Shape Spaces from Morphing

Vom Fachbereich Informatik
der Technischen Universität Darmstadt
genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

von

Dipl.–Inform. Marc Alexa

aus Darmstadt

Referenten der Arbeit:	*Prof. Dr.–Ing. J. L. Encarnação,* *Prof. Dr. Markus Gross*

Tag der Einreichung:	08. März 2002
Tag der mündlichen Prüfung:	19. April 2002

D 17
Darmstädter Dissertation 2002

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Methoden zur Repräsentation der Gestalt oder Form von Objekten vorgestellt. Die Grundidee ist, die Form eines Objektes als Mischung anderer vorgegebener Formen zu beschreiben. Dazu wird das mathematische Konzept linearer Räume verwendet: Einige Objekte bilden die Basis eines Raumes, und deren Kombination erzeugt die Elemente dieses Raumes.

Diese Art der Beschreibung hat zwei Vorteile gegenüber der weit verbreiteten absoluten Repräsentation: Sie ist kompakt, wenn die Anzahl der Basen klein im Vergleich zur geometrischen Komplexität der Objekte ist. Sie ist deskriptiv, wenn die Basisformen eine Semantik haben, da dann die Anteile an diesen Basisformen das Objekt beschreiben.

Zur Darstellung der Basisformen werden hier polygonale Netze verwendet. Die Arbeit beschäftigt sich daher mit der Kombination gegebener Polygonnetze und verschiedenen Anwendungen, die bei dieser Art der graphischen Modellbeschreibung auf der Hand liegen.

Die Transformation eines gegebenen Objektes in ein anderes wird in der graphischen Datenverarbeitung *Morphing* genannt. Das Ergebnis dieser Transformation kann in der hier verwendeten Terminologie als ein ein-dimensionaler Raum verstanden werden. Durch weitere Transformationen mit zusätzlichen Basisformen ergeben sich höher-dimensionale Räume. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt sind Morphing-Verfahren für polygonale Netze wegen topologischen und geometrischen Problemen noch verbesserungsbedürftig, weshalb sich der erste Teil dieser Arbeit mit solchen Verfahren befasst.

Diese Morphing-Verfahren werden dann so erweitert, dass sie die Kombination von mehr als zwei Netzen erlauben. Die Nützlichkeit dieser Beschreibung von Gestalt wird an Hand von zwei Szenarien demonstriert: Zur Visualisierung von Multiparameter-Informationsdaten, wobei die Parameter auf Glyphen abgebildet werden und zur effizienten Speicherung und Übermittelung von geometrischen Animationen.

Übersicht

Der erste Teil dieser Arbeit widmet sich Morphing-Vefahren für polygonale Netze. Hier beschränken wir die Polygone auf Dreiecke. Ein Dreiecksnetz $\mathcal{M}$ lässt sich wie folgt durch ein Paar (K, V) beschreiben [Spanier 1966]: Ein (abstrakter) Simplizialkomplex K beschreibt die Topologie des Netzes, und $V = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ die Geometrie der Knoten in $\mathbb{R}^d$ mit typischerweise $d = 3$.

Kanten und Facetten sind in K als Paare $\{i, j\}$ und Tripel $\{i, j, k\}$ dargestellt. Die topologische Realisierung bildet K auf einen (geometrischen) Simplizialkomplex $|K|$ in $\mathbb{R}^n$ ab: Die Knoten werden mit der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ identifiziert, so dass jedes Simplex $\mathbf{s}$ durch die konvexe Hülle der Punkte $\{\mathbf{e_i}\} \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbf{s}$ beschrieben ist. Die geometrische Realisierung $\phi_V(|K|)$ ist eine lineare Abbildung des Simplizialkomplexes $|K|$ auf $\mathbb{R}^d$, die durch die Identifikation der Einheitsvektoren $\mathbf{e_i} \in \mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten $\mathbf{v_i} \in V$ hergestellt wird. Die Abbildung ϕ_V heisst Einbettung wenn sie bijektiv ist. Für jede Einbettung gilt, dass sich jeder Punkt $\mathbf{p}$ auf dem Netz durch eine baryzentrische Koordinate $\mathbf{b}$ mit höchstens drei nicht verschwindenden Komponenten repräsentieren lässt.

