

Verallgemeinerte Energieäquivalenz zur Modellierung anisotroper Schädigung bei inelastischem und anisotropem Materialverhalten

Am Fachbereich Mechanik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Phys. Dirk Reckwerth
aus Hanau

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis
Korreferent: Prof. Dr. H. E. Exner
Tag der Einreichung: 17.12.2003
Tag der mündlichen Prüfung: 14.05.2004

Darmstadt 2004
D17

Abstract

Continuum damage mechanics models rely upon the works of Kachanov [1] and Rabotnov [2], who considered creep rupture of metals under uniaxial loading. These works have been later extended in the framework of irreversible thermodynamics in order to describe general three-dimensional loading processes (see e.g. the literature cited in Skrzypek [3] and Chaboche [4]). The basic idea of all continuum damage mechanics models is to assign to each material point of the real damaged material a fictitious undamaged material, the response of which is governed by a known elasto-plastic constitutive law. Then the unknown constitutive law for the real material has to be derived from that one for the fictitious material by using some equivalence concept, which must be defined appropriately. Generally, there are two concepts in common use when modeling damage effects within the continuum damage mechanics approach. The first one is the concept of effective stress combined with the strain equivalence hypothesis, which can be attributed to Lemaitre and Chaboche [4]-[9]. The second concept, first introduced by Cordebois and Sidoroff [10], makes use of the notions of effective strain and effective stress and requires the hypothesis of energy equivalence. In this work a new energy equivalence concept, the principle of the generalized energy equivalence, is introduced, in order to formulate the anisotropic damage of anisotropic elasto-(visko)plastic materials thermodynamically consistent. In order to describe the procedure as simply as possible, first the case of the isotropic damage by the example of an isotropic elasto-plastic material is discussed. In a second step the principle is extended to the anisotropic case. A typical example of the application of anisotropic elasto-viskoplastic material laws with damage is the theoretical description of the superalloy CSMX-4. To use the special characteristics of these superalloys, the numeric simulation represents an important tool. Thermodynamically consistently formulated material models for the description of such materials contribute crucially to the success of such computations. This work describes the complete way from the development of a theoretical concept of continuum mechanics, which is used for the thermodynamically consistent formulation of anisotropic damage in anisotropic elasto-(visko)plastic materials, up to the application, which is discussed on the basis of two examples.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 3 |
| 1.1 | Thema der Arbeit | 3 |
| 1.2 | Voraussetzungen | 4 |
| 1.3 | Notation | 4 |
| 2 | Grundlagen der Kontinuumsschädigungsmechanik | 7 |
| 2.1 | Definition der Schädigungsvariablen | 7 |
| 2.2 | Zerlegung der Deformation | 8 |
| 2.3 | Bilanzgleichungen der Thermodynamik | 9 |
| 2.3.1 | Energieerhaltung - Erster Hauptsatz der Thermodynamik | 9 |
| 2.3.2 | Entropiebilanz - Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik | 10 |
| 3 | Isotrope Schädigungsmodelle | 11 |
| 3.1 | Isotropes Plastizitätsmodell | 11 |
| 3.2 | Konzepte der Kontinuumsschädigungsmechanik | 14 |
| 3.3 | Prinzip der Dehnungsäquivalenz | 15 |
| 3.4 | Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz | 19 |
| 3.4.1 | Thermodynamische Betrachtung | 19 |
| 3.4.2 | Fließfunktion - Fließregel | 22 |
| 3.4.3 | Verfestigungsregeln | 24 |
| 3.4.4 | Dissipationsungleichung - Dissipationspotential | 25 |
| 3.4.5 | Diskussion des Modells - Einachsiger Zug | 26 |
| 3.4.6 | Gekerbte Probe unter Zugbelastung | 32 |
| 4 | Anisotrope Schädigungsmodelle | 36 |
| 4.1 | Anisotropes Materialmodell ohne Schädigung | 36 |
| 4.2 | Fiktives Materialmodell | 41 |
| 4.3 | Thermodynamische Betrachtungen für das anisotrope reale Material | 42 |
| 4.4 | Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz | 43 |
| 4.4.1 | Definition der effektiven Spannungen | 43 |
| 4.4.2 | Energieäquivalenz | 44 |
| 4.4.3 | Äquivalenz der dissipierten Energie | 46 |
| 4.4.4 | Reales Materialmodell | 46 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.5 | Schädigungsmodell mit statischer Erholung | 52 |
| 5 | Schädigungsbeschreibung | 55 |
| 5.1 | Schädigungsgesetz | 55 |
| 5.2 | Kriterien der Schädigung im Falle eines kubisch anisotropen Materials . . . | 56 |
| 5.3 | Die thermodynamisch konjugierte Kraft der Schädigung | 58 |
| 6 | Numerische Implementierung der Modelle | 60 |
| 6.1 | Integrationsalgorithmus | 60 |
| 6.1.1 | Operator-Split-Verfahren | 60 |
| 6.1.2 | Bestimmung der konsistenten Tangente | 66 |
| 7 | Beispiele | 68 |
| 7.1 | Einkristalline Nickel-Basis-Legierung CSMX-4 | 68 |
| 7.1.1 | Eigenschaften | 68 |
| 7.1.2 | Orientierung | 69 |
| 7.2 | Anpassung der Materialparameter | 70 |
| 7.2.1 | Direktes und inverses Problem | 71 |
| 7.2.2 | Messfehler und Streuung | 72 |
| 7.2.3 | Anpassung an das Experiment | 73 |
| 7.3 | Gekerbte Rundprobe | 79 |
| 7.4 | Lochfeldprobe | 88 |
| 8 | Zusammenfassung | 96 |
| | Literaturverzeichnis | 100 |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thema der Arbeit

Die Kontinuumschädigungsmechanik basiert auf den Arbeiten von Kachanov [1] und Rabotnov [2], welche das Versagen von Metallen bei Kriechvorgängen unter uniaxialer Belastung beschreiben. Diese Arbeiten wurden später im Rahmen der irreversiblen Thermodynamik erweitert, um allgemeine dreidimensionale Belastungsprozesse zu erfassen (siehe in Skrzypek [3] und Chaboche [4] zitierte Literatur). Man könnte die zentrale Idee aller Kontinuumschädigungsmodelle so zusammenfassen, dass ein fiktives ungeschädigtes Material dem realen geschädigten Material punktweise zugeordnet wird. Das Verhalten des fiktiven Materials wird durch ein bekanntes konstitutives Materialgesetz (z.B. elastisch-plastisches Materialverhalten), welches keine Schädigung berücksichtigt, modelliert. Die unbekannt konstitutiven Gleichungen des realen Materials werden unter Verwendung eines sogenannten Äquivalenzkonzept aus denen des fiktiven Materials hergeleitet. Gewöhnlich werden zwei Konzepte verwendet. Das erste, welches Lemaitre und Chaboche [4]-[9] zugeschrieben wird, wird als Konzept der effektiven Spannungen bezeichnet und verwendet die Annahme der äquivalenten Dehnungen. Das zweite Konzept wurde zuerst von Cordebois und Sidoroff [10] eingeführt. In diesem Fall macht man Gebrauch von effektiven Dehnungen und effektiven Spannungen und verwendet die Hypothese der Energieäquivalenz. In dieser Arbeit wird ein neues Energieäquivalenzkonzept, das Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz, eingeführt, um die anisotrope Schädigung anisotroper elastisch-(visko)plastischer Materialien thermodynamisch konsistent zu formulieren. Um das Vorgehen möglichst einfach zu erläutern, wird zuerst der Fall der isotropen Schädigung am Beispiel eines isotropen elastisch-plastischen Materials diskutiert und das Prinzip im Anschluss auf den anisotropen Fall erweitert. Ein typisches Beispiel für die Anwendung anisotroper elastisch-viskoplastischer Materialgesetze mit Schädigung ist die theoretische Beschreibung der Gasturbinenschaufellegierung CSMX-4. Um die besonderen Eigenschaften dieser Superlegierungen voll auszunutzen stellt die numerische Simulation ein wichtiges Werkzeug dar. Thermodynamisch konsistent formulierte Materialmodelle zur Beschreibung solcher Werkstoffe tragen entscheidend zum Erfolg solcher Berechnungen bei. Diese Arbeit beschreibt den vollständigen Weg von der Entwicklung eines theoretischen

Konzeptes der Kontinuumsmechanik, das zur thermodynamisch konsistenten Formulierung von anisotroper Schädigung in anisotropen elastisch-(visko)plastischen Materialien verwendet wird, bis hin zur Anwendung, die anhand zweier Beispiele diskutiert wird.

1.2 Voraussetzungen

In dieser Arbeit werden die Deformationen der materiellen Körper als klein vorausgesetzt. Die betrachteten Prozesse sind isotherm ($\theta = \text{const}$) und die Temperaturverteilung wird als homogen, d.h. $\text{grad}(\theta) = 0$ vorausgesetzt. Für den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik wird die Clausius-Duhem-Ungleichung verwendet. Die formulierten Gesetzmäßigkeiten beinhalten keine räumlichen Abhängigkeiten, so dass auf eine explizite Erwähnung der Ortskoordinaten verzichtet wird. Die materielle Zeitableitung einer Funktion $\dot{\varphi}(t)$ wird mit $\dot{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ bezeichnet, wobei t die Zeit darstellt. Zur Unterscheidung von Skalaren, Vektoren und Tensoren werden folgende Konventionen verwendet: Skalare sind in Normalschrift, Vektoren und Tensoren zweiter Stufe in Fettschrift gedruckt und fettgedruckter kaligrafischer Schrifttyp kennzeichnet Tensoren vierter Stufe. Komponentendarstellungen tensorieller Größen beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem mit zugehörigem Basissystem \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Es gilt die Einsteinsche Summationskonvention.

1.3 Notation

Skalare

| | | |
|-----------------|-------|---|
| ρ | | Dichte |
| β, γ | ... | Materialparameter der isotropen Verfestigung |
| λ, μ | ... | Lamé'sche Konstanten bzw. Elastizitätsparameter |
| ρ | | Dichte des Materials |
| Ψ | | spezifische freie Energiefunktion |
| φ | | Dissipationspotential |
| b, c | | Materialparameter der kinematischen Verfestigung für isotrope Plastizitätsmodelle |
| D | | Isotrope Schädigungsvariable |
| R | | Innere Spannung der isotropen Verfestigung |
| R_0 | | Materialparameter der isotropen Verfestigung |
| r | | Innere Dehnung der isotropen Verfestigung |
| r_0 | | Materialparameter der isotropen Verfestigung |
| k | | Radius der Fließfläche |
| k_0 | | Anfangsradius der Fließfläche |
| s | | plastische Bogenlänge |
| Λ | | plastischer Multiplikator |
| m | | Schädigungseffektfaktor |
| ω, π | | Materialparameter der statischen Erholung bei isotroper Verfestigung |

| | | |
|---------------------|-------|--|
| w | | Materialparameter der statischen Erholung bei kinematischer Verfestigung |
| m, K | ... | Viskositätsparameter der Plastizität |
| r_c, A_c, k_c | | Materialparameter für das Schädigungsdissipationspotential |
| α_c, β_c | .. | Materialparameter für das Schädigungsgesetz |
| n | | Materialparameter der Schädigung bei verallgemeinerter Energieäquivalenz |
| q | | Materialparameter für duktile isotrope Schädigung |
| A_D | | Schädigungsfläche innerhalb des RVE |
| A_0 | | Fläche innerhalb des RVE |
| A | | Reduzierte Fläche innerhalb des RVE |
| D_n | | Schädigung im RVE |
| E | | E-Modul |
| σ | | Spannung bei einachsiger Betrachtung |
| ε | | Dehnung bei einachsiger Betrachtung |
| y | | Kinematische Verfestigung bei einachsiger Betrachtung |

Vektoren

| | | |
|--------------|-------|----------------|
| \mathbf{n} | | Normalenvektor |
|--------------|-------|----------------|

Tensoren zweiter Stufe

| | | |
|--------------|-------|--|
| $\mathbf{1}$ | | Einheitstensor |
| ξ | | Innere Spannung der kinematischen Verfestigung |
| Ω | | Energiefreisetzungsrage |
| \mathbf{D} | | Schädigungstensor |
| \mathbf{F} | | Deformationsgradient |
| \mathbf{E} | | (Linearisierter) Green'scher Verzerrungstensor |
| \mathbf{T} | | Cauchy'scher Spannungstensor |
| \mathbf{Y} | | Innere Dehnung der kinematischen Verfestigung |

Tensoren vierter Stufe

| | | |
|--------------------------------|-------|--|
| \mathcal{Q}, \mathcal{N} | .. | Materialtensoren der kinematischen Verfestigung für anisotrope Plastizitätsmodelle |
| \mathcal{D} | | Schädigungstensor |
| \mathcal{C} | | Elastizitätstensor |
| \mathcal{M} | | Schädigungseffektstensor |
| \mathcal{K} | | Strukturtenor in der Fließfunktion |
| \mathcal{B} | | Materialtensor der statischen Erholung bei kinematischer Verfestigung |
| $\mathcal{Q}_c, \mathcal{M}_c$ | | Materialtensoren der Schädigung |

Operatoren

| | | |
|---|-------|--|
| grad | ... | Gradient |
| tr | | Spur |
| div | | Divergenz |
| det | | Determinante |
| \mathbf{A}^D | | Deviatorischer Anteil von \mathbf{A} ($\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{2}\text{tr}\mathbf{A}\mathbf{1}$) |
| $\ \mathbf{A}\ $ | ... | euklidische Norm ($\ \mathbf{A}\ = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$) |
| $\langle \rangle$ | | McAuley-Klammer |
| $()^{-1}$ | | Inverse |
| $()^T$ | | Transponierte |
| $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ | . | dyadisches Produkt ($\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij}B_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$) |
| $\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}$ | .. | unteres dyadisches Produkt ($\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} = A_{ik}B_{jl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$) |
| $\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}$ | .. | oberes dyadisches Produkt ($\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B} = A_{il}B_{jk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$) |
| $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ | .. | Skalarprodukt ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = A_{ij}B_{ij}$) |
| $\mathbf{A}\mathbf{B}$ | | Tensorprodukt ($\mathbf{A}\mathbf{B} = A_{ip}B_{pj}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$) |
| $\mathcal{C}[\mathbf{A}]$ | ... | Anwenden von \mathcal{C} auf \mathbf{A} ($\mathcal{C}[\mathbf{A}] = C_{ijkl}A_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$) |

Rechenregeln

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}^{T^{-1}} = \mathbf{A}^{-1T} = \mathbf{A}^{T^{-1}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Kapitel 2

Grundlagen der Kontinuumschädigungsmechanik

2.1 Definition der Schädigungsvariablen

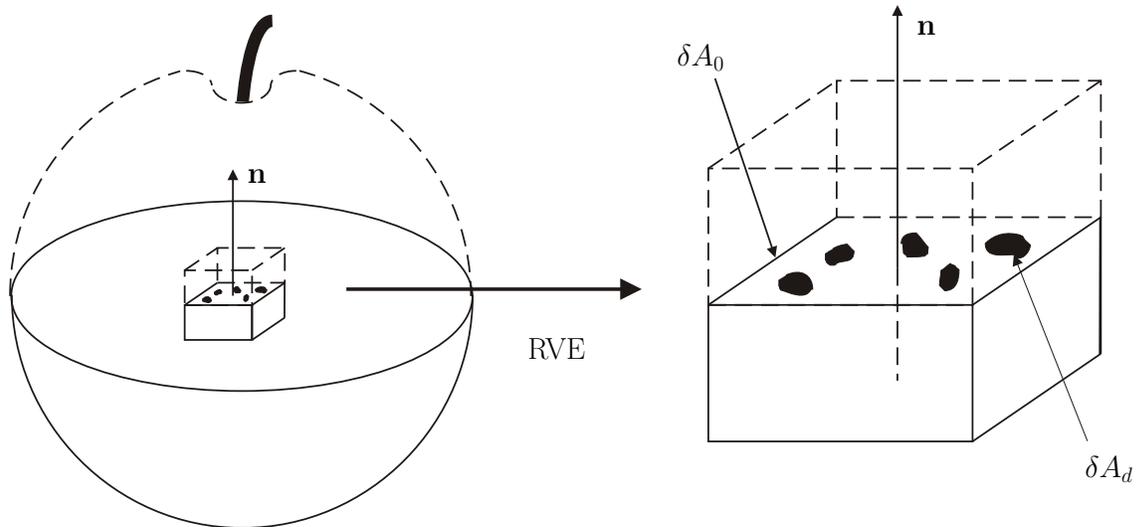


Abbildung 2.1: Mikro-Meso Definition des der Schädigung (nach J. Lemaitre, 1975)

Der kontinuumsmechanische Schädigungsansatz basiert auf der Annahme, dass der Satz interner Variablen durch eine Schädigungsvariable ergänzt wird. In dieser Arbeit wird eine Schädigungsvariable verwendet, welche zuerst von Lemaitre und Chaboche [8] eingeführt wurde. Zur Motivation betrachtet man ein sogenanntes repräsentatives Volumenelement (RVE) eines geschädigten Körpers. δA_0 beschreibt die Fläche innerhalb dieses RVE, welche durch die Normale \mathbf{n} (Abb. 2.1) gekennzeichnet ist. Die entsprechende durch Mikrorisse und Poren reduzierte Oberfläche wird mit δA bezeichnet ($\delta A < \delta A_0$). Die

Schädigungsfläche in Richtung der Normalen \mathbf{n} ist dann gegeben durch

$$\delta A_D = \delta A_0 - \delta A . \quad (2.1)$$

Die Schädigung in Richtung der Normalen \mathbf{n} , D_n wird definiert als

$$D_n := \frac{\delta A_D}{\delta A_0} . \quad (2.2)$$

Optional ist es möglich diese Definition zu erweitern, indem man D_n als Funktion von $\delta A_D/\delta A_0$ definiert. Damit können auch nichtlineare Zusammenhänge zwischen einer internen Zustandsvariablen D_n und der physikalischen Größe $\delta A_D/\delta A_0$ beschrieben werden:

$$D_n := \bar{D}_n \left(\frac{\delta A_D}{\delta A_0} \right) \quad (2.3)$$

Die Angabe eines Normalenvektors weist auf den anisotropen Charakter der Schädigung hin. Geht man davon aus, dass sich die Schädigung in allen Richtungen gleich stark entwickelt, kann man sich auf die Beschreibung isotroper Schädigung beschränken. Für den Fall isotroper Schädigung, ist die Schädigungsvariable skalar und wird mit D bezeichnet. Für die Werte die D annehmen kann, gilt $D \in [0, 1]$. Die Zustände $D = 0$ und $D = 1$ entsprechen dem ungeschädigten Zustand und dem lokalen totalen Versagen des Materials, während Werte innerhalb $D \in (0, 1)$ einer Teilschädigung entsprechen.

Für anisotrope Schädigungskonzepte verwendet man entweder Schädigungstensoren zweiter Stufe \mathbf{D} , oder Schädigungstensoren vierter Stufe \mathcal{D} . Die Konzepte dieser Arbeit beschränken sich auf die Verwendung eines Schädigungstensor zweiter Stufe. Für die Werte, die \mathbf{D} annehmen, kann gilt $D_i^* \in [0, 1]$. Die D_i^* sind dabei die Eigenwerte des Schädigungstensors. Die Zustände $D_i^* = 0$ und $D_i^* = 1$ entsprechen dem ungeschädigten Zustand und dem lokalen totalen Versagen des Materials in der jeweiligen Hauptachse, während Werte innerhalb $D_i^* \in (0, 1)$ einer Teilschädigung entsprechen.

2.2 Zerlegung der Deformation

Im folgenden wird ein materieller Körper \mathcal{B} im dreidimensionalen euklidischen Punktraum E betrachtet, der bezgl. einer Referenzkonfiguration den Raumbereich \mathcal{R}_R einnimmt. Nach Wahl eines raumfesten Bezugspunktes O in E lässt sich jedem materiellen Punkt X aus \mathcal{R}_R eine Ortsvektor \mathbf{X} zuordnen. Der Ort \mathbf{x} , den der materielle Punkt X zur Zeit t in der Momentankonfiguration einnimmt, wird durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

beschrieben, wobei für festgehaltenes t eine Inverse $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ existiert. Der dabei von \mathcal{B} beaufschlagte Raumbereich wird mit \mathcal{R}_t bezeichnet. Für einen beliebigen aber festen Zeitpunkt t wird der Deformationsgradient \mathbf{F} wie folgt definiert:

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \bar{\mathbf{x}} . \quad (2.5)$$

Der Deformationsgradient stellt somit eine Abbildungsvorschrift dar, die materielle Linienelemente der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ in materielle Linienelemente der Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ transformiert:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} . \quad (2.6)$$

Dabei wird $\det \mathbf{F} > 0$ vorausgesetzt. Mit der Einführung eines Verschiebungsvektors $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.7)$$

kann man den Deformationsgradienten auch wie folgt darstellen:

$$\mathbf{F} = \text{GRAD} [\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)] = \mathbf{1} + \text{GRAD} \mathbf{u} = \mathbf{1} + \mathbf{H} , \quad (2.8)$$

wobei \mathbf{H} der Verschiebungsgradient ist. Für die Behandlung von kontinuumsmechanischen Problemen verwendet man als Verzerrungsmaß häufig den Green-Lagrangischen Verzerrungstensor \mathbf{G} , der durch

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.9)$$

definiert ist. $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ in (2.9) ist der rechte Cauchy-Green-Tensor. Der Verzerrungstensor \mathbf{G} lässt sich durch den Verschiebungsgradienten \mathbf{H} ausdrücken:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) . \quad (2.10)$$

Der Term $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ beschreibt den nichtlinearen Anteil in \mathbf{G} . Beschränkt man sich auf die Annahme kleiner Deformationen ($\|\mathbf{H}\| \ll 1$, $\|\dot{\mathbf{H}}\| \ll 1$) kann der nichtlineare Anteil von \mathbf{G} vernachlässigt werden und man erhält den linearisierten Green-Lagrangischen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) . \quad (2.11)$$

2.3 Bilanzgleichungen der Thermodynamik

2.3.1 Energieerhaltung - Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik in lokaler Form lautet

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho_R} w - \frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{q} + r_W , \quad (2.12)$$

wobei e die spezifische innere Energie, w die Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Referenzkonfiguration, \mathbf{q} der Wärmeflussvektor, r_W die Wärmezufuhr pro Zeit und Masseneinheit die Referenzkonfiguration und ρ_R bzw. ρ die Massendichte in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration ist.

2.3.2 Entropiebilanz - Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die Materialgesetze müssen stets den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Anhand dieser Forderung lassen sich Restriktionen an die Materialmodelle ableiten.

Ausgehend von der Entropiebilanz in lokaler Form

$$\dot{\eta}_* = \frac{r_W}{\theta} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \gamma_* , \quad (2.13)$$

mit η als spezifischer Entropie und θ als absoluter Temperatur, erhält man mit der Definition der spezifischen freien Energie Ψ

$$\Psi = e - \theta \eta_* , \quad (2.14)$$

und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (2.12) für die spezifische Rate γ_* der Entropieproduktion:

$$\theta \gamma_* = -\dot{\Psi} - \dot{\theta} \eta_* + \frac{1}{\rho_R} w - \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta} \cdot \operatorname{grad} \theta . \quad (2.15)$$

Das Postulat der positiven Entropieproduktion fordert nun, dass jeder zulässige thermomechanische Prozess die Ungleichung

$$\gamma_* \geq 0 \quad (2.16)$$

zu jedem Zeitpunkt t und an jedem materiellen Punkt \mathbf{X} erfüllt. Somit lautet der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung

$$-\dot{\Psi} - \dot{\theta} \eta_* + \frac{1}{\rho_R} w - \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 . \quad (2.17)$$

Im Fall kleiner Deformationen und $\rho \approx \rho_R$ ergibt sich für die Clausius-Duhem-Ungleichung:

$$-\dot{\Psi} - \dot{\theta} \eta_* + \frac{1}{\rho_R} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \frac{\mathbf{q}}{\rho_R \theta} \cdot \operatorname{grad} \theta \geq 0 . \quad (2.18)$$

Kapitel 3

Isotrope Schädigungsmodelle

Anhand eines isotropen Plastizitätsmodell wird im folgenden das Konzept der verallgemeinerten Energieäquivalenz kombiniert mit der Hypothese der effektiven Spannungen eingeführt. Zur Vereinfachung wird die Schädigung in diesem Kapitel isotrop formuliert. Um einen Vergleich zu ermöglichen, wird vorher das Konzept der Dehnungsäquivalenz kombiniert mit der Hypothese der effektiven Spannungen diskutiert. Der verwendete Ansatz führt auf eine Klasse von Fließfunktionen, welche durch einen Parameter n charakterisiert werden. Die Ausführungen hier entsprechen denjenigen in [46].

3.1 Isotropes Plastizitätsmodell

Das (ungeschädigte) Plastizitätsmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung, auf das dieses Kapitel aufbaut, wird durch folgende Gleichungen charakterisiert:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p , \quad (3.1)$$

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_p , \quad (3.2)$$

$$\Psi_e = \bar{\Psi}_e(\mathbf{E}_e) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C} [\mathbf{E}_e] , \quad (3.3)$$

$$\mathbf{C} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} , \quad (3.4)$$

$$\Psi_p = \Psi_p^{(kin)} + \Psi_p^{(is)} \quad (3.5)$$

$$\Psi_p^{(kin)} = \bar{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}) = \frac{c}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} , \quad (3.6)$$

$$\Psi_p^{(is)} = \bar{\Psi}_p^{(is)}(r) = \frac{\gamma}{2\rho} (r^2 + 2r_0 r) , \quad (3.7)$$

$$\xi = \xi(\mathbf{Y}) := \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \mathbf{Y}} = c \mathbf{Y} , \quad (3.8)$$

$$R = R(r) := \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r} = \gamma(r + r_0) , \quad (3.9)$$

$$F = \bar{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R) := \bar{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}) - k \quad : \text{Fließfunktion} \quad (3.10)$$

$$f = \bar{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}) := \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D} \quad , \quad (3.11)$$

$$k := R + k_0 = \gamma(r + r_0) + k_0 \quad , \quad (3.12)$$

$$F = 0 \Leftrightarrow f = k \quad : \text{Fließbedingung} \quad , \quad (3.13)$$

$$\text{Plastizität} \Leftrightarrow F = 0 \ \& \ \left(\dot{F}\right)_{\mathbf{E}_p = \text{const}} > 0 \quad , \quad (3.14)$$

Fließregel :

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \begin{cases} \Lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{T}} = \Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{3\Lambda}{2k} (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D & \text{für plastische Belastung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad (3.15)$$

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p} = \Lambda \quad , \quad (3.16)$$

Clausius-Duhem Ungleichung:

$$\mathcal{D}_{C-D} := \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho \dot{\Psi} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_e + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \rho \dot{\Psi}_e - \rho \dot{\Psi}_p \geq 0 \quad , \quad (3.17)$$

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_e] \quad : \quad \text{Elastizitätsgesetz} \quad , \quad (3.18)$$

Dissipations Ungleichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d &:= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \rho \dot{\Psi}_p = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - R\dot{r} \\ &= (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - R\dot{r} + \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - b\Lambda \boldsymbol{\xi} = \dot{\mathbf{E}}_p - b\dot{s} \boldsymbol{\xi} \quad : \quad \text{Kinematische Verfestigungsregel} \quad , \quad (3.20)$$

$$\dot{r} = (1 - \beta r) \Lambda = \left(1 - \beta \frac{R - \gamma r_0}{\gamma}\right) \dot{s} \quad : \quad \text{Isotrope Verfestigungsregel} \quad . \quad (3.21)$$

(3.1) ist die Zerlegung der Dehnung in einen elastischen und einen plastischen Anteil, Ψ ist die spezifische freie Energie, μ und λ sind die Elastizitätsparameter. Isotrope und kinematische Verfestigung werden durch die inneren Variablen r und \mathbf{Y} beschrieben. r ist skalarwertig und \mathbf{Y} ist ein Tensor zweiter Stufe. Beide Variablen stellen innere Dehnungen dar. Aus den Gleichungen (3.8), (3.9) erkennt man, dass $\boldsymbol{\xi}$ und R die entsprechenden thermodynamisch konjugierten Spannungen zu \mathbf{Y} und r sind. Die Gleichungen (3.10)-(3.13) definieren die Fließbedingung, mit k als Radius der Fließfläche. γ , R_0 , c , k_0 in den Gleichungen (3.7)-(3.12) sind Materialparameter. r_0 stellt eine Anfangsdehnung dar, welche die Anfangsspannung $R_0 = \gamma r_0$ verursacht. Eine derartige Anfangsdehnung ist wichtig, um die Energiespeicherung in Metallen bei plastischen Verformungen zu beschreiben (siehe auch Chaboche [11], [12]). Die plastische Dehnung wird durch eine assoziierte Normalenregel beschrieben. Für den Fall ratenunabhängiger

Plastizität wird der skalare plastische Multiplikator Λ aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ bestimmt. Plastisches Fließen findet statt, wenn (3.14) erfüllt ist. Wie in [13] gezeigt wird ist diese Bedingung sowohl für Dehnungs- als auch für Spannungsgesteuerte Prozesse gültig. Das Elastizitätsgesetz (3.18) und die Dissipationsungleichung (3.19) sind hinreichende Bedingungen um die Clausius-Duhem Ungleichung (3.17) zu erfüllen. (3.20) and (3.21) sind Evolutionsgleichungen für kinematische und isotrope Verfestigung, β , b sind nichtnegative Materialparameter.

Um sicherzustellen, dass (3.20) and (3.21) nicht die Dissipationsungleichung verletzen, setzt man in (3.19) die materielle Zeitableitung von (3.6) und (3.7) ein und erhält

$$\mathcal{D}_d = \dot{s}k_0 + R(\dot{s} - \dot{r}) + \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0 . \quad (3.22)$$

Weil $\dot{s} \geq 0$, erhält man entsprechend auch $\dot{s}k_0 \geq 0$. Da $r \geq 0$ gelten muss, gilt nach (3.9) auch $R \geq 0$. Somit sind

$$\dot{s} - \dot{r} \geq 0 , \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0 , \quad (3.24)$$

hinreichende Bedingungen um (3.22) zu erfüllen. Die Ungleichungen (3.23) und (3.24) sind erfüllt, wenn man die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}} = \Lambda b \boldsymbol{\xi} , \quad (3.25)$$

$$\dot{s} - \dot{r} = \Lambda \beta r , \quad (3.26)$$

verwendet, welche gleichbedeutend mit (3.20) und (3.21) sind. Dabei ist zu bemerken, dass die Evolutionsgleichung (3.20), zusammen mit homogenen Anfangsbedingungen, eine deviatorische Gestalt für \mathbf{Y} und damit auch für $\boldsymbol{\xi}$ bewirkt.

Alternativ ist die Einführung eines sogenannten Dissipationspotentials möglich,

$$\varphi = \bar{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R) = \bar{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R) + \frac{1}{2}b \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma}(R - \gamma r_0)^2 . \quad (3.27)$$

$\bar{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R)$ ist eine stetig differenzierbare, konvexe skalarwertige Funktion, die den Ursprung ihres Zustandsraums umschließt. Die Dissipationsungleichung (3.19) ist dann automatisch erfüllt, wenn man die Normalenregeln

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} = \Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}} , \quad (3.28)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = -\Lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = -\Lambda \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{T}} + b \boldsymbol{\xi} \right) = \dot{\mathbf{E}}_p - b \Lambda \boldsymbol{\xi} , \quad (3.29)$$

$$\dot{r} = -\Lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial R} = -\Lambda \left(-1 + \frac{\beta}{\gamma}(R - R_0) \right) = (1 - \beta r) \Lambda , \quad (3.30)$$

annimmt. Dieses Konzept wurde von Lemaitre und Chaboche [8] vorgeschlagen. Das vorgestellte Plastizitätsmodell, das durch die Gleichungen (3.1)-(3.21) beschrieben wird, wurde von Chaboche [11], [14] diskutiert. Die Evolutionsgleichung (3.20) ist äquivalent zur Armstrong-Frederick Regel [15].

3.2 Konzepte der Kontinuumsschädigungsmechanik

Wie schon erwähnt, wird in der Kontinuumsschädigungsmechanik der Satz der inneren Variablen um die Variable D erweitert. Weiterhin gilt die Zerlegung

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p , \quad (3.31)$$

während für die freie Energie Ψ die funktionalen Beziehungen

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{E}_e, \mathbf{Y}, r, D) = \Psi_e + \Psi_p , \quad \Psi_p = \Psi_p^{(kin)} + \Psi_p^{(is)} , \quad (3.32)$$

$$\Psi_e = \hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, D) , \quad \Psi_p^{(kin)} = \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, D) , \quad \Psi_p^{(is)} = \hat{\Psi}_p^{(is)}(r, D) , \quad (3.33)$$

angenommen werden.

Eine hinreichende Bedingung um die Clausius-Duhem Ungleichung

$$\mathcal{D}_{C-D} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho \dot{\Psi}_e - \rho \dot{\Psi}_p^{(kin)} - \rho \dot{\Psi}_p^{(is)} \geq 0 \quad (3.34)$$

für rein mechanische Prozesse zu erfüllen, ist das Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e} , \quad (3.35)$$

zusammen mit folgender Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D}_d := \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - R\dot{r} - \rho \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial D} \dot{D} \geq 0 , \quad (3.36)$$

$$\boldsymbol{\xi} := \rho \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \mathbf{Y}} , \quad R := \rho \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r} . \quad (3.37)$$

Offenbar sind die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{dp} &:= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - R\dot{r} \\ &= (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - R\dot{r} + \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0 , \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\mathcal{D}_{dd} := -\rho \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial D} \dot{D} \geq 0 , \quad (3.39)$$

hinreichende Bedingungen zur Erfüllung von (3.36). Die Ungleichungen (3.38) und (3.39) beschreiben die Dissipationsanteile für plastisches Fließen und Schädigungsprozesse. Entsprechend der Theorie ohne Schädigung (siehe Abschnitt 3.1) wird (3.38) erfüllt, wenn man die plastischen Evolutionsgleichungen mit einer Normalenregel

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} , \quad \dot{\mathbf{Y}} = -\Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} , \quad \dot{R} = -\Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} , \quad (3.40)$$

beschreibt, wobei

$$\varphi = \hat{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) \quad (3.41)$$

ein konvexes Dissipationspotential ist. Plastisches Fließen tritt auf, wenn

$$\text{Plastizität} \Leftrightarrow F = 0 \ \& \ (\dot{F})_{\mathbf{E}_p=\text{const}} \geq 0 , \quad (3.42)$$

erfüllt ist, wobei

$$F = \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) = \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) - \hat{k}(R, D) , \quad (3.43)$$

die Fließfunktion beschreibt . In dem Fall, dass

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} , \quad (3.44)$$

präsentiert (3.40) eine assoziierte Normalenregel.

