

Über Modellierung,
Analysis und Simulation
von Stofftransport
auf Wurzeln in strukturierten Böden

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Math. Torsten Fischer
aus Kronach

Referent:	Prof. Dr. G. Leugering
Korreferent:	Prof. Dr. A. Klar
Tag der Einreichung:	22. April 2002
Tag der mündlichen Prüfung:	27. Juni 2002

Darmstadt 2002
D 17

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand begleitend zu einem DFG-Projekt, dessen Zielsetzung die Entwicklung eines Simulationsmodells für den Wasser- und Stoffhaushalt von Pflanzenwurzeln im Boden war. Erstmals sollten dabei die Wurzeln in ihrer räumlichen Baumstruktur betrachtet und Wasser- und Stofftransport auf ihnen mit Differentialgleichungen auf Netzwerken modelliert werden. Da es, sowohl was mathematische Theorie als auch die Verfügbarkeit geeigneter Software betrifft, nur recht wenig gab, auf das man zurückgreifen konnte, und darüberhinaus auch Bodenphysik sowie pflanzenphysiologische Aspekte in der Wurzel eine Rolle spielen, konnte jedoch in der begrenzten Zeit nur ein erster Schritt in Richtung dieses Modells vollzogen werden.

Während sich nun Kapitel 1 und 3 mit dem Boden-Wurzel-Projekt im engeren Sinn befassen, soll Kapitel 2 mit einem Exkurs über singular gestörte Differentialgleichungen auf Netzwerken den mathematischen Anspruch der Arbeit erfüllen. Diese drei Kapitel sind, wenn auch mit gewissem gegenseitigen Bezug, doch weitgehend unabhängig voneinander.

Mein Dank gilt Herrn Professor Leugering für die Betreuung dieser Arbeit, sowie jedem einzelnen meiner Kollegen in der Arbeitsgruppe, die immer für ein sehr gutes Arbeitsklima gesorgt haben, darüberhinaus jeglichen Personen, die mich moralisch unterstützt haben, und nicht zuletzt auch meinen Eltern für die finanzielle Hilfe in der Zeit ohne Anstellung.

Kronach, im April 2002

Torsten Fischer

Inhaltsverzeichnis

0	Überblick	5
1	Modellierung von Wasser- und Stofftransport im Boden und in der Wurzel	7
1.1	Wasser- und Stofftransport im Boden	8
1.2	Wasser- und Stofftransport in der Wurzel	10
1.3	Kopplung von Boden und Wurzel	15
2	Singulär gestörte elliptische Differentialgleichungen auf 1-dimensionalen Netzwerken	19
2.1	Einführung	19
2.1.1	Netzwerknotationen	19
2.1.2	Problemstellung	20
2.2	Lineare Differentialoperatoren auf einem beschränkten Intervall	22
2.2.1	Differentialoperatoren erster Ordnung	22
2.2.2	Differentialoperatoren zweiter Ordnung	39
2.2.3	Konvergenzresultate für $\epsilon \rightarrow 0$	50
2.3	Lineare Differentialoperatoren auf einem Netzwerk	60
2.3.1	Differentialoperatoren erster Ordnung	60
2.3.2	Differentialoperatoren zweiter Ordnung	66
2.3.3	Konvergenzresultate für $\epsilon \rightarrow 0$	74
2.4	Probleme in nicht-variationeller Darstellung	80
2.5	Zeitdynamische Probleme	81
3	Simulation	91
3.1	Numerische Lösung elliptischer Differentialgleichungen auf Netzwerken	91
3.2	Numerische Realisierung der Simulation des Wassertransports	106
3.3	Numerische Realisierung der Simulation des Stofftransports .	113
3.4	Simulationsbeispiel	113
A	Funktionale Abhängigkeiten im Boden	144
B	Programmablaufbeschreibungen	146

Kapitel 0

Überblick

Die vorliegende Arbeit entstand im Zusammenhang mit einem Projekt, dessen Fernziel die Simulation des Wasser- und Stoffhaushalts in einem Boden-Wurzel-System war. Erstmals sollten dabei die Prozesse in der Wurzel durch partielle Differentialgleichungen auf einem Netzwerk, welches in seiner Geometrie der Wurzel entspricht, abgebildet werden. Da dies jedoch eine mathematische Arbeit ist, geht es nicht vorrangig um eine möglichst realistische Simulation der Prozesse, sondern darum, numerische Verfahren anzugeben, die für eine derartige Simulation geeignet sind.

In Kapitel 1 werden die Gleichungen dargestellt, um die es sich im weiteren Verlauf der Arbeit dreht. Erarbeitet werden in diesem Zusammenhang die quasi-eindimensionale Betrachtung der Gleichungen entlang der Wurzeläste¹, sinnvolle Bedingungen an den Wurzelknoten, durch die diese Gleichungen gekoppelt werden und schließlich ein Modell für die Kopplung von Wurzel und Boden.

Im Bereich der Analysis konzentrieren wir uns auf lineare singular gestörte Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf Netzwerken. Damit wird ein erster Schritt bei der Untersuchung der Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichungen mit kleinem Diffusionsterm gemacht, die den Stofftransport entlang der Wurzel beschreiben. Partielle Differentialgleichungen auf Netzwerken sind gerade in letzter Zeit Gegenstand diverser Arbeiten, wie z. B. [1], [6], [19], [24]. Nach Kenntnis des Autors gibt es jedoch bislang keine Veröffentlichung mit Fokus auf singular gestörte Probleme. Allgemeine Untersuchungen für singular gestörte Gleichungen finden sich in der Literatur unter anderem in [11] und [22], einen Überblick gibt das Buch [30]. In Kapitel 2 wird versucht, eine entsprechende Theorie für Netzwerk-Differentialgleichungen zu erarbeiten. Dabei ist ein gewisses Augenmerk auch darauf gerichtet, daß möglichst wenig Anforderungen an die Regularität der Koeffizienten der Differentialgleichungen gestellt werden müssen. Denn diese sind nicht von vorne

¹Wir verwenden diesen Begriff künftig immer, wenn von einem unverzweigten Teilstück der Wurzel die Rede sein soll

herein gegeben, sondern werden ihrerseits aus der Lösung der Gleichung für den Wassertransport erhalten. Auch Netzwerk-Differentialgleichungen erster Ordnung werden betrachtet. Sie treten im Grenzfall bei verschwindenden Diffusionskoeffizienten auf.

Kapitel 3 befaßt sich zunächst mit der Problematik der Lösung linearer elliptischer Netzwerk-Differentialgleichungen mittels der Finite-Elemente-Methode. Es bietet sich die Anwendung von Bereichszerlegungsverfahren an, aber auch die direkte Lösung mit Hilfe eines variationellen Ansatzes auf dem gesamten Netzwerk. Schließlich können diese beiden Alternativen in Form einer beliebigen Zerlegung des Netzwerks in Teilnetzwerke miteinander kombiniert werden. Weitere Schwierigkeiten bereitet die Tatsache, daß die Lösung der für die Anwendung relevanten singular gestörten Differentialgleichungen mit Finiten Elementen generell problematisch ist. Das ist wohl bekannt, und es gibt auch einige bewährte Abhilfen, für die man beispielsweise in [29] eine Übersicht findet, wie künstliche Diffusion und Upwind-Schemata. Hier schlagen wir einen etwas anderen Weg ein und nehmen das in [34] beschriebene Verfahren als Grundlage. Denn dieses ist dazu geeignet, eine spezielle Knotenbedingung, die im Grenzfall bei verschwindender Diffusion auftritt und in Kapitel 2 hergeleitet wird, auszunutzen.

In der Simulation wird, sowohl im Boden als auch entlang der Wurzel, Wassertransport mit der Methode von Jäger und Kačur aus [17] und Stofftransport mit dem impliziten Euler-Zeitdiskretisierungsschema gelöst. Für die linearen Probleme, die dafür jeweils gelöst werden müssen, werden die zuvor vorgestellten Verfahren benutzt. Die Kopplung von Boden und Wurzel geschieht in expliziter Form auf dem zeitdiskreten Niveau, indem zu jedem Zeitschritt Wasser- und Stoffaustauschraten festgelegt werden, die auf dem Zustand des vorherigen Zeitschritts beruhen. Dies alles wird schließlich in einem Simulationsbeispiel für ein einfaches Boden-Wurzel-Modell getestet.

Kapitel 1

Modellierung von Wasser- und Stofftransport im Boden und in der Wurzel

Im Boden verwenden wir die Richards-Gleichung für den Wassertransport und die lineare Dispersions-Advektions-Reaktions-Gleichung für den Stofftransport, was gewissermaßen Standard ist. Als Grundlage für die hier gewählte Darstellung diene hauptsächlich [36].

Wie eingangs schon angedeutet, fassen wir das Wurzelsystem in seiner räumlichen Netzwerkstruktur auf, um auf diesem Netzwerk Gleichungen für Wasser- und Stofftransport zu rechnen. Diese Netzwerk-Gleichungen bestehen aus gewöhnlichen Differentialgleichungen auf den einzelnen Wurzelästen zusammen mit geeigneten Bedingungen an den Knoten des Netzwerks. Zwar gibt es bereits recht ausgefeilte Modelle für Wasser- und Stofftransport entlang von Wurzelästen (z. B. [32]). Jedoch beruhen diese auf komplexen pflanzenphysiologischen Zusammenhängen, und ihre Anwendung würde ein eingehendes Verständnis dieser Materie voraussetzen. Da dies nicht Schwerpunkt dieser Arbeit sein soll, wurde hierfür nur ein pragmatischer, allgemeiner Ansatz gewählt.

Schließlich wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie Wurzel und Boden durch Wasser- und Stoffaustausch an den Wurzelspitzen und entlang der Wurzel gekoppelt werden können. Aufgrund des Umstands, daß die Wurzel in ihrer räumlichen Struktur erfaßt ist, können dem Boden ganz gezielt dort Wasser und Nährstoffe entzogen werden, wo sie die Wurzel aufnimmt. Dies ist in bisherigen bekannten Boden-Wurzel-Modellen (z. B. [26], [33], [10]) nicht möglich. Dort wirkt die Wurzel nur in ihrer Gesamtheit auf den Boden, etwa als kontinuierlicher Senkenterm.

1.1 Wasser- und Stofftransport im Boden

Die Richards-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung zur Berechnung des volumetrischen Wassergehalts $\theta = \theta(t, x)$ [–], den Anteil des Wasservolumens am Bodenvolumen. Da der Boden kein homogenes Medium ist, sondern sowohl Poren als auch sehr feste Bestandteile enthält, deren Struktur jedoch zu fein ist als daß sie im Detail in einer Simulation berücksichtigt werden könnte, muß es sich bei θ um eine gemittelte Größe handeln. Dies setzt die Existenz eines repräsentativen Elementarvolumens voraus, siehe [36].

Weitere Größen, die eine Rolle spielen, sind der mittlere Geschwindigkeitsvektor ν [LT⁻¹]³ des Bodenwassers und die Flußdichte q [LT⁻¹]³, die definiert ist als

$$q = \theta\nu.$$

Aus einer lokalen Bilanz des Wasservolumens folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\theta}{dt} = -\operatorname{div} q. \quad (1.1)$$

Kernstück ist aber ist die sogenannte Darcy-Gleichung für ungesättigte Bedingungen, die im wesentlichen empirisch begründet ist. Sie lautet

$$q = -K\nabla\psi_h. \quad (1.2)$$

ψ_h [EV⁻¹] ist ein ortsabhängiges volumenbezogenes Potential. Die Potentialdifferenz $\Delta\psi_h$ zweier Punkte im Boden drückt die Arbeit aus, die verrichtet werden muß, um Wasser von der Menge eines Einheitsvolumens von einem Punkt zum anderen zu bringen. In erster Linie müssen dabei Kapillarkräfte, aber auch die Schwerkraft, überwunden werden. Gewöhnlich wird ein Potentialunterschied aber nicht in seiner natürlichen Einheit ausgedrückt, sondern durch den Höhenunterschied, der im Bezug auf die Höhenenergie diesem entspricht. Der Grund dafür ist, daß der Anteil der Schwerkraft in ψ_h gesondert betrachtet werden muß, denn er geht nicht in die weiter unten dargestellten Abhängigkeiten ein. Mit der neuen Darstellung entspricht der Schwerkraftanteil dem Wert der Höhenkoordinate z ,

$$\psi_h = \psi + z.$$

Der übrige Anteil ψ [L] wird als Matrixpotential bezeichnet.

Im folgenden gehen wir davon aus, daß an jeder Stelle X im Boden unter ungesättigten Bedingungen eine eindeutige Beziehung zwischen dem Wassergehalt $\theta(X)$ und dem Matrixpotential $\psi(X)$ herrscht. Diese Annahme trifft in Wirklichkeit nicht zu. So hängt die Funktion ψ auch stark von der zeitlichen Vorgeschichte von θ ab. Da dieser Effekt, Hysterese genannt, jedoch

nur sehr schwierig im Modell zu erfassen, geschweige denn in der Simulation zu berücksichtigen ist, werden wir ihn nicht beachten. Ebenso sei die Größe $K [\text{LT}^{-1}]^{3 \times 3} > 0$, der sogenannte Leitfähigkeitstensor, an jedem Punkt X eine Funktion von $\psi(X)$ bzw. $\theta(X)$.

Unter den eben genannten Bedingungen lassen sich die Gleichungen (1.1) und (1.2) zur Richards-Gleichung

$$\begin{aligned} q &= -K(\psi, X) \nabla(\psi + z), \\ \frac{d\theta(\psi, X)}{dt} &= -\text{div } q \end{aligned} \quad (1.3)$$

kombinieren. Zusammen mit geeigneten Anfangs- und Randbedingungen liefert diese Gleichung ein vollständiges mathematisches Modell für eine Simulation des Wassertransports.

Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen typische Kurvenverläufe der Größen θ und K in Abhängigkeit vom Matrixpotential ψ . Dabei bezeichnet θ_s den Sättigungswassergehalt und θ_r den sogenannten Restwassergehalt. Der Restwassergehalt ist der Wasseranteil, der durch Anlegen eines Unterdrucks an die Flüssigkeitsphase des Bodens diesem nicht entzogen werden kann.

Die zur Berechnung des Stofftransports verwendete Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichung für die Konzentration $c [\text{MV}^{-1}]$ eines gelösten Stoffes lautet

$$\frac{d(\theta c)}{dt} = \text{div}(\theta D \nabla c - cq) - \mu \theta c, \quad (1.4)$$

die sich mit Hilfe von (1.1) auch schreiben läßt als

$$\theta \frac{dc}{dt} = \text{div}(\theta D \nabla c) - q \cdot \nabla c - \mu \theta c. \quad (1.5)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Koeffizienten dieser Gleichung über die Größen θ und q von der Lösung ψ der Richards-Gleichung (1.3) abhängen. Der Abbaukoeffizient $\mu [\text{T}^{-1}]$ ist eine Konstante, die nur von der Natur des

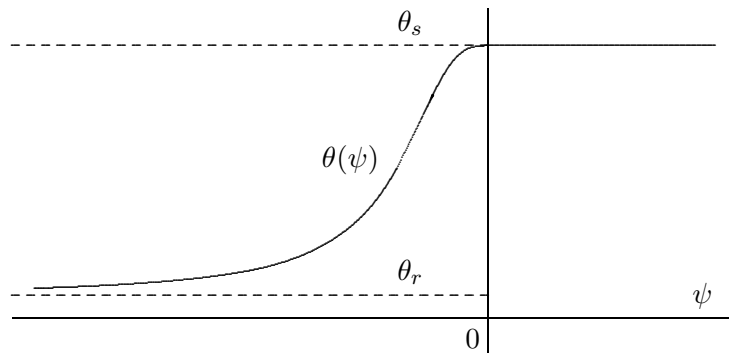


Abbildung 1.1: θ in Abhängigkeit von ψ

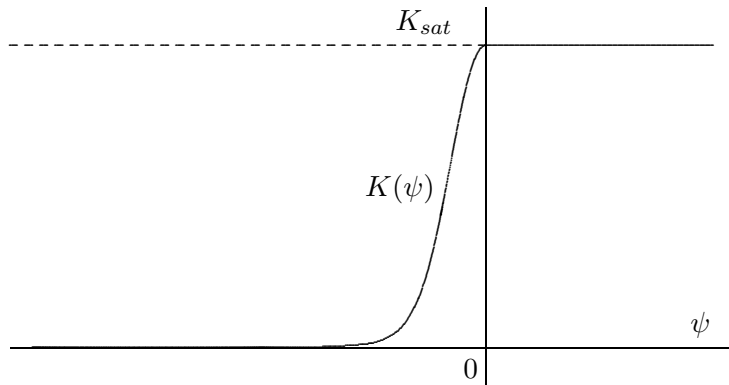


Abbildung 1.2: K in Abhängigkeit von ψ

gelösten Stoffes abhängt. Der Dispersionskoeffizient D [L^2T^{-1}] setzt sich zusammen aus

$$D = D_0 + \lambda|\nu|,$$

wobei $D_0 > 0$ den Effekt der molekularen Diffusion wiedergibt und der übrige Term, der normalerweise überwiegt, für die sogenannte Dispersion¹ steht, die von der Porenfließgeschwindigkeit ν abhängig ist. Wegen

$$q = \theta\nu$$

schreibt sich (1.5) auch

$$\theta \frac{dc}{dt} = \operatorname{div}((\theta D_0 + \lambda|q|)\nabla c) - q \cdot \nabla c - \mu\theta c. \quad (1.6)$$

Über den Reaktionsterm können auch mehrere solche Gleichungen, die jeweils verschiedenen Substanzen in Lösung entsprechen, gekoppelt werden.

$$\begin{aligned} \theta \frac{dc_1}{dt} &= \operatorname{div}((\theta D_{01} + \lambda_1|q|)\nabla c_1) - q \cdot \nabla c_1 - \mu_{11}\theta c_1 - \mu_{12}\theta c_2, \\ \theta \frac{dc_2}{dt} &= \operatorname{div}((\theta D_{02} + \lambda_2|q|)\nabla c_2) - q \cdot \nabla c_2 - \mu_{21}\theta c_1 - \mu_{22}\theta c_2. \end{aligned}$$

Die Sorption von Stoffen an der festen Bodenmasse lassen wir der Einfachheit halber unberücksichtigt.

1.2 Wasser- und Stofftransport in der Wurzel

Für die Prozesse im Inneren der Wurzel verwenden wir Gleichungen ähnlichen Typs wie im Boden. Für den Wassertransport entlang eines Wurzelasts geben wir einen möglichst allgemein gehaltenen, potentialorientierten

¹ein strömungsbedingter Zerstreuungseffekt, verursacht durch die unregelmäßige Struktur des Bodens

Ansatz, und für den Stofftransport verwenden wir eine lineare Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichung. Ziel dieses Abschnitts ist es, ein Modell zu entwickeln, in dem die Wurzel als ein Netzwerk bestehend aus eindimensionalen Kanten und Knoten betrachtet werden kann.

Zunächst einmal stellen wir uns einen Wurzelast als Röhre vor, die in einem dreidimensionalen Koordinatensystem in z -Richtung verläuft (siehe Abbildung 1.3). Im weiteren Verlauf bezeichnen wir Funktionen, die von drei Raumkoordinaten $X = (x, y, z)$ abhängen, mit Großbuchstaben und die anderen, die auf der reellen Achse definiert sind, mit Kleinbuchstaben.

$P = P(t, X)$ sei Lösung einer verallgemeinerten Richards-Gleichung

$$\begin{aligned} Q &= -G(P, \nabla P, X), \\ \frac{d\Theta(P, X)}{dt} &= -\operatorname{div} Q \end{aligned} \quad (1.7)$$

auf dieser Röhre. Q bezeichne die Flußdichte, P das Potential und Θ den volumetrischen Wassergehalt. Unter der folgenden Bedingung läßt sich P auch aus der Lösung einer Differentialgleichung auf der reellen Achse gewinnen.

Bedingung 1.1. Die Funktionen $P_0 := P(0, \cdot)$, Θ und G hängen nicht von (x, y) sondern nur von der z -Koordinate ab. Darüberhinaus gelte für die Funktion $G = G(P, \Xi, X)$ ($\Xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$)

$$e_x^T G(P, \xi_z e_z, X) = 0, \quad (1.8)$$

$$e_y^T G(P, \xi_z e_z, X) = 0, \quad (1.9)$$

$$e_z^T G(P, \xi_z e_z, X) = e_z^T G(P, \Xi, X), \quad (1.10)$$

wobei mit e_x , e_y und e_z die jeweiligen Einheitsvektoren gemeint sind.

Sei nun Bedingung 1.1 erfüllt. Dann machen folgende Definitionen Sinn.

$$g(p, \xi, z) := e_z^T G(p, \xi e_z, X),$$

$$\theta(p, z) := \Theta(p, X),$$

$$p_0(z) := P_0(X).$$

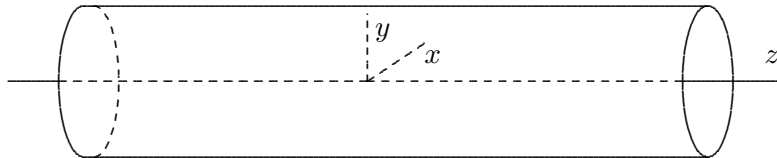


Abbildung 1.3: Wurzelast

Sei nun $p = p(t, z)$ Lösung von

$$\begin{aligned} q &= -g\left(p, \frac{dp}{dz}, z\right), \\ \frac{d\theta(p, z)}{dt} &= -\frac{dq}{dz}, \\ p(0, z) &= p_0(z). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dann ist die Funktion P , gegeben durch

$$P(t, X) := p(t, z), \tag{1.12}$$

Lösung von (1.7). Denn für $Q := -G(P, \nabla P, X)$ gilt

$$\operatorname{div} Q = \frac{d}{dz} e_z^T Q$$

und

$$\begin{aligned} e_z^T Q &= -e_z^T G(P, \nabla P, X) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} -e_z^T G\left(P, \frac{dP}{dz} e_z, X\right) \\ &= -g\left(p, \frac{dp}{dz}, z\right), \end{aligned}$$

da P , G und damit auch Q nicht von (x, y) abhängen. Darüberhinaus erfüllt P an der Außenwand der Röhre die Neumann-Randbedingung

$$\frac{dP}{dn} = 0 \quad (n: \text{äußere Normale}).$$

Aus (1.8) und (1.9) folgt, daß man diese Randbedingung auch mit Hilfe der Flußdichte ausdrücken kann durch

$$Q \cdot n = 0.$$

Wie schon angedeutet, verwenden wir für die Berechnung des Stofftransports eine Diffusions-Advektions-Reaktions-Gleichung. Der Unterschied zur Dispersions-Advektions-Reaktions-Gleichung besteht einzig darin, daß der Koeffizient D nur noch aus dem konstanten Diffusionsanteil $D_0 > 0$ besteht. Um ein eindimensionales Modell zu erhalten, verfahren wir ähnlich wie beim Wassertransport. Mit

$$q = e_z^T Q$$

erhält man aus einer Lösung $c = c(t, z)$ von

$$\begin{aligned} \theta \frac{dc}{dt} &= \frac{d}{dz} \left(\theta D \frac{dc}{dz} \right) - q \frac{dc}{dz} - \mu \theta c, \\ c(0, z) &= c_0(z) \end{aligned} \tag{1.13}$$

stets auch eine Lösung von

$$\begin{aligned}\Theta \frac{dC}{dt} &= \operatorname{div}(\Theta D\nabla C) - Q \cdot \nabla C - \mu \Theta C, \\ C(0, X) &= c_0(z),\end{aligned}\tag{1.14}$$

indem man $C(t, X) := c(t, z)$ setzt, unter der Voraussetzung, daß Θ und Q nicht von (x, y) abhängen. Dies ist natürlich immer der Fall, wenn man Θ aus (1.12) erhalten hat. Für C gilt an der Außenwand die Randbedingung

$$\frac{dC}{dn} = 0.$$

Zum fertigen eindimensionalen Wurzel-Netzwerkmodell sind für die Gleichungen (1.11) und (1.13) noch Bedingungen an den Verzweigungsknoten der Wurzel notwendig. Um sie zu formulieren, führen wir die Indextmengen \mathcal{I} für die Menge aller Wurzeläste (Kanten) und \mathcal{J} für die Menge aller Knoten ein. Für jeden Knoten $J \in \mathcal{J}$ sei \mathcal{I}_J die Menge der Indizes der in diesen Knoten einmündenden Kanten. Weiter gebe d_{iJ} die Richtung der Parametrisierung der Kante i im Bezug auf den Knoten J an. Diese Notation wird zu Beginn von Kapitel 2 anhand eines abstrakten Netzwerks präzisiert.

Wir betrachten, zunächst dreidimensional, einen solchen Verzweigungsknoten J , in den $|\mathcal{I}_J|$ Wurzeläste münden. Für alle $i \in \mathcal{I}_J$ seien I_i die Schnittstellen zwischen dem unmittelbaren Knotenbereich, der in Abbildung 1.4 schattiert und mit ω bezeichnet ist, und den Wurzelästen.

Wir stellen jetzt eine Bilanz des Gesamtwasservolumens auf ω über einen kurzen Zeitraum $[t, t + \Delta t]$ auf. Dabei bezeichne $q_i(t)$ die Flußdichte im Wurzelast $i \in \mathcal{I}_J$ auf Höhe von I_i und $W(t)$ das Volumen der Gesamtwassermenge in ω . Falls kein Wasser von außerhalb in die Wurzel aufgenommen wird, gilt

$$\begin{aligned}W(t + \Delta t) - W(t) &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J} \int_t^{t+\Delta t} d_{iJ} q_i(u) A_i du \\ \Rightarrow \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J} \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} d_{iJ} q_i(u) A_i du \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} q_i(t) A_i.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Ausgehend davon, daß die im Knotenbereich gespeicherte Wassermenge, und auch ihre zeitliche Änderung, im Vergleich zum Durchsatz geringfügig ist, vernachlässigen wir die linke Seite in (1.15) und legen die Kirchhoff-Bedingung

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} q_i(t) A_i = 0\tag{1.16}$$

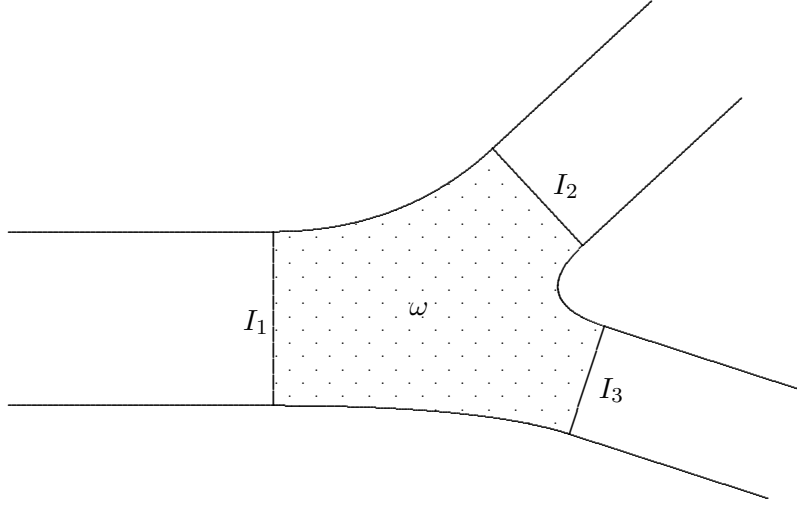


Abbildung 1.4: Wurzelverzweigungsknoten

fest.

Daneben stellen wir noch die Stetigkeitsbedingung

$$p_J(t) := p_k(t) = p_l(t) \quad \forall k, l \in \mathcal{I}_J \quad (1.17)$$

an allen Knoten $J \in \mathcal{J}$ auf. Sie rührt von der natürlichen Annahme her, daß sich das Potential p , das mit dem Wassergehalt einhergeht, auch an einem Knoten nicht sprunghaft ändert. Automatisch folgt daraus auch die Stetigkeit des Wassergehalts

$$\theta_J(t) := \theta_k(t) = \theta_l(t) \quad \forall k, l \in \mathcal{I}_J. \quad (1.18)$$

Um eine Bedingung für den Stofftransport am Knoten zu erhalten, stellen wir eine Stoffmengenbilanz im Knotenbereich ω auf. Für die Gesamtstoffmenge $S(t)$ gilt

$$\begin{aligned} S(t + \Delta t) - S(t) &= \int_{\omega} (\Theta C)(t + \Delta t, X) dX - \int_{\omega} (\Theta C)(t, X) dX \\ &= \int_{\omega} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d}{dt} (\Theta C)(u, X) du dX \\ &\stackrel{(1.14)}{=} \int_{\omega} \int_t^{t+\Delta t} \operatorname{div}(\Theta D \nabla C - C Q) - \mu \Theta C du dX \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{\omega} \operatorname{div}(\Theta D \nabla C - C Q) dX du \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\omega} \mu \Theta C dX du. \end{aligned}$$

Wendet man darauf den Gaußschen Integralsatz an, unter Verwendung, daß Stoffaustausch nur über die Schnittstellen I_i , nicht aber über den Außenrand des Knotenbereichs stattfindet, so erhält man

$$\begin{aligned}
& S(t + \Delta t) - S(t) \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} \int_{I_i} (\Theta D \nabla C - C Q) \cdot n \, ds - \int_{\omega} \mu \Theta C \, dX \right) du \\
&= \int_t^{t+\Delta t} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\theta_i D \frac{dc_i}{dx} - c_i q_i) A_i - \int_{\omega} \mu \Theta C \, dX \right) du \\
&\stackrel{(1.18)}{=} \int_t^{t+\Delta t} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\theta_J D \frac{dc_i}{dx} - c_i q_i) A_i - \int_{\omega} \mu \Theta C \, dX \right) du.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \searrow 0} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\theta_J(t) D \frac{dc_i}{dx}(t) - c_i(t) q_i(t)) A_i \\
& \quad - \int_{\omega} \mu \Theta(t) C(t) \, dX \\
& \stackrel{(1.16)}{=} \theta_J(t) D \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \frac{dc_i}{dx}(t) A_i - \int_{\omega} \mu \Theta(t) C(t) \, dX.
\end{aligned}$$

Mit dem analogen Argument wie beim Wassertransport, nämlich daß die im Knotenbereich gespeicherte Stoffmenge gegenüber dem Stoffdurchsatz in erster Näherung vernachlässigt werden kann, erhalten wir die Knotenbedingung

$$\theta_J(t) \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \frac{dc_i}{dx}(t) A_i = 0. \quad (1.19)$$

Außerdem fordern wir noch die Stetigkeit der Konzentrationen am Knoten, nämlich

$$c_J(t) := c_k(t) = c_l(t) \quad \forall k, l \in \mathcal{I}_J. \quad (1.20)$$

1.3 Kopplung von Boden und Wurzel

Um die Aufnahme von Wasser und Nährstoffen der Wurzel aus dem Boden zu beschreiben, verfolgen wir zwei verschiedene Ansätze. Der, auf den größeres Gewicht gelegt wird, ist die Aufnahme an den Wurzelknoten, insbesondere an den Wurzelspitzen. Die andere Möglichkeit ist die Aufnahme über die Wurzeläste auf ihrer gesamten Länge.

Die Aufnahme von Wasser an einem Wurzelknoten J aus dem Boden zu einem bestimmten Zeitpunkt kann durch die Aufnahmerate R_W^J , eine Größe

der Einheit ‚Wasservolumen pro Zeit‘, charakterisiert werden. In unserem Modell ergibt sich R_W^J aus den Daten p_J im Knoten selbst und $\psi(X_J)$ im Boden an der Stelle X_J , an der sich der Knoten J im Boden befindet, über eine geeignete Funktion α_J durch

$$R_W^J = \alpha_J(\psi(X_J), p_J) = R_W^{J,\max} \alpha^*(\psi(X_J), p_J). \quad (1.21)$$

$R_W^{J,\max}$ ist die maximale Aufnahme­rate am Wurzelknoten. Falls der Wurzelknoten eine Wurzelspitze ist, bietet es sich an, $R_W^{J,\max}$ proportional zur Querschnittsfläche des Wurzelasts zu wählen. Für die Funktion α^* nehmen wir das Modell in [12] als Grundlage.

Die so ermittelte Aufnahme­rate R_W^J geht als rechte Seite in die Knoten­bedingung (1.16) ein. Wie in (1.15) erhalten wir im Knoten J

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k A_k = -R_W^J.$$

Auf der anderen Seite muß die von der Wurzel aufgenommene Wassermenge dem Boden entzogen werden. Dazu führen wir für jeden Knoten J auf einer kleinen Umgebung ω_J des Punktes X_J (siehe Abbildung 1.5) einen Senkenterm S_W^J ein. Die Kontinuitätsgleichung in (1.3) wird so zu

$$\frac{d\theta(\psi, X)}{dt} = -\operatorname{div} q - \sum_{J \in \mathcal{J}} S_W^J.$$

Den Senkenterm wählen wir auf ω_J konstant gleich $\frac{1}{|\omega_J|} R_W^J$, setzen also für alle Knoten $J \in \mathcal{J}$

$$S_W^J = \frac{1}{|\omega_J|} R_W^J I_{\omega_J}.$$

Damit ist die Wasservolumenbilanz zwischen Boden und Wurzel ausgeglichen.

Tabelle 1.1 gibt eine Übersicht der Gleichungen für den Wassertransport. Mit dem gleichen Prinzip erhält man ein System für den Stofftransport, indem man die Rate R_S des Stoffmengenaustausches durch eine Funktion

$$R_S^J = \beta(\psi(X_J), p_J, c(X_J), c_J)$$

festlegt. Die Gleichungen für den Stofftransport sind in Tabelle 1.2 zusammengefaßt.

Die Aufnahme entlang eines Wurzelastes soll nur kurz anhand der Wasseraufnahme angedeutet werden. Die Wasseraufnahmerate, eine auf dem Wurzelast variable Größe mit der Einheit ‚Wasservolumen pro Zeit und Wurzellänge‘, ergibt sich auch in diesem Fall aus den lokalen Daten ψ im Boden und p auf dem Wurzelast. Diese ermittelte Aufnahme­rate wird auf dem

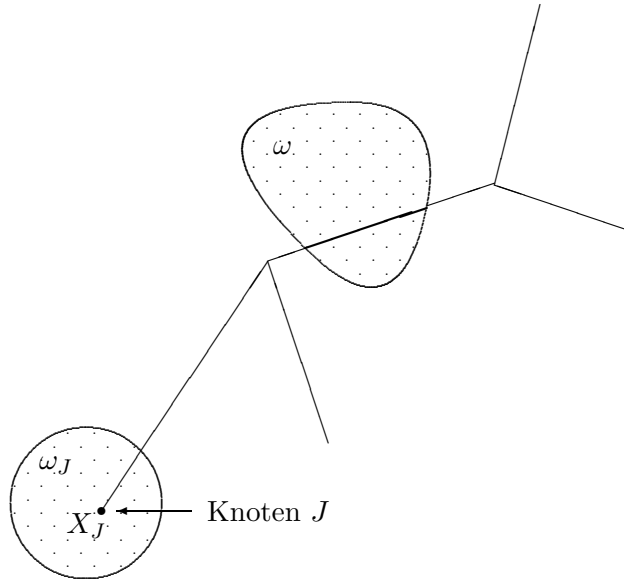


Abbildung 1.5: Anbindung der Wurzel an den Boden über kleine Bodenkompartimente, hier schattiert

Im Boden	$q = -K(\psi, X)\nabla(\psi + z),$ $\frac{d\theta(\psi, X)}{dt} = -\operatorname{div} q - \sum_{J \in \mathcal{J}} S_W^J$
Auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$	$q_i = -g(p_i, p'_i),$ $\frac{d\theta(p_i, x)}{dt} = -q'_i$
Für jeden Knoten $J \in \mathcal{J}$	$R_W^J = \alpha_J(\psi(X_J), p_J),$ $\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k A_k = -R_W^J,$ $S_W^J = \frac{1}{ \omega_J } R_W^J I_{\omega_J}$

Tabelle 1.1: Gleichungen für den Wassertransport

Im Boden	$\theta \frac{dc}{dt} = \operatorname{div}((\theta D_0 + \lambda q)\nabla c) - q \cdot \nabla c - \mu\theta c - \sum_{J \in \mathcal{J}} S_S^J$
Auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$	$\theta_i \frac{dc_i}{dt} = (\theta_i D c_i)' - q_i c_i' - \mu\theta_i c_i$
Für jeden Knoten $J \in \mathcal{J}$	$R_S^J = \beta(\psi(X_J), p_J, c(X_J), c_J),$ $\theta_J D \sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} c_k' A_k = R_S^J + c_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k A_k,$ $S_S^J = \frac{1}{ \omega_J } R_S^J I_{\omega_J}$

Tabelle 1.2: Gleichungen für den Stofftransport

Abschnitt des Wurzelasts, der das Bodenkompartment ω durchläuft (siehe Abbildung 1.5), auf die rechte Seite der Kontinuitätsgleichung von (1.11) geschlagen. Im Gegenzug wird wieder ein Senkenterm auf ω erzeugt, der konstant ist und dem entnommenen Wasservolumen entspricht. Dieser geht in die rechte Seite von (1.3) ein.

Die Vorgehensweise, Boden und Wurzel über kleine Bodenkompimente zu koppeln, hat den praktischen Grund, daß mit den hier verwendeten Finite-Elemente-Verfahren eine Unterteilung des Bodens in kleine Kompartimente schon zur Verfügung steht.

Kapitel 2

Singulär gestörte elliptische Differentialgleichungen auf 1-dimensionalen Netzwerken

2.1 Einführung

2.1.1 Netzwerknnotationen

Ein Netzwerk sei repräsentiert durch eine endliche Menge V von Punkten (Knoten) im Raum \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) und eine endliche Menge E von Kurven (Kanten) endlicher Länge, deren Anfangs- und Endpunkte in der Menge V enthalten sein müssen. Mit den Indextmengen \mathcal{I} und \mathcal{J} ($|\mathcal{I}| < \infty$, $|\mathcal{J}| < \infty$) schreiben wir

$$\begin{aligned} V &= \{\Gamma_J \mid J \in \mathcal{J}\}, \\ E &= \{\Omega_i \mid i \in \mathcal{I}\}. \end{aligned}$$

Wie bereits angedeutet, sind alle Γ_J Punkte in \mathbb{R}^n . Für alle $i \in \mathcal{I}$ sei $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ das Bild einer Jordan-Kurve k_i im \mathbb{R}^n mit endlicher Länge l_i , und π_i die bis auf ihre Laufrichtung eindeutige Bogenlängenkurve von k_i , die das Intervall $[0, l_i]$ auf Ω_i abbildet.

Die Bedingung, daß Anfangs- und Endpunkt einer jeden Kurve Ω_i in der Knotenmenge V sein müssen, bedeutet mit der eben eingeführten Notation, daß es für alle $i \in \mathcal{I}$ Indizes $J_i^-, J_i^+ \in \mathcal{J}$ gibt mit

$$\pi_i(0) = \Gamma_{J_i^-} \quad \text{und} \quad \pi_i(l_i) = \Gamma_{J_i^+}.$$

Es folgen nun weitere Notationen. Wir definieren für alle $i \in \mathcal{I}$

$$\mathcal{J}_i = \{J_i^-, J_i^+\}$$

und für alle $J \in \mathcal{J}$

$$\mathcal{I}_J = \{i \in \mathcal{I} \mid J \in \mathcal{J}_i\}.$$

Dies induziert eine Relation R auf $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$, welche dadurch definiert ist, daß für alle $i \in \mathcal{I}$ und $J \in \mathcal{J}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i &= R(i), \\ \mathcal{I}_J &= R^{-1}(J). \end{aligned}$$

Diese Relation ist insbesondere ein Graph, den man auch als gerichtet auffassen kann, wenn man die Laufrichtungen der Bogenlängenkurven in Betracht zieht. In diesem Zusammenhang definieren wir noch für beliebige $i \in \mathcal{I}$ und $J \in \mathcal{J}$

$$d_{iJ} = \begin{cases} -1, & \text{falls } J = J_i^-, \\ 1, & \text{falls } J = J_i^+, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die hier vorgestellte Netzwerkdefinition entspricht den Definitionen in [6] und [1], und paßt in den allgemeinen Rahmen, der in [23] beschrieben ist. Lediglich auf Glattheitsforderungen der Kurven π_i verzichten wir, da wir von vorneherein nur Differentialgleichungen auf den Intervallen $(0, l_i)$ betrachten. Deshalb bezeichnen wir der Einfachheit halber im folgenden das Intervall $(0, l_i)$ mit Ω_i .

2.1.2 Problemstellung

Für alle $i \in \mathcal{I}$ wird ein elliptischer Differentialoperator folgender Gestalt betrachtet. $\epsilon_i \in C^0(\overline{\Omega}_i)$ sei eine positive Funktion, die von der 0 wegbeschränkt ist, d. h. es gibt eine Konstante τ_i mit $\epsilon_i \geq \tau_i > 0$. Außerdem seien weitere reellwertige Funktionen $\beta_i, \gamma_i \in C^1(\Omega_i) \cap C^0(\overline{\Omega}_i)$ mit auf Ω_i beschränkten ersten Ableitungen β_i', γ_i' und die reellwertige Funktion $\alpha_i \in C^0(\overline{\Omega}_i)$ gegeben. Auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$ betrachten wir den Differentialoperator

$$A_i u_i = -(\epsilon_i u_i' + \beta_i u_i)' + \gamma_i u_i' + \alpha_i u_i.$$

Für unsere Untersuchungen nehmen wir nun an, daß sich die Menge der Knoten aus homogenen Dirichlet- und homogenen Neumannknoten zusammensetzt.

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_D \dot{\cup} \mathcal{J}_N.$$

Mit den Räumen

$$\begin{aligned} H_i &:= L^2(\Omega_i), \\ V_i &:= \{u_i \in H^1(\Omega_i) \mid u_i(\Gamma_J) = 0 \ \forall J \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_D\}, \\ D(A_i) &:= \{u_i \in V_i \mid A_i u_i \in H_i\} = \{u_i \in V_i \mid (\epsilon_i u_i')' \in H_i\} \end{aligned}$$

betrachten wir auf allen Kanten $i \in \mathcal{I}$ des Netzwerks den linearen Operator A_i im Raum H_i mit Definitionsbereich $D(A_i)$. Diese Differentialoperatoren kann man mit Hilfe der folgenden Transmissionsbedingungen zu einem Operator auf dem ganzen Netzwerk zusammensetzen, siehe auch [1].

(T0): Sei

$$u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} V_i.$$

Wir sagen, u erfüllt (T0), falls für alle $J \in \mathcal{J}_N$ gilt

$$u_{i_1}(\Gamma_J) = u_{i_2}(\Gamma_J) \quad \forall i_1, i_2 \in \mathcal{I}_J. \quad (2.1)$$

In diesem Fall bezeichnen wir den Ausdruck in (2.1) mit $u(\Gamma_J)$.

(T1): Sei

$$u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} D(A_i),$$

u erfülle (T0). Es sei

$$\begin{aligned} \rho_J(u) &:= \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} ((\epsilon_i u_i')(\Gamma_J) + (\beta_i u_i)(\Gamma_J)) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i u_i')(\Gamma_J) + \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \right) u(\Gamma_J). \end{aligned}$$

Wir sagen, u erfüllt (T1), falls für alle $J \in \mathcal{J}_N$ gilt

$$\rho_J(u) = 0.$$

(T0) schreibt Stetigkeit an den Knoten vor, (T1) ist eine verallgemeinerte Kirchhoff-Bedingung.

Mit diesen Transmissionsbedingungen sind die folgenden Räume von Funktionen auf dem ganzen Netzwerk definiert.

$$\begin{aligned} H &:= \prod_{i \in \mathcal{I}} H_i, \\ V &:= \left\{ u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} V_i : u \text{ erfüllt (T0)}. \right\}, \\ D(\mathcal{A}) &:= \left\{ u \in V : u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} D(A_i), u \text{ erfüllt (T1)}. \right\}, \end{aligned}$$

Wir definieren den Operator

$$\mathcal{A} := \prod_{i \in \mathcal{I}} A_i$$

im Hilbertraum H mit Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels geht es um Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für das Problem, zu einer gegebenen rechten Seite $f \in H$ eine Funktion $u \in D(\mathcal{A})$ zu finden mit

$$\mathcal{A}u = f,$$

sowie um die Evolutionsgleichung

$$\frac{du}{dt} = -\mathcal{A}u.$$

Dabei werden wir immer die Tatsache im Auge behalten, daß die Koeffizienten ϵ_i klein sind, und auch versuchen, Aussagen darüber zu machen was passiert, wenn diese Koeffizienten gegen Null konvergieren. Da man bei diesem Konvergenzprozeß mit Differentialgleichungen erster Ordnung konfrontiert wird, werden wir auch diese betrachten. Vorher geben wir aber auch einige Tatsachen über Differentialgleichungen auf beschränkten Intervallen an, die als Grundlage für die Untersuchung der Netzwerk-Differentialgleichungen dienen.

2.2 Lineare Differentialoperatoren auf einem beschränkten Intervall

2.2.1 Differentialoperatoren erster Ordnung

Sei $\Omega = (a, b)$ ein beschränktes Teilintervall der reellen Zahlen mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

Für eine Zahl p mit $1 \leq p \leq \infty$ betrachten wir den Raum $L^p(\Omega)$, der alle Lebesgue-meßbaren komplexwertigen Funktionen auf Ω enthält, für die

$$\|u\| := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

falls $p < \infty$, und

$$\|u\| := \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty,$$

falls $p = \infty$. $L^p(\Omega)$ ist mit der Norm $\|\cdot\|$ ein Banachraum.