Typische Morphingverfahren für polygonale Netze beginnen mit zwei Netzen $\mathcal{M}_0 = (K_0, V_0)$ und $\mathcal{M}_1 = (K_1, V_1)$. Das Ziel des Verfahrens ist die Erzeugung einer Familie $\mathcal{M}(t) = (K, V(t)), t \in [0, 1]$ so dass die Formen $V(0)$ und $V(1)$ geometrisch mit Ausgangsformen identisch sind oder sie zu einem vorgegebenen Grad approximieren, also $\phi_{V(0)}(|K|) \approx \phi_{V_0}(|K_0|)$ und $\phi_{V(1)}(|K|) \approx \phi_{V_1}(|K_1|)$ Die Erzeugung dieser Familie lässt sich in drei Schritten durchführen:

1. Zwischen den Netzen muss eine Korrespondenz hergestellt werden. Das Ergebnis sind Koordinatenvektoren W_0, W_1, die die Positionen der Knoten auf dem anderen Netz angeben: $W_0 \in \phi_{V_1}(|K_1|)$. Jeder dieser Knoten kann dann auch mit einer baryzentrischen Koordinate in Bezug auf das andere Netz definiert werden.

2. Auf Basis der korrespondierenden Netze wird ein gemeinsames Netz K erzeugt, das beide geometrischen Instanzen über entsprechende Koordinatenvektoren $V(0), V(1)$ darstellen kann. Dies geschieht entweder durch Überlagerung der Graphen oder durch die Erzeugung eines neuen semi-regulären Netzes.

3. Für das gemeinsame Netz müssen Knotenpfade $V(t), t \in]0, 1[$ bestimmt werden, die alle Knoten vom Ursprungszustand in die gewünschte Endposition überführen.

Jedem dieser drei Schritte ist in der Arbeit ein Kapitel gewidmet, in dem bestehende Verfahren kategorisiert und eigene Beiträge vorgestellt werden.

Im darauffolgenden Kapitel wird die Erweiterung auf mehr als zwei Basisformen erörtert. Dies geschieht zunächst in abstrakter Weise und dann für den konkreten Fall von polygonalen Netzen und den existierenden Verfahren. Die abschliessenden zwei Kapitel zeigen Anwendungsmöglichkeiten in den Bereichen Informations-Visualisierung und geometrische Animation.

Korrespondenzabbildungen für polygonale Netze

Für zwei gegebene Netze $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_1$ sollen baryzentrische Koordinaten B_0 bestimmt werden, so dass die assozierte geometrische Form $W_0 = \phi_{V_1}(B_0)$ der Koordinaten auf dem Netz $\mathcal{M}_1$ eine Einbettung ϕ_{W_0} von $\mathcal{M}_0$ auf $\mathcal{M}_1$ ist. Dabei wird angenommen, dass die Abbildung der Knoten des Netzes den wesentlichen Teil der Bijektion zwischen den Oberflächen ausmacht, was voraussetzt, dass die Netze genügend fein tesseliert sind.

Dieser Schritt wird zumeist durch die Abbildung der Fläche auf einen geeigneten gemeinsamen Parameterraum D umgesetzt. Typische Parameterräume sind die Kugel $\mathbb{S}^2$ (für den Fall, dass die Netze homöomorph zu Kugeln sind) sowie ein Atlas bestehend aus disjunkten topologischen Kreisscheiben. Eine wesentliche Nebenbedingung im Morphing ist die Berücksichtigung von vorgegebenen Punkt-zu-Punkt Korrespondenzen, die in einem Präprozess automatisch oder durch den Benutzer festgelegt werden.

Im Falle der Abbildung über die Kugel wird zunächst eine Einbettung Φ_S mit $S = \{s_0, s_1, \ldots\}, s_i \in \mathbb{R}^3, |s_i| = 1$ bestimmt, die dann durch eine bijektive Abbildung f an die Korrespondenzbedingungen angepasst wird.

$$\begin{tikzcd}
\{i\} \in K_0 \arrow[r, "W_0"] \arrow[d, "\phi_{S_0}"'] & \phi_{V_1}(B_0) \\
\mathbb{S}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^2 \arrow[u, "\phi_{S_1}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Bei diesem Ansatz gilt es im wesentlichen, Verfahren zur Einbettung auf der Kugel und geeignete Abbildungsfunktionen f zu bestimmen.