Das Konzept der effektiven Spannungen kombiniert mit dem Prinzip der Dehnungsäquivalenz und das Konzept der Energieäquivalenz werden in der Kontinuumschädigungsmechanik oft verwendet. Im Fall isotroper Schädigung, hat sich das Prinzip der Dehnungsäquivalenz als sehr effizientes Mittel zur Modellierung konstitutiver Gleichungen für das Verhalten duktiler Materialien erwiesen. Aus diesem Grund ist es wichtig, die Ergebnisse dieser Theorie mit denen der verallgemeinerten Energieäquivalenz, die im folgenden eingeführt wird, zu vergleichen. Im nächsten Abschnitt wird deshalb ein etabliertes Schädigungsmodell von Chaboche beschrieben [4], das auf der Annahme der Dehnungsäquivalenz basiert.

3.3 Prinzip der Dehnungsäquivalenz

Kontinuumsmechanische Modelle, die auf dem Prinzip der Dehnungsäquivalenz basieren und mit plastischer Verformung gekoppelt sind, wurden von Lemaitre und Chaboche [4], [7] eingeführt und diskutiert. In diesen Abschnitt wird der Vorschlag von Chaboche [4] vorgestellt. Mit Bezug auf das Plastizitätsmodell aus Abschnitt. 3.1 kann man die wichtigsten Aspekte dieser Theorie wie folgt zusammenfassen.

Die Anteile der freien Energiefunktion $\hat{\Psi}_e$, $\hat{\Psi}_p^{(kin)}$, $\hat{\Psi}_p^{(is)}$ in (3.32), (3.33) werden durch

$$\hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, D) = \frac{(1-D)}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}_e] , \quad (3.45)$$

$$\hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, D) = \frac{c(1-D)}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} , \quad (3.46)$$

$$\hat{\Psi}_p^{(is)}(r, D) = \frac{\gamma(1-D)}{2\rho} (r^2 + 2r_0 r) , \quad (3.47)$$

dargestellt. Weiter ergibt sich, mit Blick auf (3.35), (3.37),

$$\mathbf{T} = (1 - D)\mathbf{C}[\mathbf{E}_e], \quad \boldsymbol{\xi} = (1 - D)c\mathbf{Y}, \quad R = (1 - D)\gamma(r + r_0). \quad (3.48)$$

Dies führt auf

$$\tilde{\mathbf{T}} := \frac{\mathbf{T}}{1 - D} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_e], \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} := \frac{\boldsymbol{\xi}}{1 - D} = c\mathbf{Y}, \quad \tilde{R} := \frac{R}{1 - D} = \gamma(r + r_0), \quad (3.49)$$

wobei $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ und \tilde{R} sogenannte effektive Spannungen darstellen. Vergleicht man (3.49)₁, (3.49)₂, (3.49)₃ mit (3.18), (3.8), (3.9), bemerkt man, dass die Dehnungs-Spannungs-Beziehungen (3.49), für das geschädigte Material aus denen für das ungeschädigte Material (Abschnitt 3) resultieren, indem man die Spannungsvariablen \mathbf{T} , $\boldsymbol{\xi}$, R durch die korrespondierenden effektiven Spannungsvariablen $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, \tilde{R} ersetzt. Die Dehnungsvariablen \mathbf{E}_e , \mathbf{Y} , r und der Materialparameter r_0 bleiben dagegen unverändert. Dies motiviert auch die Fließfunktion \hat{F} in (3.43) und das Dissipationspotential $\hat{\varphi}$ in (3.41) mit den effektiven Spannungen $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, \tilde{R} statt den Spannungen \mathbf{T} , $\boldsymbol{\xi}$, R zu verwenden:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) &= \bar{F}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) = \bar{f}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \tilde{R} - k_0 \\ &= \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) - \frac{R}{1 - D} - k_0, \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) &= \bar{f}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{1 - D} \cdot \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{1 - D}}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) &= \bar{\varphi}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) \\ &= \bar{F}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) + \frac{1}{2}b \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma} (\tilde{R} - \gamma r_0)^2 \\ &= \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) + \frac{b}{2(1 - D)^2} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{R}{1 - D} - \gamma r_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

\hat{F} in (3.50) und $\hat{\varphi}$ in (3.52) sind konvexe Funktionen. Für die Evolutionsgleichungen (3.40) ergeben sich dann zu

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \frac{3\Lambda}{2(1 - D)\hat{f}} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{1 - D} = \frac{3\dot{s}}{2\hat{f}} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{1 - D}, \quad (3.53)$$

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p} = \frac{\Lambda}{1 - D}, \quad (3.54)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - b\dot{s} \frac{\boldsymbol{\xi}}{1 - D} = \dot{\mathbf{E}}_p - bc\dot{s} \dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - bc \frac{\Lambda}{1 - D} \mathbf{Y}, \quad (3.55)$$

$$\dot{r} = (1 - \beta r)\dot{s} = (1 - \beta r)\frac{\Lambda}{1 - D} . \quad (3.56)$$

Bleibt noch die Gültigkeit der Dissipationsungleichung (3.39) zu überprüfen. Aus (3.45)-(3.47) folgt

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial D} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C} [\mathbf{E}_e] + c \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} + \gamma(r^2 + 2r_0 r)) \\ &= \rho (\bar{\Psi}_e(\mathbf{E}_e) + \bar{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}) + \bar{\Psi}_p^{(is)}(r)) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Man sieht sofort, dass dieser Ausdruck stets nichtnegativ ist. Das bedeutet, dass (3.39) in jedem erlaubten Prozess erfüllt ist, wenn gilt

$$\dot{D} \geq 0 . \quad (3.58)$$

Anders ausgedrückt, jede Evolutionsgleichung, die für D eine monoton ansteigende Funktion darstellt, ist kompatibel mit (3.39). Für eine einachsige Zugbelastung, liefert das vorgestellte Model folgende Gleichungen:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p , \quad (3.59)$$

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon_e , \quad (3.60)$$

$$\sigma - \frac{3}{2}\xi = R + (1 - D)k_0 , \quad (3.61)$$

$$\xi = (1 - D)cy , \quad (3.62)$$

$$R = (1 - D)\gamma(r + r_0) , \quad (3.63)$$

$$\dot{y} = (1 - bcy)\dot{\varepsilon}_p , \quad (3.64)$$

$$\dot{r} = (1 - \beta r)\dot{\varepsilon}_p . \quad (3.65)$$

Dabei sind, $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ der E-Modul, und $\sigma, \varepsilon, \varepsilon_e, \varepsilon_p, \xi, y$ die einachsigen Komponenten von $\mathbf{T}, \mathbf{E}, \mathbf{E}_e, \mathbf{E}_p, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{Y}$. Um einen Einblick in die Eigenschaften des Modells zu erlangen, ist es ausreichend, (3.59)-(3.65) mit einem einfachen Schädigungsgesetz der Form

$$D = \left(\frac{\varepsilon_p}{\alpha}\right)^2 , \quad (3.66)$$

zu ergänzen (Chaboche [4]). Abb. (3.1) zeigt die Dehnungs-Spannungs-Kennlinie für diese Gleichungen. Die entsprechenden Materialparameter werden in Tabelle 3.1 angegeben. Weiter ist der Fall idealer Plastizität abgebildet ($R = y = 0$), bei dem sich in Fall plastischer Deformation aus (3.59)-(3.65)

$$\varepsilon_e = \frac{k_0}{E} = \text{const} \quad (3.67)$$

ergibt.

Tabelle 3.1: Materialparameter für (3.59)-(3.65)

| E [MPa] | k_0 [MPa] | r_0 | c [MPa] | γ [MPa] | b [MPa] | β [MPa] | α |
|-----------|-------------|-------|-----------|----------------|-----------|---------------|----------|
| 200000 | 200 | 0 | 30000 | 30000 | 10 | 10 | 0,02 |

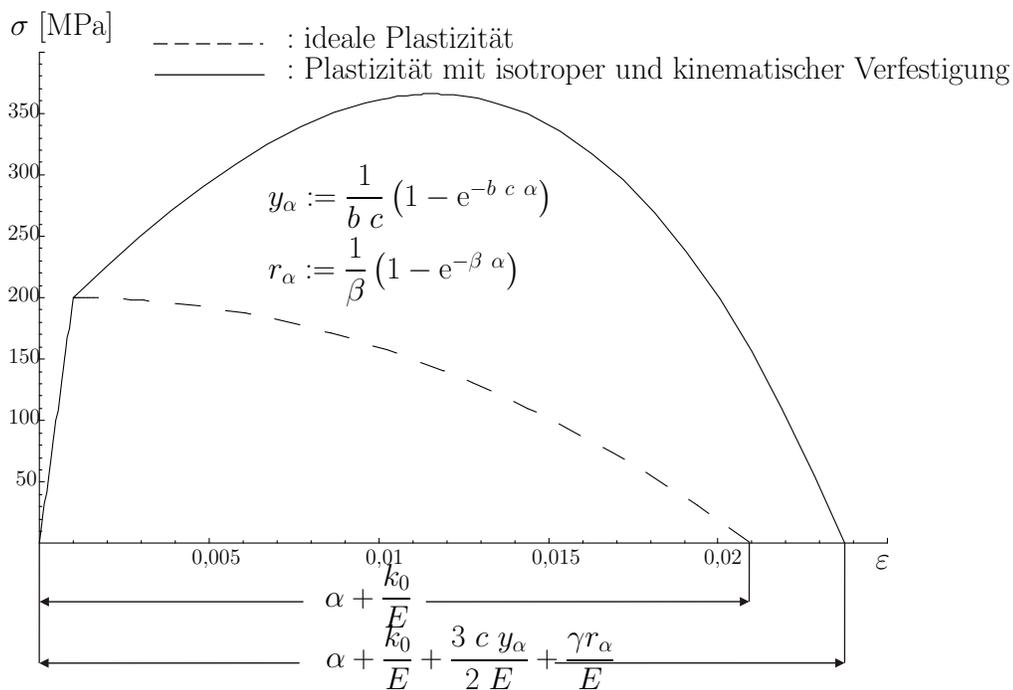


Abbildung 3.1: Dehnungs-Spannungskurven für uniaxiale Zugbelastung. Die konstitutiven Gleichungen basieren auf dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip von Chaboche [4].

Für Plastizität mit isotroper und kinematischer Verfestigung ergibt sich die elastische Dehnung bei plastischer Deformation zu

$$\varepsilon_e = \frac{3cy}{2E} + \frac{\gamma r}{E} + \frac{k_0}{E}. \quad (3.68)$$

Aus (3.64) und (3.65) ergibt sich, dass r und y monoton ansteigende Funktionen in Abhängigkeit von ε_p sind, unabhängig von den Materialparametern der Verfestigung. Das vorgestellte Model wurde von Lämmer und Tsakmakis [16] in Bezug auf weitere Modelle, die aus der Dehnungsäquivalenz abgeleitet werden können, diskutiert. Weiter haben diese Autoren gezeigt, dass diese Modelle auf große Deformationen in einem thermodynamisch konsistenten Rahmen erweitert werden können.

3.4 Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz

3.4.1 Thermodynamische Betrachtung

Schädigungstheorien, die auf dem Konzept der Energieäquivalenz basieren, wurden von Cordebois und Sidoroff [10] eingeführt. Diese Autoren haben ein kontinuumsmechanisches Model für ein elastisch-plastisches Material vorgeschlagen, welches im Rahmen der irreversiblen Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen formuliert worden ist. Die Energieäquivalenz mit einem ungeschädigten fiktiven Material wurde nur für den elastischen Teil der freien Energiefunktion angenommen.

Saanouni et al. [17] und Chow und Lu [18] erweiterten die Theorie von Cordebois und Sidoroff, um auch eine Energieäquivalenz in Bezug auf die gesamte im Material gespeicherte Energie inklusive des plastischen Anteils zu erhalten. Weiter bestimmten Saanouni et al. [17] die Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen aus einem Dissipationspotential, dass von effektiven Spannungsvariablen abhängig ist.

In diesem Abschnitt wird ein neues kontinuumsmechanisches Schädigungsmodell diskutiert, dass auf dem Prinzip der Energieäquivalenz basiert und in [46] bereits vorgestellt wurde. Im weiteren wird dieses Konzept als verallgemeinerte Energieäquivalenz bezeichnet. Für die unbekanntten Evolutionsgleichungen des geschädigten realen Materials wird eine Abhängigkeit von der Schädigungsvariable D angenommen, wie in Abschn. 3.2 erklärt wird. Für jeden Materialpunkt wird ein fiktives ungeschädigtes Material angenommen, dessen Evolutionsgleichungen bekannt sind. Diese Evolutionsgleichungen enthalten keine direkte Schädigungsvariable, die Zustandsvariablen sind jedoch sogenannte effektive Zustandsvariablen, die geeignet definiert werden. Die unbekanntten Evolutionsgesetze, welche Dehnungs-Spannungs-Kurven des realen Materials beschreiben, können mit Hilfe dieser Zuordnung bestimmt werden.

Im folgenden werden für die bekannten Evolutionsgleichungen des fiktiven Materials, die elastisch-plastischen Evolutionsgleichungen aus Abschn. 3 angenommen. Bezeichnet X eine Zustandsvariable des realen Materials, dann ist \tilde{X} die entsprechende

korrespondierende effektive Zustandsvariable des zugeordneten fiktiven Materials. In diesem Fall werden die effektiven Variablen $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{E}}_e$, $\tilde{\mathbf{E}}_p$, $\tilde{\mathbf{Y}}$, \tilde{r} , $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, \tilde{R} und die effektive Anfangsdehnung \tilde{r}_0 betrachtet. Wenn sich die (konstitutiven) Funktionen auf das fiktive Material beziehen, werden sie mit dem Symbol (f) gekennzeichnet. (Die Funktionen, die das reale Material beschreiben, werden nicht besonders gekennzeichnet). Das verwendete fiktive elastisch-plastische Materialmodell wird durch folgende Gleichungen beschrieben (vergl. Abschn.3):

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_p , \quad (3.69)$$

$$\Psi^{(f)} = \Psi_e^{(f)} + \Psi_p^{(f)} , \quad \Psi_p^{(f)} = \Psi_p^{(f)kin} + \Psi_p^{(f)is} , \quad (3.70)$$

$$\Psi_e^{(f)} = \bar{\Psi}_e^{(f)}(\tilde{\mathbf{E}}_e) = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{E}}_e \cdot \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e] , \quad (3.71)$$

$$\Psi_p^{(f)kin} = \bar{\Psi}_p^{(f)kin}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \frac{c}{2\rho} \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{Y}} , \quad (3.72)$$

$$\Psi_p^{(f)is} = \bar{\Psi}_p^{(f)is}(\tilde{r}) = \frac{\gamma}{2\rho} (\tilde{r}^2 + 2\tilde{r}_0\tilde{r}) , \quad (3.73)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} = \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e] , \quad (3.74)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(f)kin}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} = c \tilde{\mathbf{Y}} , \quad (3.75)$$

$$\tilde{R} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(f)is}}{\partial \tilde{r}} = \gamma(\tilde{r} + \tilde{r}_0) , \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(f)} &= \bar{\varphi}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) \\ &= \bar{F}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) + \frac{1}{2} b \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} (\tilde{R} - \gamma \tilde{r}_0)^2 , \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\bar{F}^{(f)} = \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \tilde{R} - k_0 , \quad (3.78)$$

$$\bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D} , \quad (3.79)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \Lambda^{(f)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \Lambda^{(f)} \frac{\partial \bar{F}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \frac{3\Lambda^{(f)}}{2\bar{f}^{(f)}} (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D , \quad (3.80)$$

$$\dot{\tilde{s}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}} = \Lambda^{(f)} , \quad (3.81)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{Y}}} = -\Lambda^{(f)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(f)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - b \dot{\tilde{s}} \tilde{\boldsymbol{\xi}} , \quad (3.82)$$

$$\dot{\tilde{r}} = (1 - \beta \tilde{r}) \dot{\tilde{s}} , \quad (3.83)$$

$$\mathcal{D}_d^{(f)} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{R} \dot{\tilde{r}} , \quad (3.84)$$

mit $\tilde{\rho} \equiv \rho$. Die effektiven Spannungsvariablen werden, motiviert durch die Arbeiten von Cordebois und Sidoroff [10] und Saanouni et al. [17], wie folgt definiert

$$\tilde{\mathbf{T}} := \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{1-D}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} := \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1-D}}, \quad \tilde{R} := \frac{R}{\sqrt{1-D}}. \quad (3.85)$$

Das verallgemeinerte Energieäquivalenzprinzip verwendet die Annahme, dass zwei bestimmte energetische Größen für das reale und für das fiktive Material in einem bestimmten Zusammenhang zueinander stehen. Erstens wird, wie bei Saanouni et al. [17], die Äquivalenz der Anteile der freien Energie für das reale Material $\hat{\Psi}_e$, $\hat{\Psi}_p^{(kin)}$, $\hat{\Psi}_p^{(is)}$ (vergl. (3.32),(3.33)) mit denen des fiktiven Materials $\bar{\Psi}_e^{(f)}$, $\bar{\Psi}_p^{(f)kin}$, $\bar{\Psi}_p^{(f)is}$ verlangt (siehe auch 3.71)-(3.73)):

$$\hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, D) = \bar{\Psi}_e^{(f)}(\tilde{\mathbf{E}}_e) = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{E}}_e \cdot \mathcal{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e], \quad (3.86)$$

$$\hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, D) = \bar{\Psi}_p^{(f)kin}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \frac{c}{2\rho} \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}, \quad (3.87)$$

$$\hat{\Psi}_p^{(is)}(r, D) = \bar{\Psi}_p^{(f)is}(\tilde{r}) = \frac{\gamma}{2\rho} (\tilde{r}^2 + 2\tilde{r}_0\tilde{r}). \quad (3.88)$$

Dieser Satz von Gleichungen ermöglicht die Bestimmung der effektiven Dehnungen $\tilde{\mathbf{E}}_e = \tilde{\mathbf{E}}_e(\mathbf{E}, D)$, $\tilde{\mathbf{Y}}_e = \tilde{\mathbf{Y}}_e(\mathbf{Y}, D)$, $\tilde{r} = \tilde{r}(r, D)$. Zweitens wird die dissipierte Leistung \mathcal{D}_{dp} des realen Materials über eine konstitutive Zustandsfunktion in Zusammenhang mit der dissipierten Leistung $\mathcal{D}^{(f)}$ des fiktiven Materials gebracht. Mit dieser Kopplung wird es möglich, die Fließfunktion für das reale Material zu bestimmen, ebenso wie die Evolutionsgleichungen für die inneren Dehnungen \mathbf{E}_p , \mathbf{Y} , r .

Für $\tilde{\mathbf{E}}_e$ wird eine Beziehung der Form $\tilde{\mathbf{E}}_e = \lambda \mathbf{E}_e$ angenommen. λ ist dabei eine skalarwertige Zustandsfunktion. Mit Blick auf (3.35), (3.74), (3.86) erhält man

$$\tilde{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{1-D}} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} = \frac{\rho}{\lambda} \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{T}, \quad (3.89)$$

was zu dem Ergebnis $\lambda = \sqrt{1-D}$ führt. Weiter erhält man

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_e &= \sqrt{1-D} \mathbf{E}_e, \\ \hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, D) &= \frac{(1-D)}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathcal{C}[\mathbf{E}_e], \\ \mathbf{T} &= (1-D) \mathcal{C}[\mathbf{E}_e]. \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

Das bedeutet, dass das Elastizitätsgesetz für die beiden Spannungstensoren \mathbf{T} und $\tilde{\mathbf{T}}$ zusammen mit der Energieäquivalenz (3.86) es ermöglicht, den effektiven Dehnungstensor

$\tilde{\mathbf{E}}_e$ zu bestimmen. Genauso lassen sich folgende Relationen bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &= \sqrt{1-D} \mathbf{Y} , \\ \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, D) &= \frac{c(1-D)}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} , \\ \boldsymbol{\xi} &= (1-D)c \mathbf{Y} , \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= \sqrt{1-D} r , \quad \tilde{r}_0 = \sqrt{1-D} r_0 , \\ \hat{\Psi}_p^{(is)}(r, D) &= \frac{\gamma(1-D)}{2\rho} (r^2 + 2r_0 r) , \\ R &= (1-D)\gamma(r + r_0) . \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Im nächsten Schritt muss festgelegt werden, wie das reale Material, unter Bezugnahme auf das fiktive Material, Energie dissipiert. Aus den Beziehungen (3.75), (3.37)₁ und der Gleichung (3.87), erkennt man, dass eine Beziehung der Form $\tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} = \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}}$ im Rahmen der Energieäquivalenz im allgemeinen nicht erfüllt werden kann. Diese Gleichung gilt nur für den Fall $\dot{D} \equiv 0$, das heißt die Schädigung müsste immer konstant bleiben. Diese Folgerungen lassen sich auch für die isotrope Verfestigung verifizieren. Aus diesem Grund, wird die Existenz einer nichtnegativen skalarwertigen Funktion χ angenommen, die von den Zustandsvariablen und deren zeitlichen Änderungsraten abhängen kann. Die Funktion χ erfüllt die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \chi \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p , \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} = \chi \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} , \quad \tilde{R} \dot{\tilde{r}} = \chi R \dot{r} , \quad (3.93)$$

und damit

$$\mathcal{D}_{dp} = \frac{1}{\chi} \left(\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{R} \dot{\tilde{r}} \right) = \frac{1}{\chi} \mathcal{D}_d^{(f)} . \quad (3.94)$$

(3.93) kontrolliert also die Leistung, mit der das reale Material, mit Bezug auf das fiktive Material, plastische Energie dissipiert. Genau diese Gleichungen charakterisieren damit das Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz.

3.4.2 Fließfunktion - Fließregel

Für die Fließfunktion des realen Materials wird man die Form (3.43) erwarten. Zunächst wird diese aber nicht näher spezifiziert. $\bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R})$ in (3.79) wird, in Übereinstimmung mit (3.80), nur als plastisches Potential für die Dehnung $\tilde{\mathbf{E}}_p$ angenommen. Die Änderung der Dehnung $\tilde{\mathbf{E}}_p$ wird durch eine Normalenregel beschrieben

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{F}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}, D)}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} . \quad (3.95)$$

Mit (3.85)₁, (3.93)₁, (3.80), (3.78), (3.95) erhält man

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p &= \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{1-D}} \cdot \left(\Lambda^{(f)} \frac{\partial \bar{f}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \right) = \Lambda^{(f)} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \\ &= \chi \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p = \chi \Lambda \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}}.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Dabei wurde von folgenden Beziehungen Gebrauch gemacht

$$\begin{aligned}\hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) &:= \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}} \cdot \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}}},\end{aligned}\quad (3.97)$$

$$\frac{\partial \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}})}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \sqrt{1-D} \frac{\partial \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D)}{\partial \mathbf{T}}.\quad (3.98)$$

Gleichung (3.96) ist erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\Lambda^{(f)}}{\chi \Lambda} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}}.\quad (3.99)$$

Es wird angenommen, dass plastische Deformation (sowohl für das fiktive als auch für das reale Material) nur dann auftritt, wenn die Fließkriterien erfüllt sind. Diese werden wie folgt definiert

$$\text{Plastizität} \Leftrightarrow \hat{F} = 0 \quad \& \quad \left(\frac{d}{dt} \hat{F} \right)_{\mathbf{E}_p = \text{const}} > 0.\quad (3.100)$$

Eine Gleichung der Form $\bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - (\tilde{R} + k_0) = 0$ beschreibt nicht unbedingt eine Fließbedingung für das reale Material und $\hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D)$ kann nicht aus (3.99) bestimmt werden, weil $\Lambda^{(f)}$ ebenfalls unbekannt ist. Um dieses Problem zu lösen, wird der skalare Faktor $\Lambda^{(f)}/\chi\Lambda$ als konstitutive Funktion angenommen. Weil $\hat{F}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\xi}, R, D)$ und $\hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D)$ Funktionen der Zustandsvariablen $\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D$ sind, muss $\Lambda^{(f)}/\chi\Lambda$, wegen (3.99) auch eine Funktion dieser Variablen sein (aber nicht von deren zeitlicher Änderung). Im weiteren wird angenommen, dass $\Lambda^{(f)}/\chi\Lambda$ eine nichtnegative Funktion der Schädigungsvariable D ist:

$$\frac{\Lambda^{(f)}}{\chi\Lambda} =: g = g(D).\quad (3.101)$$

Die unbekannte Fließfunktion \hat{F} kann jetzt aus der Differentialgleichung, die sich aus (3.99) ergibt,

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} = g \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}},\quad (3.102)$$

bestimmt werden. Eine Lösung ist

$$\begin{aligned}\hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) &= g \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) - \hat{k}(R, D) \\ &= g \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \hat{k}(R, D),\end{aligned}\quad (3.103)$$

mit $\hat{k}(R, D)$ als Integrationskonstante. Auf der rechten Seite von (3.103) erscheint der Term $g \bar{f}^{(f)}$. Für \hat{k} wird deshalb folgende Form vorgeschlagen

$$\hat{k}(R, D) = g\tilde{R} + k_0. \quad (3.104)$$

Aus (3.103), (3.104), (3.97), (3.85)₃ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) &= g \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - g\tilde{R} - k_0 \\ &= g \sqrt{\frac{3(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{2\sqrt{1-D}}} \cdot \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}} - g \frac{R}{\sqrt{1-D}} - k_0.\end{aligned}\quad (3.105)$$

Mit der jetzt bekannten Fließfunktion erhält man die Fließregel (3.95) in folgender Form

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \frac{3\Lambda g}{2\hat{f}\sqrt{1-D}} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}}, \quad (3.106)$$

mit

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p} = \frac{\Lambda g}{\sqrt{1-D}}. \quad (3.107)$$

Mit Bezug auf (3.81) gilt $\dot{s} = \Lambda^{(f)}$, so dass

$$\frac{\dot{s}}{s} = \frac{\Lambda^{(f)}}{\Lambda g} \sqrt{1-D} = \chi \sqrt{1-D}. \quad (3.108)$$

Genauso zeigt sich, dass

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \chi \sqrt{1-D} \dot{\mathbf{E}}_p, \quad (3.109)$$

gilt. Aus den Gleichungen (3.105) und (3.106) folgt, dass es für die Bestimmung der Fließfunktion und der Fließregel ausreichend ist, die Funktion $g(D)$ zu kennen. Es ist nicht notwendig $\Lambda^{(f)}$ und χ explizit zu kennen. Λ wird dagegen wie üblich aus der Bedingung $\frac{d}{dt}\hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) = 0$ gewonnen.

3.4.3 Verfestigungsregeln

Unter Verwendung von (3.85)₂, (3.82) und (3.91)₁ in (3.93)₂ erhält man:

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1-D}} \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{s} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right) = \chi \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}}. \quad (3.110)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\chi \sqrt{1-D}} \left(\dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{\tilde{\xi}} \right). \quad (3.111)$$

Weiter erhält man mit (3.108), (3.109), (3.85)₂, (3.107) und (3.91)₃

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{s} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1-D}} = \dot{\mathbf{E}}_p - b c \dot{s} \sqrt{1-D} \mathbf{Y} = \dot{\mathbf{E}}_p - b c \Lambda g \mathbf{Y}. \quad (3.112)$$

(3.112) ist die kinematische Verfestigungsregel für das reale Material. Die entsprechende Gleichung für isotrope Verfestigung kann aus (3.93)₃ in gleicherweise bestimmt werden:

$$\tilde{R} \dot{r} = \frac{R}{\sqrt{1-D}} \left(1 - \beta \sqrt{1-D} r \right) \left(\dot{s} \chi \sqrt{1-D} \right) = \chi R \dot{r}. \quad (3.113)$$

(3.113) ist erfüllt, wenn gilt

$$\dot{r} = \left(1 - \beta \sqrt{1-D} r \right) \dot{s} = \left(1 - \beta \sqrt{1-D} r \right) \frac{\Lambda g}{\sqrt{1-D}}. \quad (3.114)$$

(3.113) ist die Evolutionsgleichung des realen Materials für isotrope Verfestigung.

3.4.4 Dissipationsungleichung - Dissipationspotential

Zuerst muss die Kompatibilität der in Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 bestimmten Evolutionsgleichungen mit der Dissipationsungleichung (3.38) bestätigt werden. Die dafür benötigten Terme $(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p$ und $R \dot{r}$, $\boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}})$, lassen sich wie folgt umformen:

$$(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p = R \dot{s} + \frac{\sqrt{1-D}}{g} k_0 \dot{s}, \quad (3.115)$$

$$R \dot{r} = R \dot{s} - \beta \sqrt{1-D} R r \dot{s}, \quad (3.116)$$

$$\boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) = \frac{b}{\sqrt{1-D}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}) \dot{s}. \quad (3.117)$$

Einsetzen in (3.38)₂ liefert

$$\mathcal{D}_{dp} = \left(\frac{\sqrt{1-D}}{g} k_0 + \beta \sqrt{1-D} R r + \frac{b}{\sqrt{1-D}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}) \right) \dot{s}. \quad (3.118)$$

(3.118) ist immer nichtnegativ. Unter Berücksichtigung von (3.94) bestätigt dieses Ergebnis auch die Ungleichung $\mathcal{D}_d^{(f)} \geq 0$ für den Fall $\chi > 0$. Zur Verifizierung der Ungleichung (3.39) bestimmt man aus (3.90)-(3.92),

$$-\rho \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial D} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}_e] + c \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} + \gamma(r^2 + 2r_0 r)) \geq 0 \quad (3.119)$$

und erkennt, dass es ausreichend ist wenn

$$\dot{D} \geq 0, \quad (3.120)$$

gilt. Damit wird (3.39) und somit die Gültigkeit der gesamten Dissipationsungleichung (3.36) erfüllt.

Alternativ können die Fließregel (3.106), die kinematische Verfestigungsregel (3.112) und die isotrope Verfestigungsregel (3.114) aus dem konvexen plastischen Dissipationspotential

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) &:= g\bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - g\tilde{R} - k_0 + \frac{g\beta}{2\gamma}(\tilde{R} - \gamma\tilde{r}_0)^2 + \frac{1}{2}gb\tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ &= g\hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) - g\frac{R}{\sqrt{1-D}} - k_0 \\ &\quad + \frac{g\beta}{2\gamma}\left(\frac{R}{\sqrt{1-D}} - \gamma\sqrt{1-D}r_0\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}gb\frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1-D}} \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1-D}}, \end{aligned} \quad (3.121)$$

bestimmt werden.

Die sich ergebenden Gleichungen

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{3\Lambda g}{2\hat{f}\sqrt{1-D}} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}}, \quad (3.122)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = -\Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{E}}_p - b\dot{s} \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1-D}}, \quad (3.123)$$

$$\dot{r} = -\Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial R} = (1 - \beta\sqrt{1-D}r)\dot{s}, \quad (3.124)$$

stimmen mit (3.106), (3.112) und (3.114) überein.

3.4.5 Diskussion des Modells - Einachsiger Zug

In den Abschnitten 3.4.1-3.4.4 wurden die konstitutiven Gleichungen für ein mit Schädigung gekoppeltes elastisch-plastisches Materialmodell aus der verallgemeinerten Energieäquivalenz hergeleitet. Das resultierende Materialmodell lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p, \quad (3.125)$$

$$\mathbf{T} = (1-D)\mathbf{C}[\mathbf{E}_e], \quad \boldsymbol{\xi} = (1-D)c\mathbf{Y}, \quad R = (1-D)\gamma(r+r_0), \quad (3.126)$$

$$\hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, D) = g(D)\hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) - \hat{k}(R, D), \quad (3.127)$$

$$\hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, D) = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}} \cdot \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}}}, \quad (3.128)$$

$$\hat{k}(R, D) = g(D) \frac{R}{\sqrt{1-D}} + k_0, \quad (3.129)$$

$$\text{Plastizität} \Leftrightarrow \hat{F} = 0 \quad \& \quad \left(\frac{d\hat{F}}{dt} \right)_{\mathbf{E}_p = \text{konst}} > 0, \quad (3.130)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{3\Lambda g}{2\hat{f}\sqrt{1-D}} \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\sqrt{1-D}}, \quad \dot{s} = \frac{\Lambda g}{\sqrt{1-D}}, \quad (3.131)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - bc\dot{s}\sqrt{1-D} \mathbf{Y} = \dot{\mathbf{E}}_p - bc\Lambda g \mathbf{Y}, \quad (3.132)$$

$$\dot{r} = (1 - \beta\sqrt{1-D} r)\dot{s} = (1 - \beta\sqrt{1-D} r) \frac{\Lambda g}{\sqrt{1-D}}. \quad (3.133)$$

Für den Fall isotroper Schädigung, ist

$$g(D) = \frac{1}{(1-D)^{n-\frac{1}{2}}} \quad (3.134)$$

eine mögliche Definition von $g(D)$, mit n als Materialparameter. Die charakteristischen Eigenschaften des Modells können mit einer einachsigen Zugbelastung diskutiert werden. Dafür kann man aus den Gleichungen (3.125)-(3.134), das eindimensionale Modell gewinnen:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad (3.135)$$

$$\sigma = (1-D)E\varepsilon_e, \quad (3.136)$$

$$\sigma - \frac{3}{2}\xi = R + (1-D)^n k_0, \quad (3.137)$$

$$\xi = (1-D)cy, \quad (3.138)$$

$$R = (1-D)\gamma(r + r_0), \quad (3.139)$$

$$\dot{y} = (1 - bc\sqrt{1-D} y)\dot{\varepsilon}_p, \quad (3.140)$$

$$\dot{r} = (1 - \beta\sqrt{1-D} r)\dot{\varepsilon}_p. \quad (3.141)$$

Die Notation ist dieselbe, wie sie in Abschnitt 3.3 verwendet wird. Zur Vereinfachung der Diskussion werden die Gleichungen (3.135)-(3.141) mit dem einfachen Schädigungsgesetz (3.66)

$$D = \left(\frac{\varepsilon_p}{\alpha} \right)^2, \quad (3.142)$$

vervollständigt. Die Dehnungs-Spannungs Kurve dieser Gleichungen, für verschiedene Parameter n und $c = \gamma$ werden in Abb. 3.2-3.6 gezeigt. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

Für $n < 1$ erkennt man, dass die Dehnung ε für $D \rightarrow 1$ gegen ∞ geht. Analytisch erkennt man dies, wenn man (3.136)-(3.138) nach ε_e auflöst:

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{3c}}{2E} y + \frac{\gamma}{E} (r + r_0) + \frac{k_0}{E} (1-D)^{(n-1)}. \quad (3.143)$$

Weil $\varepsilon_p \rightarrow \alpha < \infty$ wenn $D \rightarrow 1$, wird die Gesamtdehnung ε hauptsächlich durch ε_e bestimmt. Die elastische Dehnung ε_e wird durch (3.143) beschrieben. Wegen (3.140) und (3.141) sind die Dehnungen y und r endlich für $D \rightarrow 1$. Für den Fall $n \geq 1$ erhält man aus (3.143), dass für $D \rightarrow 1$, ε_e und ε gegen einen endlichen Wert streben. Die Annahme $n > 1$ erscheint für metallische Werkstoffe i.a. nicht sehr realistisch. Diese Einschätzung wird durch Betrachtung des Falles der idealen Plastizität gestützt. Aus (3.143) erhält man dann

$$\varepsilon_e = \frac{k_0}{E}(1 - D)^{n-1} . \quad (3.144)$$

Für $n > 1$ erhält man dann $\lim \varepsilon_e \rightarrow 0$ wenn $D \rightarrow 1$. Dieses widerspricht der Erwartung, das ε_e bis zum totalen lokalen Versagen konstant bleibt. Das heißt, die Gitterverzerrung bleibt beim elastischen ideal plastischen Materials während des plastischen Fließens konstant, unabhängig von der Schädigungsentwicklung. Daraus folgt der Schluss, dass $n = 1$ für metallische Werkstoffe die beste Wahl darstellt.