Der zu p duale Exponent p' sei gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Für Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ ist deren Produkt uv im Raum $L^1(\Omega)$, und es gilt die Höldersche Ungleichung

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Aufgrund dieser Ungleichung können wir die Abbildung

$$\begin{aligned} L^{p'}(\Omega) &\rightarrow (L^p(\Omega))^*, \\ u &\mapsto J_u := \int_{\Omega} u \cdot dx \end{aligned}$$

formulieren. Diese Abbildung ist eine isometrische Einbettung, denn es gilt stets

$$\|J_u\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Falls $1 \leq p < \infty$, ist diese Abbildung auch surjektiv, also

$$L^{p'}(\Omega) \simeq (L^p(\Omega))^*.$$

Für jede lokal Lebesgue-integrierbare Funktion u kann eine distributionelle Ableitung u' erklärt werden durch

$$\begin{aligned} u' &: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi &\mapsto - \int_{\Omega} u \varphi' dx. \end{aligned}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der klassischen Differentiation, wenn man Funktionen u aus der Menge der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen, insbesondere solche aus $L^p(\Omega)$, gemäß der Abbildung

$$u \mapsto T_u,$$

mit

$$\begin{aligned} T_u &: C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi &\mapsto \int_{\Omega} u \varphi dx. \end{aligned}$$

identifiziert.

Für Funktionen $u \in L^p(\Omega)$ mit distributioneller Ableitung $u' \in L^{p'}(\Omega)$ können in sinnvoller Weise stetig von der Funktion abhängige Randwerte zugeordnet werden. Es gilt

$$|u(t)| \leq C(\|u\| + \|u'\|) \quad \forall t \in \partial\Omega.$$

Sei zusätzlich $v \in L^{p'}(\Omega)$ mit distributioneller Ableitung $v' \in L^p(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} u'v dx + \int_{\Omega} uv' dx = (d uv)_{\partial\Omega}, \quad (2.2)$$

wobei d die Normalenrichtung an den Randpunkten angibt, also

$$\begin{aligned}d(a) &= -1, \\d(b) &= 1,\end{aligned}$$

und mit der Notation $(\cdot)_{\partial\Omega}$ die Summe

$$(\cdot)_{\partial\Omega} = \sum_{t \in \partial\Omega} \cdot$$

gemeint ist.

Als nächstes untersuchen wir Differentialoperatoren der Form

$$u \mapsto \beta u'.$$

β sei eine reellwertige Funktion aus dem Raum $\mathcal{C}^1(\Omega)$, welchen wir definieren als

$$\mathcal{C}^1(\Omega) := \{u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \mid u' \text{ ist beschränkt auf } \Omega.\}.$$

Die Differentialoperatoren \tilde{D}_β und \tilde{E}_β definieren wir als

$$\begin{aligned}D(\tilde{D}_\beta) &= \mathcal{C}^1(\Omega), \\ \tilde{D}_\beta u &= \beta u', \\ D(\tilde{E}_\beta) &= \mathcal{C}^1(\Omega), \\ \tilde{E}_\beta u &= (\beta u)'.\end{aligned}$$

An Teilen des Randes $\partial\Omega = \{a, b\}$ sollen jetzt homogene Randbedingungen vorgeschrieben werden. Dazu seien Γ_{\subset} und Γ_{\times} zunächst beliebige Teilmengen von $\partial\Omega$. Die Differentialoperatoren $\tilde{D}_\beta^{\subset}$ und \tilde{E}_β^{\times} seien gegeben durch

$$\begin{aligned}D(\tilde{D}_\beta^{\subset}) &= \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \mid u(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_{\subset}\}, \\ \tilde{D}_\beta^{\subset} u &= \beta u', \\ D(\tilde{E}_\beta^{\times}) &= \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \mid u(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_{\times}\}, \\ \tilde{E}_\beta^{\times} u &= (\beta u)'.\end{aligned}$$

Falls $\partial\Omega = \Gamma_{\subset} \dot{\cup} \Gamma_{\times}$, so sind die Operatoren $\tilde{D}_\beta^{\subset}$ und $-\tilde{E}_\beta^{\times}$ formal adjungiert zueinander.

Diese Situation läßt sich in ein allgemeines Dualitätsmodell einordnen. Angenommen, X und Y sind normierte Räume, $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T) \subset X$. X^* und Y^* seien weitere normierte Räume, und

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle_{X, X^*} &: X \times X^* \rightarrow \mathbb{C}, \\ \langle \cdot, \cdot \rangle_{Y, Y^*} &: Y \times Y^* \rightarrow \mathbb{C}\end{aligned}$$

stetige Bilinearformen. Als Zusatzvoraussetzung gelte lediglich, daß für alle $f^* \in X^*$ aus

$$\langle x, f^* \rangle_{X, X^*} = 0 \quad \forall x \in D(T)$$

folgt, daß $f^* = 0$. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man auf eindeutige Weise den Operator $T^* : Y^* \rightarrow X^*$ folgendermaßen definieren. Der Definitionsbereich $D(T^*)$ bestehe aus all den $g^* \in Y^*$, für die es ein $f^* \in X^*$ gibt mit

$$\langle x, f^* \rangle_{X, X^*} = \langle Tx, g^* \rangle_{Y, Y^*} \quad \forall x \in D(T). \quad (2.3)$$

Man setzt dann $T^*g^* = f^*$. T^* ist ein abgeschlossener Operator, wie man anhand der Gleichung (2.3) erkennen kann.

In unserem Fall wählen wir $X = Y = L^p(\Omega)$, $X^* = Y^* = L^{p'}(\Omega)$ und

$$\langle f, g \rangle_{L^p(\Omega), L^{p'}(\Omega)} = \int_{\Omega} fg \, dx.$$

Für $1 \leq p \leq \infty$ und eine beliebige Funktion $f^* \in L^{p'}(\Omega)$ folgt aus

$$\int_{\Omega} u f^* \, dx = 0 \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

daß f^* gleich Null ist. Wir können also $\tilde{D}_\beta^{\subset}$ und \tilde{E}_β^{\times} als Operatoren in $L^p(\Omega)$ auffassen und dazu die dualen Operatoren in $L^{p'}(\Omega)$ erklären. Es ist klar, daß für alle $u \in D(\tilde{D}_\beta^{\subset})$ und $v \in D(\tilde{E}_\beta^{\times})$ die Gleichung

$$\int_{\Omega} (\beta u') v \, dx = \int_{\Omega} u (-\beta v') \, dx$$

gilt. Wir haben also $(\tilde{E}_\beta^{\times})^* \supset -\tilde{D}_\beta^{\subset}$, und $(\tilde{D}_\beta^{\subset})^* \supset -\tilde{E}_\beta^{\times}$.

Die Suche nach den vollen Definitionsbereichen der dualen Operatoren führt direkt auf die Definition der Sobolevräume. Es gilt

Lemma 2.1. *Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\partial\Omega = \Gamma_{\subset} \dot{\cup} \Gamma_{\times}$. Wir fassen \tilde{E}_β^{\times} als Operator in $L^p(\Omega)$ auf. Dann ist der dazu duale Operator in $L^{p'}(\Omega)$ gegeben durch*

$$(\tilde{E}_\beta^{\times})^* = -D_\beta^{\subset},$$

mit

$$D(D_\beta^{\subset}) = \{u \in L^{p'}(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^{p'}(\Omega), (\beta u)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_{\subset}\},$$

$$D_\beta^{\subset} u = (\beta u)' - \beta' u.$$

Beweis. Nach Definition ist eine Funktion $f \in L^{p'}(\Omega)$ genau dann im Definitionsbereich von $(\tilde{E}_\beta^\times)^*$, wenn es eine Funktion $z \in L^{p'}(\Omega)$ gibt mit

$$\int_{\Omega} zu \, dx = \int_{\Omega} f(\beta u)' \, dx \quad \forall u \in D(\tilde{E}_\beta^\times). \quad (2.4)$$

In diesem Fall ist

$$(\tilde{E}_\beta^\times)^* f = z.$$

Aus (2.4) folgt

$$\int_{\Omega} (z - \beta' f)u \, dx = \int_{\Omega} (\beta f)u' \, dx \quad \forall u \in D(\tilde{E}_\beta^\times). \quad (2.5)$$

Diese Gleichung gilt insbesondere auch für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Also ist $(\beta f)' \in L^{p'}(\Omega)$ und

$$(\beta f)' = -(z - \beta' f),$$

also

$$(\beta f)' - \beta' f = -z. \quad (2.6)$$

Zu zeigen ist jetzt noch, daß $(\beta f) = 0$ auf Γ_C . Aus (2.6) folgt mit (2.2), daß für alle $u \in C^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (-z + \beta' f)u \, dx + \int_{\Omega} (\beta f)u' \, dx = (d(\beta f)u)_{\partial\Omega}, \quad (2.7)$$

gilt. Zusammen mit Gleichung (2.5), die für alle $u \in D(\tilde{E}_\beta^\times)$ gilt, ergibt sich

$$(d(\beta f)u)_{\partial\Omega} = 0 \quad \forall u \in D(\tilde{E}_\beta^\times).$$

Da u an den Randpunkten von Γ_C beliebige Werte annehmen kann, folgt daraus

$$(\beta f)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_C.$$

Damit ist gezeigt, daß

$$(\tilde{E}_\beta^\times)^* \subset -D_\beta^C.$$

Die andere Richtung kann man direkt nachrechnen, denn für alle $f \in D(D_\beta^C)$ und $D(\tilde{E}_\beta^\times)$ gilt

$$\int_{\Omega} (\beta f)'u \, dx + \int_{\Omega} \beta f u' \, dx = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung können wir umschreiben zu

$$\int_{\Omega} (D_\beta f)u \, dx + \int_{\Omega} f E_\beta u \, dx.$$

□

Entsprechend zu D_β^{\subset} definieren wir den Operator E_β^\times durch

$$\begin{aligned} D(E_\beta^\times) &= \{u \in L^{p'}(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^{p'}(\Omega), (\beta u)(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_\times\}, \\ E_\beta^\times u &= (\beta u)'. \end{aligned}$$

Es gilt

$$(\tilde{D}_\beta^{\subset})^* = -E_\beta^\times.$$

Aus der Definition von dualen Operatoren wird klar, daß D_β^{\subset} und E_β^{\subset} für alle p mit $1 \leq p \leq \infty$ abgeschlossen sind. Da D_β^{\subset} eine Fortsetzung von $\tilde{D}_\beta^{\subset}$ und E_β^\times Fortsetzung von \tilde{E}_β^\times ist, gilt

$$(D_\beta^{\subset})^* \subset -E_\beta^\times \quad (2.8)$$

und, analog dazu,

$$(E_\beta^\times)^* \subset -D_\beta^{\subset}. \quad (2.9)$$

Es stellt sich die Frage, ob hier Gleichheit gilt. Dazu betrachten wir die Inklusionen

$$\overline{\tilde{D}_\beta^{\subset}} \subset D_\beta^{\subset}, \quad (2.10)$$

$$\overline{\tilde{E}_\beta^\times} \subset E_\beta^\times. \quad (2.11)$$

Falls hier Gleichheit eintritt, so auch in (2.8) und (2.9). Dieses Problem wurde bereits in [14] in großer Allgemeinheit mit Hilfe von Glättungskernen (Friedrichssche Glättung) behandelt. Mit D_β bezeichnen wir den in Lemma 2.1 eingeführten Operator, ohne Vorgabe von Randbedingungen, also

$$\begin{aligned} D(D_\beta) &= \{u \in L^p(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^p(\Omega)\}, \\ D_\beta u &= (\beta u)' - \beta' u, \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} D(E_\beta) &= \{u \in L^p(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^p(\Omega)\}, \\ E_\beta u &= (\beta u)'. \end{aligned}$$

Der folgende Satz wird durch Theorem 4.2 in [14] abgedeckt.

Satz 2.1. *Die Abschließung des Operators \tilde{D}_β im Raum $L^p(\Omega)$, mit $1 \leq p < \infty$, ist gleich D_β .*

Aus Satz 2.1 können wir unmittelbar einige Folgerungen ableiten.

Folgerung 2.1. Sei $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ mit $(\beta u)' \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ mit $(\beta v)' \in L^{p'}(\Omega)$. Dann ist $(\beta uv)' \in L^1(\Omega)$ und

$$(\beta uv)' = u(\beta v)' + (\beta u)'v - \beta'uv. \quad (2.12)$$

Darüberhinaus gilt für alle $t \in \partial\Omega$

$$\beta(t)(\beta uv)(t) = (\beta u)(t)(\beta v)(t). \quad (2.13)$$

Beweis. Für Funktionen $u, v \in C^1(\Omega)$ trifft die Aussage offensichtlich zu. Ansonsten wählen wir Funktionenfolgen $(u_n), (v_n) \subset C^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } L^p(\Omega), \\ (\beta u_n)' &\rightarrow (\beta u)' && \text{in } L^p(\Omega), \\ v_n &\rightarrow v && \text{in } L^{p'}(\Omega), \\ (\beta v_n)' &\rightarrow (\beta v)' && \text{in } L^{p'}(\Omega). \end{aligned}$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (2.12), und damit

$$\int_{\Omega} (u_n(\beta v_n)' + (\beta u_n)'v_n - \beta'u_nv_n)\varphi \, dx + \int_{\Omega} (\beta u_nv_n)\varphi' \, dx = 0.$$

Im Limes gilt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int_{\Omega} (u(\beta v)' + (\beta u)'v - \beta'uv)\varphi \, dx + \int_{\Omega} (\beta uv)\varphi' \, dx = 0.$$

Da φ beliebig war, ist also $(\beta uv)' \in L^1(\Omega)$, und es gilt (2.12). Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u_nv_n &\rightarrow uv && \text{in } L^1(\Omega), \\ (\beta u_nv_n)' &\rightarrow (\beta uv)' && \text{in } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Wir können deshalb bei der Gleichung

$$\beta(t)(\beta u_nv_n)(t) = (\beta u_n)(t)(\beta v_n)(t)$$

den Limes bilden und erhalten (2.13). □

Folgerung 2.2. Sei $1 \leq p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ eine nichtnegative Funktion mit $(\beta u)' \in L^p(\Omega)$ und $t \in \partial\Omega$ ein beliebiger Randpunkt mit $\beta(t) \geq 0$. Dann gilt auch $(\beta u)(t) \geq 0$.

Beweis. $(u_n) \subset C^1(\Omega)$ sei wieder eine Funktionenfolge mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } L^p(\Omega), \\ (\beta u_n)' &\rightarrow (\beta u)' && \text{in } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Deshalb gilt auch

$$(\beta u_n)(t) \rightarrow (\beta u)(t). \quad (2.14)$$

In [14] wird die Funktionenfolge (u_n) durch Faltung mit nichtnegativen Glättungsfunktionen konstruiert. Es gilt also

$$(\beta u_n)(t) = \beta(t)u_n(t) \geq 0,$$

und wegen (2.14) ist damit auch $(\beta u)(t) \geq 0$. \square

Satz 2.1 bezieht sich auf die Operatoren D_β und E_β ohne Vorgabe von Randbedingungen. Gleichheit in (2.10) und (2.11) sind damit also nur dann gezeigt, wenn $\Gamma_C = \{\}$ bzw. $\Gamma_\times = \{\}$. In [14] wird auch die Situation mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen auf dem ganzen Rand betrachtet. Mit ähnlichen Techniken wird dies in [8] auf allgemeine Randbedingungen übertragen. Schließlich geben wir mit Satz 2.2 auch noch einen eigenen Beweis, der allerdings darauf beruht, daß das Gebiet eindimensional und $L^p(\Omega)$ reflexiv ist.

Satz 2.2. *Die Abschließung des Operators \tilde{E}_β^\times im Raum $L^p(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$ ist gleich E_β^\times .*

Beweis. Wir arbeiten der Einfachheit halber im reellen Banachraum. Durch Aufspaltung der Funktionen in Real- und Imaginärteil kann dies auf die komplexe Situation übertragen werden. Da E_β^\times abgeschlossen ist, können wir dessen Definitionsbereich als Banachraum, versehen mit der Graphennorm, auffassen. Mit einer beliebig aber fest gewählten Konstante $\lambda > 0$ definieren wir eine zu dieser Graphennorm äquivalente Norm $\|\cdot\|_{\beta,\lambda}$ durch

$$\|u\|_{\beta,\lambda}^p = \lambda^p \|u\|^p + \|(\beta u)'\|^p.$$

Wir zeigen, daß der Raum $D(\tilde{E}_\beta^\times)$ in $D(E_\beta^\times)$ dicht bezüglich dieser Norm liegt. Angenommen, dies ist nicht der Fall. Sei $w \in D(E_\beta^\times)$ mit

$$\delta := \inf_{z \in D(\tilde{E}_\beta^\times)} \|w - z\|_{\beta,\lambda} > 0. \quad (2.15)$$

Für eine Minimalfolge (z_n) ist $\|z_n\|$ und $\|(\beta z_n)'\|$ beschränkt. Da $L^p(\Omega)$ reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit (z_n) bezeichnen, mit

$$\begin{aligned} z_n &\xrightarrow{w} \bar{z} \in L^p(\Omega), \\ (\beta z_n)' &\xrightarrow{w} \bar{y} \in L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Mazur (siehe z. B. [2]) existiert auch eine Folge (z_n^c) von endlichen Konvexkombinationen von (z_n) mit

$$z_n^c \rightarrow \bar{z}, \quad (2.16)$$

$$(\beta z_n^c)' \rightarrow \bar{y}. \quad (2.17)$$

Da die Abbildung

$$z \mapsto \|w - z\|_{\beta, \lambda}$$

konvex ist, muß auch (z_n^c) eine Minimalfolge für (2.15) sein. Außerdem wird mit (2.16), (2.17) und der Abgeschlossenheit von E_β^\times klar, daß $\bar{z} \in D(E_\beta^\times)$, und daß

$$\delta = \|w - \bar{z}\|_{\beta, \lambda} \leq \|(w - \bar{z}) + z\|_{\beta, \lambda} \quad \forall z \in D(\tilde{E}_\beta^\times).$$

Zusammenfassend können wir (mit $w := w - \bar{z}$) feststellen, daß ein $w \in D(E_\beta^\times)$ existiert, mit $w \neq 0$ und

$$\|w\|_{\beta, \lambda} \leq \|w + z\|_{\beta, \lambda} \quad \forall z \in D(\tilde{E}_\beta^\times),$$

also insbesondere auch

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \frac{\|w + \mu z\|_{\beta, \lambda}^p - \|w\|_{\beta, \lambda}^p}{\mu} \geq 0 \quad \forall z \in D(\tilde{E}_\beta^\times). \quad (2.18)$$

Auf diesen Differenzenquotienten können wir den Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz anwenden. Dazu definieren wir

$$\chi_q(x) := \operatorname{sgn}(x)|x|^q \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad q > 0.$$

Die Funktion

$$x \mapsto |x|^p$$

ist differenzierbar und konvex. Es gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{|u + \mu v|^p - |u|^p}{\mu} &\rightarrow p\chi_{p-1}(u)v && \text{für } \mu \rightarrow 0, \\ \frac{|u + \mu v|^p - |u|^p}{\mu} &\leq \frac{(|u| + \mu_0|v|)^p - |u|^p}{\mu_0} && \text{für } |\mu| \leq \mu_0. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue sind also erfüllt, und es gilt

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\|w + \mu z\|_{\beta, \lambda}^p - \|w\|_{\beta, \lambda}^p}{\mu} = \int_{\Omega} \lambda^p p\chi_{p-1}(w)z + p\chi_{p-1}((\beta w)')(\beta z)' dx.$$

Da wir hier anstelle von z stets auch $(-z)$ einsetzen können, folgt mit (2.18)

$$\int_{\Omega} \lambda^p \chi_{p-1}(w)z + \chi_{p-1}((\beta w)')(\beta z)' dx = 0 \quad \forall z \in D(\tilde{E}_{\beta}^{\times}).$$

Aufgrund der Aussage von Lemma 2.1 bedeutet das aber, daß für $y := (\beta w)'$

$$(\beta \chi_{p-1}(y))' \in L^{p'}(\Omega), \quad (2.19)$$

$$(\beta \chi_{p-1}(y))' = \lambda^p \chi_{p-1}(w) + \beta' \chi_{p-1}(y), \quad (2.20)$$

$$(\beta \chi_{p-1}(y)) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_{\subset}. \quad (2.21)$$

Multiplikation von (2.20) mit $|\beta|^p w$ und Integration liefert

$$\int_{\Omega} |\beta|^p w (\beta \chi_{p-1}(y))' dx = \int_{\Omega} |\beta|^p (\lambda^p |w|^p + \beta' w \chi_{p-1}(y)). \quad (2.22)$$

Da $(\beta w)' \in L^p(\Omega)$, so ist wegen Folgerung 2.1 auch $(|\beta|^p w)' \in L^p(\Omega)$, und es gilt

$$\begin{aligned} (|\beta|^p w)' &= \chi_{p-1}(\beta)(\beta w)' + (|\beta|^p)' w - \beta' \chi_{p-1}(\beta) w \\ &= \chi_{p-1}(\beta)((\beta w)' + (p-1)\beta' w) \\ &= \chi_{p-1}(\beta)(y + (p-1)\beta' w), \\ (|\beta|^p w)(t) &= \chi_{p-1}(\beta(t))(\beta w)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_{\times}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Durch partielle Integration der linken Seite von (2.22) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\beta|^p w (\beta \chi_{p-1}(y))' dx &= - \int_{\Omega} \chi_{p-1}(\beta)(y + (p-1)\beta' w) \beta \chi_{p-1}(y) dx \\ &= - \int_{\Omega} |\beta|^p (|y|^p + (p-1)\chi_{p-1}(y)\beta' w) dx, \end{aligned}$$

denn wegen (2.21) und (2.23) treten keine Randterme auf. Eingesetzt in (2.22) ergibt sich

$$-p \int_{\Omega} |\beta|^p \chi_{p-1}(y) \beta' w dx = \int_{\Omega} |\beta|^p (|\lambda w|^p + |y|^p) dx. \quad (2.24)$$

Die linke Seite von (2.24) können wir aber auch mit Hilfe der Youngschen Ungleichung

$$ab \leq \frac{\delta^p}{p} |a|^p + \frac{1}{\delta^{p'} p'} |b|^{p'} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \delta > 0$$

abschätzen. Die Wahl

$$\delta = \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

liefert

$$\begin{aligned} pab &\leq \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} |a|^p + |b|^{p'} \\ &= (p-1)^{p-1} |a|^p + |b|^{p'}. \end{aligned}$$

Mit $a = \beta'w$ und $b = \chi_{p-1}(y)$ folgt

$$-p \int_{\Omega} |\beta|^p \chi_{p-1}(y) \beta'w \, dx \leq \int_{\Omega} |\beta|^p ((p-1)^{p-1} |\beta'w|^p + |y|^p) \, dx. \quad (2.25)$$

Der Vergleich der beiden rechten Seiten von (2.24) und (2.25) ergibt

$$\int_{\Omega} |\beta w|^p ((p-1)^{p-1} |\beta'|^p - \lambda^p) \, dx \geq 0. \quad (2.26)$$

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir jetzt davon ausgehen, daß wir λ so gewählt haben, daß

$$\lambda^p > (p-1)^{p-1} \left(\sup_{x \in \Omega} |\beta'(x)| \right)^p.$$

Dann kann (2.26) jedoch nur dann erfüllt werden, wenn $\beta w = 0$. Mit (2.20) folgt daraus schließlich, daß $\lambda^p \chi_{p-1}(w) = 0$, und damit $w = 0$, ein Widerspruch. \square

Folgerung 2.3. *Es gilt*

$$(D_{\beta}^{\subset})^{\star} = -E_{\beta}^{\times}$$

und

$$(E_{\beta}^{\times})^{\star} = -D_{\beta}^{\subset}.$$

Folgerung 2.4. *Sei $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ mit $(\beta u)' \in L^p(\Omega)$, $v \in L^{p'}(\Omega)$ mit $(\beta v)' \in L^{p'}(\Omega)$. Am Randpunkt $t \in \partial\Omega$ gelte mit einer Konstante $f \in \mathbb{C}$*

$$(\beta v)(t) = \beta(t)f.$$

Dann gilt

$$(\beta uv)(t) = (\beta u)(t)f.$$

Beweis. Wir wählen $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ beliebig, so daß $g(t) = f$. Für $\tilde{v} := v - g$ gilt

$$(\beta \tilde{v})(t) = 0.$$

Wegen Satz 2.1 und Satz 2.2 existieren Funktionenfolgen $(u_n), (\tilde{v}_n) \subset C^1(\Omega)$, mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } L^p(\Omega), \\ (\beta u_n)' &\rightarrow (\beta u)' && \text{in } L^p(\Omega), \\ \tilde{v}_n &\rightarrow \tilde{v} && \text{in } L^{p'}(\Omega), \\ (\beta \tilde{v}_n)' &\rightarrow (\beta \tilde{v})' && \text{in } L^{p'}(\Omega), \\ (\beta \tilde{v}_n)(t) &= 0 && \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und, umgeschrieben auf $v_n := \tilde{v}_n + g$,

$$\begin{aligned} v_n &\rightarrow v && \text{in } L^{p'}(\Omega), \\ (\beta v_n)' &\rightarrow (\beta v)' && \text{in } L^{p'}(\Omega), \\ (\beta v)(t) &= \beta(t)f && \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Folgerung 2.1 gilt somit auch

$$(\beta u_n)(t) \rightarrow (\beta u)(t), \quad (2.27)$$

$$(\beta u_n v_n)(t) \rightarrow (\beta uv)(t). \quad (2.28)$$

Da aber $(\beta u_n v_n)(t) = (\beta u_n)(t)f$, folgt aus (2.27) und (2.28) die Behauptung. \square

Diese Folgerungen werden wir im Abschnitt 2.3.1 an einigen Stellen brauchen, ohne daß wir immer im einzelnen darauf hinweisen.

Wir werden jetzt auf Existenz- und Eindeutigkeit von Lösungen für Differentialgleichungen erster Ordnung eingehen. Diese wird man am ehesten erwarten, wenn man an genau einem der beiden Randpunkte des Intervalls den Funktionswert vorgibt. Läßt man jedoch zu, daß die Funktion β im Inneren von Ω ihr Vorzeichen wechselt, so trifft das im allgemeinen nicht zu, denn es können sogenannte „turning points“ an den Stellen des Vorzeichenwechsels entstehen, was dazu führen kann, daß das Problem in mehrere voneinander unabhängige Probleme zerfällt.

Die unmittelbar folgenden Aussagen finden sich bereits in wesentlich allgemeinerem Rahmen in [4]. Wir führen sie dennoch aus, damit wir im weiteren Verlauf besser auf einzelne Aspekte der Vorgehensweise zurückgreifen können.

Zunächst führen wir noch einige Notationen ein. Die Menge $\partial\Omega = \{a, b\}$ der beiden Randpunkte zerlegen wir in

$$\partial\Omega = \Gamma_- \dot{\cup} \Gamma_0 \dot{\cup} \Gamma_+,$$

mit

$$\begin{aligned}\Gamma_- &:= \{t \in \{a, b\} \mid (d\beta)(t) < 0\}, \\ \Gamma_0 &:= \{t \in \{a, b\} \mid (d\beta)(t) = 0\}, \\ \Gamma_+ &:= \{t \in \{a, b\} \mid (d\beta)(t) > 0\}.\end{aligned}$$

Von jetzt an werden wir uns auf den Fall $p = 2$ beschränken. Ein hochgestellter $*$ soll im folgenden den adjungierten, nicht mehr den dualen, Operator bezeichnen. Das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ sei

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} \, dx.$$

Neben der reellwertigen Funktion $\beta \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ sei eine weitere Funktion $\alpha \in C^0(\bar{\Omega})$ gegeben. Der Differentialoperator L sei definiert durch

$$\begin{aligned}D(L) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^2(\Omega), (\beta u)(t) = 0 \, \forall t \in \Gamma_-\}, \\ Lu &= D_{\beta}u + \alpha u.\end{aligned}$$

Es werden nun Bedingungen angegeben, unter welchen dieser Operator eine beschränkte Inverse besitzt.

Lemma 2.2. *Gilt für eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung*

$$-\frac{1}{2}\beta' + \alpha - \delta \geq 0,$$

so gilt für alle $u \in D(L)$

$$\|(L + c)u\| \geq (\delta + c)\|u\|.$$

Beweis. Wegen Satz 2.2 ist es ausreichend, die Behauptung für den Operator \tilde{L} zu zeigen, mit

$$\begin{aligned}D(\tilde{L}) &= \{u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \mid u(t) = 0 \, \forall t \in \Gamma_-\}, \\ \tilde{L}u &= \beta u' + \alpha u,\end{aligned}$$

denn, da α beschränkt ist, ist L die Abschließung von \tilde{L} . Für eine beliebige

Funktion $u \in D(\tilde{L})$ gilt

$$\begin{aligned}
\Re\left(\int_{\Omega} ((\tilde{L} + c)u)\bar{u} dx\right) &= \int_{\Omega} \Re((\beta u')\bar{u}) + (\alpha + c)|u|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{2}\beta(|u|^2)' + (\alpha + c)|u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\beta|u|^2)' dx + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\beta' + \alpha + c\right)|u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}(d\beta|u|^2)_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\beta' + \alpha + c\right)|u|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}(d\beta|u|^2)_{\Gamma_+} + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\beta' + \alpha + c\right)|u|^2 dx \\
&\geq (\delta + c)\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt aber nach der Hölderschen Ungleichung

$$\left|\int_{\Omega} ((L + c)u)\bar{u} dx\right| \leq \|(L + c)u\| \|u\|.$$

Division durch $\|u\|$ liefert die Behauptung. \square

Entsprechend können wir für die Adjungierte formulieren

Lemma 2.3. *Gilt für eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung*

$$-\frac{1}{2}\beta' + \alpha - \delta \geq 0, \quad (2.29)$$

so gilt für alle $u \in D(L^*)$

$$\|(L + c)^*u\| \geq (\delta + c)\|u\|.$$

Beweis. Aus vorausgegangenen Betrachtungen wissen wir über L^* , daß

$$\begin{aligned}
D(L^*) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^2(\Omega), (\beta u)(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_+\} \\
L^*u &= -E_{\beta}u + \alpha u.
\end{aligned}$$

L^* läßt sich auch schreiben als

$$L^*u = D_{-\beta}u + (-\beta' + \alpha)u.$$

Es liegt also dieselbe Situation wie in Lemma 2.2 vor, nur mit umgekehrter Flußrichtung. Mit $\tilde{\beta} := -\beta$ und $\tilde{\alpha} := -\beta' + \alpha$ und einer Zahl $\delta \in \mathbb{R}$, die (2.29) erfüllt, gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\tilde{\beta}' + \tilde{\alpha} - \delta &= \frac{1}{2}\beta' + (-\beta' + \alpha) - \delta \\
&= -\frac{1}{2}\beta' + \alpha - \delta \geq 0.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2 folgt die Behauptung. \square

Mit diesen Ergebnissen können wir einen Existenz- und Eindeutigkeitsatz zeigen.

Satz 2.3. *Es gelte für eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}$*

$$-\frac{1}{2}\beta' + \alpha - \delta \geq 0. \quad (2.30)$$

Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$

$$\begin{aligned} R(L + c) &= L^2(\Omega), \\ \|(L + c)u\| &\geq (\delta + c)\|u\| \quad \forall u \in D(L), \end{aligned} \quad (2.31)$$

und die Adjungierte L^ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} D(L^*) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid (\beta u)' \in L^2(\Omega), (\beta u)(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_+\}, \\ L^*u &= -E_\beta u + \alpha u. \end{aligned}$$

Beweis. (2.31) wurde in Lemma 2.2 bereits gezeigt. Das bedeutet für $c > -\delta$, daß $R(L + c)$ abgeschlossen ist und die Inverse

$$(L + c)^{-1} : R(L + c) \rightarrow L^2(\Omega)$$

beschränkt ist. Darüberhinaus wurde in Lemma 2.3 bewiesen, daß, ebenfalls für $c > -\delta$,

$$N((L + c)^*) = \{0\}.$$

Nach dem „closed range theorem“, siehe z. B. [35], muß im Fall $c > -\delta$ somit gelten

$$R(L + c) = L^2(\Omega).$$

□

Der Abschätzung (2.31) kann man entnehmen, daß die Vereinigung aller Kreise mit Mittelpunkt $-c$ und Radius $c + \delta$ für $c \geq c_0$ zur Resolventenmenge von L gehört, siehe z. B. Satz 9.3 in [2], dessen Beweis auch für unbeschränkte Operatoren richtig ist. Das bedeutet dann, daß

$$\sigma(L) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \delta\},$$

oder, direkt ausgehend von (2.30),

$$\sigma(L) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \inf_{\Omega}(-\frac{1}{2}\beta' + \alpha)\}.$$

Mit Hilfe von Techniken wie in [11], Abschnitt 6.2, kann man aber über das Spektrum weitere Aussagen machen, indem man gewichtete Normen verwendet. Dazu führen wir die Räume

$$\begin{aligned} C_+^0(\overline{\Omega}) &:= \{u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \exists \kappa > 0 : u \geq \kappa\}, \\ C_+^1(\Omega) &:= \{u \in C^1(\Omega) \mid \exists \kappa > 0 : u \geq \kappa\} \end{aligned}$$

ein. Für eine beliebige Funktion $\psi \in C_+^0(\overline{\Omega})$ definieren wir die gewichtete Norm $\|\cdot\|^\psi$ durch

$$\|u\|^\psi := \|\psi u\|_{L^2(\Omega)},$$

die äquivalent zur kanonischen L^2 -Norm ist. Es gilt

Satz 2.4. *Für eine Funktion $\zeta \in C_+^1(\Omega)$ und eine Konstante $\delta \in \mathbb{R}$ gelte*

$$-\frac{1}{2}(\beta\zeta)' + (\alpha - \delta)\zeta \geq 0. \quad (2.32)$$

Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > \delta$

$$\begin{aligned} R(L + c) &= L^2(\Omega), \\ \|(L + c)u\|^{\zeta^{\frac{1}{2}}} &\geq (\delta + c)\|u\|^{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad \forall u \in D(L). \end{aligned}$$

Beweis. Für beliebige Funktionen $\psi \in C_+^1(\Omega)$ definieren wir den Operator L^ψ durch

$$\begin{aligned} D(L^\psi) &= D(L), \\ L^\psi u &:= \psi L\left(\frac{u}{\psi}\right) \\ &= D_\beta u + \left(-\frac{1}{\psi}\beta\psi' + \alpha\psi\right)u. \end{aligned}$$

Wir wählen $\psi := \zeta^{\frac{1}{2}}$. Wegen (2.32) gilt

$$\left(-\frac{1}{2}\beta' + \alpha - \delta\right)\psi^2 - \psi\beta\psi' = -\frac{1}{2}(\beta\zeta)' + (\alpha - \delta)\zeta \geq 0.$$

Division durch ψ^2 ergibt

$$-\frac{1}{2}\beta' + \left(-\frac{1}{\psi}\beta\psi' + \alpha - \delta\right) \geq 0,$$

und daraus folgt mit Satz 2.3, daß

$$\|(L^\psi + c)w\| \geq (\delta + c)\|w\| \quad \forall w \in D(L).$$

Damit gilt nun für alle $u \in D(L)$

$$\begin{aligned}\|(L+c)u\|^\psi &= \|(L^\psi+c)(\psi u)\| \\ &\geq (\delta+c)\|\psi u\| \\ &= (\delta+c)\|u\|^\psi.\end{aligned}$$

Zu zeigen ist noch die Surjektivität von $(L+c)$. Zu $f \in L^2(\Omega)$ suchen wir eine Funktion $u \in D(L)$ mit $(L+c)u = f$. Nach Satz 2.3 wissen wir, daß $(L^\psi+c)$ surjektiv ist. Also gibt es eine Funktion $w \in D(L)$ mit

$$(L^\psi+c)w = \psi f.$$

Mit $u := \frac{w}{\psi}$ gilt

$$\psi(Lu+cu) = (L^\psi+c)(\psi u) = (L^\psi+c)w = \psi f,$$

und damit

$$(L+c)u = f.$$

□

Für das Spektrum von L heißt das

$$\begin{aligned}\sigma(L) &\subset \bigcap_{\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)} \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \inf_{\Omega} (-\frac{1}{\psi} \beta \psi' - \frac{1}{2} \beta' + \alpha)\} \\ &= \bigcap_{\zeta \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)} \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \inf_{\Omega} \frac{1}{\zeta} (-\frac{1}{2} (\beta \zeta)' + \alpha \zeta)\}.\end{aligned}$$

Konkret kann man für die Funktion ψ z. B. eine Exponentialfunktion wählen. Für $\psi(x) = e^{-\theta x}$ ergibt sich

$$\sigma(L) \subset \bigcap_{\theta \in \mathbb{R}} \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \inf_{\Omega} (\theta \beta - \frac{1}{2} \beta' + \alpha)\}.$$

Damit folgt unmittelbar

Folgerung 2.5. *Falls die Funktion β auf ganz Ω gleichmäßig von der Null wegbeschränkt ist, so gilt*

$$\sigma(L) = \{\}.$$

2.2.2 Differentialoperatoren zweiter Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialoperatoren zweiter Ordnung auf einem beschränkten Intervall (a, b) . Es seien ϵ, β, γ und α reellwertige Funktionen mit $\epsilon, \alpha \in C^0(\overline{\Omega})$, $\beta, \gamma \in C^1(\Omega)$, und es gebe eine Konstante $\kappa > 0$ mit $\epsilon \geq \kappa$ auf ganz Ω . An den Randpunkten $\{a, b\}$ von Ω legen wir homogene Dirichlet- und Neumann-Bedingungen fest.

$$\begin{aligned}\partial\Omega &= \Gamma_D \dot{\cup} \Gamma_N, \\ V &:= \{u \in H^1(\Omega) \mid u(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_D\}.\end{aligned}$$

Der Differentialoperator A in $L^2(\Omega)$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned}D(A) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in V, (\epsilon u')' \in L^2(\Omega), (\epsilon u' + \beta u)(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_N\}, \\ Au &= -(\epsilon u' + \beta u)' + \gamma u' + \alpha u.\end{aligned}$$

Es ist hilfreich, die stetige Sesquilinearform

$$\begin{aligned}a : V \times V &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (v, u) &\mapsto (v', \epsilon u') + (\beta v', u) + (v, \gamma u') + (v, \alpha u)\end{aligned}$$

einzuführen. Zwischen a und A besteht folgender Zusammenhang.

Lemma 2.4. Für $u \in D(A)$ und $v \in V$ gilt

$$a(v, u) = (v, Au).$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar durch partielle Integration. \square

Lemma 2.5. Seien $f \in L^2(\Omega)$, $u \in V$ mit

$$a(v, u) = (v, f) \quad \forall v \in V. \tag{2.33}$$

Dann ist $u \in D(A)$ und $Au = f$.

Beweis. Für alle $v \in V$, gilt

$$(v', \epsilon u') = (\beta v', u) + (v, -\gamma u' - \alpha u + f).$$

Falls $v \in C_0^\infty(\Omega)$, folgt mit partieller Integration

$$(v', \epsilon u') = (v, (\beta u)' - \gamma u' - \alpha u + f).$$

Das bedeutet aber, daß

$$\begin{aligned}(\epsilon u')' &\in L^2(\Omega), \\ -(\epsilon u')' &= (\beta u)' - \gamma u' - \alpha u + f.\end{aligned} \tag{2.34}$$

Noch zu zeigen ist, daß

$$(\epsilon u' + \beta u)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_N.$$

Für alle $v \in V$ gilt wegen (2.33) und (2.34)

$$(v, -(\epsilon u' + \beta u)' + \gamma u' + \alpha u) - a(v, u) = 0,$$

und damit

$$(dv(\epsilon u' + \beta u))_{\Gamma_N} = 0.$$

Da $v(t)$ für $t \in \Gamma_N$ beliebige Werte annehmen kann, ist die Behauptung gezeigt. \square

Aus den beiden Lemmata geht hervor, daß für beliebige Funktionen $u \in V$, $f \in L^2(\Omega)$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

$$a(v, u) = (v, f) \quad \forall v \in V$$

und

$$u \in D(A), \quad Au = f.$$

Wir zeigen nun die Definitheit der Sesquilinearform a . Das sichert die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Problems $Au = f$.

Lemma 2.6. *Falls*

$$d(t)(\beta + \gamma)(t) \geq 0 \quad \forall t \in \Gamma_N, \quad (2.35)$$

und für eine Konstante $\delta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$-\frac{1}{2}(\beta + \gamma)' + \alpha - \delta \geq 0 \quad (2.36)$$

auf ganz Ω gilt, so erfüllt a die Abschätzung

$$\Re(a(v, v)) \geq \int_{\Omega} \epsilon |v'|^2 dx + \delta \int_{\Omega} |v|^2 dx \quad \forall v \in V. \quad (2.37)$$

Beweis. Wegen

$$(|v|^2)' = 2\Re(v\bar{v}')$$

gilt

$$\begin{aligned} \Re(a(v, v)) &= \int_{\Omega} \epsilon |v'|^2 dx + \int_{\Omega} \beta v' \bar{v} dx + \int_{\Omega} v \overline{\gamma v'} dx + \int_{\Omega} \alpha |v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \epsilon |v'|^2 dx + \int_{\Omega} (\beta + \gamma) \Re(v\bar{v}') dx + \int_{\Omega} \alpha |v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \epsilon |v'|^2 dx + \frac{1}{2} (d(\beta + \gamma) |v|^2)_{\Gamma_N} + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}(\beta + \gamma)' + \alpha\right) |v|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} \epsilon |v'|^2 dx + \delta \int_{\Omega} |v|^2 dx. \end{aligned}$$

\square

Nehmen wir zunächst bis auf weiteres an, daß in Lemma 2.6 $\delta > 0$ gewählt werden kann. In diesem Fall ist nämlich die Sesquilinearform a H^1 -elliptisch, und somit läßt sich der Satz von Lax-Milgram anwenden. Aus diesem folgt die Existenz eines beschränkten linearen Operators

$$S : V \rightarrow V$$

mit beschränkter Inverse, der der Gleichung

$$(v, u)_{H^1(\Omega)} = a(v, Su) \quad \forall u, v \in V \quad (2.38)$$

genügt. Aufgrund dieses Umstands kann man für eine beliebige rechte Seite $f \in V^*$ eine Funktion $u \in V$ finden mit

$$a(v, u) = \langle v, f \rangle_{V, V^*} \quad \forall v \in V. \quad (2.39)$$

Denn zu f gibt es nach dem Riesz'schen Darstellungssatz eine eindeutig bestimmte Funktion $\varphi \in V$ mit

$$\langle v, f \rangle = (v, \varphi)_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

Man sieht nun mit (2.38), daß

$$u = S^{-1}\varphi$$

die eindeutige Lösung von (2.39) ist. Da $L^2(\Omega)$ durch die Abbildung

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &\rightarrow V^*, \\ f &\mapsto (\cdot, f) \end{aligned} \quad (2.40)$$

in den Raum V^* eingebettet ist, ist auch das Problem

$$a(v, u) = (v, f) \quad \forall v \in V$$

eindeutig lösbar. Es gibt also für alle $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Funktion $u \in D(A)$ mit $Au = f$. Der Abschätzung (2.37) kann man außerdem entnehmen, daß

$$\|Au\| \geq \delta\|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

Falls $\delta > 0$, muß A schon aufgrund dieser Abschätzung eine beschränkte Inverse haben. Falls $\Gamma_D \neq \{\}$, ist auch für $\delta = 0$ und sogar für kleine negative δ die Existenz einer beschränkten Inversen mit der Poincaré-Ungleichung sichergestellt. Es läßt sich aber keine solche Schranke für δ angeben, die unabhängig von ϵ ist. Doch gerade der Fall $\epsilon \rightarrow 0$ ist von Interesse.

Wir wollen jetzt die Adjungierte von A bestimmen. Vorher muß sichergestellt werden, daß $D(A)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt. Dazu verwenden wir, daß die Einbettung (2.40) dicht ist. Daraus folgt nämlich durch Anwendung von

S^{-1} , daß $D(A)$ dicht in V liegen muß, damit liegt $D(A)$ auch dicht in $L^2(\Omega)$. Aus den Eigenschaften von A kann man für die Adjungierte A^* direkt folgern, daß A^* surjektiv ist und die Ungleichung

$$\|A^*u\| \geq \delta\|u\| \quad \forall u \in D(A^*)$$

erfüllen muß. Wir definieren die Abbildung \tilde{A} durch

$$\begin{aligned} D(\tilde{A}) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in V, (\epsilon u')' \in L^2(\Omega)\}, \\ \tilde{A}u &= -(\epsilon u' + \gamma u)' + \beta u' + \alpha u. \end{aligned}$$

Man kann mit partieller Integration direkt nachrechnen, daß für alle $u \in D(A)$, $v \in D(\tilde{A})$

$$(Au, v) = a(u, v) = (u, \tilde{A}v)$$

gilt. A^* muß also eine Fortsetzung von \tilde{A} sein. Andererseits ist aber \tilde{A} mit A identisch, bis auf die Tatsache, daß β und γ vertauscht sind. Die Bedingungen (2.35) und (2.36) sind also auch für \tilde{A} erfüllt, und \tilde{A} ist damit surjektiv. Wäre nun A^* eine echte Fortsetzung von \tilde{A} , so könnte A^* nicht injektiv sein. Also ist $A^* = \tilde{A}$.