Die Zerlegung in Kacheln ist für eine grössere Klasse von Modellen verwendbar, aber auch komplizierter. Zusätzlich zur Einbettung der Teilnetze auf den Kreisscheiben müssen die Ausgangsnetze in isomorphe Atlanten zerlegt werden. Dazu verwendet man einen Simplizialkomplex L, der aus einer Teilmenge der Knoten von K_0, K_1 besteht:

$$\phi_{V_0}(|L|) \approx \phi_{V_0}(|K_0|), \phi_{V_1}(|L|) \approx \phi_{V_1}(|K_1|)$$

L ist (topologischer) Minor von sowohl K_0 als auch K_1. Jeder Knoten in K_0, K_1 wird mit einer Facette in L identifiziert. Der gemeinsame Parameterraum ist dann die geomtrische Realisierung $|L|$, wo jeder Knoten von K_0, K_1 als baryzentrische Koordinate repräsentiert ist.

$$\begin{tikzcd}
\{i\} \in K_0 \arrow[r, "W_0"] \arrow[d, "\phi_{L_0}"'] & \phi_{V_1}(B_0) \\
|L| \arrow[r, "f"'] & |L| \arrow[u, "\phi_{L_1}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Um diese Verfahren umzusetzen, sind mithin Methoden notwendig, die Teilnetze in der Ebene parametrisieren, geeignete geschlossene Netze auf der Kugel parametrisieren und aus zwei gegeben Netzen eine gemeinsame Zerlegung in Kacheln erzeugen.

Zur Beachtung von vom Anwender spezifizierter Korrespondenzen muss man das Netz im Parameterraum mit einer geeigneten Funktion f auf sich selbst abbilden, so dass die Abstände der korrespondierenden Knoten minimiert wird. Dies kann nicht mit einer kontinuierlichen Abbildungsfunktion geschehen, weil diese u.U. die Einbettungseigenschaft der Abbildung zunichte machen würde. Man sollte daher iterativ vorgehen.

Abbildung von Teilnetzen in die Ebene

Bei der Parametrisierung von Netzen in der Ebene haben sich eine Reihe von Verfahren durchgesetzt. Die meisten dieser Verfahren beginnen damit, den Rand des Teilnetzes auf einem Kreis anzuordnen [Tutte 1963; Floater 1997; Floater 2002; Floater 2001; Pinkall & Polthier 1993; Polthier 2000; Eck et al. 1995; Gregory et al. 1998; Gregory et al. 1999]. Es gibt weitere Verfahren ([Hormann & Greiner 2000; Lévy & Mallet 1998; Lévy 2001; Zigelmann et al. 2002]), die eine solche Anordnung nicht erfordern, diese sind aber für Korrespondenzabbildung nicht besser geeignet, da ja auch eine Bijektion auf dem Rand gefordert ist.

Bei fixiertem Rand werden die Positionen der freien Knoten als Linearkombination der Nachbarn beschrieben. Die einfachste Wahl ist, jeden Knoten im Schwerpunkt seiner Nachbarn anzuordnen. Man kann den Knoten auch als gewichtete Summe der Nachbarn darstellen, wobei sich die Gewichte aus der 3D-Geometrie ergeben. Die Knotenpositionen ergeben sich letztlich durch die Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems.

Abbildung von geschlossenen, einfachen Netzen auf die Kugel

Zur Einbettung von polygonalen Netzen mit Geschlecht 0 auf der Kugel bieten sich verschiedene Verfahren an. Ist die Geometrie sternförmig, so gibt es mindestens einen Punkt im Inneren, so dass die Abbildung der Knoten von diesem Punkt auf die Oberfläche einer Kugel um diesen Punkt bijektiv ist [Kent et al. 1991; Kent et al. 1992]. Das Problem ist damit gelöst.