In diesem Fall ($n = 1$) ist die Fließfunktion identisch zu der Fließfunktion, welche sich mit dem Konzept der Dehnungsäquivalenz ergibt. Das gilt auch für die freie Energiefunktion, das Elastizitätsgesetz und die Beziehungen $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{Y}, D)$ und $R = R(r, D)$. Für $n = \frac{1}{2}$ erhält man $g = 1$ und damit reduziert sich das Model auf den Vorschlag von Saanouni et. al. [17].

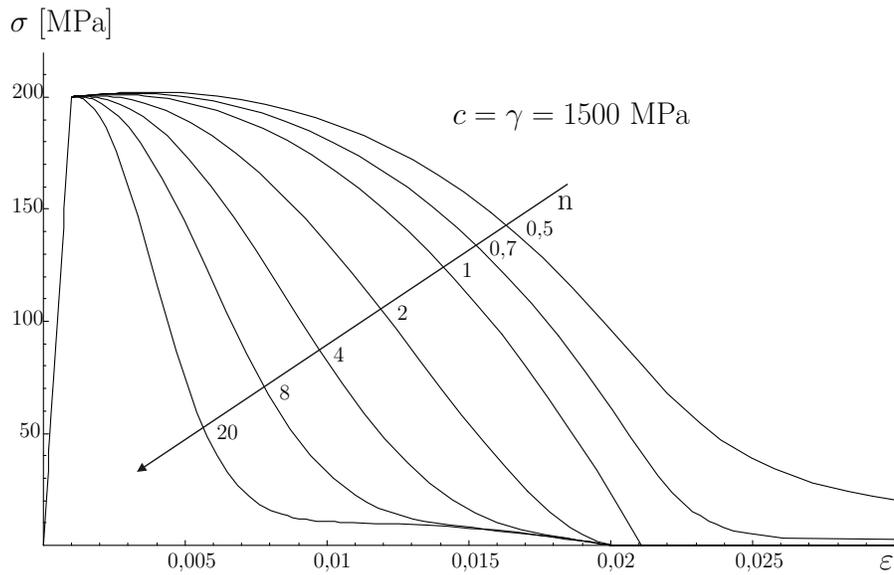


Abbildung 3.2: Einfluss des Parameters n auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $c = \gamma = 1500 \text{ MPa}$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

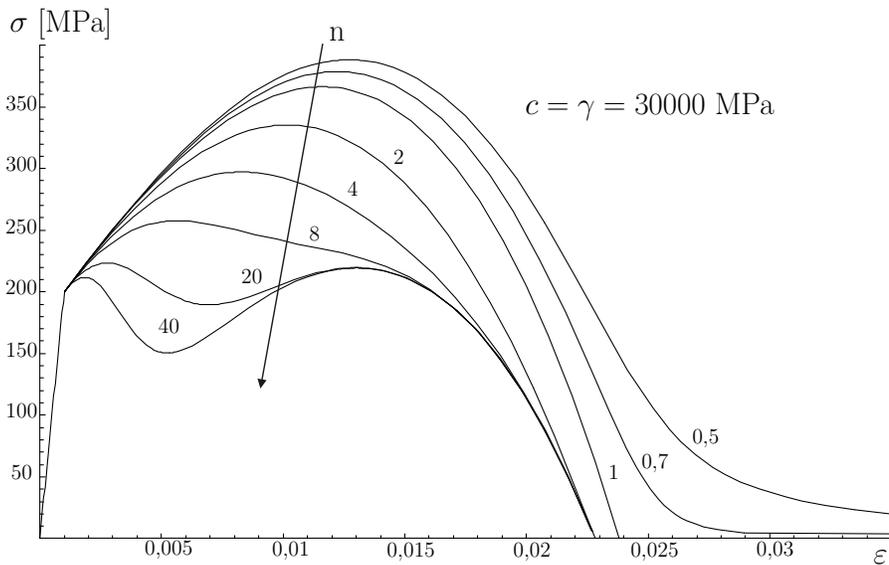


Abbildung 3.3: Einfluss des Parameters n auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $c = \gamma = 30000 \text{ MPa}$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

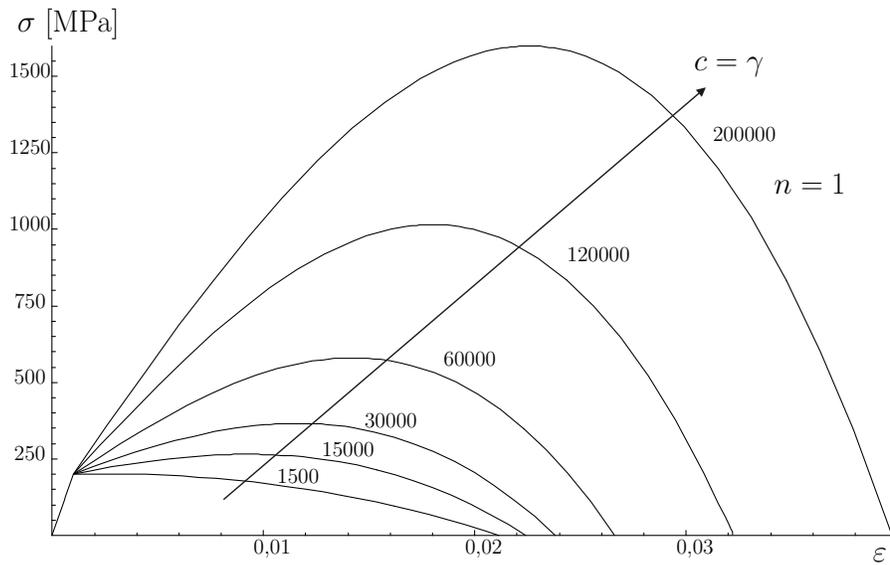


Abbildung 3.4: Einfluss der Verfestigungsparameter $c = \gamma$ [MPa] auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $n = 1$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

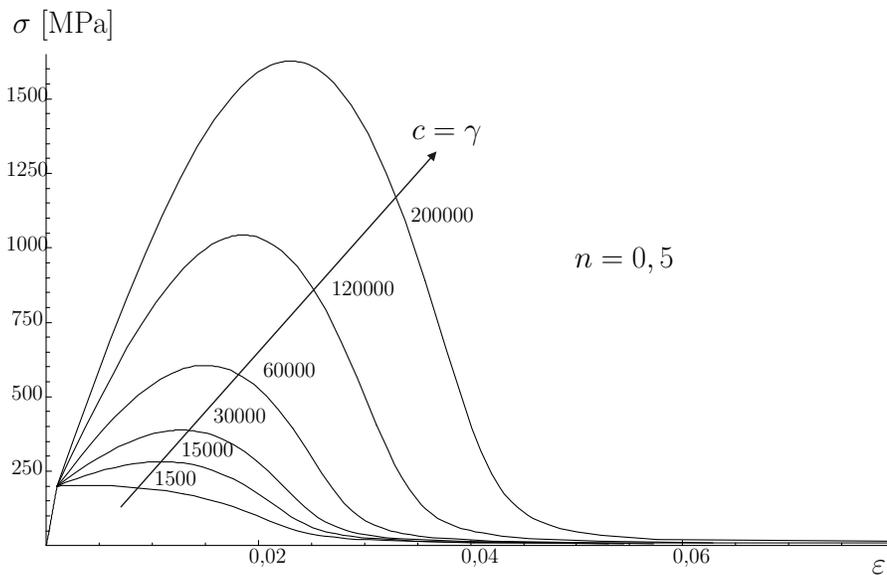


Abbildung 3.5: Einfluss der Verfestigungsparameter $c = \gamma$ [MPa] auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $n = 0,5$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

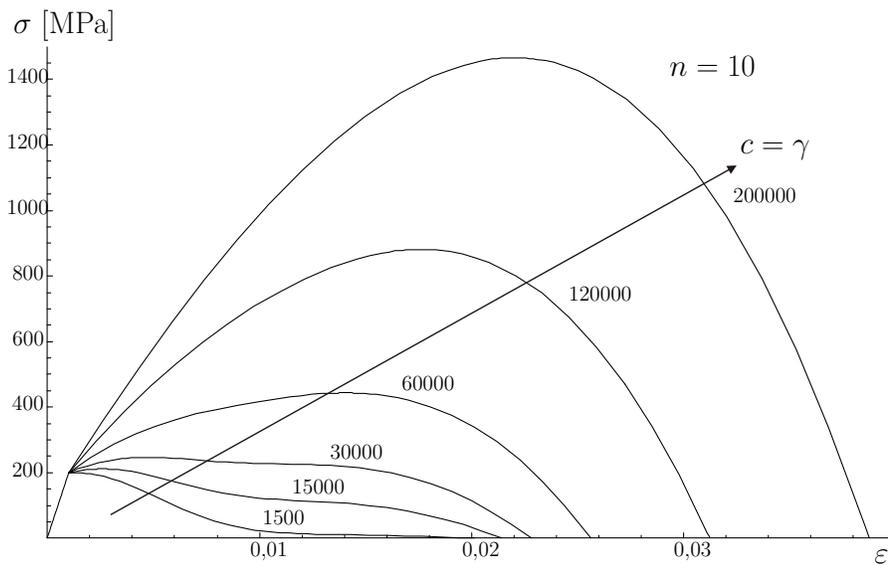


Abbildung 3.6: Einfluss der Verfestigungsparameter $c = \gamma$ [MPa] auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $n = 10$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

3.4.6 Gekerbte Probe unter Zugbelastung

Das Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz wurde in [46] entwickelt, damit das Verhalten eines geschädigten Materials aus dem Verhalten eines ungeschädigten, aber bekannten elastisch-plastischen Materialmodells hergeleitet werden kann. Mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Modell erhält man eine Klasse von Fließfunktionen, die durch n parametrisiert werden. Die Ergebnisse der Modellanalysen werden so ausgelegt, dass der Fall $n = 1$ die beste Wahl für Schädigungsprozesse in metallischen Werkstoffen ist. In diesem Fall ist die resultierende Fließfunktion identisch zu der, die Chaboche im Rahmen der Dehnungsäquivalenz benutzt. Die einachsige Dehnungs-Spannungs-Beziehung, die von beiden Theorien beschrieben wird, ist im Fall $n = 1$ fast identisch. Das wirft die Frage auf, ob dieser Fall auch für inhomogene Deformationen gilt. Zur Klärung wird im folgenden der gleiche Satz von Materialparametern (Tabelle 3.2) für beide Modelle verwendet. Das

Tabelle 3.2: Materialparameter für die Berechnung der Ergebnisse in Abb. 3.7, 3.8

| E [MPa] | k_0 [MPa] | r_0 | c [MPa] | γ [MPa] | b [MPa] | β [MPa] | α_1 | q |
|-----------|-------------|-------|-----------|----------------|-----------|---------------|------------|-----|
| 200000 | 400 | 0 | 10000 | 10000 | 10 | 10 | 1 | 0 |

Evolutionsgesetz der Schädigung wird von Lemaitre [7] übernommen.

$$\dot{D} = \alpha_1 \frac{(-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D})}{(1 - D)^q} \dot{s}. \quad (3.145)$$

Um die plastischen Evolutionsgleichungen zu regularisieren, wird die gekerbte Probe mit einem elastisch-viskoplastischen Materialmodell anstelle des elastisch-plastischen Modells berechnet. Dadurch vermeidet man Netzabhängigkeiten bei einer negativen Spannungstangente. Eine Möglichkeit, Viskoplastizität zu formulieren, ist, \dot{s} aus

$$\dot{s} = \frac{\langle F \rangle^m}{\eta}, \quad (3.146)$$

anstelle der Bedingung $\dot{F} = 0$ zu bestimmen. $\langle x \rangle$ in (3.146) beschreibt folgende Funktion:

$$\langle x \rangle := \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}. \quad (3.147)$$

Für die Parameter m und η werden die Werte $m = 2, 5$ und $\eta = 2 \cdot 10^8 (MPa)^m s$ angenommen.

Wie man in Abb. 3.7 erkennen kann, sind die Ergebnisse bei einer einachsigen Zugbelastung für beide Modelle beinahe identisch. Als nächstes wird eine kreisförmig gekerbte

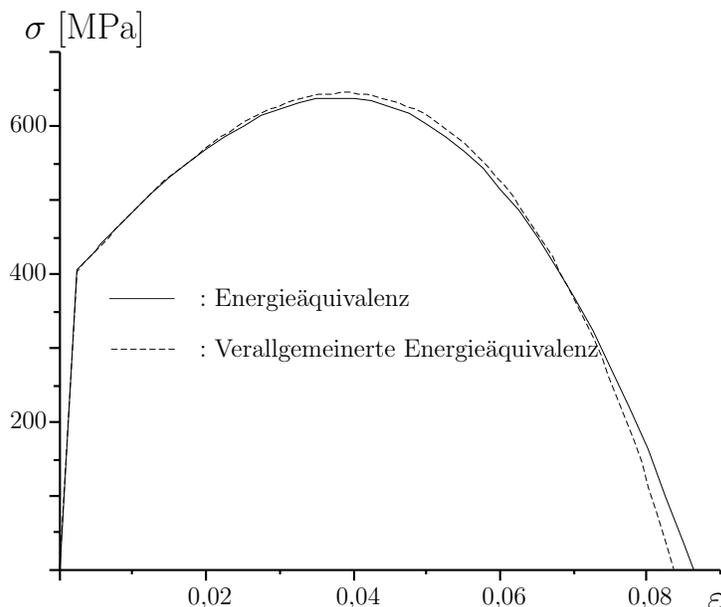


Abbildung 3.7: Uniaxiale Zugbeanspruchung für beide Modelle.

Probe unter Zugbelastung, welche am oberen Ende der Probe aufgebracht wird, betrachtet. Die Berechnungen wurden mit dem Finite Elemente Programm ABAQUS durchgeführt. Die beiden Modelle wurden mit Hilfe der UMAT-Schnittstelle als Subroutinen implementiert. Das FEM-Netz und die aufgebrachten Randbedingungen werden in Abb. 3.9 gezeigt. Aus Symmetriegründen wurde nur ein Viertel der Probe mit insgesamt 117 8-knotigen axialsymmetrischen Elementen vernetzt. Abb. 3.8 zeigt für beide Modelle die radiale Verteilung der Schädigung D . r ist dabei der Radius der Probe in der Ebene der Kerbwurzel.

Die Ergebnisse beziehen sich auf die globalen Dehnungen $e^* = \frac{L-L_0}{L_0}$. Dabei sind L , L_0 die momentane und initiale Länge der inhomogen deformierten Probe. Für $e_0^* = 0,2$ und $e_2^* = 0,356\%$ weisen beide Modelle eine fast identische radiale Verteilung der Schädigung auf. Dieses Ergebnis führt auf die Annahme, dass für beliebige inhomogene Deformation ebenfalls fast identische Ergebnisse zu erwarten sind. Da sich die Modelle für Dehnungsäquivalenz für isotrope Schädigung bewährt haben und die gezeigten Vergleiche fast identisches Verhalten bestätigt haben, zählt als Bestätigung für das vorgeschlagene Model der verallgemeinerten Energieäquivalenz. Das Model der verallgemeinerten Energieäquivalenz hat aber Vorteile gegen über dem Konzept der Energieäquivalenz. Im Gegensatz zur Energieäquivalenz erlaubt die verallgemeinerte Energieäquivalenz dieselbe Definition der effektiven Spannungen für den Cauchy-Spannungstensor und den Spannungstensor der kinematischen Verfestigung, was sich insbesondere im Fall anisotroper Schädigung als Vorteil erweist (Chaboche [4]). Zusätzlich, hat man durch die eingeführte Funktion g mehr Möglichkeiten zur Modellierung des Schädigungsverhalten.

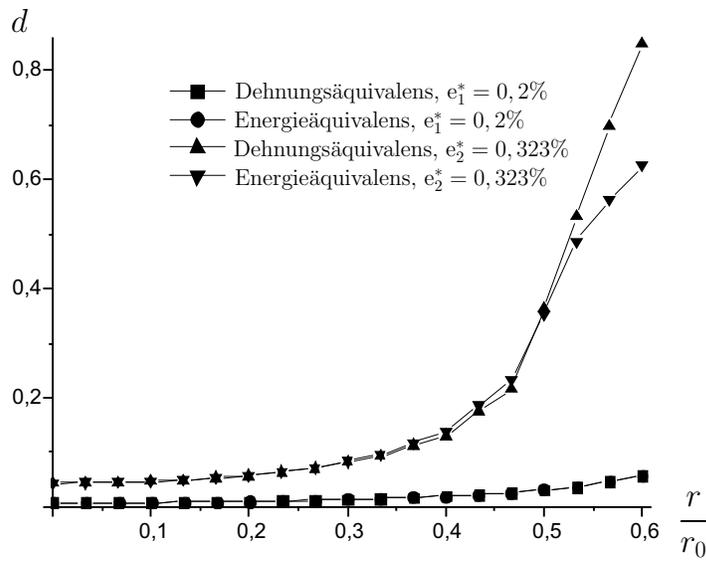


Abbildung 3.8: Radiale Verteilung der Schädigung D über die Kerbwurzel für die globalen Dehnungen $e_1^* = 0,2\%$ und $e_2^* = 0,323\%$.

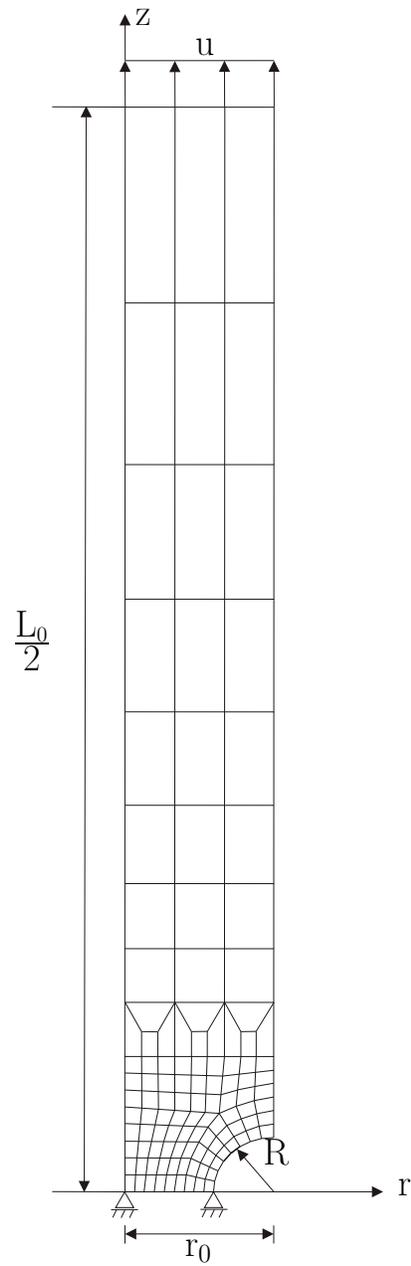


Abbildung 3.9: Kreisförmig gekerbte Probe. Die verwendeten Materialparameter sind in Tab. 3.2 angegeben.

Kapitel 4

Anisotrope Schädigungsmodelle

Das in Kapitel 3 vorgestellte kontinuumsmechanische Konzept der verallgemeinerten Energieäquivalenz wird nun auf anisotrope (Visko-)Plastizität und Schädigung erweitert. Dabei wird ein anisotropes (Visko-)Plastizitätsmodell von Nouailhas und Freed [27] verwendet, welches zur Beschreibung des plastischen Verhaltens von Superlegierungen, die eine kubische Anisotropie aufweisen, dient. Dieses Plastizitätsmodell wird als fiktives ungeschädigtes Materialmodell verwendet, um das entsprechende reale geschädigte Materialmodell zu erhalten.

4.1 Anisotropes Materialmodell ohne Schädigung

Das elastisch-(visko)plastische Materialmodell ohne Schädigung wird durch die Gleichungen (4.1) - (4.12) beschrieben, aus welchen die (visko-)plastischen Evolutionsgleichungen hergeleitet werden (vergl. [27]) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p , \quad (4.1)$$

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_p , \quad \Psi_p = \Psi_p^{kin} + \Psi_p^{is} , \quad (4.2)$$

$$\Psi_e = \bar{\Psi}_e(\mathbf{E}_e) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}_e] , \quad (4.3)$$

$$\Psi_p^{kin} = \bar{\Psi}_p^{kin}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot \mathcal{N}[\mathbf{Y}] , \quad (4.4)$$

$$\Psi_p^{is} = \bar{\Psi}_p^{is}(r) = \frac{\gamma}{2\rho} (r^2 + 2r_0 r) , \quad (4.5)$$

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_e] , \quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial \mathbf{Y}} = \mathcal{N}[\mathbf{Y}] , \quad (4.7)$$

$$R = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{is}}{\partial r} = \gamma(r + r_0) \quad (4.8)$$

$$F = \bar{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R) = \bar{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}) - R - k_0 , \quad (4.9)$$

$$f = \bar{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot \boldsymbol{\mathcal{K}}[(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D]} , \quad (4.10)$$

$$\bar{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}) - k_0 - R \begin{cases} = 0 & \text{für plastisches Fließen} \\ \geq 0 & \text{für viskoplastisches Fließen} \end{cases} , \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{dp} &= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - R\dot{r} \\ &= (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p + \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) - R\dot{r} \geq 0 , \end{aligned} \quad (4.12)$$

Das Elastizitätsgesetz (4.6) verwendet den Materialtensor vierter Stufe $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, mit den im Falle der kubischen Anisotropie drei unabhängigen Koeffizienten C_{11} , C_{12} und C_{44} :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \begin{array}{ccccccc} & 11 & 22 & 33 & 32, 32 & 31, 13 & 21, 12 \\ 11 & C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 22 & C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 33 & C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 32, 23 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 31, 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 21, 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} . \end{array} \quad (4.13)$$

Der Materialtensor $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ in (4.7) hat die drei unabhängigen Koeffizienten N_{11} , N_{12} und N_{44}

$$\mathcal{N}_{ijkl} = \begin{array}{ccccccc} & 11 & 22 & 33 & 32, 32 & 31, 13 & 21, 12 \\ 11 & N_{11} & N_{12} & N_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 22 & N_{12} & N_{11} & N_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 33 & N_{12} & N_{12} & N_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 32, 23 & 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 \\ 31, 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 \\ 21, 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{44} . \end{array} \quad (4.14)$$

Wegen plastischer Inkompressibilität reduzieren sich die unabhängigen Größen auf N_{11} – N_{12} und N_{44} .

Der Tensor vierter Stufe $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ beschreibt die Anisotropie in der Fließfunktion und hat ebenfalls drei unabhängige Koeffizienten:

$$\mathcal{K}_{ijkl} = \begin{array}{ccccccc} & 11 & 22 & 33 & 32, 32 & 31, 13 & 21, 12 \\ 11 & K_{11} & K_{12} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 22 & K_{12} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 33 & K_{12} & K_{12} & K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 32, 23 & 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 31, 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 21, 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{44} . \end{array} \quad (4.15)$$

Wieder reduzieren sich die unabhängigen Größen aufgrund der plastischen Inkompressibilität auf $K_{11} - K_{12}$ und K_{44} .

Der Anteil der Dissipationsungleichung (4.12) der im Zusammenhang mit der kinematischen Verfestigung steht,

$$\mathcal{D}^{(kin)} := \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0, \quad (4.16)$$

wird erfüllt wenn

$$\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}} = \dot{s} \mathcal{Q}[\boldsymbol{\xi}], \quad (4.17)$$

gilt. \mathcal{Q} ist ein positiv definiten Materialtensor vierter Stufe, der folgende Belegung hat:

$$\mathcal{Q}_{ijkl} = \begin{array}{ccccccc} & 11 & 22 & 33 & 32, 32 & 31, 13 & 21, 12 \\ 11 & Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 22 & Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 33 & Q_{12} & Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 32, 23 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 31, 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 21, 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{array} \quad (4.18)$$

Die unabhängigen Größen reduzieren sich aufgrund der plastischen Inkompressibilität auf $Q_{11} - Q_{12}$ und Q_{44} . Entsprechend erhält man die Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \dot{s} \mathcal{Q}[\boldsymbol{\xi}]. \quad (4.19)$$

Die assoziierte Normalenregel liefert die Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{3\Lambda}{2f} \mathcal{K}[(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D]. \quad (4.20)$$

Weiter erhält man für die plastische Bogenlänge

$$\begin{aligned} \dot{s}^2 &= \frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{3\Lambda}{2f} \mathcal{K}[(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D] \right) \cdot \left(\frac{3\Lambda}{2f} \mathcal{K}[(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D] \right) \\ &= \left(\frac{\Lambda}{f} \right)^2 \underbrace{\frac{3}{2} \mathcal{K}[(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D] \cdot \mathcal{K}[(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D]}_{:=\zeta^2} \\ \dot{s} &= \frac{\Lambda}{f} \zeta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Größe ζ wurde der Übersichtlichkeit wegen eingeführt, was im weiteren Verlauf der Modellbeschreibung von Vorteil sein wird. Betrachtet man die Isotropie als Sonderfall der Anisotropie,

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D} , \quad (4.22)$$

erhält man für ζ

$$\zeta = f \Rightarrow \frac{f}{\zeta} = 1 . \quad (4.23)$$

Zur Auswertung des Anteils der Dissipationsungleichung, der die isotrope Verfestigung beschreibt,

$$\mathcal{D}^{(is)} := (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - R\dot{r} \geq 0 , \quad (4.24)$$

verwendet man die Umrechnung

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p &= (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \cdot \frac{\Lambda}{f} \frac{3}{2} \boldsymbol{\kappa} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D \\ &= \Lambda f \begin{cases} = \frac{f}{\zeta} \dot{s} (k_0 + R) & \text{für plastisches Fließen} \\ \geq \frac{f}{\zeta} \dot{s} (k_0 + R) & \text{für viskoplastisches Fließen} \end{cases} , \end{aligned} \quad (4.25)$$

und erhält so

$$\mathcal{D}^{(is)} \geq \frac{f}{\zeta} \dot{s} k_0 + R \left(\frac{f}{\zeta} \dot{s} - \dot{r} \right) \geq 0 . \quad (4.26)$$

Eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung von (4.26) ist

$$\frac{f}{\zeta} \dot{s} - \dot{r} \geq 0 . \quad (4.27)$$

Daraus ergibt sich die Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung:

$$\dot{r} = (1 - \beta r) \frac{f}{\zeta} \dot{s} . \quad (4.28)$$

Alternativ ist auch die Einführung eines Dissipationspotentials möglich (siehe (3.27) - 3.30),

$$\begin{aligned} \varphi &= \bar{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R) \\ &= \bar{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{\xi}] + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} (R - \gamma r_0)^2 . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Dissipationsungleichung (4.29) ist dann automatisch erfüllt, wenn man die Normalenregeln

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} = \Lambda \frac{\partial \bar{F}}{\partial \mathbf{T}}, \quad (4.30)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = -\Lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = -\Lambda \left(-\frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{T}} + \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{\xi}] \right) = \dot{\mathbf{E}}_p - \Lambda \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{\xi}], \quad (4.31)$$

$$\dot{r} = -\Lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial R} = -\Lambda \left(-1 + \frac{\beta}{\gamma}(R - R_0) \right) = (1 - \beta r)\Lambda, \quad (4.32)$$

annimmt.

4.2 Fiktives Materialmodell

Im folgenden wird das in Abschnitt 4.1 beschriebene Materialmodell als fiktives Materialmodell dem realen geschädigten Material zugeordnet:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_p, \quad (4.33)$$

$$\Psi^{(f)} = \Psi_e^{(f)} + \Psi_p^{(f)}, \quad \Psi_p^{(f)} = \Psi_p^{(f)kin} + \Psi_p^{(f)is}, \quad (4.34)$$

$$\Psi_e^{(f)} = \bar{\Psi}_e^{(f)}(\tilde{\mathbf{E}}_e) = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{E}}_e \cdot \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e], \quad (4.35)$$

$$\Psi_p^{(f)kin} = \bar{\Psi}_p^{(f)kin}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{Y}}], \quad (4.36)$$

$$\Psi_p^{(f)is} = \bar{\Psi}_p^{(f)is}(\tilde{r}) = \frac{\gamma}{2\rho} (\tilde{r}^2 + 2\tilde{r}_0\tilde{r}), \quad (4.37)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} = \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e], \quad (4.38)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(f)kin}}{\partial \tilde{\mathbf{Y}}} = \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{Y}}], \quad (4.39)$$

$$\tilde{R} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{(f)is}}{\partial \tilde{r}} = \gamma(\tilde{r} + \tilde{r}_0) = \gamma\tilde{r} + \tilde{R}_0, \quad (4.40)$$

$$\varphi^{(f)} = \bar{\varphi}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) = \bar{F}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tilde{R}) + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{Q}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} (\tilde{R} - \gamma\tilde{r}_0)^2, \quad (4.41)$$

$$F^{(f)} = \bar{F}^{(f)} = \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \tilde{R} - k_0, \quad (4.42)$$

$$f^{(f)} = \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{\frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot \boldsymbol{\kappa}[(\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D]}, \quad (4.43)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \Lambda^{(f)} \frac{\partial \varphi^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \frac{3\Lambda^{(f)}}{2\bar{f}^{(f)}} \boldsymbol{\kappa}[(\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D], \quad (4.44)$$

$$\zeta^{(f)} := \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\kappa}[(\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D] \cdot \boldsymbol{\kappa}[(\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D]}, \quad (4.45)$$

$$\dot{\tilde{s}} := \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p} = \frac{\Lambda^{(f)} \zeta^{(f)}}{f^{(f)}}, \quad (4.46)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{Y}}} = \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \dot{\tilde{s}} \mathbf{Q} \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad (4.47)$$

$$\dot{\tilde{r}} = (1 - \beta\tilde{r}) \frac{f^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \dot{\tilde{s}}, \quad (4.48)$$

$$\mathcal{D}_d^{(f)} := \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{R} \dot{\tilde{r}}, \quad \tilde{\rho} \equiv \rho. \quad (4.49)$$

4.3 Thermodynamische Betrachtungen für das anisotrope reale Material

Es gilt die Zerlegung

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p , \quad (4.50)$$

während für die freie Energie Ψ die funktionalen Beziehungen

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{E}_e, \mathbf{Y}, r, \mathbf{D}) = \Psi_e + \Psi_p , \quad \Psi_p = \Psi_p^{(kin)} + \Psi_p^{(is)} , \quad (4.51)$$

$$\Psi_e = \hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, \mathbf{D}) , \quad \Psi_p^{(kin)} = \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) , \quad \Psi_p^{(is)} = \hat{\Psi}_p^{(is)}(r, \mathbf{D}) , \quad (4.52)$$

angenommen werden. Eine hinreichende Bedingung um die Clausius-Duhem Ungleichung

$$\mathcal{D}_{C-D} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho \dot{\Psi}_e - \rho \dot{\Psi}_p^{(kin)} - \rho \dot{\Psi}_p^{(is)} \geq 0 , \quad (4.53)$$

für rein mechanische Prozesse zu erfüllen, ist das Elastizitätsgesetz

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \hat{\Psi}_e}{\partial \mathbf{E}_e} , \quad (4.54)$$

zusammen mit folgender Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D}_d := \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - R\dot{r} - \rho \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \geq 0 , \quad (4.55)$$

$$\boldsymbol{\xi} := \rho \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(kin)}}{\partial \mathbf{Y}} , \quad R := \rho \frac{\partial \hat{\Psi}_p^{(is)}}{\partial r} . \quad (4.56)$$

Offenbar sind die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{dp} &:= \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - R\dot{r} \\ &= (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - R\dot{r} + \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0 , \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\mathcal{D}_{dp}^{(kin)} := \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \geq 0 , \quad (4.58)$$

$$\mathcal{D}_{dp}^{(iso)} := (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - R\dot{r} \geq 0 , \quad (4.59)$$

$$\mathcal{D}_{dd} := -\rho \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{D}} \dot{\mathbf{D}} \geq 0 , \quad (4.60)$$

$$(4.61)$$

hinreichende Bedingungen zur Erfüllung von (4.55). Die Ungleichungen (4.57) und (4.59) beschreiben die Dissipationsanteile für plastisches Fließen und Schädigungsprozesse. Die Ungleichungen (4.58) und (4.60) beschreiben den Anteil von (4.57) für die kinematische

und isotrope Verfestigung. Entsprechend der Theorie ohne Schädigung (siehe Abschnitt 4.1), wird (4.57) erfüllt, wenn man die plastischen Evolutionsgleichungen mit einer Normalenregel

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} , \quad \dot{\mathbf{Y}} = -\Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\xi}} , \quad \dot{R} = -\Lambda \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} , \quad (4.62)$$

beschreibt, wobei

$$\varphi = \hat{\varphi}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, \mathbf{D}) \quad (4.63)$$

ein konvexes Dissipationspotential ist. Plastisches Fließen tritt auf, wenn

$$F = 0 \ \& \ (\dot{F})_{\mathbf{E}_p = \text{const}} \geq 0 , \quad (4.64)$$

für Plastizität erfüllt ist, oder wenn

$$F \geq 0 , \quad (4.65)$$

für Viskoplastizität erfüllt ist. Die Fließfunktion wird durch

$$F = \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, \mathbf{D}) = \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{D}) - \hat{k}(R, \mathbf{D}) , \quad (4.66)$$

beschrieben. In dem Fall, dass

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} , \quad (4.67)$$

präsentiert (4.62) eine assoziierte Normalenregel.