Diese Betrachtungen bezogen sich auf den Fall $\delta > 0$. Die Aussage über die Adjungierte kann man aber auch auf den allgemeinen Fall übertragen, indem man eine Zahl $c > 0$ so groß wählt, daß

$$-\frac{1}{2}(\beta + \gamma)' + (\alpha + c) - \delta \geq 0.$$

Die Adjungierte von $(A + c)$ läßt sich dann wie oben darstellen, und damit können wir auf die Adjungierte von A schließen. Zusammenfassend haben wir

Satz 2.5. *Es gelte (2.35). Dann ist A ein abgeschlossener Operator in $L^2(\Omega)$ mit dichtem Definitionsbereich. Die Adjungierte A^* ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} D(A^*) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in V, (\epsilon u')' \in L^2(\Omega)\}, \\ A^*u &= -(\epsilon u' + \gamma u)' + \beta u' + \alpha u. \end{aligned}$$

Falls für eine Zahl $\delta \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$-\frac{1}{2}(\beta + \gamma)' + \alpha - \delta \geq 0 \tag{2.41}$$

gilt, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$

$$\begin{aligned} R(A + c) &= L^2(\Omega), \\ \|(A + c)u\| &\geq (\delta + c)\|u\| \quad \forall u \in D(A). \end{aligned}$$

Wie bei den Differentialoperatoren erster Ordnung können wir die Aussage über das Spektrum von A verallgemeinern, indem wir positive Multiplikatorfunktionen verwenden. Für beliebige Funktionen $\psi \in C_+^0(\overline{\Omega})$ sei dazu $(\cdot, \cdot)^\psi$ das zur Norm $\|\cdot\|^\psi$ gehörende Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$, und für $\zeta \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)$ definieren wir die stetige Sesquilinearform

$$\begin{aligned} a^\zeta : V \times V &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (v, u) &\rightarrow a(\zeta v, u). \end{aligned}$$

Für beliebige Funktionen $u \in V$ und $f \in L^2(\Omega)$ sind dann folgende Aussagen äquivalent:

$$a^\zeta(v, u) = (v, f)^{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad \forall v \in V$$

und

$$u \in D(A), \quad Au = f.$$

Entsprechend zu Lemma 2.6 gilt

Lemma 2.7. *Gegeben sei eine Funktion $\zeta \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)$ mit $(\epsilon\zeta') \in C^1(\Omega)$, die außerdem in allen Neumann-Randpunkten $t \in \Gamma_N$ differenzierbar sei. Für ζ gelte*

$$d(t)(\epsilon\zeta' + (\beta + \gamma)\zeta)(t) \geq 0 \quad \forall t \in \Gamma_N \quad (2.42)$$

und, mit einer Konstante $\delta \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{1}{2}(\epsilon\zeta' + (-\beta + \gamma)\zeta)' + (-\beta' + \alpha - \delta)\zeta \geq 0. \quad (2.43)$$

Dann erfüllt a^ζ die Abschätzung

$$\Re(a^\zeta(v, v)) \geq \int_{\Omega} \epsilon\zeta|v'|^2 dx + \delta \int_{\Omega} \zeta|v|^2 dx \quad \forall v \in V.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \Re(a^\zeta(v, v)) &= \Re \int_{\Omega} \epsilon(\zeta v)' \overline{v'} + \beta(\zeta v)' \overline{v} + \zeta v \overline{\gamma v'} dx + \int_{\Omega} \alpha\zeta|v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \epsilon\zeta|v'|^2 dx + \int_{\Omega} (\epsilon\zeta' + (\beta + \gamma)\zeta) \Re(v \overline{v'}) dx + \int_{\Omega} (\beta\zeta' + \alpha\zeta)|v|^2 dx. \end{aligned}$$

Mit

$$(|v|^2)' = 2\Re(v \overline{v'})$$

erhalten wir nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
\Re(a^\zeta(v, v)) &= \int_{\Omega} \epsilon \zeta |v'|^2 dx + \frac{1}{2} (d(\epsilon \zeta' + (\beta + \gamma) \zeta) |v|^2)_{\Gamma_N} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\epsilon \zeta' + (\beta + \gamma) \zeta)' |v|^2 dx + \int_{\Omega} (\beta \zeta' + \alpha \zeta) |v|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \epsilon \zeta |v'|^2 dx + \frac{1}{2} (d(\epsilon \zeta' + (\beta + \gamma) \zeta) |v|^2)_{\Gamma_N} \\
&\quad \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} (\epsilon \zeta' + (-\beta + \gamma) \zeta)' + (-\beta' + \alpha) \zeta \right) |v|^2 dx \\
&\geq \int_{\Omega} \epsilon \zeta |v'|^2 dx + \delta \int_{\Omega} \zeta |v|^2 dx.
\end{aligned}$$

□

Damit können wir Satz 2.5 auf die $\|\cdot\|^\psi$ -Norm übertragen. Es gilt

Satz 2.6. *Gegeben sei eine Funktion $\zeta \in C_+^1(\Omega)$ mit $(\epsilon \zeta') \in C^1(\Omega)$, die außerdem an allen Neumann-Randpunkten $t \in \Gamma_N$ differenzierbar ist. Für ζ gelte (2.42). Dann ist die Adjungierte A^* gegeben durch*

$$\begin{aligned}
D(A^*) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in V, (\epsilon u')' \in L^2(\Omega)\}, \\
A^*u &= -(\epsilon u' + \gamma u)' + \beta u' + \alpha u.
\end{aligned}$$

Falls (2.43) mit einer Konstante $\delta \in \mathbb{R}$ gilt, dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$.

$$\begin{aligned}
R(A + c) &= L^2(\Omega), \\
\|(A + c)u\|^{\zeta^{\frac{1}{2}}} &\geq (\delta + c) \|u\|^{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad \forall u \in D(A).
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.1. Satz 2.5 ist nur dann anwendbar, wenn (2.35) gilt. In Satz 2.6 läßt sich hingegen stets eine zulässige Funktion ζ finden, die (2.42) erfüllt. Wie wir später noch sehen werden, ermöglichen diese Sätze einen einfachen Zugang zu Problemen der Form

$$\frac{du}{dt} = -Au$$

über Halbgruppentheorie. Satz 2.6 gibt für die durch $-A$ erzeugte Halbgruppe $S(t)$ eine zur kanonischen L^2 -Norm äquivalente Norm $\|\cdot\|^\psi$ an, für welche mit einer Zahl $\omega \in \mathbb{R}$

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$$

gilt. Dies ist für jede C^0 -Halbgruppe prinzipiell möglich, siehe dazu auch [27], Abschnitt 1.5.

Über das Spektrum von A läßt sich jetzt sagen, daß

$$\sigma(A) \subset \bigcap_{\zeta} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \inf_{\Omega} \frac{1}{\zeta} \left(-\frac{1}{2} (\epsilon \zeta' + (\beta + \gamma) \zeta)' + \beta \zeta' + \alpha \zeta \right) \right\},$$

wobei für ζ alle Funktionen, die in Satz 2.6 erlaubt sind, eingesetzt werden dürfen. Im Fall $\epsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ erhalten wir

$$\sigma(A) \subset \bigcap_{\theta} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \geq \inf_{\Omega} \left(-2\epsilon\theta^2 + (\epsilon' - \beta + \gamma)\theta - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)' + \alpha \right) \right\},$$

wenn wir die Schar der Exponentialfunktionen

$$\zeta(x) = e^{-2\theta x}$$

einsetzen.

Im folgenden werden ähnliche Resultate im Zusammenhang mit der Maximumnorm hergeleitet. Ein guter Ausgangspunkt dafür sind Maximumprinzipien, wie sie in [28] zu finden sind. Einen umfassenden Überblick, auch im Hinblick auf singular gestörte Probleme, gibt [9]. Die folgenden Ausführungen sind in Anlehnung an [28]. Einziger Unterschied unserer Situation zu der in [28] ist die Tatsache, daß der Differentialausdruck zweiter Ordnung in Divergenzform vorliegt. Das Maximumprinzip ist aber dennoch gültig, und läßt sich mit der gleichen Technik beweisen. Wir definieren dazu die Abbildung A durch

$$\begin{aligned} D(A) &= \{ u \in C^0(\overline{\Omega}) \mid u \in C^1(\Omega), (\epsilon u') \in C^1(\Omega) \}, \\ Au &= -(\epsilon u')' + \gamma u' + \alpha u. \end{aligned}$$

Lemma 2.8. *Seien $u_{00}, u_{01} \in \mathbb{C}$ und $f \in C^0(\overline{\Omega})$ gegeben. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $\epsilon u' \in C^1(\overline{\Omega})$, welche das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} Au &= f, \\ u(a) &= u_{00}, \\ u'(a) &= u_{01} \end{aligned}$$

löst.

Beweis. Das Anfangswertproblem läßt sich auf ein System von Differentialgleichungen mit zwei Variablen zurückführen, indem man $u_1 := u$ und $u_2 := \epsilon u'$ setzt. In Matrixschreibweise lautet das

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^{-1} \\ \alpha & \epsilon^{-1}\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}(0) &= \begin{pmatrix} u_{00} \\ \epsilon u_{01} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen ist dieses Anfangswertproblem eindeutig lösbar mit Funktionen $u_1, u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. \square

Diese Existenz- und Eindeutigkeitsaussage wird zunächst benötigt, um Hilfsfunktionen für den Beweis des Maximumprinzips zu konstruieren.

Lemma 2.9. *Es gelte $\alpha \geq 0$. u sei eine reellwertige Funktion auf Ω mit $u \in C^1(\Omega)$, $\epsilon u' \in C^1(\Omega)$ und $Au > 0$ auf ganz Ω . Dann kann u kein lokales Minimum an einer Stelle $c \in \Omega$ annehmen, für welches $u(c) \leq 0$ gilt.*

Beweis. Nehmen wir einmal an, es gibt ein solches Minimum an der Stelle $c \in \Omega$ mit $m := u(c) \leq 0$. Es folgt, daß $u'(c) = 0$, und damit

$$\begin{aligned} (\epsilon u')'(c) &= \gamma u'(c) + \alpha u(c) - (Au)(c) = \alpha m - (Au)(c) < 0, \\ (\epsilon u')(c) &= 0. \end{aligned}$$

Also wechselt $\epsilon u'$, und damit u' , an der Stelle $x = c$ das Vorzeichen. Es gibt eine Zahl $\mu > 0$ mit $u'(x) > 0$ für $x \in (c - \mu, c)$ und $u'(x) < 0$ für $x \in (c, c + \mu)$. Also hat u an der Stelle c ein isoliertes lokales Maximum, ein Widerspruch. \square

Der folgende Satz entspricht Theorem 3 in [28].

Satz 2.7. *Es gelte $\alpha \geq 0$. u sei eine reellwertige Funktion auf Ω mit $u \in C^1(\Omega)$, $\epsilon u' \in C^1(\Omega)$ und $Au \geq 0$ auf ganz Ω . Falls u ein lokales Minimum an einer Stelle $c \in \Omega$ annimmt, für welches gilt $u(c) =: m \leq 0$, so ist $u \equiv m$ auf ganz Ω .*

Beweis. Angenommen, es gibt ein $d \in \Omega$ mit $u(d) > m$. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir uns auf den Fall $d > c$ beschränken. Die Funktion z sei die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} Az &\equiv 1, \\ z(c) &= 0, \\ z'(c) &= -1. \end{aligned}$$

Da $u(d)$ echt größer als m ist, kann man eine Zahl $\kappa > 0$ so klein wählen, daß auch $u_\kappa := u + \kappa z$ an der Stelle d echt größer als m ist. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} u_\kappa(c) &= m, \\ u'_\kappa(c) &< 0, \\ u_\kappa(d) &> m. \end{aligned}$$

Also muß u_κ auf (c, d) ein negatives lokales Minimum annehmen. Da aber

$$Au_\kappa = Au + \kappa Az \geq \kappa > 0,$$

ist das nach Lemma 2.9 ein Widerspruch. \square

Daraus ergibt sich unmittelbar

Folgerung 2.6. *Es gelte $\alpha \geq 0$. $u \in D(A)$ sei eine reellwertige Funktion mit $u(a) \geq 0$, $u(b) \geq 0$ und $Au \geq 0$ auf ganz Ω . Dann ist $u \geq 0$ auf ganz Ω .*

Diesen Sachverhalt können wir, ähnlich wie in [28], mit Hilfe einer positiven Multiplikatorfunktion verallgemeinern, da sich die Aussage von Folgerung 2.6 nur auf das Vorzeichen von u bezieht.

Lemma 2.10. *Angenommen, es gibt eine Funktion $\zeta \in D(A)$ mit $\zeta \geq \kappa > 0$ und*

$$A\zeta \geq 0. \quad (2.44)$$

Sei nun $u \in D(A)$ eine reellwertige Funktion mit $u(a) \geq 0$, $u(b) \geq 0$ und $Au \geq 0$ auf ganz Ω . Dann ist $u \geq 0$ auf ganz Ω .

Beweis. Wir folgen der Beweisidee in [28] und definieren den Operator A^ζ durch

$$\begin{aligned} A^\zeta u &:= \frac{1}{\zeta} A(\zeta u) \\ &= \frac{1}{\zeta} \left(-(\epsilon(\zeta u))' + \gamma(\zeta u)' + \alpha(\zeta u) \right) \\ &= -(\epsilon u)' + \frac{1}{\zeta} (-2\epsilon\zeta' + \gamma\zeta)u' + \frac{1}{\zeta} (A\zeta)u. \end{aligned}$$

Die Funktion u schreiben wir jetzt als $u = \zeta \tilde{u}$. Es gilt

$$0 \leq \frac{1}{\zeta} A(\zeta \tilde{u}) = A^\zeta \tilde{u}.$$

Wegen (2.44) können wir Folgerung 2.6 anwenden und folgern, daß $\tilde{u} \geq 0$. Damit ist schließlich auch $u \geq 0$. \square

Folgerung 2.6 kann man auch als Vergleichsprinzip verwenden und daraus eine Normabschätzung herleiten. Für Funktionen $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$ definieren wir die Norm $\|\cdot\|^\psi$ als

$$\|u\|_\infty^\psi := \|\psi u\|_\infty.$$

Satz 2.8. *Angenommen, es gibt eine Funktion $\zeta \in D(A)$ mit $\zeta \geq \kappa > 0$ und*

$$A\zeta - \delta\zeta \geq 0, \quad (2.45)$$

mit einer Konstante $\delta > 0$. Dann gilt für alle reellwertigen Funktionen $u \in D(A)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ die Abschätzung

$$\|Au\|_\infty^{\zeta^{-1}} \geq \delta \|u\|_\infty^{\zeta^{-1}}, \quad (2.46)$$

und für alle rechte Seiten $f \in C^0(\overline{\Omega})$ existiert eine Funktion $u \in D(A)$ mit $u(a) = u(b) = 0$ und $Au = f$.

Beweis. Wir können davon ausgehen, daß Au beschränkt ist. Andernfalls betrachten wir (2.46) als erfüllt. Mit dem Operator A^ζ aus dem Beweis von Lemma 2.10 zeigen wir jetzt, daß für alle Funktionen $\tilde{u} \in D(A)$ die Abschätzung

$$\|A^\zeta \tilde{u}\|_\infty \geq \|\tilde{u}\|_\infty,$$

welche äquivalent zur Behauptung des Satzes ist, gilt. Um das Vergleichsprinzip anzuwenden, wählen wir als obere und untere Schranken für \tilde{u} die konstanten Funktionen

$$\begin{aligned}\phi_u &:= \frac{1}{\delta} \|A^\zeta \tilde{u}\|_\infty, \\ \phi_l &:= -\frac{1}{\delta} \|A^\zeta \tilde{u}\|_\infty.\end{aligned}$$

Es gilt

$$A^\zeta \phi_u = \frac{1}{\zeta} (A^\zeta) \phi_u \stackrel{(2.45)}{\geq} \delta \phi_u \geq \delta \left(\frac{1}{\delta} A^\zeta \tilde{u} \right) = A^\zeta \tilde{u}, \quad (2.47)$$

und damit kann man auf die Funktion $\phi_u - \tilde{u}$ Folgerung 2.6 anwenden, denn es gilt

$$\begin{aligned}(\phi_u - \tilde{u})(a) &= \phi_u(a) \geq 0, \\ (\phi_u - \tilde{u})(b) &= \phi_u(b) \geq 0, \\ A^\zeta(\phi_u - \tilde{u}) &= A^\zeta \phi_u - A^\zeta \tilde{u} \stackrel{(2.47)}{\geq} 0.\end{aligned}$$

Es folgt also, daß $\phi_u \geq \tilde{u}$ auf ganz Ω . Analog gilt $\phi_l \leq \tilde{u}$ auf Ω . Also sind ϕ_u und ϕ_l Schranken für \tilde{u} . Sei nun $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Die affine Abbildung

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ u_{01} &\mapsto u(b),\end{aligned}$$

wobei u Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}Au &= f, \\ u(a) &= 0, \\ u'(a) &= u_{01},\end{aligned}$$

ist, muß nach dem bisher gezeigten injektiv sein. Also ist sie auch surjektiv, und die gesuchte Lösung des Randwertproblems muß existieren. \square

Nachfolgend sei noch eine Variante von Satz 2.7 angegeben, die zum Beweis eines Maximumprinzips auf dem Netzwerk nützlich sein wird. Im Falle, daß ein nichtpositives Minimum an einem Randpunkt angenommen wird, kann man nämlich eine Aussage über die Ableitung an diesem Punkt machen. Analog zu Theorem 4 in [28] gilt

Satz 2.9. *Es gelte $\alpha \geq 0$. $u \in D(A)$ sei eine reellwertige Funktion auf Ω mit $Au \geq 0$ auf ganz Ω . Angenommen, u nimmt am Randpunkt $t \in \partial\Omega$ ein lokales Minimum an mit $u(t) =: m \leq 0$. Außerdem existiere die einseitige Ableitung $u'(t)$. Dann ist entweder $d(t)u'(t) < 0$ oder $u \equiv m$ auf ganz Ω .*

Beweis. Der Beweis geht im Prinzip ähnlich wie der von Satz 2.7. Ohne Beeinträchtigung können wir davon ausgehen, daß $t = a$. Da u an der Stelle a ein lokales Minimum besitzt, gibt es eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$m \leq u(x) \quad \forall x \in [a, a + \delta). \quad (2.48)$$

Falls für ein $x \in [a, a + \delta)$ Gleichheit in (2.48) eintritt, liegt auch an der Stelle x ein lokales Minimum vor. In diesem Fall folgt mit Satz 2.7, daß $u \equiv m$ auf ganz Ω . Andernfalls muß ein Punkt $d \in \Omega$ existieren mit $u(d) > m$. Die Funktion z sei die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} Az &\equiv 1, \\ z(a) &= 0, \\ z'(a) &= -1. \end{aligned}$$

Da $u(d)$ echt größer als m ist, kann man eine Zahl $\kappa > 0$ so klein wählen, daß auch $u_\kappa := u + \kappa z$ an der Stelle d echt größer als m ist. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} u_\kappa(a) &= m, \\ u'_\kappa(a) &< 0, \\ u_\kappa(d) &> m. \end{aligned}$$

Also muß u_κ auf (a, d) ein negatives lokales Minimum annehmen. Da aber

$$Au_\kappa = Au + \kappa Az \geq \kappa > 0,$$

ist das nach Lemma 2.9 ein Widerspruch. \square

Folgendes Lemma wird schließlich bei der Konvergenzanalyse in 2.3.3 benutzt. Es sagt aus, daß sich in bestimmten Situationen Grenzsichten für kleine ϵ bilden.

Lemma 2.11. *Es gelte $\alpha \geq 0$. $\epsilon_n \subset C_+^0(\overline{\Omega})$ sei eine Folge von Diffusionskoeffizienten und $(u_n) \subset C^0(\overline{\Omega})$ mit $u_n \in C^1(\Omega)$ und $\epsilon_n u'_n \in C^1(\Omega)$. Außerdem gelte*

$$u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.49)$$

$$f_n := -(\epsilon_n u'_n)' + \gamma u'_n + \alpha u_n \geq \kappa > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.50)$$

$$\epsilon_n u'_n \rightarrow 0 \quad \text{schwach in } L^1(\Omega), \quad (2.51)$$

und am Randpunkt $t \in \Gamma_+$ sei $u_n(t) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(t)(\epsilon_n u'_n)(t) < 0.$$

Beweis. Wir können ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit davon ausgehen, daß $t = b$ und $\gamma \geq m > 0$, indem wir Ω gegebenenfalls spiegeln und anstelle des gesamten Intervalls nur eine Umgebung von t betrachten. Wir konstruieren eine Funktion $v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ mit $v \neq 0$ und

$$v \geq 0, \quad (2.52)$$

$$(-\gamma v)' + \alpha v \leq 0, \quad (2.53)$$

$$v(a) = 0. \quad (2.54)$$

Dazu definieren wir zunächst \tilde{v} als Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \tilde{v}' &= \frac{\alpha}{m} \tilde{v} + 1, \\ \tilde{v}(a) &= 0 \end{aligned}$$

und setzen $v := \frac{\tilde{v}}{\gamma}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned} v(b)\epsilon_n u'_n(b) &\stackrel{(2.54)}{=} (v', \epsilon_n u'_n) + (-\gamma v)' + \alpha v, u_n - (v, f_n) \\ &\stackrel{(2.49), (2.53)}{\leq} (v', \epsilon_n u'_n) - (v, f_n) \\ &\stackrel{(2.50), (2.52)}{\leq} (v', \epsilon_n u'_n) - \kappa \int_{\Omega} v \, dx \\ &\stackrel{(2.51)}{\rightarrow} -\kappa \int_{\Omega} v \, dx, \end{aligned}$$

und da auch $v(b)$ nach Wahl von v positiv ist, folgt die Behauptung. \square

2.2.3 Konvergenzresultate für $\epsilon \rightarrow 0$

Dieser Abschnitt befaßt sich mit der Frage, wie sich die Lösungen der in 2.2.2 betrachteten Differentialgleichungen verhalten, wenn die Diffusionskoeffizienten ϵ gegen Null konvergieren. Derartige Ergebnisse für entsprechende Probleme auf mehrdimensionalen Gebieten finden sich in [11], [5] und [22]. Diese stellen aber auch höhere Anforderungen an die Glattheit der Diffusionskoeffizienten, bzw. setzen voraus, daß diese konstant sind. Aus diesem Grund soll hier ein neuer Zugang erarbeitet werden. Dieser beruht allerdings darauf, daß das Gebiet eindimensional ist.

Daß nicht in jedem Fall mit Konvergenz zu rechnen ist, zeigt schon folgendes einfaches Beispiel. Für konstante Koeffizienten $\epsilon > 0$ ist die Lösung von

$$\begin{aligned} -\epsilon u'' + u' &= 1, \\ u'(0) &= 0, \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben durch

$$u(x) = x - 1 + \epsilon(e^{\frac{1}{\epsilon}} - e^{\frac{x}{\epsilon}}).$$

Läßt man ϵ gegen Null gehen, so konvergiert die Folge dieser Lösungsfunktionen auf $[0, 1]$ punktweise gegen unendlich. Dreht man jedoch die Randbedingungen um und löst

$$\begin{aligned} -\epsilon u'' + u' &= 1, \\ u(0) &= 0, \\ u'(1) &= 0, \end{aligned}$$

so erhält man

$$u(x) = x - \epsilon e^{-\frac{1}{\epsilon}}(1 - e^{\frac{x}{\epsilon}}).$$

Das konvergiert auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen

$$u(x) = x,$$

der Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= 1, \\ u(0) &= 0. \end{aligned}$$

Sei nun $(f_n) \subset L^2(\Omega)$ eine beschränkte Folge von rechten Seiten und (A_n) eine Folge von Differentialoperatoren in $L^2(\Omega)$, wie in 2.2.2 definiert, die sich nur in ihren Diffusionskoeffizienten ϵ unterscheiden, also

$$A_n u = -(\epsilon_n u' + \beta u)' + \gamma u' + \alpha u.$$

Um zunächst Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von

$$A_n u = f_n \tag{2.55}$$

zu erhalten, nehmen wir an, es gibt eine Zahl $\delta > 0$ und eine Funktionenfolge $(\zeta_n) \subset C_+^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß für alle A_n die Voraussetzungen des Satzes 2.6, jeweils mit der Funktion ζ_n und der Konstante δ , erfüllt sind. Satz 2.6 sichert in diesem Fall die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (2.55). Darüberhinaus gilt mit Lemma 2.7 die Abschätzung

$$\int_{\Omega} \epsilon_n \zeta_n |u_n'|^2 dx + \delta \int_{\Omega} \zeta_n |u_n|^2 dx \leq |(u_n, f) \zeta_n^{\frac{1}{2}}|.$$

Um die Beschränktheit der Funktionenfolgen (u_n) und $(\epsilon^{\frac{1}{2}} u_n')$ zu bekommen, fordern wir deshalb zusätzlich, daß es Schranken $m, M > 0$ gibt mit

$$m \leq \zeta_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aus (u_n) können wir somit eine schwach gegen eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge auswählen. Darüberhinaus nehmen wir ab sofort an, daß die rechten Seiten f_n schwach gegen eine Funktion $f \in L^2(\Omega)$ konvergieren, und daß

$$\|\epsilon_n\|_\infty \rightarrow 0.$$

Nehmen wir einmal an, die ganze Folge (u_n) konvergiert schwach gegen u . Für beliebige $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$(v', \epsilon_n u'_n) + (\beta v' - (\gamma v)', u_n) + (v, \alpha u_n) = (v, f_n). \quad (2.56)$$

Wegen

$$\epsilon_n u'_n = \epsilon_n^{\frac{1}{2}} \epsilon_n^{\frac{1}{2}} u'_n \leq \|\epsilon_n\|_\infty^{\frac{1}{2}} C$$

konvergiert $\epsilon_n u'_n$ gegen Null, und Gleichung (2.56) lautet im Limes

$$(\beta v' - (\gamma v)', u) + (v, \alpha u) = (v, f) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Das bedeutet, daß $((-\beta + \gamma)u)' \in L^2(\Omega)$ und

$$((-\beta + \gamma)u)' + (-\gamma' + \alpha)u = f. \quad (2.57)$$

Dadurch ist u jedoch noch nicht eindeutig bestimmt, weil keine Randbedingungen vorgegeben sind.

Über die Konvergenz der Randwerte und -ableitungen können wir dennoch eine Aussage treffen. Für alle $v \in H^1(\Omega)$ folgt aus

$$(v, Au_n) = (v, f)$$

mit partieller Integration

$$\begin{aligned} (dv(-\epsilon_n u'_n + (-\beta + \gamma)u_n))_{\partial\Omega} + (v', \epsilon_n u'_n) + (\beta v' - (\gamma v)', u_n) + (v, \alpha u_n) \\ = (v, f_n), \end{aligned}$$

sowie, wegen (2.57),

$$(dv((-\beta + \gamma)u))_{\partial\Omega} + (\beta v' - (\gamma v)', u) + (v, \alpha u) = (v, f).$$

Da die Funktion v für alle $t \in \partial\Omega$ beliebige Werte annehmen kann, können wir schließen, daß

$$(-\epsilon_n u'_n + (-\beta + \gamma)u_n)(t) \rightarrow ((-\beta + \gamma)u)(t) \quad \forall t \in \partial\Omega. \quad (2.58)$$

Stärkere Aussagen können wir für den folgenden Spezialfall machen.

Lemma 2.12. *Ausgehend von der gegebenen Situation gelte zusätzlich*

$$f_n \rightarrow f \quad \text{stark in } L^2(\Omega),$$

$$\beta = 0,$$

$$\Gamma_D \cap \Gamma_+ = \{\}, \quad (2.59)$$

$$\Gamma_N \cap \Gamma_- = \{\}. \quad (2.60)$$

Außerdem existiere eine Funktion $\zeta \in C_+^1(\Omega)$ und eine Konstante $\kappa > 0$ mit

$$-\frac{1}{2}(\gamma\zeta)' + \alpha\zeta \geq \kappa. \quad (2.61)$$

Dann konvergiert u_n stark in $L^2(\Omega)$ gegen die eindeutig bestimmte Funktion $u \in L^2(\Omega)$ mit $(\gamma u)' \in L^2(\Omega)$ und

$$D_\gamma u + \alpha u = f, \quad (2.62)$$

$$(\gamma u)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_-. \quad (2.63)$$

Darüberhinaus gilt

$$\epsilon_n^{\frac{1}{2}} u_n' \rightarrow 0 \quad \text{stark in } L^2(\Omega). \quad (2.64)$$

Beweis. Alle Funktionen u_n erfüllen die Gleichung

$$(\zeta u_n, f_n) = ((\zeta u_n)', \epsilon_n u_n') + (\zeta u_n, \gamma u_n') + (\zeta u_n, \alpha u_n). \quad (2.65)$$

Mit

$$g := -\frac{1}{2}(\gamma\zeta)' + \alpha\zeta$$

folgt aus (2.60) und (2.65) mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \Re(\zeta u_n, f_n) - \Re(\zeta' u_n, \epsilon_n u_n') &= \int_{\Omega} \epsilon_n \zeta |u_n'|^2 dx + \frac{1}{2}(d\gamma\zeta |u_n|^2)_{\Gamma_+} \\ &+ \int_{\Omega} g |u_n|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Wir wissen bereits, daß u_n schwach gegen eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ konvergiert mit $(\gamma u)' \in L^2(\Omega)$ und (2.62). Es gilt also

$$\Re(\zeta u, f) = \frac{1}{2}(d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_-} + \frac{1}{2}(d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_+} + \int_{\Omega} g |u|^2 dx. \quad (2.67)$$

Da nun u_n schwach gegen u , f_n stark gegen f und $\epsilon_n u_n'$ stark gegen Null konvergieren, konvergiert die linke Seite von (2.66) gegen die linke Seite von (2.67), und dasselbe gilt damit auch für die rechte Seite, also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \epsilon_n \zeta |u_n'|^2 dx + \frac{1}{2}(d\gamma\zeta |u_n|^2)_{\Gamma_+} + \int_{\Omega} g |u_n|^2 dx \right) \\ = \frac{1}{2}(d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_-} + \frac{1}{2}(d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_+} + \int_{\Omega} g |u|^2 dx \end{aligned}$$

Andererseits haben wir jedoch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon_n \zeta |u'_n|^2 dx &\geq 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g |u_n|^2 dx &\geq \int_{\Omega} g |u|^2 dx, \quad \text{wegen } u_n \xrightarrow{w} u \text{ und } g \geq \kappa > 0, \\ (d\gamma\zeta |u_n|^2)_{\Gamma_+} &\rightarrow (d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_+}, \quad \text{wegen (2.58) und (2.59),} \\ 0 &\geq (d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_-}. \end{aligned}$$

Das alles läßt sich nur in Einklang bringen, wenn

$$\int_{\Omega} \epsilon_n \zeta |u'_n|^2 dx \rightarrow 0, \quad (2.68)$$

$$\int_{\Omega} g |u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} g |u|^2 dx, \quad (2.69)$$

$$0 = (d\gamma\zeta |u|^2)_{\Gamma_-}. \quad (2.70)$$

Da wegen (2.61) g eine von der Null wegbeschränkte Funktion ist, impliziert (2.69) die Konvergenz der Normen, die zusammen mit der schwachen Konvergenz die starke Konvergenz von u_n gegen u ergibt. Aus (2.70) ergibt sich schließlich (2.63), wegen

$$\zeta(t) |(\gamma u)(t)|^2 = \gamma(t) (\gamma \zeta |u|^2(t)) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_-.$$

Daß u durch 2.62 und 2.63 eindeutig bestimmt ist, sagt Satz 2.4 aus. \square

Verzichtet man in Lemma 2.12 auf die Voraussetzung (2.59), so kann bei $\Gamma_+ \cap \Gamma_D$ eine Grenzschicht auftreten. Wie in [22], Kapitel V.1, konstruieren wir dazu eine Hilfsfunktion, die auf Γ_+ verschwindet und so die Grenzschicht auslöscht. Auf diese Weise können wir die starke Konvergenz von u_n gegen u zeigen. Lediglich (2.64) läßt sich unter diesen schwächeren Voraussetzungen nicht mehr beweisen.

Satz 2.10. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 2.12 bis auf (2.59) erfüllt. Dann konvergiert u_n stark in $L^2(\Omega)$ gegen die eindeutig bestimmte Funktion $u \in L^2(\Omega)$ mit $(\gamma u)' \in L^2(\Omega)$ und*

$$D_\gamma u + \alpha u = f, \quad (2.71)$$

$$(\gamma u)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_-. \quad (2.72)$$

Beweis. Wir konstruieren eine Funktion $\tilde{\zeta} \in C^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &\geq 0, \\ \tilde{g} := -\frac{1}{2}(\gamma \tilde{\zeta})' + \alpha \tilde{\zeta} &\geq \tilde{\kappa} > 0, \\ \tilde{\zeta}(t) &= 0 \quad \forall t \in \Gamma_+, \\ \tilde{\zeta}(t) &> 0 \quad \forall t \in \Gamma_-. \end{aligned}$$

Dazu wählen wir eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned}\varphi &\geq 0, \\ -\frac{1}{2}(\gamma\zeta)\varphi' + \kappa\varphi &\geq \tilde{\kappa} > 0, \\ \varphi(t) &= 0 \quad \forall t \in \Gamma_+, \\ \varphi(t) &> 0 \quad \forall t \in \Gamma_-.\end{aligned}$$

Da $(\gamma\zeta)$ in einer Umgebung von Γ_+ nicht das Vorzeichen wechselt, ist es immer möglich, eine solche Funktion anzugeben, wie man sich anhand von Abbildung 2.1 klarmachen kann. Für $\tilde{\zeta} := \zeta\varphi$ gilt dann

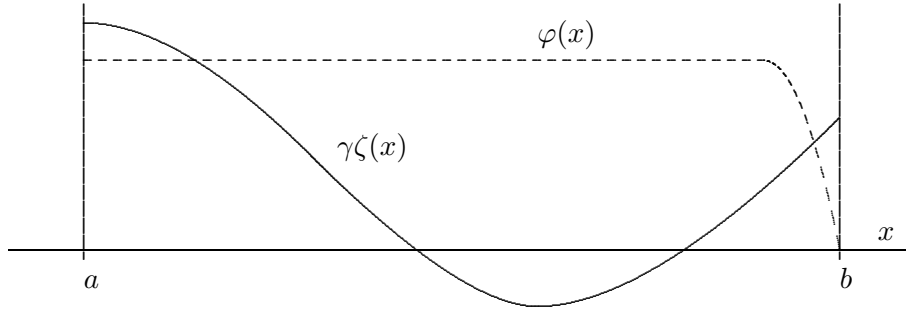


Abbildung 2.1: Wahl der Funktion φ , hier: $\Gamma_- = \{a\}$, $\Gamma_+ = \{b\}$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(\gamma\tilde{\zeta})' + \alpha\tilde{\zeta} &= -\frac{1}{2}(\gamma\zeta)\varphi' + \left(-\frac{1}{2}(\gamma\zeta)' + \alpha\zeta\right)\varphi \\ &\geq -\frac{1}{2}(\gamma\zeta)\varphi' + \kappa\varphi \\ &\geq \tilde{\kappa}.\end{aligned}$$

Genau wie im Beweis von Lemma 2.12 erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \epsilon_n \tilde{\zeta} |u'_n|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \int_{\Omega} \tilde{g} |u_n|^2 dx &\rightarrow \int_{\Omega} \tilde{g} |u|^2 dx, \\ 0 &= (d\gamma\tilde{\zeta}|u|^2)_{\Gamma_-},\end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. \square

Mit diesem Resultat können wir schließlich, mit Hilfe der Adjungierten, auch dann eine Konvergenzaussage machen, wenn nur schwache Konvergenz der rechten Seite vorliegt. Die beiden folgenden Sätze umfassen die Situation inhomogener Dirichlet-Randbedingungen, wie sie bei der Konvergenzanalyse

auf den Netzwerken im Hinblick auf die einzelnen Kanten auftreten wird. Da in den beiden Sätzen nur Dirichlet-Randbedingungen auftreten, können wir die Koeffizienten β und γ zusammenfassen und uns auf den Fall $\beta = 0$ beschränken.

Satz 2.11. $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ sei eine Folge von Funktionen mit

$$(\epsilon_n u_n')' \in L^2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Randwerte von (u_n) seien beschränkt, d. h. es existiert eine Zahl $M > 0$ mit

$$|u_n(t)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in \partial\Omega.$$

Darüberhinaus nehmen wir an, es existieren Funktionen $u, f \in L^2(\Omega)$ und Randwerte $u_-(t)$ für alle $t \in \Gamma_-$ mit

$$f_n := -(\epsilon_n u_n')' + \gamma u_n' + \alpha u_n \xrightarrow{w} f, \quad (2.73)$$

$$u_n \xrightarrow{w} u, \quad (2.74)$$

$$u_n(t) \rightarrow u_-(t) \quad \forall t \in \Gamma_-. \quad (2.75)$$

Dann gilt

$$(\gamma u)' \in L^2(\Omega), \quad (2.76)$$

$$D_\gamma u + \alpha u = f, \quad (2.77)$$

$$(\gamma u)(t) = \gamma(t)u_-(t) \quad \forall t \in \Gamma_-. \quad (2.78)$$

Beweis. (2.76) und (2.77) werden mit den Bemerkungen zu Beginn dieses Abschnitts klar. Für den Beweis von (2.78) können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$-\frac{1}{2}\gamma' + \alpha \geq \kappa > 0. \quad (2.79)$$

Ansonsten wählen wir eine Konstante C genügend groß, so daß mit $\tilde{\alpha} := \alpha + C$

$$-\frac{1}{2}\gamma' + \tilde{\alpha} \geq \kappa > 0.$$

Anstelle von (2.73) gilt jetzt mit $\tilde{f} := f + Cu$

$$\tilde{f}_n := -(\epsilon_n u_n')' + \gamma u_n' + \tilde{\alpha} u_n \xrightarrow{w} \tilde{f}.$$

Sei nun $g \in L^2(\Omega)$ beliebig aber fest vorgegeben. Wegen (2.79) gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $w_n \in H_0^1(\Omega)$ mit $(\epsilon_n w_n')' \in L^2(\Omega)$ und

$$-(\epsilon_n w_n' + \gamma w_n)' + \alpha w_n = g.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$(u_n, g) = -(du_n \epsilon_n w'_n)_{\partial\Omega} + (f_n, w_n). \quad (2.80)$$

Aus Satz 2.10 wissen wir, daß w_n stark in $L^2(\Omega)$ gegen die eindeutig bestimmte Funktion w mit $(\gamma w)' \in L^2(\Omega)$ und

$$-(\gamma w)' + \alpha w = g, \quad (2.81)$$

$$(\gamma w)(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_+ \quad (2.82)$$

konvergiert. Wegen der starken Konvergenz von w_n folgt aus (2.80), daß

$$(du_n \epsilon_n w'_n)_{\partial\Omega} \rightarrow (f, w) - (u, g).$$

Andererseits gilt aber wegen (2.77), (2.81) und (2.82) auch

$$-(d\gamma u w)_{\Gamma_-} = (f, w) - (u, g).$$

Insgesamt ergibt sich also

$$(du_n \epsilon_n w'_n)_{\partial\Omega} \rightarrow -(d\gamma u w)_{\Gamma_-}. \quad (2.83)$$

Das Verhalten der linken Seite dieser Gleichung kennen wir aber auch aufgrund der gegebenen Voraussetzungen. Da w_n jeweils Lösungen von Dirichlet-Problemen sind, gilt wegen (2.58)

$$\epsilon_n w'_n(t) \rightarrow -(\gamma w)(t) \quad \forall t \in \partial\Omega.$$

Auf Γ_+ verschwindet (γw) wegen (2.82), und auf Γ_- konvergiert u_n gegen u_- . Es gilt deshalb

$$(du_n \epsilon_n w'_n)_{\partial\Omega} \rightarrow -(d\gamma u_- w)_{\Gamma_-}. \quad (2.84)$$

(2.83) und (2.84) ergeben schließlich

$$(d\gamma u w)_{\Gamma_-} = (d\gamma u_- w)_{\Gamma_-}. \quad (2.85)$$

Diese Gleichung muß insbesondere für alle $w \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ mit $w(t) = 0$ für alle $t \in \Gamma_+$ gelten, denn man kann

$$g = -(\gamma w)' + \alpha w$$

wählen. Da man so beliebige Randwerte für w auf Γ_- erzeugen kann, folgt

$$(\gamma u)(t) = \gamma(t)u_-(t) \quad \forall t \in \Gamma_-.$$

□

Ausgehend davon können wir bei starker Konvergenz der rechten Seiten mit der Technik, die bereits in den Beweisen von Lemma 2.12 und Satz 2.10 verwendet wurde, auch die starke Konvergenz von u_n gegen u zeigen.

Satz 2.12. $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ sei eine Folge von Funktionen mit

$$(\epsilon_n u_n')' \in L^2(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Randwerte von (u_n) seien beschränkt, d. h. es existiert eine Zahl $M > 0$ mit

$$|u_n(t)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in \partial\Omega.$$

Darüberhinaus nehmen wir an, es existieren Funktionen $u, f \in L^2(\Omega)$ und Randwerte $u_-(t)$ für alle $t \in \Gamma_-$ mit

$$f_n := -(\epsilon_n u_n')' + \gamma u_n' + \alpha u_n \rightarrow f, \quad (2.86)$$

$$u_n \xrightarrow{w} u, \quad (2.87)$$

$$\epsilon_n u_n' \rightarrow 0, \quad (2.88)$$

$$u_n(t) \rightarrow u_-(t) \quad \forall t \in \Gamma_-. \quad (2.89)$$

Außerdem existiere eine Funktion $\zeta \in C_+^1(\Omega)$ und eine Konstante $\kappa > 0$ mit

$$-\frac{1}{2}(\gamma\zeta)' + \alpha\zeta \geq \kappa.$$

Dann konvergiert u_n sogar stark gegen u , und es gilt

$$\begin{aligned} (\gamma u)' &\in L^2(\Omega), \\ D_\gamma u + \alpha u &= f, \\ (\gamma u)(t) &= \gamma(t)u_-(t) \quad \forall t \in \Gamma_-. \end{aligned}$$

Beweis. Da unsere Voraussetzungen stärker sind als in Satz 2.11, können wir von schwacher Konvergenz der Folge u_n gegen u ausgehen. Daß u_n auch stark gegen u konvergiert, ist noch zu zeigen. Dazu nehmen wir, wie im Beweis von Satz 2.10, eine Funktion $\tilde{\zeta} \in C^1(\Omega)$ zu Hilfe mit

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &\geq 0, \\ \tilde{g} := -\frac{1}{2}(\gamma\tilde{\zeta})' + \alpha\tilde{\zeta} &\geq \tilde{\kappa} > 0, \\ \tilde{\zeta}(t) &= 0 \quad \forall t \in \Gamma_+, \\ \tilde{\zeta}(t) &> 0 \quad \forall t \in \Gamma_-. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt u_n die variationelle Gleichung

$$(\tilde{\zeta}u_n, f_n) + (d\tilde{\zeta}u_n \epsilon_n u_n')_{\Gamma_- \cup \Gamma_0} = ((\tilde{\zeta}u_n)', \epsilon_n u_n') + (\tilde{\zeta}u_n, \gamma u_n') + (\tilde{\zeta}u_n, \alpha u_n). \quad (2.90)$$

Mit

$$g := -\frac{1}{2}(\gamma\tilde{\zeta})' + \alpha\tilde{\zeta}$$

folgt nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \Re(\tilde{\zeta}u_n, f_n) + \Re(d\tilde{\zeta}u_n\epsilon_n u_n')_{\Gamma_- \cup \Gamma_0} - \Re(\tilde{\zeta}'u_n, \epsilon_n u_n') &= \int_{\Omega} \epsilon_n \tilde{\zeta} |u_n'|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2}(d\tilde{\zeta}\gamma|u_n|^2)_{\Gamma_-} + \int_{\Omega} g|u_n|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Unabhängig davon erhalten wir, ebenfalls mit partieller Integration, für u die Gleichung

$$\Re(\tilde{\zeta}u, f) = \frac{1}{2}(d\tilde{\zeta}\gamma|u_-|^2)_{\Gamma_-} + \int_{\Omega} g|u|^2 dx. \quad (2.92)$$

Wir wollen jetzt die in (2.91) vorkommenden Terme einzeln untersuchen. Wegen der schwachen Konvergenz von u_n gegen u und der starken Konvergenz von f_n gegen f gilt

$$(\tilde{\zeta}u_n, f_n) \rightarrow (\tilde{\zeta}u, f).$$

Für alle $t \in \Gamma_-$ gilt nach Voraussetzung $u_n(t) \rightarrow u_-(t)$, und da wir ja auch schon wissen, daß $(\gamma u)(t) = \gamma(t)u_-(t)$, konvergiert wegen (2.58) $\epsilon_n u_n'(t)$ gegen Null. Zusammen ergibt dies

$$(d\tilde{\zeta}u_n\epsilon_n u_n')_{\Gamma_-} \rightarrow 0.$$

Für $t \in \Gamma_0$ können wir (2.58) direkt entnehmen, daß $\epsilon_n u_n'(t)$ gegen Null konvergiert. Ebenfalls wegen $u_n(t) \rightarrow u_-(t)$ konvergiert $\gamma(t)|u_n(t)|^2$ gegen $\gamma(t)|u_-(t)|^2$. Der noch verbleibende Randterm $(d\tilde{\zeta}\gamma|u_n|^2)_{\Gamma_-}$ konvergiert deshalb gegen $(d\tilde{\zeta}\gamma|u_-|^2)_{\Gamma_-}$. Der Vergleich von (2.91) und (2.92) liefert schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \epsilon_n \tilde{\zeta} |u_n'|^2 dx + \int_{\Omega} g|u_n|^2 dx = \int_{\Omega} g|u|^2 dx.$$

Da aber andererseits

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon_n \tilde{\zeta} |u_n'|^2 dx &\geq 0, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g|u_n|^2 dx &\geq \int_{\Omega} g|u|^2 dx, \quad \text{wegen } u_n \xrightarrow{w} u \text{ und } \tilde{g} \geq \tilde{\kappa} > 0, \end{aligned}$$

muß gelten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \epsilon_n \tilde{\zeta} |u_n'|^2 dx &\rightarrow 0, \\ \int_{\Omega} g|u_n|^2 dx &\rightarrow \int_{\Omega} g|u|^2 dx. \end{aligned}$$

Da g eine von der Null wegbeschränkte Funktion ist, impliziert dies die Konvergenz der Normen, die zusammen mit der schwachen Konvergenz die starke Konvergenz von u_n gegen u ergibt. \square

2.3 Lineare Differentialoperatoren auf einem Netzwerk

2.3.1 Differentialoperatoren erster Ordnung

Diese Operatoren sind für uns in erster Linie im Zusammenhang mit dem Grenzfall $\epsilon_i \rightarrow 0$ im Bezug auf den in 2.1 geschilderten Kontext interessant. Wir beschränken uns daher auf eine relativ spezielle Situation, eben auf die, welche bei der Konvergenzanalyse in 2.3.3 auftreten wird.

