

Kontrolle chaotischer Spindynamik mittels zeitverzögerter Rückkopplung

Vom Fachbereich Physik
der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von
Dipl.-Phys. Ekkehard Reibold
aus Völklingen/Saar

Darmstadt 2000

D 17

Referent: Priv.-Doz. Dr. H. Benner
Korreferent: Prof. Dr. H. Sauermann
Tag der Einreichung: 07. 12. 1999
Tag der Prüfung: 07. 02. 2000

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Kontrolltheorie	3
2.1. Lineare Stabilitätsanalyse	4
2.2. Stabilitätsbereiche	6
2.3. Einschränkende Einflüsse	10
2.3.1. Verstimmte Verzögerungszeit	10
2.3.2. Reglernachlaufzeit	11
2.3.3. Weitere Floquet-Exponenten	14
3. Kontrolle an Schwingkreisen	17
3.1. Nichtlinearer Diodenschwingkreis	17
3.2. ANE-Schwingkreis	19
3.3. Stabilitätsbereiche	20
3.4. Verstimmte Verzögerungszeit	25
3.5. Einfluss der Reglernachlaufzeit	28
3.6. Weitere Floquet-Exponenten	31
4. Kontrolle komplexer Spindynamik	35
4.1. Spinwelleninstabilitäten in Yttrium-Eisengranat	35
4.2. Experimenteller Aufbau	38
4.3. Systemverhalten	40
4.4. Kontrollexperimente	46
4.4.1. Stand der Forschung	46
4.4.2. Experimentelle Ergebnisse	47
5. Zusammenfassung	57
A. Kontrollschaltung	61
B. Bestimmung von Floquet-Exponenten	65
Literaturverzeichnis	69

1. Einleitung

Das Wort *Chaos* leitet sich vom griechischen $\chi\alpha\omicron\varsigma$ ab, was ursprünglich den unendlich leeren Raum vor aller Zeit bezeichnet. Alles Leben, alle Materie stellen winzige Fluktuationen von verschwindender Größenordnung dar. Heutzutage versteht man im allgemeinen Sprachgebrauch darunter totale Verwirrung, Auflösung aller Ordnung, völliges Durcheinander. In die Wissenschaftssprache wurde dieser Terminus eingeführt, um die sensitive Abhängigkeit eines Systems von seinen Anfangsbedingungen zu verdeutlichen. Durch exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Lösungen und Mischungsprozesse, die in dissipativen Systemen für die Beschränktheit des Phasenraumvolumens sorgen, sind Vorhersagen über lange Zeiträume nicht möglich. Es zeigt sich jedoch, dass dem Chaos sehr wohl eine Ordnung zugrunde liegt. Zudem beobachtet man in ganz unterschiedlichen Systemen ähnliche Phänomene. So beispielsweise die Übergänge vom geordneten zum chaotischen Verhalten, die sich nicht nur bei der Abfolge entsprechen, sondern auch beim Skalierungsverhalten. Diese universellen Verhaltensweisen erlauben es, durch das Studium eines einzelnen Systems Rückschlüsse auf viele andere zu ziehen. Diese Begebenheit ist deshalb so wesentlich, weil Chaos als eine Lösungsform nichtlinearer Systeme in allen Bereichen von Natur und Technik, aber auch Sozial- und Wirtschaftswissenschaften auftreten kann. Dadurch muss das Rad nicht immer wieder neu erfunden werden. Der oft nicht leichte Transfer auf das eigene System bleibt einem jedoch nicht erspart.

Grundlage der Ordnung im Chaos sind die unendlich vielen instabilen periodischen Lösungen, die als Orbits im Phasenraum das Grundgerüst eines chaotischen Attraktors bilden. Darauf aufbauend kamen Ott, Grebogi und Yorke 1990 zu der Erkenntnis, dass sich diese instabilen Lösungen durch kleine Kontrolleingriffe stabilisieren lassen sollten [1]. Neben dieser Grundidee der *Chaoskontrolle* haben sie auch eine Kontrollmethode vorgeschlagen, die in der Folgezeit erweitert bzw. abgewandelt wurde, um eine verbesserte Anwendbarkeit im Experiment zu erzielen (siehe z.B. [2, 3, 4, 5]). Mittlerweile existieren einige Übersichtsartikel und sogar Bücher zum Thema Chaoskontrolle [6, 7, 8].

Während viele Verfahren aufwendige Systemanalysen erfordern, wurde von Pyragas ein einfaches auf *Zeitverzögerungen* basierendes *Rückkopplungsschema* vorgeschlagen [9]. Dieses, wie auch eine Erweiterung [10], wurde seither mehrfach erfolgreich angewendet. Frühe Beispiele dafür sind [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Trotz der Einfachheit der Methode birgt das zugehörige Differenzen-Differentialgleichungssystem einige mathematische Probleme (siehe z.B. [17]), so dass längere Zeit die theoretische Grundlage fehlte. Im Rahmen der

Zusammenarbeit mit W. Just, TU Darmstadt, sowie J. Hołyst, TU Warschau, entstand eine systemunabhängige Theorie, die zum tieferen Verständnis des Kontrollverfahrens beigetragen hat [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. Dabei wurde stets besonderer Wert auf experimentelle Relevanz gelegt sowie speziell experimentelle Fragestellungen (Verstimmung der Verzögerungszeit, Reglernachlaufzeit) behandelt. Die theoretischen Ergebnisse werden in Kapitel 2 in einheitlicher Notation zusammengefasst. Zur Überprüfung der Vorhersagen wurden Experimente an Modellsystemen (nichtautonomer Diodenschwingkreis, ANE-Schwingkreis) durchgeführt, die ausführlich in Kapitel 3 beschrieben werden. Diese öffnen den Weg für die erfolgreiche Anwendung zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle in komplexen Systemen.

Yttrium-Eisengranat ist ein Ferromagnet von technischer Bedeutung. Hochwertige Proben besitzen eine sehr geringe Magnetisierungsdämpfung, die sich in einer äußerst schmalen Elektronenspinresonanzlinienbreite von weniger als 1 Oe ausdrückt. Daher wird Yttrium-Eisengranat als hochpräziser Frequenzgeber in Mikrowellengeneratoren und Mobiltelefonen eingesetzt. Die geringe Dämpfung führt jedoch auch zu einer niedrigen Spinwelleninstabilitätsschwelle, oberhalb der meist unerwünschte nichtlineare Phänomene auftreten. Daher wird der Kristall beispielsweise für den Einsatz in Hochleistungsrichtkopplern dotiert und in Pulverform verwendet.

Nicht nur vom Standpunkt der nichtlinearen Dynamik aus, sondern auch vor dem Hintergrund zukünftiger technischer Anwendungen ist die Untersuchung der *nichtlinearen Spindynamik* in diesem Ferrit von allgemeinem Interesse. Oberhalb der Instabilitätsschwelle kommt es zur Ausbildung von Spinwellen und magnetostatischen Moden. Bei nichtresonanter Anregung in subsidiärer Absorption ist die Anzahl der effektiver Freiheitsgrade jedoch gering. Über verschiedene Routen bildet sich marginales Chaos aus. Diese Tatsache veranlasst zur Vermutung, dass sich die im chaotischen Attraktor eingebetteten instabilen periodischen Orbits stabilisieren lassen. Die in Kapitel 4 beschriebenen Experimente zur zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle zeigen allerdings, dass die dabei auftretenden Phänomene ohne die zuvor gelegten Grundlagen nicht erklärt werden können.

2. Theorie der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle

Chaoskontrolle mittels zeitverzögerter Rückkopplung wurde bereits 1992 von Pyragas vorgeschlagen [9]. Ausgangspunkt war die Methode der *external force control*, bei der die Kontrollkraft $\mathbf{F}(t)$ proportional zum Abstand zwischen Systemzustand $\mathbf{x}(t)$ und Zielorbit $\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}(t + T)$ ist.

$$\mathbf{F}_{efc}(t) = K(\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\xi}(t)) \quad (2.1)$$

Dies setzt jedoch voraus, dass der Zielorbit bekannt und als Referenz in irgendeiner Art gespeichert vorliegt. Bei langsamen Systemen stellt dies keine größere Einschränkung dar, da dann Zeitreihen per Computer aufgenommen und analysiert werden können und ein entsprechendes Kontrollsignal ausgekoppelt werden kann. Doch bei schnellen Systemen ist diese Methode nicht praktikabel. Daher hat Pyragas als Referenz den Systemzustand zu einem früheren Zeitpunkt vorgeschlagen. Um zu gewährleisten, dass bei erfolgreicher Kontrolle das Kontrollsignal verschwindet, wird die Verzögerungszeit τ gleich der Periodendauer T des zu stabilisierenden Orbits gewählt. Für die „(einfache) zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle“ (*delayed feedback control*) ergibt sich somit folgende Kontrollkraft:

$$\mathbf{F}_{dfc}(t) = K(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t - \tau)), \quad \tau = T \quad (2.2)$$

Natürlich lässt sich dieses auf Zeitverzögerungen basierende Kontrollschema verallgemeinern. Doch bisher hat sich neben dieser einfachen Rückkopplungskontrolle nur die „erweiterte zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle“ (*extended time delay autosynchronization*) etablieren können [10].

$$\mathbf{F}_{etdas}(t) := K \sum_{\nu=0}^{\infty} R^{\nu} \{ \mathbf{x}(t - \nu\tau) - \mathbf{x}(t - (\nu + 1)\tau) \}, \quad \tau = T \quad (2.3)$$

Durch den Reflexionsparameter $0 \leq R < 1$ wird die Gewichtung der zeitverzögerten Zustände festgelegt. Als Grenzfall ergibt sich für $R = 0$ das einfache Kontrollschema (2.2). Für diese beiden Kontrollmethoden werden in diesem Kapitel mittels linearer Stabilitätsanalyse und Floquet-Theorie die Voraussetzungen für erfolgreiche Kontrolle eines instabilen periodischen Orbits aufgezeigt. Dabei wird insbesondere auf einschränkende experimentelle Einflüsse eingegangen.