4.4 Prinzip der verallgemeinerten Energieäquivalenz

4.4.1 Definition der effektiven Spannungen

Die effektiven Spannungen müssen nun mittels geeigneter Beziehungen in Verbindung zu den realen Spannungen gebracht werden. Für anisotrope Schädigung führt man, im Fall der Spannungstensoren \mathbf{T} und \mathbf{Y} , dazu den Schädigungseffektensor \mathcal{M} , und im Fall der Spannung für die isotrope Verfestigung R , den Schädigungseffektfaktor m ein (vergl. [47]). Es wird definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} &:= (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} [\mathbf{T}] \\ &= \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T}] , \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\xi}} &:= (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \boldsymbol{\xi} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \\ &= (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} [\boldsymbol{\xi}] \\ &= \mathcal{M}^{-1} [\boldsymbol{\xi}] , \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}\tilde{R} &:= \left(\frac{1}{3} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \right)^{-1} R \\ &= m^{-1} R .\end{aligned}\tag{4.70}$$

4.4.2 Energieäquivalenz

Genauso wie in Abschnitt (3.4.1) (siehe Gleichungen (3.86), (3.87) und (3.88)) wird die Äquivalenz der Anteile der freien Energie für das reale Material und der des fiktiven Materials verlangt:

$$\hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, \mathbf{D}) = \bar{\Psi}_e^{(f)}(\tilde{\mathbf{E}}_e) = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{E}}_e \cdot \mathbf{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e] ,\tag{4.71}$$

$$\hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) = \bar{\Psi}_p^{(f)kin}(\tilde{\mathbf{Y}}) = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{Y}}] ,\tag{4.72}$$

$$\hat{\Psi}_p^{(is)}(r, \mathbf{D}) = \bar{\Psi}_p^{(f)is}(\tilde{r}) = \frac{\gamma}{2\rho} (\tilde{r}^2 + 2\tilde{r}_0\tilde{r}) .\tag{4.73}$$

Sei \mathcal{W} ein Tensor vierter Stufe, so dass

$$\tilde{\mathbf{E}}_e := \mathcal{W}[\mathbf{E}_e] ,\tag{4.74}$$

den Zusammenhang zwischen den fiktiven und realen elastischen Dehnungen herstellt. Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e &= \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \cdot \left(\dot{\mathcal{W}}[\mathbf{E}_e] + \mathcal{W}[\dot{\mathbf{E}}_e] \right) \\ &= \mathcal{W}^T \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \cdot \dot{\mathcal{W}}[\mathbf{E}_e] \\ &= \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}}\end{aligned}\tag{4.75}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{E}_e} = \mathcal{W}^T \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} ,\tag{4.76}$$

und somit

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathcal{M}^{-1}[\mathbf{T}] = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} = \rho \mathcal{W}^{T-1} \left[\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{E}_e} \right] = \mathcal{W}^{T-1}[\mathbf{T}] .\tag{4.77}$$

Dies liefert die Beziehung zwischen \mathcal{W} und \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}^T = \mathcal{W} .\tag{4.78}$$

Dasselbe gilt auch für die innere Dehnung der kinematischen Verfestigung,

$$\tilde{\mathbf{Y}} := \mathcal{W}[\mathbf{Y}] . \quad (4.79)$$

Für die innere Dehnung der isotropen Verfestigung setzt man an

$$\tilde{r} := u r . \quad (4.80)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{r}} \cdot \dot{\tilde{r}} &= \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{r}} \cdot (\dot{u}r + u\dot{r}) \\ &= u \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{r}} \dot{r} + \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{r}} \cdot \dot{u}r \\ &= \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial r} \cdot \dot{r} + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial r} = u \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{r}} , \quad (4.82)$$

und deswegen

$$\tilde{R} = m^{-1}R = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}^{(f)}}{\partial \tilde{r}} = \rho u^{-1} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial r} = u^{-1}R \quad (4.83)$$

$$\Rightarrow m = u . \quad (4.84)$$

In den Gleichungen (4.85), (4.86) und (4.87) werden die Resultate zusammengefasst:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_e &= \mathcal{M}^T[\mathbf{E}_e] \\ \hat{\Psi}_e(\mathbf{E}_e, \mathbf{D}) &= \frac{1}{2\rho} \mathcal{M}^T[\mathbf{E}_e] \cdot \mathcal{C}[\mathcal{M}^T[\mathbf{E}_e]] \\ &= \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot (\mathcal{M} \mathcal{C} \mathcal{M}^T) [\mathbf{E}_e] \\ \mathbf{T} &= (\mathcal{M} \mathcal{C} \mathcal{M}^T) [\mathbf{E}_e] , \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}} &= \mathcal{M}^T[\mathbf{Y}] \\ \hat{\Psi}_p^{(kin)}(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) &= \frac{1}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot (\mathcal{M} \mathcal{N} \mathcal{M}^T) [\mathbf{Y}] \\ \boldsymbol{\xi} &= (\mathcal{M} \mathcal{N} \mathcal{M}^T) [\mathbf{Y}] , \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{r} &= mr, \quad \tilde{r}_0 = mr_0, \\ \hat{\Psi}_p^{(is)}(r, \mathbf{D}) &= \frac{\gamma m^2}{2\rho}(r^2 + 2r_0 r), \\ R &= m^2 \gamma (r + r_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.87)$$

4.4.3 Äquivalenz der dissipierten Energie

Durch die Annahme der Äquivalenz der Anteile der dissipierten Energie kann man die am fiktiven und realen Material aufgewendete Leistung jeweils für den plastischen, kinematischen und isotropen Anteil über die Funktion χ in Zusammenhang bringen.

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \chi \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} = \chi \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}}, \quad \tilde{R} \dot{\tilde{r}} = \chi R \dot{r}, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{D}_{dp} = \frac{1}{\chi} \left(\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{R} \dot{\tilde{r}} \right) = \frac{1}{\chi} \mathcal{D}_d^{(f)}. \quad (4.89)$$

4.4.4 Reales Materialmodell

Fließfunktion - Fließregel

Analog zur Herleitung in (3.4.2) lässt sich die Fließfunktion und Fließregel für das reale Material im Falle anisotroper Schädigung herleiten. Die Änderung der Dehnung \mathbf{E}_p wird wieder mit einer Normalenregel beschrieben

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \Lambda \frac{\partial \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{T}}. \quad (4.90)$$

Mit der Dissipationsäquivalenz (4.88)₁ sowie (4.20), (4.68), (4.9) und (4.90) erhält man die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p &= \mathcal{M}^{-1}[\mathbf{T}] \cdot \Lambda^{(f)} \frac{\partial \bar{f}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \\ &= \Lambda^{(f)} \mathcal{M}^{-1}[\mathbf{T}] \cdot \mathcal{M} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} = \Lambda^{(f)} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \\ &= \chi \Lambda \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Dabei wurden folgende Beziehungen verwendet:

$$\hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{D}) := \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}), \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{T}} \frac{\partial \bar{f}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} = \mathcal{M}^{-1} \frac{\partial \bar{f}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} . \quad (4.93)$$

Gleichung (4.91) ist erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} = \frac{\Lambda^{(f)}}{\chi \Lambda} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} , \quad (4.94)$$

gilt. Wie im Fall isotroper Schädigung wird angenommen, dass plastische Deformation nur dann auftritt, wenn die Fließkriterien erfüllt sind. Diese werden wie folgt definiert:

$$\text{Für Plastizität} \Leftrightarrow \hat{F} = 0 \quad \& \quad \left(\frac{d}{dt} \hat{F} \right)_{\mathbf{E}_p = \text{const}} > 0 . \quad (4.95)$$

$$\text{Für Viskoplastizität} \Leftrightarrow \hat{F} \geq 0 . \quad (4.96)$$

Der Term $\Lambda^{(f)}/\chi\Lambda$ wird als konstitutive nichtnegative Funktion des Schädigungstensors \mathbf{D} angenommen. Die Definition der Funktion $g(\mathbf{D})$ ist im Fall anisotroper Schädigung äquivalent zu der Definition (3.101), mit dem Unterschied, dass $g(\mathbf{D})$ nicht mehr Funktion einer skalaren Schädigungsvariable ist, sondern von einer tensoriellen Schädigungsgröße abhängt. n ist der Materialparameter, der für das in Abschnitt 3.4.5 diskutierte Verhalten der elastischen Dehnung bei Schädigung verantwortlich ist. Es wird gesetzt :

$$g := \frac{\Lambda^{(f)}}{\chi \Lambda} = g(\mathbf{D}) = \frac{1}{(\det(\mathbf{1} - \mathbf{D}))^{n-2}} . \quad (4.97)$$

Die Determinante in (4.97) ist sinnvoll, um ein zu (3.134) äquivalentes Verhalten zu erhalten. So liefern (3.134) und (4.97) bei ungeschädigtem Material identische Werte. Für $D = 1$ in (3.134) bzw. $D_i = 1$ in (4.97) liefern beide Ansätze gleichwertige Ergebnisse. Für (4.97) wird, aufgrund der Definition der effektiven Spannungen (4.68) - (4.70), $n = 4$ gewählt. Im Fall der idealen Plastizität mit Schädigung erhält man so konstante elastische Dehnungen in Belastungsrichtung, wenn Schädigung nur in der zur Belastungsrichtung senkrechten Ebene erfolgt. In der Abbildung 4.1 wird schematisch das Verhalten der Komponenten von \mathbf{E}_e unter einachsiger homogener Zugbelastung, für den Fall der idealen Plastizität mit Schädigung diskutiert. Abbildung 4.2 zeigt den dazugehörigen schematischen Spannungsverlauf in Zugrichtung.

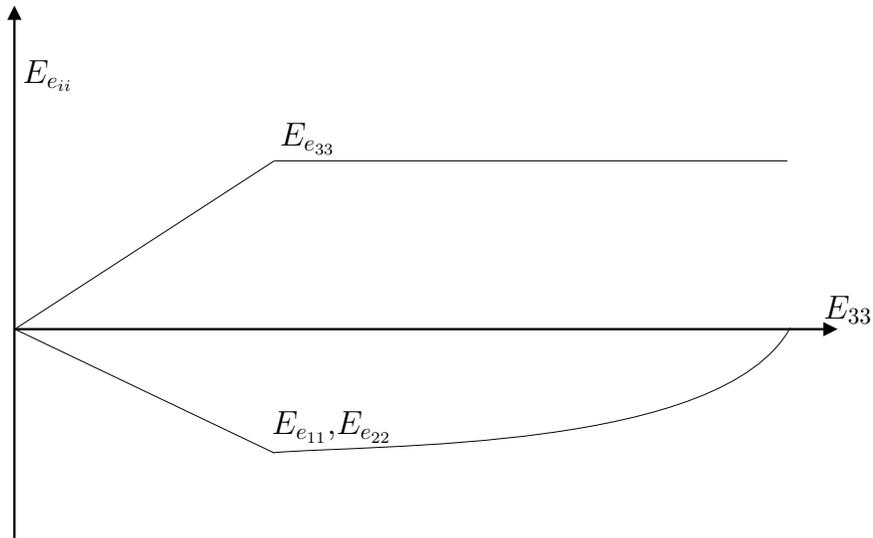


Abbildung 4.1: Schematischer Verlauf der Komponenten $E_{e_{11}}$, $E_{e_{22}}$ und $E_{e_{33}}$ bei homogener Dehnung in der E_{33} -Komponente für ideale Plastizität mit Schädigung ($D_{ij} = 0$ für $i, j \neq 3$, $1 \geq D_{33} \geq 0$).

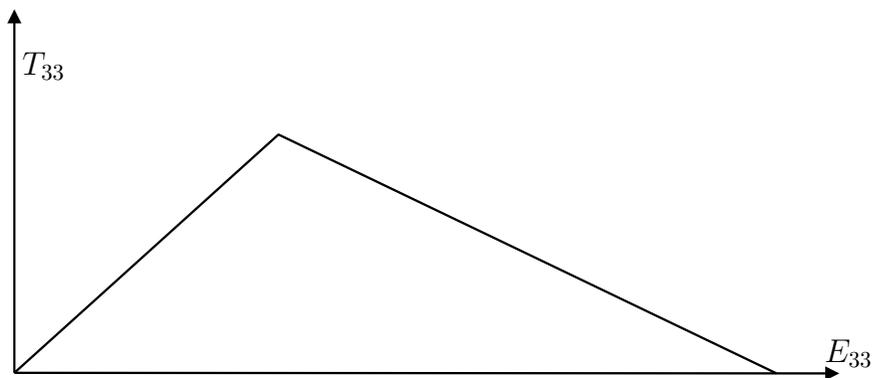


Abbildung 4.2: Schematischer Verlauf der Spannungskomponente T_{33} bei homogener Dehnung in der E_{33} -Komponente für ideale Plastizität mit Schädigung ($D_{ij} = 0$ für $i, j \neq 3$, $1 \geq D_{33} \geq 0$).

Mit der Definition der Funktion g folgt:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} = g \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} . \quad (4.98)$$

Die unbekannte Fließfunktion kann damit wieder aus der Differentialgleichung (4.98) bestimmt werden. Die vorgeschlagene Lösung entspricht der Lösung (3.103)

$$\begin{aligned} \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, \mathbf{D}) &= g \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{D}) - \hat{k}(R, \mathbf{D}) \\ &= g \bar{f}^{(f)}(\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}) - \hat{k}(R, \mathbf{D}) , \end{aligned} \quad (4.99)$$

mit der Integrationskonstante

$$\hat{k}(R, \mathbf{D}) = g \tilde{R} + k_0 . \quad (4.100)$$

die Fließfunktion des realen Materials ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned} \hat{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, R, \mathbf{D}) &= g \hat{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{D}) - \hat{k}(R, \mathbf{D}) \\ &= g \sqrt{\frac{3}{2} (\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D \cdot \boldsymbol{\kappa} [(\tilde{\mathbf{T}} - \tilde{\boldsymbol{\xi}})^D] - g \tilde{R} - k_0} \\ &= g \sqrt{\frac{3}{2} (\mathcal{M}^{-1}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}))^D \cdot \boldsymbol{\kappa} [(\mathcal{M}^{-1}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}))^D] - g m^{-1} R - k_0} . \end{aligned} \quad (4.101)$$

Die Fließregel erhält man in folgender Form:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_p &= \Lambda \frac{\partial \hat{F}}{\partial \mathbf{T}} = \Lambda g \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \\ &= \frac{\Lambda g}{\hat{f}} \frac{3}{2} \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D . \end{aligned} \quad (4.102)$$

Die plastische Bogenlänge ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{s}^2 &= \frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p \\ &= \frac{2}{3} \frac{\Lambda g}{\hat{f}} \frac{3}{2} \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D \cdot \frac{\Lambda g}{\hat{f}} \frac{3}{2} \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D \\ &= \left(\frac{\Lambda g}{\hat{f}} \right)^2 \frac{3}{2} \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D \cdot \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D . \end{aligned} \quad (4.103)$$

Sinnvollerweise wird auch hier eine zusätzliche Funktion ζ eingeführt:

$$\zeta := \sqrt{\frac{3}{2} \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D \cdot \mathcal{M}^{T-1} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}]^D}, \quad (4.104)$$

$$\Rightarrow \dot{s} = \frac{\Lambda g \zeta}{\hat{f}}, \quad (4.105)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \dot{s} \frac{\hat{f}}{\zeta} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}}. \quad (4.106)$$

Das Verhältnis der plastischen Bogenlänge des realen Materials zur plastischen Bogenlänge des fiktiven Materials kann mit Verwendung von (4.97) und (4.21) bestimmt werden

$$\dot{s} = \frac{\Lambda g \zeta}{\hat{f}} = \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \frac{\zeta}{\hat{f} \chi} \dot{\tilde{s}} = \frac{\zeta}{\zeta^{(f)} \chi} \dot{\tilde{s}}, \quad (4.107)$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{s}} = \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \chi \dot{s}. \quad (4.108)$$

Ebenso ergibt sich eine Beziehung zwischen der plastischen Dehnung des fiktiven Materials und der plastischen Dehnung des realen Materials:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_p &= \Lambda^{(f)} \frac{\partial \bar{f}^{(f)}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \\ &= \Lambda^{(f)} \mathcal{M}^T \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \\ &= \chi \mathcal{M}^T \left[\dot{\mathbf{E}}_p \right]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Verfestigungsregeln

Die aus der Äquivalenz der dissipierten Energie hervorgehenden Beziehungen werden jetzt verwendet um die Evolutionsgleichung der kinematischen und isotropen Verfestigung für das reale Material aus dem fiktiven Material herzuleiten. Für die kinematische Verfestigung verwendet man die Gleichung (4.88)₂. Mit (4.69) und (4.19) erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} &= \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\tilde{s}} \mathcal{Q}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] \right) \\ &= \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{M}^{T-1} \left(\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\tilde{s}} \mathcal{Q}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] \right) \\ &= \chi \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Eine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{\chi} \mathcal{M}^{T-1} \left(\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\tilde{s}} \mathcal{Q}[\tilde{\boldsymbol{\xi}}] \right). \quad (4.111)$$

Mit den Ergebnissen (4.108) und (4.109) aus (4.4.4) lässt sich (4.111) weiter auswerten :

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{1}{\chi} \mathcal{M}^{T-1} \left(\frac{\zeta^{(f)} \hat{f}}{\bar{f}^{(f)} \zeta} \chi \dot{s} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-1} [\boldsymbol{\xi}] \right) . \quad (4.112)$$

Mit $\bar{f}^{(f)} := \hat{f}$ erhält man dann die endgültige Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung des realen Materials,

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{s} (\mathcal{M}^{T-1} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-1}) [\boldsymbol{\xi}] . \quad (4.113)$$

Gleichung (4.114) beweist zudem die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes für den Anteil der Dissipationsungleichung der den kinematischen Anteil beschreibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{dp}^{(kin)} &:= \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}}) \\ &= \boldsymbol{\xi} \cdot (\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{E}}_p + \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{s} (\mathcal{M}^{T-1} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-1}) [\boldsymbol{\xi}]) \\ &= \boldsymbol{\xi} \cdot (\frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{s} (\mathcal{M}^{T-1} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-1}) [\boldsymbol{\xi}]) \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.114)$$

Für die isotrope Verfestigung erhält man ausgehend von Gleichung (4.88)₃ mit Hilfe von (4.70) und (4.28) folgende Beziehung:

$$\tilde{R} \dot{\tilde{r}} = m^{-1} R (1 - \beta \tilde{r}) \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \dot{\tilde{s}} = \chi R \dot{r} . \quad (4.115)$$

Durch Eliminierung von R ($R > 0$) auf beiden Seiten und Ersetzen der plastischen Bogenlänge des fiktiven Materials mit (4.107) erhält man die Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung des realen Materials:

$$\chi \dot{r} = m^{-1} (1 - \beta m r) \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \dot{\tilde{s}} , \quad (4.116)$$

$$\dot{r} = \frac{m^{-1}}{\chi} (1 - \beta m r) \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \frac{\zeta^{(f)}}{\bar{f}^{(f)}} \frac{\hat{f}}{\zeta} \chi \dot{s} . \quad (4.117)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = m^{-1} (1 - \beta m r) \frac{\hat{f}}{\zeta} \dot{s} . \quad (4.118)$$

$\mathcal{D}_{dp}^{(is)}$ ist der Anteil der Dissipationsungleichung des realen Materials der die isotrope Verfestigung beschreibt:

$$\mathcal{D}_{dp}^{(is)} := (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_p - R \dot{r} . \quad (4.119)$$

Mit (4.120) wird die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes für $g \hat{f} \geq \hat{k}$ bestätigt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{dp}^{(is)} &= (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \frac{\Lambda g 3}{\hat{f}} \frac{3}{2} \mathcal{M}^{(T-1)} \boldsymbol{\kappa} \mathcal{M}^{-1} (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D - R\dot{r} \\
&= \Lambda g \hat{f} - R\dot{r} = \frac{\hat{f}^2 \dot{s}}{\zeta} - R\dot{r} \\
&\geq \frac{\hat{f} \dot{s}}{\zeta g} (k_0 + g\tilde{R}) - R\dot{r} \\
&= \frac{\hat{f} \dot{s}}{\zeta g} k_0 + \frac{\hat{f} \dot{s}}{\zeta} \tilde{R} - R\dot{r} \\
&= \frac{\hat{f} \dot{s}}{\zeta g} k_0 + \frac{\hat{f} \dot{s}}{\zeta} \frac{R}{m} - \frac{R}{m} (1 - \beta m r) \frac{\hat{f}}{\zeta} \dot{s} \\
&= \frac{\hat{f} \dot{s}}{\zeta g} k_0 + R\beta r \frac{\hat{f}}{\zeta} \dot{s} \geq 0 .
\end{aligned} \tag{4.120}$$

4.5 Schädigungsmodell mit statischer Erholung

Insbesondere bei hohen Temperaturen, also genau den Fällen, in denen Kriechschädigung eine wichtige Rolle spielt, tritt ein weiterer Effekt auf. Dieser Effekt wird als statische Erholung bezeichnet und beschreibt den Abbau von Versetzungen in der Kristallstruktur bei metallischen Werkstoffen, die hohen Temperaturen ausgesetzt werden. Das in (4.1) eingeführte fiktive Materialmodell wird zur Beschreibung der Erholungseffekte mit den dazu bekannten Ansätzen erweitert, um dann die Evolutionsgleichungen des realen Materials zu bestimmen.

Zur Erfüllung der Dissipationsungleichung (4.16)

$$\mathcal{D}^{(kin)} := \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}} \right) \geq 0 , \tag{4.121}$$

wird folgender Ansatz gewählt:

$$\dot{\mathbf{E}}_p - \dot{\mathbf{Y}} = \left(\dot{s} \boldsymbol{\mathcal{Q}} + \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^{w-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} \right) \left[\tilde{\boldsymbol{\xi}} \right] . \tag{4.122}$$

Mit $\left(\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^{w-1} \boldsymbol{\mathcal{B}} \right) \left[\tilde{\boldsymbol{\xi}} \right]$ als zeitabhängige Komponente der Evolutionsgleichung und $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ als positiv definiten Tensoren vierter Stufe. Der Tensor $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ hat die Belegung (4.18). Der Tensor $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ entsprechend:

$$\mathcal{B}_{ijkl} = \begin{array}{cccccc} & 11 & 22 & 33 & 32, 32 & 31, 13 & 21, 12 \\ 11 & B_{11} & B_{12} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 22 & B_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 33 & B_{12} & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 32, 23 & 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 31, 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 \\ 21, 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{44} \end{array}, \quad (4.123)$$

dabei sind wegen plastischer Inkompressibilität nur die Größen $B_{11} - B_{12}$ und B_{44} voneinander unabhängig. w und \mathcal{B} sind die Materialparameter der statischen Erholung bezüglich der kinematischen Verfestigung. Für die Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung mit Erholungsterm für das fiktive Material ergibt sich:

$$\dot{\tilde{\mathbf{Y}}} = \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \left(\dot{\tilde{\mathcal{Q}}} + \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^{w-1} \mathcal{B} \right) [\tilde{\boldsymbol{\xi}}]. \quad (4.124)$$

Unter Verwendung von (4.88)₂ kann die Evolutionsgleichung für das reale Material bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{Y}}} &= \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] \cdot \left(\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \left(\dot{\tilde{\mathcal{Q}}} + \|\tilde{\boldsymbol{\xi}}\|^{w-1} \mathcal{B} \right) [\tilde{\boldsymbol{\xi}}] \right) \\ &= \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] \cdot \left(\chi \mathcal{M}^T [\dot{\mathbf{E}}_p] - \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \chi \dot{\mathcal{Q}} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] - \|\mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]\|^{w-1} \mathcal{B} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] \right) \\ &= \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{M}^{T-1} \left(\chi \mathcal{M}^T [\dot{\mathbf{E}}_p] - \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \chi \dot{\mathcal{Q}} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] - \|\mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]\|^{w-1} \mathcal{B} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] \right) \\ &= \chi \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Eine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathcal{M}^{T-1} \left(\mathcal{M}^T [\dot{\mathbf{E}}_p] - \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{\mathcal{Q}} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] - \frac{\|\mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]\|^{w-1}}{\chi} \mathcal{B} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] \right) \quad (4.126)$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{\mathcal{Q}} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}] - \frac{\|\mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]\|^{w-1}}{\chi} \mathcal{M}^{T-1} \mathcal{B} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]. \quad (4.127)$$

Gleichung (4.127) beschreibt die Entwicklung der kinematischen Verfestigung mit statischer Erholung ohne spezielle Einschränkungen. Ein möglicher Sonderfall wäre die Annahme, dass gilt $p\mathcal{Q} = \mathcal{B}$, mit $p \geq 0$. Dann erhält man

$$\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{E}}_p - \left(\frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{\mathcal{Q}} - p \frac{\|\mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]\|^{w-1}}{\chi} \right) \mathcal{M}^{T-1} \mathcal{Q} \mathcal{M}^{-1}[\boldsymbol{\xi}]. \quad (4.128)$$

Zur Bestimmung der isotropen Verfestigung mit statischer Erholung geht man von Gleichung (4.27)

$$\frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \dot{\tilde{s}} - \dot{\tilde{r}} \geq 0 , \quad (4.129)$$

aus. Eine hinreichende Bedingung dafür lautet:

$$\dot{\tilde{r}} = (1 - \beta \tilde{r}) \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \dot{\tilde{s}} - \pi(\tilde{r} - \tilde{r}_0)^\omega . \quad (4.130)$$

π und ω sind die Materialparameter der statischen Erholung bezüglich der isotropen Verfestigung. Mit (4.88)₂ kann die Evolutionsgleichung für das reale Material ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \dot{\tilde{r}} &= m^{-1} R \left((1 - \beta \tilde{r}) \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \dot{\tilde{s}} - \pi(\tilde{r} - \tilde{r}_0)^\omega \right) \\ &= \chi R \dot{r} , \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{m^{-1}}{\chi} \left((1 - \beta m r) \frac{\bar{f}^{(f)}}{\zeta^{(f)}} \frac{\zeta^{(f)}}{\zeta} \dot{s} - \pi(m(r - r_0))^\omega \right) \quad (4.132)$$

$$\Rightarrow \dot{r} = m^{-1} \left((1 - \beta m r) \frac{\bar{f}}{\zeta} \dot{s} - \frac{\pi}{\chi} (m(r - r_0))^\omega \right) . \quad (4.133)$$

Im Gegensatz zu den Evolutionsgleichungen (4.113) und (4.118) für die kinematische und isotrope Verfestigung ohne statische Erholung, bleibt die bis jetzt noch nicht näher spezifizierte Funktion χ in den Evolutionsgleichungen erhalten und muss daher konkret definiert werden. Die Funktion χ bringt die im fiktiven und realen Material gespeicherte Arbeit über (4.88) in einen direkten Zusammenhang. Für ein reales ungeschädigtes Material muss χ deshalb den Wert 1 annehmen. Für den Fall $D_i = 1$ für alle drei Hauptachsen des Schädigungstensor \mathbf{D} muss χ hingegen den Wert 0 annehmen. Es ist also ausreichend χ als monoton abfallende Funktion innerhalb des entsprechenden Wertebereiches zu definieren. Eine entsprechende Wahl stellt

$$\Sigma = (\det(\mathbf{1} - \mathbf{D}))^l , \quad (4.134)$$

mit l als Materialparameter, dar.

Kapitel 5

Schädigungsbeschreibung

Im Rahmen einer thermodynamisch konsistenten Beschreibung von Schädigung postuliert man häufig die Existenz eines entsprechenden Dissipationspotentials φ^* , von dem alle Evolutionsgleichungen abgeleitet werden. Per Definition ist die Entwicklung der Schädigung mit der zur Schädigung \mathbf{D} thermodynamisch konjugierten Kraft

$$\boldsymbol{\Omega} := \rho \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{E}_e, \mathbf{Y}, r, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}}, \quad (5.1)$$

verbunden. Das im folgenden diskutierte Konzept wurden von Gallerneau [19] vorgestellt und wird in dieser Arbeit zur Berechnung der anisotropen Schädigung verwendet. Im Abschnitt 5.2 wird in einer Parameterstudie das Schädigungskriterien von Hayhurst [20] mit Bezug auf kubische Anisotropie diskutiert. Im darauf folgenden Abschnitt 5.3 wird die thermodynamisch konjugierte Kraft $\boldsymbol{\Omega}$ bestimmt.

5.1 Schädigungsgesetz

Im Rahmen der Theorie wird das Dissipationspotential der Schädigung mit φ_d^* bezeichnet und hat folgende Form (siehe [19]):

$$\varphi_d^* = \sqrt{\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Q}}_c[\boldsymbol{\Omega}]} \frac{\langle \chi_c(\mathbf{T}) \rangle^{r_c}}{A_c} (1 - \text{tr}(\mathbf{D}))^{-k_c}. \quad (5.2)$$

Die Funktion $\chi_c(\mathbf{T})$ ist eine Verallgemeinerung des Vorschlags von Hayhurst [20], der für isotrope Kriechschädigung entwickelt wurde:

$$\chi_c(\mathbf{T}) = \alpha_c(\mathbf{T}_M) + \beta_c \text{Tr}(\mathbf{T}) + (1 - \alpha_c - \beta_c) \sqrt{\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}_c[\mathbf{T}]}. \quad (5.3)$$

Der Tensor $\boldsymbol{\mathcal{M}}_c$ beschreibt die materielle Anisotropie. α_c und β_c sind skalare Materialparameter, für die $\alpha_c + \beta_c \leq 1$ gilt. \mathbf{T}_M ist die betragsmäßig größte Eigenspannung des Spannungstensors. Der erste Term beschreibt den Einfluss der maximalen Eigenspannung auf die Lebensdauer bei Kriechschädigung. Der zweite Term berücksichtigt den Einfluss von Zug- bzw. Druckbelastung, auch dann wenn in der Theorie keine weiteren

Richtungsabhängigkeiten vorkommen. Der dritte Term ist die verallgemeinerte von-Mises-Vergleichsspannung. Aus der Ableitung des Dissipationspotentials erhält man die Evolutionsgleichung der Schädigung:

$$\dot{D} = \frac{\partial \varphi_d^*}{\partial \Omega} = \left(\frac{\mathcal{Q}_c[\Omega]}{\sqrt{\Omega \cdot \mathcal{Q}_c[\Omega]}} \right) \frac{\langle \chi_c(\mathbf{T}) \rangle^{r_c}}{A_c} (1 - \text{tr}(\mathbf{D}))^{-k_c} . \quad (5.4)$$

Im Fall isotroper Schädigung reduziert sich die Gleichung (5.4) auf

$$\dot{D} = \frac{\langle \chi_c(\mathbf{T}) \rangle^{r_c}}{A_c} (1 - D)^{-k_c} , \quad (5.5)$$

und beschreibt damit das Kriechschädigungsgesetz von Rabotnov [2].

5.2 Kriterien der Schädigung im Falle eines kubisch anisotropen Materials

In diesem Abschnitt wird das Schädigungskriterium aus Abschnitt 5.1 in der (T_{11}, T_{22}) Ebene und in der $([100], [010])$ Ebene der Kristallachsen in Anlehnung an [19] und Hayhurst [20] diskutiert, um den Einfluss der verschiedenen Schädigungsparameter zu verdeutlichen. Die materielle Anisotropie wird als kubisch anisotrop angenommen. Das vorgestellte Kriterium verallgemeinert jenes von Hayhurst [20] auf anisotrope Materialien. Es entspricht der Funktion (5.3), die in Abschnitt 5.1 eingeführt wird. Der Tensor \mathcal{M}_c besitzt im kristallographischen Bezugssystem drei unabhängige Koeffizienten $m_{c_{11}}$, $m_{c_{12}}$ und $m_{c_{44}}$. Im Fall von inkompressiblen Materialverhalten reduziert sich die Zahl der unabhängigen Koeffizienten auf zwei und der Tensor \mathcal{M}_c erhält folgende Gestalt

$$M_{c_{ijkl}} = \begin{array}{ccccccc} & 11 & 22 & 33 & 32, 32 & 31, 13 & 21, 12 \\ 11 & m_{c_{11}} - m_{c_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 0 & m_{c_{11}} - m_{c_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33 & 0 & 0 & m_{c_{11}} - m_{c_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 32, 23 & 0 & 0 & 0 & m_{c_{44}} & 0 & 0 \\ 31, 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{c_{44}} & 0 \\ 21, 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{c_{44}} . \end{array} \quad (5.6)$$

Die Bedingung $m_{c_{44}} = 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ beschreibt den isotropen Fall und $m_{c_{44}} \neq 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ den anisotropen Fall. Der erste Term in (5.3) berücksichtigt den Einfluss des größten Eigenwertes des Spannungstensors. Der zweite Term berücksichtigt das Vorzeichen der im Material anliegenden Spannung und erlaubt die Unterscheidung zwischen Zug- bzw. Druckbelastung. Für $\alpha_c = \beta_c = 0$ wird χ_c in Abbildung 5.1 diskutiert. Dazu wird in verschiedenen Richtung eine konstante elastische Belastung in der Kristallebene $([100], [010])$

aufgebracht und dann χ_c ausgewertet. $\chi_{c_{iso}}$ entspricht dem Fall $m_{c_{44}} = 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ und $\alpha_c = \beta_c = 0$. Die Auswirkung der Parameter α_c und β_c auf das Schädigungskriterium zeigt Abbildung 5.2. Dazu wird für einen bestimmten Wert $\chi_c > 0$ die Lösungskurve in der (T_{11}, T_{22}) Ebene gesucht.

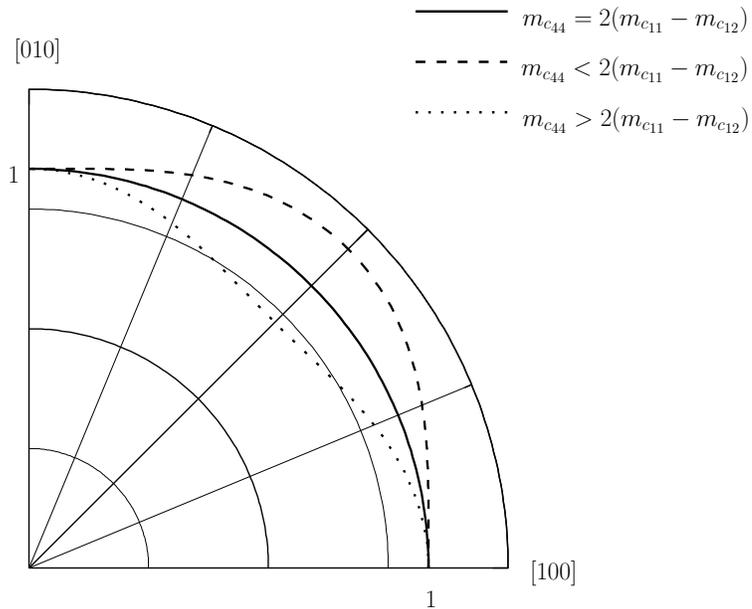


Abbildung 5.1: Relatives Schädigungskriterium $\chi_c/\chi_{c_{iso}}$ in der Kristallebene $([100],[010])$. Gezeigt werden der isotrope Fall $m_{c_{44}} = 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ und die anisotropen Fälle $m_{c_{44}} > 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ und $m_{c_{44}} < 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$.