Mit den reellwertigen Koeffizienten $\alpha_i \in C^0(\overline{\Omega_i})$ und $\beta_i \in C^1(\Omega_i)$ definieren wir den Operator \mathcal{L} im Raum $H = \prod_{i \in \mathcal{I}} L^2(\Omega_i)$ zunächst durch

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}) &= \{(u_i)_{i \in \mathcal{I}} \in H \mid (\beta_i u_i)' \in L^2(\Omega_i) \forall i \in \mathcal{I}\}, \\ (\mathcal{L}u)_i &= D_{\beta_i} u_i + \alpha_i u_i. \end{aligned}$$

Wir geben jetzt eine Klasse von Knotenbedingungen an, durch die der Definitionsbereich von \mathcal{L} eingeschränkt werden kann. Dazu spalten wir für jeden Knoten $J \in \mathcal{J}$ die Menge \mathcal{I}_J der adjazenten Kanten auf in die Mengen

$$\mathcal{I}_J = \mathcal{I}_J^f \dot{\cup} \mathcal{I}_J^r,$$

wobei wir \mathcal{I}_J^f als freie und \mathcal{I}_J^r als restringierte Kanten bezeichnen. Die Knotenbedingung

$$C_J(\beta_i u_i)(\Gamma_J) = \beta_i(\Gamma_J) \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \quad \forall i \in \mathcal{I}_J^r \quad (2.93)$$

für den Knoten J drückt aus, daß sich die Funktionswerte in Richtung der restringierten Kanten als Linearkombination aus den Funktionswerten in Richtung der freien Kanten ergeben. Dabei sind $C_J > 0$ und $c_{ki}^J \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten. Es gilt

Lemma 2.13. *Sei \mathcal{L} der eben eingeführte Differentialoperator mit durch (2.93) eingeschränktem Definitionsbereich. \mathcal{L} ist ein abgeschlossener Operator in H . Mit der adjungierten Knotenbedingung*

$$C_J(\beta_k u_k)(\Gamma_J) = -\beta_k(\Gamma_J) \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} c_{ki}^J d_{iJ}(\beta_i u_i)(\Gamma_J) \quad \forall k \in \mathcal{I}_J^f \quad (2.94)$$

ist die Adjungierte \mathcal{L}^* gegeben durch

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}^*) &= \{(u_i)_{i \in \mathcal{I}} \in H \mid (\beta_i u_i)' \in L^2(\Omega_i), \text{ es gilt (2.94) für alle } J \in \mathcal{J}\}, \\ (\mathcal{L}^*u)_i &= -E_{\beta_i} u_i + \alpha_i u_i. \end{aligned}$$

Beweis. Die Abgeschlossenheit von \mathcal{L} kommt daher, daß die Knotenwerte $(\beta_i u_i)(\Gamma_J)$ stetig von u_i bezüglich der Graphennorm von D_{β_i} abhängen und

deshalb (2.93) im Limes erhalten bleibt. Sei nun $w \in D(\mathcal{L}^*)$ und $\mathcal{L}^*w = z$. Insbesondere für $u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} C_0^\infty(\Omega_i)$ muß gelten

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} ((\mathcal{L}u)_i, w_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} (u_i, z_i). \quad (2.95)$$

Daraus folgt, daß

$$\begin{aligned} (\beta_i w_i)' &\in L^2(\Omega_i) && \forall i \in \mathcal{I}, \\ z_i &= -E_{\beta_i} w_i + \alpha_i w_i && \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

(2.95) muß aber auch für alle $u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} C^1(\Omega_i)$ gelten mit

$$C_J u_i(\Gamma_J) = \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J). \quad (2.96)$$

(2.95) schreibt sich

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (\beta_i u_i' + \alpha_i u_i, w_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} (u_i, -(\beta_i w_i)' + \alpha_i w_i),$$

und daraus folgt mit partieller Integration

$$\sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (u_i(\overline{\beta_i w_i}))(\Gamma_J) = 0.$$

Den am Knoten J auftretenden Term bezeichnen wir mit

$$B_J(u, w) := \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (u_i(\overline{\beta_i w_i}))(\Gamma_J).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &C_J B_J(u, w) \\ &= C_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ} (u_k(\overline{\beta_k w_k}))(\Gamma_J) + C_J \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} d_{iJ} (u_i(\overline{\beta_i w_i}))(\Gamma_J) \\ &= C_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ} (u_k(\overline{\beta_k w_k}))(\Gamma_J) \\ &\quad + C_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} d_{iJ} c_{ki}^J d_{kJ} (\beta_k u_k)(\Gamma_J) (\overline{\beta_i u_i})(\Gamma_J) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ} u_k(\Gamma_J) \overline{(C_J (\beta_k w_k)(\Gamma_J) + \beta_k(\Gamma_J) \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} c_{ki}^J d_{iJ} (\beta_i w_i)(\Gamma_J))}. \end{aligned}$$

Da $C_J \neq 0$ und die Werte $u_k(\Gamma_J)$ für alle $k \in \mathcal{I}_J^f$ beliebig auftreten können, kann $\sum_{J \in \mathcal{J}} B_J(u, w)$ nur dann für jede zulässige Wahl von u verschwinden, wenn

$$C_J(\beta_k w_k)(\Gamma_J) + \beta_k(\Gamma_J) \sum_{k \in \mathcal{I}_J^r} c_{ki}^J d_{iJ}(\beta_i w_i)(\Gamma_J) = 0.$$

(2.94) ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß $w \in D(\mathcal{L}^*)$. Um festzustellen, daß sie auch hinreichend ist, betrachten wir die Knotenterme für beliebige Funktionen w , welche (2.94) erfüllt, und $u \in D(\mathcal{L})$. Es gilt, unter Beachtung von Folgerung 2.4,

$$\begin{aligned} & C_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ}(\beta_k u_k w_k)(\Gamma_J) \\ &= C_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ}(\beta_k u_k w_k)(\Gamma_J) + C_J \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} d_{iJ}(\beta_i u_i w_i)(\Gamma_J) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \left(- \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} c_{ki}^J d_{iJ}(\beta_i w_i)(\Gamma_J) \right) \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \right) d_{iJ}(\beta_i w_i)(\Gamma_J) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ}(\beta_k u_k w_k)(\Gamma_J) = 0.$$

Die Knotenterme verschwinden also, und damit ist $w \in D(\mathcal{L}^*)$. \square

Für die folgende speziellere Situation können wir nachweisen, daß \mathcal{L} nach unten beschränkt ist, was in 2.3.3 für den Beweis einer Eindeutigkeitsaussage verwendet wird.

Lemma 2.14. *Angenommen, an einem Knoten $J \in \mathcal{J}$ gilt*

$$d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J^f. \quad (2.97)$$

Wir definieren die Übergangsmatrix \mathcal{T}_J durch

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_J &= (T_{ik})_{i \in \mathcal{I}_J^r, k \in \mathcal{I}_J^f}, \\ T_{ik} &= |d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} |c_{ki}^J| |d_{kJ} \beta_k(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Falls nun

$$\|\mathcal{T}_J\|_2 \leq C_J, \quad (2.98)$$

dann gilt für alle $u \in D(\mathcal{L})$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\beta_i |u_i|^2)(\Gamma_J) \geq 0. \quad (2.99)$$

Beweis. Für $u \in D(\mathcal{L})$ gilt

$$\begin{aligned} & C_J^2 \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\beta_i |u_i|^2)(\Gamma_J) \\ &= C_J^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ}(\beta_k |u_k|^2)(\Gamma_J) + C_J^2 \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} d_{iJ}(\beta_i |u_i|^2)(\Gamma_J) \\ &= C_J^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} d_{kJ}(\beta_k |u_k|^2)(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \left| \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \right|^2. \end{aligned}$$

Mit

$$v_k = |d_{kJ}(\beta_k |u_k|^2)(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } k \in \mathcal{I}_J^f$$

läßt sich dies schreiben als

$$\begin{aligned} & C_J^2 \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\beta_i |u_i|^2)(\Gamma_J) \\ & \stackrel{(2.97)}{=} C_J^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} v_k^2 + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \left| \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \right|^2 \\ & \geq C_J^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} v_k^2 - \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} |d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \left| \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J) \right|^2 \\ & \geq C_J^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} v_k^2 - \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} |d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} |c_{ki}^J| |d_{kJ} \beta_k(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} v_k \right)^2 \\ & = C_J^2 \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} v_k^2 - \sum_{i \in \mathcal{I}_J^r} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} T_{ik} v_k \right)^2 \\ & \stackrel{(2.98)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

□

Damit können wir jetzt folgenden Satz formulieren.

Satz 2.13. *Angenommen, es gilt für alle Knoten $J \in \mathcal{J}$*

$$d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J^f, \quad (2.100)$$

$$d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J^r. \quad (2.101)$$

Für die in Lemma 2.14 definierten Übergangsmatrizen \mathcal{T}_J gelte

$$\|\mathcal{T}_J\|_2 \leq C_J \quad \forall J \in \mathcal{J}. \quad (2.102)$$

Darüberhinaus sei für alle Kanten $i \in \mathcal{I}$ mit einer Konstante $\delta \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2}\beta'_i + (\alpha_i - \delta) \geq 0. \quad (2.103)$$

Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$

$$R(\mathcal{L} + c) = H, \quad (2.104)$$

$$\|(\mathcal{L} + c)u\| \geq (\delta + c)\|u\| \quad \forall u \in D(\mathcal{L}). \quad (2.105)$$

Beweis. Sei $u \in D(\mathcal{L})$. Unter Zuhilfenahme von (2.103) erhalten wir mit partieller Integration wie im Beweis von Lemma 2.2

$$\Re((\mathcal{L} + c)u, u)_H \geq (\delta + c)\|u\|_H^2 + \sum_{J \in \mathcal{J}} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\beta_i |u_i|^2)(\Gamma_J).$$

Wegen Lemma 2.14 sind auch die Randterme positiv, und es folgt (2.105). Für die Adjungierte \mathcal{L}^* gilt (2.103) ebenfalls, wie im Beweis von Lemma 2.3 verdeutlicht wurde. Um die Übergangsmatrizen von \mathcal{L}^* an den Knoten $J \in \mathcal{J}$ darzustellen, müssen wir die Knotenbedingung (2.94) mit $-\beta$ anstelle von β darstellen, da dies ja die Flußrichtung des adjungierten Operators ist. Die Knotenbedingung lautet

$$C_J((-\beta_k)u_k)(\Gamma_J) = (-\beta_k)(\Gamma_J) \sum_{i \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J d_{iJ}((-\beta_i)u_i)(\Gamma_J) \quad \forall k \in \mathcal{I}_J^f.$$

Die Übergangsmatrix von \mathcal{L}^* am Knoten J ist also gleich \mathcal{T}_J^T . Da jedoch die 2-Norm einer jeden reellen Matrix immer gleich der 2-Norm ihrer Transponierten ist, gilt (2.102) entsprechend auch für \mathcal{L}^* . Die Ungleichung (2.97), die für die Anwendung von Lemma 2.14 gebraucht wird, lautet für die Adjungierte (2.101). Genau wie für \mathcal{L} gilt also für \mathcal{L}^* die Abschätzung

$$\Re((\mathcal{L}^* + c)u, u)_H \geq (\delta + c)\|u\|_H^2 \quad \forall u \in D(\mathcal{L}^*).$$

Mit dem „closed range theorem“ können wir damit auf (2.104) schließen. \square

Um diesen Satz mit gewichteten Normen zu formulieren, definieren wir für Funktionen $\psi \in \prod_{i \in \mathcal{I}} C_+^0(\overline{\Omega}_i)$ auf dem Netzwerk die Norm $\|\cdot\|_H^\psi$ durch

$$\|u\|_H^\psi := \|\psi u\|_H.$$

$(\cdot, \cdot)_H^\psi$ sei das zugehörige Skalarprodukt.

Satz 2.14. *Angenommen, es gilt für alle Knoten $J \in \mathcal{J}$*

$$\begin{aligned} d_{iJ}\beta_i(\Gamma_J) &\geq 0 & \forall i \in \mathcal{I}_J^f, \\ d_{iJ}\beta_i(\Gamma_J) &\leq 0 & \forall i \in \mathcal{I}_J^r. \end{aligned}$$

$\zeta \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_+^1(\Omega_i)$ sei eine Netzwerk-Funktion mit folgenden Eigenschaften.
Für die Übergangsmatrizen \mathcal{T}_J^ζ , die wir definieren als

$$\mathcal{T}_J^\zeta = (T_{ik})_{i \in \mathcal{I}_J^r, k \in \mathcal{I}_J^f}, \quad (2.106)$$

$$T_{ik} = |d_{iJ}\beta_i(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} |c_{ki}^J| |d_{kJ}\beta_k(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\zeta_i(\Gamma_J)}{\zeta_k(\Gamma_J)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.107)$$

gelte

$$\|\mathcal{T}_J^\zeta\|_2 \leq C_J \quad \forall J \in \mathcal{J}. \quad (2.108)$$

Darüberhinaus sei für alle Kanten $i \in \mathcal{I}$ mit einer Konstante $\delta \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{2}(\beta_i \zeta_i)' + (\alpha_i - \delta)\zeta_i \geq 0. \quad (2.109)$$

Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$

$$\begin{aligned} R(\mathcal{L} + c) &= H, \\ \|(\mathcal{L} + c)u\|_H^{\zeta^{\frac{1}{2}}} &\geq (\delta + c)\|u\|_H^{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad \forall u \in D(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 2.4 definieren wir für eine Netzwerk-Funktion $\psi \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_+^1(\Omega_i)$ den Operator \mathcal{L}^ψ in H durch

$$\begin{aligned} D(\mathcal{L}^\psi) &= \{u \in H : \frac{u}{\psi} \in D(\mathcal{L})\}, \\ (\mathcal{L}^\psi u)_i &:= \psi_i (\mathcal{L}(\frac{u}{\psi}))_i \\ &= D_{\beta_i} u_i + \left(-\frac{1}{\psi_i} \beta_i \psi_i' + \alpha_i \psi_i\right) u_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Wir wählen $\psi_i := \zeta_i^{\frac{1}{2}}$. Wegen (2.109) gilt

$$\left(-\frac{1}{2}\beta_i' + \alpha_i - \delta\right)\psi_i^2 - \psi_i \beta_i \psi_i' = -\frac{1}{2}(\beta_i \zeta_i)' + (\alpha_i - \delta)\zeta_i \geq 0.$$

Division durch ψ_i^2 ergibt

$$-\frac{1}{2}\beta_i' + \left(-\frac{1}{\psi_i} \beta_i \psi_i' + \alpha_i - \delta\right) \geq 0.$$

Die Knotenbedingungen zu \mathcal{L}^ψ lauten nach Definition von $D(\mathcal{L}^\psi)$

$$C_J \frac{(\beta_i u_i)(\Gamma_J)}{\psi_i(\Gamma_J)} = \beta_i(\Gamma_J) \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J \frac{d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J)}{\psi_k(\Gamma_J)},$$

also

$$C_J \beta_i(\Gamma_J) = \beta_i(\Gamma_J) \sum_{k \in \mathcal{I}_J^f} c_{ki}^J \frac{\zeta_i(\Gamma_J)^{\frac{1}{2}}}{\zeta_k(\Gamma_J)^{\frac{1}{2}}} d_{kJ}(\beta_k u_k)(\Gamma_J).$$

\mathcal{T}_J^ζ ist somit die Übergangsmatrix von \mathcal{L}^ψ . Insgesamt erfüllt \mathcal{L}^ψ die Voraussetzungen von Satz 2.13, es gilt also für alle $u \in D(\mathcal{L})$ und $c > -\delta$

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L} + c)u\|_H^\psi &= \|(\mathcal{L}^\psi + c)(\psi u)\|_H \\ &\geq (\delta + c)\|\psi u\|_H \\ &= (\delta + c)\|u\|_H^\psi. \end{aligned}$$

Die Surjektivität von $(\mathcal{L} + c)$ folgt aus der Surjektivität von $(\mathcal{L}^\psi + c)$. \square

Falls, anschaulich gesprochen, das Netzwerk keine in Flußrichtung verlaufende Schleifen enthält, lassen sich solche Netzwerk-Funktionen ζ sukzessive aus Funktionen auf den einzelnen Kanten zusammensetzen. Angenommen, auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$ gibt es eine Funktion $\tilde{\zeta}_i \in \mathcal{C}_+^1(\Omega_i)$, welche die Bedingung (2.109) erfüllt. Wir nehmen weiter an, daß wir die Kanten $i \in \mathcal{I}$ des Netzwerks in einer Reihenfolge $i_1, \dots, i_{|\mathcal{I}|}$ so anordnen können, daß für alle $n \in \{1, \dots, |\mathcal{I}|\}$ und $J \in \mathcal{J}$ mit $i_n \in \mathcal{I}_J^r$ gilt

$$\mathcal{I}_J^f \subset \{i_1, \dots, i_{n-1}\}.$$

Dann setzen wir die endgültigen Funktionen ζ_i an als

$$\zeta_i = c_i \tilde{\zeta}_i,$$

mit positiven Konstanten c_i und durchlaufen nun das Netzwerk Kante für Kante der oben beschriebenen Reihenfolge nach. Im n -ten Schritt sind dann für alle $J \in \mathcal{J}$ mit $i_n \in \mathcal{I}_J^r$ die Werte $\zeta_k(\Gamma_J)$ für $k \in \mathcal{I}_J^f$ alle schon festgelegt. Durch genügend kleine Wahl von c_{i_n} können wir dafür sorgen, daß die Norm von \mathcal{T}_J^ζ kleiner als C_J bleibt. Auf ähnliche Weise werden in [13] Gewichtsfunktionen für Differentialoperatoren zweiter Ordnung konstruiert.

2.3.2 Differentialoperatoren zweiter Ordnung

Wir kehren nun zur Rahmensituation von 2.1.2 zurück. Auf diese Gleichungen läßt sich dasselbe variationelle Prinzip anwenden wie die in 2.2.2 beschriebenen Gleichungen auf dem Intervall. Wir definieren dazu die Sesquilinearform

$$\begin{aligned} a : V \times V &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (v, u) &\mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} (v'_i, \epsilon_i u'_i) + (\beta_i v'_i, u_i) + (v_i, \gamma_i u'_i) + (v_i, \alpha_i u_i). \end{aligned}$$

Zwischen a und \mathcal{A} aus Abschnitt 2.1 besteht folgender Zusammenhang.

Lemma 2.15. Für alle $u \in D(\mathcal{A})$ und $v \in V$ gilt

$$a(v, u) = (v, \mathcal{A}u)_H.$$

Beweis. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} a(v, u) &= (v, \mathcal{A}u)_H + \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{J \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_N} d_{iJ} (v(\epsilon_i u'_i + \beta_i u_i))(\Gamma_J) \\ &= (v, \mathcal{A}u)_H + \sum_{J \in \mathcal{J}_N} v(\Gamma_J) \rho_J(u) \\ &\stackrel{\text{(T1)}}{=} (v, \mathcal{A}u)_H. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.16. Seien $f \in H$, $u \in V$ mit

$$a(v, u) = (v, f)_H \quad \forall u \in V. \quad (2.110)$$

Dann ist $u \in D(\mathcal{A})$ und $\mathcal{A}u = f$.

Beweis. Auf einer beliebigen Kante $i \in \mathcal{I}$ gilt für alle $v_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$

$$(v'_i, \epsilon_i u'_i) = (v_i, (\beta_i u_i)' - \gamma_i u'_i - \alpha_i u_i + f_i).$$

Also ist

$$\begin{aligned} (\epsilon_i u'_i)' &\in L^2(\Omega_i), \\ -(\epsilon_i u'_i)' &= (\beta_i u_i)' - \gamma_i u'_i - \alpha_i u_i + f_i. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß

$$\begin{aligned} u &\in \prod_{i \in \mathcal{I}} D(A_i), \\ A_i u_i &= f_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

und es muß nur noch die Transmissionsbedingung (T1) nachgewiesen werden. Für beliebige $v \in V$ gilt wegen (2.110) und (2.111)

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} (v_i, A_i u_i) - a(v, u) = 0 \quad \forall v \in V,$$

und somit

$$\sum_{J \in \mathcal{J}_N} v(\Gamma_J) \rho_J(u) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Da v jedoch an den Neumann-Knoten beliebige Werte annehmen kann, folgt

$$\rho_J(u) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N.$$

□

Wir zeigen jetzt die Definitheit der Sesquilinearform a , um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Problems $\mathcal{A}u = f$ zu erhalten.

Lemma 2.17. *Für alle Neumann-Knoten $J \in \mathcal{J}_N$ gelte mit einer Konstante $\mu \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) \geq \mu. \quad (2.112)$$

Weiter gelte für eine Konstante $\delta \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$-\frac{1}{2}(\beta_i + \gamma_i)' + \alpha_i - \delta \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (2.113)$$

Dann erfüllt a die Abschätzung

$$\Re(a(v, v)) \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i |v_i'|^2 dx + \delta \int_{\Omega_i} |v_i|^2 dx + \mu \sum_{J \in \mathcal{J}_N} |v(\Gamma_J)|^2 \quad \forall v \in V.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \Re(a(v, v)) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i |v_i'|^2 dx + \int_{\Omega_i} (\beta_i + \gamma_i) \Re(v_i' \bar{v}_i) dx + \int_{\Omega_i} \alpha_i |v_i|^2 dx \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i |v_i'|^2 dx - \int_{\Omega_i} \frac{1}{2} (\beta_i + \gamma_i)' |v_i|^2 dx \\ &\quad + \sum_{J \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_N} \frac{1}{2} d_{iJ}(\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) |v(\Gamma_J)|^2 \\ &\quad + \int_{\Omega_i} \alpha_i |v_i|^2 dx \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i |v_i'|^2 dx + \int_{\Omega_i} \left(-\frac{1}{2}(\beta_i + \gamma_i)' + \alpha_i\right) |v_i|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{J \in \mathcal{J}_N} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J)\right) |v(\Gamma_J)|^2 \\ &\geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i |v_i'|^2 dx + \delta \int_{\Omega_i} |v_i|^2 dx + \mu \sum_{J \in \mathcal{J}_N} |v(\Gamma_J)|^2. \end{aligned}$$

□

Mit genau denselben Betrachtungen wie in 2.2.2 erhalten wir

Satz 2.15. *Angenommen, in Lemma 2.17 kann $\mu \geq 0$ gewählt werden. Dann ist \mathcal{A} ein abgeschlossener Operator im Raum H mit dichtem Definitionsbereich. Die Adjungierte \mathcal{A}^* ist genau wie in \mathcal{A} definiert, jedoch treten die*

Koeffizienten β_i und γ_i in vertauschten Rollen auf. Falls für ein $\delta \in \mathbb{R}$ die Abschätzung (2.113) gilt, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$

$$\begin{aligned} R(\mathcal{A} + c) &= H, \\ \|(\mathcal{A} + c)u\|_H &\geq (\delta + c)\|u\|_H \quad \forall u \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Die Forderung, daß in Lemma 2.17 $\mu \geq 0$ gewählt werden kann, ist eine echte Einschränkung, doch sie kann, ähnlich wie in der Situation auf dem beschränkten Intervall, mit gewichteten Normen umgangen werden.

Für $u \in V$, $f \in H$ und eine in allen Neumann-Knoten stetige Funktion $\zeta \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_+^1(\Omega_i)$ besteht eine Äquivalenz zwischen

$$a^\zeta(v, u) := a(\zeta v, u) = (v, f)_H^{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad \forall v \in V$$

und

$$u \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = f.$$

Analog zu Lemma 2.17 und Satz 2.15 gilt für diese gewichteten Normen

Lemma 2.18. *Gegeben sei eine Funktion $\zeta \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_+^1(\Omega_i)$, die in allen Neumann-Knoten stetig und in Richtung einer jeden adjazenten Kante differenzierbar ist. Es existiere eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$, mit*

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i \zeta'_i + (\beta_i + \gamma_i) \zeta_i) (\Gamma_J) \geq \mu \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (2.114)$$

und $\delta \in \mathbb{R}$, mit

$$-\frac{1}{2} (\epsilon_i \zeta'_i + (-\beta_i + \gamma_i) \zeta_i)' + (-\beta'_i + \alpha_i - \delta) \zeta_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (2.115)$$

Dann erfüllt a^ζ die Abschätzung

$$\Re(a^\zeta(v, v)) \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i \zeta_i |v'_i|^2 dx + \delta \int_{\Omega_i} \zeta_i |v_i|^2 dx + \mu \sum_{J \in \mathcal{J}_N} |v(\Gamma_J)|^2.$$

Beweis. Die Behauptung folgt mit partieller Integration, wie im Beweis von Lemma 2.7, und anschließender Aufsummierung über alle Kanten. \square

Satz 2.16. *Angenommen, in Lemma 2.18 kann $\mu \geq 0$ gewählt werden. Dann ist \mathcal{A} ein abgeschlossener Operator in H mit dichtem Definitionsbereich. Die Adjungierte \mathcal{A}^* entspricht \mathcal{A} , jedoch mit vertauschten Rollen für β_i und γ_i . Falls nun für eine Konstante $\delta \in \mathbb{R}$ die Abschätzung (2.115) gilt, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$*

$$\begin{aligned} R(\mathcal{A} + c) &= H, \\ \|(\mathcal{A} + c)u\|_H^{\zeta^{\frac{1}{2}}} &\geq (\delta + c)\|u\|_H^{\zeta^{\frac{1}{2}}} \quad \forall u \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Da man offensichtlich stets Funktionen ζ findet, die (2.114) erfüllen, läßt sich dieser Satz immer anwenden.

Im folgenden soll versucht werden, ein Maximumprinzip für elliptische Netzwerk-Differentialoperatoren zweiter Ordnung herzuleiten. Für parabolische Gleichungen finden sich solche Resultate in [6].

Den Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ legen wir jetzt bis auf weiteres fest als die Menge aller Netzwerk-Funktionen $u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} C^0(\overline{\Omega}_i)$, die in allen Neumann-Knoten stetig sind und für die

$$\begin{aligned} u_i &\in C^1(\Omega_i) \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ \epsilon_i u'_i &\in C^1(\Omega_i) \quad \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

gilt. Außerdem fordern wir, daß u in allen Neumann-Knoten in Richtung einer jeden adjazenten Kante differenzierbar ist. Für $u \in D(\mathcal{A})$ sei

$$(\mathcal{A}u)_i = -(\epsilon_i u'_i + \beta_i u_i)' + \gamma_i u'_i + \alpha_i u_i.$$

Wir zerlegen die Kantenmenge \mathcal{I} des Netzwerks in Zusammenhangskomponenten. Zwei Kanten sollen genau dann in derselben Zusammenhangskomponente liegen, wenn sie über einen Pfad verbunden sind, bei dem alle Knoten, durch die dieser Pfad läuft, Neumann-Knoten sind. Es gilt

Lemma 2.19. *Es gelte*

$$-\beta'_i + \alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.116)$$

und

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \quad (2.117)$$

Sei nun $u \in D(\mathcal{A})$ eine reellwertige Funktion mit

$$\mathcal{A}u \geq 0$$

und

$$\rho_J(u) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \quad (2.118)$$

m sei der minimale Wert, den u auf dem Netzwerk annimmt. Angenommen, $m \leq 0$. Dann wird dieser Minimalwert entweder an einem Dirichlet-Knoten angenommen, oder u ist auf einer ganzen Zusammenhangskomponente konstant gleich m .

Beweis. Falls m im Inneren einer Kante $i \in \mathcal{I}$ angenommen wird, so ist nach Satz 2.7 $u_i \equiv m$ auf dieser Kante. Wir können also davon ausgehen, daß der Minimalwert auf jeden Fall an einem Knoten angenommen wird.

Angenommen, dies ist ein Neumann-Knoten. Aufgrund der Minimalität von m muß

$$d_{iJ}u'_i(\Gamma_J) \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J$$

gelten. Auf der anderen Seite ist aber wegen (2.118)

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\epsilon_i u'_i)(\Gamma_J) + \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \right) m \geq 0.$$

Wegen (2.117) und da $m \leq 0$ kann beides gleichzeitig nur dann gelten wenn

$$d_{iJ}u'_i(\Gamma_J) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J.$$

Nach Satz 2.9 ist dann aber $u_i \equiv m$ auf allen Kanten $i \in \mathcal{I}_J$. Auf diese Weise können wir alle über einen Pfad erreichbaren Kanten abarbeiten und erhalten, daß u auf der gesamten Zusammenhangskomponente gleich m ist. \square

Folgerung 2.7. *Es gelte (2.116) und (2.117). Sei nun $u \in D(\mathcal{A})$ eine reellwertige Funktion mit*

$$\mathcal{A}u \geq 0$$

und

$$\rho_J(u) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N.$$

Falls jede Zusammenhangskomponente des Netzwerks mindestens einen Dirichlet-Knoten enthält und u in all diesen Knoten nichtnegative Werte annimmt, d. h.

$$u_i(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, i \in \mathcal{I}_J,$$

dann gilt

$$u \geq 0.$$

Allgemeiner gilt

Lemma 2.20. *Für eine Netzwerk-Funktion $\zeta \in D(\mathcal{A})$ gelte*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\zeta &\geq 0, \\ \zeta &\geq \kappa > 0, \\ \rho_J(\zeta) &\geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Sei nun $u \in D(\mathcal{A})$ eine reellwertige Funktion mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &\geq 0, \\ \rho_J(u) &\geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Falls jede Zusammenhangskomponente des Netzwerks mindestens einen Dirichlet-Knoten enthält und u in all diesen Knoten nichtnegative Werte annimmt, d. h.

$$u_i(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, i \in \mathcal{I}_J, \quad (2.121)$$

dann gilt

$$u \geq 0.$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 2.10 definieren wir den Operator \mathcal{A}^ζ durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^\zeta u)_i &:= \frac{1}{\zeta_i} (\mathcal{A}(\zeta u))_i \\ &= -(\epsilon_i u'_i)' + \frac{1}{\zeta_i} (-2\epsilon_i \zeta'_i + \gamma_i \zeta_i) u'_i + \frac{1}{\zeta_i} (\mathcal{A}\zeta)_i u_i \end{aligned}$$

und schreiben u als $u = \zeta \tilde{u}$. Damit gilt

$$0 \leq \frac{1}{\zeta} \mathcal{A}(\zeta \tilde{u}) = \mathcal{A}^\zeta \tilde{u}.$$

Angenommen, \tilde{u} nimmt ein nichtpositives Minimum m auf dem Netzwerk an. Auf \mathcal{A}^ζ treffen die Voraussetzungen von Lemma 2.19 zu. Wir können also mit denselben Überlegungen wie im Beweis dieses Lemmas schließen, daß dieses Minimum an einem Knoten $J \in \mathcal{J}$ angenommen wird. Ferner gilt

$$d_{iJ} \tilde{u}'_i(\Gamma_J) \leq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J. \quad (2.122)$$

Falls $J \in \mathcal{J}_D$, ist wegen (2.121) die Behauptung bewiesen. Im Fall, daß $J \in \mathcal{J}_N$ gilt aber andererseits

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2.120)}{\leq} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i (\zeta_i \tilde{u}_i)')(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \zeta(\Gamma_J) m \\ &= \zeta(\Gamma_J) \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i \tilde{u}'_i)(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i \zeta'_i)(\Gamma_J) m + \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \zeta(\Gamma_J) m \\ &= \zeta(\Gamma_J) \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i \tilde{u}'_i)(\Gamma_J) + \rho_J(\zeta) m \\ &\stackrel{(2.122)}{\leq} \rho_J(\zeta) m \\ &\stackrel{(2.119), m \leq 0}{\leq} 0. \end{aligned}$$

Hier muß also überall Gleichheit gelten, insbesondere im vorletzten Schritt. Das bedeutet, daß

$$d_{iJ} \tilde{u}'_i(\Gamma_J) = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J.$$

Nach Satz 2.9 ist nun $u_i \equiv m$ auf allen adjazenten Kanten $i \in \mathcal{I}_J$ und, nach sukzessiver Anwendung dieser Schlußweise, auf der ganzen Zusammenhangskomponente. Da aber nach Voraussetzung in dieser Zusammenhangskomponente auch mindestens ein Dirichlet-Knoten sein muß, folgt mit (2.121) die Behauptung. \square

Entsprechend zu Satz 2.8 können wir auch eine Normabschätzung herleiten.

Satz 2.17. *Angenommen, es gibt eine Netzwerk-Funktion $\zeta \in D(\mathcal{A})$ mit*

$$\mathcal{A}\zeta - \delta\zeta \geq 0, \quad (2.123)$$

$$\zeta \geq \kappa > 0, \quad (2.124)$$

$$\rho_J(\zeta) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (2.125)$$

mit einer Konstante $\delta > 0$. Dann gilt für alle $u \in D(\mathcal{A})$ mit

$$u(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (2.126)$$

$$\rho_J(u) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (2.127)$$

die Abschätzung

$$\|\mathcal{A}u\|_\infty^{\zeta^{-1}} \geq \delta \|u\|_\infty^{\zeta^{-1}}. \quad (2.128)$$

Darüberhinaus existiert für alle rechte Seiten $f \in \prod_{i \in \mathcal{I}} C^0(\overline{\Omega}_i)$ eine Funktion $u \in D(\mathcal{A})$ mit (2.126), (2.127) und $\mathcal{A}u = f$.

Beweis. Den Operator \mathcal{A}^ζ definieren wir wie im Beweis von Lemma 2.20. u schreiben wir als $\zeta\tilde{u}$. Wir definieren die Schranken

$$\begin{aligned} \phi_u &:= \frac{1}{\delta} \|\mathcal{A}^\zeta \tilde{u}\|_\infty, \\ \phi_l &:= -\frac{1}{\delta} \|\mathcal{A}^\zeta \tilde{u}\|_\infty. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathcal{A}^\zeta \phi_u = \frac{1}{\zeta} (\mathcal{A}\zeta) \phi_u \stackrel{(2.123)}{\geq} \delta \phi_u \geq \delta \left(\frac{1}{\delta} \mathcal{A}^\zeta \tilde{u} \right) = \mathcal{A}^\zeta \tilde{u}, \quad (2.129)$$

und

$$(\phi_u - \tilde{u})(\Gamma_J) = \phi_u(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D. \quad (2.130)$$

Um zu zeigen, daß $(\phi_u - \tilde{u})$ auf dem ganzen Netzwerk nichtnegativ ist, nehmen wir an, daß $(\phi_u - \tilde{u})$ ein negatives Minimum m annimmt. Wegen (2.129) und (2.130) folgt mit Lemma 2.10, daß dieses Minimum auf jeden

Fall in einem Neumann-Knoten $J \in \mathcal{J}_N$ angenommen werden muß. Da ϕ_u konstant ist, muß gelten

$$d_{iJ}\tilde{u}'_i(\Gamma_J) \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}_J.$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned} 0 = \rho_J(u) &= \rho_J(\zeta)\tilde{u}(\Gamma_J) + \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\epsilon_i \tilde{u}'_i)(\Gamma_J) \right) \zeta(\Gamma_J) \\ &\geq \rho_J(\zeta)\tilde{u}(\Gamma_J) \\ &= \rho_J(\zeta)(\phi_u(\Gamma_J) - m) \\ &> 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. Um auch die Existenzaussage zu zeigen, definieren wir eine affine Abbildung F folgendermaßen. Ausgehend von einem Tupel $\{u_J\}_{J \in \mathcal{J}_N}$ von vorgegebenen Werten in den Neumann-Knoten sei $u \in D(\mathcal{A})$ die nach Satz 2.8 eindeutig bestimmte Netzwerk-Funktion mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u &= f, \\ u(\Gamma_J) &= 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \\ u(\Gamma_J) &= u_J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \end{aligned}$$

Die erwähnte Abbildung F sei mittels der Funktion u gegeben durch

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{|\mathcal{J}_N|} &\rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{J}_N|}, \\ \{u_J\}_{J \in \mathcal{J}_N} &\mapsto \{\rho_J(u)\}_{J \in \mathcal{J}_N}. \end{aligned}$$

Wegen (2.128) muß diese Abbildung injektiv sein. Damit ist sie aber auch surjektiv, und die Behauptung ist gezeigt. \square

2.3.3 Konvergenzresultate für $\epsilon \rightarrow 0$

Für die folgenden Konvergenzbetrachtungen legen wir die zu Abschnitt 2.2.3 analoge Situation auf dem Netzwerk zugrunde. $(f^{(n)}) \subset H$ sei eine beschränkte Folge von rechten Seiten, $(\mathcal{A}^{(n)})$ eine Folge von Differentialoperatoren zweiter Ordnung, wie sie in 2.1.2 eingeführt wurden. Diese seien jedoch bis auf ihre Diffusionskoeffizienten $\epsilon_i^{(n)}$ identisch.

Abbildung 2.3 zeigt die Lösung einer solchen Differentialgleichung mit kleinen $\epsilon_i^{(n)}$. In den Neumann-Knoten bildet sich auf allen hineinlaufenden Kanten eine Grenzschicht aus. Auf den aus dem Knoten herauslaufenden Kanten ist die Tendenz erkennbar, daß ein gemeinsamer Startwert angenommen wird, der sich als Mittel über alle Werte auf den in den Knoten hineinlaufenden Kanten ergibt. Dieses Verhalten ist in der Abbildung gut

sichtbar. Sie zeigt die Lösung $(u_i)_{i \in \mathcal{I}}$, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} -\epsilon u_i'' + u_i' &= 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ u(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Dirichlet-Knoten (D)}, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} u_i'(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Neumann-Knoten (N)} \end{aligned} \quad (2.131)$$

mit $\epsilon = 0.05$. Welche Knoten Dirichlet- und welche Neumann-Knoten sind, sowie die Parametrisierungsrichtungen der Kanten, geht aus Abbildung 2.2 hervor.

Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von

$$\mathcal{A}^{(n)} u = f^{(n)} \quad (2.132)$$

zu sichern, nehmen wir an, es gibt eine Folge $(\zeta^{(n)})$ von Funktionen auf dem Netzwerk, welche jeweils die Voraussetzungen von Lemma 2.18 mit von n unabhängigen Konstanten $\delta > 0$ und $\mu \geq 0$ erfüllen. Es existieren somit eindeutige Lösungen von (2.132) mit

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i^{(n)} \zeta_i^{(n)} |u_i^{(n)'}|^2 dx + \delta \int_{\Omega_i} \zeta_i^{(n)} |u_i^{(n)}|^2 dx + \mu \sum_{J \in \mathcal{J}_N} |u^{(n)}(\Gamma_J)|^2 \\ \leq |(u^{(n)}, f^{(n)})_H^{\zeta^{(n)}}|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Zusätzlich setzen wir von jetzt an voraus, daß alle $\zeta^{(n)}$ gemeinsame untere und obere Schranken besitzen, nämlich

$$0 < m \leq \zeta^{(n)} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

sowie, daß die rechten Seiten $f^{(n)}$ schwach in H gegen eine Funktion $f \in H$ konvergieren, und daß

$$\|\epsilon_i^{(n)}\|_\infty \rightarrow 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

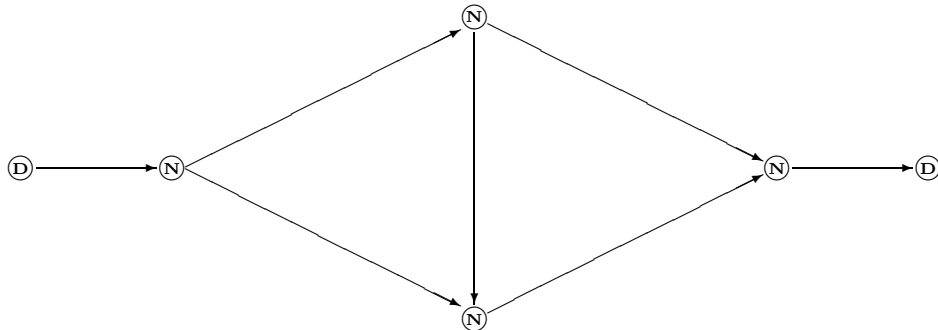


Abbildung 2.2: Netzwerk

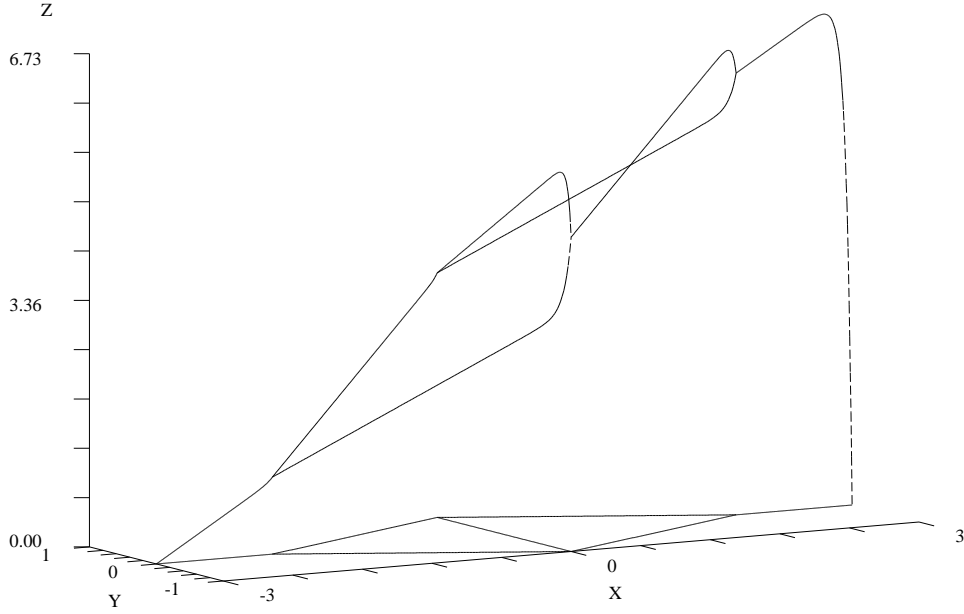


Abbildung 2.3: Lösung einer Netzwerk-D-A-Gleichung mit wenig Diffusion

Für die Limesfunktion $u \in H$ einer schwach konvergenten Teilfolge von $(u^{(n)})$ können wir jetzt dieselben Schlußfolgerungen wie in 2.2.3 ziehen. Es gilt für alle Kanten $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} ((-\beta_i + \gamma_i)u_i)' &\in L^2(\Omega_i), \\ ((-\beta_i + \gamma_i)u_i)' + (-\gamma_i' + \alpha_i)u_i &= f_i, \end{aligned}$$

und für alle Knoten $J \in \mathcal{J}$ gilt

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (-\epsilon_i^{(n)} u_i^{(n)'} + (-\beta_i + \gamma_i) u_i^{(n)}) (\Gamma_J) \rightarrow \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} ((-\beta_i + \gamma_i) u_i) (\Gamma_J). \quad (2.134)$$

Als nächstes werden wir die Beschränktheit der Funktionswerte in den Neumann-Knoten nachweisen, mit dem Ziel, auf jeder einzelnen Kante Satz 2.11 oder Satz 2.12 anzuwenden. Falls die Konstante μ echt positiv ist, liefert (2.133) die Beschränktheit der Knotenwerte. Im Fall $\mu = 0$ zeigt folgendes Lemma, daß die Gewichtsfunktionen $\zeta^{(n)}$ derart modifiziert werden können, daß (2.133) mit neuen Konstanten $\tilde{\delta} > 0$ und $\tilde{\mu} > 0$ gilt. Dazu nehmen wir ab sofort an, die gesamte Folge $(u^{(n)})$ konvergiert schwach gegen u .