Allerdings sind die meisten Formen nicht sternförmig. Dann bieten sich Relaxationsverfahren an, die an die Methoden im ebenen Fall angelehnt sind: Jeder Knoten wird im Zentrum seiner Nachbarn angeordnet, wobei allerdings die Knotenposition durch die Kugeloberfläche beschränkt sind. Diese quadratische Nebenbedingung kann man gut mit Hilfe von iterativen Verfahren erfüllen [Alexa 1999; Alexa 2000].

Zerlegung der Netze in einen gemeinsamen Teilgraphen

Zur Zerlegung von zwei polygonalen Netzen in einen gemeinsamen Untergaph $|L|$ geht man typischerweise davon aus, die Topologie L dieser Strukur sei gegeben oder wird vom Benutzer interaktiv spezifiziert. In jedem Fall muss der Benutzer die Positionen der Knoten in L auf den geometrischen Instanzen V_0, V_1 festlegen. Das Problem besteht darin, die Oberflächen von $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ in Gebiete zu zerlegen, die mit den Facetten in L korrespondieren. Anders gesagt gilt es, die Kanten in L auf $\mathcal{M}_0$ bzw. $\mathcal{M}_1$ zu definieren, so dass die Topologie von L erhalten bleibt. Ein erster Ansatz ist die Verwendung von kürzesten Pfaden in den Graphen K_0 bzw. K_1 [Gregory et al. 1998; Bao & Peng 1998; Zöckler et al. 2000; Kanai et al. 2000]. Dies kann jedoch zu Problemen führen, weil die kürzesten Pfade im Graphen nicht notwendigerweise disjunkt sind. Vielmehr muss man bei der Bestimmung von Kanten Nebenbedingen beachten, so dass eine topologisch korrekte Zerlegung sicher gestellt ist [Praun et al. 2001].

Konstruktion eines Repräsentations-Netzes

Seien die Einbettungen W_0, W_1 der Netze $(V_0, K_0), (V_1, K_1)$ auf einem gemeinsamen Parameterraum D gegeben. Zu bestimmen ist eine Topologie K mit zwei Geometrien $V(0), V(1)$, so dass die ursprünglichen Formen (möglichst) exakt reproduziert werden:

$$\phi_V(0)(|K|) \approx \phi_{V_0}(|K_0|), \phi_V(1)(|K|) \approx \phi_{V_1}(|K_1|).$$

Das Problem ist dabei nicht die Bestimmung der Koordinaten $V(0), V(1)$, da sich diese aus den baryzentrischen Koordinaten direkt ergeben. Eventuell ist es sinnvoll, dabei nicht die Fläche des Netzes sondern eine glatte Approximation dieser Fläche zu verwenden. Die wesentliche Schwierigkeit ist die Bestimmung einer geeigneten Topologie K.

Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege zur Bestimmung von K: Entweder K enthält K_0 und K_1 und ergibt sich durch Überlagerung der Einbettungen (dem sogenannten Verschneiden) oder es wird ausgehend von der gemeinsamen Approximation L durch rekursive Verfeinerung ein genügend feines Netz konstruiert. Bei der Überlagerung von Netzen muss man ferner die Fälle von ebenen Teilnetzen und geschlossenen mannigfaltigen Netzen unterscheiden.

Verschneiden von polygonalen Netzen

Beim Verschneiden der Netze entstehen in jedem Schnittpunkt von zwei Kanten aus den beiden Netzen neue Knoten. Auf diese Weise entsteht das gesuchte gemeinsame Netz K.

Zum Verschneiden von planaren Graphen gibt es eine Reihe von Arbeiten [de Berg et al. 1997; Finke & Hinrichs 1995], die auch die asymptotische Schranke für den besonderen Fall zweier geschlossener polygonaler Netze von $O(n+k)$ erreichen. Diese Techniken lassen sich allerdings nur schlecht auf unberandete Mannigfaltigkeiten anwenden.

Die grundsätzliche Idee zum Verschneiden der Netze besteht darin, beide Graphen zu traversieren und dabei die traversierten Kanten auf Schnitt mit den Facetten des anderen Netzes zu testen. Bei der Traversierung kann man dann die Kohärenz zwischen den Flächen ausnutzen [Alexa 2000].