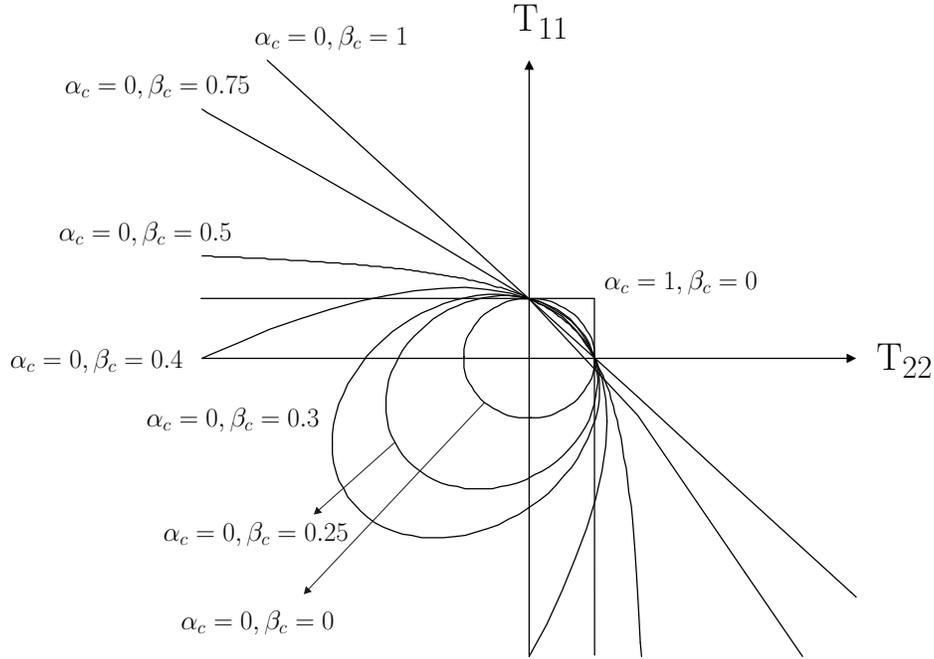


Abbildung 5.2: Lösungskurve für $\chi_c > 0$ in Abhängigkeit α_c und β_c in der (T_{11}, T_{22}) Ebene. Für den Tensor \mathcal{M}_c gilt $m_{c44} = 2(m_{c11} - m_{c12})$

5.3 Die thermodynamisch konjugierte Kraft der Schädigung

Die freie Energie ist gegeben durch (vergl. Abschn. 4.3):

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_p^{(kin)} + \Psi_p^{(iso)} . \quad (5.7)$$

mit ihren drei Anteilen aus der Elastizität, der kinematischen Verfestigung und der isotropen Verfestigung:

$$\Psi_e = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{E}}_e \cdot \mathcal{C}[\tilde{\mathbf{E}}_e] = \frac{1}{2\rho} (\mathcal{M}^T [\mathbf{E}_e]) \cdot \mathcal{C} [\mathcal{M}^T [\mathbf{E}_e]] , \quad (5.8)$$

$$\Psi_p^{kin} = \frac{1}{2\rho} \tilde{\mathbf{Y}} \cdot \mathcal{N}[\tilde{\mathbf{Y}}] = \frac{1}{2\rho} (\mathcal{M}^T [\mathbf{Y}]) \cdot \mathcal{N} [\mathcal{M}^T [\mathbf{Y}]] , \quad (5.9)$$

$$\Psi_p^{iso} = \frac{\gamma}{2\rho} (\tilde{r}^2 + 2\tilde{r}_0\tilde{r}) = \frac{\gamma}{2\rho} m^{-1}(\mathbf{D})(r^2 + 2r_0r) . \quad (5.10)$$

Mit

$$\mathcal{M}^T [\mathbf{E}_e] = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \mathbf{E}_e (\mathbf{1} - \mathbf{D}) = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D}) [\mathbf{E}_e] , \quad (5.11)$$

$$\mathcal{M}^T [\mathbf{Y}] = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \mathbf{Y} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) [\mathbf{Y}] , \quad (5.12)$$

$$m^{-1}(\mathbf{D}) = \|\mathbf{1} - \mathbf{D}\|^2 = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D}) , \quad (5.13)$$

ergeben sich die Anteile von der thermodynamisch konjugierten Kraft der Schädigung Ω zu:

$$\Omega = \Omega_e + \Omega_p^{(kin)} + \Omega_p^{(iso)} \quad (5.14)$$

$$\Omega_e = -\rho \frac{\partial \Psi_e}{\partial \mathbf{D}} = 2 ((\mathbf{1} - \mathbf{D}) \mathbf{E}_e) (\mathcal{C} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \mathbf{E}_e) , \quad (5.15)$$

$$\Omega_p^{(kin)} = -\rho \frac{\partial \Psi_p^{(kin)}}{\partial \mathbf{D}} = 2 ((\mathbf{1} - \mathbf{D}) \mathbf{Y}) (\mathcal{N} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D}) \mathbf{Y}) , \quad (5.16)$$

$$\Omega_p^{(iso)} = -\rho \frac{\partial \Psi_p^{(iso)}}{\partial \mathbf{D}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D}) (r^2 + 2r_0 r) . \quad (5.17)$$

Kapitel 6

Numerische Implementierung der Modelle

Die in Kapitel 4 für das reale Material hergeleiteten konstitutiven Gleichungen werden zusammen mit der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Evolutionsgleichung für anisotrope Kriechschädigung numerisch mit dem Newton-Verfahren gelöst, da eine analytische Lösung im Allgemeinen nicht möglich ist. Die Integration erfolgt dabei mit Hilfe eines Operator-Split-Verfahrens nach [31]. Sollen die konstitutiven Gleichungen zusammen mit Feldgleichungen gelöst werden, bedient man sich in der Regel der Finite-Element-Methode (FEM). In dieser Arbeit wird der kommerzielle FEM-Code ABAQUS eingesetzt.

6.1 Integrationsalgorithmus

Im folgenden wird ein Integrationsalgorithmus zur Integration der in Kap. 4 und Kap. 5 beschriebenen konstitutiven Gleichungssysteme vorgestellt, welcher als Subroutine UMAT [38] in ABAQUS eingebunden wird. Zu jedem Zeitpunkt liefert ABAQUS ein Dehnungsinkrement $\Delta\mathbf{E}$. Die Subroutine UMAT muss zwei Aufgaben erfüllen. Zum ersten müssen die Spannung und die lösungsabhängigen Zustandsvariablen für das $\Delta\mathbf{E}$ berechnet werden. Zweitens muss der materielle Anteil der Jakobimatrix $\partial\Delta\mathbf{T}/\partial\Delta\mathbf{E}$ für das konstitutive Materialmodell berechnet werden. Der sogenannten konsistenten Tangente $\partial\Delta\mathbf{T}/\partial\Delta\mathbf{E}$ kommt dabei besondere Bedeutung zu, da die Genauigkeit der Tangentenbestimmung einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit der Subroutine hat.

6.1.1 Operator-Split-Verfahren

Die in Abschn. 4.4 - 4.5 und Abschn. 5.1 beschriebenen konstitutiven Gleichungssysteme werden mit Hilfe eines Operator-Split-Verfahrens integriert [31]. Es wird ein fünffacher Operator-Split verwendet, worin Operator I die elastischen Anteile, Operator II die viskoplastischen Anteile, Operator III und IV die Schädigung und Operator V die statischen Erholungsterme beinhaltet:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= {}^I \dot{X}_1 + {}^{II} \dot{X}_1 + {}^{III} \dot{X}_1 + {}^{IV} \dot{X}_1 + {}^V \dot{X}_1 \\
\dot{X}_2 &= {}^I \dot{X}_2 + {}^{II} \dot{X}_2 + {}^{III} \dot{X}_2 + {}^{IV} \dot{X}_2 + {}^V \dot{X}_2 \\
\dot{X}_3 &= {}^I \dot{X}_3 + {}^{II} \dot{X}_3 + {}^{III} \dot{X}_3 + {}^{IV} \dot{X}_3 + {}^V \dot{X}_3 \\
&\vdots \\
\dot{X}_n &= {}^I \dot{X}_n + {}^{II} \dot{X}_n + {}^{III} \dot{X}_n + {}^{IV} \dot{X}_n + {}^V \dot{X}_n .
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Die Variable X_n in (6.1) steht stellvertretend für einen Satz konstitutiver Variablen mit der Größe n . Die römische Zahl kennzeichnet den jeweiligen Operator. Der rechte obere Index bezeichnet mit (0) den Startwert des Inkrement und mit (1) den Endwert des Inkrement. Dabei ist zum Beispiel ${}^I X^{(1)}$ der Startwert des folgenden Operators in der Art, dass gilt:

$$\begin{aligned}
{}^I X_n^{(0)} &= X_n^{(0)} = X_n(t=0) \\
{}^{II} X_n^{(0)} &= {}^I X_n^{(1)} \\
{}^{III} X_n^{(0)} &= {}^{II} X_n^{(1)} \\
{}^{IV} X_n^{(0)} &= {}^{III} X_n^{(1)} \\
{}^V X_n^{(0)} &= {}^{IV} X_n^{(1)} \\
X_n(t=1) &= X_n^1 = {}^V X_n^{(1)} .
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Operator I

Im Operator I wird überprüft, ob die Bedingung für (visko-)plastisches Fließen erfüllt ist. Dazu geht man davon aus, dass die inkrementelle Dehnung des linearisierten Lagrange-Greenschen Verzerrungstensor $\Delta \mathbf{E}$ rein elastisch ist und überprüft dann die Fließbedingung. Man erhält folgende Größen im Operator I:

$${}^I \mathbf{E}^{(1)} = {}^I \mathbf{E}^{(0)} + \Delta \mathbf{E} , \quad (6.3)$$

$${}^I \mathbf{E}_e^{(1)} = {}^I \mathbf{E}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{E} , \quad (6.4)$$

$${}^I \mathbf{E}_p^{(1)} = {}^I \mathbf{E}_p^{(0)} , \quad (6.5)$$

$${}^I \mathbf{Y}_p^{(1)} = {}^I \mathbf{Y}_p^{(0)} , \quad (6.6)$$

$${}^I r^{(1)} = {}^I r^{(0)} , \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} {}^I \mathbf{T}^{(1)} &= {}^I \mathbf{T}^{(tr)} = \left({}^I \mathcal{M}^{(1)} \mathcal{C} {}^I \mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^I \mathbf{E}^{(1)} - {}^I \mathbf{E}_p^{(1)}] \\ &= \left({}^I \mathcal{M}^{(1)} \mathcal{C} {}^I \mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^I \mathbf{E}_e^{(1)}] , \end{aligned} \quad (6.8)$$

$${}^I \boldsymbol{\xi}^{(1)} = {}^I \boldsymbol{\xi}^{(0)} , \quad (6.9)$$

$${}^I k^{(1)} = {}^I k^{(0)} , \quad (6.10)$$

$${}^I s^{(1)} = {}^I s^{(0)} , \quad (6.11)$$

$${}^I F^{(Tr)} = {}^I F^{(Tr)} = {}^I g^{(1)} {}^I f^{(Tr)} - {}^I k^{(0)} , \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} {}^I f^{(1)} &= {}^I f^{(Tr)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left({}^I \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^I \mathbf{T}^{(1)} - {}^I \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D \cdot \boldsymbol{\kappa} \left({}^I \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^I \mathbf{T}^{(1)} - {}^I \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D , \end{aligned} \quad (6.13)$$

$${}^I \mathbf{D}^{(1)} = {}^I \mathbf{D}^{(0)} , \quad (6.14)$$

$${}^I g^{(1)} = {}^I g^{(0)} , \quad (6.15)$$

$${}^I \mathcal{M}^{(1)} = {}^I \mathcal{M}^{(0)} , \quad (6.16)$$

$${}^I m^{(1)} = {}^I m^{(0)} . \quad (6.17)$$

Wird das Fließkriterium

$${}^I F^{(Tr)} = {}^I g^{(1)} {}^I f^{(Tr)} - {}^I k^{(0)} > 0 \quad (6.18)$$

erfüllt, werden im Operator II die Evolutionsgleichungen für Plastizität gelöst.

Operator II

Im Operator II werden die (visko-)plastischen Größen durch eine Zeitdiskretisierung der Evolutionsgleichungen für $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{Y}}$ und \dot{r} berechnet. Das nichtlineare Differenzengleichungssystem ((6.21), (6.22) und (6.23)) wird mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens numerisch gelöst:

$${}^H\mathbf{E}^{(1)} = {}^H\mathbf{E}^{(0)}, \quad (6.19)$$

$${}^H\mathbf{E}_e^{(1)} = {}^H\mathbf{E}^{(1)} - {}^H\mathbf{E}_p^{(1)}, \quad (6.20)$$

$${}^H\mathbf{E}_p^{(1)} = {}^H\mathbf{E}_p^{(0)} + \Delta t \frac{\langle {}^H F^{(1)} \rangle^m}{K} \frac{{}^H f^{(1)}}{{}^H \zeta} \frac{\partial {}^H f^{(1)}}{\partial {}^H \mathbf{T}^{(1)}}, \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} {}^H\mathbf{Y}^{(1)} &= {}^H\mathbf{Y}^{(0)} + {}^H\mathbf{E}_p^{(1)} - {}^H\mathbf{E}_p^{(0)} + \Delta t \frac{\langle {}^H F^{(1)} \rangle^m}{K} \\ &\quad \frac{{}^H \zeta^{(f)}}{{}^H \zeta} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} \mathcal{Q} {}^H \mathcal{M}^{(1)-1} \right) [{}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}], \end{aligned} \quad (6.22)$$

$${}^H r^{(1)} = {}^H r^{(0)} + \Delta t \frac{\langle {}^H F^{(1)} \rangle^m}{K} \frac{{}^H f^{(1)}}{{}^H \zeta} \frac{(1 - \beta {}^H m^{(1)} {}^H r^{(1)})}{{}^H m^{(1)}}, \quad (6.23)$$

$${}^H \mathbf{T}^{(1)} = \left({}^H \mathcal{M}^{(1)} \mathcal{C} {}^H \mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^H \mathbf{E}_e^{(1)}], \quad (6.24)$$

$${}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \left({}^H \mathcal{M}^{(1)} \mathcal{N} {}^H \mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^H \mathbf{Y}^{(1)}], \quad (6.25)$$

$${}^H k^{(1)} = {}^H g^{(1)} {}^H m^{(1)} \gamma {}^H r^{(1)} + k_0, \quad (6.26)$$

$${}^H s^{(1)} = {}^H s^{(0)} + \Delta t \frac{\langle {}^H F^{(1)} \rangle^m}{K}, \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} {}^H \zeta^{(f)} &= \sqrt{\frac{2}{3} \mathcal{K} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^H \mathbf{T}^{(1)} - {}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D} \\ &\quad \cdot \mathcal{K} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^H \mathbf{T}^{(1)} - {}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D, \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} {}^H \zeta &= \sqrt{\frac{2}{3} {}^H \mathcal{M}^{(1)T-1} \mathcal{K} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^H \mathbf{T}^{(1)} - {}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D} \\ &\quad \cdot {}^H \mathcal{M}^{(1)T-1} \mathcal{K} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^H \mathbf{T}^{(1)} - {}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D, \end{aligned} \quad (6.29)$$

$${}^H F = {}^H g^{(1)} {}^H f^{(1)} - {}^H k^{(0)}, \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} {}^H f^{(1)} &= \sqrt{\frac{3}{2} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^H \mathbf{T}^{(1)} - {}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D} \\ &\quad \cdot \mathcal{K} \left({}^H \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^H \mathbf{T}^{(1)} - {}^H \boldsymbol{\xi}^{(1)}] \right)^D, \end{aligned} \quad (6.31)$$

$${}^H \mathbf{D}^{(1)} = {}^H \mathbf{D}^{(0)}, \quad (6.32)$$

$${}^H g^{(1)} = {}^H g^{(0)}, \quad (6.33)$$

$${}^H \mathcal{M}^{(1)} = {}^H \mathcal{M}^{(0)}, \quad (6.34)$$

$${}^H m^{(1)} = {}^H m^{(0)}. \quad (6.35)$$

Operator III

Im Operator III wird überprüft, ob das Schädigungskriterium (5.3) erfüllt wird:

$$\chi_c({}^{II}\mathbf{T}^{(1)}) > 0 . \quad (6.36)$$

Dabei gilt

$${}^{III}\mathbf{E}^{(1)} = {}^{III}\mathbf{E}^{(0)} , \quad (6.37)$$

$${}^{III}\mathbf{E}_e^{(1)} = {}^{III}\mathbf{E}_e^{(0)} , \quad (6.38)$$

$${}^{III}\mathbf{E}_p^{(1)} = {}^{III}\mathbf{E}_p^{(0)} , \quad (6.39)$$

$${}^{III}\mathbf{Y}^{(1)} = {}^{III}\mathbf{Y}^{(0)} , \quad (6.40)$$

$${}^{III}\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = {}^{III}\boldsymbol{\gamma}^{(0)} , \quad (6.41)$$

$${}^{III}\mathbf{T}^{(1)} = {}^{III}\mathbf{T}^{(0)} = {}^{II}\mathbf{T}^{(1)} , \quad (6.42)$$

$${}^{III}\boldsymbol{\xi}^{(1)} = {}^{III}\boldsymbol{\xi}^{(0)} , \quad (6.43)$$

$${}^{III}k^{(1)} = {}^{III}k^{(0)} , \quad (6.44)$$

$${}^{III}s^{(1)} = {}^{III}s^{(0)} , \quad (6.45)$$

$$\begin{aligned} {}^{III}\chi_c^{(1)} &= \alpha_c \sup_i ({}^{III}\mathbf{T}_i^{(1)}) + \beta_c \mathcal{N}_c [{}^{III}\mathbf{T}^{(1)}] \\ &\quad + (1 - \alpha_c - \beta_c) \cdot \sqrt{{}^{III}\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathcal{M}_c [{}^{III}\mathbf{T}^{(1)}]} , \end{aligned} \quad (6.46)$$

$${}^{III}\mathbf{D}^{(1)} = {}^{III}\mathbf{D}^{(0)} , \quad (6.47)$$

$${}^{III}g^{(1)} = {}^{III}g^{(0)} , \quad (6.48)$$

$${}^{III}\mathcal{M}^{(1)} = {}^{III}\mathcal{M}^{(0)} , \quad (6.49)$$

$${}^{III}m^{(1)} = {}^{III}m^{(0)} . \quad (6.50)$$

Ist $\chi_c({}^{II}\mathbf{T}^{(1)}) \leq 0$, so stellen (6.37) - (6.50) die gesuchten Lösungen dar, und man geht zum fünften Schritt über. Andernfalls müssen die Werte in (6.37) - (6.50) korrigiert werden.

Operator IV

Ist die Bedingung (6.36) erfüllt, wird in Operator IV die Schädigung und alle anderen Zustandsvariablen, welche vom Schädigungszustand abhängen, aktualisiert. Die Berechnung der Größen erfolgt wie in Operator II mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Differenzgleichungssystem (6.61),

$${}^{IV}\mathbf{E}^{(1)} = {}^{IV}\mathbf{E}^{(0)}, \quad (6.51)$$

$${}^{IV}\mathbf{E}_e^{(1)} = {}^{IV}\mathbf{E}_e^{(0)}, \quad (6.52)$$

$${}^{IV}\mathbf{E}_p^{(1)} = {}^{IV}\mathbf{E}_p^{(0)}, \quad (6.53)$$

$${}^{IV}\mathbf{Y}^{(1)} = {}^{IV}\mathbf{Y}^{(0)}, \quad (6.54)$$

$${}^{IV}r^{(1)} = {}^{IV}r^{(0)}, \quad (6.55)$$

$${}^{IV}\mathbf{T}^{(1)} = \left({}^{IV}\mathcal{M}^{(1)} \mathcal{C} {}^{IV}\mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^{IV}\mathbf{E}_e^{(1)}], \quad (6.56)$$

$${}^{IV}\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \left({}^{IV}\mathcal{M}^{(1)} \mathcal{N} {}^{IV}\mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^{IV}\mathbf{Y}^{(1)}], \quad (6.57)$$

$${}^{IV}k^{(1)} = {}^{IV}g^{(1)} {}^{IV}m^{(1)} \gamma {}^{IV}r^{(1)} + k_0, \quad (6.58)$$

$${}^{IV}s^{(1)} = {}^{IV}s^{(0)}, \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} {}^{IV}\chi_c^{(1)} &= \alpha_c \sup_i ({}^{IV}\mathbf{T}_i^{(1)}) + \beta_c \mathcal{N}_c [{}^{IV}\mathbf{T}^{(1)}] \\ &\quad + (1 - \alpha_c - \beta_c) \cdot \sqrt{{}^{IV}\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathcal{M}_c [{}^{IV}\mathbf{T}^{(1)}]}, \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)} &= {}^{IV}\mathbf{D}^{(0)} + \Delta t \frac{\mathcal{Q}_c [{}^{IV}\boldsymbol{\Omega}^{(1)}]}{\sqrt{{}^{IV}\boldsymbol{\Omega}^{(1)} \cdot \mathcal{Q}_c [{}^{IV}\boldsymbol{\Omega}^{(1)}]}} \\ &\quad \frac{\left\langle {}^{IV}\chi_c^{(1)} ({}^{IV}\mathbf{T}^{(1)}) \right\rangle^{r_c}}{A_c} [1 - \text{tr}({}^{IV}\mathbf{D}^{(1)})^{-K_c}], \end{aligned} \quad (6.61)$$

$${}^{IV}g^{(1)} = \frac{1}{(\det(\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}))^{(n-2)}}, \quad (6.62)$$

$${}^{IV}\mathcal{M}^{(1)} = (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}), \quad (6.63)$$

$${}^{IV}m^{(1)} = \frac{1}{3} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) \cdot (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}), \quad (6.64)$$

$${}^{IV}\boldsymbol{\Omega}^{(1)} = {}^{IV}\boldsymbol{\Omega}_{ela}^{(1)} + {}^{IV}\boldsymbol{\Omega}_{kin}^{(1)} + {}^{IV}\boldsymbol{\Omega}_{iso}^{(1)}, \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} {}^{IV}\boldsymbol{\Omega}_{ela}^{(1)} &= -2 \left((\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) {}^{IV}\mathbf{E}_e^{(1)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{C} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) {}^{IV}\mathbf{E}_e^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} {}^{IV}\boldsymbol{\Omega}_{kin}^{(1)} &= -2 \left((\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) {}^{IV}\mathbf{Y}^{(1)} \right) \\ &\quad \left(\mathcal{N} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) \underline{\otimes} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}) {}^{IV}\mathbf{Y}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (6.67)$$

$${}^{IV}\boldsymbol{\Omega}_{iso}^{(1)} = \gamma {}^{IV}r^{(1)2} (\mathbf{1} - {}^{IV}\mathbf{D}^{(1)}). \quad (6.68)$$

Operator \mathbf{V}

Im Operator \mathbf{V} werden die statischen Erholungsterme ausgewertet. Die Berechnung des nichtlinearen Differenzgleichungssystem (6.72) und (6.73) erfolgt mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens.

$${}^V\mathbf{E}^{(1)} = {}^V\mathbf{E}^{(0)}, \quad (6.69)$$

$${}^V\mathbf{E}_e^{(1)} = {}^V\mathbf{E}_e^{(0)}, \quad (6.70)$$

$${}^V\mathbf{E}_p^{(1)} = {}^V\mathbf{E}_p^{(0)}, \quad (6.71)$$

$${}^V\mathbf{Y}^{(1)} = {}^V\mathbf{Y}^{(0)} - \Delta t \frac{\|{}^V\mathcal{M}^{(1)}[{}^V\boldsymbol{\xi}^{(1)}]\|^{w-1}}{V\chi^{(1)}} {}^V\mathcal{M}^{(1)T-1} \mathcal{B}^V \mathcal{M}^{(1)-1} [{}^V\boldsymbol{\xi}^{(1)}], \quad (6.72)$$

$${}^Vr^{(1)} = {}^Vr^{(0)} - \Delta t \frac{\pi}{V\chi^{(1)}} ({}^Vm^{(1)} ({}^Vr^{(1)} - r_0))^\omega, \quad (6.73)$$

$${}^V\Sigma^{(1)} = (\det(\mathbf{1} - {}^V\mathbf{D}^{(1)}))^l, \quad (6.74)$$

$${}^V\mathbf{T}^{(1)} = {}^V\mathbf{T}^{(0)}, \quad (6.75)$$

$${}^V\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \left({}^V\mathcal{M}^{(1)} \mathcal{N} {}^V\mathcal{M}^{(1)} \right) [{}^V\mathbf{Y}^{(1)}], \quad (6.76)$$

$${}^Vk^{(1)} = {}^Vg^{(1)} {}^Vm^{(1)} \gamma {}^Vr^{(1)} + k_0, \quad (6.77)$$

$${}^Vs^{(1)} = {}^Vs^{(0)}, \quad (6.78)$$

$${}^V\mathbf{D}^{(1)} = {}^V\mathbf{D}^{(0)}, \quad (6.79)$$

$${}^Vg^{(1)} = {}^Vg^{(0)}, \quad (6.80)$$

$${}^V\mathcal{M}^{(1)} = {}^V\mathcal{M}^{(0)}, \quad (6.81)$$

$${}^Vm^{(1)} = {}^Vm^{(0)}. \quad (6.82)$$

6.1.2 Bestimmung der konsistenten Tangente

Zur Berechnung des materiellen Anteils der Jakobimatrix $\partial\Delta\mathbf{T}/\partial\Delta\mathbf{E}$ für das konstitutive Materialmodell wird ein numerisches Verfahren gewählt [39]. Die numerische Bestimmung hat den Vorteil, dass eine fehleranfällige analytische Bestimmung der konsistenten Tangente entfällt. Weiter erhöht sich die Flexibilität der UMAT in Bezug auf Änderungen der Materialgleichungen. Die numerische Bestimmung der partiellen Ableitung

$$\mathcal{D} = \frac{\partial\Delta\mathbf{T}}{\partial\Delta\mathbf{E}}, \quad (6.83)$$

wird durch vordere Differenzenquotienten ermittelt. Bildet man den vorderen Differenzenquotienten einer skalaren Funktion g , dann wird das Funktionsargument x um eine kleine Zahl χ in positiver Richtung gestört. An dieser Stelle wird der Funktionswert ermittelt und man erhält die numerische Ableitung in folgender Form:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \approx \frac{g(x + \chi) - g(x)}{\chi}, \quad \text{mit } \chi \ll 1. \quad (6.84)$$

Bei einem Tensor $\mathbf{G}(\mathbf{X})$ zweiter Stufe, der als Funktion eines anderen Tensors zweiter Stufe \mathbf{X} definiert ist, erhält man analog

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial X_{mn}} \approx \frac{\check{G}_{ij}(\check{X}_{kl}^{(mn)}) - G_{ij}(X_{kl})}{\chi}, \quad (6.85)$$

mit dem gestörten Tensor $\check{\mathbf{X}}^{(mn)}$:

$$\check{\mathbf{X}}^{(mn)} = \mathbf{X} + \chi(\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n). \quad (6.86)$$

Es wird also jede Komponente von \mathbf{X} gestört und aus diesem $\check{\mathbf{X}}^{(mn)}$ das zugehörige \mathbf{G} berechnet. Man erhält so für jedes $\check{\mathbf{X}}^{(mn)}$ 9 Komponenten von \mathbf{G} , insgesamt also die 81 Komponenten des entstehenden Tensors vierter Stufe. Bei symmetrischen Tensoren zweiter Stufe, wie z. B. $\Delta\mathbf{T}$ und $\Delta\mathbf{E}$, ist auch die Störung symmetrisch. Das gestörte $\Delta\check{\mathbf{E}}^{(mn)}$ ist dann durch

$$\Delta\check{\mathbf{E}}^{(mn)} = \Delta\mathbf{E} + \frac{\chi}{2} [\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_m], \quad (6.87)$$

gegeben. Die numerische Näherung von \mathcal{D} erhält man als

$$\mathcal{D}_{ijmn} \approx \frac{\check{T}_{ij}(\Delta\check{E}^{(mn)}) - T_{ij}(\Delta E)}{\chi}. \quad (6.88)$$

χ muss sehr klein sein, jedoch deutlich größer als die Maschinengenauigkeit des Rechners. Wird χ zu groß gewählt, ist die errechnete Tangente zu ungenau, wird es zu klein gewählt (in der Größenordnung der Rechengenauigkeit), können entscheidende Nachkommastellen verloren gehen, was zu falschen Ergebnissen bei der Tangentenberechnung führt. Ein üblicher Wert für χ ist ein Wert mit der halben Anzahl von Nachkommastellen der Maschinengenauigkeit, also

$$\chi = \sqrt{\text{Maschinengenauigkeit}}. \quad (6.89)$$

Ein Nachteil der numerisch bestimmten Tangente ist der größere numerische Aufwand. Neben dem ersten Durchlaufen des Spannungsalgorithmus zur Ermittlung des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensors, muss der Spannungsalgorithmus noch sechsmal zusätzlich ausgeführt werden. Die numerisch aufwendigsten und damit rechenzeitintensivsten Programmteile sind die Lösungen der nichtlinearen Gleichungssysteme in den Operatoren 2,4 und 5. Die Effizienz der Tangentenbestimmung kann dadurch gesteigert werden, dass als Startwerte des Newtonverfahrens die Lösung, die aus der Spannungsberechnung bekannt ist, verwendet wird. Da sich die jeweils neu bestimmten Verzerrungsmaße $\Delta\check{\mathbf{E}}$ nur minimal vom ursprünglichen Maß $\Delta\mathbf{E}$ unterscheiden, weicht auch die berechnete Spannung $\Delta\check{\mathbf{T}}^{(mn)}$ nur minimal von $\Delta\mathbf{T}$ ab. Es sind deshalb nur sehr wenige Iterationen im Newtonverfahren erforderlich, um diese neue Spannung zu ermitteln.

Kapitel 7

Beispiele

Im Anschluss an die Theorie und der numerischen Umsetzung werden als Anwendungsbeispiele die Schädigungsvorhersage an einer gekerbten Rundprobe (Abschnitt 7.3) und an einer Lochfeldprobe (Abschnitt 7.4) diskutiert. Diese Proben stehen dabei stellvertretend für die schädigungskritischen Hochtemperaturbereiche von Turbinen in denen die Superlegierung CSMX-4 häufig verwendet wird.

7.1 Einkristalline Nickel-Basis-Legierung CSMX-4

7.1.1 Eigenschaften

Die im Rahmen dieser Arbeit aufgeführten experimentellen Daten beziehen sich auf die Superlegierung Ni_3Al (CSMX4). Ni_3Al ist eine stöchiometrische intermetallische Legierung [44] und weist damit eine definierte Zusammensetzung auf. Weiter handelt es sich um einen kubisch flächenzentrierten Einkristall, dessen Einheitszelle in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Die besonderen Eigenschaften dieser Materialien kommen durch das Ausscheidungshärten zustande. Ausscheidungshärten findet beim Abkühlen der Legierung statt. Die kontinuierlich im Material auftretende Phase wird als Matrix, die zweite als Ausscheidung bezeichnet. Die herausragenden Eigenschaften von Ni_3Al sind der hohe Schmelzpunkt, eine große Steifigkeit und der hohe Oxydations- und Kriechwiderstand. Die geordnete Struktur des kubisch flächenzentrierten Ni_3Al Einkristall [41] erschwert die Bewegung von Versetzungen und verursacht eine geringere Duktilität bei niedrigen Temperaturen. Die Matrix von Ni_3Al wird als γ -Phase und die Ausscheidungsphase als γ' -Phase bezeichnet. In Abbildung 7.2 kann man das γ/γ' Gefüge der Ni_3Al Legierung gut erkennen. Die eingeschlossene Pore ist beim Herstellungsprozess entstanden und ist ein Ausgangspunkt für Mikrorisse. Die genaue chemische Zusammensetzung für CSMX4 ist z.B. in [42] aufgeführt. Verwendung finden derartige Superlegierungen besonders in den Hochtemperaturbereichen von Turbinen.

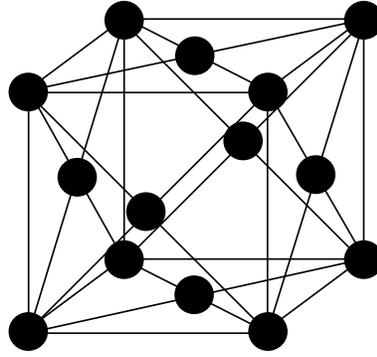


Abbildung 7.1: Kubisch flächenzentrierte Einheitszelle

7.1.2 Orientierung

Da es sich bei der Ni_3Al Legierung um einen einkristallinen Werkstoff handelt, weist jedes Bauteil oder jeder Probenkörper eine bestimmte Kristallorientierung auf. In Abbildung 7.3 ist die Orientierung einer festgelegten Probenachse in Bezug auf die Kristallstruktur dargestellt. Abbildung 7.4 zeigt die stereographische Projektion der Probenachse im Standardorientierungsdreieck. Die Orientierung der Kristallstruktur muss bei einer Simulation mittels einer Überführung der Materialensoren vom kristallfesten Koordinatensystem in das probenfeste Koordinatensystem berücksichtigt werden. Dies geschieht mit einer Starrkörperrotation nach folgender Vorschrift:

$$\begin{aligned}
 X_{ijkl}^* &= P_{ia}P_{jb}P_{kc}P_{ld}X_{abcd} \\
 &= P_{ia}P_{jb}X_{abcd}P_{ck}P_{dl} \\
 &= R_{ijab}X_{abcd}R_{cdkl} .
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

X_{ijkl} sind die Komponenten des Materialensors bezüglich des kristallfesten Koordinatensystems und X_{ijkl}^* sind die Komponenten des Materialensors bezüglich des probenfesten Koordinatensystems. Für die Drehmatrizen gilt:

$$P_{ij} = P_{ik}^x P_{kl}^y P_{lj}^y , \tag{7.2}$$

mit

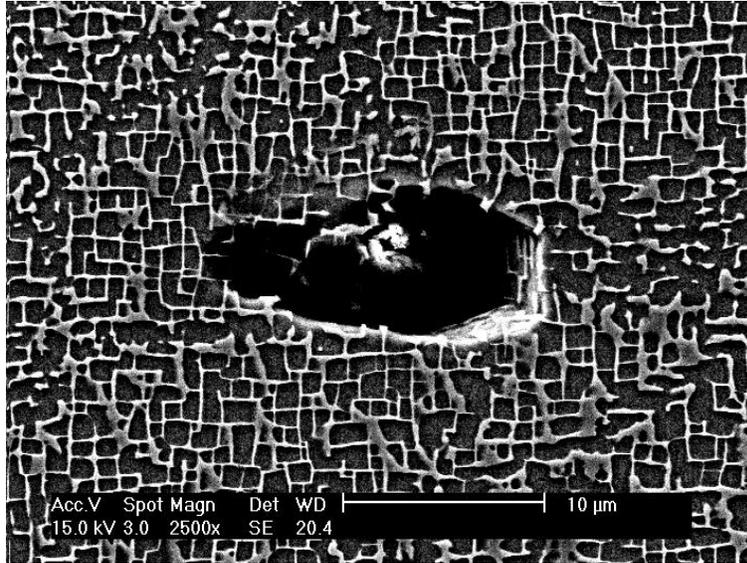


Abbildung 7.2: γ/γ' Gefüge der Ni_3Al Superlegierung mit eingeschlossener Pore

$$P^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

$$P^y = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

$$P^z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

7.2 Anpassung der Materialparameter

Die eindeutige Bestimmung von Materialparametern schwierig ist, wird statt dessen ein Parametersatz gesucht, der die zur Anpassung verwendeten Experimente möglichst gut wiedergibt. Die zur Anpassung herangezogenen Experimenten sind dehnungsgesteuerte Zug-Druck Versuche mit Haltephasen, in denen das Material relaxieren kann und die statische Erholung eine Rolle spielt. Weiter werden Kriechversuche verwendet, die sich durch unterschiedlich starke Belastungen unterscheiden. Die Experimente wurden an Proben mit [001] Orientierung und [111] Orientierung zur Zug- bzw. Druckrichtung bei 1050 °C durchgeführt. Eine Übersicht der Versuche ist in Tabelle 7.6 gegeben. Der Probenkörper hat im Bereich der Messabnehmer, die die Dehnung messen, eine radiale Symmetrie mit konstantem Durchmesser. Aufgrund des Verformungsverhaltens der Proben kann man für die

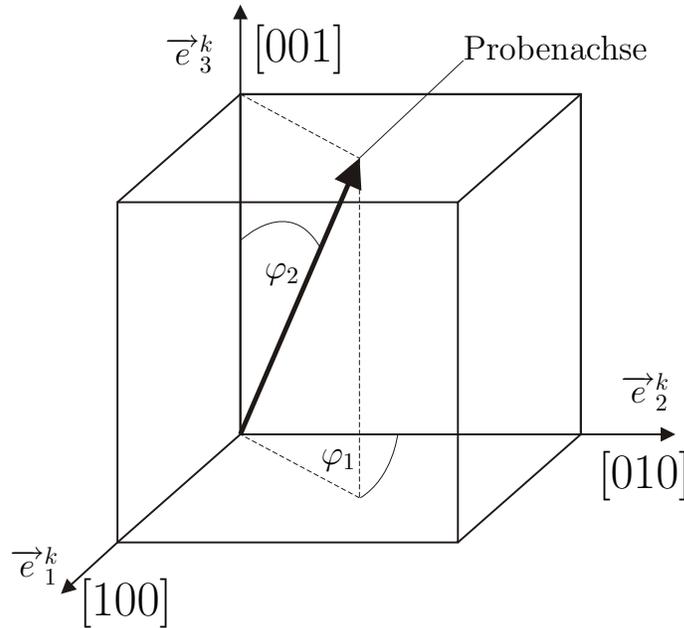


Abbildung 7.3: Orientierung der Probenachse in Bezug auf das Kristallgitter

Bestimmung der Materialparameter eine homogene Deformation annehmen. Die Richtung, in der die Proben belastet werden, wird im folgenden als z-Richtung bezeichnet. In Abbildung 7.5 ist die Dehnungsgeschichte der dehnungsgesteuerten Experimente xBA105d59 und xBC105d55 abgebildet. Die Änderung der Dehnung erfolgt mit 0,18%/min, eine Haltephase dauert jeweils 10 Stunden. In den Abschnitten 7.2.1 - 7.2.2 wird in Anlehnung an [45] die grundlegende Problematik bei der Bestimmung von Materialparametern diskutiert.