Für alle $J \in \mathcal{J}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_J^- &= \{i \in \mathcal{I}_J : d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) > 0\}, \\ \mathcal{I}_J^0 &= \{i \in \mathcal{I}_J : d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) = 0\}, \\ \mathcal{I}_J^+ &= \{i \in \mathcal{I}_J : d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) < 0\}. \end{aligned}$$

Lemma 2.21. *Ausgehend von der gegebenen Situation sei für einen Neumann-Knoten $J \in \mathcal{J}$ die Menge der in den Knoten hineinlaufenden Kanten nichtleer, d. h. $\mathcal{I}_J^- \neq \{\}$. Dann bleiben die Werte von $u^{(n)}(\Gamma_J)$ in diesem Knoten beschränkt.*

Beweis. Sei $C > 0$ eine Konstante, die groß genug ist, damit

$$-\frac{1}{2}(\beta_i + \gamma_i)' + \alpha_i + C - \delta \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (2.135)$$

Unter diesen Umständen gibt es nach Satz 2.8 (mit $\zeta \equiv 1$) eindeutig bestimmte Funktionen $\Delta_i^{(n)}$ auf den einzelnen Kanten $i \in \mathcal{I}$ mit

$$-\frac{1}{2}(\epsilon_i^{(n)} \Delta_i^{(n)'})' - \frac{1}{2}(-\beta_i + \gamma_i) \Delta_i^{(n)'} + \left(-\frac{1}{2}(\beta_i + \gamma_i)' + \alpha_i + C - \frac{\delta}{2}\right) \Delta_i^{(n)} = 1, \quad (2.136)$$

$$\Delta_i^{(n)}(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_i,$$

und es gilt wegen (2.135)

$$0 \leq \Delta_i^{(n)} \leq \frac{2}{\delta}. \quad (2.137)$$

Für $\Delta_i^{(n)}$ entstehen bei kleiner werdenden ϵ_i Grenzsichten an allen Randpunkten $J \in \mathcal{J}_i$ mit $i \in \mathcal{I}_J^-$. Im Bezug auf die Abschätzung (2.133) sind die Ableitungen von $\Delta_i^{(n)}$ in den Knoten interessant. Lemma 2.11 zeigt, daß

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d_{iJ}(\epsilon_i \Delta_i^{(n)'})'(\Gamma_J) =: \omega_{iJ} < 0 \quad \text{falls } i \in \mathcal{I}_J^-.$$

Auf den anderen Rändern gilt hingegen

$$\epsilon_i \Delta_i^{(n)' }(\Gamma_J) \rightarrow 0 \quad \text{falls } i \in \mathcal{I}_J^+ \cup \mathcal{I}_J^0.$$

Wir ersetzen jetzt die Gewichtsfunktionen $\zeta_i^{(n)}$ auf den einzelnen Kanten durch

$$\tilde{\zeta}_i^{(n)} := \zeta_i^{(n)} - \kappa \Delta_i^{(n)}$$

mit einer kleinen positiven Zahl κ . Es gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ}(\epsilon_i^{(n)} \tilde{\zeta}_i^{(n)' } + (\beta_i + \gamma_i) \tilde{\zeta}_i^{(n)})'(\Gamma_J) \geq \mu - \kappa \sum_{i \in \mathcal{I}_J^-} \omega_{iJ} > \mu \geq 0.$$

Wir können also davon ausgehen, daß für $\tilde{\zeta}^{(n)}$ (2.114) mit

$$\tilde{\mu} = -\frac{\kappa}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}_J^-} \omega_{iJ}$$

erfüllt ist. Sofern wir κ klein genug wählen, erfüllt $\tilde{\zeta}^{(n)}$ auch die anderen geforderten Eigenschaften, denn wegen (2.137) gilt

$$m - \frac{2\kappa}{\delta} \leq \tilde{\zeta}^{(n)} \leq M$$

und

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\epsilon_i \tilde{\zeta}_i^{(n)})' + (-\beta_i + \gamma_i) \tilde{\zeta}_i^{(n)} + (-\beta_i' + \alpha_i + C - \frac{\delta}{2}) \tilde{\zeta}_i^{(n)} \\ & = -\frac{1}{2}(\epsilon_i \zeta_i^{(n)})' + (-\beta_i + \gamma_i) \zeta_i^{(n)} + (-\beta_i' + \alpha_i + C - \frac{\delta}{2}) \zeta_i^{(n)} - \kappa \\ & \stackrel{(2.115)}{\geq} (C + \frac{\delta}{2}) \zeta_i^{(n)} - \kappa \\ & \geq (C + \frac{\delta}{2}) m - \kappa. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir entsprechend zu (2.133) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}} \int_{\Omega_i} \epsilon_i^{(n)} \tilde{\zeta}_i^{(n)} |u_i^{(n)}'|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega_i} \tilde{\zeta}_i^{(n)} |u_i^{(n)}|^2 dx + \tilde{\mu} \sum_{J \in \mathcal{J}_N} |u^{(n)}(\Gamma_J)|^2 \\ \leq |(u^{(n)}, f^{(n)} + Cu^{(n)})_H^{\tilde{\zeta}^{(n)}}|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Damit folgt die Behauptung, da wir ja vorher schon wußten, daß $\|u^{(n)}\|_H$ beschränkt ist. \square

Zusätzlich zur schwachen Konvergenz einer Teilfolge von $(u^{(n)})$ können wir also jetzt auch davon ausgehen, daß die Werte von u in den Neumann-Knoten konvergieren, d. h. es existiert für alle $J \in \mathcal{J}_N$ ein Wert $u_J \in \mathbb{C}$ mit

$$u^{(n)}(\Gamma_J) \rightarrow u_J. \quad (2.139)$$

Aufgrund der schwachen Konvergenz von $u_i^{(n)}$ gegen u_i und (2.139) folgt mit Satz 2.11, daß

$$((-\beta_i + \gamma_i)u_i)(\Gamma_J) = (-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J)u_J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J. \quad (2.140)$$

Andererseits wissen wir aber auch schon, daß (2.134) gilt, und zusammen mit $\rho_J(u^{(n)}) = 0$ erhalten wir

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \gamma_i (\Gamma_J) u^{(n)}(\Gamma_J) \rightarrow \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} ((-\beta_i + \gamma_i)u_i)(\Gamma_J) \quad \forall J \in \mathcal{J}_N$$

und daraus mit (2.139)

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \gamma_i (\Gamma_J) u_J = \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} ((-\beta_i + \gamma_i)u_i)(\Gamma_J) \quad \forall J \in \mathcal{J}_N.$$

Wir spalten jetzt die Summe auf der rechten Seite in $i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow$ und $i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow$ auf. Es ergibt sich mit (2.140), daß

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \gamma_i(\Gamma_J) u_J = \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} (d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i) u_i)(\Gamma_J) + \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow} d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) \right) u_J,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow \cup \mathcal{I}_J^0} d_{iJ} \gamma_i(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \right) u_J = \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ} ((-\beta_i + \gamma_i) u_i)(\Gamma_J).$$

Den Ausdruck auf der linken Seite können wir wegen

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow \cup \mathcal{I}_J^0} d_{iJ} \gamma_i(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) - \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J^0} d_{iJ} \gamma_i(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \end{aligned}$$

noch etwas umschreiben zu

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \right) u_J = \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ} ((-\beta_i + \gamma_i) u_i)(\Gamma_J). \quad (2.141)$$

Zusammenfassend lassen sich die Knotenbedingungen also formulieren als

$$u_J = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \right) u_J \\ &= \sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} (d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i) u_i)(\Gamma_J) \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \end{aligned} \quad (2.143)$$

$$((-\beta_i + \gamma_i) u_i)(\Gamma_J) = (-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) u_J \quad \forall J \in \mathcal{J}, i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow. \quad (2.144)$$

In unserem Beispiel in Abbildung 2.3 haben wir den Spezialfall $\beta_i = 0$. Die Knotenbedingungen (2.142)–(2.144) lassen sich nun einfacher darstellen als

$$u_J = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (2.145)$$

$$u_J = \frac{\sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ} (\gamma_i u_i)(\Gamma_J)}{\sum_{i \in \mathcal{I}_J^\leftarrow} d_{iJ} \gamma_i(\Gamma_J)} \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (2.146)$$

$$(\gamma_i u_i)(\Gamma_J) = \gamma_i(\Gamma_J) u_J \quad \forall J \in \mathcal{J}, i \in \mathcal{I}_J^\rightarrow. \quad (2.147)$$

Da $\gamma_i = 1$, sollte also im Grenzfall $\epsilon_i = 0$ in jedem Neumann-Knoten $J \in \mathcal{J}_N$ der für die herauslaufenden Kanten vorgegebene Wert u_J genau dem Mittel aller Werte auf den hineinlaufenden Kanten entsprechen.

Unter bestimmten Voraussetzungen legen diese Knotenbedingungen die Funktion u bereits eindeutig fest. In diesem Fall muß die gesamte Folge $(u^{(n)})$ gegen u konvergieren, was der folgende Satz aussagt.

Satz 2.18. *Ausgehend von der gegebenen Situation existiere eine Netzwerk-Funktion $\zeta \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_+^1(\Omega_i)$ mit folgenden Eigenschaften. Für die Übergangsmatrizen \mathcal{T}_J^ζ , die wir für alle Neumann-Knoten $J \in \mathcal{J}_N$ definieren als*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_J^\zeta &= (T_{ik})_{i \in \mathcal{I}_J^-, k \in \mathcal{I}_J^+}, \\ T_{ik} &= |d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} |d_{kJ}(-\beta_k + \gamma_k)(\Gamma_J)|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\zeta_i(\Gamma_J)}{\zeta_k(\Gamma_J)} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

gelte für alle $J \in \mathcal{J}_N$

$$\|\mathcal{T}_J^\zeta\|_2 \leq C_J := \sum_{i \in \mathcal{I}_J^-} d_{iJ}(-\beta_i + \gamma_i)(\Gamma_J) + \sum_{i \in \mathcal{I}_J^+} d_{iJ}\beta_i(\Gamma_J).$$

Darüberhinaus sei für alle Kanten $i \in \mathcal{I}$ mit einer Konstante $\delta > 0$

$$-\frac{1}{2}(\beta_i \zeta_i)' + (\alpha_i - \delta)\zeta_i \geq 0.$$

Dann ist u durch (2.142)–(2.144) eindeutig bestimmt. Es liegt also schwache Konvergenz der gesamten Folge $(u^{(n)})$ gegen u vor. Falls die Folge $(f^{(n)})$ der rechten Seiten sogar stark gegen f konvergiert, dann konvergiert auch $u^{(n)}$ stark gegen u .

Beweis. Die Eindeutigkeit der Grenzfunktion folgt direkt aus 2.14. Falls die rechten Seiten sogar stark konvergieren, sind für jede einzelne Kante die Voraussetzungen des Satzes 2.12 erfüllt. Es gilt also für alle $i \in \mathcal{I}$

$$u_i^{(n)} \rightarrow u_i \quad \text{stark in } L^2(\Omega_i)$$

und damit

$$u^{(n)} \rightarrow u \quad \text{stark in } H.$$

□

2.4 Probleme in nicht-variationeller Darstellung

Die in 2.1.2 eingeführten Differentialoperatoren sind zugeschnitten auf die variationelle Formulierung von Problemen. Eine Netzwerk-Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{A}u = f$$

läßt sich mit den neuen Koeffizienten

$$b_i := -\beta_i + \gamma_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (2.148)$$

$$a_i := -\beta'_i + \alpha_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (2.149)$$

$$g_J := \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \beta_i(\Gamma_J) \quad \forall J \in \mathcal{J}_N \quad (2.150)$$

auch schreiben als

$$(-\epsilon_i u'_i)' + b_i u'_i + a_i u_i = f_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (2.151)$$

$$u_i(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}, \quad (2.152)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} \epsilon_i u'_i(\Gamma_J) + g_J u(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \quad (2.153)$$

Geht man jedoch von einem Problem der Form (2.151)–(2.153) aus, so lassen sich zwar immer Koeffizienten α_i , β_i und γ_i so wählen, daß (2.148)–(2.150) gilt. Die Wahl ist aber nicht eindeutig, insbesondere die Aufspaltung von b_i in β_i und γ_i . Allerdings spielt dies in vielen Fällen gar keine Rolle, da sich viele Resultate in diesem Kapitel direkt mit den Koeffizienten a_i , b_i und g_J ausdrücken lassen. Beispielsweise können wir (2.114) und (2.115) auch schreiben als

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i \zeta'_i)(\Gamma_J) + \left(\frac{1}{2} \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} b_i(\Gamma_J) + g_J \right) \zeta(\Gamma_J) \geq \mu \quad \forall J \in \mathcal{J}_N$$

und

$$-\frac{1}{2} (\epsilon_i \zeta'_i + b_i \zeta_i)' + (a_i - \delta) \zeta_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

So können wir Lemma 2.18 auch formulieren, ohne daß wir Koeffizienten α_i , β_i und γ_i festlegen.

2.5 Zeitdynamische Probleme

Abschließend soll kurz demonstriert werden, wie sich die bisherigen Ergebnisse mit Hilfe von Halbgruppentheorie auf zeitdynamische Probleme anwenden lassen. Insbesondere erweisen sich die gewichteten L^2 -Normen als nützlich für Normabschätzungen für die Halbgruppen, und sie ermöglichen mit Satz 2.14 und Satz 2.16 einen einfachen Zugang zur Halbgruppentheorie, der ohne die Restriktionen (2.102) und (2.112) auskommt. Darüberhinaus soll auch kurz demonstriert werden, wie Maximumprinzipien für die Konstruktion von Gewichtsfunktionen verwendet werden können. Um die folgenden Beispiele einfach zu halten, ziehen wir uns auf die Situation des beschränkten Intervalls zurück.

Zunächst kommen wir noch mal auf die Differentialoperatoren erster Ordnung zurück, die bis auf weiteres mit L bezeichnet seien. L sei gegeben durch

$$\begin{aligned} D(L) &= \{u \in L^2(\Omega) \mid (\gamma u)' \in L^2(\Omega), (\gamma u)(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_-\}, \\ Lu &= D_\gamma u + \alpha u, \end{aligned}$$

$\delta \in \mathbb{R}$ sei so gewählt, daß die Bedingung (2.30) erfüllt ist. Dann ist für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c > -\delta$ nach Satz 2.3 $-c \in \rho(L)$ und

$$\|(L + c)\|^{-1} \leq \frac{1}{\delta + c}.$$

Also existiert für alle $c > -\delta$ und $n \in \mathbb{N}$ auch

$$\left(I - \frac{1}{n}(-(L + c))\right)^{-1} = n(L + (n + c))^{-1},$$

und es gilt

$$\left\| \left(I - \frac{1}{n}(-(L + c))\right)^{-1} \right\| \leq n \frac{1}{\delta + n + c} < 1.$$

Nach Corollar IX.7.1 in [35] erzeugt $-(L + c)$ eine stark stetige Halbgruppe $S_c(t)$ im Hilbertraum $L^2(\Omega)$ mit

$$\|S_c(t)\| \leq 1 \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Definiert man

$$S(t) := e^{ct} S_c(t),$$

so sieht man mit

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (S(h) - I)u &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{ch} S_c(h) - I)u \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{ch} S_c(h) - S_c(h) + S_c(h) - I)u \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{ch} - 1) S_c(h)u + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (S_c(h) - I)u \\ &= cu - (L + c)u \\ &= -Lu, \end{aligned}$$

daß $-L$ die Halbgruppe $S(t)$ erzeugt. Für $S(t)$ gilt also

$$\|S(t)\| = e^{ct} \|S_c(t)\| \leq e^{ct}. \quad (2.154)$$

Da die Abschätzung (2.154) für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt, für welche es ein $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$c > -\delta \geq -\left(-\frac{1}{2}\gamma' + \alpha\right),$$

so kann man schreiben

$$\|S(t)\| \leq e^{Ct} \quad (2.155)$$

mit

$$C = -\inf_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\gamma' + \alpha \right).$$

Entsprechend dazu können wir auch Satz 2.4 als Grundlage nehmen und mit gewichteten Normen arbeiten. Für eine beliebige Funktion $\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)$ gilt, analog zu (2.155),

$$\|S(t)\|^\psi \leq e^{C_\psi t}$$

mit

$$C_\psi = -\inf_{\Omega} \left(-\frac{1}{\psi}\gamma\psi' - \frac{1}{2}\gamma' + \alpha \right).$$

Für die kanonische Norm gilt somit die Abschätzung

$$\|S(t)\| \leq \left(\frac{\sup_{\Omega} \psi(x)}{\inf_{\Omega} \psi(x)} \right) e^{C_\psi t}.$$

Eine möglichst gute Schranke erhalten wir, wenn wir die rechte Seite dieser Abschätzung über alle $\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)$ minimieren. Dazu minimieren wir für jede Konstante $\delta \in \mathbb{R}$ den Term

$$Q_\delta := \frac{\sup_{\Omega} \psi(x)}{\inf_{\Omega} \psi(x)}$$

über alle $\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)$ mit

$$\inf_{\Omega} \left(-\gamma\psi' + \left(-\frac{1}{2}\gamma' + \alpha - \delta \right) \psi \right) \geq 0. \quad (2.156)$$

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, daß α und γ konstant sind, und $\gamma \geq 0$, da es in diesem Fall möglich ist, die Funktionen ψ optimal zu bestimmen. Falls $\alpha - \delta \geq 0$, ist $Q_\delta = 1$, da der Ausdruck in (2.156) für konstante ψ nichtnegativ ist. Im Fall $\alpha - \delta < 0$ existiert für $\gamma = 0$ überhaupt keine zulässige Funktion ψ . Falls $\gamma > 0$, betrachten wir alle Funktionen $\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} -\gamma\psi' + (\alpha - \delta)\psi &\geq 0, \\ \psi(0) &= 1. \end{aligned}$$

Diese müssen alle monoton fallend sein. Q_δ^{-1} ist somit der größte von einer solchen Funktion ψ angenommene Wert an der Stelle $x = 1$. Dieser Wert wird von ψ_δ , gegeben durch

$$\begin{aligned} -\gamma\psi'_\delta + (\alpha - \delta)\psi_\delta &= 0, \\ \psi_\delta(0) &= 1, \end{aligned}$$

angenommen. Es gilt

$$\psi_\delta(x) = e^{\frac{\alpha - \delta}{\gamma}x}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\|S(t)\| \leq \begin{cases} \min\left\{\inf_{\delta \leq \alpha} e^{-\delta t}, \inf_{\delta > \alpha} \frac{1}{\psi_\delta(1)} e^{-\delta t}\right\}, & \text{falls } \gamma > 0, \\ \inf_{\delta \leq \alpha} e^{-\delta t}, & \text{falls } \gamma = 0, \end{cases}$$

was sich auswerten läßt zu

$$\|S(t)\| \leq \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{falls } \gamma t \leq 1, \\ 0, & \text{falls } \gamma t > 1. \end{cases}$$

Beim Zeitpunkt $t = \frac{1}{\gamma}$ können wir noch die starke Stetigkeit der Halbgruppe ausnutzen und erhalten schließlich

$$\|S(t)\| \leq \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{falls } \gamma t < 1, \\ 0, & \text{falls } \gamma t \geq 1. \end{cases}$$

Daran kann man direkt sehen, daß ein Impuls die Zeit $t = \frac{1}{\gamma}$ benötigt, um von $x = 0$ nach $x = 1$ zu wandern. Das Ergebnis kann man bei dem einfachen Beispiel auch anhand der expliziten Lösung überprüfen, weil die Halbgruppenabbildung in diesem Fall nur eine verallgemeinerte Verschiebungsoperation ist.

Wir betrachten nun den etwas allgemeineren Fall, daß α weiterhin konstant ist und γ mit einer Konstante $b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann als

$$\gamma(x) = 1 + bx.$$

Dabei soll b so gewählt werden, daß $\gamma(x) > 0$ auf $[0, 1]$, es muß also $b > -1$ sein. Bei der Berechnung der expliziten Lösung $u(t, x)$ mit $u(0, x) = f(x)$ liegt die Idee zugrunde, daß man γ als Ausbreitungsgeschwindigkeit auffassen kann. Denn für konstante γ und $\alpha = 0$ gilt

$$u(t, x) = f(x - \gamma t).$$

Um die allgemeinere Wahl der Funktion γ zu betrachten, verfolgen wir den Weg eines gedachten Teilchens, was zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $s(0) = x_0$ startet. Für seine Geschwindigkeit $v(t)$ gilt

$$v(t) = \gamma(s(t)) = 1 + bs(t).$$

Also haben wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt}(t) &= 1 + bs(t), \\ s(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Lösung mit Variation der Konstanten liefert

$$s(t) = \begin{cases} e^{bt}x_0 + \frac{1}{b}(e^{bt} - 1), & \text{falls } b \neq 0, \\ x_0 + t, & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt ist jetzt für gegebene $t \geq 0$ und $x = s(t)$ das passende x_0 zu finden. Berücksichtigt man den Parameter α auch noch, so ergibt sich im Fall $b \neq 0$

$$u(t, x) = \begin{cases} e^{-\alpha t} f(e^{-bt}x + \frac{1}{b}(e^{-bt} - 1)), & \text{falls } e^{-bt}x - \frac{1}{b}(e^{bt} - 1) > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und falls $b = 0$

$$u(t, x) = \begin{cases} e^{-\alpha t} f(x - t), & \text{falls } x - t > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daß u tatsächlich Lösung von

$$\dot{u} = -(\gamma u' + \alpha u)$$

ist, kann man durch Einsetzen überprüfen.

Genau wie oben, kann man auch für diese Wahl von γ Abschätzungen für die Halbgruppe erhalten. Es ergibt sich

$$\psi_\delta(x) = (1 + bx)^{\frac{1}{b}(\alpha - \frac{b}{p} - \delta)},$$

und

$$\|S(t)\| \leq \begin{cases} e^{-(\alpha - \frac{b}{2})t}, & \text{falls } t < \frac{1}{b} \ln(1 + b), \\ 0, & \text{falls } t \geq \frac{1}{b} \ln(1 + b), \end{cases} \quad (2.157)$$

falls $b \neq 0$, und

$$\|S(t)\| \leq \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{falls } t < 1, \\ 0, & \text{falls } t \geq 1, \end{cases}$$

falls $b = 0$.

Abbildung 2.4 zeigt das unterschiedliche Verhalten der Lösungen für $\gamma(x) = 1 + x$ von

$$Lu = \gamma u' \quad (\text{obere Kurve})$$

und

$$Lu = (\gamma u)' \quad (\text{untere Kurve})$$

(2.157) können wir entnehmen, daß $\|S(t)\| \leq e^{\frac{t}{2}}$, falls $Lu = \gamma u'$ und $\|S(t)\| \leq e^{-\frac{t}{2}}$, falls $Lu = (\gamma u)'$.

Bei Differentialoperatoren zweiter Ordnung ist die Bestimmung optimaler Funktionen ψ , auch bei konstanten Koeffizienten, komplizierter, wenn überhaupt möglich. Gegeben sei der Differentialoperator A_ϵ , definiert durch

$$D(A_\epsilon) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in H_0^1(\Omega), \epsilon u' \in H^1(\Omega)\},$$

$$A_\epsilon u = -(\epsilon u')' + \gamma u' + \alpha u,$$

mit konstanten Koeffizienten $\epsilon > 0$, $\gamma \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie bei den Operatoren erster Ordnung sehen wir auch in diesem Fall, daß $-A_\epsilon$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe $S_\epsilon(t)$ in $L^2(\Omega)$ ist. Mit den gleichen Überlegungen wie dort ergibt sich, daß für alle Funktionen $\psi \in C_+^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ die Abschätzung

$$\|S_\epsilon(t)\|^{\psi^{\frac{1}{2}}} \leq e^{C_\psi t},$$

mit

$$C_\psi = -\inf_{\Omega} \left(\frac{1}{\psi} \left(-\frac{1}{2} \epsilon \psi'' - \frac{1}{2} \gamma \psi' + \alpha \psi \right) \right),$$

und damit

$$\|S_\epsilon(t)\| \leq \left(\frac{\sup_{\Omega} \psi(t)}{\inf_{\Omega} \psi(t)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{C_\psi t}.$$

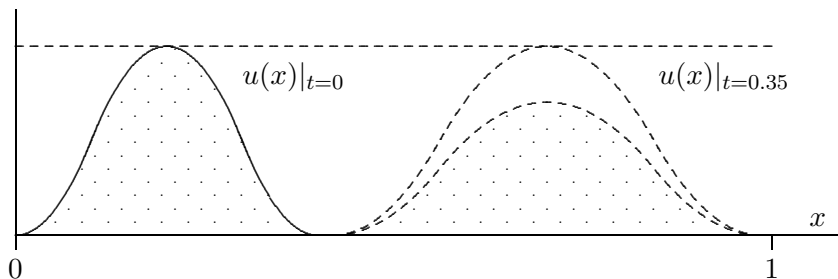


Abbildung 2.4: Unterschiedliches Verhalten von Wellen

Für eine fest gewählte Zahl δ betrachten wir wieder alle Funktionen ψ mit

$$\inf_{\Omega} \left(-\frac{1}{2}\epsilon\psi'' - \frac{1}{2}\gamma\psi' + (\alpha - \delta)\psi \right) \geq 0 \quad (2.158)$$

und minimieren unter diesen Funktionen den Ausdruck

$$Q_{\delta} = \frac{\sup_{\Omega} \psi(t)}{\inf_{\Omega} \psi(t)}.$$

Falls $\alpha - \delta \geq 0$, so gilt $Q_{\delta} = 1$. Andernfalls betrachten wir die Lösungen der Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2}\epsilon\psi'' - \frac{1}{2}\gamma\psi' + (\alpha - \delta)\psi = 0. \quad (2.159)$$

Es treten drei Fälle auf, abhängig vom Vorzeichen von

$$D = \gamma^2 + 8\epsilon(\alpha - \delta).$$

Lösungen von (2.159) sind, falls $D > 0$,

$$\psi(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C},$$

mit

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{D}}{2\epsilon},$$

$$\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{D}}{2\epsilon}.$$

Für $D = 0$, lauten die Lösungen

$$\psi(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C},$$

mit

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2\epsilon},$$

und für $D < 0$

$$\psi(x) = C_1 e^{ax} \sin(bx) + C_2 e^{ax} \cos(bx), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \quad (2.160)$$

mit

$$a = -\frac{\gamma}{2\epsilon},$$

$$b = \frac{\sqrt{-D}}{2\epsilon}.$$

Falls die halbe Periodenlänge der Sinusfunktion in (2.160) kleiner oder gleich der Länge von Ω ist, kann man mit (2.160) eine Funktion erzeugen, die zwar an den Randpunkten nichtnegativ ist, dazwischen jedoch einen Bereich mit negativen Werten hat. Nach Lemma 2.10 kann es in diesem Fall gar keine Funktion $\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ geben, die (2.158) erfüllt, denn das wäre ein Widerspruch zur Aussage dieses Lemmas. Diese Situation tritt genau dann ein, wenn

$$b \geq \pi,$$

also

$$\delta \geq \alpha + \frac{(2\pi\epsilon)^2 + \gamma^2}{8\epsilon}.$$

In allen anderen Fällen läßt sich jedoch mit Hilfe obiger Lösungsformeln eine Funktion $\psi \in \mathcal{C}_+^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ angeben mit

$$-\frac{1}{2}\epsilon\psi'' - \frac{1}{2}\gamma\psi' + (\alpha - \delta)\psi \geq 0. \quad (2.161)$$

Es gilt also das Maximumprinzip. Damit können wir uns leicht überlegen, daß jede positive Funktion, die (2.161) erfüllt, ihren Minimalwert an einem der Randpunkte annimmt, und daß die Funktion ψ_δ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi_\delta(0) &= 1, \\ \psi_\delta(1) &= 1, \\ -\frac{1}{2}\epsilon\psi_\delta'' - \frac{1}{2}\gamma\psi_\delta' + (\alpha - \delta)\psi_\delta &= 0, \end{aligned}$$

optimal ist. Diese Funktion ist, je nach betrachtetem Fall,

$$\begin{aligned} \psi_\delta(x) &= \frac{1}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}} \left((1 - e^{\lambda_2})e^{\lambda_1 x} - (1 - e^{\lambda_1})e^{\lambda_2 x} \right), \\ \psi_\delta(x) &= e^{\lambda x} + (e^{-\lambda} - 1)xe^{\lambda x}, \end{aligned}$$

oder

$$\psi_\delta(x) = \frac{1}{\sin(b)} e^{ax} (\sin(b) \cos(bx) + (\cos(b) + e^{-a}) \sin(bx)).$$

Mit

$$m_\delta := \max_{\Omega} \psi_\delta$$

erhalten wir

$$\|S(t)_\epsilon\| \leq \min \left\{ \inf_{\delta \leq \alpha} e^{-\delta t}, \inf_{\alpha < \delta < \alpha + \frac{(2\pi\epsilon)^2 + \gamma^2}{8\epsilon}} \sqrt{m_\delta} e^{-\delta t} \right\}.$$

Eine analytische Berechnung dieses Ausdrucks scheint sehr aufwendig oder gar unmöglich.

Die Verwendung von Exponentialfunktionen, wie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung liefert für alle $\theta \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\|S_\epsilon(t)\| \leq \left(\frac{\sup_\Omega e^{\theta x}}{\inf_\Omega e^{\theta x}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{C_\theta t}$$

mit

$$C_\theta = \frac{1}{2}\epsilon\theta^2 + \frac{1}{2}\gamma\theta - \alpha.$$

Außerdem gilt

$$\left(\frac{\sup_\Omega e^{\theta x}}{\inf_\Omega e^{\theta x}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{|\theta|}{2}}.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \|S_\epsilon(t)\| &\leq \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left(e^{\frac{|\theta|}{2}} e^{(\frac{1}{2}\epsilon\theta^2 + \frac{1}{2}\gamma\theta - \alpha)t} \right) \\ &= e^{\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left(\frac{|\theta|}{2} + \frac{1}{2}\epsilon t\theta^2 + \frac{1}{2}\gamma t\theta \right)} e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$g(\theta) := \frac{|\theta|}{2} + \frac{1}{2}\epsilon t\theta^2 + \frac{1}{2}\gamma t\theta$$

ist stückweise eine nach oben geöffnete Parabel. Es gilt

$$g'(\theta) = \begin{cases} \epsilon t\theta + \frac{1}{2}(-1 + \gamma t), & \text{falls } \theta < 0, \\ \epsilon t\theta + \frac{1}{2}(1 + \gamma t), & \text{falls } \theta > 0. \end{cases}$$

Für $\theta > 0$ kann g' also keine Nullstelle haben, und für $\theta < 0$ gibt es genau dann eine, wenn $\gamma t > 1$, nämlich

$$\theta_{\min} = -\frac{\gamma t - 1}{2\epsilon t}.$$

Der entsprechende Funktionswert ist

$$\begin{aligned} g(\theta_{\min}) &= \frac{1}{2}\epsilon t \frac{(\gamma t - 1)^2}{4\epsilon^2 t^2} + \frac{1}{2}(-1 + \gamma t) \frac{1 - \gamma t}{2\epsilon t} \\ &= \frac{(\gamma t - 1)^2 - 2(\gamma t - 1)^2}{8\epsilon t} \\ &= -\frac{(\gamma t - 1)^2}{8\epsilon t}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt die Abschätzung

$$\|S_\epsilon(t)\| \leq \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{falls } \gamma t \leq 1, \\ e^{-\frac{(\gamma t - 1)^2}{8\epsilon t}} e^{-\alpha t}, & \text{falls } \gamma t > 1. \end{cases}$$

Ab dem Zeitpunkt $t = \frac{1}{\gamma}$ klingt die Halbgruppe also mindestens exponentiell ab, und zwar je kleiner ϵ ist, desto schneller.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich der Konvergenzsatz 2.10 mit Theorem IX.12.1 in [35] auch auf die Halbgruppen übertragen läßt. Es gilt

Satz 2.19. *Falls $\|\epsilon\|_\infty \rightarrow 0$, so gilt für alle $f \in L^2(\Omega)$ und alle $t \in (0, \infty)$*

$$S_\epsilon(t)f \rightarrow S(t)f, \tag{2.162}$$

wenn $S_\epsilon(t)$ die durch $-A_\epsilon$ und $S(t)$ die durch $-L$ erzeugte Halbgruppe ist. Dabei ist die Konvergenz in (2.162) gleichmäßig auf allen kompakten Teilintervallen von $(0, \infty)$.

Kapitel 3

Simulation

Dieses Kapitel besteht zu einem großen Teil darin, Vorgehensweisen zur Lösung linearer elliptischer Netzwerk-Differentialgleichungen zu beschreiben. Denn die Verfahren, die bei der Simulation der Prozesse entlang der Wurzel angewandt und in den Abschnitten 3.2 und 3.3 dargestellt werden, basieren auf der Lösung solcher Gleichungen.

Im Boden sind Gleichungen desselben Typs wie auf der Wurzel zu lösen. Im Unterschied zur Wurzel haben wir es jedoch nicht mit einem Netzwerk zu tun, sondern mit Gleichungen auf einem Gebiet, was die Sache einfacher macht. Andererseits bereitet der Umstand, daß dieses Gebiet im Gegensatz zur Wurzel mehrdimensional ist, im Rahmen dieser Arbeit keine zusätzlichen Schwierigkeiten, und die Gleichungen im Boden werden mit genau denselben Verfahren gelöst wie die entlang der Wurzel. Deshalb werden wir uns bei den folgenden Ausführungen auf die Netzwerk-Gleichungen entlang der Wurzel beschränken und verweisen, was die Implementierung auf mehrdimensionalen Gebieten betrifft, auf Anhang B.

3.1 Numerische Lösung elliptischer Differentialgleichungen auf Netzwerken

Wir beziehen uns auf die in 2.1.2 dargestellte Situation, nur verwenden wir reelle Räume anstelle von komplexen. Wie wir zu Beginn von Abschnitt 2.3.2 gesehen haben, kann das Problem, zu gegebenem $f \in H$ eine Funktion $u \in D(\mathcal{A})$ zu finden mit $\mathcal{A}u = f$, in variationeller Form mit der Bilinearform

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$
$$(v, u) \mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} (v'_i, \epsilon_i u'_i) + (\beta_i v'_i, u_i) + (v_i, \gamma_i u'_i) + (v_i, \alpha_i u_i)$$

formuliert werden. Für eine Funktion $u \in V$ ist

$$u \in D(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}u = f$$

äquivalent zu

$$a(v, u) = (v, f)_H \quad \forall v \in V. \quad (3.1)$$

(3.1) kann mittels einer Finite-Elemente-Approximation V_h an den Raum V gelöst werden. Für V_h bietet sich, ausgehend von einer Zerlegung jeder Kante in Teilintervalle, der Raum aller stückweise affinen und stetigen Funktionen auf dem Netzwerk an. Eine Basis von V_h bilden die Hutfunktionen im Inneren einer jeden Kante, zusammen mit speziellen Hutfunktionen an den Neumann-Knoten (siehe Abbildung 3.1). Der Index h bezeichne die maximale Länge der Teilintervalle aller Kanten. Für jede Kante $i \in \mathcal{I}$ sei, basierend auf der erwähnten Zerlegung in Teilintervalle, $V_i^{0,h}$ der Raum der stetigen, stückweise affinen Funktionen auf Ω_i mit verschwindenden Randwerten. Es ist bekannt, siehe zum Beispiel [31], daß Konstanten $C_i > 0$ existieren mit

$$\inf_{w_h \in V_i^{0,h}} \|w_h - v\|_{H^1(\Omega_i)} \leq C_i h \|v''\|_2 \quad \forall v \in H^2(\Omega_i) \cap H_0^1(\Omega_i). \quad (3.2)$$

Wir zeigen jetzt, daß wir diese Abschätzung auf Netzwerk-Funktionen $v \in V$ mit $v_i \in H^2(\Omega_i)$ für alle $i \in \mathcal{I}$ übertragen können. Falls $\epsilon_i \in \mathcal{C}^1(\Omega_i)$ für alle $i \in \mathcal{I}$, sind das genau die Funktionen in $D(\mathcal{A})$. Zu einer solchen Funktion v sei \bar{v} die Netzwerk-Funktion, die auf jeder Kante affin ist und in allen Knoten mit v übereinstimmt. \bar{v} ist, unabhängig davon wie die Kanten in Teilintervalle zerlegt werden, stets in V_h enthalten, und für die Differenz $v^0 := v - \bar{v}$ gilt

$$v^0(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}.$$

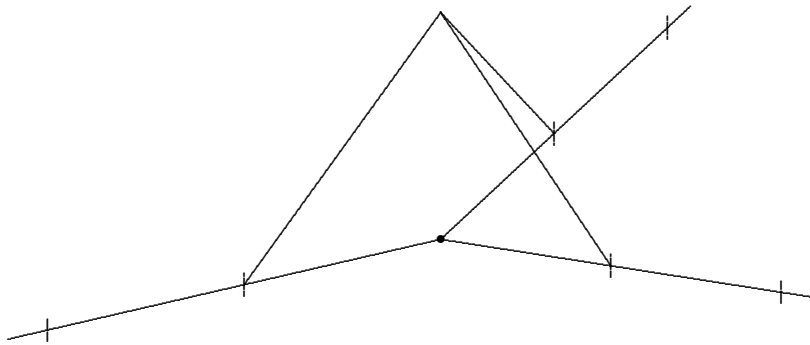


Abbildung 3.1: Hutfunktion am Knoten

Die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V &= \inf_{v_h \in V_h} \|v^0 + \bar{v} - v_h\|_V \\
&= \inf_{v_h \in V_h} \|v^0 - v_h\|_V \\
&\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \inf_{w_{h,i} \in V_i^{0,h}} \|v_i^0 - w_{h,i}\|_{V^i} \\
&\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i h \| (v_i^0)'' \|_2 \\
&= (\max_{i \in \mathcal{I}} C_i) h \sum_{i \in \mathcal{I}} \|v_i''\|_2
\end{aligned}$$

entspricht (3.2). Wegen der V -Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ müssen die mit dem Finite-Elemente-Verfahren erhaltenen Lösungen für $h \rightarrow 0$ gegen die gesuchte Lösung konvergieren, und wenn diese in $\prod_{i \in \mathcal{I}} H^2(\Omega_i)$ enthalten ist, läßt sich auch der Fehler abschätzen.

Alternativ zur direkten variationellen Lösung des Problems können aber auch nichtüberlappende Bereichszerlegungsverfahren angewandt werden, siehe [7] für Gebiete und [20], [21] für Netzwerke. Auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
a_i : V_i \times V_i &\rightarrow \mathbb{R}, \\
(v_i, u_i) &\mapsto (v_i', \epsilon_i u_i') + (\beta_i v_i', u_i) + (v_i, \gamma_i u_i') + (v_i, \alpha_i u_i).
\end{aligned}$$

Falls \mathcal{A} symmetrisch ist, also wenn $\beta_i = \gamma_i$ für alle $i \in \mathcal{I}$, ist die gesuchte Lösung auf dem Netzwerk die Lösung der Minimierungsaufgabe

$$\min_{\substack{v \in \prod_{i \in \mathcal{I}} V_i \\ \xi \in \prod_{J \in \mathcal{J}_N} \mathbb{R}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{2} a_i(v_i, v_i) - (v_i, f_i)$$

unter der Nebenbedingung

$$v_i(\Gamma_J) = \xi_J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J,$$

welche die Stetigkeit an den Neumann-Knoten ausdrückt. Mit beliebigen positiven Konstanten $\tilde{\eta}_{i,J}$ schreiben wir diese Stetigkeitsbedingung als

$$\tilde{\eta}_{i,J}(v_i(\Gamma_J) - \xi_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J.$$

Die zugehörige penaltisierte Lagrange-Funktion mit Penalty-Parameter η lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} : \left(\prod_{i \in \mathcal{I}} V_i \right) \times \left(\prod_{J \in \mathcal{J}_N} \mathbb{R} \right) \times \left(\prod_{J \in \mathcal{J}_N} \prod_{i \in \mathcal{I}_J} \mathbb{R} \right) &\rightarrow \mathbb{R}, \\
(v, \xi, \mu) &\mapsto \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{2} a_i(v_i, v_i) - (v_i, f_i) \right) + \frac{\eta}{2} \sum_{J \in \mathcal{J}_N} \sum_{k \in \mathcal{I}_J} |\tilde{\eta}_{k,J}(v_k(\Gamma_J) - \xi_J)|^2 \\
&\quad + \sum_{J \in \mathcal{J}_N} \sum_{k \in \mathcal{I}_J} \mu_{k,J} \tilde{\eta}_{k,J}(v_k(\Gamma_J) - \xi_J).
\end{aligned}$$

Die Verwendung von ‚Algorithmus 3‘, einem speziellen Abstiegsverfahren für Sattelpunktprobleme (siehe [16]), liefert mit

$$\eta_{iJ} := \tilde{\eta}_{iJ}^2 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J$$

folgendes Iterationsschema.

Wähle beliebige Anfangsdaten

$$(u_i^{(0)}) \in \prod_{i \in \mathcal{I}} V_i, \quad (\tau_{iJ}^{(1)}) \in \prod_{J \in \mathcal{J}_N} \prod_{i \in \mathcal{I}_J} \mathbb{R}.$$

Setze $n := 1$

11: Für alle $i \in \mathcal{I}$: Bestimme $u_i^{(n)} \in V_i$ so, daß für alle $v_i \in V_i$

$$a_i(v_i, u_i^{(n)}) + \sum_{J \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_N} \eta_{iJ} (v_i u_i^{(n)}) (\Gamma_J) = (v_i, f_i) + \sum_{J \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_N} v_i (\Gamma_J) \tau_{iJ}^{(n)}.$$

Für alle $J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J$:

$$\Delta \tau_{iJ} := -2\eta_{iJ} u_i^{(n)} (\Gamma_J) - 2 \frac{\eta_{iJ}}{\sum_{k \in \mathcal{I}_J} \eta_{kJ}} \sum_{k \in \mathcal{I}_J} (\tau_{kJ}^{(n)} - 2\eta_{kJ} u_k^{(n)} (\Gamma_J))$$

Falls $|\Delta \tau_{iJ}| < \epsilon_{\text{stop}}$ für alle $J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J$:

stop, nehme $(u_i^{(n)})$ als Lösung.

Für alle $J \in \mathcal{J}_N, i \in \mathcal{I}_J$:

$$\tau_{iJ}^{(n+1)} := \tau_{iJ}^{(n)} + \Delta \tau_{iJ}$$

$n := n + 1$, gehe zu 11.

Die beiden vorgestellten Alternativen, die direkte Lösung auf dem ganzen Netzwerk und die Lösung mittels Bereichszerlegung, können flexibel miteinander kombiniert werden, indem man das Netzwerk für die Bereichszerlegung in Teilnetzwerke zerlegt, die aber ihrerseits aus mehreren Kanten bestehen können. Besonders vor dem Hintergrund der Tatsache, daß Bereichszerlegungen oft im Zusammenhang mit Parallelisierungen implementiert werden, erscheint dies sinnvoll. Denn die Anzahl der Teilbereiche kann mit dieser Methode den jeweiligen Gegebenheiten angepaßt werden.

Obwohl es in der Hauptsache Formalismus ist, wollen wir kurz darlegen, wie dies konkret umgesetzt werden kann. Zugrundegelegt sei eine Partition

der Kantenmenge in eine beliebige Anzahl m von Bereichen, die wir mit $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_m\}$ bezeichnen. Es gilt also

$$\mathcal{I} = P_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} P_m.$$

\mathcal{P} erzeugt in kanonischer Weise auch eine Partition $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_R\}$ auf der Menge der Neumann-Knoten, indem man jeweils die Knoten, deren inzidente Kanten zu genau denselben Bereichen gehören, zusammenfaßt. Wir definieren dazu für alle $J \in \mathcal{J}_N$

$$\mathcal{P}_J := \{P_i \in \mathcal{P} : P_i \cap \mathcal{I}_J \neq \{\}\}$$

und die Äquivalenzrelation \sim auf \mathcal{J}_N durch

$$J \sim J' \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{J'}.$$

\mathcal{Q} sei die Menge der so erhaltenen Äquivalenzklassen und ist dadurch bis auf Permutation eindeutig bestimmt. Die Mengen Q_K bezeichnen wir im weiteren Verlauf als Interfaces. Zwischen der Menge \mathcal{Q} der Interfaces und der Menge \mathcal{P} der Bereiche läßt sich eine Inzidenzrelation \mathcal{R} aufstellen. Für $i \in \{1, \dots, m\}$, $K \in \{1, \dots, R\}$ sei

$$(Q_K, P_i) \in \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad \exists J \in Q_K, k \in P_i : k \in \mathcal{I}_J,$$

und es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_K &:= \{P_j \in \mathcal{P} : (Q_K, P_j) \in \mathcal{R}\}, \\ \mathcal{Q}_i &:= \{Q_L \in \mathcal{Q} : (Q_L, P_i) \in \mathcal{R}\}. \end{aligned}$$

Für jeden Bereich $i \in \{1, \dots, m\}$ definieren wir

$$\mathcal{V}_i := \{v \in \prod_{k \in P_i} V_k \mid v_{k_1}(\Gamma_J) = v_{k_2}(\Gamma_J) \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, k_1, k_2 \in \mathcal{I}_J \cap P_i\}$$

und die verallgemeinerte Bilinearform

$$\begin{aligned} a_i : \mathcal{V}_i \times \mathcal{V}_i &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, u) &\mapsto \sum_{k \in P_i} (v'_k, \epsilon_k u'_k) + (\beta_k v'_k, u_k) + (v_k, \gamma_k u'_k) + (v_k, \alpha_k u_k) \end{aligned}$$

und stellen das Minimierungsproblem

$$\min_{\substack{v \in \prod_{i=1}^m \mathcal{V}_i \\ \xi \in \prod_{K=1}^R \prod_{J \in Q_K} \mathbb{R}}} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} a_i(v_i, v_i) - (v_i, f_i)$$

unter der Nebenbedingung

$$\tilde{\eta}_{iKJ}(v_i(\Gamma_J) - \xi_{KJ}) = 0 \quad \forall K \in \{1, \dots, R\}, P_i \in \mathcal{P}_K, J \in Q_K.$$

Die zugehörige Lagrange-Funktion ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \left(\prod_{i=1}^m \mathcal{V}_i \right) \times \left(\prod_{K=1}^R \prod_{J \in Q_K} \mathbb{R} \right) \times \left(\prod_{K=1}^R \prod_{P_i \in \mathcal{P}_K} \prod_{J \in Q_K} \mathbb{R} \right) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, \xi, \mu) &\mapsto \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} a_i(v_i, v_i) - (v_i, f_i) \right) \\ &+ \frac{\eta}{2} \sum_{K=1}^R \sum_{P_i \in \mathcal{P}_K} \sum_{J \in Q_K} |\tilde{\eta}_{iKJ}(v_i(\Gamma_J) - \xi_{KJ})|^2 \\ &+ \sum_{K=1}^R \sum_{P_i \in \mathcal{P}_K} \sum_{J \in Q_K} \mu_{iKJ} \tilde{\eta}_{iKJ}(v_i(\Gamma_J) - \xi_{KJ}). \end{aligned}$$

Wieder mit ‚Algorithmus 3‘ und $\eta_{iKJ} := \tilde{\eta}_{iKJ}^2$ erhalten wir

Wähle beliebige Anfangsdaten

$$(u_i^{(0)}) \in \prod_{i=1}^m \mathcal{V}_i, \quad (\tau_{iKJ}^{(1)}) \in \prod_{K=1}^R \prod_{P_i \in \mathcal{P}_K} \prod_{J \in Q_K} \mathbb{R}.$$

Setze $n := 1$

11: Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$: Bestimme $u_i^{(n)} \in \mathcal{V}_i$ so, daß für alle $v_i \in \mathcal{V}_i$

$$\begin{aligned} a_i(v_i, u_i^{(n)}) + \sum_{Q_K \in \mathcal{Q}_i} \sum_{J \in Q_K} \eta_{iKJ}(v_i u_i^{(n)})(\Gamma_J) &= (v_i, f_i) \\ &+ \sum_{Q_K \in \mathcal{Q}_i} \sum_{J \in Q_K} v_i(\Gamma_J) \tau_{iKJ}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Für alle $K \in \{1, \dots, R\}$, $P_i \in \mathcal{P}_K$, $J \in Q_K$:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_{iKJ} &:= -2\eta_{iKJ} u_i^{(n)}(\Gamma_J) \\ &- 2 \frac{\eta_{iKJ}}{\sum_{P_j \in \mathcal{P}_K} \eta_{jKJ}} \sum_{P_j \in \mathcal{P}_K} (\tau_{jKJ} - 2\eta_{jKJ} u_j^{(n)}(\Gamma_J)) \end{aligned}$$

Falls $(\sum_{J \in Q_K} |\Delta \tau_{iKJ}|^2)^{\frac{1}{2}} < \epsilon_{\text{stop}}$ für alle $K \in \{1, \dots, R\}$, $P_i \in \mathcal{P}_K$:
stop, nehme $(u_i^{(n)})$ als Lösung.