Rekursive Verfeinerung

Die Strategie der rekursiven Verfeinerung startet mit dem gemeinsamen Teilgraph L. Dieser wird durch Einfügen von Knoten auf den Kanten und/oder Facetten nach bestimmten Regeln verfeinert. In der Ebene können die Einfügepositionen mittels baryzentrischer Koordinaten angegeben werden. Diese Koordinate erlaubt es, den Knoten mittels der bekannten Abbildung ϕ_V für beide Netze eine Position in $\mathbb{R}^3$ zuzuordnen [Lee et al. 1998].

Damit ensteht eine Kaskade von Netztopologien $L = L_0, L_1, L_2, \ldots$ wobei jedem Knoten die Position den Ursprungsgeometrien zugeordnet sind. Wegen des Erzeugungsprozesses entsteht zwangsläufig eine gemeinsame Netztopologie, die zudem nicht einmal gespeichert werden muss, da sie durch den Erzeugungsprozess bereits definiert wird. Da die Verfeinerung allerdings unabhängig von der ursprünglichen Gestalt ist, können scharfe Kanten unter Umständen nur unzureichend approximiert werden.

Bestimmung von Knoten-Pfaden

Ausgehend von der gemeinsamen Topologie K und den geometrischen Instanzen $V(0)$, $V(1)$ gilt es, für jedes $t \in]0,1[$ ein $V(t)$ zu finden, so dass die Knoten möglichst "schön" von $V(0)$ nach $V(1)$ interpoliert werden. Intuitiv wird man zumindest fordern, dass die Knotenpfade im Parameter T stetig sind und zwar auch in den Stellen 0 und 1 oder besser die Ableitung existiert und endlich ist: $\frac{dV}{dt} < \infty, t \in [0,1]$.

Der einfachste Ansatz ist lineare Interpolation der Knotenposition

$$V(t) = (1-t)V(0) + tV(1).$$

Falls sich die Ausgangsformen ähnlich sind, führt dies häufig zu befriedigen Ergebnissen. Ist aber die Orientierung der Objekte unterschiedlich, so sollte diese mit t angepasst werden [Cohen-Or & Carmel 1998; Cohen-Or et al. 1998; Alexa 2000]. Dazu kann man dem Übergang von $V(0)$ zu $V(1)$ eine affine Abbildung zuordnen, bspw. indem man unter allen Abbildungen diejenige Abbildung A sucht, die das Fehlerquadrat von $AV(0) - V(1)$ minimiert. Um nun $A(t)$ zu bestimmen, wird A mittels der Polarzerlegung in eine speziell orthogonale und eine symmetrische Matrix faktorisiert. Die Rotation wird dann über den Rotationswinkel interpoliert und die symmetrische Matrix mit der Einheitsmatrix konvex kombiniert [Shoemake & Duff 1992; Alexa et al. 2000].

Meistens ist die Geometrieveränderung allerdings nicht ausreichend durch eine Transformation beschrieben. Dann kommt es zu Verformungen der Objektgeometrie während des Übergangs. Um solche Verformungen zu vermeiden, gibt es verschiedene Ansätze. Polygone kann man bspw. durch die Kantenlängen und Innenwinkel darstellen und diese Parameter interpolieren [Sederberg et al. 1993]. Allerdings ist dieser Ansatz schlecht auf polygonale Netze zu erweitern.

Ein besserer Ansatz ist, den durch die Oberflächenbeschreibung eingeschlossenen Raum in Simplizes zu zerlegen [Floater & Gotsman 1999; Alexa et al. 2000; Gotsman & Surazhsky 2001]. Da die Formen die gleiche Topologie K auf der Berandung haben, ist es möglich, auch das Innere so zu zerlegen, dass eine Isomorphie zwischen den Zerlegungen besteht. Mithin korrespondieren je zwei Simplizes in den Zerlegungen. Für jedes Paar kann man nun die ideale Transformation wie oben beschrieben bestimmen. Durch die gemeinsamen Knoten der Simplizes sind die idealen Pfade jedoch widersprüchlich. Die Knotenpfade entstehen daher durch Minimierung. Dabei wird die Abweichung der idealen affinen Transformationen der Simplizes von der des möglichen Pfades minimiert [Alexa et al. 2000]. Dieses Problem führt auf die einmalige Lösung eines schwach besetzten linearen Gleichungssystems sowie einer Matrix-Vektor Multiplikation für jeden Zeitschritt.