7.2.1 Direktes und inverses Problem

Die Identifikation von Materialparametern ist ein inverses Problem, d.h. zu einer bekannten Systemantwort \mathcal{S} werden die Eingangsgrößen gesucht. Im Gegensatz dazu steht das direkte Problem, wie z.B. die Voraussage des mechanischen Verhaltens, also der Systemantwort \mathcal{S} . Das direkte mechanische Problem wird i.a. durch das Funktional \mathcal{F}

$$S = \mathcal{F}_{\tau=0}^t(\mathcal{R}_0, \mathbf{q}, \mathbf{P}(\tau)) \quad (7.6)$$

in Abhängigkeit von der Referenzkonfiguration \mathcal{R}_0 , den Materialparametern \mathbf{q} sowie der Lastgeschichte $\mathbf{P}(\tau)$ definiert. Bei der Bestimmung von Materialparametern kann man voraussetzen, dass die Methode zur Lösung des direkten Problems verfügbar ist und die Lösung existiert. Sind die Referenzkonfiguration \mathcal{R}_0 sowie der Prozess $\mathbf{P}(\tau)$ festgelegt, reduziert sich das Funktional \mathcal{F} zu einer Abbildung

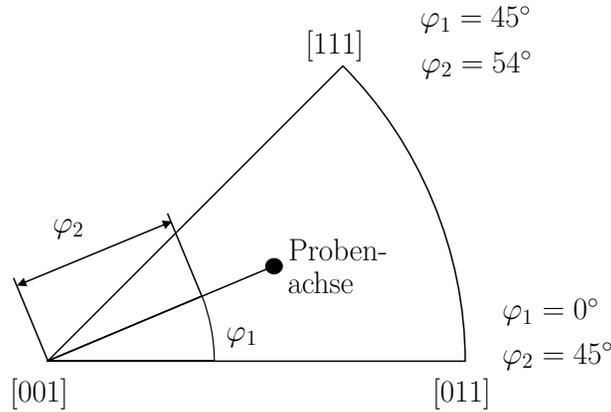


Abbildung 7.4: Stereographische Projektion der Probenachse im Standardorientierungs-dreieck

$$\mathcal{S} = \hat{\mathcal{S}}(\mathbf{q}, t), \quad (7.7)$$

mit R_0 und $\mathbf{P}(\tau)$ als Konstanten, die in $\hat{\mathcal{S}}$ enthalten sind. Weder bei der experimentellen noch bei der numerischen Umsetzung stehen jedoch unendlich viel Lösungspunkte \mathcal{S} zur Verfügung. Die betreffende Größe wird deswegen zu beliebigen aber festen diskreten Zeitpunkten t_i , $i = 1..N$, ermittelt. Somit ergibt sich der Lösungsvektor der Systemantwort mit der Dimension N :

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{q}, t), \quad s_i = \hat{s}(\mathbf{q}, t_i) \quad (7.8)$$

Das zugehörige inverse Problem besteht darin, für eine gegebene Systemantwort \mathbf{s} , die zugehörigen Materialparameter \mathbf{q} nach

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{s}}^{-1}(\mathbf{s}) \quad (7.9)$$

zu bestimmen. Hierbei kann die Eindeutigkeit von $\hat{\mathbf{s}}^{-1}$ und die Vollständigkeit von \mathbf{s} in vielen Fällen durch die Wahl eines geeigneten Prozesses $\mathbf{P}(\tau)$ erreicht werden, wie es in [45] gezeigt wird.

7.2.2 Messfehler und Streuung

Jede gemessene Systemantwort $\hat{\mathbf{s}}$ enthält i.a. Messfehler. Zum einen begrenzt die Auflösung der Sensoren die Messgenauigkeit, zum anderen spielt die Fehlerfortpflanzung in der Messkette sowie der Einfluss von Störungen wie z.B. Temperaturschwankungen eine Rolle für die in der Systemantwort enthaltenen Fehler. Eine weiterer wichtiger Punkt ist die Streuung der Materialeigenschaften. Wird mehr als eine Probe zur Bestimmung eines Materialparametersatzes herangezogen, ist zu berücksichtigen, dass jede Probe einen anderen Materialparametersatz repräsentiert. Während Zugexperimente und zyklische Experimente recht robust in Bezug auf unterschiedliche Materialparameter sind, sind die

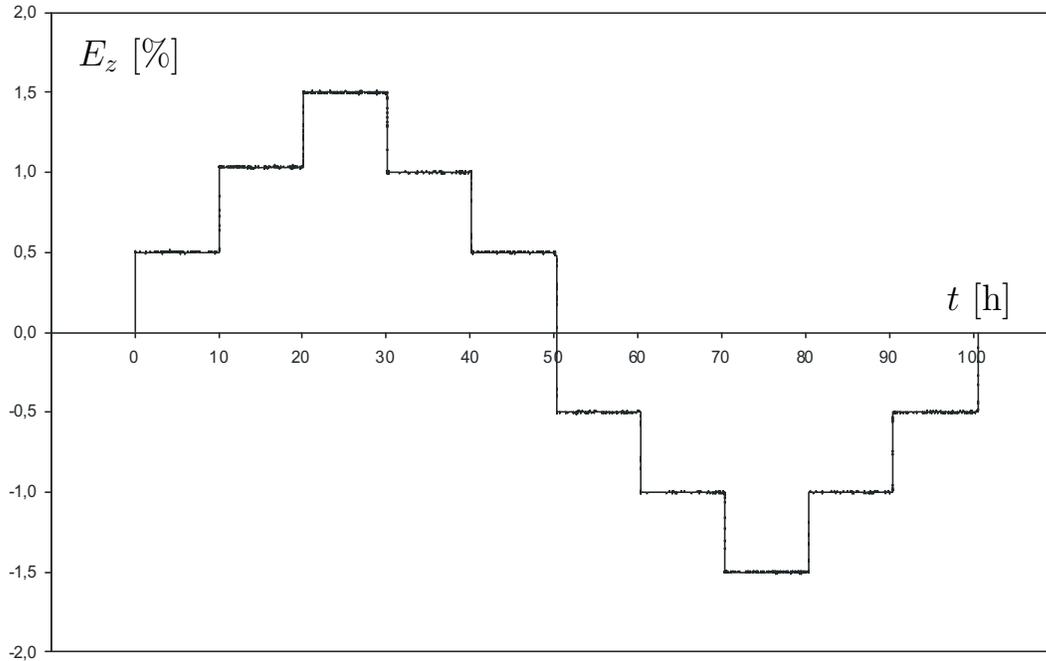


Abbildung 7.5: Vorgegebene Dehnung der Experimente xBA105d59 und xBC105d55. Die Änderung der Dehnung erfolgt mit $0,18\%/min$, einen Haltephase dauert jeweils 10 Stunden.

Ergebnisse bei Kriechexperimenten bei gleicher Belastung sehr großen Schwankungen unterworfen.

7.2.3 Anpassung an das Experiment

Ziel einer Optimierung ist die Minimierung der Zielfunktion

$$E(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{q})\|^2 \rightarrow \min, \quad (7.10)$$

bei gegebenen \mathcal{R}_0 und $\mathbf{P}(\tau)$. $\tilde{\mathbf{s}}$ stellt die experimentell gemessene und $\hat{\mathbf{s}}$ die numerisch bestimmte Systemantwort für den Prozess $\mathbf{P}(\tau)$ da. Die Verfahren, die dieses ermöglichen können in deterministische und stochastische Verfahren unterschieden werden. Eine detaillierte Beschreibung der Verfahren findet man z.B. in [45]. Aufgrund der langen Rechenzeiten des Modells galt es im Rahmen dieser Arbeit ein geeignetes Konzept zur Anpassung der Materialparameter zu finden. Bei der Anpassung eines Materialparametersatzes an mehrere Experimente kann es passieren, dass ein deterministisches Verfahren schnell in einem lokalen Minimum gefangen wird. Aus diesem Grund wird die zu minimierende Zielfunktion (7.10) ausgehend von ihrem Startpunkt

$$E(\mathbf{q}_0) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{q}_0)\|^2 \quad (7.11)$$

| Dehnungsgesteuerte Versuche | | | | |
|-----------------------------|--------------|-------------|-------------|---------|
| Probe | Orientierung | φ_1 | φ_2 | |
| xBA105d59 | [001] | 42° | 3,5° | |
| xBC105d55 | [111] | 44,9° | 50,7° | |
| Kriechversuche | | | | |
| Probe | Orientierung | φ_1 | φ_2 | Last |
| xAA105z1f | [001] | 32° | 9,1° | 140 MPa |
| xAA105z2 | [001] | 10,3° | 9,5° | 95 MPa |
| xAA105z3 | [001] | 1° | 6,4° | 190 MPa |
| xAC105z1 | [111] | 42,8° | 52,7° | 140 MPa |
| xAC105z3 | [111] | 42,6° | 53,2° | 155 MPa |
| xAC105z4 | [111] | 42,6° | 53,2° | 128 MPa |

Abbildung 7.6: Übersicht der zur Parameteranpassung verwendeten Versuche.

innerhalb eines Teilgebietes des Parameterraumes auf ihr Minimum untersucht. Um die Zahl der Rechnungen gering zu halten wurden die Variationen jeweils immer nur für eine Komponente q_i durchgeführt, wobei die anderen Größen festgehalten werden:

$$E(\mathbf{q}_k) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}(q_1, q_2, \dots, q_i + m\Delta q, \dots, q_N)\|^2 \quad (7.12)$$

Das im k -ten Schritt jeweils neu bestimmte Minimum dient wieder als Ausgangspunkt für die nächste Variation, solange bis ein Abbruchkriterium erreicht ist. Anstelle von N^m Variationen kann man so die Zahl der nötigen Variationen auf Nm Variationen beschränken und so auch Parameterräume mit großem N schnell und effektiv nach dem globalen Minima durchsuchen. Für große Werte von N ist es auch möglich, nur einen Teil des Parameterraumes zu variieren und die restlichen Größen konstant zu halten. Weiter lässt sich dieses Verfahren schnell und einfach für den FEM-Code ABAQUS mit Hilfe der Python-Skriptsprache realisieren. Beabsichtigt man die Anpassung an mehrere Experimente, muss man aber aufgrund der Streuung der Materialeigenschaften Abstriche in der Genauigkeit der zu erreichenden Anpassung hinnehmen. Eine Übersicht der ermittelten Materialparameter ist in Tabelle 7.7 aufgeführt. Die experimentellen und gerechneten Spannungsverläufe der dehnungsgesteuerten Versuche werden in den Abbildungen 7.8 - 7.11 gezeigt. Die plastischen Dehnungen der Kriechversuche werden in den Abbildungen 7.12 - 7.13 gezeigt. Die Rechnungen wurden mit dem Materialparametersatz aus Tabelle 7.7 durchgeführt.

| Materialparameter | | | | | |
|-------------------------------------|------------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-----------|
| Elastizitätsgesetz | | | | | |
| C_{11} [MPa] | 97000 | C_{12} [MPa] | 47000 | C_{44} [MPa] | 100000 |
| Kinematische Verfestigung | | | | | |
| N_{11} [MPa] | 10000 | N_{12} [MPa] | 0 | N_{44} [MPa] | 3000 |
| Q_{11} [MPa ⁻¹] | 0,058 | Q_{12} [MPa ⁻¹] | 0 | Q_{44} [MPa ⁻¹] | 0,005 |
| Isotrope Verfestigung | | | | | |
| γ [MPa] | 4100 | β [MPa ⁻¹] | 710 | k_0 [MPa] | 77,67 |
| Statische Erholung | | | | | |
| B_{11} [MPa ⁻¹] | 2^{-11} | B_{12} [MPa ⁻¹] | 0 | B_{44} [MPa ⁻¹] | 2^{-11} |
| w | 1 | π [MPa ⁻¹] | 0 | ω | 1 |
| l | 1 | | | | |
| γ [MPa] | 4100 | β [MPa ⁻¹] | 710 | k_0 [MPa] | 77,67 |
| Fließfläche | | | | | |
| K_{11} | 1 | K_{12} | 0 | K_{44} | 0,495 |
| Viskoplastizität | | | | | |
| K MPa ^{m_s} | $7,4^{12}$ | m | 3,45 | | |
| Schädigungsgesetz | | | | | |
| α | 0,4 | β | 0 | n | 4 |
| A_c | $3,5^{16}$ | r_c | 5,12 | K_c | 3 |
| $M_{c_{11}}$ | 0,001 | $M_{c_{12}}$ | 0 | $M_{c_{44}}$ | 1^{-6} |
| $Q_{c_{11}}$ | 1 | $Q_{c_{12}}$ | 0 | $Q_{c_{44}}$ | 0,1 |

Abbildung 7.7: Übersicht der ermittelten Materialparameter.

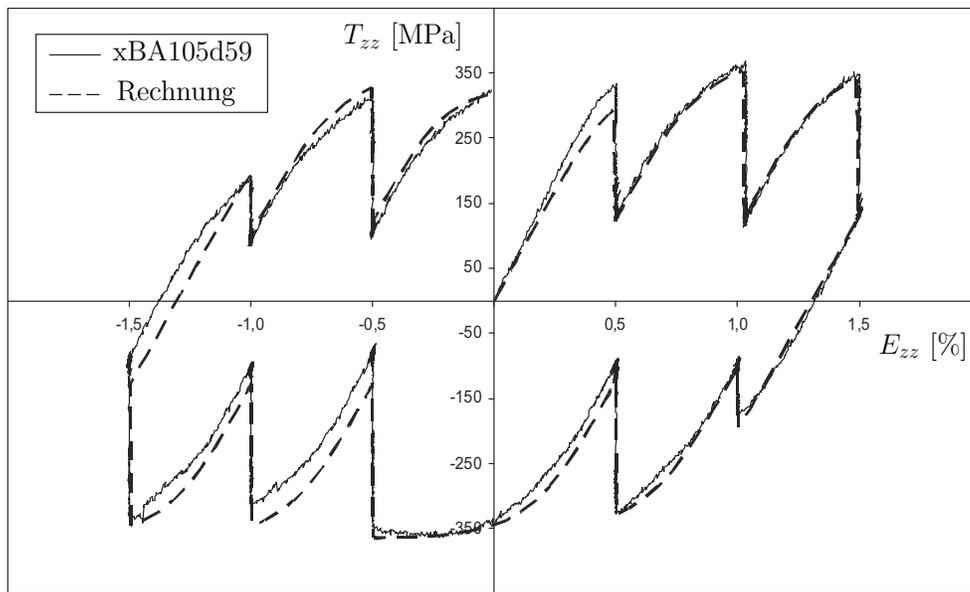


Abbildung 7.8: Anpassung an den Versuch xBA105d59 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Dehnung der Probe in z-Richtung.

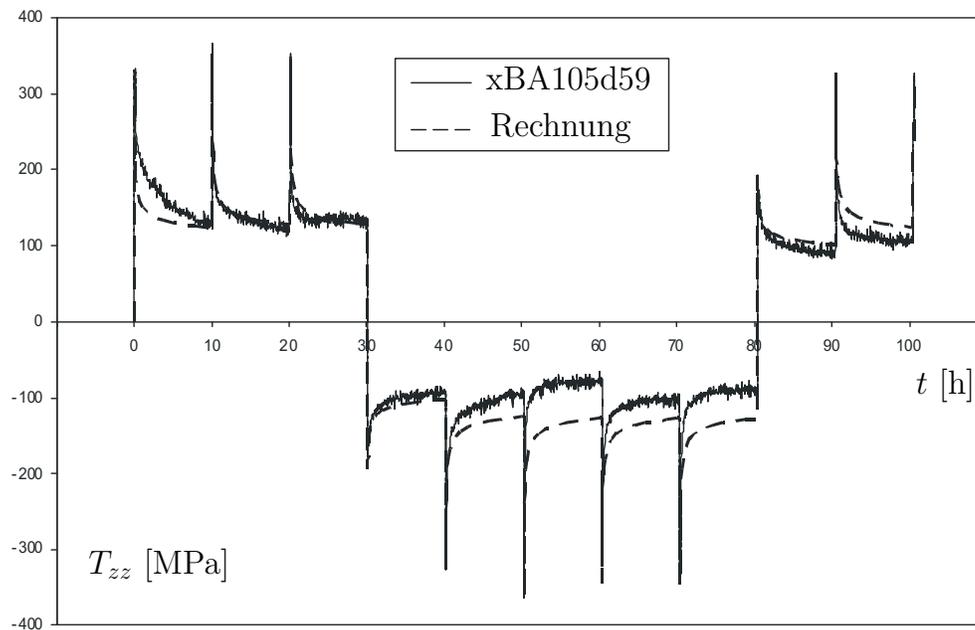


Abbildung 7.9: Anpassung an den Versuch xBA105d59 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Zeit.

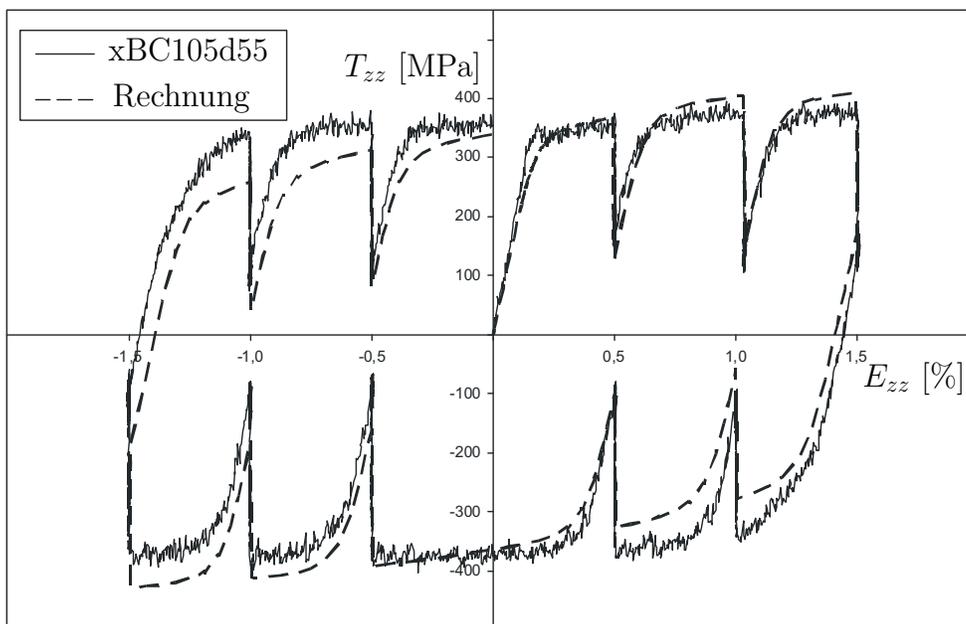


Abbildung 7.10: Anpassung an den Versuch xBC105d55 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Dehnung der Probe in z-Richtung.

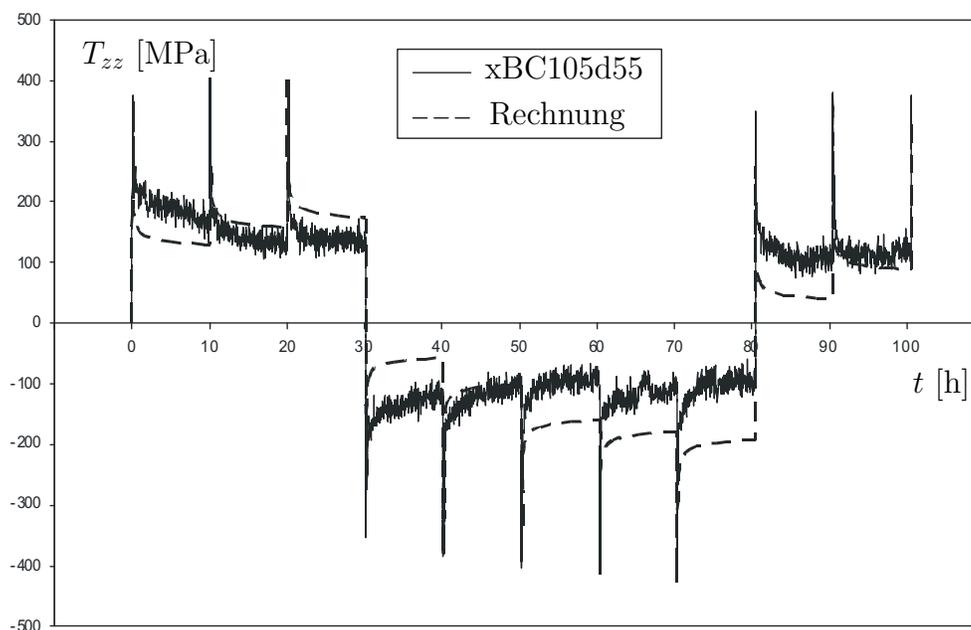


Abbildung 7.11: Anpassung an den Versuch xBC105d55 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Zeit.

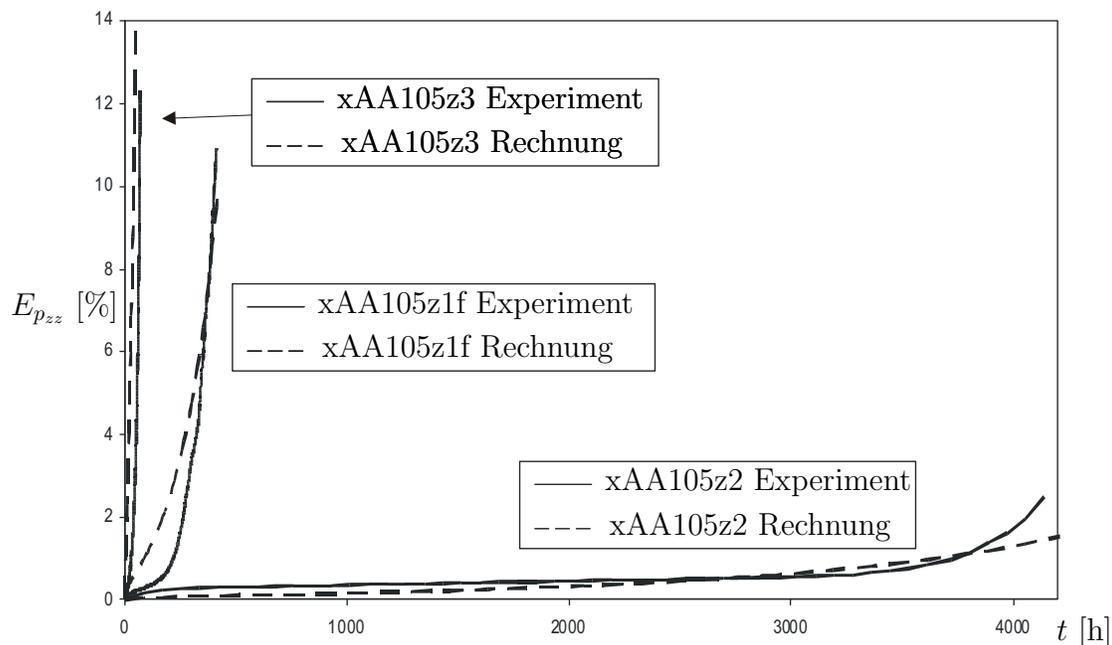


Abbildung 7.12: Anpassung an die Versuche xAA105z1f, xAA105z2 und xAA105z3 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die plastische Dehnung in z-Richtung der Probe über die Zeit.

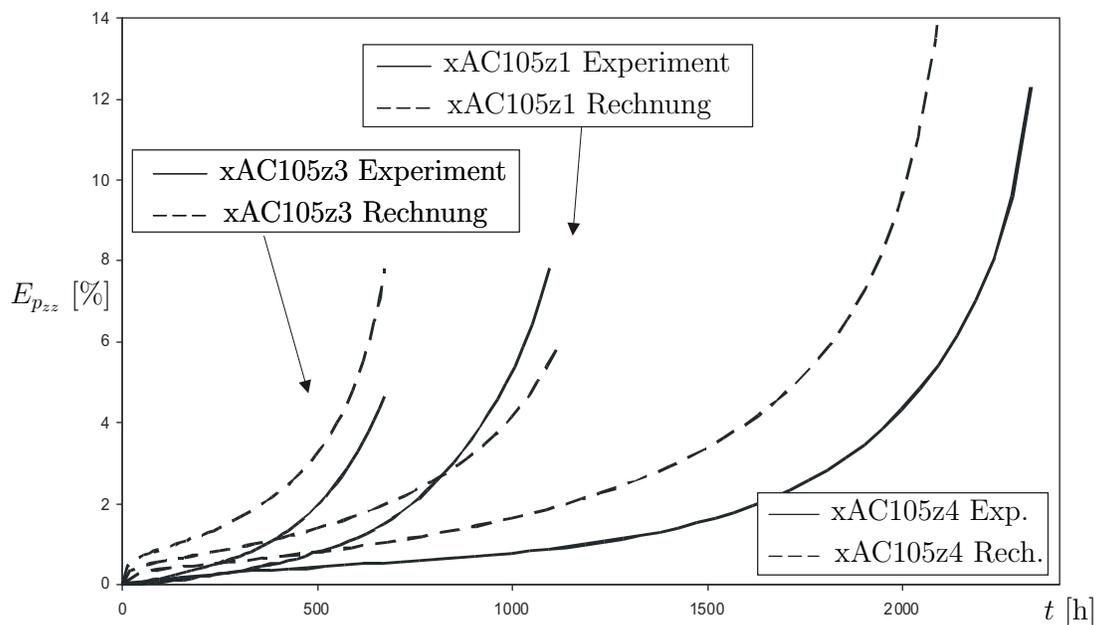


Abbildung 7.13: Anpassung an die Versuche xAC105z1, xAC105z3 und xAC105z4 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die plastische Dehnung in z-Richtung der Probe über die Zeit.

7.3 Gekerbte Rundprobe

In diesem Abschnitt wird das Materialmodell aus Kapitel 4 mit den Materialparametern aus Tabelle 7.7 zur Schädigungsberechnung an einer gekerbten Rundprobe verwendet. Das zum Vergleich herangezogene experimentelle Gegenstück wird in Abbildung 7.14 dargestellt. Die genaue Geometrie mit Abmessungen kann man aus Abbildung 7.15 entnehmen. Die Orientierung des Einkristalls in der Probe beträgt $5,6^\circ$ für φ_1 und $14,9^\circ$ für φ_2 . Die Winkel φ_1 und φ_2 beschreiben die Abweichung von der idealen $[001]$ -Orientierung, für die $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$ gilt und bei der die axiale Symmetrieachse der Probe mit der $[001]$ -Kristallachse zusammenfällt (siehe Abbildung 7.3).



Abbildung 7.14: Gekerbte Rundprobe aus Ni_3Al , die Orientierung des Einkristalls in der Probe ist durch $\varphi_1 = 5,6^\circ$ und $\varphi_2 = 14,9^\circ$ gegeben.

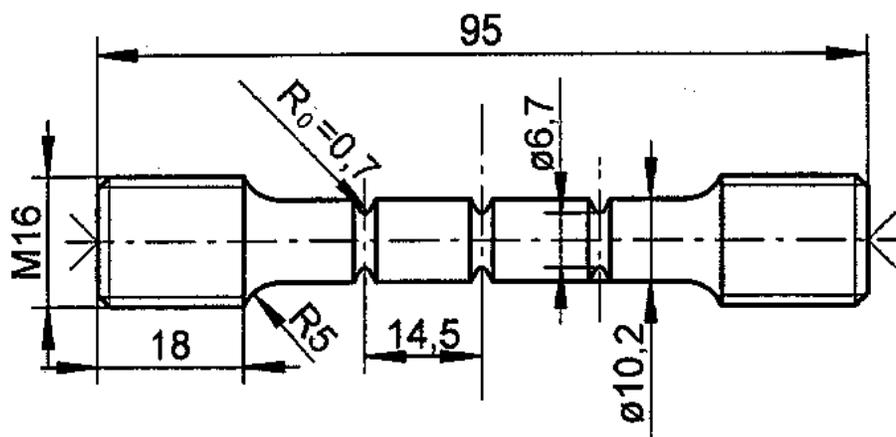


Abbildung 7.15: Technische Zeichnung der gekerbten Rundprobe mit Abmessungen

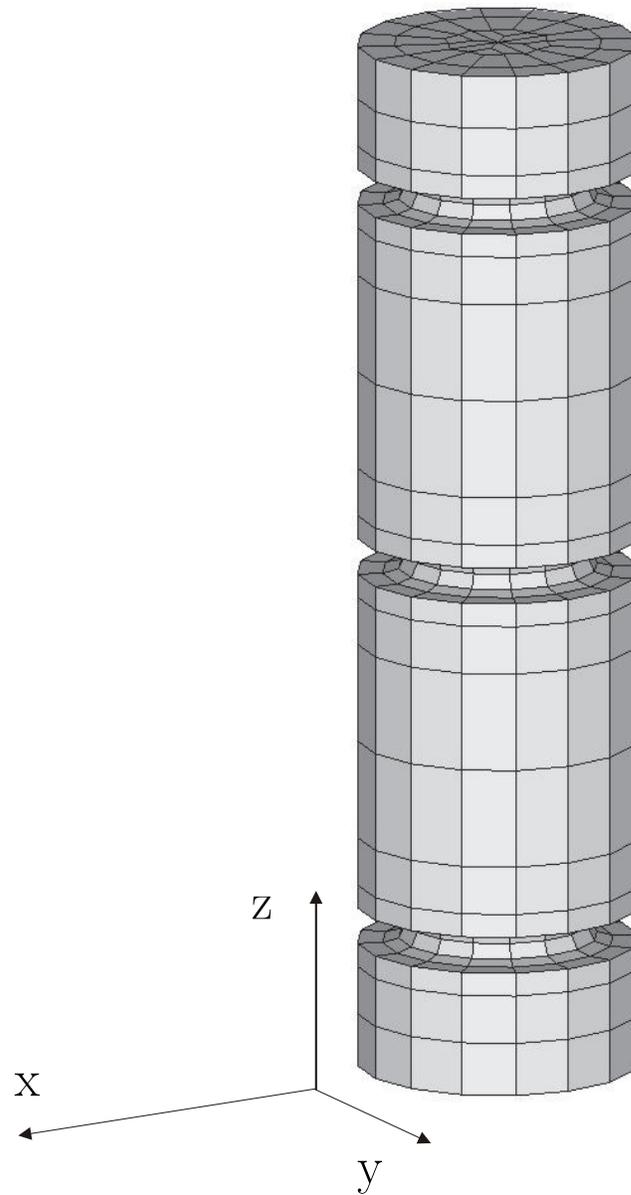


Abbildung 7.16: Finite-Elemente-Modell der gekerbten Rundprobe aus insgesamt 1248 8-knotigen Hexaeder-Volumenelementen und 1613 Knoten

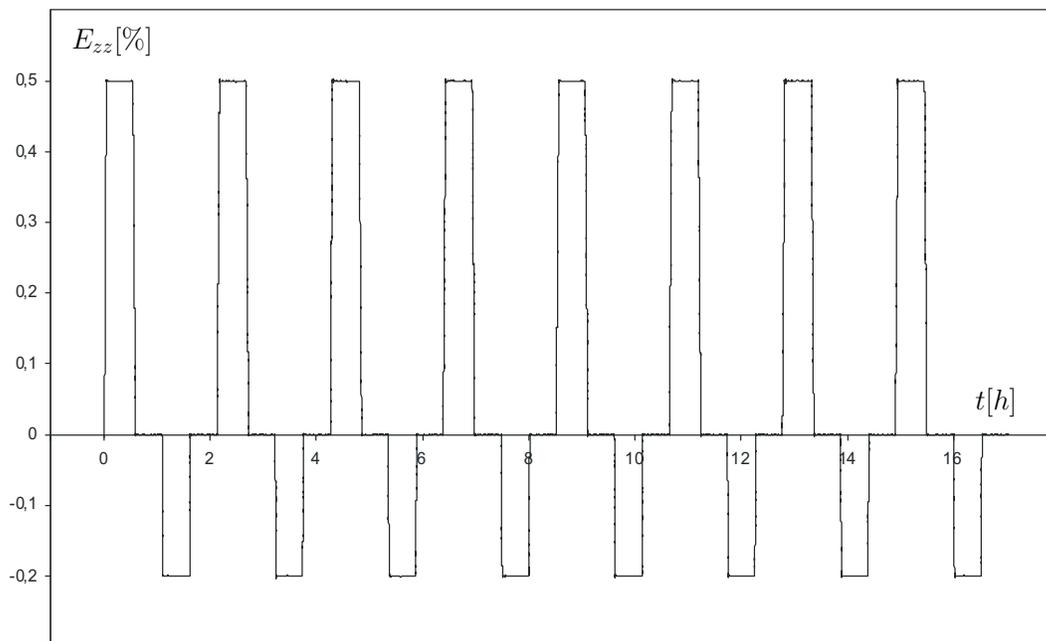


Abbildung 7.17: Globale Dehnung der gekerbten Rundprobe. Die Änderung der Dehnung geschieht mit $0,18\% / \text{min}$, eine Haltephase dauert jeweils 30 min.