2.1. Lineare Stabilitätsanalyse

Ausgangspunkt sei ein System, das sich durch einen Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ beschreiben lässt, dessen Bewegungsgleichungen allerdings nicht explizit bekannt sein müssen. Experimentell zugänglich soll ein skalares Messsignal $g[\mathbf{x}]$ sein, das natürlich vom Zustandsvektor abhängt. Aus diesem Signal wird die Kontrollkraft $F(t)$ durch Bildung zeitverzögerter Differenzen $g[\mathbf{x}(t)] - g[\mathbf{x}(t - \tau)]$ erzeugt. Als zusätzlicher Kontrollparameter wird die Kontrollamplitude K eingeführt. Daraus ergibt sich für das System unter Kontrolleinfluss folgende Bewegungsgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), F(t)) \quad (2.4)$$

Das System ohne Kontrolle ($K = 0$) besitzt nach Voraussetzung einen instabilen periodischen Orbit $\boldsymbol{\xi}(t) = \boldsymbol{\xi}(t + T)$ mit Periode T , der stabilisiert werden soll. Zur Bestimmung seiner Stabilität betrachtet man kleine Abweichungen vom Orbit, $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\xi}(t)$. In linearer Ordnung gilt

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = D_1\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), 0)\delta\mathbf{x}(t) \quad , \quad (2.5)$$

wobei $D_1\mathbf{f}$ die Jacobi-Matrix bezüglich des ersten vektorwertigen Argumentes bezeichnet. Im Rahmen der Floquet-Theorie können diese Abweichungen nach Eigenmoden entwickelt werden.

$$\delta\mathbf{x}(t) = \sum_{\mu} c_{\mu} e^{(\lambda_{\mu} + i\omega_{\mu})t} \mathbf{u}_{\mu}(t) \quad (2.6)$$

Für die Floquet-Exponenten $\lambda + i\omega$ und Eigenfunktionen $\mathbf{u}(t)$ folgt daraus:

$$(\lambda + i\omega)\mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t) = D_1\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), 0)\mathbf{u}(t) \quad , \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + T) \quad (2.7)$$

Der Index μ der verschiedenen Floquet-Zweige wurde hier wie auch im Folgenden weggelassen, da die Ausführungen für alle Zweige zutreffen. Die Stabilität der Lösung wird natürlich durch den Zweig mit dem größten Realteil bestimmt. Eine anschauliche geometrische Deutung des Floquet-Exponenten $\lambda + i\omega$ ist in Abbildung 2.1 zu sehen. In dieser Phasenraumdarstellung entspricht der instabile Orbit $\boldsymbol{\xi}$ einer geschlossenen Bahnkurve. Eine benachbarte Trajektorie wird von diesem abgestoßen, wobei der Abstand bei einem Umlauf um einen Faktor $\exp(\lambda T)$ zunimmt. Dabei findet auch eine Drehung um den Orbit um den Winkel ωT statt. Aus der Instabilität des Orbits folgt für den Realteil $\lambda > 0$.

Die Stabilität des Orbits unter Kontrolleinfluss soll für das einfache Kontrollschema

$$F(t) = K(g[\mathbf{x}(t)] - g[\mathbf{x}(t - \tau)]) \quad (2.8)$$

untersucht werden. Dabei wird durch geeignete Wahl der Verzögerungszeit

$$\tau = T \quad (2.9)$$

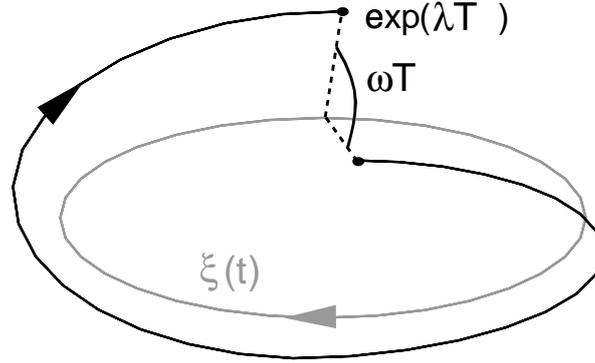


Abb. 2.1: Phasenraumdarstellung einer Trajektorie in der Nähe eines instabilen periodischen Orbits ξ . λ und ω entsprechen dem Real- bzw. Imaginärteil des Floquet-Exponenten und T der Periode des instabilen Orbits.

sichergestellt, dass der Orbit $\xi(t)$ weiterhin Lösung von Gl. (2.4) bleibt. Für kleine Abweichungen vom Orbit ergibt sich in erster Näherung

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}(t) = & D_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \delta \mathbf{x}(t) \\ & + K d_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \{ Dg[\xi(t)] [\delta \mathbf{x}(t) - \delta \mathbf{x}(t - \tau)] \} \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei $d_2 \mathbf{f}$ die skalare Ableitung nach dem zweiten Argument bezeichnet. Wiederum kann ein Exponentialansatz der Form (2.6) gewählt werden. Zur Unterscheidung vom freien System erhalten die neuen Floquet-Exponenten $\Lambda + i\Omega$ und Eigenfunktionen $\mathbf{U}(t)$ Großbuchstaben. Auch hier wird von einer Indizierung aus Gründen der Übersichtlichkeit abgesehen. In Analogie zu Gl. (2.7) folgt somit

$$\begin{aligned} (\Lambda + i\Omega) \mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{U}}(t) = & D_1 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \mathbf{U}(t) \\ & + K \{ 1 - e^{-(\Lambda + i\Omega)\tau} \} d_2 \mathbf{f}(\xi(t), 0) \{ Dg[\xi(t)] \mathbf{U}(t) \} \\ \mathbf{U}(t) = & \mathbf{U}(t + \tau) \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Beim vorliegenden Eigenwertproblem hängt die rechte Seite selbst vom zu bestimmen Exponenten ab. Da dieser, wie auch die Kontrollparameter K und τ , nur in dem Ausdruck $\kappa = K \{ 1 - e^{-(\Lambda + i\Omega)\tau} \}$ auftritt, lässt sich die charakteristische Gleichung

$$\Lambda + i\Omega = \Gamma [K \{ 1 - e^{-(\Lambda + i\Omega)\tau} \}] \quad (2.12)$$

aufstellen, wobei die Funktion Γ weitgehend unbekannt ist. Sie erfüllt aber die Bedingung

$$\Gamma[0] = \lambda + i\omega \quad , \quad (2.13)$$

da sie im unkontrollierten Fall ($K = 0$) den Floquet-Exponenten des freien Orbits annimmt. Variation der Kontrollamplitude führt zur Änderung der Exponenten. Werden

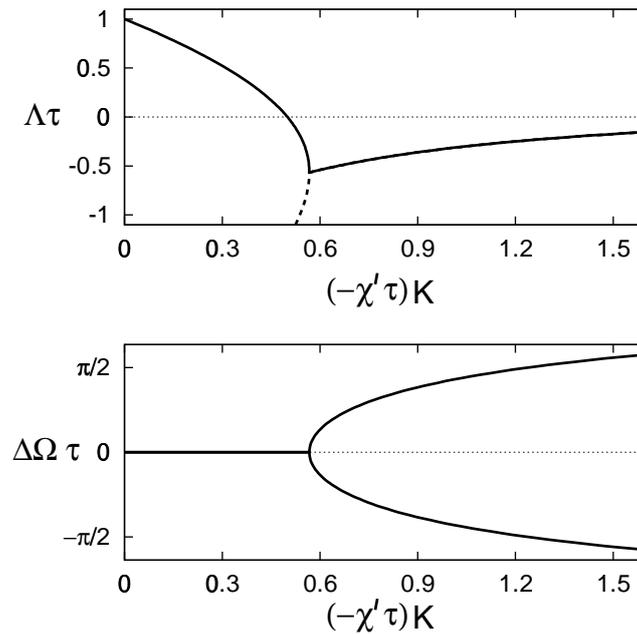


Abb. 2.2: Floquet-Exponent in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude.

alle Realteile negativ, tritt Stabilisierung des Orbits ein. Aus den Gleichungen (2.12) und (2.13) folgt direkt, dass an den Einsatzpunkten der Kontrolle ($\Lambda = 0$) der zugehörige Imaginärteil nicht verschwinden darf, d.h. $\Omega \neq 0$ sein muss. Da Frequenzen wie $\omega = 0$ und $\omega = \pi/T$ strukturell stabil sind, können sich diese nur ändern, wenn zwei Floquet-Multiplikatoren kollidieren und ein komplex konjugiertes Paar bilden. Demzufolge können Orbits ohne Torsion ($\omega = 0$) nicht mittels zeitverzögerter Rückkopplung stabilisiert werden, falls eine ungerade Anzahl an Exponenten mit $\omega = 0$ vorliegt [25, 26]. Dies erklärt, warum periodische Orbit des Lorenz-Modells nicht mit diesem Kontrollschema stabilisiert werden können. Zuweilen kann diese Einschränkung aufgrund von Symmetrieeigenschaften des Systems aufgehoben werden [27].

2.2. Stabilitätsbereiche

In diesem Unterkapitel sollen zunächst die Stabilitätsgrenzen für das einfache Kontrollschema mittels Taylor-Entwicklung der charakteristischen Gleichung (2.12) hergeleitet werden. Dabei möchte ich mich auf den Fall eines flippenden Orbits

$$\omega = \pi/T \tag{2.14}$$

beschränken, der gerade in niedrigdimensionalen Systemen auf Grund topologischer Eigenschaften häufig anzutreffen ist.