Bisher wurde nur die Interpolation aller Knoten in gleicher Weise von Ursprungs- zu Zielposition diskutiert. In vielen Fällen ist es aber auch interessant, Bereiche der Formen verschiedene Parameterwerte zwischen 0 und 1 zuzuordnen. Dies kann bei Interpolationsverfahren in absoluten Koordinaten zu Problemen mit der Stetigkeit führen. Daher ist es ratsam, solche zeitlich und örtlich variablen Interpolation in differentiellen Koordinaten zu beschreiben. Eine einfache Form differentieller Koordinaten für polyonale Netze sind Laplace-Koordinaten [Alexa 2001a]. Dabei wird jede Knotenposition relativ zu dem Schwerpunkt der unmittelbaren Nachbarn im Graph beschrieben. Die Rückwärtsabbildung von Laplace-Koordianten zu absoluten (euklidischen) Koordinaten führt auf ein lineares Gleichungssystem in den Knotenpositionen.

Räume aus Morphing-Verfahren

Zunächst wird der klassische Begriff Morphing abstrakt definiert und darauf aufbauend eine Definition für den Raum angegeben, der sich durch wiederholte Anwendung von Morphing-Verfahren auf eine Menge von Basisgeometrien ergibt. Es kann gezeigt werden, dass der Morphing-Raum mathematisch gesehen ein Vektorraum ist, wenn das verwendete Morphing-Verfahren gewisse Voraussetzungen erfüllt. Mit Hilfe dieser Kenntnis können Algorithmen zur Synthese und Analyse von Objekten gefunden werden, die nachweisbar asymptotisch ideal sind. Aber auch wenn der Morphing-Raum kein Vektorraum ist, können Elemente synthetisiert und analysiert werden. Die Algorithmen sind dabei unabhängig von den verwendeten Objekten.

Für den Fall von polygonalen Netzen ist insbesondere die Erzeugung einer einheitlichen Topologie K aller Basen entscheidend. Dazu eignen sich nicht alle oben diskutierten Verfahren. Besonders gut geeignet ist die Erzeugung eines Netzes durch rekursive Verfeinerung, weil hier die Komplexität des Netzes nicht von der Anzahl der Basen sondern von der Komplexität der Formen abhängt. Das Ergebnis dieses Schrittes ist die gemeinsame Netztopologie K sowie eine Reihe von Basisgeometrien V_i.

Zur Knoteninterpolation eignet sich inbesondere lineare Interpolation der absoluten Koordinaten, weil damit die Vektorraumeigenschaften des Raums trivial gegeben sind. Ein Element des Raumes kann dann einfach durch einen Vektor von Gewichten w_i identifiziert werden: $V(\mathbf{w}) = \sum w_i V_i$. Die Erweiterung des Ansatzes auf nicht-lineare Interpolationsverfahren führt zwangsläufig auf einen nicht-linearen Raum.

Anwendungen in der Informationsvisualisierung

Die Visualisierung von abstrakten Daten geschieht meist durch die Abbildung der Datenattribute auf visuelle Skalen. Typische Besipiele für solche Skalen sind Ort, Farbe, Größe und Form [Chernoff 1973; Pickett & Grinstein 1988]. Zur Darstellung von Multiparameterdaten werden gerne Glyphen verwendet, die eine Kombination solcher Skalen darstellen.

Die Idee, Räume von Formen zur Generierung von Glyphen zu verwenden, liegt daher auf der Hand. Jede Basisform kann so ausgewählt werden, dass sie einen bestimmten Datenfall gut repräsentiert. Die Kombination der Formen ergibt dann die Glyphen für jedes Datum [Alexa & Müller 1998b; Müller & Alexa 1998].