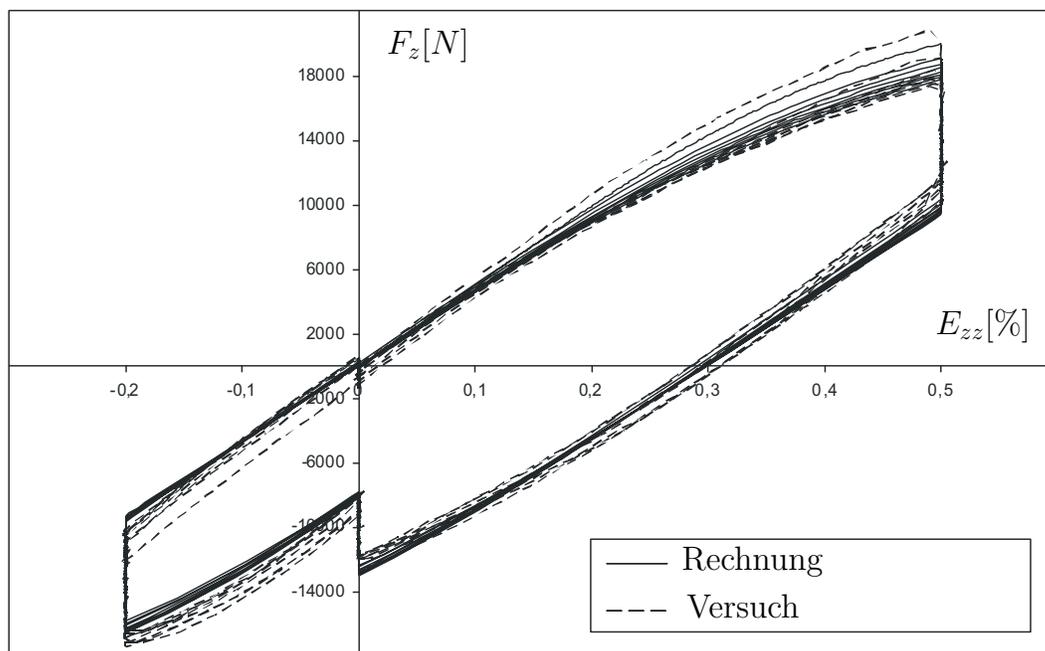


Abbildung 7.18: Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die gekerbte Rundprobe, aufgetragen über die globale Dehnung E_{zz} .

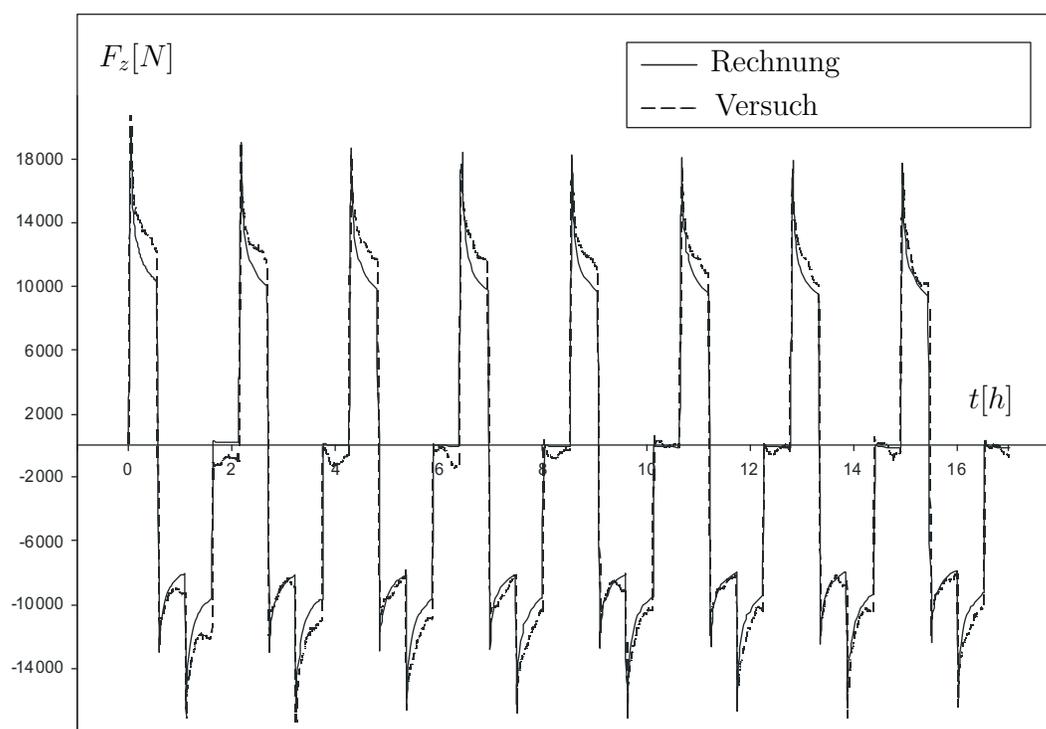


Abbildung 7.19: Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die gekerbte Rundprobe, aufgetragen über die Zeit t .

Zur Berechnung wird das Finite-Elemente-Modell aus Abbildung 7.16 verwendet, das aus 1248 8-knotigen Hexaeder-Volumenelementen mit insgesamt 1613 Knoten besteht. Da keine Kristallachse des kubisch anisotropen Materials in der (x, z) -, (y, z) oder (x, y) -Ebene des verwendeten Koordinatensystems liegt, ist es nicht möglich aufgrund von Symmetriebedingungen das verwendete Finite-Elemente-Modell zu vereinfachen. Die Belastung wird dehnungsgesteuert aufgebracht. Im Experiment werden zur Dehnungssteuerung Messaufnehmer verwendet, die jeweils 20mm in z -Richtung vom Mittelpunkt der Probe entfernt sind. Aus diesem Grund wird in der Berechnung der Probe auch nur dieser Bereich verwendet. Die vorgegebene globale Dehnung ist in Abbildung 7.17 dargestellt. Die Belastungsgeschichte setzt sich aus insgesamt 8 Zug-Druck-Zyklen zusammen, die nach jeder Dehnungsänderung von einer Haltephase unterbrochen werden. Die Änderung der Dehnung geschieht mit einer Rate von 0,18%/min, eine Haltephase dauert jeweils 30min. Bei einer Versuchstemperatur von 1050 C° ist es nicht möglich lokal Dehnungsmessstreifen an den Proben anzubringen. Deshalb steht nur die global gemessene Kraft zur Verfügung, welche im Experiment mit einer Kraftmessdose ermittelt wird. In der Simulation wird die globale Kraft über ein lineares Federelement, dessen Dehnung aufgrund der hohen Steifigkeit vernachlässigbar klein bleibt, gemessen. Bei der Berechnung wird der untere Rand der Probe fest eingespannt, d.h. für Knoten für deren Ortsvektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

gilt, wird die Verschiebung wie folgt vorgegeben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}. \quad (7.14)$$

Für den oberen Rand des Modells, also Knoten mit den Koordinaten:

$$\mathbf{X}(t = 0) = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ 40 \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

wird die Verschiebung

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z(t) \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

gewählt. In den Abbildungen 7.18 und 7.19 werden die gemessene und die errechnete z -Komponente der globalen Kraftkurve miteinander verglichen. Die Abweichungen erklären sich aus der Streuung der Materialparameter, der Güte der Materialparameteranpassung sowie eventueller Schwankungen bei den Randbedingungen des Experiments. Die Schädigungsverteilung bei der gekerbten Rundprobe konzentriert sich auf die gekerbten Bereiche, wie man in Abbildung 7.20 gut erkennen kann. Die dort abgebildete Schädigungsverteilung stellt die z -Komponente der Schädigung nach 8 Belastungszyklen

dar. Die Verteilung von D_{zz} über den äußeren Rand des Kerbgrunds, wird jeweils in den Abbildungen 7.21, 7.22 und 7.23 dargestellt. In der Abbildung 7.24 wird der zeitliche Verlauf von D_{zz} für die Knoten 116 ($x = -3, 35, y = 0, z = 5, 5$) und 329 ($x = 3, 35, y = 0, z = 34, 5$) gezeigt. Diese beiden Knoten stellen auch gleichzeitig die Punkte maximaler Schädigung dar, der Verlauf von D_{zz} ist für beide Knoten identisch.

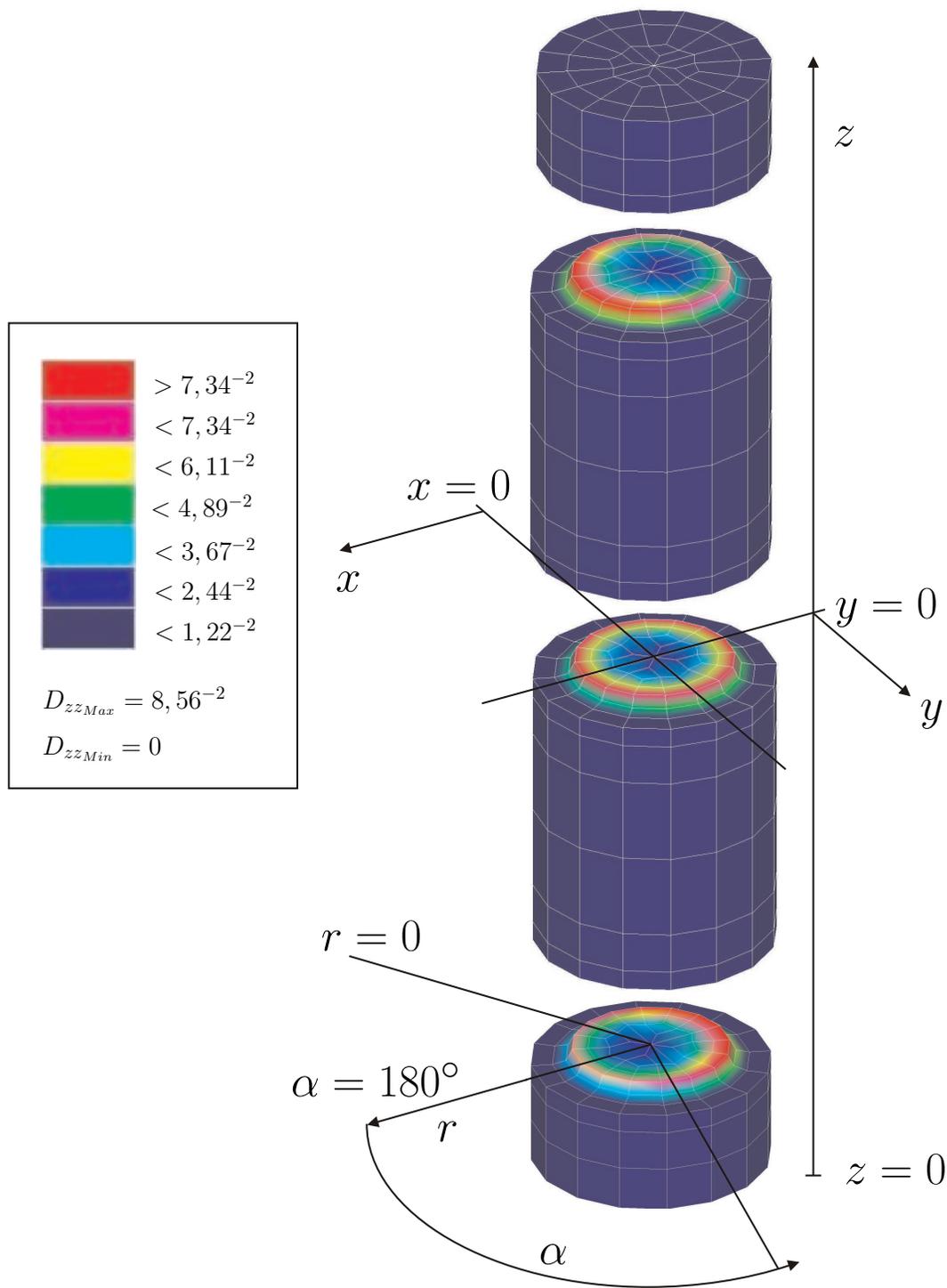


Abbildung 7.20: Verteilung von D_{zz} nach 8 Belastungszyklen.

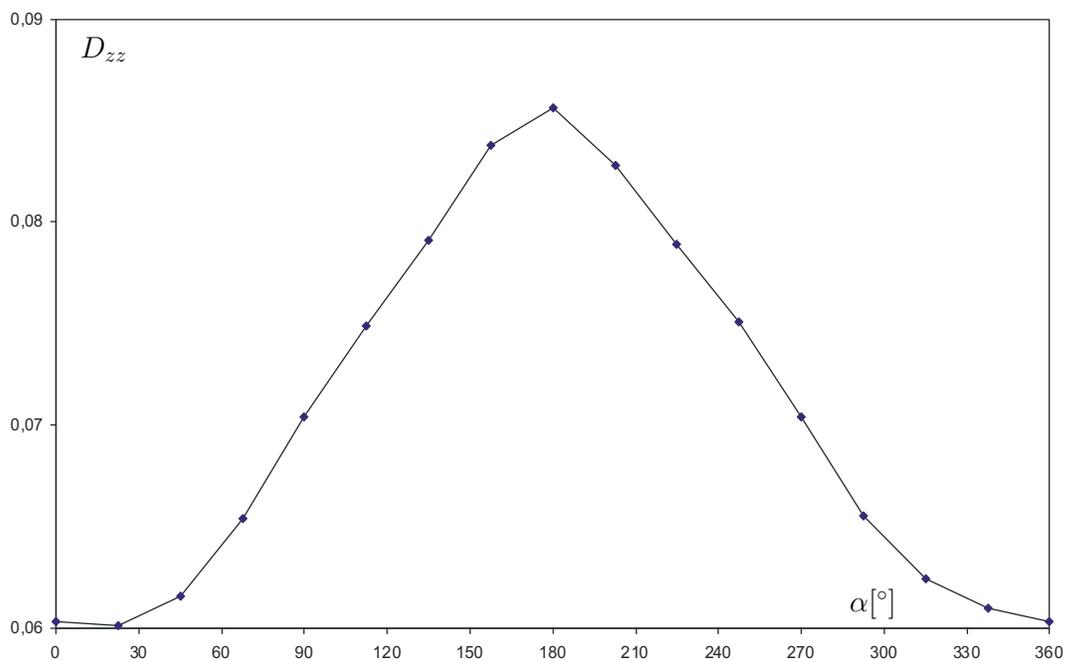


Abbildung 7.21: Verteilung von D_{zz} für $z=34,5$ mm und $r = 3,35$ mm am Rand der oberen Kerbebene, aufgetragen über den Winkel α .

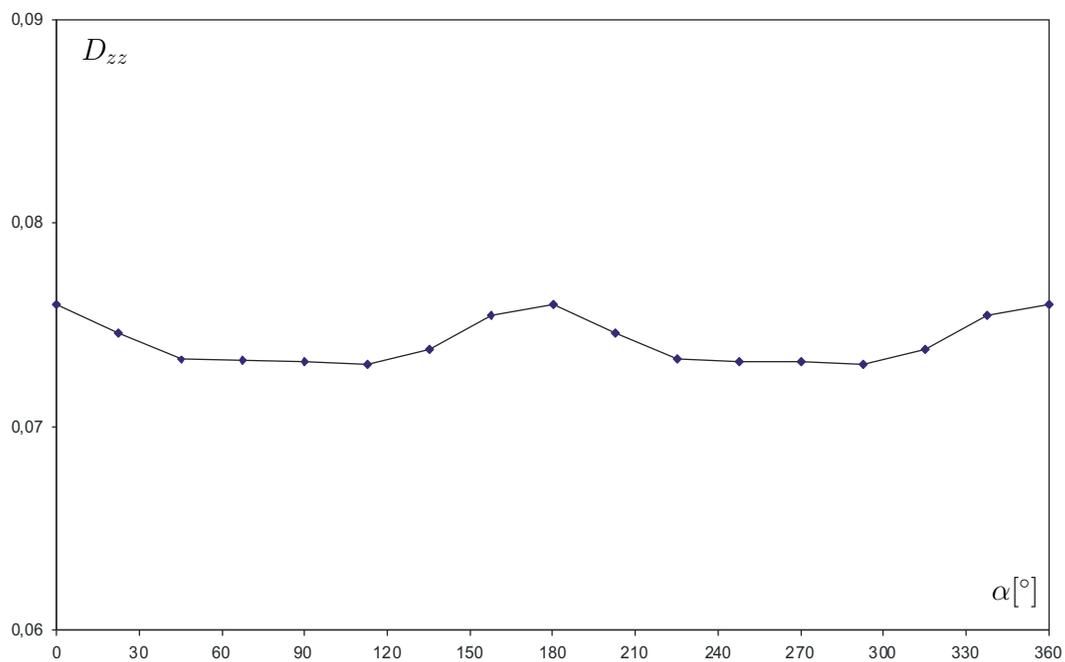


Abbildung 7.22: Verteilung von D_{zz} für $z=20$ mm und $r = 3,35$ mm am Rand der mittleren Kerbebene, aufgetragen über den Winkel α .

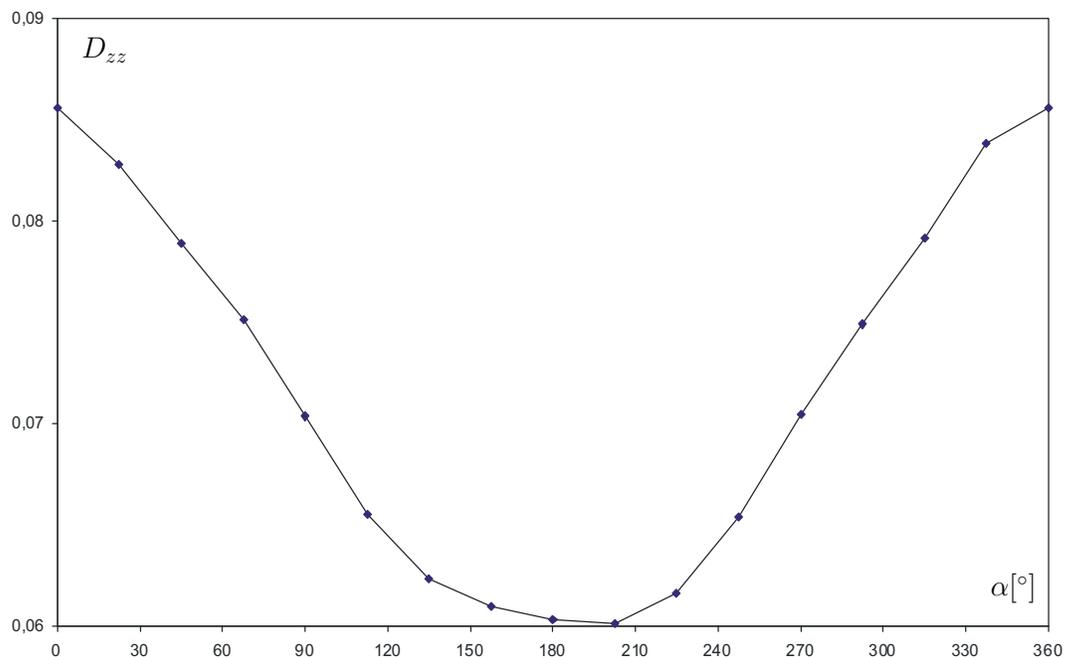


Abbildung 7.23: Verteilung von D_{zz} für $z=5,5$ mm und $r = 3,35$ mm am Rand der unteren Kerbebene, aufgetragen über den Winkel α .

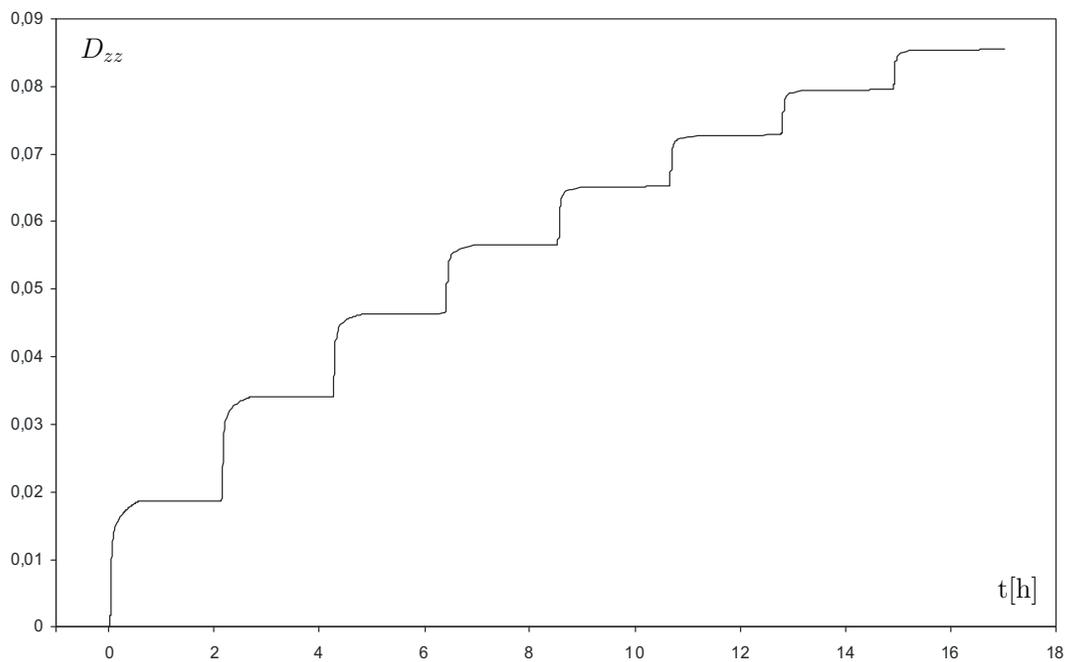


Abbildung 7.24: Verlauf von D_{zz} für die Knoten 116 ($x = -3,35$, $y = 0$, $z = 5,5$) und 329 ($x = 3,35$, $y = 0$, $z = 34,5$) aufgetragen über die Zeit t .

7.4 Lochfeldprobe

Als zweites Beispiel für das Materialmodell aus Kapitel 4 wird die Schädigungsverteilung an einer Lochfeldprobe berechnet. Es wird wieder der Materialparametersatz aus Tabelle 7.7 verwendet. Die entsprechende experimentelle Probe wird in Abbildung 7.14 gezeigt. Die genaue Geometrie mit Abmessungen kann man aus Abbildung 7.15 entnehmen. Die Orientierung des Einkristalls in der Probe beträgt $21,5^\circ$ für φ_1 und $14,2^\circ$ für φ_2 . Für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^\circ$ würden die Kristallachsen mit den in Abbildung 7.27 abgebildeten Koordinatenachsen zusammenfallen und die Probe hätte die ideale $[001]$ Orientierung (siehe auch Abbildung 7.3).

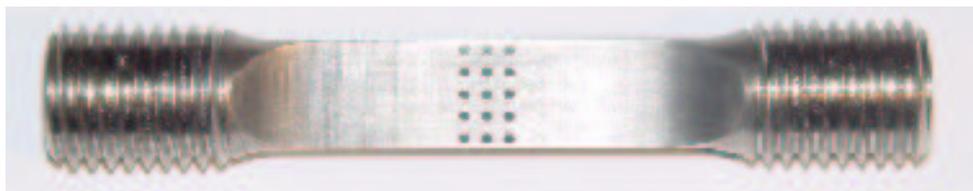


Abbildung 7.25: Lochfeldprobe aus Ni_3Al , die Orientierung des Einkristalls in der Probe ist durch $\varphi_1 = 21,5^\circ$ und $\varphi_2 = 14,2^\circ$ gegeben.

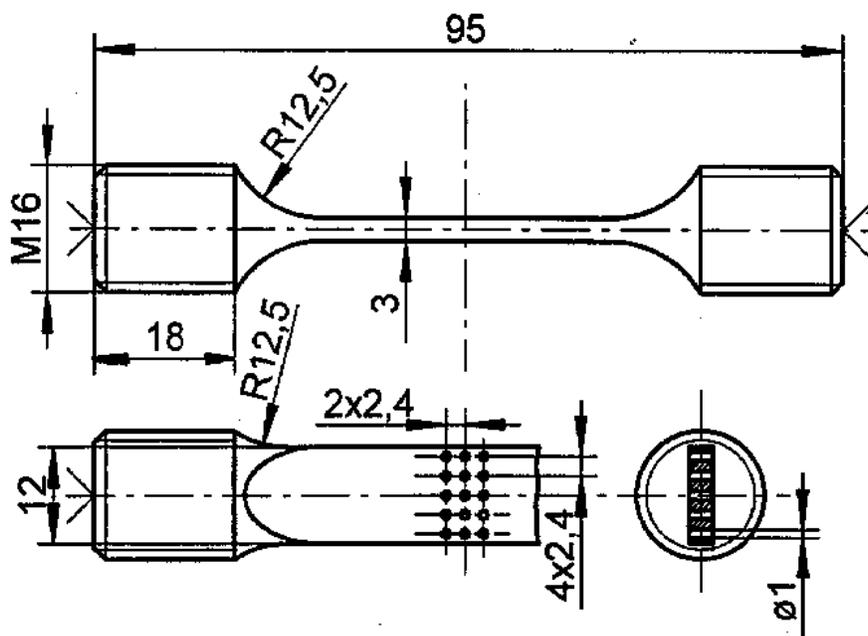


Abbildung 7.26: Technische Zeichnung der Lochfeldprobe mit Abmessungen.

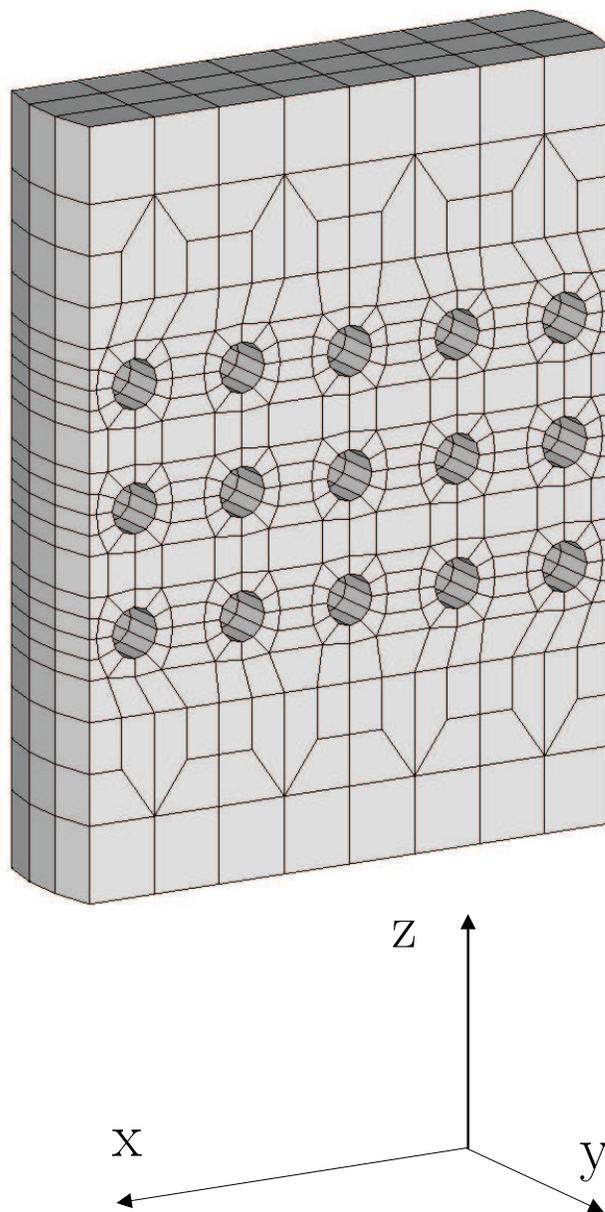


Abbildung 7.27: Finite-Elemente-Modell der Lochfeldprobe aus insgesamt 1140 8-knotigen Hexaeder-Volumenelementen und 1944 Knoten.

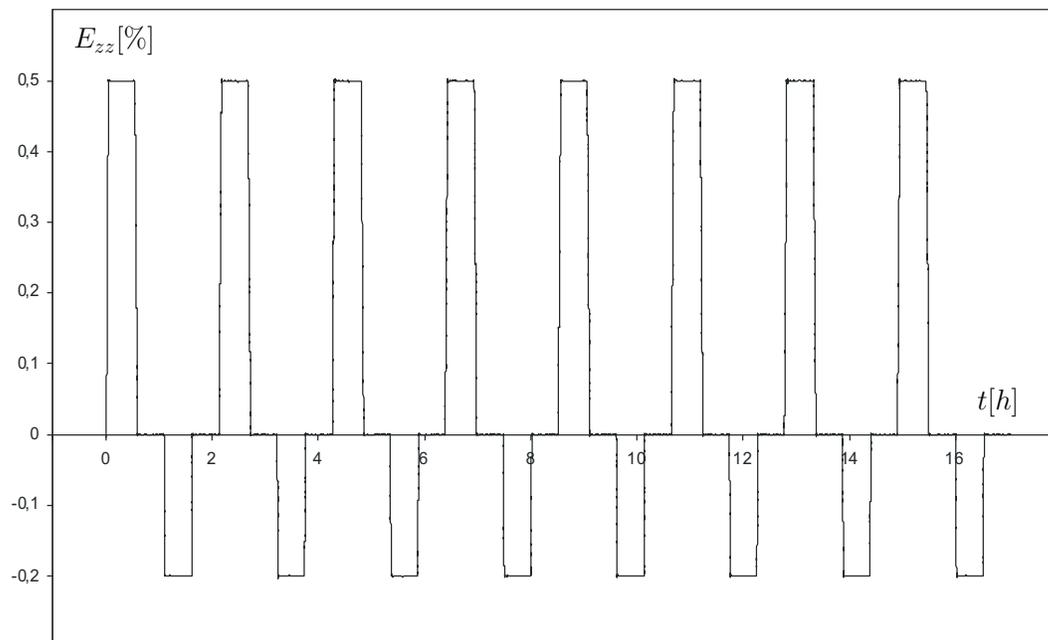


Abbildung 7.28: Globale Dehnung der Lochfeldprobe. Die Änderung der Dehnung geschieht mit $0,18\% / \text{min}$, eine Haltephase dauert jeweils 30 min.

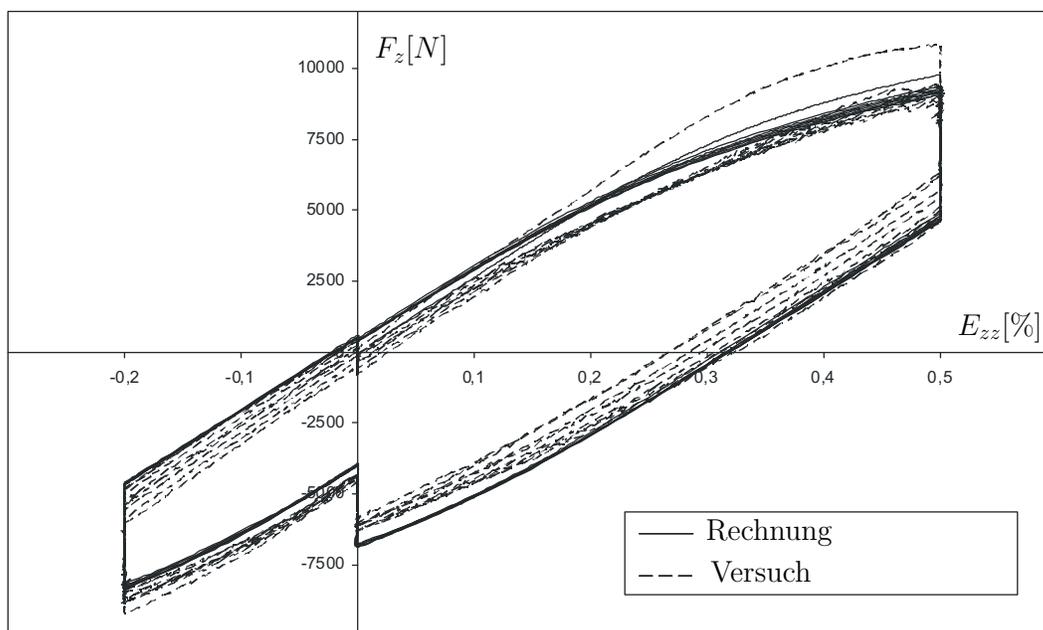


Abbildung 7.29: Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die Lochfeldprobe, aufgetragen über die globale Dehnung E_{zz} .

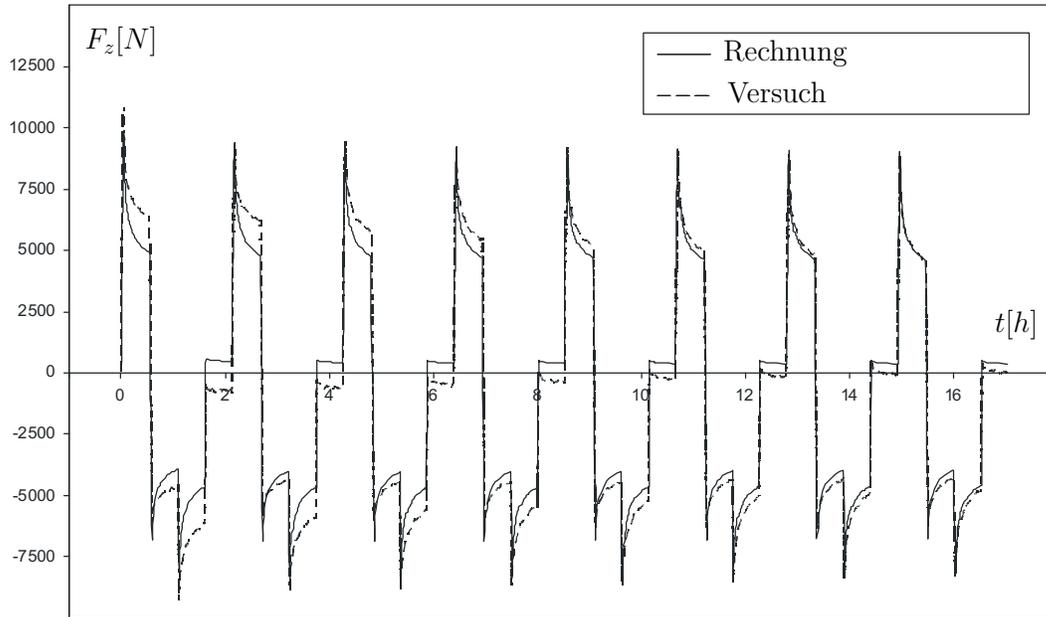


Abbildung 7.30: Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die Lochfeldprobe, aufgetragen über die Zeit t .