Linearisierung von Gleichung (2.12) um $\kappa = 0$ ergibt

$$\Lambda\tau + i\Delta\Omega\tau = \lambda\tau - (-\tau\chi')K \{1 + e^{-\Lambda\tau - i\Delta\Omega\tau}\} \quad (2.15)$$

mit dem hier reellen Taylor-Koeffizienten $\chi' = \left. \frac{dF}{d\kappa} \right|_{\kappa=0}$ und der Frequenzabweichung $\Delta\Omega = \Omega - \omega$. Dabei beinhaltet χ' alle Informationen zur Ankopplung der Kontrolle an das System mittels Reskalierung der Kontrollamplitude. Die Abhängigkeit des Floquet-Exponenten von der Kontrollamplitude ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Bei Einschalten der Kontrolle und Erhöhung der Kontrollamplitude fällt der Realteil des Floquet-Exponenten vom ursprünglichen Wert, dem Lyapunov-Exponenten λ , ab. Bei $K^{(\text{fl})}$ kommt es zum Vorzeichenwechsel, der Orbit wird stabil. Da der Übergang bei $\Omega = \pi/T$ stattfindet, handelt es sich um eine inverse Flip- bzw. Periodenverdopplungs-bifurkation. Bei $K^{(\text{opt})}$ kollidieren zwei Floquet-Multiplikatoren und bilden ein komplex konjugiertes Paar. Eine endliche Frequenzabweichung entsteht, begleitet von einem ansteigenden Λ . Schließlich wird Λ bei $K^{(\text{ho})}$ wieder positiv. Die auftretende Hopf-Bifurkation führt zu quasiperiodischem Zeitverhalten. Aus Gleichung (2.15) erhält man für den unteren kritischen Wert

$$(-\tau\chi')K^{(\text{fl})} = \frac{\lambda\tau}{2} \quad , \quad (2.16)$$

sowie für den oberen kritischen Wert den impliziten Ausdruck

$$\begin{aligned} (-\tau\chi')K^{(\text{ho})} &= \frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{\sin(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau)} \\ \lambda\tau &= \frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{\tan(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau/2)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit $\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau \in [0, \pi]$. Dabei entspricht $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$ der Frequenzabweichung am Hopf-Bifurkationspunkt. Abbildung 2.3 stellt das Kontrollgebiet in der $K - \lambda\tau$ Ebene dar. Mit steigendem $\lambda\tau$ schrumpft das Kontrollintervall $[K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}]$, bis es für den kritischen Wert

$$(\lambda\tau)_c = 2 \quad (2.18)$$

verschwindet. Dies erklärt, warum Orbits mit langer Periode oder großem Lyapunov-Exponenten mittels einfacher zeitverzögerter Rückkopplung nicht stabilisiert werden können.

Die Herleitung der Stabilitätsbereiche für das erweiterte Kontrollschema

$$F_R(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R^\nu \{g[\mathbf{x}(t - \nu\tau)] - g[\mathbf{x}(t - (\nu + 1)\tau)]\} \quad (2.19)$$

verläuft analog. Durch die spezielle unendliche Reihe kommt es lediglich zum Auftreten eines weiteren Faktors. Als charakteristische Gleichung ergibt sich anstelle von (2.12)

$$\Lambda + i\Omega = \Gamma_R \left[K \frac{1 - e^{-(\Lambda + i\Omega)\tau}}{1 - R e^{-(\Lambda + i\Omega)\tau}} \right] \quad . \quad (2.20)$$

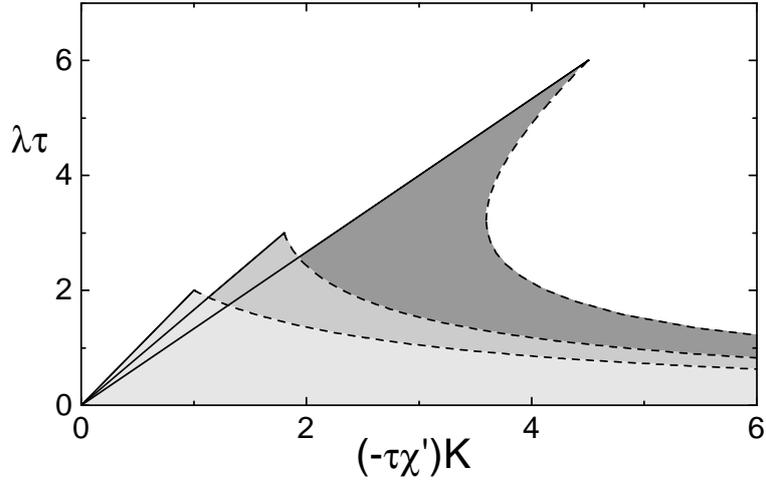


Abb. 2.3: Kontrollbereiche für verschiedene R -Werte: 0 (hellgrau), 0.2 (mittelgrau), 0.5 (dunkelgrau). Die durchgezogene Linien entsprechen der Flip-Instabilität, die gestrichelten Linien der Hopf-Instabilität.

Aus der Linearisierung erhält man für den unteren kritischen Wert

$$(-\tau\chi')K^{(\text{fl})} = \frac{\lambda\tau}{2} (1 + R) \quad , \quad (2.21)$$

sowie für den oberen kritischen Wert den impliziten Ausdruck

$$\begin{aligned} (-\tau\chi')K^{(\text{ho})} &= \frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{\sin(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau)} \cdot \frac{1 + R^2 + 2R \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau)}{1 - R} \\ \lambda\tau &= \frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{\tan(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau/2)} \cdot \frac{1 + R}{1 - R} \end{aligned} \quad (2.22)$$

mit $\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau \in [0, \pi]$. Die sich aus diesen Beziehungen ergebenden Kontrollgebiete sind in Abbildung 2.3 dargestellt. Sie erstrecken sich bis zu einem maximalen Lyapunov-Exponenten

$$(\lambda\tau)_{c,R} = 2 \cdot \frac{1 + R}{1 - R} \quad . \quad (2.23)$$

Somit lässt sich mit der erweiterten Kontrollmethode eine deutlich größere Anzahl an Orbits stabilisieren. Gerade aus experimenteller Sicht bleibt zu erwähnen, dass das zur Verfügung stehende Kontrollintervall $[K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}]$ für hohen Reflexionsparameter R und große $\lambda\tau$ -Werte jedoch ziemlich klein wird.

Beim quantitativen Vergleich der theoretischen Kontrollgebiete mit experimentellen Daten treten weitere Probleme auf. Zum einen ist die Bestimmung großer $\lambda\tau$ -Werte schwierig, da der exponentielle Abfall des Kontrollsignals beim Einschaltexperiment nicht über beliebig viele Dekaden verfolgt werden kann. Zum anderen ändert sich χ'

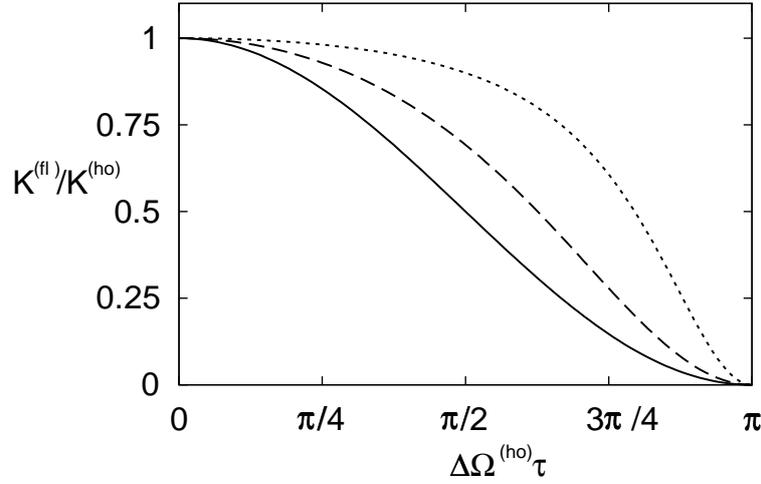


Abb. 2.4: Verhältnis der kritischen Kontrollamplituden in Abhängigkeit von der Frequenzabweichung $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$ an der Hopf-Bifurkation für mehrere R -Werte: $R = 0$ (durchgezogene Linie), $R = 0.2$ (gestrichelte Linie), $R = 0.5$ (punktierete Linie).

bei Variation von Systemparametern und hängt somit auch von λ ab. Abhilfe schafft hier eine von mir hergeleitete Relation zwischen den beiden kritischen Kontrollamplituden $K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}$, dem Reflexionsparameter R und der Frequenzabweichung an der Hopf-Bifurkation $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$, die keinen Systemparameter beinhaltet:

$$\frac{K^{(\text{fl})}}{K^{(\text{ho})}} = \frac{1 + R}{2(1 + R^2 + 2R \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau))} [(1 + R)(1 + \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau))] \quad , \quad (2.24)$$

beziehungsweise in einer etwas anderen Notation:

$$\frac{K^{(\text{fl})}}{K^{(\text{ho})}} = \left[1 + \left(\frac{1 - R}{1 + R} \tan \left(\frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{2} \right) \right)^2 \right]^{-1} \quad . \quad (2.25)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

2.3. Einschränkende Einflüsse

In diesem Unterkapitel sollen die Auswirkungen einiger Phänomene untersucht werden, welche die Kontrollierbarkeit eines Systems einschränken bzw. gänzlich aufheben. Aus experimenteller Sicht gehört dazu zum einen der Einfluss einer verstimmtten Verzögerungszeit, d.h. wenn die Verzögerungszeit nicht mit der Periode des zu kontrollierenden Orbits übereinstimmt. Zum anderen die Auswirkungen von Reglernachlaufzeiten, die als Zeitverzögerung zwischen der Detektion des Messsignals und der Rückkopplung des Kontrollsignals das komplette Kontrollsignal zusätzlich verzögern. Abschließend wird betrachtet, inwieweit sich stabile Floquet-Exponenten auf die Kontrolle einschränkend auswirken können.

2.3.1. Verstimmtte Verzögerungszeit

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde stets davon ausgegangen, dass die Periode des zu stabilisierenden Orbits T bekannt ist und die Verzögerungszeit τ entsprechend eingestellt wird (vgl. Gl. (2.9)). Sind die auftretenden Periodendauern durch eine externe Zeitskala festgelegt, z.B. durch die Treiberperiode, so stellt dies keine größere Einschränkung dar. Gerade in autonomen Systemen kann sich die Bestimmung der Orbitperiode schwierig gestalten, besonders dann, wenn auf Grund externer Einflüsse driftende Systemparameter vorliegen. Bei Anwendung der Kontrollkraft mit fehlangepasster Verzögerungszeit führt das System eine komplizierte nichtlineare Dynamik aus, kann jedoch nie den angestrebten Orbit ξ erreichen.

Zur Behebung des Problems wurden einige empirische Vorgehensweisen vorgeschlagen. Kittel et al. [28] beispielsweise detektieren den Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima im Kontrollsignal und wählen diesen als verbesserten Schätzwert für die Orbitperiode. Nakajima et al. [29] verwenden einen ähnlichen Ansatz. Sie bilden ein gleitendes Mittel des Kontrollsignals, das sie bzgl. einer Verzögerungszeit minimieren. Die erhaltene Verzögerungszeit dient als neuer Schätzwert. Beide Verfahren funktionieren in numerischen Simulationen, entsprechende theoretische Analysen existieren allerdings noch nicht. Von einer generellen Konvergenz kann nicht ausgegangen werden.