Diese einfache Abbildung von Daten auf visuelle Repräsentationen erlaubt auch ein einfaches aber effektives Verfahren der Benutzer-Interaktion: Der Anwender kann bestimmten, bekannten Datenwerten eine bestimmte visuelle Repräsentation zuordnen. Auf der Basis von wenigen solchen direkten Zuordnungen wird eine Abbildungen vom Datenraum in den Raum der visuellen Repräsentation definiert [Alexa & Müller 1999b]. Diese kann entweder möglichst starr sein und die definierten Relationen nur approximieren oder z.B. mit den in der Approximation gerne verwendeten radialen Basisfunktionen die Relationen exakt erfüllen.

Der Prozess der Zurodnung geschieht dabei interaktiv, d.h. nach jedem Schritt kann eine neue Visualisierung generiert werden und auf dieser Basis neue – die Abbildung feiner spezifizierende – Relationen definiert werden.

Verwendung für geometrische Animationen

Wie zuvor gehen wir davon aus, eine Netztopologie K und mehrere Koordinatenvektoren V_i seien vorgegeben. Eine Kurve $\mathbf{w}(t)$ durch den Raum kann dann als

Animationssequenz $V(t) = V(\mathbf{w}(t))$ verstanden werden. Eine solche Darstellung einer Animation hat zwei wesentlich Vorteile:

1. Die Darstellung ist kompakt, vorausgesetzt die Anzahl der Basisvektoren ist kleiner als die Anzahl der Elemente der Animation.

2. Die Darstellung hat Semantik, da einzelne Elemente aus den Basisformen zusammengesetzt werden. Das erlaubt die Interpretation der Animationsteile sowie einen Austausch von charakteristischen Merkmalen.

Um eine solche Darstellung zu erzeugen, sind zwei Wege denkbar: Entweder ist der Raum vorgegeben und die Animation wird innerhalb des Raumes modelliert [Parke 1979; Müller et al. 2000; Alexa et al. 2001], oder die Animation ist vorgegeben und es gilt einen geeigneten Raum, sprich die Basisvektoren zu finden [Alexa & Müller 2000]. Der erste Weg kann z.B. eingesetzt werden, um animierte Avatare zu generiereren. Mit der folgenden Methode kann die Generierung von Basen aus Keyframe Animationen erreicht werden.

Die grundsätzliche Idee besteht darin, die Keyframes einer Animation als Basis eines linearen Raumes zu verstehen. Durch eine Basistransformation soll eine Basis gefunden werden, in der die Basen nach ihrer Wichtigkeit sortiert sind, so dass die Anzahl der Basen mit der Qualität der Animationsrepräsentation skaliert werden kann. Als erster Schritt wird die Animation auf affine Transformationen untersucht. Dabei wird jedem Keyframe eine affine Transformation zugeordnet, die die Hauptachsen der Kovarianzen mit dem kanonischen Koordinatensystem in Übereinstimmung bringt.

Die eigentliche Transformation basiert auf folgender Idee: Die wichtigste Geometrie ist der Durchschnitt aller Keyframe Geometrien. Alle Keyframes werden dann als Differenz zu dieser Durchschnittsgeometrie dargestellt. Die Durchschnittsgeometrie ist der erste Basisvektor des neuen Darstellungsraumes. Die Differenzen zur Durchschnittsgeometrie werden wiederum gemittelt, das Ergebnis ist die zweite Basis, usw.

Diese Transformation lässt sich mathematisch noch etwas wirkungsvoller beschreiben und heisst Hauptkomponentenanalyse. Da die Koordinaten der Keyframes als Vektoren beschrieben sind, kann man die Hauptkomponentenanalyse durch die Singulärwertzerlegung berechnen.

Die Singulärwertzerlegung liefert eine alternative Basis zur Darstellung der Animation. Meist sind nur wenige Basen notwendig um eine befriedigende Wiedergabe einer gegebenen Animation zu ermöglichen. Dies erlaubt eine effektive progressive Kompression von Animation.

Rückblick und Ausblick

In der Arbeit werden Verfahren zur Erzeugung von Räumen geometrischer Formen vorgestellt. Dabei wurden zum Stand der Forschung die folgenden Beiträge geleistet:

Morphing-Verfahren für polygonale Netze

Korrespondenzabbildung Ein Verfahren zur Korrespondenzabbildung topologischer Kugeln unter besonderer Beachtung von benutzerspezifizierten Knotenkorrespondenzen wurde vorgestellt [Alexa 1999; Alexa 2000].

