced on the Approach and Landing Test of the Space Shuttle. In: *NASA Technical Memorandum 81366* (1981)
- [127] SONTAG, E. D.: An algebraic approach to bounded controllability of linear systems. In: *International Journal of Control* 39 (1984), S. 181–188
- [128] SPONG, M.W. ; VIDYASAGAR, M.: *Robot Dynamics and Control*. Wiley New York, 1989
- [129] STEINER, G.: Respect the Unstable. In: *IEEE Control Systems Magazine* (2003), August, S. 12–25
- [130] STOORVOGEL, A. A. ; SABERI, A.: Output Regulation of Linear Plants with Actuators subject to Amplitude and Rate Constraints. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 9 (1999), S. 631–657
- [131] STURM, J. F.: Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. In: *Optimization Methods and Software* 11-12 (1999), S. 761–762
- [132] TARBOURIECH, S. ; GARCIA, G.: Actuator Saturation Control. 2002, Kapitel Output Feedback Compensators for Linear Systems with Position and Rate Bounded Actuators

-
- [133] TARBOURIECH, S. ; GARCIA, G. ; SILVA JR., J.M. Gomes d. ; QUEINNEC, I.: *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London : Springer, 2011
- [134] TARBOURIECH, S. ; PITTET, C. ; BURGAT, C.: Output Tracking Problem for systems with Input Saturations via Nonlinear Intergrating Actions. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 10 (2000), S. 489–512
- [135] TARBOURIECH, S. ; TURNER, M.: Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. In: *IET Control Theory and Applications* 3 (2007), Nr. 1, S. 1–19
- [136] TOH, K. C. ; TODD, M. ; TUTUNCU, R.: Sdpt3 - A matlab software package for semidefinite programming. In: *Optimization Methods and Software* 11 (1999), S. 545–581
- [137] TOLLE, H.: *Mehrgrößen-Regelkreissynthese, Band 2: Entwurf im Zustandsraum*. Oldenbourg Verlag GmbH München, 1985
- [138] TYAN, F. ; BERNSTEIN, D. S.: Dynamic Output Feedback Compensation for Linear Systems with independent Amplitude and Rate Saturations. In: *International Journal of Control* 67 (1997), S. 89–116
- [139] VANANTWERP, J. G. ; BRAATZ, R. D.: A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. In: *Journal of Process Control* (2000), Nr. 10, S. 363–385
- [140] VANDENBERGHE, L. ; BOYD, S.: Semidefinite Programming. In: *SIAM Review* 38 (1996), S. 49–95
- [141] WADA, N. ; SAEKI, M.: Synthesis of a static anti-windup compensator for systems with magnitude and rate limited actuators. In: *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Controller Design*. Prage, Tschechische Republik, 2000
- [142] WANG, Y. ; BOYD, S.: Fast Model Predictive Control Using Online Optimization. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 18 (2010), Nr. 2, S. 267–278
- [143] WESTON, F. W. ; POSTLETHWAITE, I.: Linear conditioning for systems containing saturating actuators. In: *Automatica* 36 (2000), S. 1347–1354

-
- [144] WREDENHAGEN, G.F. ; BELANGER, P.R.: Piecewise-linear LQ Control for Systems with Input Constraints. In: *Automatica* 30 (1994), S. 403–416
- [145] WU, F. ; LIN, Z. ; ZHENG, Q.: Output Feedback Stabilization of Linear Systems with Actuator Saturation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 52 (2007), Nr. 1, S. 122–128
- [146] WU, F. ; SOTO, M.: Extended anti-windup control schemes for LTI and LFT systems with actuator saturations. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 14 (2004), S. 1255–1281
- [147] YANKULOVA, D. ; ADAMY, J.: LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen. In: *at-Automatisierungstechnik* 56 (2008), S. 636 – 643
- [148] ZACCARIAN, L. ; TEEL, A. R.: *Modern Anti-Windup Synthesis: Control Augmentation for Actuator Saturation*. Princeton University Press, 2011 (Princeton Series in Applied Mathematics)
- [149] ZHANG, X.: *Parameter-dependent Lyapunov functions and stability analysis of linear parameter-dependent dynamical systems*, Georgia Institute of Technology, Diss., 2003
- [150] ZHOU, B. ; ZHENG, W. X. ; DUAN, G.-R.: An improved treatment of the saturation nonlinearity with its application to control of systems subject to nested saturation. In: *Automatica* 47 (2011), S. 306–315

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Klaus Kefferpütz
Anschrift	Arnulfstr. 4 85298 Scheyern
Geburtsdatum/-ort	19. 07. 1981 in Siegburg

Werdegang

seit Mai 2012	Entwicklungsingenieur bei MBDA Deutschland GmbH, Schrobenhausen
2008 – 2012	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Automatisierungstechnik, FG Regelungstheorie und Robotik an der TU Darmstadt
2009 – 2012	Promotionsstipendium der Konrad-Adenauer-Stiftung
2008 – 2009	Forschungsprojekt in Kooperation mit dem Honda Research Institute Europe, Offenbach
2006 – 2008	Ergänzungsstudium Elektrotechnik mit Vertiefung Automatisierungstechnik an der TU-Darmstadt, Abschluss: Dipl.-Ing. (TU)
2002 – 2006	Studium der Elektrotechnik an der Hochschule Bonn-Rhein-Sieg, Abschluss: Dipl.-Ing. (FH)
2001	Abitur, Rhein-Sieg Gymnasium, Sankt Augustin