Ein etwas anderer Ansatz wurde von Just gewählt [20]. Bei richtig angepasster Verzögerungszeit $\tau = T$ wird der Orbit ξ stabilisiert. Durch Verstimmung von τ wird ξ kontinuierlich deformiert. Es entsteht ein induzierter Orbit η mit Periode Θ . Dabei hängt dessen Gestalt und Periode von der Kontrollamplitude K und der Verzögerungszeit τ ab, d.h. $\eta = \eta_{K,\tau}$ und $\Theta = \Theta(K, \tau)$. Ohne Verstimmung sind die beiden Orbits identisch, d.h. $\eta_{K,\tau=T} = \xi$, und somit auch ihre Periodendauern:

$$\Theta(K, \tau = T) = T \tag{2.26}$$

Da K und τ im Experiment eingestellt werden und Θ gemessen werden kann, braucht man nur nach Nullstellen der Funktion $\Theta(K, \tau) - \tau$ zu suchen, um den wahren Orbit ξ zu finden.

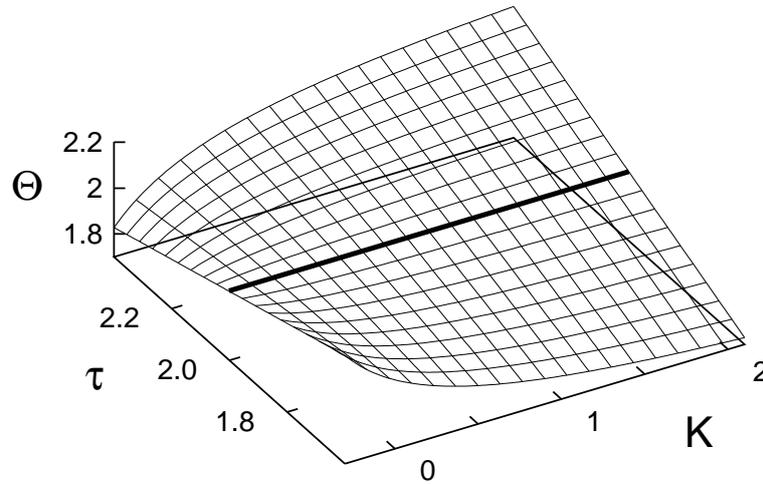


Abb. 2.5: Periode Θ des induzierten Orbits in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude K und der Verzögerungszeit τ aus Gl. (2.27) mit $T = 2.0$ und $\alpha = -1.0$. Für $\tau = T$ entspricht Θ der wahren Periode T (dicke Linie).

Es ist allerdings auch möglich, die K - und τ -Abhängigkeit des induzierten Orbit η näher zu untersuchen. Eine etwas längliche und nicht gerade triviale Rechnung liefert den ersten Koeffizienten einer Taylor-Entwicklung. Durch Linearisierung ergibt sich somit

$$\Theta(K, \tau) = T + \frac{K}{K - \alpha}(\tau - T) \quad . \quad (2.27)$$

Dabei ist α wie auch T ein Systemparameter, der ohne genaue Kenntnis der Bewegungsgleichungen und des zu stabilisierenden Orbits nicht berechnet werden kann. Doch bereits aus zwei Messungen ist es möglich, die wahre Periode T und den Systemparameter α zu bestimmen. Um ein Gefühl für die K - und τ -Abhängigkeit von Θ zu erhalten, ist diese in Abbildung 2.5 dargestellt. Natürlich ist der induzierte Orbit nicht in der gesamten K - τ -Ebene stabil. Da η jedoch bei nicht allzu großer Verstimmung $T - \tau$ die Stabilitätseigenschaften des wahren Orbits besitzt, sollten sich zwei Messpunkte finden lassen, falls ξ überhaupt stabilisiert werden kann. Hat man T bestimmt, so kann es sein, dass außer τ auch K nachgeregelt werden muss, was aber kein größeres Problem darstellt.

2.3.2. Reglernachlaufzeit

Chaoskontrolle mittels zeitverzögerter Rückkopplung ist besonders für die experimentelle Anwendung geeignet, da die Konstruktion der Kontrollkraft aus einem Messsignal recht einfach ist. Dies ist vor allem beim Einsatz in schnellen Systemen wichtig. Doch speziell dort macht sich der Einfluss von Reglernachlaufzeiten δ bemerkbar. Im Rahmen der

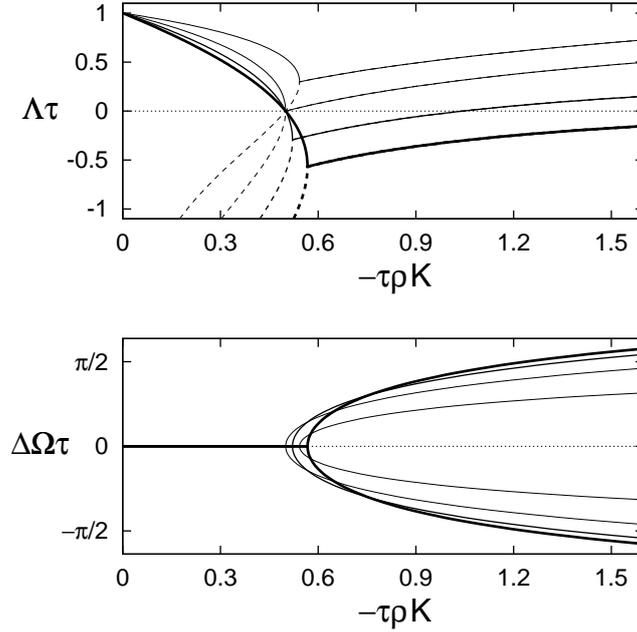


Abb. 2.6: Abhängigkeit des Floquet-Exponenten von der skalierten Kontrollamplitude für $\lambda\tau = 1$, $R = 0$ und mehrere δ -Werte: $0, 0.2\tau, 0.5\tau$ und τ . Die Linienbreite nimmt mit wachsenden δ ab.

konventionellen Kontrolltheorie wurde dieses Phänomen bereits vor Jahrzehnten untersucht (siehe beispielsweise [30]). Diese Reglernachlaufzeiten führen zu einer zusätzlichen Verzögerung des kompletten Kontrollsignals:

$$F_{R,\delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} R^{\nu} \{g[\mathbf{x}(t - \nu\tau - \delta)] - g[\mathbf{x}(t - (\nu + 1)\tau - \delta)]\} \quad (2.28)$$

Die Herleitung der Stabilitätsbereiche verläuft analog zur Rechnung in den Kapiteln 2.1 und 2.2. Bei exakter Verzögerungszeit (vgl. Gl. (2.9)) kommt es lediglich zum Auftreten eines weiteren Faktors in der charakteristischen Gleichung.

$$\Lambda + i\Omega = \Gamma_{R,\delta} \left[K \frac{1 - e^{-(\Lambda+i\Omega)\tau}}{1 - R e^{-(\Lambda+i\Omega)\tau}} \cdot e^{-(\Lambda+i\Omega)\delta} \right] \quad (2.29)$$

Linearisierung führt zur in Abbildung 2.6 dargestellten δ -Abhängigkeit des Floquet-Exponenten. Erhöhen der Reglernachlaufzeit verschiebt den Frequenzaufspaltungspunkt zu positiven $\Lambda\tau$ -Werten und führt somit zu einer Verkleinerung des Kontrollintervalls. Durch Linearisierung von Gl. (2.29) konnten von mir Ausdrücke für den unteren kritischen Wert

$$(-\tau\rho)K^{(\text{a})} = \frac{\lambda\tau}{2} (1 + R) \quad , \quad (2.30)$$

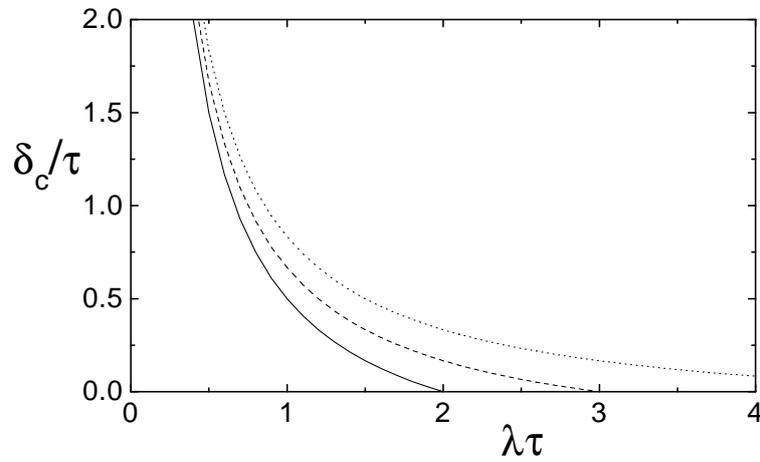


Abb. 2.7: Kritische Reglernachlaufzeit in Abhängigkeit vom Lyapunov Exponenten für mehrere R -Werte: $R = 0$ (durchgezogene Linie), $R = 0.2$ (gestrichelte Linie), $R = 0.5$ (punktierete Linie).