Schneiden polygonaler Netze Ein neuer Algorithmus zum Schneiden polygonaler Netze wurde beschrieben, der vorherige Resultate verallgemeinert und asymptotische optimale Laufzeit hat [Alexa 2002b].

Orts-Zeit Spezifikation Im Bild-Morphing sind schon lange Verfahren bekannt, die es erlauben, Teile der Bilder örtlich und zeitlich unabhängig zu überblenden. Hier werden entsprechende Verfahren für Mannigfaltigkeiten präsentiert. [Alexa 2001a; Alexa 2002a].

Knotenpfade Eine Methode zur Bestimmung von Knotenpfaden wurde vorgestellt, die zu einer minimalen Verformung der lokalen Objektgeometrie führt [Alexa et al. 2000].

Visualisierung von Multiparameterdaten Lineare Räume von Formen haben sich als geeigente Repräsentation von Glyphen zur Informationsvisualisierung erwiesen. Zusätzlich wurde neue Formen der Interaktion zur Spezifikation der Abbildungsvorschrift vorgestellt [Alexa & Müller 1998b; Alexa & Müller 1999b].

Animation Lineare Räume von polygonalen Netzen sind eine geeignete Basis zur Spezifikation, Darstellung, Modifikation und progressiver Kommunikation sowie Speicherung von Animationen [Alexa et al. 2000; Alexa & Müller 2000].

Offene Fragestellungen, die sich aus dieser Arbeit ergeben, sind insbesondere topologische Probleme: Eine gegebene Netztopologie schränkt die Klasse der möglichen Transformationen und damit die Reichhaltigkeit der Formen in einem Raum stark ein. Dieses Problem könnte durch andere Repräsentation der geometrischen Form oder eine flexible Netztopologie gelöst werden. Darüber hinaus lässt die Robustheit der geometrischen Algorithmen z.T. noch stark zu wünschen übrig.

Acknowledgments

Many people have helped in one one way or another to make this dissertation happen. I would like to thank everybody who supported me.

My special thanks go to my advisor José L. Encarnação, for giving me the freedom to explore this interesting subject while helping me to stay on the right track. I thank Markus Gross for accepting to be on my thesis committee. I also owe a lot to Daniel Cohen-Or. His idea to invite me to Israel has initiated a series of visits, each of which has been a remarkable experience.

Many of the people I have been working with have helped me. In particular, my project leader Wolfgang Müller has been a source for countless valuable discussions. I am also grateful for his way of leadership, which has become an exemplar for me. I would also like to thank my current and former colleagues Johannes Behr, Uwe Berner, Erik Blechschmidt, Norbert Braun, Carola Eichel, Peter Frisch, Manfred Gaida, Paul Grimm, Ido Iurgel, Kai Kreuzer, Detlef Krömker, Thomas Rieger, Silke Romero, Michael Schneider, Ulrike Spierling, Francesca Taponecco, and Marc Weber.

I have had contact to several experts in the field of morphing who have inspired me and gave useful advice. This work might not exist without Herbert Edelsbrunner who introduced me to the idea of a shape space. I thank Craig Gotsman, Reinhard Klein, David Levin, and Michela Spagnuolo for many fruitful discussions. Jed Lengyel has given me access to some of the animated sequences used in this work (The chicken character was created by Andrew Glassner, Tom McClure, Scott Benza, and Mark Van Langeveld. This short sequence of connectivity and vertex position data is distributed solely for the purpose of comparison of geometry compression techniques). I have reused material from other excellent work in mesh morphing and I thank Takashi Kanai, Ming Lin, and Peter Schröder for allowing me to do so.

Part of this work was done when I was visiting Tel-Aviv University supported by the Hermann Minkowski - Minerva Center for Geometry. Thanks to David Levin and Daniel Cohen-Or for hosting me and making my stay so enjoyable.

I am deeply indebted to my parents. Where I am today is no small part due to their encouragement and support. I would like thank my friends for their understanding that this work took much of my time. And I am grateful for the time I shared with Regina.

Contents