Für alle $K \in \{1, \dots, R\}$, $P_i \in \mathcal{P}_K$, $J \in Q_K$:

$$\tau_{iKJ}^{(n+1)} := \tau_{iKJ}^{(n)} + \Delta\tau_{iKJ}$$

$n := n + 1$, gehe zu 11.

Wenngleich diese Methode auf der Minimierung eines quadratischen Funktionals beruht, läßt sich der Algorithmus auch für nicht-symmetrische Probleme anwenden. Er ist auch für diese Probleme konsistent und erweist sich in der Praxis als brauchbar. Für transportdominierte Probleme könnte man auch versuchen, die Penaltisierungskonstanten η_{iKJ} unterschiedlich zu wählen, je nachdem ob eine Grenzschicht auftritt oder nicht. Es sei aber an dieser Stelle auch erwähnt, daß es für Differentialgleichungen auf einem Gebiet Arbeiten über Bereichszerlegungsverfahren speziell für transportdominierte Probleme gibt, die andere Ansätze verfolgen, z. B. [3]. Wir wählen im folgenden stets einen für alle Konstanten η_{iKJ} gemeinsamen Wert η .

Numerisch kann man bei der Bereichszerlegung lineare Konvergenz beobachten. Wie eingangs schon erwähnt, ist der Bereichszerlegungsalgorithmus auch für mehrdimensionale Gebiete anwendbar, siehe Anhang B. Die Abbildungen 3.2-3.5 zeigen die Lösung von

$$\begin{aligned} -u_i'' + u_i' + u_i &= 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ u(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Dirichlet-Knoten (D)}, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} u_i'(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Neumann-Knoten (N)}, \end{aligned}$$

auf dem in Abbildung 2.2 dargestellten Netzwerk, welches auf unterschiedliche Weise in Teilnetzwerke partitioniert wurde. Für die Finiten Elemente wurde jede Kante in 20 Teilintervalle zerlegt. Bei den Plots in Abbildung 3.4 wurde in der Mitte einer jeden Kante ein zusätzlicher Knoten eingefügt, in diesem Fall sind es also nur noch 10 Teilintervalle pro Kante. Als Penalty-Parameter wurde $\eta = 1$ gewählt, sowie $\epsilon_{\text{stop}} = 10^{-6}$ für die Abbruchbedingung. Die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen die Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u + u &= 1 \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit $\Omega = (-3, 3) \times (-3, 3)$. Auch in diesem Beispiel wurde der Penalty-Parameter $\eta = 1$ gewählt und $\epsilon_{\text{stop}} = 10^{-6}$.

Im Gegensatz zu den gerade vorgestellten Beispielen sind bei den Gleichungen, die bei der Simulation des Stofftransports zu lösen sind, die Koeffizienten ϵ_i , welche die Dispersion bzw. Diffusion repräsentieren, sehr klein.

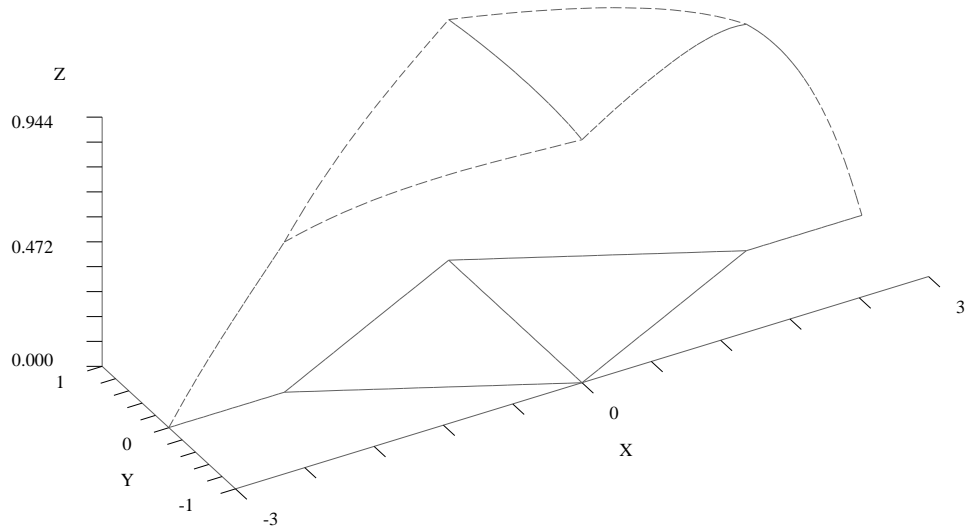
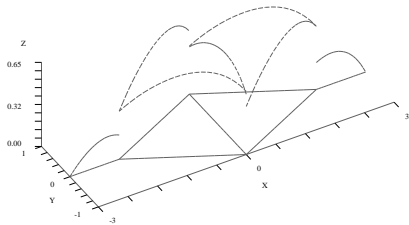
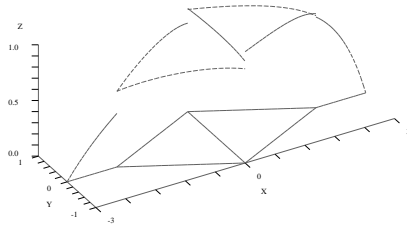


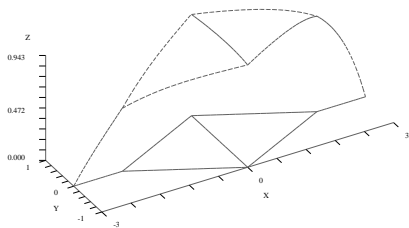
Abbildung 3.2: Direkte Lösung auf dem ganzen Netzwerk.



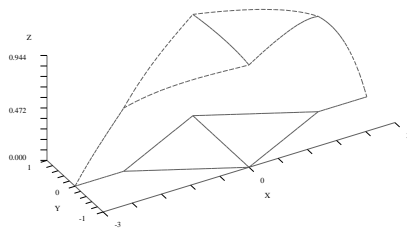
(a) Iterationsschritt 1



(b) Iterationsschritt 2

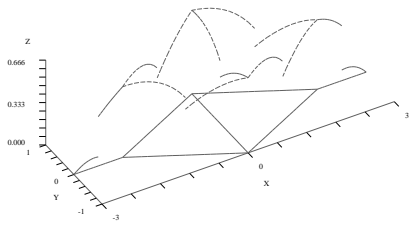


(c) Iterationsschritt 5

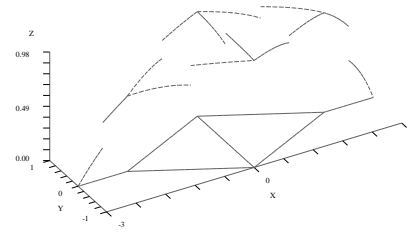


(d) Iterationsschritt 12

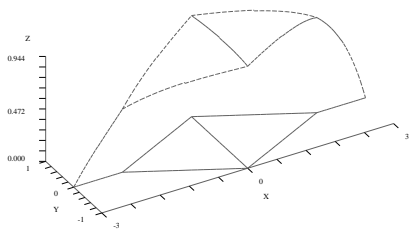
Abbildung 3.3: Klassische Bereichszерlegung. Jede Kante ist ein eigener Bereich.



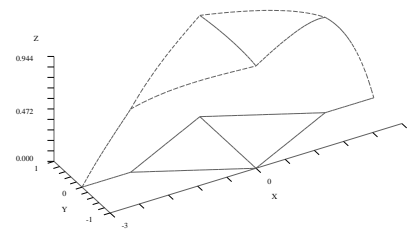
(a) Iterationsschritt 1



(b) Iterationsschritt 2

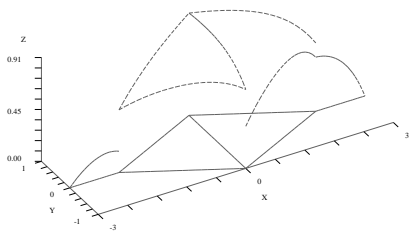


(c) Iterationsschritt 5

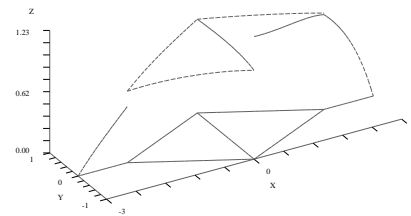


(d) Iterationsschritt 13

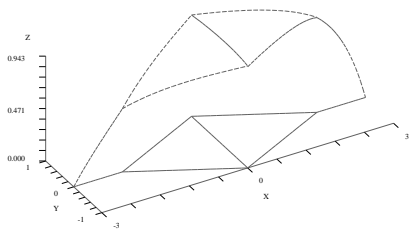
Abbildung 3.4: Für jeden Knoten wird ein sternförmiger Bereich um diesen Knoten gebildet.



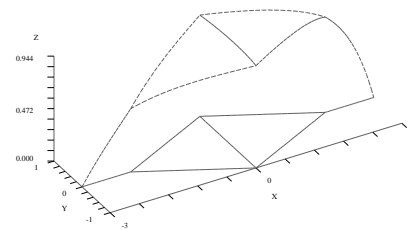
(a) Iterationsschritt 1



(b) Iterationsschritt 2



(c) Iterationsschritt 5



(d) Iterationsschritt 15

Abbildung 3.5: Willkürliche Partition in 3 Bereiche.

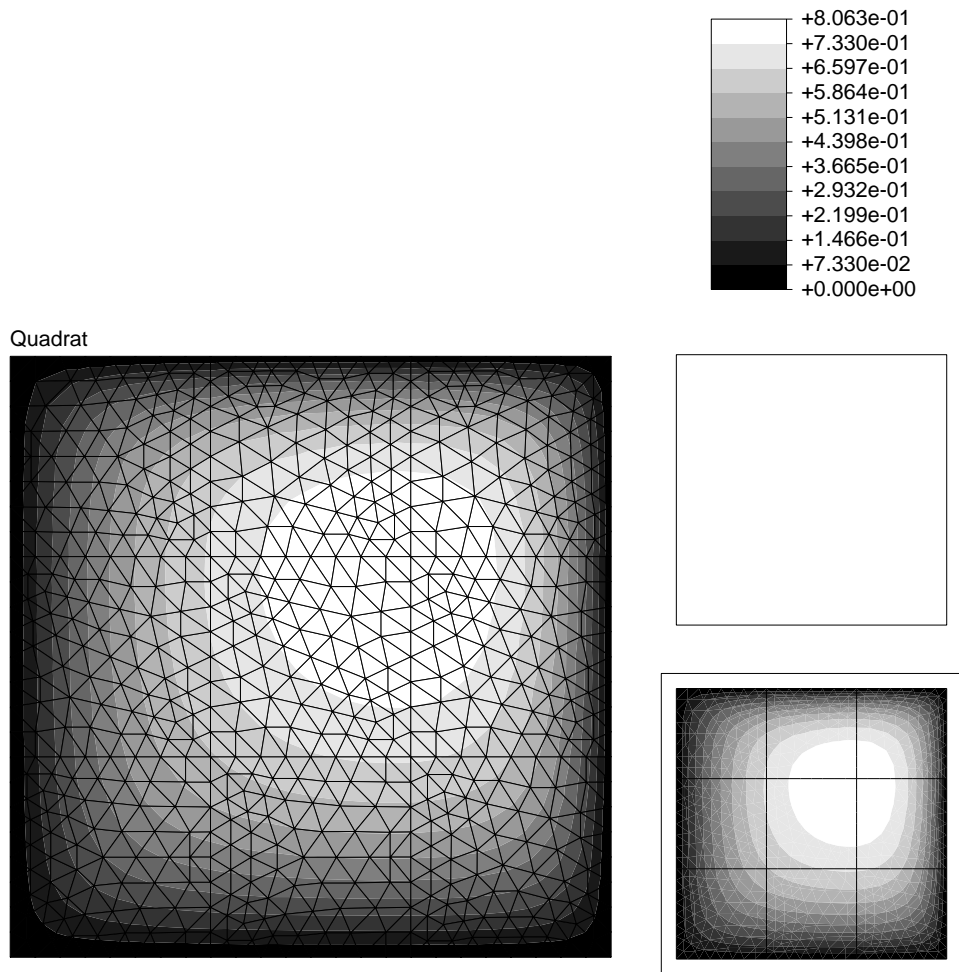
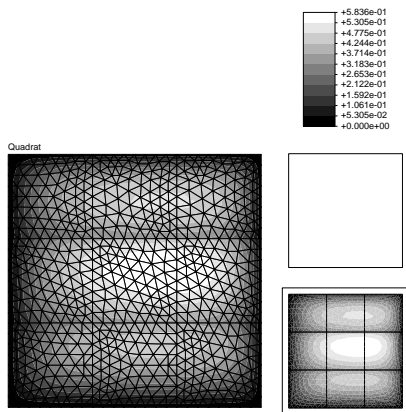
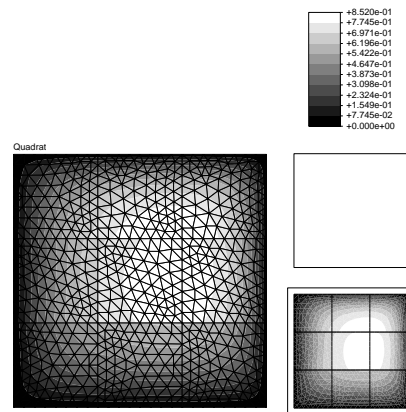


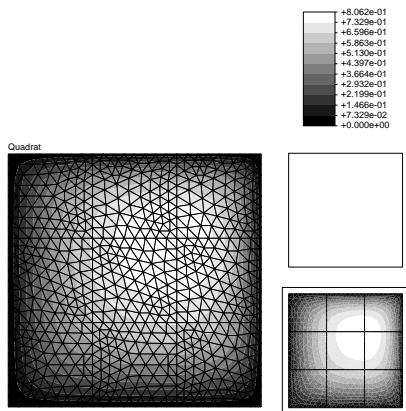
Abbildung 3.6: Direkte Lösung auf dem ganzen Gebiet.



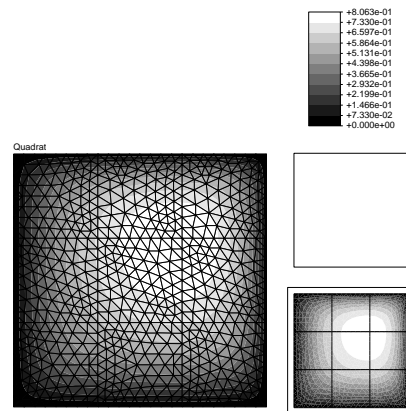
(a) Iterationsschritt 1



(b) Iterationsschritt 2



(c) Iterationsschritt 5



(d) Iterationsschritt 86

Abbildung 3.7: Partition in 3 Streifen.

Das wirkt sich ungünstig auf die Lösung von (3.3) aus. Abbildung 3.8 zeigt die direkte variationelle Netzwerk-Lösung von

$$\begin{aligned} -\epsilon u_i'' + u_i' + u_i &= 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ u(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Dirichlet-Knoten (D)}, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} u_i'(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Neumann-Knoten (N)}, \end{aligned}$$

mit $\epsilon = 10^{-3}$ bei einer (aus der Abbildung ersichtlichen) Diskretisierung von 20 Intervallen pro Kante. Der Effekt, daß in dieser Situation Oszillationen auftreten, ist allgemein bekannt, siehe z. B. [29], [30]. Um den Fehler stabil zu halten, muß bei kleiner werdenden ϵ -Koeffizienten die Anzahl der Diskretisierungspunkte proportional zu ϵ^{-1} wachsen. Dies ist aber vom Rechenaufwand nicht vertretbar.

Ziel ist es nun, die in (3.3) zu bestimmenden Funktionen auf andere Weise zu erhalten. Abgesehen davon sollte das Bereichszerlegungsschema jedoch unverändert beibehalten werden. Wir beschränken uns im weiteren Verlauf auf den Fall

$$\beta_i = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

wie es auch in unserer Anwendung der Fall ist. Da sich im folgenden alles um die Gleichung (3.3) für einen speziellen Bereich $i \in \{1, \dots, m\}$ dreht, betrachten wir das Teilnetzwerk dieses Bereichs der Einfachheit halber als eigenständiges Netzwerk mit Kantenmenge \mathcal{I} und Knotenmenge \mathcal{J} .

Man kann erkennen, daß die Lösung von (3.3) wieder die Lösung einer linearen Netzwerk-Differentialgleichung ähnlich dem ursprünglichen elliptischen Netzwerk-Problem ist. Einziger Unterschied ist, daß an manchen Neumann-Knoten inhomogene Robin-Knotenbedingungen auftreten, und zwar genau an denen, die zu einem Interface gehören. Die Knotenmenge \mathcal{J} kann also aufgeteilt werden in

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_D \dot{\cup} \mathcal{J}_N \dot{\cup} \mathcal{J}_R.$$

Zu gegebener rechter Seite $f \in H$ wird eine Funktion $u \in \prod_{i \in \mathcal{I}} D(A_i)$ gesucht, die an den Knoten stetig ist (T0), mit

$$A_i u_i = f_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.4)$$

$$u(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i u_i')(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} (\epsilon_i u_i')(\Gamma_J) + \eta_J u(\Gamma_J) = \tau_J \quad \forall J \in \mathcal{J}_R. \quad (3.7)$$

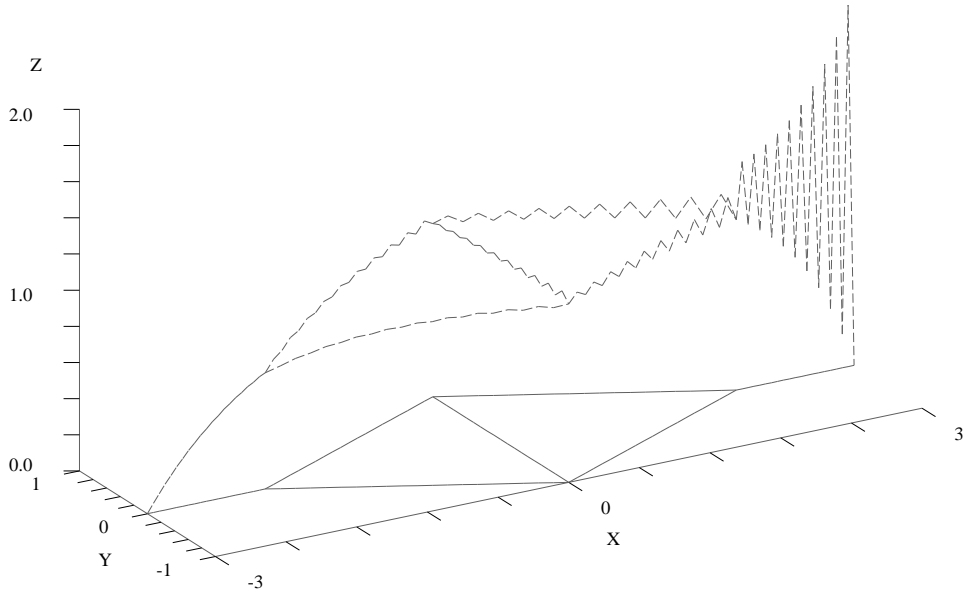


Abbildung 3.8: Oszillationen bei kleinen ϵ -Koeffizienten

Es gilt also, ein Verfahren zu finden, das zur Lösung derartiger Probleme mit kleinen ϵ_i -Koeffizienten geeignet ist. Dazu haben wir das in [34] beschriebene Verfahren in leicht veränderter Form auf Netzwerke anwendbar gemacht, was wir nachfolgend kurz ausführen. Angenommen, die Koeffizienten ϵ_i lassen sich schreiben als

$$\epsilon_i = \tilde{\epsilon}_i h_i,$$

wobei $\tilde{\epsilon} = (\tilde{\epsilon}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine differenzierbare Funktion auf dem Netzwerk ist, die an den Neumann- und Robin-Knoten stetig sein muß. Die Funktionen h_i auf den Kanten müssen jeweils von der Null wegbeschränkt sein. In den Knoten wird jedoch keine Stetigkeitsbedingung für sie gefordert. Mit

$$q_i := -\epsilon_i u_i' \quad (3.8)$$

gilt

$$h_i^{-1} q_i + \tilde{\epsilon}_i u_i' = 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.9)$$

$$q_i' + \gamma_i u_i' + \alpha_i u_i = f_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.10)$$

$$u(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (3.11)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} q_i(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} q_i(\Gamma_J) + \eta_J u(\Gamma_J) = \tau_J \quad \forall J \in \mathcal{J}_R. \quad (3.13)$$

(3.9) skalarmultipliziert mit einer Netzwerk-Funktion $v \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}^1(\Omega_i)$ mit

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} v_i(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_N \quad (3.14)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}} (v_i, h_i^{-1} q_i) - ((\tilde{\epsilon}_i v_i)', u_i) &= - \sum_{J \in \mathcal{J}} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} v_k(\Gamma_J) \right) \tilde{\epsilon}(\Gamma_J) u(\Gamma_J) \\ &\stackrel{(3.11), (3.14)}{=} - \sum_{J \in \mathcal{J}_R} \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} v_k(\Gamma_J) \right) \tilde{\epsilon}(\Gamma_J) u(\Gamma_J) \\ &\stackrel{(3.13)}{=} - \sum_{J \in \mathcal{J}_R} \frac{1}{\eta_J} \tilde{\epsilon}(\Gamma_J) \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} v_k(\Gamma_J) \right) \left(\tau_J - \sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k(\Gamma_J) \right). \end{aligned}$$

Die Funktionen v_i sind die eindimensionale Entsprechung stetiger vektorwertiger Funktionen mit einer homogenen Kirchhoff-Bedingung, hier (3.14).

Bei der Realisierung mit Finiten Elementen, die nachfolgend beschrieben wird, behandeln wir Gleichung (3.10) wie in [34] als ein Transportproblem mit der Unbekannten u_i . [34] bezieht sich aber auf die Situation, daß in (3.10) $(\gamma_i u_i)'$ anstelle von $\gamma_i u_i'$ steht. Deshalb nehmen wir stattdessen das in [18] angegebene Schema.

Ausgehend von einer Zerlegung der Kanten in Teilintervalle verwenden wir folgende Finite-Elemente-Räume. Z_h sei der Raum aller stückweise affinen Funktionen, ohne daß für diese eine Stetigkeitsbedingung festgelegt wird. Der Raum W_h , enthalte die stückweise affinen Funktionen v , die im Inneren einer jeden Kante stetig sind und außerdem die Eigenschaft (3.14) besitzen. Für die mehrdimensionale Situation muß man auf vektorwertige Funktionen von maximalem Polynomgrad 1 zurückgreifen, wie sie in [31] in Abschnitt 6 beschrieben sind.

Eine Basis von W_h bilden die Hutfunktionen im Inneren der Kanten zusammen mit speziellen Funktionen an den Knoten. Für Neumann-Knoten $J \in \mathcal{J}_N$ verwenden wir $(|\mathcal{I}_J| - 1)$ Basisfunktionen, die so gewählt sind, daß sie der Bedingung (3.14) genügen und in Abbildung 3.9 durch die durchgezogenen Pfeile angedeutet sind. Die Pfeile sollen Flüsse veranschaulichen, die durch jeweils zwei Kanten ausgezeichnet sind, eine, aus der der Fluß kommt und die andere, in die er abfließt. Die verbleibende Kante bleibt davon unberührt. Der durch den gestrichelten Pfeil dargestellte Fluß ist eine Linearkombination der anderen beiden Flüsse. Verwirklicht wird ein solcher Fluß durch eine Hutfunktion wie in Abbildung 3.1, nur daß der Träger dieser Hutfunktion nur in zwei Kanten hineinläuft. Für die anderen Knoten $J \in \mathcal{J}_D \cup \mathcal{J}_R$ definieren wir $|\mathcal{I}_J|$ Basisfunktionen, da in diesen Knoten keine Bedingung eingehalten werden muß.

Um den Algorithmus im Detail zu formulieren, müssen wir noch folgende Notation einführen. Auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$ sei T_i die Menge der inneren

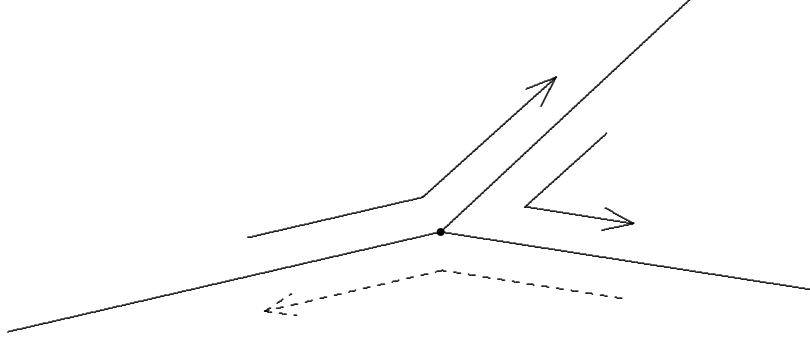


Abbildung 3.9: Basisfunktionen von W_h in einem Neumann-Knoten

Diskretisierungspunkte. Für eine Funktion g auf Ω_i , die im Punkt $t \in T_i$ unstetig sein kann, sei

$$g_+(t) := \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ \gamma_i(t)(t'-t) > 0}} g(t'),$$

$$g_-(t) := \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ \gamma_i(t)(t'-t) < 0}} g(t').$$

Diese Definition macht natürlich nur Sinn, wenn $\gamma_i(t) \neq 0$.

Zu gegebenem $f \in H$ suchen wir nun $q \in W_h$, $u \in Z_h$, welche für alle $v \in W_h$ und $w \in Z_h$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \mathcal{I}} (v_i, h_i^{-1} q_i) - ((\tilde{\epsilon}_i v_i)', u_i) \\ & + \sum_{J \in \mathcal{J}_R} \frac{1}{\eta_J} \tilde{\epsilon}(\Gamma_J) \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} v_k(\Gamma_J) \right) \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k(\Gamma_J) \right) \quad (3.15) \\ & = - \sum_{J \in \mathcal{J}_R} \frac{\tau_J}{\eta_J} \tilde{\epsilon}(\Gamma_J) \left(\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} v_k(\Gamma_J) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (w_i, q'_i + \gamma_i u'_i + \alpha_i u_i) \\ & + \sum_{t \in T_i: \gamma_i(t) \neq 0} |\gamma_i(t)| (w_i)_+(t) ((u_i)_+(t) - (u_i)_-(t)) \\ & + \sum_{J \in \mathcal{J}_i: i \in \mathcal{I}_J^-} |\gamma_i(\Gamma_J)| w_i(\Gamma_J) u_i(\Gamma_J) \quad (3.16) \\ & = (w_i, f_i) + \sum_{J \in \mathcal{J}_i: i \in \mathcal{I}_J^-} |\gamma_i(\Gamma_J)| w_i(\Gamma_J) g_J \quad \forall i \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

$$g_J = \begin{cases} 0, & \text{falls } J \in \mathcal{J}_D, \\ \frac{\sum_{k \in \mathcal{I}_J^{\leftarrow}} d_{kJ} \gamma_k(\Gamma_J) u_k(\Gamma_J)}{\sum_{k \in \mathcal{I}_J^{\leftarrow}} d_{kJ} \gamma_k(\Gamma_J)}, & \text{falls } J \in \mathcal{J}_N, \\ \frac{1}{\eta_J} (\tau_J - \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} q_i(\Gamma_J)), & \text{falls } J \in \mathcal{J}_R \end{cases} \quad (3.17)$$

erfüllen. Bei der Implementierung werden die rechten Seiten von (3.17) direkt in (3.16) eingebaut. Nur der Übersichtlichkeit halber sind sie hier separat dargestellt.

Für die Definition von g_J an den Neumann-Knoten ist allein (2.146) ausschlaggebend. Da diese Bedingung nachweislich im Limes für $\epsilon_i \rightarrow 0$ gilt, gehen wir davon aus, daß das Verfahren für kleine ϵ_i stabil bleibt. Bemerkenswert ist auch, daß der Fall $\epsilon_i = 0$ nicht ausgeschlossen werden muß. Dann wird nämlich in (3.15) $q_i = 0$ gesetzt, und (3.16), (3.17) liefern die Lösung des Limesproblems aus Satz 2.18.

Obwohl dieses Verfahren nur intuitiv begründet ist, scheint es in der Praxis gut zu funktionieren. Abbildung 3.10 zeigt die so erhaltenen Lösungen des Problems

$$\begin{aligned} -\epsilon u_i'' + u_i' &= 1 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ u(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Dirichlet-Knoten (D)}, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} u_i'(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Neumann-Knoten (N)}, \end{aligned}$$

für verschiedene ϵ . In Abbildung 3.11 wird die Lösung von

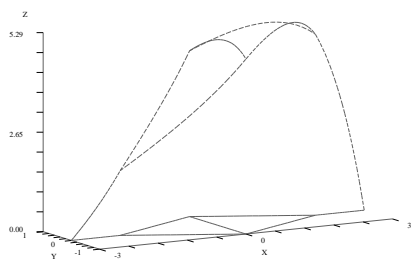
$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} + (-\epsilon u_i'' + u_i') &= 0 \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ u(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Dirichlet-Knoten (D)}, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}_J} d_{iJ} u_i'(\Gamma_J) &= 0 \quad \text{an den Neumann-Knoten (N)}, \end{aligned}$$

die mit dem impliziten Euler-Schema berechnet wurde, mit $\epsilon = 10^{-3}$ zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt.

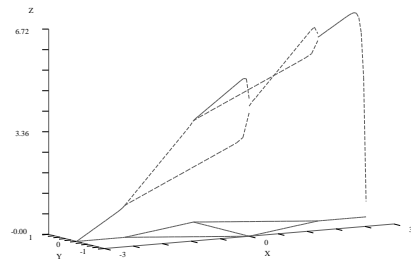
3.2 Numerische Realisierung der Simulation des Wassertransports

Auf die nichtlinearen Gleichungen für den Wassertransport wenden wir die in [17] beschriebene Methode an. Sie ist speziell auf Gleichungen für poröse Medien zugeschnitten. Wir gehen davon aus, daß die Funktion $g(\cdot, \cdot)$, die den Wassertransport entlang der Wurzel charakterisiert, den in [17] gestellten Voraussetzungen genügt. Mit der dort verwendeten Notation liegt der Sonderfall

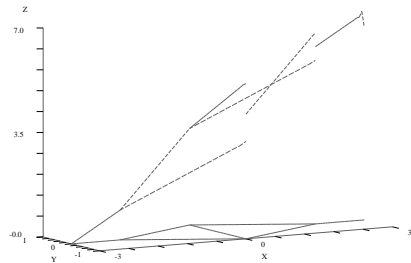
$$\beta(x) = x$$



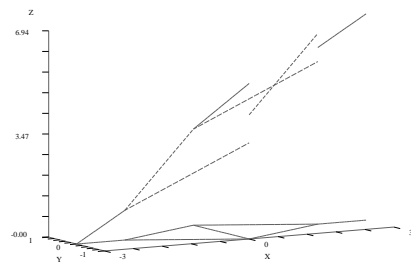
(a) $\epsilon = 1.0$



(b) $\epsilon = 0.05$

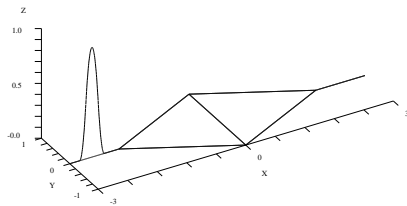


(c) $\epsilon = 10^{-3}$

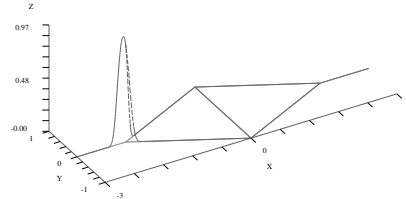


(d) $\epsilon = 0$

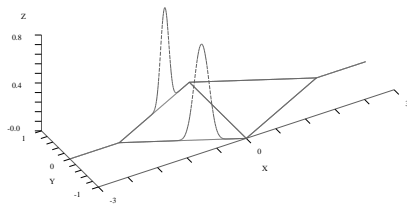
Abbildung 3.10: Lösung elliptischer Probleme für kleine ϵ



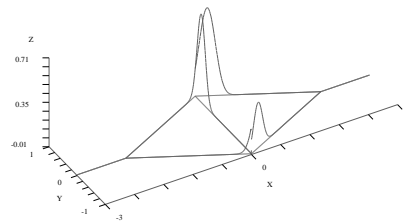
(a) $t = 0$



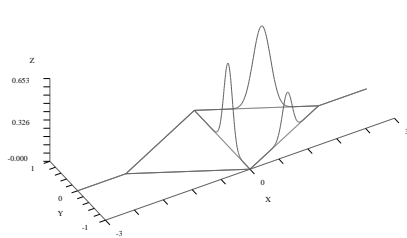
(b) $t = 0.5$



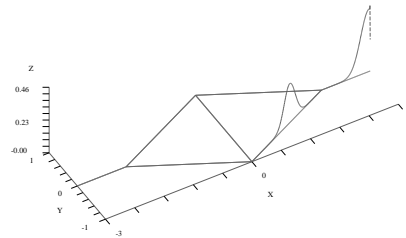
(c) $t = 2$



(d) $t = 3$



(e) $t = 4$



(f) $t = 6$

Abbildung 3.11: Lösung eines zeitdynamischen singular gestörten Netzwerkproblems

vor. Für ein Problem der Form

$$\begin{aligned} q &= -g(p, p'), \\ \frac{d\theta(p, x)}{dt} &= -q', \\ p(t) &= 0 \quad \forall t \in \Gamma_D, \\ d(t)q(t) &= g(t) \quad \forall t \in \Gamma_N \end{aligned}$$

auf einem Intervall Ω , mit $\partial\Omega = \Gamma_D \dot{\cup} \Gamma_N$ ist dieses Jäger-Kačur-Verfahren direkt anwendbar. Dafür müssen zunächst die Parameter $d \in (0, \frac{1}{2})$ und $\alpha \in (0, 1)$ gewählt werden. Es sei

$$\theta_n(p, x) = \theta(p, x) + \tau^d p.$$

Mit einem gegebenen Anfangszustand p_0 und der Zeitschrittweite $\tau > 0$ bestimmen wir die Zustände p_N zu den Zeitpunkten $t = N\tau$ für $N \in \mathbb{N}$ folgendermaßen.

Setze $N := 1$ (Zeitschritt).

11: Setze $k = 1$ (Iterationsschritt), und

$$\lambda_{N,0}(x) := \alpha \frac{d}{dp} \theta_n(p_0(x), x).$$

12: Bestimme eine Funktion $\zeta_{N,k}$ so, daß

$$\lambda_{N,k-1} \zeta_{N,k} - \tau g(p_{N-1}, \zeta'_{N,k})' = \lambda_{N,k-1} p_{N-1}, \quad (3.18)$$

$$\zeta_{N,k}(t) = 0 \quad \forall t \in \Gamma_D, \quad (3.19)$$

$$d(t)g(p_{N-1}(t), \zeta'_{N,k}(t)) = -g(t) \quad \forall t \in \Gamma_N. \quad (3.20)$$

Definiere die Funktion Δ als $\Delta := \zeta_{N,k} - p_{N-1}$, und setze

$$\lambda_{N,k}(x) := \frac{\theta_n(p_{N-1}(x) + \alpha\Delta(x), x) - \theta_n(p_{N-1}(x), x)}{\Delta(x)},$$

falls $|\Delta(x)| \geq \epsilon_{\text{mach}}^1$, und

$$\lambda_{N,k}(x) := \alpha \frac{d}{dp} \theta_n(p_{N-1}(x), x),$$

falls $|\Delta(x)| < \epsilon_{\text{mach}}$.

Falls $k = 1$ oder $\|\zeta_{N,k} - \zeta_{N,k-1}\| \geq \epsilon_{\text{stop}}$:

$k := k + 1$, gehe zu 12.

Setze

$$p_N := p_{N-1} + \alpha \Delta. \quad (3.21)$$

$N := N + 1$, gehe zu 11.

Das Randwertproblem (3.18)–(3.20) können wir variationell im Raum

$$V := \{u \in H^1(\Omega) \mid u(t) = 0 \ \forall t \in \Gamma_D\}$$

formulieren als

$$(v, \lambda_{N,k-1} \zeta_{N,k}) + \tau (v', g(p_{N-1}, \zeta'_{N,k})) = (v, \lambda_{N,k-1} p_{N-1}) - \tau (vg)_{\Gamma_N} \quad \forall v \in V.$$

Dieses Schema haben wir in naheliegender, pragmatischer Weise auf die Netzwerk-Gleichungen übertragen. Auf das in Kapitel 1 gestellte Problem, eine an den Knoten stetige zeitabhängige Netzwerk-Funktion

$$t \mapsto p(t) = \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{(i)}(t)$$

zu finden, mit

$$q^{(i)} = -g(p^{(i)}, (p^{(i)})') \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.22)$$

$$\frac{d\theta(p^{(i)}, x)}{dt} = -(q^{(i)})' \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.23)$$

$$p(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (3.24)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k(\Gamma_J) A_k = -R_W^J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \quad (3.25)$$

wenden wir, wieder ausgehend vom Startzustand p_0 und der Zeitschrittweite τ , folgendes Schema an.

Setze $N := 1$ (Zeitschritt).

11: Setze $k = 1$ (Iterationsschritt), und

$$\lambda_{N,0}^{(i)}(x) := \alpha \frac{d}{dp} \theta_n(p_0^{(i)}(x), x) \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

12: Bestimme eine Netzwerk-Funktion $\zeta_{N,k}$ so, daß

$$\lambda_{N,k-1}^{(i)} \zeta_{N,k}^{(i)} - \tau g(p_{N-1}^{(i)}, (\zeta_{N,k}^{(i)})') = \lambda_{N,k-1}^{(i)} p_{N-1}^{(i)} \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.26)$$

$$\zeta_{N,k}(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (3.27)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{I}_J} d_{lJ} g(p_{N-1}^{(l)}(\Gamma_J), (\zeta_{N,k}^{(l)})'(\Gamma_J)) A_l = -R_W^J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \quad (3.28)$$

Definiere die Funktion Δ als $\Delta := \zeta_{N,k} - p_{N-1}$, und setze für alle $i \in \mathcal{I}$

$$\lambda_{N,k}^{(i)}(x) := \frac{\theta_n(p_{N-1}^{(i)}(x) + \alpha\Delta^{(i)}(x), x) - \theta_n(p_{N-1}^{(i)}(x), x)}{\Delta^{(i)}(x)},$$

falls $|\Delta^{(i)}(x)| \geq \epsilon_{\text{mach}}$, und

$$\lambda_{N,k}^{(i)}(x) := \alpha \frac{d}{dp} \theta_n(p_{N-1}^{(i)}(x), x),$$

falls $|\Delta^{(i)}(x)| < \epsilon_{\text{mach}}$.

Falls $k = 1$ oder $\|\zeta_{N,k}^{(i)} - \zeta_{N,k-1}^{(i)}\| \geq \epsilon_{\text{stop}}$ für ein $i \in \mathcal{I}$:
 $k := k + 1$, gehe zu l2.

Setze

$$p_N := p_{N-1} + \alpha\Delta. \quad (3.29)$$

$N := N + 1$, gehe zu l1.

Zur variationellen Formulierung von (3.26)–(3.28) bietet es sich an, die Gleichungen auf jeder Kante $i \in \mathcal{I}$ mit A_i zu multiplizieren. Dann nämlich wird (3.28) zu einer natürlichen Kirchhoff-Bedingung. Um das zu erreichen, multiplizieren wir (3.22), (3.23) mit A_i . Mit den neuen Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{g}_i &:= gA_i, \\ \tilde{\theta}_i &:= \theta A_i \end{aligned}$$

schreibt sich (3.22)–(3.25)

$$\begin{aligned} \tilde{q}^{(i)} &= -\tilde{g}_i(p^{(i)}, (p^{(i)})') \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ \frac{d\tilde{\theta}_i(p^{(i)}, x)}{dt} &= -(\tilde{q}^{(i)})' \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ p(\Gamma_J) &= 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \\ \sum_{l \in \mathcal{I}_J} d_{lJ} \tilde{q}^{(l)}(\Gamma_J) &= -R_W^J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N, \end{aligned}$$

Der entsprechend umformulierte Algorithmus lautet, mit Hilfe der ursprünglichen Funktionen g und θ ausgedrückt,

Setze $N := 1$ (Zeitschritt).

11: Setze $k = 1$ (Iterationsschritt), und

$$\lambda_{N,0}^{(i)}(x) := \alpha \left(\frac{d}{dp} \theta(p_0^{(i)}(x), x) A_i + \tau^d \right) \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

12: Bestimme eine Netzwerk-Funktion $\zeta_{N,k}$ so, daß

$$\lambda_{N,k-1}^{(i)} \zeta_{N,k}^{(i)} - \tau g(p_{N-1}^{(i)}, (\zeta_{N,k}^{(i)})') A_i = \lambda_{N,k-1}^{(i)} p_{N-1}^{(i)} \quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad (3.30)$$

$$\zeta_{N,k}(\Gamma_J) = 0 \quad \forall J \in \mathcal{J}_D, \quad (3.31)$$

$$\sum_{l \in \mathcal{I}_J} d_{lJ} g(p_{N-1}^{(l)}(\Gamma_J), (\zeta_{N,k}^{(l)})'(\Gamma_J)) A_l = -R_W^J \quad \forall J \in \mathcal{J}_N. \quad (3.32)$$

Definiere die Funktion Δ als $\Delta := \zeta_{N,k} - p_{N-1}$, und setze für alle $i \in \mathcal{I}$

$$\lambda_{N,k}^{(i)}(x) := \frac{(\theta(p_{N-1}^{(i)}(x) + \alpha \Delta^{(i)}(x), x) - \theta(p_{N-1}^{(i)}(x), x)) A_i + \tau^d \alpha \Delta^{(i)}(x)}{\Delta^{(i)}(x)},$$

falls $|\Delta^{(i)}(x)| \geq \epsilon_{\text{mach}}$, und

$$\lambda_{N,k}^{(i)}(x) := \alpha \left(\frac{d}{dp} \theta(p_{N-1}^{(i)}(x), x) A_i + \tau^d \right),$$

falls $|\Delta^{(i)}(x)| < \epsilon_{\text{mach}}$.

Falls $k = 1$ oder $\|\zeta_{N,k}^{(i)} - \zeta_{N,k-1}^{(i)}\| \geq \epsilon_{\text{stop}}$ für ein $i \in \mathcal{I}$:
 $k := k + 1$, gehe zu 12.

Setze

$$p_N := p_{N-1} + \alpha \Delta. \quad (3.33)$$

$N := N + 1$, gehe zu 11.

(3.30)–(3.32) können wir jetzt variationell im in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Raum V formulieren als

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}} (v^{(i)}, \lambda_{N,k-1}^{(i)} \zeta_{N,k}^{(i)} + \tau A_i ((v^{(i)})', g(p_{N-1}^{(i)}, (\zeta_{N,k}^{(i)})')) \\ = \sum_{i \in \mathcal{I}} (v^{(i)}, \lambda_{N,k-1}^{(i)} p_{N-1}^{(i)}) + \tau \sum_{J \in \mathcal{J}_N} v(\Gamma_J) R_W^J. \end{aligned}$$

Falls $g(\cdot, \cdot)$ linear in der zweiten Unbekannten ist, wie es im Beispiel in 3.4 der Fall sein wird, können wir diese Gleichung über dem zu Beginn dieses Kapitels eingeführten Raum V_h mit einem linearen Gleichungssystem lösen.

3.3 Numerische Realisierung der Simulation des Stofftransports

Für den Stofftransport wenden wir auf die in Abschnitt 1.2 vorgestellten Gleichungen ein Zeitdiskretisierungsschema an. Wir verwenden dafür ein implizites Euler-Schema. Allerdings könnte man, da die Gleichungen ja transportdominiert sind, auch ein halbimplizites Schema oder ein Schema zweiter Ordnung in Erwägung ziehen.