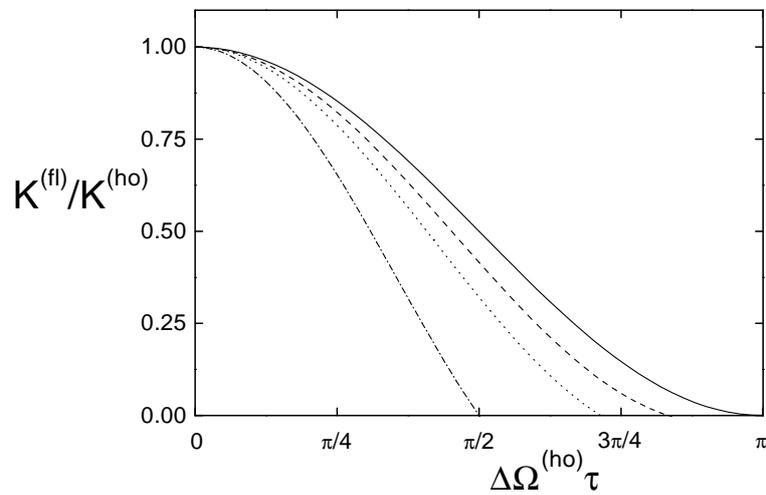


Abb. 2.8: Verhältnis der kritischen Kontrollamplituden in Abhängigkeit von der Frequenzabweichung $\Delta\Omega^{(ho)}$ an der Hopf-Bifurkation für $R = 0$ und mehrere δ -Werte: $\delta = 0$ (durchgezogene Linie), $\delta = 0.1\tau$ (gestrichelte Linie), $\delta = 0.2\tau$ (punktierete Linie), $\delta = 0.5\tau$ (strichpunktierete Linie).

sowie für den oberen kritischen Wert

$$\begin{aligned}
 (-\tau\rho)K^{(\text{ho})} &= \frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{\sin(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau)} \\
 &\cdot \frac{1 + R^2 + 2R \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau)}{(1 - R) \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\delta) + (1 + R) \sin(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\delta) \cot(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau/2)} \\
 \lambda\tau &= \frac{\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau}{\tan(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau/2)} \\
 &\cdot \frac{(1 + R) - (1 - R) \tan(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\delta) \tan(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau/2)}{(1 - R) + (1 + R) \tan(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\delta) \cot(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau/2)}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

mit $\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau \in [0, \pi]$ hergeleitet werden. Dabei wurde von der speziellen δ -Abhängigkeit des Taylor-Koeffizienten χ' Gebrauch gemacht [22].

$$\chi'(\delta) = \exp(i\pi\delta/\tau)\rho(\delta), \quad \rho(\delta) = -\rho(\delta + \tau) \tag{2.32}$$

Aus den kritischen Kontrollamplituden ergibt sich eine maximal erlaubte Reglernachlaufzeit

$$\frac{\delta_c}{\tau} = \frac{1}{\lambda\tau} - \frac{1 - R}{2(1 + R)}, \tag{2.33}$$

ab der Kontrolle nicht mehr möglich ist [31]. Diese Einschränkung kann durch Verwendung eines hohen Reflexionsparameters R zwar gelockert, aber nicht aufgehoben werden (siehe Abb. 2.7).

Auch hier konnte von mir eine systemparameterfreie Relation zwischen den beiden kritischen Kontrollamplituden $K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}$, dem Reflexionsparameter R , der Frequenzabweichung an der Hopf-Bifurkation $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$ und der Reglernachlaufzeit δ hergeleitet werden

$$\begin{aligned}
 \frac{K^{(\text{fl})}}{K^{(\text{ho})}} &= \frac{1 + R}{2(1 + R^2 + 2R \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau))} \\
 &\cdot [(1 + R)(1 + \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau)) \cos(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\delta) \\
 &\quad - (1 - R) \sin(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\tau) \sin(\Delta\Omega^{(\text{ho})}\delta)] .
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Diese Relation ist in Abbildung 2.8 für mehrere δ -Werte dargestellt.

2.3.3. Weitere Floquet-Exponenten

Alle bisherigen Überlegungen basierten auf der Existenz eines isolierten Floquet-Exponenten mit größtem Realteil, der die Stabilitätseigenschaften des Orbits im gesamten Kontrollparameterbereich bestimmt. Solch ein dominanter Exponent liegt jedoch nicht immer vor, so dass es notwendig ist, sich einige Gedanken über das gesamte Eigenwertspektrum zu machen.

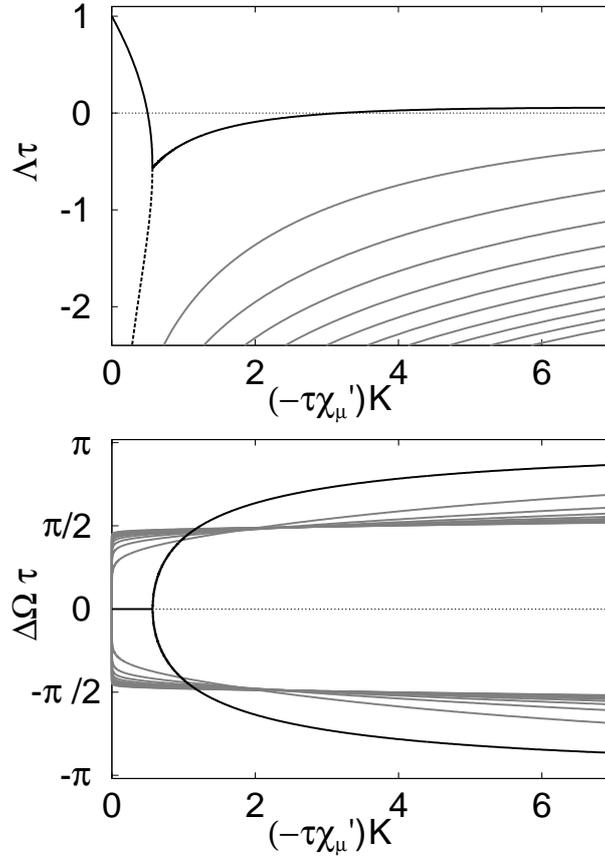


Abb. 2.9: Floquet-Exponent in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude für $\lambda_\mu\tau = 1$: Dominanter Exponent (dicke, durchgezogene Linie), zweiter reeller Floquet-Multiplikator ($\Delta\Omega = 0$, gestrichelte Linie), nichtdominante, komplex konjugierte Exponenten (graue Linien).

Ausgangspunkt sei zunächst die linearisierte Eigenwertgleichung (2.15), die für jeden Exponenten des freien Systems getrennt gilt.

$$\Lambda\tau + i\Delta\Omega\tau = \lambda_\mu\tau - (-\tau\chi'_\mu)K \{1 + e^{-\Lambda\tau - i\Delta\Omega\tau}\} \quad (2.35)$$

Diese Linearisierung ist in mehreren Fällen gerechtfertigt. Sowohl als Taylor-Entwicklung mit lokaler Gültigkeit, wie auch als Asymptotik für große $|\kappa|$ ($\kappa = K \{1 - e^{-(\Lambda+i\Omega)\tau}\}$) sowie bei *mean field*-Ankopplung der Kontrollkraft (diagonale Rückkopplungsmatrix mit gleichen Gewichten) [24]. Aufgrund der impliziten Struktur von Gleichung (2.35), erhält man für jeden Freiheitsgrad μ unendlich viele Exponenten. Die Realteile aller durch die Rückkopplung induzierten Exponenten gehen für verschwindende Kontrolle gegen minus unendlich und, vom reellen Floquet-Multiplikator abgesehen, für große Kontrollamplitude gegen null (siehe Abb. 2.9). Es treten keine Kreuzungen der Zweige auf; der aus dem freien Orbit hervorgehende Exponent ist dominant. Für jeden Freiheitsgrad μ existiert

solch ein unendliches Spektrum. Das letztendlich gültige Kontrollintervall ergibt sich aus dem Schnitt der einzelnen Kontrollintervalle, was zu einer starken Verkleinerung führen kann. Somit ist es bereits beim linearisierten Eigenwertproblem möglich, dass es zu Kreuzungen dieser voneinander unabhängigen, dominanten Exponenten kommen kann.

Numerische Simulationen haben jedoch gezeigt, dass die Freiheitsgrade μ nicht voneinander unabhängig sind [24]. Um Kopplungen der Floquet-Spektren zu erhalten, ist die Einführung von Zwangsbedingungen beim vollen nichtlinearen Eigenwertproblem (2.12) nötig. So entspricht beispielsweise die Summe aller Exponenten der gemittelten Spur der Matrix

$$M[\kappa, t] := D_1 \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), 0) + \kappa d_2 \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}(t), 0) \otimes Dg[\boldsymbol{\xi}(t)] \quad (2.36)$$

mit $\kappa = K \{1 - e^{-(\Lambda + i\Omega)\tau}\}$ (vgl. Gl. 2.11). Solche Zwangsbedingungen können zur Herleitung verbesserter Näherungsformeln für das gegebene Floquet-Problem dienen. Ohne detaillierte Kenntnis der Bewegungsgleichungen führt dies jedoch zu weiteren Fitparametern, die das grundlegende Verständnis des Kontrollmechanismus nicht unbedingt erhöhen. Zusammenfassend kann geschlossen werden, dass sich aus dem vollen Eigenwertproblem ein beliebig kompliziertes Spektrum ergeben kann. Dieses ermöglicht auch das Kreuzen von Eigenwerten und somit die Verkleinerung des Kontrollintervalls durch ursprünglich stabile Exponenten.

3. Chaoskontrolle an elektronischen Schwingkreisen

In diesem Kapitel werden zunächst die beiden elektronischen Schwingkreise beschrieben, an denen Experimente zur Chaoskontrolle durchgeführt wurden. Die beiden Systeme wurden hauptsächlich als Analogsimulationen verwendet, um die Beobachtbarkeit der in Kapitel 2 untersuchten Phänomene im Experiment zu überprüfen. Dadurch soll zum tieferen Verständnis der Kontrollmethode beigetragen und somit die Grundlage für die erfolgreiche Anwendung in komplexeren Systemen gelegt werden.

3.1. Nichtlinearer Diodenschwingkreis

Der nichtlineare Diodenschwingkreis besteht aus einer Spule L , einem Widerstand R_Ω , einer Halbleiterdiode (1N4005) und wird sinusförmig mit fester Frequenz f_0 und Amplitude U_A getrieben (Abb. 3.1). Da unterschiedliche Konfigurationen verwendet wurden, werden die genauen Systemparameter bei den entsprechenden Ergebnissen angegeben. Für Kontrollzwecke wurde die Spannung am Widerstand abgegriffen und über die Kontrollplatine an den Antrieb gekoppelt. Ohne Kontrolle durchläuft der Schwingkreis bei Erhöhung der Treiberamplitude U_A eine Periodenverdopplungskaskade ins Chaos (Abb. 3.2). Bei weiterer Amplitudenerhöhung treten periodische Fenster mit Grundperioden 2, 3, 4, 5 auf, welche ebenfalls durch Periodenverdopplungen ins Chaos übergehen.