Zur Berechnung wird das Finite-Elemente-Modell aus Abbildung 7.27 verwendet, das aus 1140 8-knotigen Hexaeder-Volumenelementen und 1944 Knoten besteht. Da keine Kristallachse des kubisch anisotropen Materials in der (x, z) -, (y, z) oder (x, y) -Ebene des verwendeten Koordinatensystems liegt, ist es nicht möglich aufgrund von Symmetriebedingungen das verwendete Finite-Elemente-Modell zu vereinfachen. Die Belastung wird dehnungsgesteuert aufgebracht. Im Experiment werden zur Dehnungssteuerung Messaufnehmer verwendet, die jeweils 7,5mm in z -Richtung vom Mittelpunkt der Probe entfernt sind. Aus diesem Grund wird in der Berechnung der Probe auch nur dieser Bereich verwendet. Die vorgegebene globale Dehnung ist in Abbildung 7.28 dargestellt. Die Belastungsgeschichte setzt sich aus insgesamt 8 Zug-Druck-Zyklen zusammen, die nach jeder Dehnungsänderung von einer Haltephase unterbrochen werden. Die Änderung der Dehnung geschieht mit einer Rate von 0,18%/min, eine Haltephase dauert jeweils 30min. Bei einer Versuchstemperatur von 1050 C° ist es nicht möglich lokal Dehnungsmessstreifen an den Proben anzubringen. Deshalb steht nur die global gemessene Kraft zur Verfügung, welche im Experiment mit einer Kraftmessdose ermittelt wird. In der Simulation wird die globale Kraft über ein lineares Federelement, dessen Dehnung aufgrund der hohen Steifigkeit vernachlässigbar klein bleibt, gemessen. Bei der Berechnung wird der untere Rand der Probe fest eingespannt, d.h. für Knoten für deren Ortsvektor

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

gilt, wird die Verschiebung wie folgt vorgegeben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0} . \quad (7.18)$$

Für den oberen Rand des Modells, also Knoten mit den Koordinaten:

$$\mathbf{X}(t = 0) = \begin{pmatrix} X_x \\ X_y \\ 15 \end{pmatrix} , \quad (7.19)$$

wird die Verschiebung

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_z(t) \end{pmatrix} , \quad (7.20)$$

gewählt. In den Abbildungen 7.29 und 7.30 werden die gemessene und die errechnete z -Komponente der globalen Kraftkurve miteinander verglichen. Die Abweichungen erklären sich aus der Streuung der Materialparameter, der Güte der Materialparameteranpassung sowie eventueller Schwankungen bei den Randbedingungen des Experiments. Die Schädigungsverteilung bei der Lochfeldprobe konzentriert sich um die Bohrungen, wie man in Abbildung 7.31 gut erkennen kann. Die dort abgebildete Schädigungsverteilung stellt die zz -Komponente der Schädigung D_{zz} nach 8 Belastungszyklen dar. Die Verteilung von D_{zz} über die jeweilige Schnittebene, wird in den Abbildungen 7.32, 7.33 und 7.34 dargestellt. In der Abbildung 7.35 wird der zeitliche Verlauf von D_{zz} für die Knoten 1109 ($x = 10, 3, y = 1, z = 9, 9$) und 1697 ($x = 1, 7, y = 2, z = 5, 1$) gezeigt. Diese beiden Knoten stellen auch gleichzeitig die Punkte maximaler Schädigung dar, der Verlauf von D_{zz} ist für beide Knoten identisch.

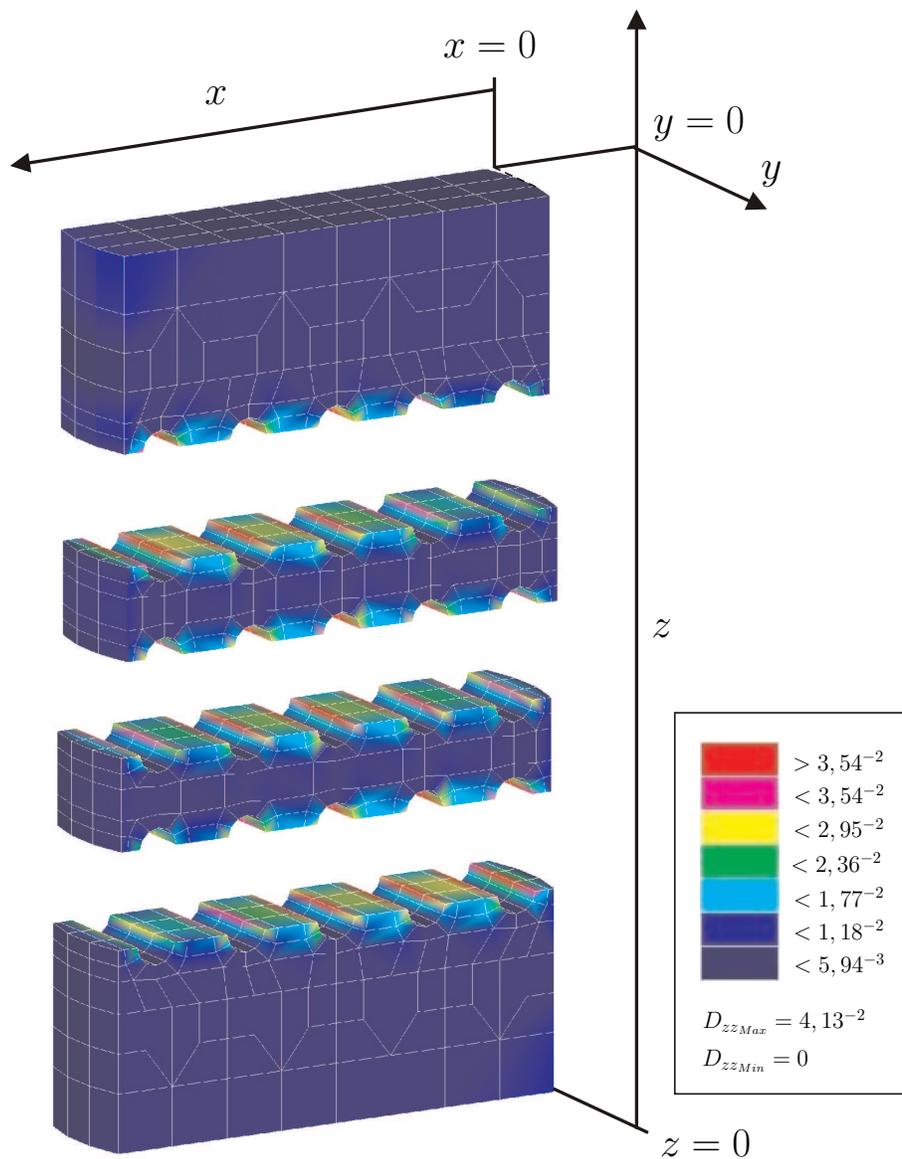


Abbildung 7.31: Verteilung von D_{zz} nach 8 Belastungszyklen

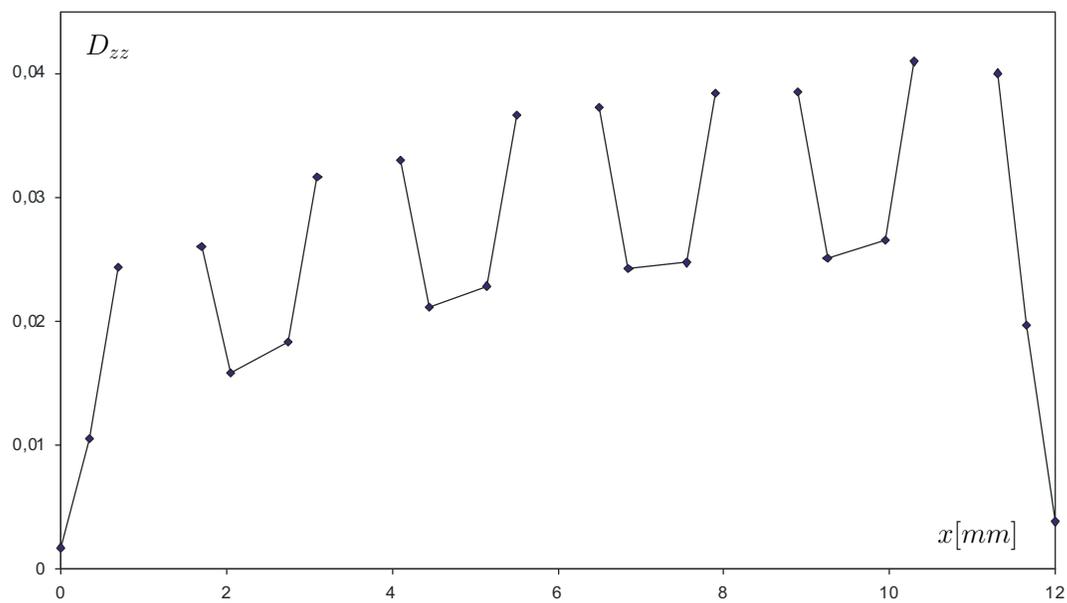


Abbildung 7.32: Verteilung von D_{zz} für $z=9,9$ mm und $y = 1,5$ mm in der oberen Schnittebene, aufgetragen über x .

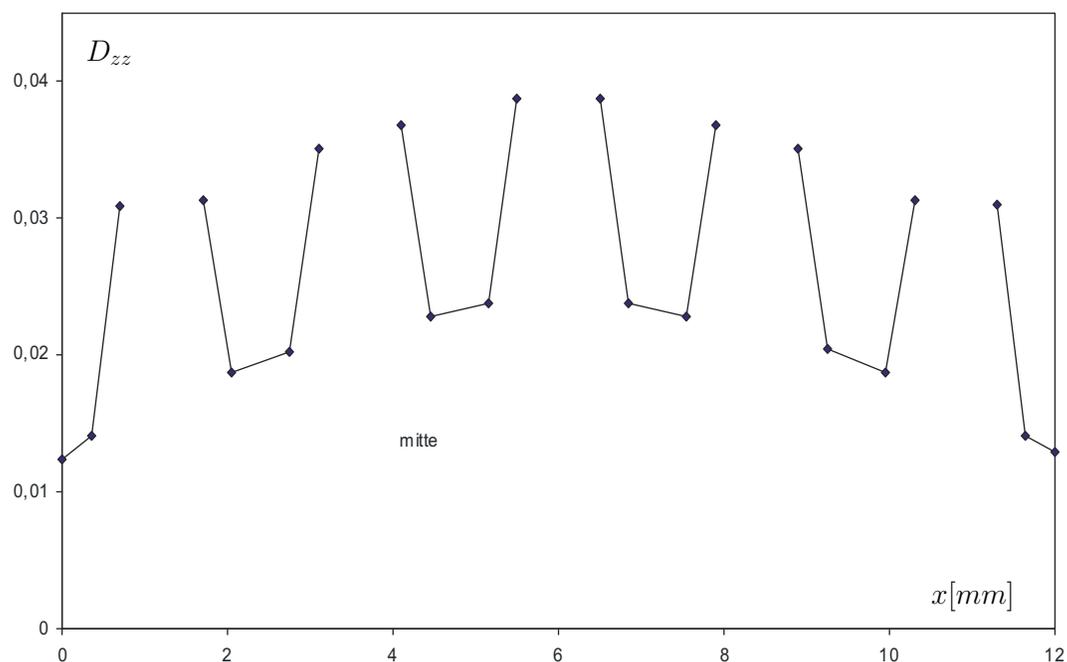


Abbildung 7.33: Verteilung von D_{zz} für $z=7,5$ mm und $y = 1,5$ mm in der mittleren Schnittebene, aufgetragen über x .

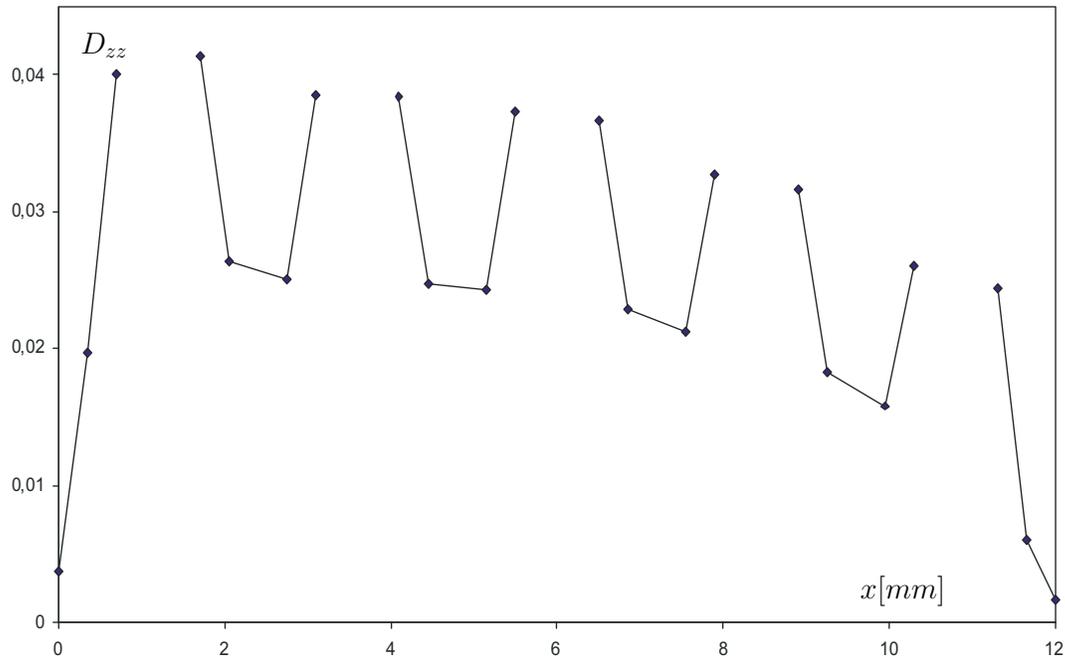


Abbildung 7.34: Verteilung von D_{zz} für $z=5,1$ mm und $y = 1,5$ mm in der unteren Schnitt-
ebene, aufgetragen über x .

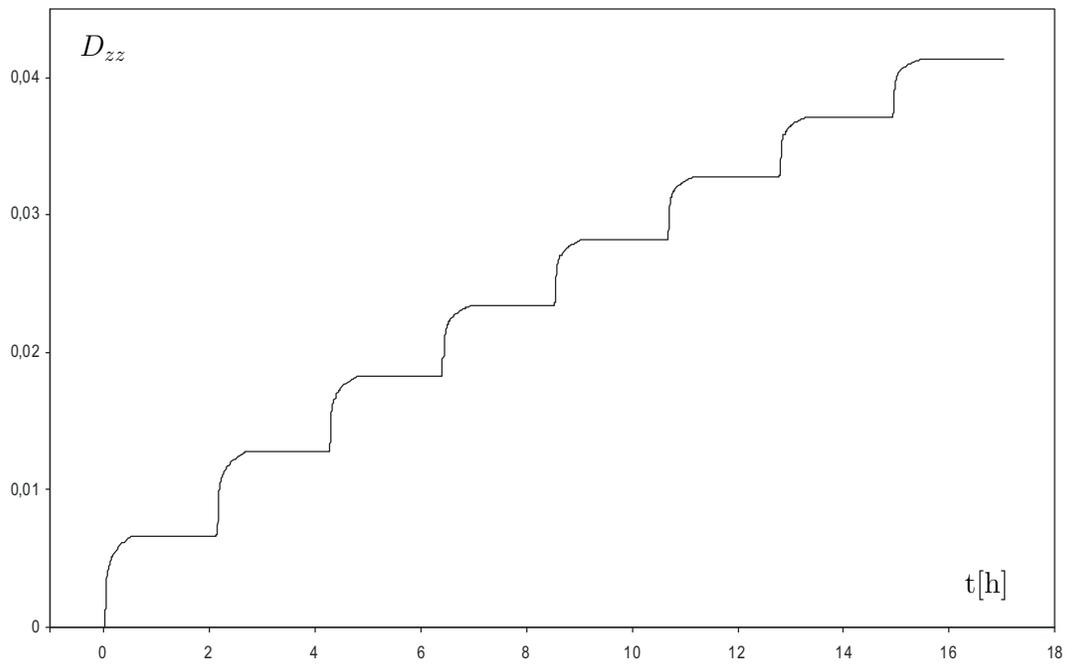


Abbildung 7.35: Verlauf von D_{zz} für die Knoten 1109 ($x = 10,3$, $y = 1$, $z = 9,9$) und
1697 ($x = 1,7$, $y = 2$, $z = 5,1$) aufgetragen über die Zeit t .

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die Verwendung von Superlegierungen wie z.B. CSMX-4, das in Gasturbinen zum Einsatz kommt, ist sehr teuer. Schon bereits in der Entwicklungsphase neuer Bauteile ist es daher sehr wichtig mit Hilfe numerischer Berechnungen die Zahl der nötigen Versuche zur Bauteilauslegung und Lebensdauerbestimmung zu reduzieren. Natürlich soll das Potenzial solcher Werkstoffe voll ausgenutzt werden um z.B. mit einer höheren Verbrennungstemperatur den Wirkungsgrad von Gasturbine zu steigern. Dies setzt eine möglichst genaue Modellierung der Materialeigenschaften voraus. Insbesondere bei Lebensdauerberechnungen spielt die Schädigungsberechnung eine tragende Rolle. Um das gewünschte Materialverhalten für den vollständigen Schädigungsverlauf bei inelastischem Materialverhalten thermodynamisch konsistent beschreiben zu können wurde das Konzept der verallgemeinerten Energieäquivalenz entwickelt.

Insbesondere die eingeführte Funktion $g(\mathbf{D})$ erlaubt es das Verhalten von Werkstoffen unter dem Einfluss von Schädigung sehr gut zu beschreiben. In dieser Arbeit wurde das Konzept der verallgemeinerten Energieäquivalenz zunächst für isotrope Schädigung in Verbindung mit einem isotropen elastisch-plastischen Materialmodell eingeführt um die Idee des Konzepts klar herauszustellen. Im zweiten Schritt folgte die Erweiterung auf anisotrope Schädigung in Verbindung mit anisotropem elastisch-(visko-)plastischen Materialmodell mit statischer Erholung. Die Materialparameter des anisotropen Materialmodells wurden durch eine Parameteranpassung mittels Dehnungsgesteuerter Versuche sowie Kriechversuchen ermittelt. Mit dem ermittelten Satz Materialparameter wurden zwei Beispiele gerechnet die für die schädigungskritischen Bereiche von Gasturbinen stellvertretend sind. Zum Vergleich wurde jeweils ein realer Versuch mit derselben Probe herangezogen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde auf eine eindeutige Identifizierung der Materialparameter verzichtet. Der Grund dafür liegt an den derzeit zeitaufwendigen Rechnungen die dafür nötig wären. Dieses Problem kann aber durch Entwicklung effizienterer numerischer Umsetzungen zur Lösung solcher Probleme behoben werden.

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Mikro-Meso Definition des der Schädigung (nach J. Lemaitre, 1975) | 7 |
| 3.1 | Dehnungs-Spannungskurven für uniaxiale Zugbelastung. Die konstitutiven Gleichungen basieren auf dem Dehnungsäquivalenz-Prinzip von Chaboche [4]. | 18 |
| 3.2 | Einfluss des Parameters n auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $c = \gamma = 1500\text{MPa}$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet. | 29 |
| 3.3 | Einfluss des Parameters n auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $c = \gamma = 30000\text{MPa}$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet. | 29 |
| 3.4 | Einfluss der Verfestigungsparameter $c = \gamma$ [MPa] auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $n = 1$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet. | 30 |
| 3.5 | Einfluss der Verfestigungsparameter $c = \gamma$ [MPa] auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $n = 0.5$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet. | 30 |
| 3.6 | Einfluss der Verfestigungsparameter $c = \gamma$ [MPa] auf die Dehnungs-Spannungs-Antwort für $n = 10$. Die restlichen Materialparameter sind in Tab. 3.1 aufgelistet. | 31 |
| 3.7 | Uniaxiale Zugbeanspruchung für beide Modelle. | 33 |
| 3.8 | Radiale Verteilung der Schädigung D über die Kerbwurzel für die globalen Dehnungen $e_1^* = 0, 2\%$ und $e_2^* = 0, 323\%$ | 34 |
| 3.9 | Kreisförmig gekerbte Probe. Die verwendeten Materialparameter sind in Tab. 3.2 angegeben. | 35 |
| 4.1 | Schematischer Verlauf der Komponenten $E_{e_{11}}$, $E_{e_{22}}$ und $E_{e_{11}}$ bei homogener Dehnung in der E_{33} -Komponente für ideale Plastizität mit Schädigung ($D_{ij} = 0$ für $i, j \neq 3$, $1 \geq D_{33} \geq 0$). | 48 |
| 4.2 | Schematischer Verlauf der Spannungskomponente T_{33} bei homogener Dehnung in der E_{33} -Komponente für ideale Plastizität mit Schädigung ($D_{ij} = 0$ für $i, j \neq 3$, $1 \geq D_{33} \geq 0$). | 48 |
| 5.1 | Relatives Schädigungskriterium $\chi_c/\chi_{c_{iso}}$ in der Kristallebene ($[100],[010]$). Gezeigt werden der isotrope Fall $m_{c_{44}} = 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ und die anisotropen Fälle $m_{c_{44}} > 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ und $m_{c_{44}} < 2(m_{c_{11}} - m_{c_{12}})$ | 57 |

| | | |
|------|---|----|
| 5.2 | Lösungskurve für $\chi_c > 0$ in Abhängigkeit α_c und β_c in der (T_{11}, T_{22}) Ebene. Für den Tensor \mathcal{M}_c gilt $m_{c44} = 2(m_{c11} - m_{c12})$ | 58 |
| 7.1 | Kubisch flächenzentrierte Einheitszelle | 69 |
| 7.2 | γ/γ' Gefüge der Ni ₃ Al Superlegierung mit eingeschlossener Pore | 70 |
| 7.3 | Orientierung der Probenachse in Bezug auf das Kristallgitter | 71 |
| 7.4 | Stereographische Projektion der Probenachse im Standardorientierungs-dreieck | 72 |
| 7.5 | Vorgegebene Dehnung der Experimente xBA105d59 und xBC105d55. Die Änderung der Dehnung erfolgt mit 0,18%/min, einen Haltephase dauert jeweils 10 Stunden. | 73 |
| 7.6 | Übersicht der zur Parameteranpassung verwendeten Versuche. | 74 |
| 7.7 | Übersicht der ermittelten Materialparameter. | 75 |
| 7.8 | Anpassung an den Versuch xBA105d59 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Dehnung der Probe in z-Richtung. | 76 |
| 7.9 | Anpassung an den Versuch xBA105d59 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Zeit. | 76 |
| 7.10 | Anpassung an den Versuch xBC105d55 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Dehnung der Probe in z-Richtung. | 77 |
| 7.11 | Anpassung an den Versuch xBC105d55 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die Spannung in z-Richtung der Probe über die Zeit. | 77 |
| 7.12 | Anpassung an die Versuche xAA105z1f, xAA105z2 und xAA105z3 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die plastische Dehnung in z-Richtung der Probe über die Zeit. | 78 |
| 7.13 | Anpassung an die Versuche xAC105z1, xAC105z3 und xAC105z4 mit dem Materialparametern aus Tabelle 7.7. Abgebildet ist die plastische Dehnung in z-Richtung der Probe über die Zeit. | 78 |
| 7.14 | Gekerbte Rundprobe aus Ni ₃ Al, die Orientierung des Einkristalls in der Probe ist durch $\varphi_1 = 5,6^\circ$ und $\varphi_2 = 14,9^\circ$ gegeben. | 79 |
| 7.15 | Technische Zeichnung der gekerbten Rundprobe mit Abmessungen | 79 |
| 7.16 | Finite-Elemente-Modell der gekerbten Rundprobe aus insgesamt 1248 8-knotigen Hexaeder-Volumenelementen und 1613 Knoten | 80 |
| 7.17 | Globale Dehnung der gekerbten Rundprobe. Die Änderung der Dehnung geschieht mit 0,18% / min, eine Haltephase dauert jeweils 30 min. | 81 |
| 7.18 | Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die gekerbte Rundprobe, aufgetragen über die globale Dehnung E_{zz} | 81 |
| 7.19 | Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die gekerbte Rundprobe, aufgetragen über die Zeit t | 82 |
| 7.20 | Verteilung von D_{zz} nach 8 Belastungszyklen. | 85 |

7.21 Verteilung von D_{zz} für $z=34,5$ mm und $r = 3,35mm$ am Rand der oberen Kerbebene, aufgetragen über den Winkel α 86

7.22 Verteilung von D_{zz} für $z=20$ mm und $r = 3,35mm$ am Rand der mittleren Kerbebene, aufgetragen über den Winkel α 86

7.23 Verteilung von D_{zz} für $z=5,5$ mm und $r = 3,35mm$ am Rand der unteren Kerbebene, aufgetragen über den Winkel α 87

7.24 Verlauf von D_{zz} für die Knoten 116 ($x = -3,35, y = 0, z = 5,5$) und 329 ($x = 3,35, y = 0, z = 34,5$) aufgetragen über die Zeit t 87

7.25 Lochfeldprobe aus Ni_3Al , die Orientierung des Einkristalls in der Probe ist durch $\varphi_1 = 21,5^\circ$ und $\varphi_2 = 14,2^\circ$ gegeben. 88

7.26 Technische Zeichnung der Lochfeldprobe mit Abmessungen. 88

7.27 Finite-Elemente-Modell der Lochfeldprobe aus insgesamt 1140 8-knotigen Hexaeder-Volumenelementen und 1944 Knoten. 89

7.28 Globale Dehnung der Lochfeldprobe. Die Änderung der Dehnung geschieht mit $0,18\% / \text{min}$, eine Haltephase dauert jeweils 30 min. 90

7.29 Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die Lochfeldprobe, aufgetragen über die globale Dehnung E_{zz} 90

7.30 Vergleich der globalen Kraft F_z von Versuch und Rechnung für die Lochfeldprobe, aufgetragen über die Zeit t 91

7.31 Verteilung von D_{zz} nach 8 Belastungszyklen 93

7.32 Verteilung von D_{zz} für $z=9,9$ mm und $y = 1,5mm$ in der oberen Schnitttebene, aufgetragen über x 94

7.33 Verteilung von D_{zz} für $z=7,5$ mm und $y = 1,5mm$ in der mittleren Schnitttebene, aufgetragen über x 94

7.34 Verteilung von D_{zz} für $z=5,1$ mm und $y = 1,5mm$ in der unteren Schnitttebene, aufgetragen über x 95

7.35 Verlauf von D_{zz} für die Knoten 1109 ($x = 10,3, y = 1, z = 9,9$) und 1697 ($x = 1,7, y = 2, z = 5,1$) aufgetragen über die Zeit t 95

Literaturverzeichnis

- [1] Kachanov L.M. (1958) Time of the rupture process under creep conditions, *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk.*, 26–31
- [2] Rabotonov Y.N. (1969) Creep problems in structural members, North-Holland
- [3] Skrzypek J.J. (1999) Material damage models for creep failure analysis and designs of structures, in : Creep and damage in materials and structures, CISM No. 399, edited by Altenbach h., Skrzypek J.J., ISBN: 3-211-83321-8, Springer Verlag New York, 97–160
- [4] Chaboche J.-L. (1999) Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions, in: Creep and damage in materials and structures, CISM No. 399, edited by Altenbach h., Skrzypek J.J., ISBN: 3-211-83321-8, Springer Verlag New York, 209–278
- [5] Lemaitre J. (1984) How to use damage mechanics, *Nuclear Engineering and Design* 80, 233-245
- [6] Lemaitre J. (1985) A continuous damage mechanics model for ductile fracture, *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 107, 83–89
- [7] Lemaitre J. (1996) A course on damage mechanics (Second Ed.), Berlin, , Springer Verlag New York, ISBN: 3-540-60980-6
- [8] Lemaitre J., Chaboche J.-L. (1990) *Mechanics of solid materials*, ISBN: 0-521-32853-5
- [9] Chaboche J.-L. (1988) Continuum damage mechanics: Part 1 - General concepts, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, 59–72
- [10] Cordebois J.P. , Sidoroff F. (1983) Damage induced elastic anisotropy, in: *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids* (Ed. Boehler J.P.), Martinus Nijhoff, Boston (1983), 761–774
- [11] Chaboche J.-L. (1993) Cyclic viscoplastic constitutive equations, Part 2: Stored energy - comparison between models and experiments, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, 822–828

- [12] Chaboche J.-L. (1993) Cyclic viscoplastic constitutive equations, Part 1: A thermodynamically consistent formulation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, 813–821
- [13] Tsakmakis Ch. (1991) On the loading conditions and the decomposition of deformation, in: *Anisotropy and Localization of Plastic Deformation*, Proceedings of Plasticity '91 (Ed. Boehler J.P., Khan A.S.), ISBN: 1-85166-688-5, 353–356
- [14] Chaboche J.-L. (1986) Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol. 2, 149–188
- [15] Armstrong P.J., Frederick C.O. (1966) A mathematical representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731
- [16] Lämmer H., Tsakmakis Ch. (2000) Discussion of coupled elastoplasticity and damage constitutive equations for small and finite deformations, *International Journal of Plasticity*, 495–523
- [17] Forster Ch., Hatira F.B., Saanouni K. (1994) On anelastic flow with damage, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 3, 140–169
- [18] Chow C.L., Lu T.J. (1992) An analytical and experimental study of mixed-mode ductile fracture under nonproportional loading, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 1, 191–236
- [19] Gallerneau F. (1995) Etude et modelisation de l'endommagement d'un superalliage monocristallin revetu pour aube de turbine, L'ecole nationale superieure des mines de paris, Thesis, ONERA
- [20] Hayhurst D.R. (1972) Creep Rupture under Multiaxial States of Stress, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 20, 381–390
- [21] Tsakmakis Ch. (1994) Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen, Habilitation, Universität Gesamthochschule Kassel
- [22] Nouailhas D., Cailletaud G. (1995) Tension-torsion behavior of single-crystal superalloys: Experiment and finite element analysis, *International Journal of Plasticity*, Vol. 20, No. 4, 451-470
- [23] Nouailhas D., Cailletaud G. (1992) Comparaison de divers criteres anisotropes pour monocristaux cubiques a face centree, *Academie des Science, Serie II*, Vol. 315, 1573-1579
- [24] Nouailhas D., Cailletaud G. (1996) Multiaxial behaviour of ni-base single crystals, *Multiaxial Fatigue and Design*, Mechanical Engineering Publications, ESIS Publication 21, 75-82

- [25] Nouailhas D., Pacou D., Cailletaud G., Hanriot F., Remy L. (1993) Chapter: Experimental Study of the Anisotropic Behavior of the CMSX2 Single-Crystal, Advances in Multiaxial Fatigue, ASTM STP 1191, 244-258, American Society for Testing and Materials
- [26] Culie J.P., Nouailhas D. (1993) Nouvelles lois de comportement pour superalliages monocristallines : Implantation dans le code samcef et applications, La Recherche Aérospatiale, No. 5, 17-27
- [27] Nouailhas D., Freed A.D., (1992) A viscoplastic theory for anisotropic materials, Journal of Engineering Materials and Technology, Vol 114, 97-104
- [28] Nouailhas D., Cule J.P. (1991) Development and application of a model for single crystal superalloys, ONERA Report, 1-10
- [29] Chaboche J.L., Lhuillier S., Nouailhas D. (1998) Chapter: On the Micromechanical Modelling of the Viscoplastic Behavior of Single Crystal Superalloys, IUTAM Symposium on Transformation Problems in Composite and Active Materials, 33-44, Kluwer
- [30] Simo J.C., Ju J.W. (1987) STRAIN- AND STRESS-BASED CONTINUUM DAMAGE MODELS-I. FORMULATION, Int. J. SOLIDS, Vol. 23, 821-840
- [31] Simo J.C., Ju J.W. (1987) STRAIN- AND STRESS-BASED CONTINUUM DAMAGE MODELS-II. COMPUTATIONAL ASPEKTS FORMULATION, Int. J. SOLIDS, Vol. 23, 841-869
- [32] Goldstein Herbert (1991) Klassische Mechanik, Aula Verlag Wiesbaden, 11. Auflage, ISBN 3-89104-514-X
- [33] Wriggers Peter (2001) Nichtlineare Finite-Element-Methoden, Springer Verlag, ISBN 3-540-67747-X
- [34] Belytschko T., Wing K.L., Moran B. (2000) Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, Wiley Verlag, ISBN 0-471-98773-5
- [35] Hughes T.J.R. (2000) The Finite Element Method , Dover Verlag, ISBN 0-486-41181-8
- [36] Tsakmakis C. (1999) Skript Kontinuumsmechanik , TU-Darmstadt
- [37] HKS (1997) Abaqus Theorie Manual , Hibitt, Karlsson & Sorensen, Inc.
- [38] HKS (2000) Abaqus Standard User's Manual , Hibitt, Karlsson & Sorensen, Inc.
- [39] Miehe C. (1996) Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large strain computational inelasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 134, 223-240

- [40] Lämmer H. (1998) Thermoplastizität und Thermovoskoplastizität bei kleinen und großen Deformationen, Dissertation, Forschungszentrum Karlsruhe
- [41] Kittel Ch. (1996) Einführung in die Festkörperphysik, Oldenburg Verlag, ISBN 3-486-23596-6
- [42] Herrmann W., Sockel H.G., Han J., Bertram A. (1996) Elastic properties and determination of elastic constants of Nickel-Base Superalloys by a free-free beam technique, Superalloys 1996, The Minerals, Metals & Materials Society
- [43] Billington E.W., Tate A. (1981) The Physics of Deformation and Flow, McGraw-Hill International Book Company, ISBN 0-07-005285-9
- [44] Askeland, D. R. (1996) Materialwissenschaften, Spektrum Akademischer Verlag, ISBN 3-86025-357-3
- [45] Huber N. (2000) Anwendung Neuronaler Netze bei nichtlinearen Problemen der Mechanik, Habilitation, Forschungszentrum Karlsruhe
- [46] Reckwerth D., Tsakmakis Ch. (2003) Kapitel: The Principle of Generalized Energy Equivalence in Continuum Damage Mechanics, Deformation and Failure of Metallic Continua, Editors: Hutter K., Kirchner N., Baaser H., Springer
- [47] Cordebois J.P., Sidoroff F. (1982) Damage Induced Elastic Anisotropy, Comportement Mécanique des solides anisotropes, Colloques internationaux du CNRS, Vol. 295, 761-774

Lebenslauf

Dirk Reckwerth

Ludwigstraße 4a
63110 Rodgau

Geburtsdatum und -ort: 29.1.1973 in Hanau
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulbildung:

1979 - 1984 Wilhelm-Busch-Grundschule in Rodgau
1984 - 1990 Georg-Büchner-Realschule in Rodgau
1990 - 1993 Gewerblich Technische Schule (Gymnasium)
in Offenbach

Studium/Beruf:

1993 - 1999 Studium der Physik an der
Technischen Universität Darmstadt.
Vertiefungsrichtungen: Festkörperphysik, Optik,
Nichtlineare Dynamik.
Diplomarbeit: Chaoskontrolle mit zeitverzögerter
Rückkopplung an schnellen experimentellen Systemen.
Betreuer: Priv. Doz. Dr. H. Benner.

1999 - 2000 Mitarbeiter der Tecosim GmbH.

2000 - 2003 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Mechanik, AG Kontinuumsmechanik (Materialtheorie),
Technischen Universität Darmstadt.
Betreuer: Prof. Dr. Ing. Ch. Tsakmakis.

seit 2004 Mitarbeiter der Continental-Teves AG & Co.

Danksagung

Diese Arbeit wurde während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Technischen Universität Darmstadt angefertigt. Sie entstand im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 298 "Deformation und Versagen bei metallischen und granularen Strukturen".

Meinem wissenschaftlichen Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis danke ich an dieser Stelle für die Übernahme des Hauptreferates und seine engagierte Unterstützung, die entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. H. E. Exner für das Interesse an dieser Arbeit und für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Bei meinen Kollegen bedanke ich mich für die äußerst angenehme Arbeitsatmosphäre und Zusammenarbeit.

Meiner Verlobten Simone Fisch danke ich an dieser Stelle für ihr Verständnis über meine knappe Freizeit während der Entstehung dieser Arbeit.