Zu gegebener Zeitschrittweite τ und gegebenem Startzustand c_0 lösen wir sukzessive

$$\theta_N^{(i)} \frac{c_N^{(i)} - c_{N-1}^{(i)}}{\tau} = (\theta_N^{(i)} D(c_N^{(i)}))' - q_N^{(i)} (c_N^{(i)})' - \mu \theta_N^{(i)} c_N^{(i)} \quad (3.34)$$

mit den Knotenbedingungen

$$\theta_N(\Gamma_J) D \sum_{l \in \mathcal{I}_J} d_{lJ} (c_N^{(l)})' A_l = R_S^J - c_N(\Gamma_J) R_W^J \quad \forall J \in \mathcal{J}.$$

Genau wie beim Wassertransport multiplizieren wir (3.34) auf allen Kanten $i \in \mathcal{I}$ mit A_i und haben es dann mit einem Problem der Form (3.4)–(3.7) zu tun. Die Gleichungen lauten im einzelnen

$$-(\theta_N^{(i)} D A_i (c_N^{(i)}))' + q_N^{(i)} A_i (c_N^{(i)})' + (\mu + \frac{1}{\tau}) \theta_N^{(i)} A_i c_N^{(i)} = \frac{1}{\tau} \theta_{N-1}^{(i)} A_i c_{N-1}^{(i)}.$$

Um auf diese singular gestörte elliptische Differentialgleichung das Lösungsschema (3.15)–(3.17) anzuwenden, müssen wir noch die Zerlegung der Koeffizienten $\epsilon^{(i)} = \theta_N^{(i)} D A_i$ gemäß (3.8) festlegen. Dazu wählen wir $\tilde{\epsilon}^{(i)} = \theta_N^{(i)} D$ und $h_i = A_i$.

3.4 Simulationsbeispiel

Das diese Arbeit abschließende Simulationsbeispiel umfaßt ein Bodensegment, gekoppelt mit dem Teil einer fiktiven Wurzel. Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, daß diese Simulation, insbesondere was die Wurzel betrifft, nur ein Modellbeispiel ist und nicht den Anspruch erhebt, realistisch zu sein.

Der Boden wird der einfacheren Implementierung halber als zweidimensionales Medium mit einer horizontalen und einer vertikalen Dimension betrachtet, im vorliegenden Beispiel als ein 6 m ($x \in [-3 \text{ m}, 3 \text{ m}]$) breites und 3 m ($y \in [-3 \text{ m}, 0]$) tiefes Rechteck. Für den Wassertransport legen wir die in Anhang A beschriebenen funktionalen Abhängigkeiten zugrunde und wählen einen Parametersatz für einen Sandboden, der aus [36], Anhang A1, übernommen wurde und in Tabelle 3.1 wiedergegeben ist. Für den Stofftransport

rechnen wir mit der Konzentration einer gelösten Substanz, die nicht abgebaut wird ($\mu = 0$). Die restlichen Parameter sind $D_0 = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ h}^{-1}$ und $\lambda = 1.0 \text{ m}$.

In dieses Bodensegment eingebettet sei die Wurzel, die so beschaffen ist, daß sich in jedem Wurzelverzweigungsknoten zwei Wurzeläste mit identischer Querschnittsfläche zu einem Wurzelast mit der doppelten Querschnittsfläche vereinigen. Für die Berechnungen mit den Finiten Elementen zerlegen wir die Wurzeläste in jeweils 40 Teilintervalle. Den Querschnitt des dicksten Wurzelasts, des Hauptwurzelasts, bezeichnen wir als A_{ref} . Für den Wassertransport entlang eines Wurzelasts $i \in \mathcal{I}$ verwenden wir die eindimensionale Variante

$$\frac{d\theta(p^{(i)}, x)}{dt} = (k(p^{(i)}, x)((p^{(i)})' - 1))' \quad (3.35)$$

der Richards-Gleichung mit denselben Funktionen k und θ wie in der Bodensimulation und auch mit denselben Parametern. Bei der Darstellung (3.35) verläuft die Parametrisierungsrichtung der Wurzeläste immer von der Wurzelspitze in Richtung Hauptwurzelast. Den Stofftransport beschreibt die Diffusions-Advektions-Gleichung

$$\theta_i \frac{dc_i}{dt} = (\theta_i D c_i')' - q_i c_i',$$

mit $D = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ h}^{-1}$.

Als Randbedingungen für den Wassertransport im Boden wählen wir am oberen Rand die Dirichlet-Bedingung $\psi = 0$. Das gibt die Situation wieder, daß zu jedem Zeitpunkt gerade so viel Wasser von oben nachkommt, damit am oberen Rand des Bodensegments Wassersättigung eintritt, aber andererseits auch keine stehende Wassersäule entsteht, denn dann wäre ψ positiv. An den übrigen Rändern des Bodens setzen wir die ‚free drainage‘-Bedingung

$$\frac{dq}{d\nu} = -(K(\psi, X) \nabla z) \cdot \nu. \quad (3.36)$$

Für die Stofftransportgleichung im Boden wählen wir am oberen Rand ebenfalls eine Dirichlet-Randbedingung, nämlich $c = 1.0$ und an der übrigen Rändern die homogene Neumann-Randbedingung

$$\frac{dc}{d\nu} = 0. \quad (3.37)$$

θ_r	θ_s	α	m	n	K_{sat}	τ
0.03	0.36	3.0 m^{-1}	0.67	3.0	0.1 mh^{-1}	0.5

Tabelle 3.1: Parameter für den Wassertransport im Boden

Da die Gleichungen zur Berechnung des Stofftransportes linear sind, ist die Konzentration des Stoffes beliebig skalierbar, wir müssen sie deshalb nicht auf eine Einheit beziehen.

Am oberen Austrittspunkt der Wurzel setzen wir für Wasser- bzw. Stofftransport die zu (3.36) und (3.37) analogen Randbedingungen, denn dieser Punkt zeichnet sich nicht durch eine besondere Eigenschaft aus, da wir ja einen willkürlich gewählten Ausschnitt der Wurzel betrachten. Ansonsten beschränkt sich Wasser- und Stoffaufnahme auf die Wurzelspitzen, d. h. an allen übrigen Wurzelknoten setzen wir $R_W = 0$ und $R_S = 0$. An den Wurzelspitzen wählen wir für die Aufnahmefunktion (1.21), in entfernter Anlehnung an [12],

$$R_W^J = \frac{R_W^{J,\max}}{1.0 + |\lambda_W \psi(X_J)|^{\mu_W}},$$

mit $\lambda_W = 1.0 \text{ m}^{-1}$, $\mu_W = 1.5$ und $R_W^{J,\max} = g(0,0)A_i$, wobei A_i den Querschnitt des zur Wurzelspitze gehörenden Wurzelasts bezeichne. Bei der Stoffaufnahme weichen wir in der Simulation, mangels einer geeigneten Funktion β (siehe Tabelle 1.2), vom in Abschnitt 1.3 beschriebenen Modell ab. Anstatt die Stoffaufnahme festzulegen, fordern wir, daß die Stoffkonzentration in der Wurzel auf der Höhe einer Wurzelspitze genauso hoch ist wie im Boden an der Stelle, wo sich diese Wurzelspitze befindet. Mit der Notation von Abschnitt 1.3 setzen wir also

$$c_J = c(X_J).$$

Die Kopplung von Boden und Wurzel wird in der Simulation in expliziter Weise auf dem zeitdiskreten Niveau realisiert. Ausgehend von einer Zeitdiskretisierung t_0, t_1, t_2, \dots werden zu jedem Zeitpunkt t_n die Austauschraten R_W und R_S aufgrund der aktuellen Daten festgelegt. Im folgenden Zeitschritt $[t_n, t_{n+1}]$ werden dann die beiden Systeme Boden und Wurzel separat voneinander behandelt, aber jeweils unter Berücksichtigung von R_W und R_S . Danach werden die Austauschraten wieder aktualisiert und der nächste Zeitschritt kann vollzogen werden. Allerdings können wir beim Stoffaustausch nicht so verfahren, da wir ja, wie eben angedeutet, nicht die Austauschrate festlegen, sondern fordern, daß die Stoffkonzentrationen im Boden und in der Wurzel übereinstimmen. Deshalb bestimmen wir zum Zeitpunkt t_n zunächst die Stoffkonzentration $c_J := c(X_J)$ im Boden. Im darauffolgenden Zeitschritt berechnen wir dann als erstes Wasser- und Stofftransport auf der Wurzel, wobei wir die Stoffkonzentration an den Wurzelspitzen als Dirichlet-Bedingung gleich c_J setzen. Aus dem jetzt verfügbaren Zustand auf der Wurzel zum Zeitpunkt t_{n+1} berechnen wir R_S^J (vgl. Tabelle 1.2) als

$$R_S^J = \theta_J D \sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} c'_k(\Gamma_J) A_k - c_J \sum_{k \in \mathcal{I}_J} d_{kJ} q_k(\Gamma_J) A_k.$$

Mit diesen Austauschraten berechnen wir schließlich den neuen Zustand im Boden. Auf diese Weise ist sichergestellt, daß die Stoffaustauschbilanz stets ausgeglichen ist.

Die Abbildungen (3.12)–(3.67) zeigen die Ergebnisse einer solchen Simulation, zuerst mit $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$, dann mit $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$. Dargestellt wird der relative Wassergehalt, sowie die Stoffkonzentration.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ setzen wir den relativen Wassergehalt zu $\frac{1}{2}(\theta_r + \theta_s)$ in der gesamten Wurzel und auch im Boden, mit Ausnahme eines Bereiches nahe der Bodenoberkante, in dem der Wassergehalt gleichmäßig bis zur Wassersättigung an der Bodenoberkante ansteigt. Die Stoffkonzentration zum Startzeitpunkt setzen wir gleich Null in der gesamten Wurzel und gleich 0.5 im Boden. Im Hinblick auf die Randbedingung $c = 1.0$ am oberen Bodenrand lassen wir die Konzentration zum Startzeitpunkt im oberen Bereich des Bodens kontinuierlich von 0.5 auf 1.0 ansteigen.

Die Parameter α und d für das Jäger-Kačur-Verfahren bestimmen wir, sowohl für die Wurzel als auch für den Boden, zu $\alpha = 1.0$ und $d = 0.25$. Als Zeitdiskretisierung wählen wir $\tau = 0.01 \text{ h}$.

In den nachfolgenden Plots ist nur im ersten Fall die Wirkung, die die Wurzel in Form der Senkenterme auf den Boden ausübt, deutlich zu erkennen. Es bilden sich an diesen Stellen etwas trockenere Regionen. Ansonsten bewegt sich die Feuchtigkeitsfront kontinuierlich nach unten. Anfangs verschärft sie sich etwas, was von der besseren Leitfähigkeit im feuchteren Bereich herrührt, wodurch das Wasser absackt. Auffallend ist auch, daß die Front der höheren Stoffkonzentration hinter der Feuchtigkeitsfront zurückbleibt. Aus dieser Tatsache können wir schließen, daß die Geschwindigkeit, mit der sich das Wasser bewegt, niedriger sein muß als die Geschwindigkeit der Feuchtigkeitsfront. Dies ist aber auch zu erwarten, denn auch im zu Beginn trockenen Teil des Bodens befindet sich schon Wasser, das von dieser Front teilweise verschluckt wird.

Die beiden Serien von Plots für die Wurzel unterscheiden sich nicht erkennbar voneinander, da ihre Auswirkungen auf den Boden in unserem Beispiel eher gering sind. Was die Feuchtigkeits- und Stoffkonzentrationsfront betrifft, können wir prinzipiell dieselben Beobachtungen machen wie im Boden. Die Stoffkonzentration erhöht sich in zwei Stufen, zunächst auf 0.5 und später, sobald der Bereich des Bodens mit höherer Stoffkonzentration die Wurzelspitze erfaßt hat, auf 1.0, was man zum Beispiel zum Zeitpunkt $t = 7 \text{ h}$ gut erkennen kann. Bemerkenswert ist auch die Situation, die beim Plot für den Wassertransport zum Zeitpunkt $t = 7 \text{ h}$ eintritt, wo sich an einem Wurzelverzweigungsknoten ein trockener und ein bereits feuchter Wurzelast vereinigen. Dort dringt auch etwas Wasser in die entgegengesetzte Richtung in den noch trockenen Wurzelast ein.

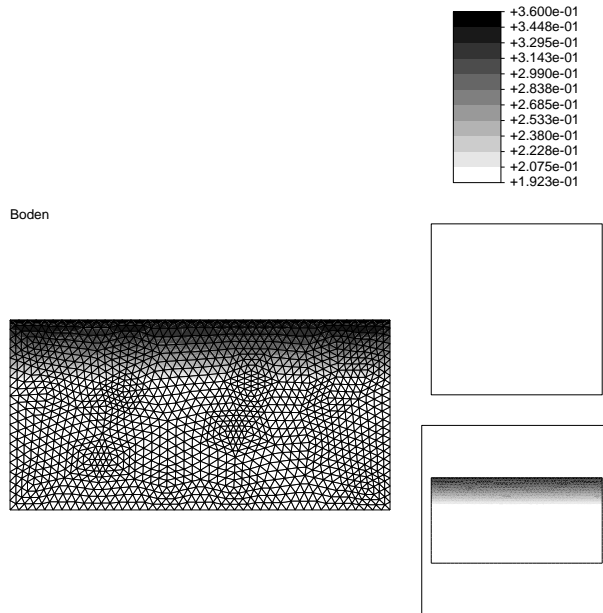


Abbildung 3.12: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 0$

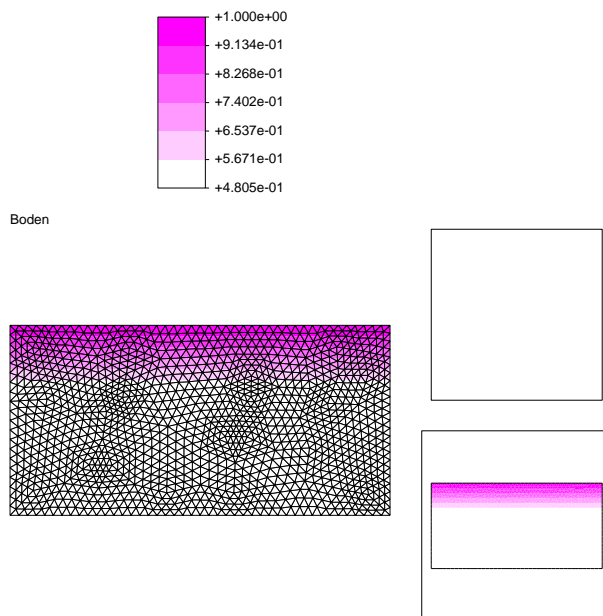


Abbildung 3.13: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 0$

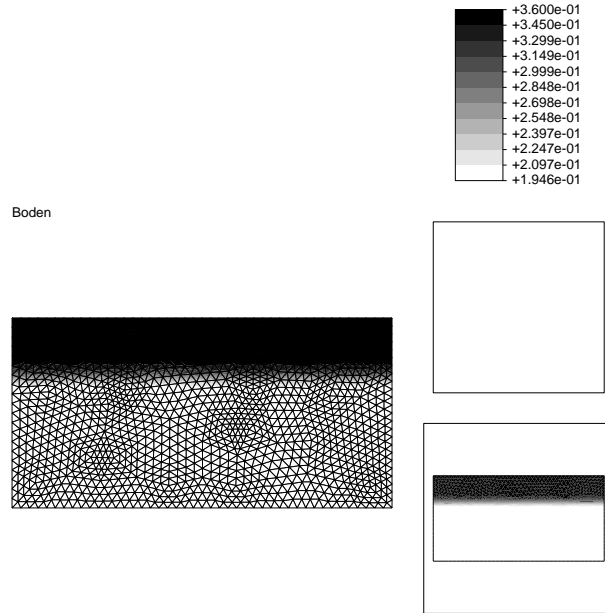


Abbildung 3.14: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 1 \text{ h}$

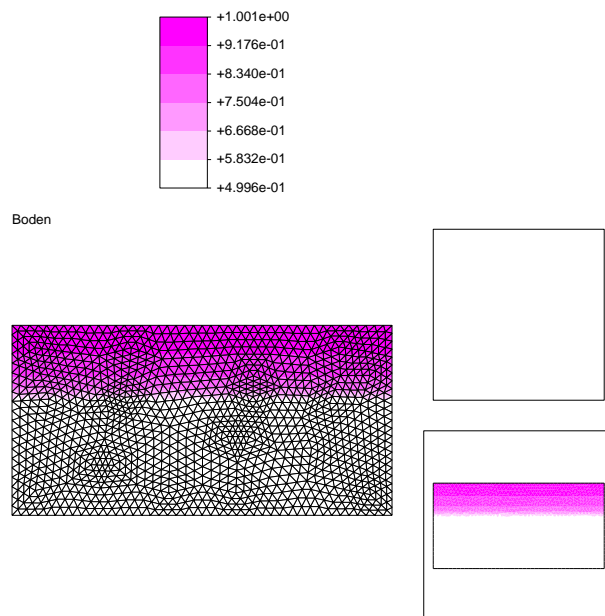


Abbildung 3.15: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 1 \text{ h}$

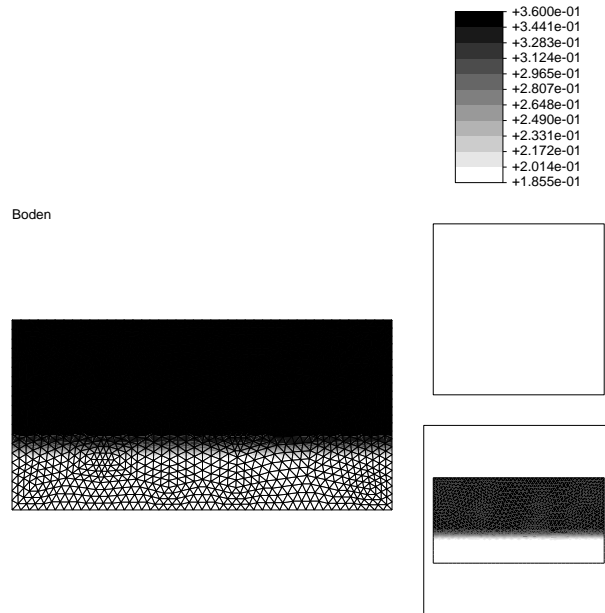


Abbildung 3.16: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 4 \text{ h}$

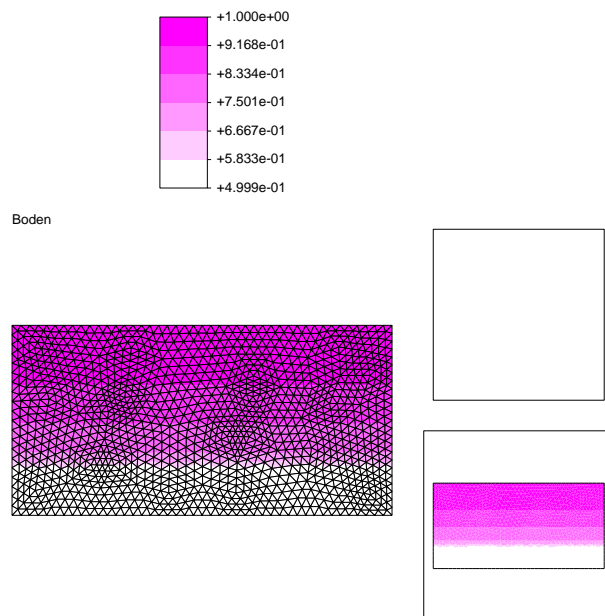


Abbildung 3.17: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 4 \text{ h}$

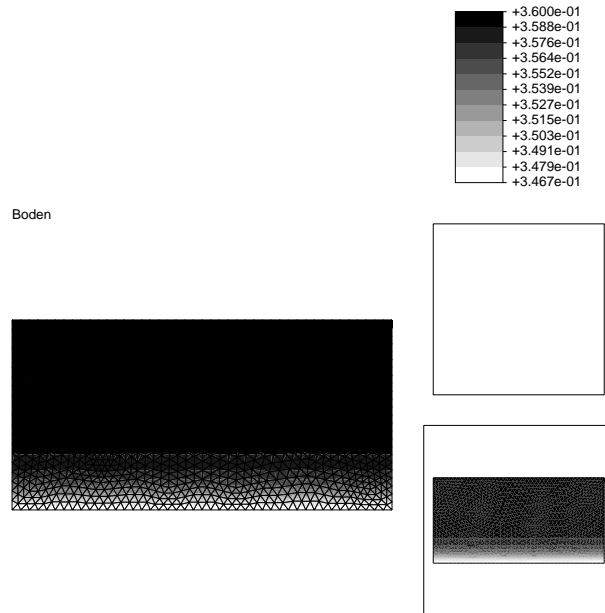


Abbildung 3.18: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 7$ h

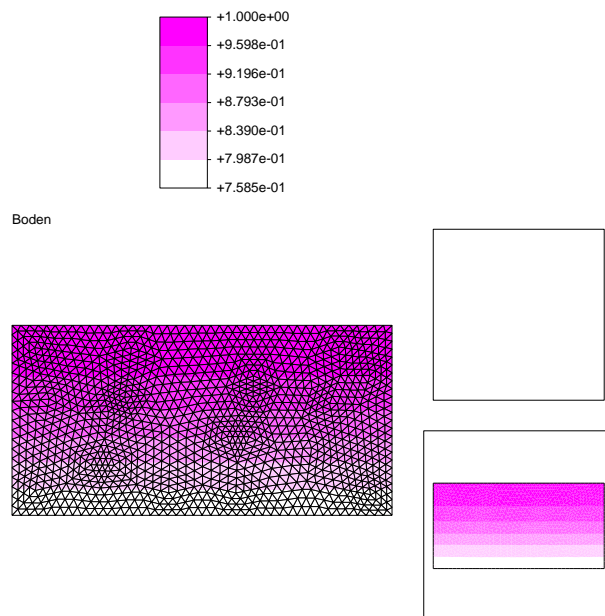


Abbildung 3.19: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 7$ h

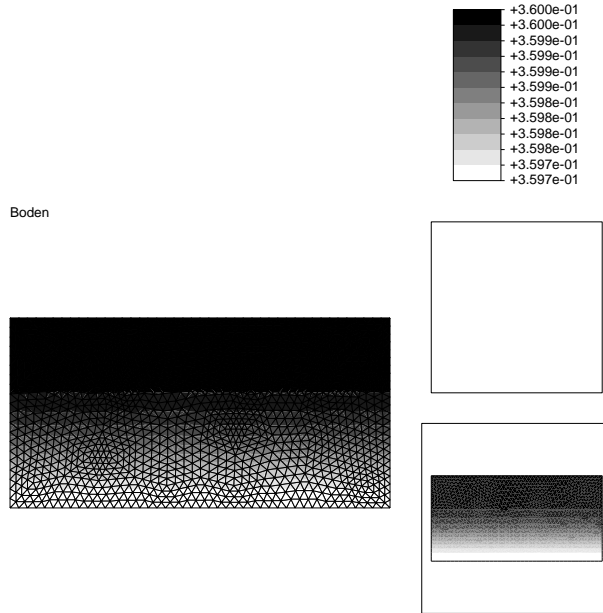


Abbildung 3.20: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 10 \text{ h}$

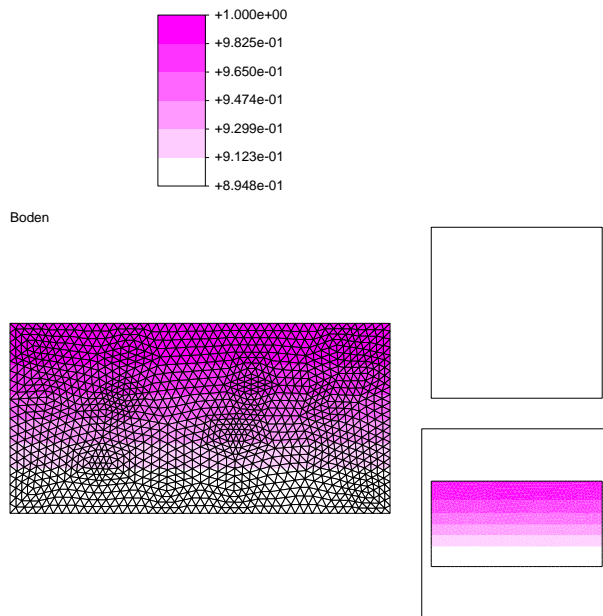


Abbildung 3.21: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 10 \text{ h}$

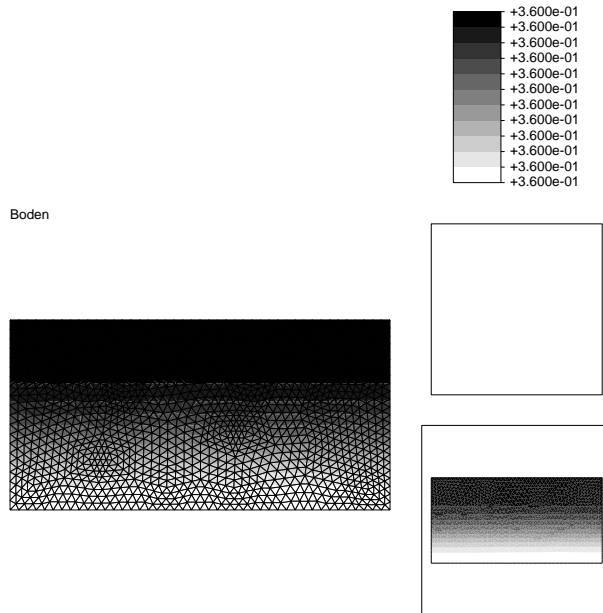


Abbildung 3.22: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 15 \text{ h}$

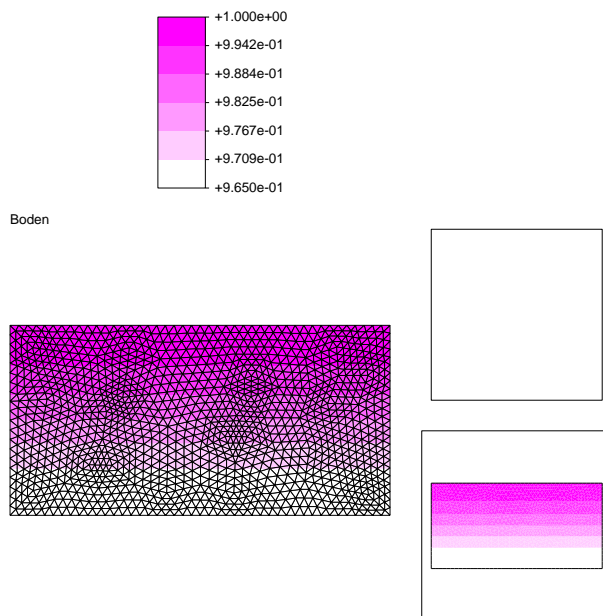


Abbildung 3.23: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 15 \text{ h}$

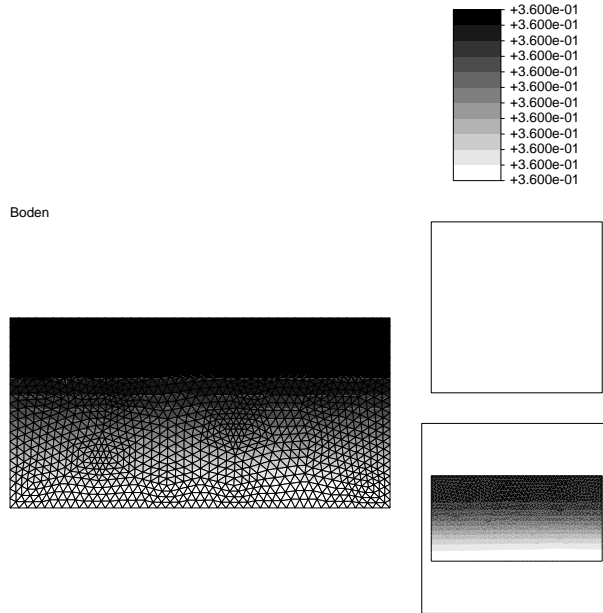


Abbildung 3.24: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 20 \text{ h}$

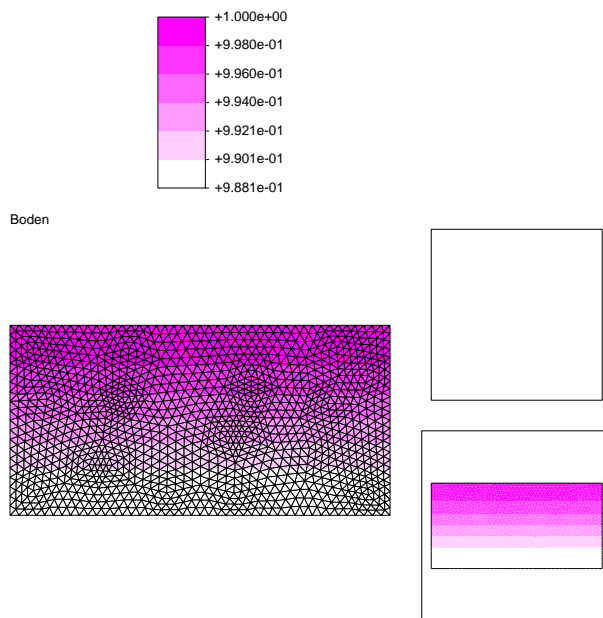


Abbildung 3.25: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 20 \text{ h}$

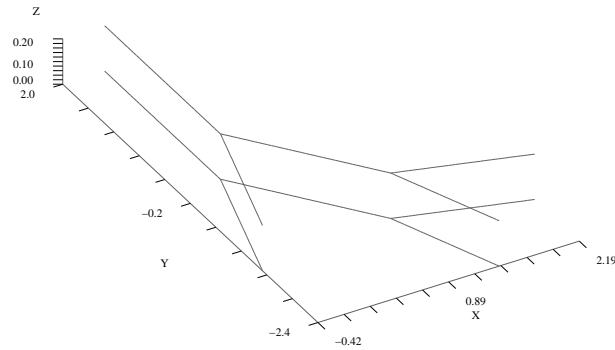


Abbildung 3.26: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 0$

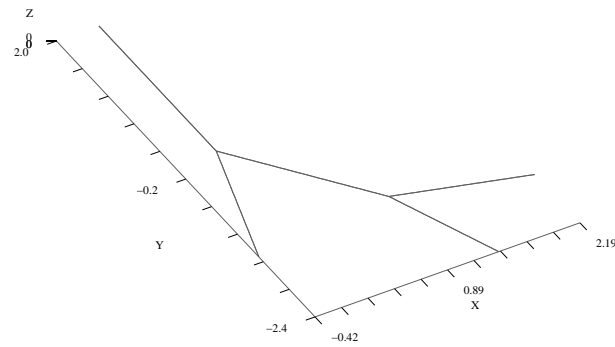


Abbildung 3.27: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 0$

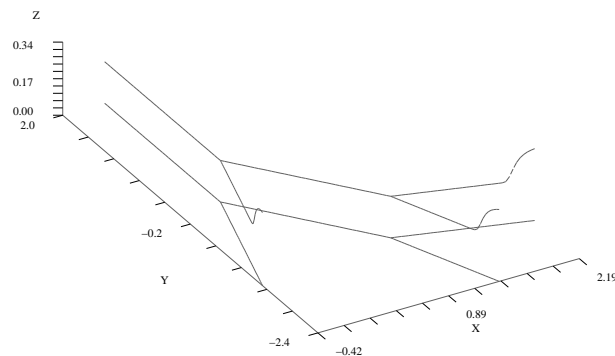


Abbildung 3.28: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 1 \text{ h}$

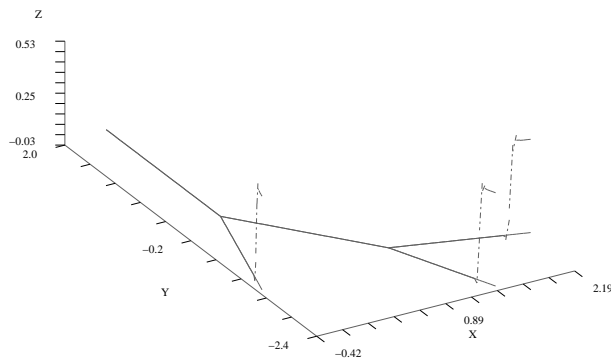


Abbildung 3.29: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 1 \text{ h}$

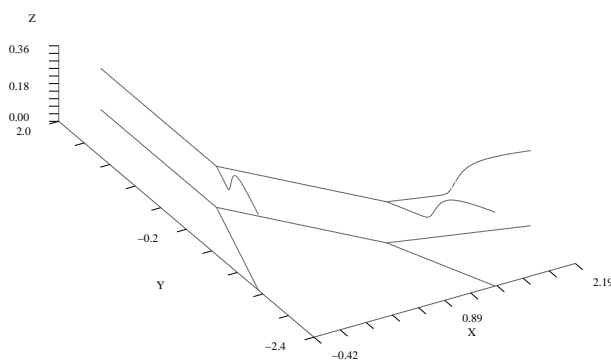


Abbildung 3.30: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 4 \text{ h}$

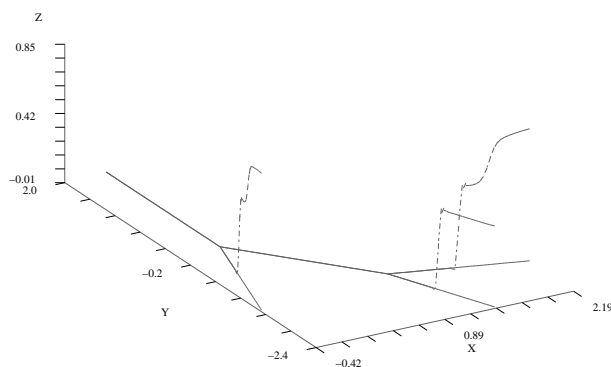


Abbildung 3.31: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 4 \text{ h}$

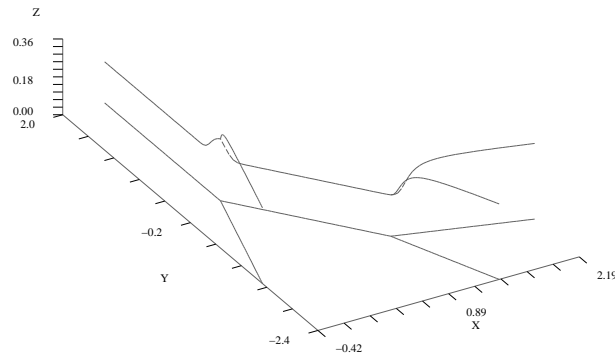


Abbildung 3.32: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 7$ h

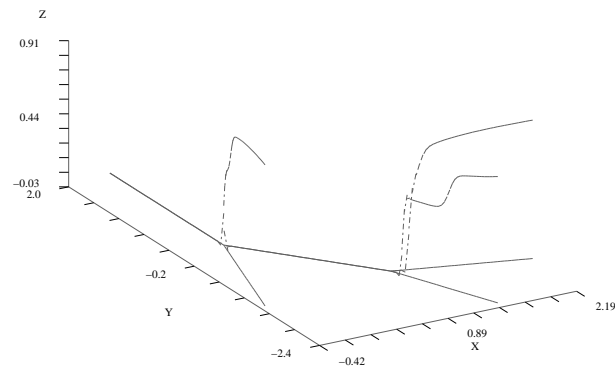


Abbildung 3.33: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 7$ h

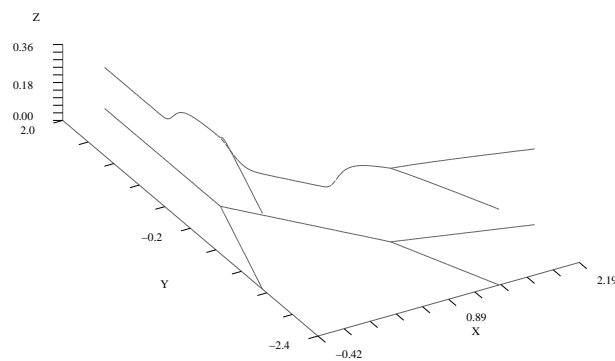


Abbildung 3.34: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 10$ h

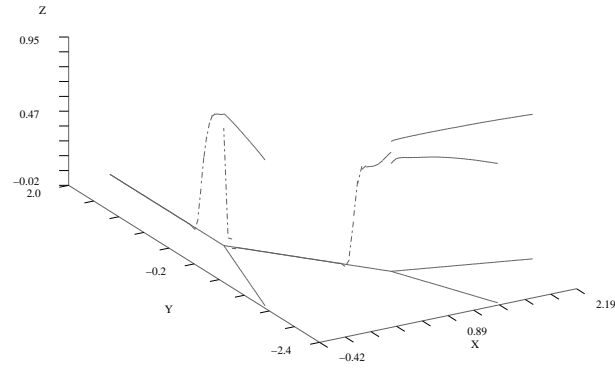


Abbildung 3.35: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 10 \text{ h}$

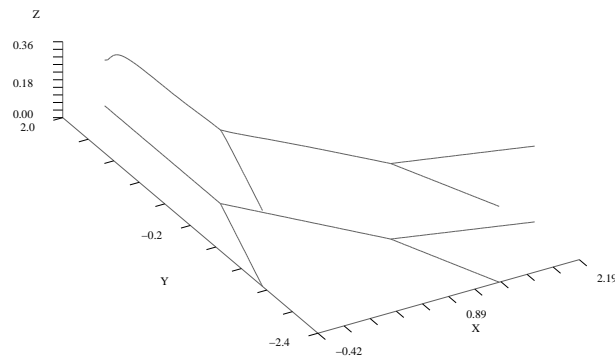


Abbildung 3.36: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 15 \text{ h}$

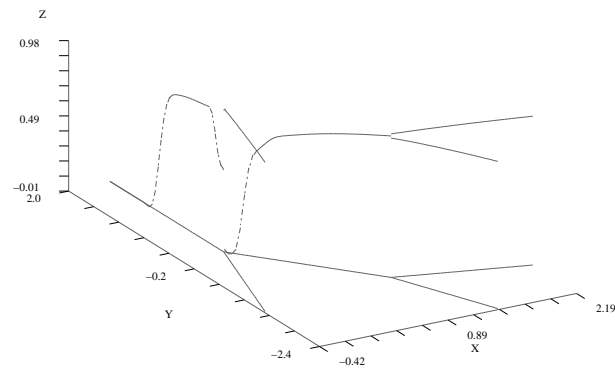


Abbildung 3.37: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 15 \text{ h}$

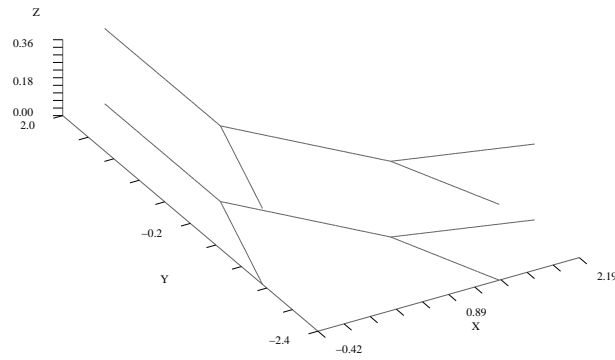


Abbildung 3.38: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 20$ h

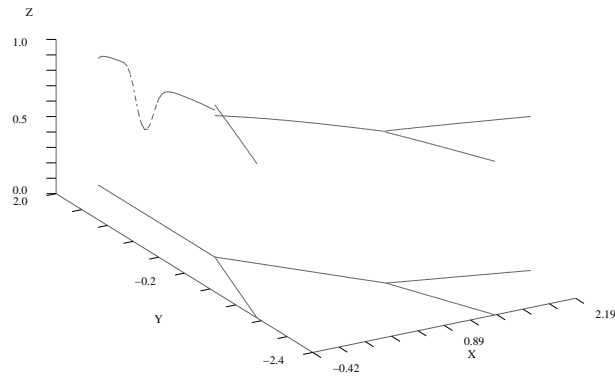


Abbildung 3.39: $A_{\text{ref}} = 10^{-3} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 20$ h

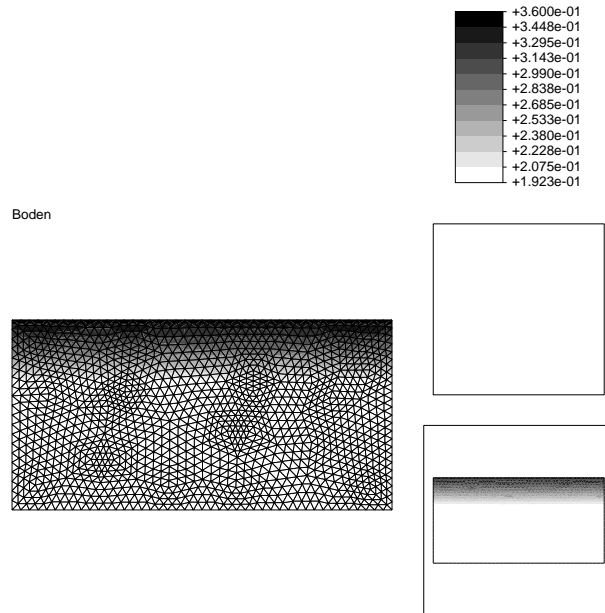


Abbildung 3.40: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 0$

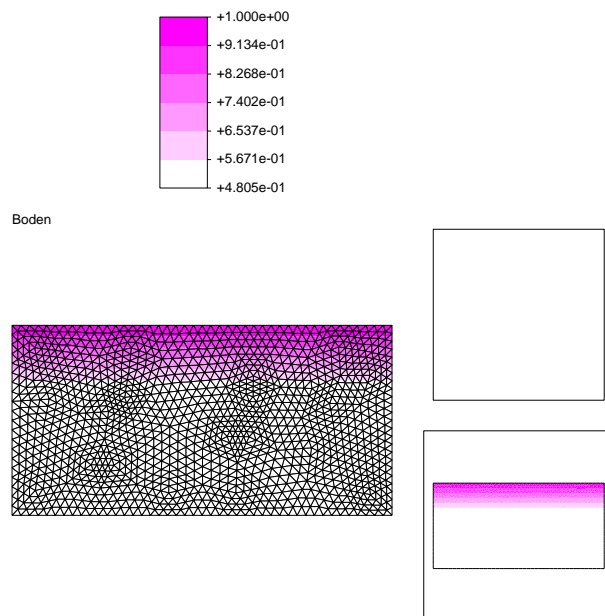


Abbildung 3.41: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 0$

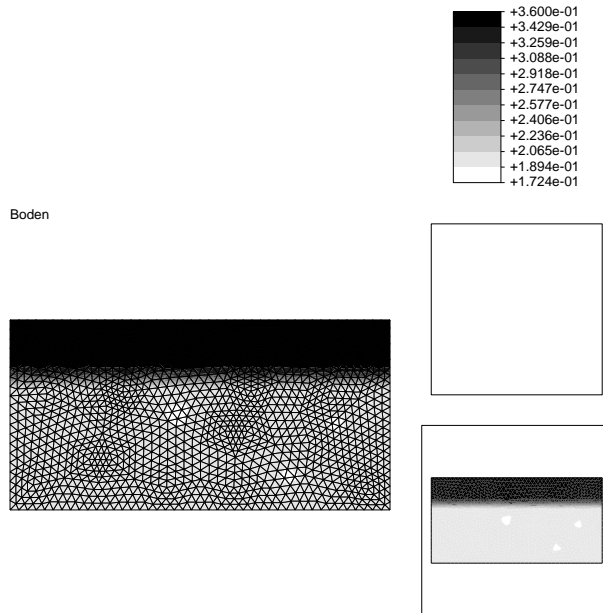


Abbildung 3.42: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 1$ h

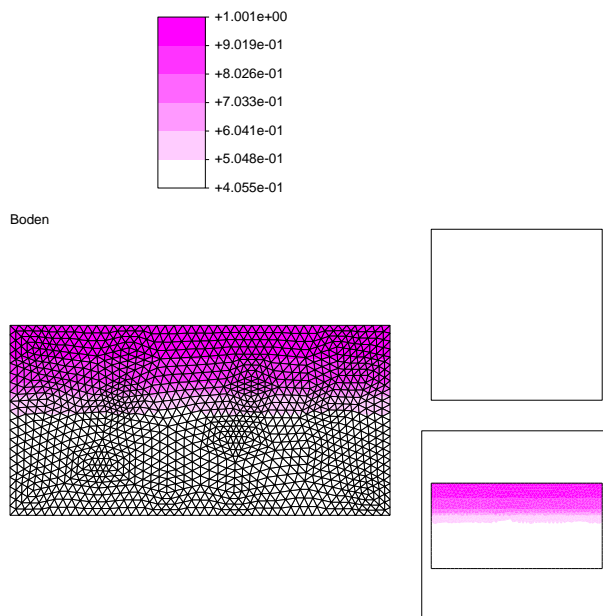


Abbildung 3.43: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 1$ h

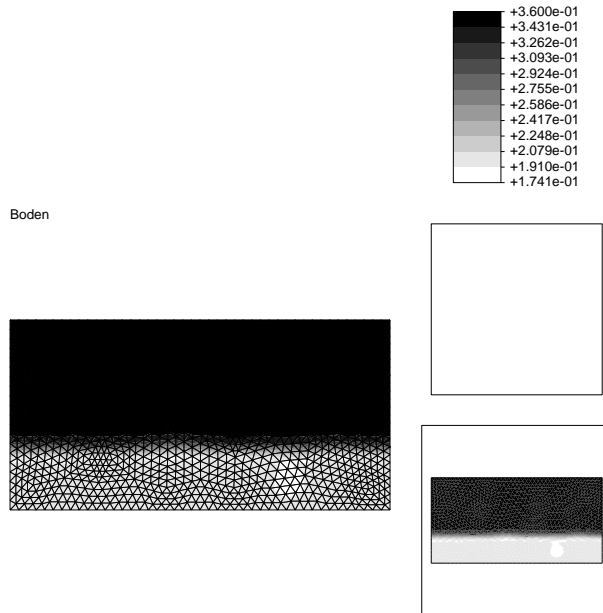


Abbildung 3.44: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 4 \text{ h}$