Da es sich beim nichtlinearen Diodenschwingkreis um ein nichtautonomes System handelt, treten nur periodische Lösungen (stabile und instabile) auf, deren Periodendauern ganzzahligen Vielfachen der Treiberperiode entsprechen. Dies vereinfacht das exakte Einstellen der Verzögerungszeit auf der Kontrollplatine erheblich. Topologische Analysen [32, 33] dieses dreidimensionalen Systems haben eine Frequenz von π/T im Floquet-Exponenten aller im chaotischen Attraktor beobachteten periodischen Orbits ergeben. Wie in Kapitel 2.1 gezeigt wurde, ist dies eine der Hauptvoraussetzungen für erfolgreiche Kontrolle mittels zeitverzögerter Rückkopplung.

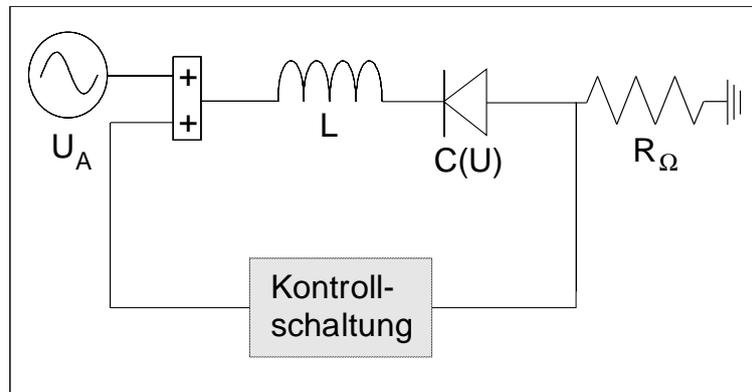


Abb. 3.1: Experimenteller Aufbau des nichtlinearen Diodenschwingkreises mit Kontrollplatte.

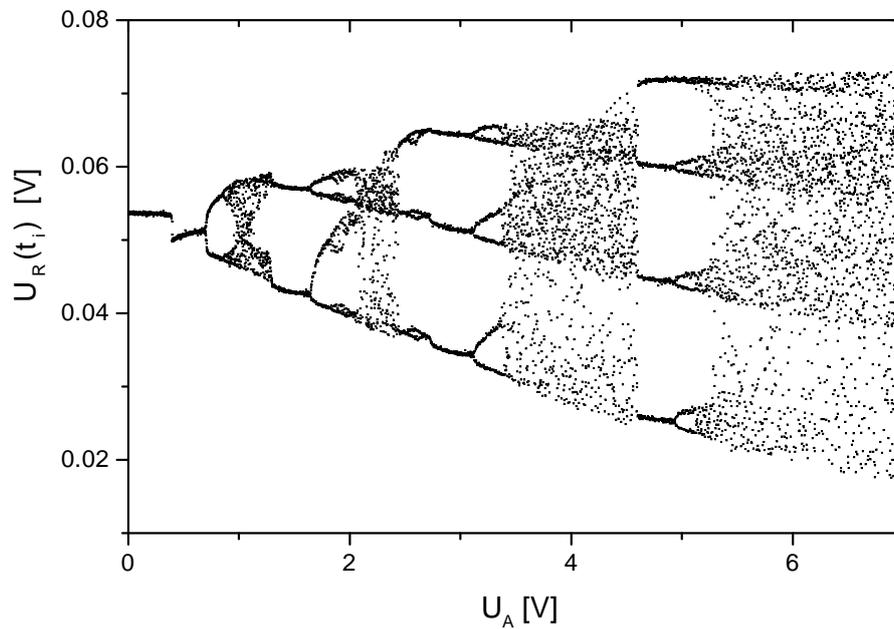


Abb. 3.2: Bifurkationsdiagramm des nichtlinearen Diodenschwingkreises ohne Kontrolle. Die Messpunkte wurden bei fester Phase des Treibers aufgenommen.

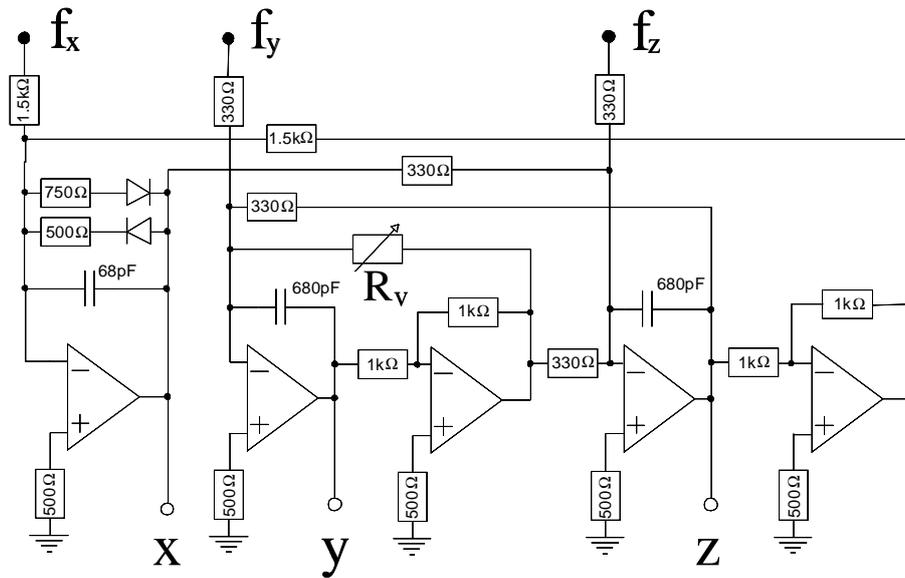


Abb. 3.3: Experimenteller Aufbau des ANE-Schwingkreises ohne Kontrollplatine.

3.2. ANE¹-Schwingkreis

Der ANE-Schwingkreis besteht aus mehreren Operationsverstärkern (drei davon wirken als Integratoren, zwei als Invertierer) mit entsprechenden Rückkopplungskomponenten (Abb. 3.3). Um die Verwendung stark rauschender Multiplikatoren zu vermeiden, wurden Dioden zur Erzeugung der Nichtlinearität eingesetzt. Dementsprechend modelliert der Schwingkreis nicht das Rössler-System, erzeugt aber einen Rössler-ähnlichen Attraktor. Die Spannungen, die bei x , y , z abgegriffen werden können, entsprechen den Freiheitsgraden des Systems. Bei f_x , f_y , f_z können externe Signale für Kontrollzwecke eingekoppelt werden. Bei allen Experimenten an diesem Schwingkreis wurde für Kontrollzwecke die Spannung am Punkt z abgegriffen und über die Kontrollplatine am Punkt f_z eingekoppelt. Typische Frequenzen dieses autonomen Schwingkreises liegen bei 600 kHz. Zur Bestimmung der exakten Periodendauer eines instabilen periodischen Orbits können mehrere Methoden herangezogen werden (siehe Kap. 2.3.1). Ohne Kontrolle durchläuft der Schwingkreis bei Erniedrigung des Widerstands R_v eine Periodenverdopplungskaskade ins Chaos, wo er einen Rössler-ähnlichen Attraktor erzeugt (Abb. 3.4). Topologische Analysen [32, 33] dieses dreidimensionalen Systems haben eine Frequenz von π/T im Floquet-Exponenten des im chaotischen Attraktor beobachteten Periode-1-Orbits ergeben. Dies ist eine der Hauptvoraussetzungen für erfolgreiche Kontrolle mittels zeitverzögerter Rückkopplung (siehe Kap. 2.1).

¹Da in der Literatur bisher kein Eigenname für den verwendeten Schwingkreis existiert, wurde die Bezeichnung ANE-Schwingkreis eingeführt, die den Eigenschaften *autonom*, *nichtlinear* und *elektromechanisch* Rechnung trägt.

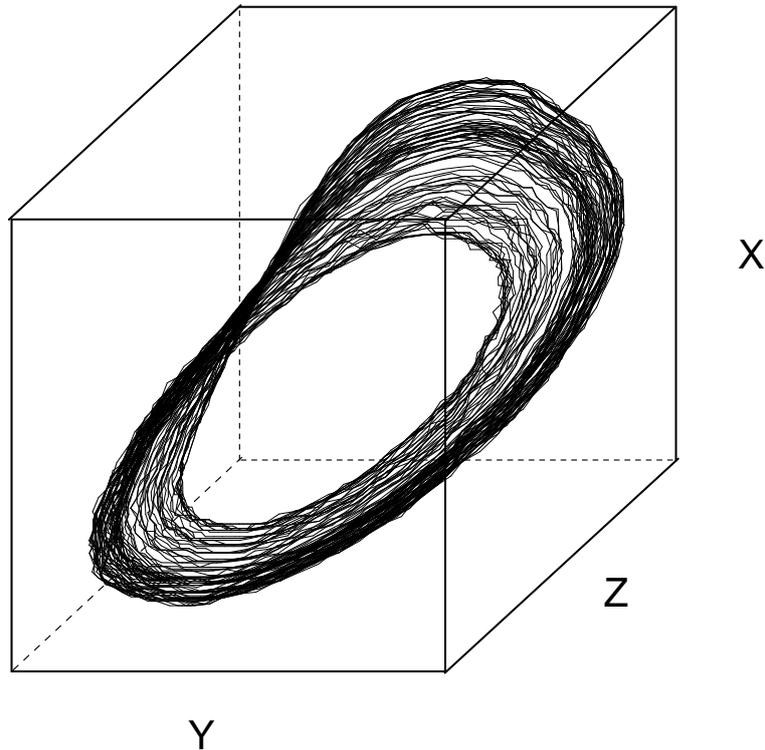


Abb. 3.4: Phasenraumdarstellung des Rössler-ähnlichen Attraktors des ANE-Schwingkreises.

3.3. Stabilitätsbereiche

Zunächst soll anhand einiger Experimente am nichtlinearen Diodenresonator die experimentelle Vorgehensweise zur Kontrolle eines instabilen periodischen Orbits beschrieben werden. Ausgangspunkt ist ein chaotischer Attraktor, der aus einer Periodenverdopplungskaskade heraus entstanden ist. Die zugehörigen Schwingkreisparameter sind: $L = 760 \mu\text{H}$, $R_{\Omega} = 36 \Omega$, $f_0 = 800 \text{ kHz}$ und $U_A = 1.1 \text{ V}$. Entsprechend der Treiberperiode wird die Verzögerungszeit $\tau = 1.25 \mu\text{s}$ auf der Kontrollplatine eingestellt. Ohne Kontrolle erhält man ein breites Leistungsspektrum, das nur bei der Treiberfrequenz und höheren Harmonischen scharfe Peaks aufweist (Abb. 3.5). Erhöhen der Kontrollamplitude führt zur Veränderung des chaotischen Attraktor, bis schließlich ein periodischer Systemzustand vorliegt, der durch Subharmonische der Treiberfrequenz geprägt wird. Schon aufgrund der Konstruktion der Kontrollkraft kann dies kein instabiler Orbit des ungestörten Systems sein. Das erkennt man auch am Nichtverschwinden des Kontrollsignals. Dieser induzierte Orbit der Periode 8 oder Periode 16, je nach Optimierung der Gesamtschaltung, geht durch inverse Periodenverdopplungen schließlich in den gewünschten Periode-1-Zustand über. Im Spektrum des Systemsignals treten nur Harmonische der Treiberfrequenz auf, das Kontrollsignal fällt unter das Restrauschen

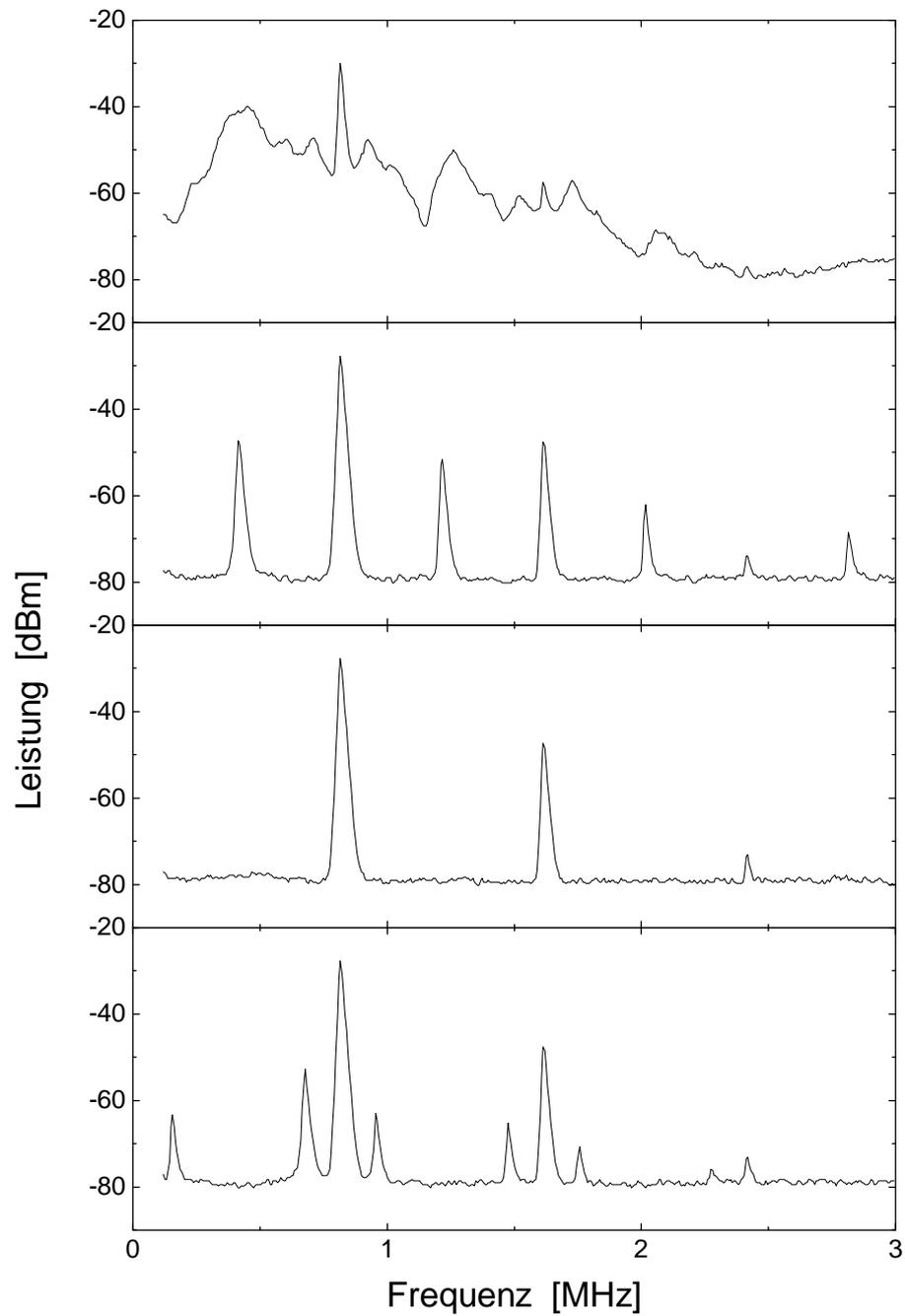


Abb. 3.5: Leistungsspektren der Systemdynamik für mehrere Kontrollamplituden:
 $K = 0$, $K < K^{(\text{fl})}$, $K^{(\text{fl})} < K < K^{(\text{ho})}$, $K^{(\text{ho})} < K$.

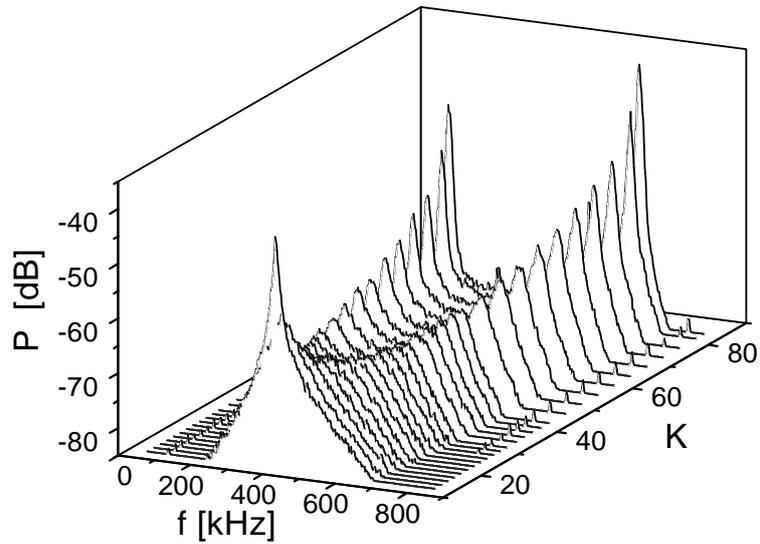


Abb. 3.6: Leistungsspektren des Kontrollsignals bei Störung eines stabilisierten Orbits für mehrere Kontrollamplituden zwischen $K^{(fl)}$ und $K^{(ho)}$.

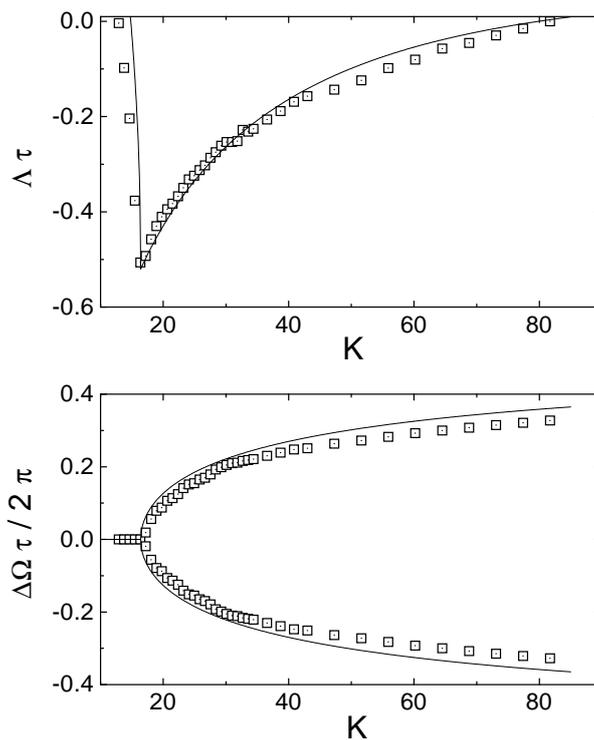


Abb. 3.7: Floquet-Exponent in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude, bestimmt aus den Spektren in Abbildung 3.6. Die Linien entsprechen dem analytischen Ergebnis (2.15) mit $\lambda\tau = 1.07$ und $(-\tau\chi') = 0.036$.

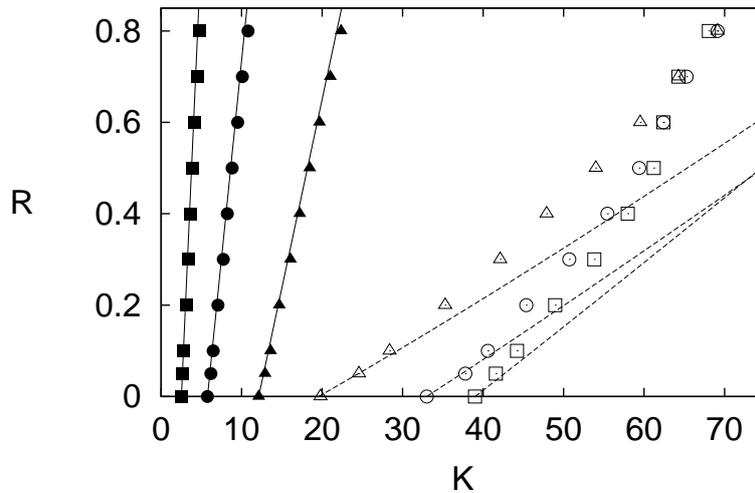


Abb. 3.8: Stabilitätsbereich in der K - R Parameterebene für mehrere Treiberamplituden U_A : \square 0.8 V, \circ 1.1 V, \triangle 3.5 V. Gefüllte/offene Symbole entsprechen der Flip-/Hopf-Instabilitätsgrenze, durchgezogene/gestrichelte Linien den analytischen Ergebnissen (2.16)/(2.17).

von ca. 2 mV. Weiteres Erhöhen der Kontrollamplitude führt zum Auftreten einer Hopf-Bifurkation, der Orbit geht in einen induzierten Torus über. Im Spektrum tritt eine zusätzliche Frequenz mit zugehörigen Mischfrequenzen auf (Abb. 3.5). Zuweilen kommt es an bzw. oberhalb der oberen Stabilitätsgrenze zu *locking* Effekten. Den theoretischen Vorhersagen entsprechend (vgl. Kap. 2.2) beobachtet man ein endliches Kontrollintervall $[K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}]$, das durch eine Flip- und eine Hopf-Bifurkation begrenzt wird. Aufgrund der Abfolge der Bifurkationen lässt sich die Lage der aktuellen Kontrollamplitude K in Bezug auf $K^{(\text{fl})}$ und $K^{(\text{ho})}$ erkennen. Dies ist vor allem wichtig (a) bei kleinen Kontrollintervallen, (b) wenn innerhalb $[K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}]$ kein globaler Einzugsbereich des Orbits vorliegt, (c) wenn Kontrolle aufgrund eines zu hohen $\lambda\tau$ -Wertes gar nicht möglich ist.