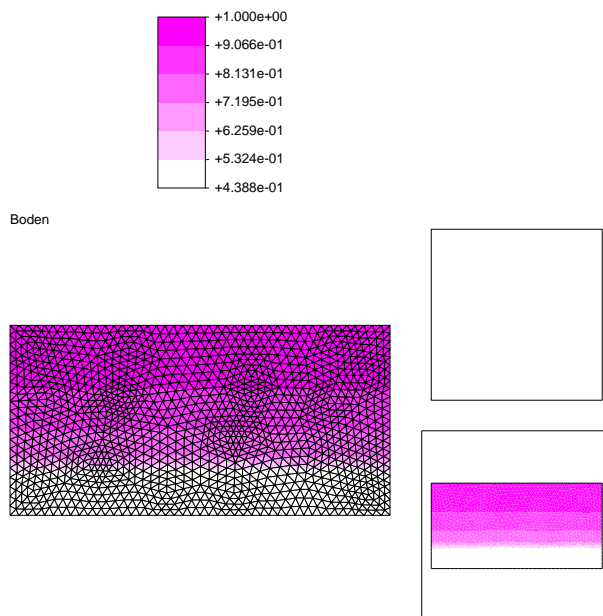


Abbildung 3.45: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 4 \text{ h}$

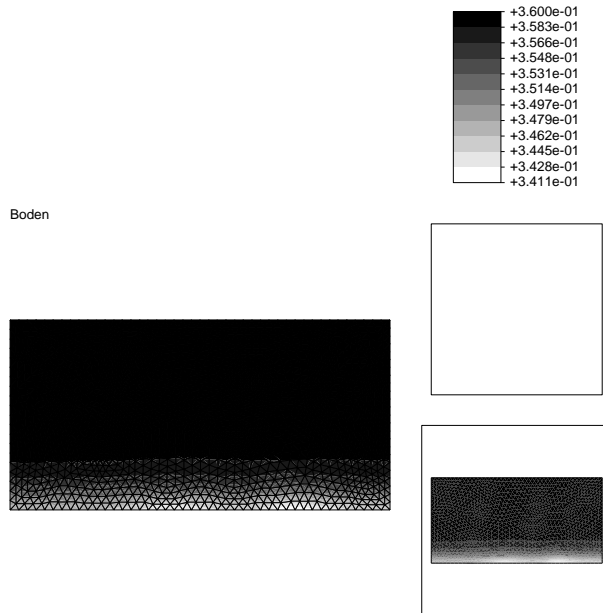


Abbildung 3.46: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 7$ h

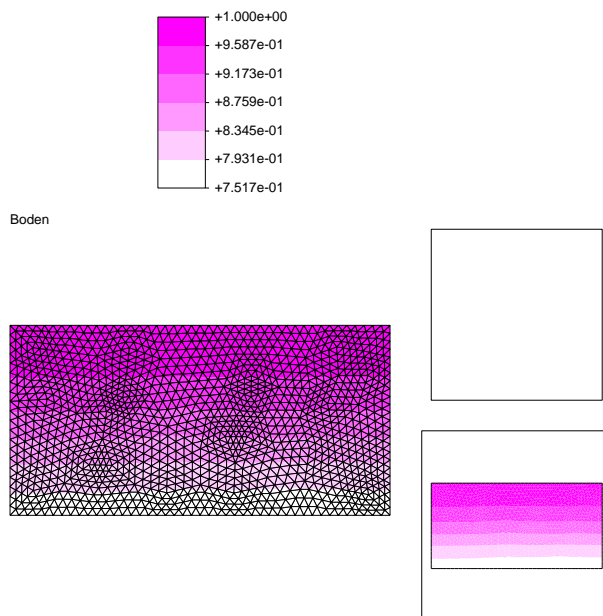


Abbildung 3.47: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 7$ h

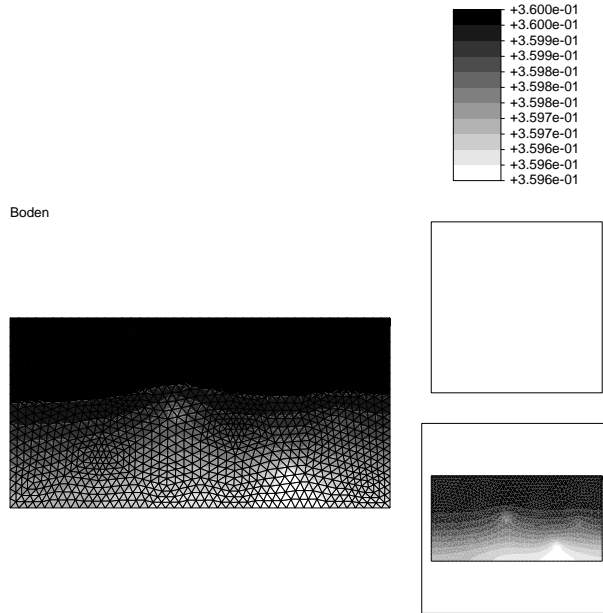


Abbildung 3.48: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 10$ h

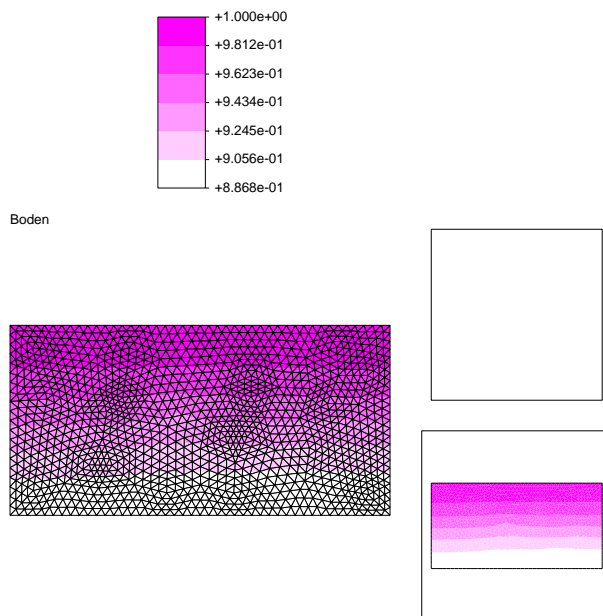


Abbildung 3.49: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 10$ h

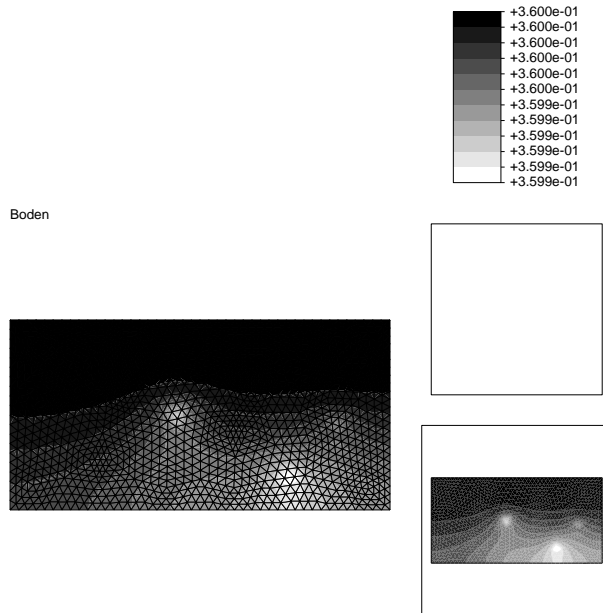


Abbildung 3.50: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 15 \text{ h}$

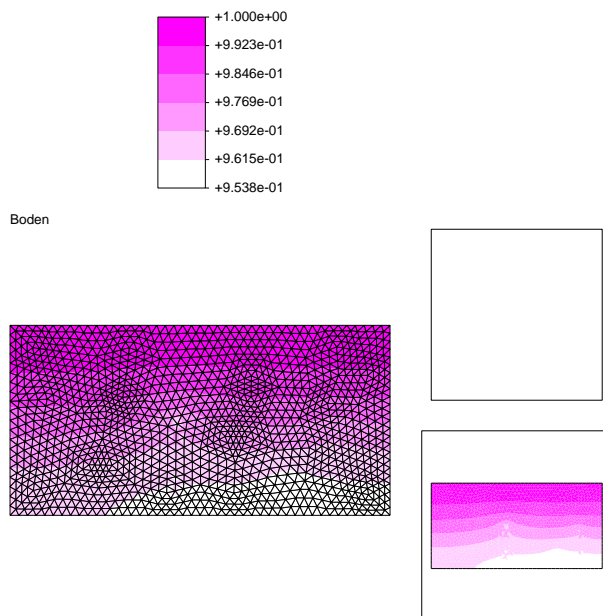


Abbildung 3.51: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 15 \text{ h}$

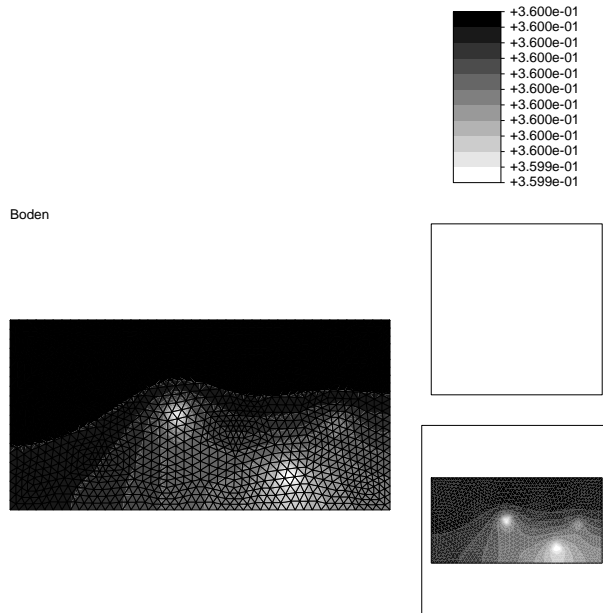


Abbildung 3.52: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ im Boden: $t = 20 \text{ h}$

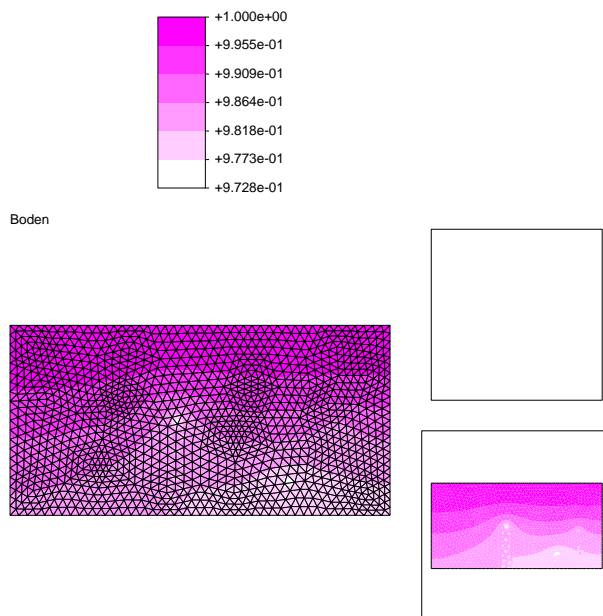


Abbildung 3.53: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c im Boden: $t = 20 \text{ h}$

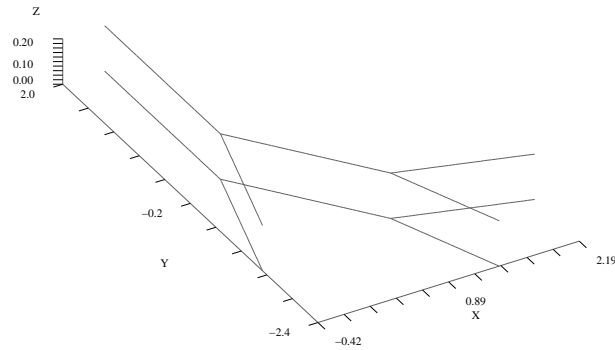


Abbildung 3.54: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 0$

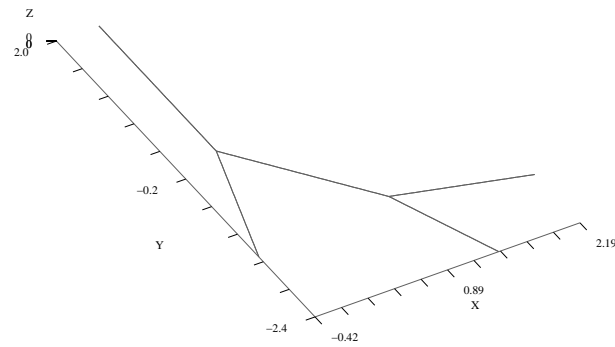


Abbildung 3.55: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 0$

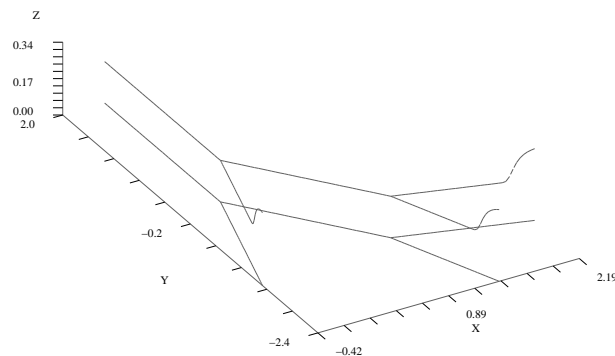


Abbildung 3.56: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 1 \text{ h}$

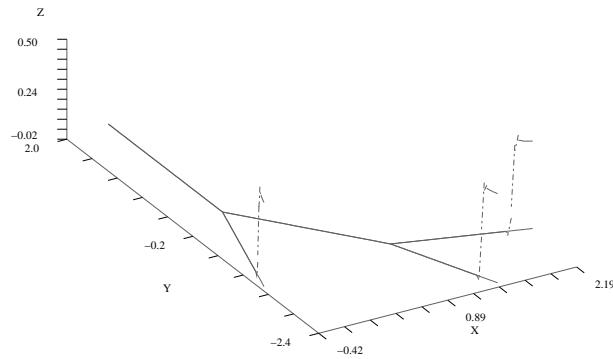


Abbildung 3.57: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 1 \text{ h}$

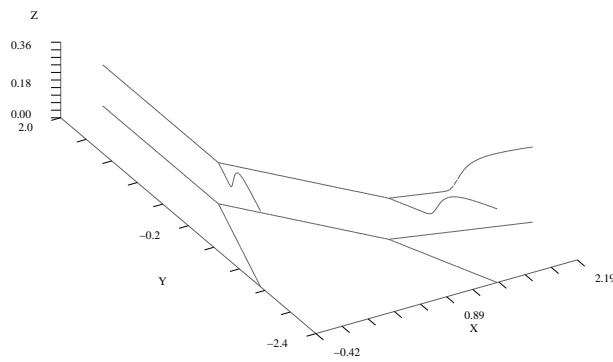


Abbildung 3.58: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 4 \text{ h}$

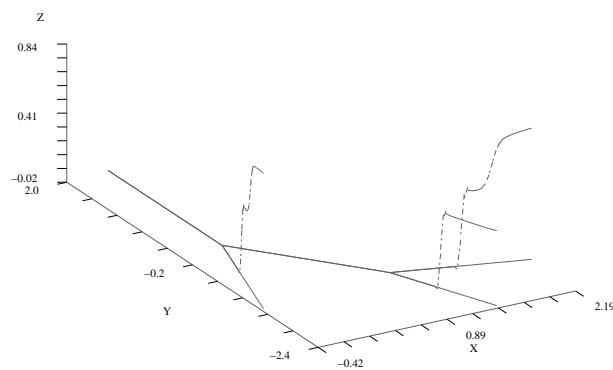


Abbildung 3.59: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 4 \text{ h}$

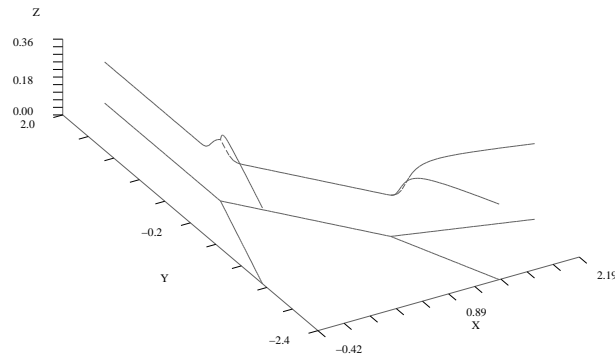


Abbildung 3.60: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 7$ h

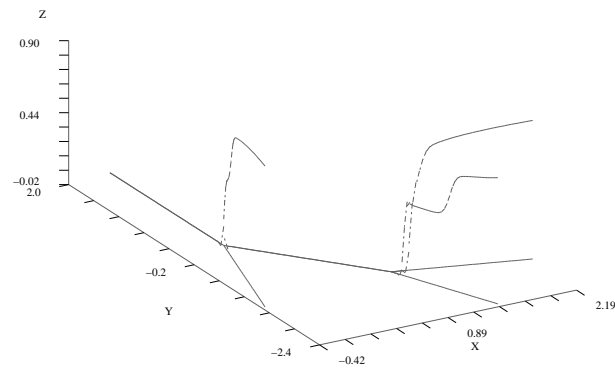


Abbildung 3.61: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 7$ h

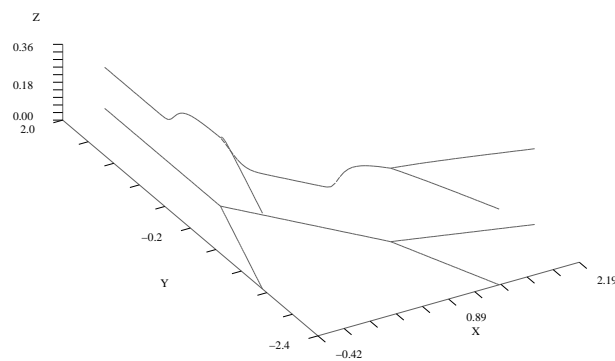


Abbildung 3.62: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 10$ h

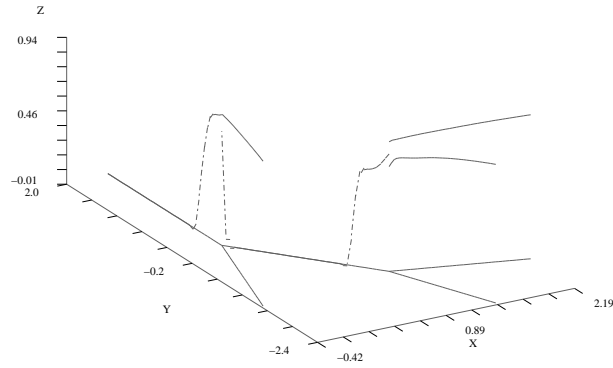


Abbildung 3.63: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 10 \text{ h}$

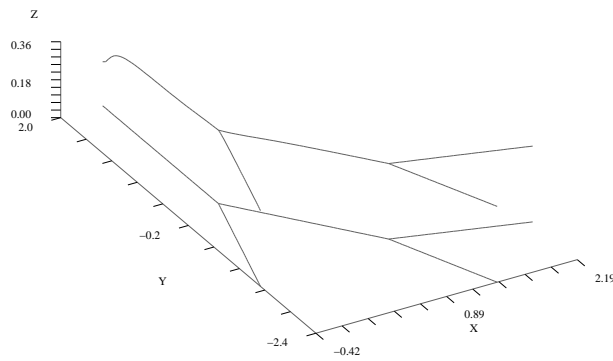


Abbildung 3.64: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 15 \text{ h}$

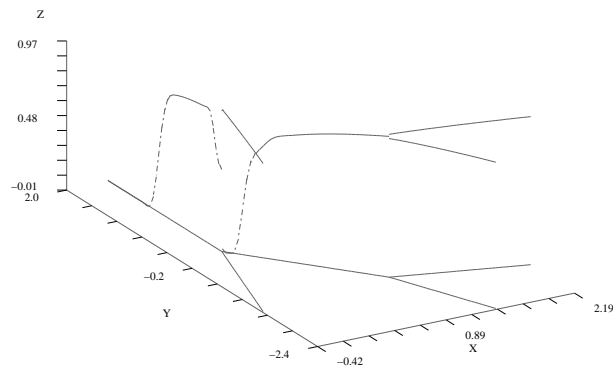


Abbildung 3.65: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 15 \text{ h}$

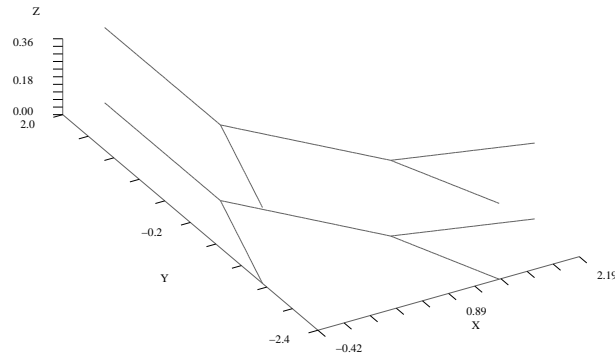


Abbildung 3.66: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Wassergehalt θ in der Wurzel: $t = 20 \text{ h}$

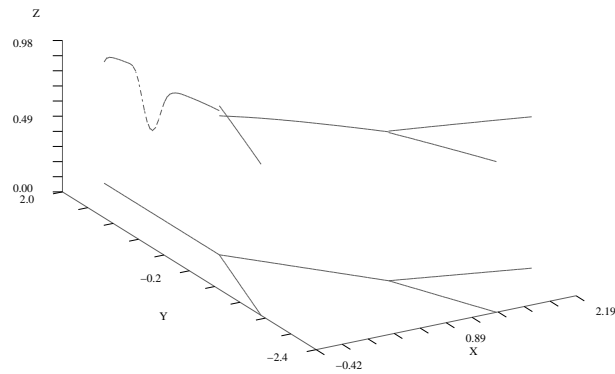


Abbildung 3.67: $A_{\text{ref}} = 10^{-1} \text{ m}^2$: Konzentration c in der Wurzel: $t = 20 \text{ h}$

Literaturverzeichnis

- [1] F. Ali Mehmeti. *Nonlinear waves in networks*. Mathematical Research 80. Akademie Verlag, Berlin 1994
- [2] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer Verlag, Berlin 1992
- [3] A. Auge, A. Kapurkin, G. Lube, F.-C. Otto. *A note on domain decomposition of singularly perturbed elliptic problems*. Ninth International on Domain Decomposition Methods, Wiley 1998, 163–170
- [4] C. Bardos. *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; Théorèmes d'approximation; Application à l'équation de transport*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 (3) (1970), 185–233
- [5] C. Bardos, D. Brezis, H. Brezis. *Singular perturbations and maximal expansion of positive operators*. Arch. Ration. Mech. An. 53 (1973), 69–100
- [6] J. von Below. *Parabolic network equations*. Habilitationsschrift an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Tübingen 1993
- [7] Q. Deng. *An analysis for a nonoverlapping domain decomposition iterative procedure*. An analysis for a nonoverlapping domain decomposition iterative procedure. SIAM J. Sci. Comput. 18, No. 5 (1997), 1517–1525
- [8] A. A. Dezin. *Weak and strong extensions of differential operators*. Math. Notes 24 (1979), 867–873
- [9] F. W. Dorr, S. V. Parter, L. F. Shampine. *Applications of maximum principle to singular perturbation problems*. Siam Rev. 15 (1973), 43–88
- [10] C. J. van Duijn, G. Galliano, M. A. Peletier. *A diffusion-convection problem with drainage arising in the ecology of mangroves*. Interfaces and Free Boundaries 3 (2001), 15–44

- [11] W. Eckhaus. *Asymptotic analysis of singular perturbations*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 9. North-Holland, Amsterdam 1979
- [12] R. A. Feddes et al. *Simulation of field water uptake by plants using a soil water dependent root extraction function*. J. Hydrol. 31, 13–26
- [13] T. Fischer, G. Leugering. *On instantaneous control of singularly perturbed hyperbolic equations on graphs*. Lect. Notes Pure Appl. Math. 219 (2001), 69–97
- [14] K. O. Friedrichs. *The identity of weak and strong extensions of differential operators*. Trans. Am. Math. Soc. 55 (1944), 132–151
- [15] M. T. Van Genuchten. *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity in unsaturated soils*. Soil. Sci. Soc. Am. J. 44 (1980), 892–898
- [16] R. Glowinski, P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method*. Domain decomposition methods for partial differential equations, Proc. 3rd Int. Symp. Houston/TX (USA) 1989 (1990), 224–231
- [17] W. Jäger, J. Kačur. *Solution of doubly nonlinear and degenerate parabolic problems by relaxation schemes*. Math. Model. Numer. Anal. 29, No. 5 (1995), 605–627
- [18] C. Johnson, J. Pitkäranta. *An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*. Math. Comput. 46 (1986), 1–26
- [19] J. E. Lagnese, G. Leugering, E. J. P. G. Schmidt. *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Birkhäuser, Boston (1994)
- [20] G. Leugering. *Dynamic domain decomposition of optimal control problems for networks of strings and Timoshenko beams*. SIAM J. Control Optim., Vol. 37, No. 6 (1999), 1649–1675
- [21] G. Leugering. *Domain decomposition of optimal control problems for dynamic networks of elastic strings*. Computational Optimization and Applications 16 (2000), 5–27
- [22] J. L. Lions. *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle optimale*. Lecture Notes in Mathematics 323. Springer Verlag, Berlin 1973
- [23] G. Lumer. *Espaces ramifiés, et diffusions sur les reseaux topologiques*. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 291 (1980), 627–630

- [24] D. Mercier, S. Nicaise. *Existence results for differential equations on one-dimensional networks and prewavelets approximation*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 4, No. 2 (1998), 273–300
- [25] Y. Mualem. *A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media*. Water Resour. Res. 12 (1976), 513–522
- [26] M. Obeyesekere, R. M. Anderson. *A Model for Water Uptake in Plants*. Applied Mathematics and Computation 84 (1997), 163–191
- [27] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York 1983
- [28] M. H. Protter, H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Prentice-Hall Partial Differential Equations Series. Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1967
- [29] A. Quarteroni, A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer series in computational mathematics, 23 (1997)
- [30] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*. Springer series in computational mathematics, 24 (1996)
- [31] J. E. Roberts, J.-M. Thomas. *Mixed and Hybrid Methods*. Handbook of Numerical Analysis, North Holland, Amsterdam 1991, 523–539
- [32] E. Steudle. *Water transport across roots*. Plant and Soil 167 (1994), 79–90
- [33] K.-U. Totsche, B. Huwe. *SIMFONI: A numerical Model for the Simulation of Nitrogen Budget and Nitrogen Dynamics on Forest Soils: Report - Documentation - Model Evaluation - Model Application*. BITÖK-No: 36-043/93, Project-No: PT BEO 51-0339476 B
- [34] J. Wang, N. Yan. *A Parallel Domain Decomposition Procedure for Convection Diffusion Problems*. In: Domain Decomposition Methods in Sciences and Engineering, Wiley 1997
- [35] K. Yosida. *Functional analysis*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123. Springer Verlag, New York, 3. Auflage 1971
- [36] T. Zurmühl. *Validierung konvektiv-dispersiver Modelle zur Berechnung des instationären Stofftransports in ungestörten Bodensäulen*. Bayreuther Bodenkundliche Berichte 36 (1994)

Anhang A

Funktionale Abhängigkeiten im Boden

Für die in Kapitel 1 dargestellten und in den Abbildungen 1.1 und 1.2 veranschaulichten funktionalen Zusammenhänge zwischen Wassergehalt θ und Matrixpotential ψ , sowie zwischen Leitfähigkeit K und Matrixpotential verwendet man üblicherweise weitgehend empirische Ansätze, die sich in der Praxis bewährt haben, und die mit Hilfe von frei wählbaren Parametern auf den jeweiligen Bodentyp angepaßt werden können.

Für die Abhängigkeit der Wassergehalts θ vom Matrixpotential ψ verwenden wir das in [15] beschriebene Modell. Dazu führen wir den sogenannten relativen Wassergehalt

$$\Theta := \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$$

ein. Mit den Parametern $\alpha [\text{L}^{-1}] > 0$, $m [-] > 0$ und $n [-] > 1$ lautet die Ansatzfunktion

$$\Theta(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{(1+(\alpha|\psi|)^n)^m}, & \text{falls } \psi < 0, \\ 1, & \text{falls } \psi \geq 0. \end{cases}$$

Egal wie die Parameter gewählt werden, ist die Funktion

$$\theta(\psi) = \theta_s + \Theta(\psi)(\theta_s - \theta_r)$$

streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\psi \rightarrow -\infty} \theta(\psi) &= \theta_r, \\ \theta(\psi) &= \theta_s \quad \forall \psi \geq 0. \end{aligned}$$

Für den Zusammenhang zwischen Leitfähigkeit und Matrixpotential verwenden wir das Modell in [25], in welchem sich die Leitfähigkeit berechnet

als

$$K_r(\psi) = \frac{K(\psi)}{K_{\text{sat}}} = \Theta(\psi)^\tau \left(\frac{\int_{\theta_r}^{\theta(\psi)} \frac{1}{\psi(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta}}{\int_{\theta_r}^{\theta_s} \frac{1}{\psi(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta}} \right)^2, \quad (\text{A.1})$$

mit den Parametern $K_{\text{sat}} [\text{LT}^{-1}] > 0$ und $\tau [-] > 0$, wobei $\psi(\cdot)$ die Umkehrfunktion zur oben angegebenen Funktion $\theta(\cdot)$ ist, die den Wassergehalt in Abhängigkeit vom Matrixpotential angibt.

Wir betrachten K als skalare Größe, was im Kontext von Kapitel 1 bedeutet, daß K ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Die bodenphysikalische Interpretation dafür ist, daß die Durchlässigkeit des Bodens in jede Richtung gleich ist.

Die Funktion $\psi(\cdot)$ ist definiert auf $(\theta_r, \theta_s]$. Aufgrund der Eigenschaften von $\theta(\cdot)$ ist ψ streng monoton wachsend, und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \searrow \theta_r} \psi(\theta) &= -\infty, \\ \psi(\theta) &< 0 \quad \forall \theta \in (\theta_r, \theta_s), \\ \psi(\theta_s) &= 0. \end{aligned}$$

K ist also streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\psi \rightarrow -\infty} K(\psi) &= 0, \\ K(\psi) &\in (0, K_{\text{sat}}) \quad \forall \psi < 0, \\ K(\psi) &= K_{\text{sat}} \quad \forall \psi \geq 0. \end{aligned}$$

Unter der Zusatzbedingung

$$m = 1 - \frac{1}{n},$$

die wir auch annehmen, läßt sich (A.1) auch explizit darstellen, da in diesem Fall $\frac{1}{\psi(\tilde{\theta})}$ die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{\psi(\tilde{\theta})} d\tilde{\theta} = -\alpha(\theta_s - \theta_r) \left(1 - \left(\frac{\tilde{\theta} - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^m$$

besitzt. Daraus erhalten wir

$$K_r(\psi) = \frac{1}{(1 + (\alpha|\psi|^n))^{m\tau}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{1 + (\alpha|\psi|^n)} \right)^m \right)^2.$$

Anhang B

Programmablaufbeschreibungen

Dieses Kapitel enthält detaillierte Ablaufpläne von Algorithmen zur Lösung der elliptischen Probleme, die die Grundbausteine für die Boden-Wurzel-Simulation darstellen. Dabei wird die in Kapitel 3 beschriebene nichtüberlappende Bereichszerlegung verwendet.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{auf } \Omega, \quad (\text{B.1})$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (\text{B.2})$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) mit den Koeffizienten

$$a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ω sei unterteilt in die Teilbereiche $(\Omega_i)_{i \in \mathcal{I}}$. Die Gesamtheit der Schnittstellen zwischen diesen Gebieten, also alle nichtleeren Mengen der Form $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_k$ bezeichnen wir als Interfaces $(\Gamma_J)_{J \in \mathcal{J}}$. Auf dem gesamten Gebiet Ω sei eine Finite-Elemente-Triangulierung gegeben, welche die Interfaces Γ_J respektiert. Es darf also keine Simplexes geben, die zu mehreren Teilbereichen gehören. Dadurch entstehen automatisch auch Finite-Elemente-Triangulierungen auf den Teilbereichen Ω_i , sowie auf den Interfaces Γ_J .

Die herkömmliche Methode, obiges Problem mit Finiten Elementen zu lösen, basiert auf der variationellen Formulierung

$$(\nabla v, a\nabla u)_\Omega + (v, b \cdot \nabla u)_\Omega + (v, cu)_\Omega = (v, f)_\Omega.$$

Als Finite-Elemente-Räume verwenden wir auf jedem Teilbereich Ω_i den Raum $V_h^{(i)}$ aller stetigen Funktionen, die die Dirichlet-Randbedingung auf $\partial\Omega$ erfüllen und auf jedem Simplex Polynome mit maximalem Grad 1 sind.

$$\{w_1^{(i)}, \dots, w_{n_i}^{(i)}\}$$

seien Basen dieser Räume, typischerweise bestehend aus Hutfunktionen. Auch auf den Interfaces Γ_J verwenden wir Räume dieses Typs, mit den Basen

$$\{v_1^{(J)}, \dots, v_{n_J}^{(J)}\}.$$

Es folgt eine Beschreibung des Programmablaufs für die Lösung von (B.1),(B.2) mittels nichtüberlappender Bereichszerlegung mit den Interface-spezifischen Penalty-Parametern η_J .

Für jedes Interface $J \in \mathcal{J}$:

Berechne Gramsche Matrix $G^{(J)}$ ($n_J \times n_J$)

$$G_{kl}^{(J)} := \int_{\Gamma_J} v_k^{(J)} v_l^{(J)} dx.$$

Erzeuge LU-Zerlegung dieser Matrix

$$L_G^{(J)} U_G^{(J)} = G^{(J)}. \quad (\text{B.3})$$

Berechne Matrix $R^{(J)}$ ($n_J \times n_J$)

$$R_{kl}^{(J)} := \int_{\Gamma_J} \eta_J v_k^{(J)} v_l^{(J)} dx.$$

Erzeuge LU-Zerlegung dieser Matrix

$$L_R^{(J)} U_R^{(J)} = R^{(J)}. \quad (\text{B.4})$$

Für jeden Teilbereich $i \in \mathcal{I}$:

Berechne Systemmatrix $S^{(i)}$ ($n_i \times n_i$)

$$S_{kl}^{(i)} := \int_{\Omega_i} (\nabla w_k^{(i)}) \cdot (a \nabla w_l^{(i)}) + w_k^{(i)} (b \cdot \nabla w_l^{(i)}) + c w_k^{(i)} w_l^{(i)} dx.$$

Für jedes zu Ω_i adjazente Interface Γ_J :

Berechne Matrix C ($n_J \times n_i$)

$$C_{kl} := \int_{\Gamma_J} \eta_J v_k^{(J)} w_l^{(i)} dx.$$

Bestimme mit Hilfe von (B.4) Matrix M ($n_J \times n_i$) mit

$$R^{(J)} M = C.$$

Setze

$$S^{(i)} := S^{(i)} + M^T C.$$

Bestimme mit Hilfe von (B.3) Matrix $P^{(iJ)}$ ($n_J \times n_i$) mit

$$G^{(J)} P^{(iJ)} = C.$$

Setze

$$P^{(iJ)} := 2P^{(iJ)}.$$

Berechne Matrix $B^{(iJ)}$ ($n_J \times n_i$)

$$B_{kl}^{(iJ)} := \int_{\Gamma_J} v_k^{(J)} w_l^{(i)} dx.$$

Initialisiere Vektor $b^{(iJ)}$ (n_J)

$$b^{(iJ)} := 0.$$

Erzeuge LU-Zerlegung der Systemmatrix

$$L_S^{(i)} U_S^{(i)} = S^{(i)}. \quad (\text{B.5})$$

Berechne rechte Seite $r^{(i)}$ (n_i)

$$r_k^{(i)} := \int_{\Omega_i} w_k^{(i)} f dx.$$

11: Für jeden Teilbereich $i \in \mathcal{I}$:

Initialisiere Vektor t (n_i)

$$t := r^{(i)}.$$

Für jedes zu Ω_i adjazente Interface Γ_J :

Setze

$$t := t + (B^{(iJ)})^T b^{(iJ)}.$$

Bestimme mit Hilfe von (B.5) Vektor $s^{(i)}$ (n_i) mit

$$S^{(i)} s^{(i)} = t.$$

Für jedes Interface $J \in \mathcal{J}$:

Initialisiere Vektor t (n_J)

$$t := 0.$$

Für jeden zu Γ_J adjazenten Teilbereich Ω_i :

Setze

$$t := t + P^{(iJ)} s^{(i)} - b^{(iJ)}.$$

Für jeden zu Γ_J adjazenten Teilbereich Ω_i :

Setze

$$b^{(iJ)} = b^{(iJ)} - (P^{(iJ)} s^{(i)} - t). \quad (\text{B.6})$$

Falls das Abbruchkriterium noch nicht erfüllt ist:

Gehe zu 11.

Das Abbruchkriterium besteht darin, in (B.6) immer auch die L^2 -Norm des Update-Terms $u := (P^{(iJ)} s^{(i)} - t)$ zu bestimmen, die sich mit der Gramschen Matrix $G^{(J)}$ ergibt als

$$\left(u^T (G^{(J)}) u \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Falls diese Norm stets kleiner als eine vorher festgelegte Konstante ϵ_{stop} bleibt, gilt das Abbruchkriterium als erfüllt.

Das Verfahren für singular gestörte Probleme basiert auf der Darstellung

$$h^{-1}q + \epsilon \nabla u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{div } q + b \cdot \nabla u + cu = f \quad \text{auf } \Omega, \quad (\text{B.8})$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (\text{B.9})$$

ϵ sei eine positive differenzierbare skalare Funktion und h eine von der Null wegbeschränkte Matrix mit

$$a = \epsilon h.$$

Auf jedem Teilbereich Ω_i sei $W_h^{(i)}$ der in [31], Abschnitt 6 beschriebene Finite-Elemente-Raum vektorwertiger Funktionen von maximalem Polynomgrad 1. $Z_h^{(i)}$ sei der Raum aller skalaren Funktionen, die stückweise (auf jedem einzelnen Simplex) ein Polynom von maximalem Grad 1 sind, aber an den Übergangsschnittstellen der Simplexes nicht stetig sein müssen.

Basen dieser Räume seien

$$\{w_1^{(i)}, \dots, w_{n_i}^{(i)}\}$$

für $W_h^{(i)}$ und

$$\{z_1^{(i)}, \dots, z_{m_i}^{(i)}\}$$

für $Z_h^{(i)}$. Auf den Interfaces betrachten wir wieder die stetigen, stückweise affinen Funktionen mit den Basen

$$\{v_1^{(J)}, \dots, v_{n_J}^{(J)}\}.$$

Für alle Bereiche $i \in \mathcal{I}$ sei \mathcal{T}_i die Menge aller Simplizes in Ω_i . Für einen Simplex $e \in \mathcal{T}_i$ definieren wir

$$\partial e_- = \{x \in \partial e \mid b(x) \cdot \nu(x) < 0\},$$

und in analoger Weise sei auch $\partial\Omega_{i-}$ definiert. Dabei sei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor. Dort wo im Inneren eines Bereiches zwei Simplizes e_1 und e_2 direkt aneinandergrenzen, sei für eine Funktion z , die innerhalb der jeweiligen Simplizes stetig sein muß, und einen Punkt $x \in \bar{e}_1 \cap \bar{e}_2$

$$\begin{aligned} z_+(x) &:= \lim_{\substack{x_+ \rightarrow x \\ b(x) \cdot (x_+ - x) > 0}} z(x_+), \\ z_-(x) &:= \lim_{\substack{x_- \rightarrow x \\ b(x) \cdot (x_- - x) < 0}} z(x_-), \\ [z](x) &:= z_+(x) - z_-(x). \end{aligned}$$

Natürlich machen diese Definitionen nur dann Sinn, wenn $b(x) \cdot \nu(x) \neq 0$.

Der folgende Algorithmus liefert die Lösung von (B.7)–(B.9) mittels nichtüberlappender Bereichszerlegung mit den Penalty-Parametern η_J .

Für jedes Interface $J \in \mathcal{J}$:

Berechne Gramsche Matrix $G^{(J)}$ ($n_J \times n_J$)

$$G_{kl}^{(J)} := \int_{\Gamma_J} v_k^{(J)} v_l^{(J)} dx.$$

Erzeuge LU-Zerlegung dieser Matrix

$$L_G^{(J)} U_G^{(J)} = G^{(J)}. \quad (\text{B.10})$$

Berechne Matrix $R^{(J)}$ ($n_J \times n_J$)

$$R_{kl}^{(J)} := \int_{\Gamma_J} \eta_J v_k^{(J)} v_l^{(J)} dx.$$

Erzeuge LU-Zerlegung dieser Matrix

$$L_R^{(J)} U_R^{(J)} = R^{(J)}. \quad (\text{B.11})$$

Für jeden Teilbereich $i \in \mathcal{I}$:

Berechne Systemuntermatrizen

$$\begin{aligned}
 S_{kl}^{11(i)} &:= \int_{\Omega_i} w_k^{(i)} (h^{-1} w_l^{(i)}) dx, \\
 S_{kl}^{12(i)} &:= - \int_{\Omega_i} (\operatorname{div} \epsilon w_k^{(i)}) z_l^{(i)} dx, \\
 S_{kl}^{21(i)} &:= \int_{\Omega_i} z_k^{(i)} \operatorname{div} w_l^{(i)} dx, \\
 S_{kl}^{22(i)} &:= \int_{\Omega_i} (b \cdot \nabla z_k^{(i)}) z_l^{(i)} + c z_k^{(i)} z_l^{(i)} dx \\
 &\quad + \sum_{e \in \mathcal{T}_i} \int_{\partial e_- \setminus \partial \Omega_i} [z_k^{(i)}] (z_l^{(i)})_- |b \cdot \nu| dx.
 \end{aligned}$$

Für jedes zu Ω_i adjazente Interface Γ_J :

Berechne Matrix C ($n_J \times n_i$)

$$C_{kl} := \int_{\Gamma_J} \eta_J v_k^{(J)} \epsilon (w_l^{(i)} \cdot \nu) dx.$$

Berechne Matrix D ($n_J \times m_i$)

$$D_{kl} := - \int_{\Gamma_J \cap \partial \Omega_{i-}} \eta_J v_k^{(J)} z_l^{(i)} |b \cdot \nu| dx.$$

Bestimme mit Hilfe von (B.11) Matrix M ($n_J \times m_i$) mit

$$R^{(J)} M = (C \mid D).$$

Setze

$$\begin{pmatrix} S^{11(i)} \\ S^{21(i)} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} S^{11(i)} \\ S^{21(i)} \end{pmatrix} + M^T C.$$

Bestimme mit Hilfe von (B.3) Matrix $P^{(iJ)}$ ($n_J \times n_i$) mit

$$G^{(J)} P^{(iJ)} = C.$$

Setze

$$P^{(iJ)} := 2P^{(iJ)}.$$

Berechne Untermatrizen

$$\begin{aligned}
 B_{kl}^1 &:= \int_{\Gamma_J} \epsilon v_k^{(J)} (w_l^{(i)} \cdot \nu) dx \\
 B_{kl}^2 &:= - \int_{\Gamma_J \cap \partial \Omega_{i-}} v_k^{(J)} z_l^{(i)} |b \cdot \nu| dx
 \end{aligned}$$

Setze Matrix $B^{(iJ)}$ ($n_J \times (n_i + m_i)$)

$$B^{(iJ)} := (B^1 \mid B^2).$$

Initialisiere Vektor $b^{(iJ)}$ (n_J)

$$b^{(iJ)} := 0.$$

Setze Systemmatrix $S^{(i)}$ ($(n_i + m_i) \times (n_i + m_i)$)

$$S^{(i)} := \left(\begin{array}{c|c} S^{11(i)} & S^{12(i)} \\ \hline S^{21(i)} & S^{22(i)} \end{array} \right).$$

Erzeuge LU-Zerlegung der Systemmatrix

$$L_S^{(i)} U_S^{(i)} = S^{(i)}. \quad (\text{B.12})$$

Berechne rechte Seite $r^{(i)}$ (m_i)

$$r_k^{(i)} := \int_{\Omega_i} z_k^{(i)} f \, dx.$$

11: Für jeden Teilbereich $i \in \mathcal{I}$:

Initialisiere Vektor t ($n_i + m_i$)

$$t := \left(\begin{array}{c} 0 \\ r^{(i)} \end{array} \right).$$

Für jedes zu Ω_i adjazente Interface Γ_J :

Setze

$$t := t + (B^{(iJ)})^T b^{(iJ)}.$$

Bestimme mit Hilfe von (B.12) Vektor $s^{(i)}$ ($n_i + m_i$) mit

$$S^{(i)} \left(\begin{array}{c} s^{1(i)} \\ s^{2(i)} \end{array} \right) = t.$$

Für jedes Interface $J \in \mathcal{J}$:

Initialisiere Vektor t (n_J)

$$t := 0.$$

Für jeden zu Γ_J adjazenten Teilbereich Ω_i :

Setze

$$t := t + P^{(iJ)} s^{1(i)} - b^{(iJ)}.$$

Für jeden zu Γ_J adjazenten Teilbereich Ω_i :

Setze

$$b^{(iJ)} = (P^{(iJ)} s^{1(i)} - t) - b^{(iJ)}. \quad (\text{B.13})$$

Falls das Abbruchkriterium noch nicht erfüllt ist:

Gehe zu 11.

Das Abbruchkriterium besteht darin, in (B.13) immer auch die L^2 -Norm des Update-Terms $u := (P^{(iJ)} s^{1(i)} - t)$ zu bestimmen, die sich mit der Gramschen Matrix $G^{(J)}$ ergibt als

$$\left(u^T (G^{(J)}) u \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Falls diese Norm stets kleiner als eine vorher festgelegte Konstante ϵ_{stop} bleibt, gilt das Abbruchkriterium als erfüllt.