Um nicht nur qualitative, sondern auch quantitative Vergleiche mit der Theorie ziehen zu können, ist eine Bestimmung des (größten) Floquet-Exponenten notwendig. In dieser Arbeit wurden zwei experimentelle Verfahren verwendet, die beide im Anhang B beschrieben sowie ihre Stärken und Schwächen diskutiert werden. Bei der störungstheoretischen Methode wird der stabilisierte Orbit durch eine zusätzliche kleine sinusförmige Modulation eines Systemparameters gestört. Die Systemantwort im Kontrollsignal wird mittels Netzwerkanalysator aufgezeichnet. Solche Spektren sind in Abbildung 3.6 für mehrere Kontrollamplituden zwischen $K^{(\text{fl})}$ und $K^{(\text{ho})}$ zu sehen. Aus Lage und Breite der auftretenden Lorentz-Peaks ergeben sich die gesuchten Exponenten (Abb. 3.7). Zum Vergleich mit dem analytischen Ergebnis (2.15) wurde der Fit bzgl. des Frequenzauflösungspunktes optimiert. Daraus ergeben sich $\lambda\tau = 1.07$ und $(-\tau\chi') = 0.036$. Es liegt nicht nur eine qualitative, sondern bei einem Fehler von wenigen Prozent auch eine

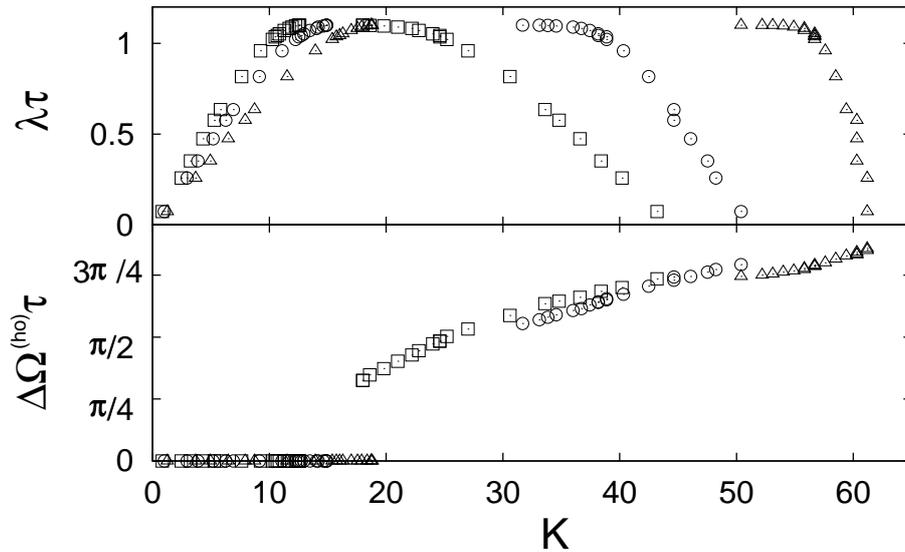


Abb. 3.9: Stabilitätsgrenzen in der K - $\lambda\tau$ Ebene für den Periode-1-Orbit und die zugehörige Frequenzabweichung: \square ($R = 0$), \circ ($R = 0.2$), \triangle ($R = 0.5$).

quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment vor.

Bei den bisherigen Kontrollexperimenten wurde das einfache Rückkopplungsschema (2.8) eingesetzt. Dieses ist jedoch auf Orbits mit kleinen Lyapunov-Exponenten λ oder kurzen Perioden T beschränkt (vgl. Gl. 2.18). Diese Einschränkung kann durch die erweiterte Kontrollmethode (2.19) gelockert werden (vgl. Gl. 2.23), was im Folgenden näher untersucht werden soll. Dazu wurden die Kontrollgrenzen $K^{(fl)}$, $K^{(ho)}$ in Abhängigkeit vom Reflexionsparameter R gemessen. Die Ergebnisse für drei verschiedene Treiberamplituden U_A , die auch drei verschiedenen Lyapunov-Exponenten entsprechen, sind in Abbildung 3.8 dargestellt. Anfitzen der analytischen Ergebnisse (Gln. (2.21), (2.22)) liefert für die Flip-Instabilität perfekte Übereinstimmung, während es bei der Hopf-Instabilität zu Abweichungen kommt. Der Grund dafür liegt in der Linearisierung der Eigenwertgleichung (2.20), so dass das Auftreten der Abweichungen für große Kontrollamplituden nicht weiter verwunderlich ist.

Aus dem exponentiellen Anstieg des Kontrollsignals beim Ausschaltexperiment wurde der Lyapunov-Exponent des freien Orbits für einige Treiberamplituden bestimmt (vgl. Anhang B). Neben den kritischen Kontrollamplituden wurden ebenso die Frequenzabweichungen $\Delta\Omega^{(ho)}$ an der Hopf-Instabilität gemessen. Die experimentellen Zusammenhänge zeigt Abbildung 3.9. Auch wenn eine qualitative Übereinstimmung mit dem analytischen Ergebnis (vgl. Abb. 2.3) vorhanden ist, so bleibt ein quantitativer Vergleich schwierig. Dies liegt daran, dass sich χ' bei Variation von Systemparametern ändert und somit auch von λ abhängt. Folglich hat man für jede Treiberamplitude einen neuen Fitparameter, auf dieser Grundlage ist ein Vergleich nicht sinnvoll. Dieses Problem kann durch die *systemparameterfreie* Relation (2.24) zwischen den beiden kritischen Kontroll-

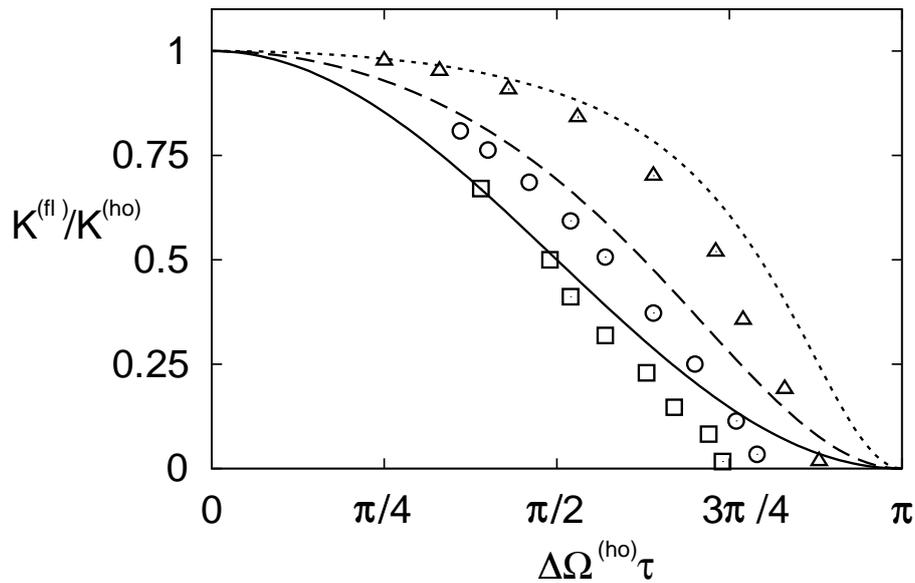


Abb. 3.10: Verhältnis der kritischen Kontrollamplituden in Abhängigkeit von der Frequenzabweichung an der Hopf-Bifurkation für den Periode-4-Orbit: $R = 0$ (\square , durchgezogene Linie), $R = 0.2$ (\circ , gestrichelte Linie), $R = 0.5$ (\triangle , punktierte Linie).

amplituden $K^{(fl)}, K^{(ho)}$, dem Reflexionsparameter R und der Frequenzabweichung an der Hopf-Bifurkation $\Delta\Omega^{(ho)}$ gelöst werden. Da die gemessenen $\Delta\Omega^{(ho)}$ -Werte für den Periode-1-Orbit in einem zu engen Bereich liegen (vgl. Abb. 3.9), wurden zusätzliche Messungen für einen Periode-4-Orbit durchgeführt. Neben den Messpunkten sind auch die zugehörigen Theoriekurven in Abbildung 3.10 eingezeichnet. In Anbetracht der Tatsache, dass die analytische Relation keinen Fitparameter beinhaltet, kann von einer guten Übereinstimmung gesprochen werden.

Zusammenfassend kann geschlossen werden, dass bereits die linearisierte Version der sich aus dem Floquet-Problem ergebenden Eigenwertgleichung die grundlegenden Phänomene der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle qualitativ, wenn nicht gar quantitativ beschreiben kann. Somit ist eine fundierte Grundlage geschaffen, um Einflüsse, die sich negativ auf die Kontrollierbarkeit eines Systems auswirken, näher untersuchen zu können. Dieser Fragestellung sind die nächsten Unterkapitel gewidmet.

3.4. Verstimzte Verzögerungszeit

Die Kontrolle eines instabilen periodischen Orbits mittels zeitverzögerter Rückkopplung setzt voraus, dass dessen Periode T a priori bekannt ist und die Verzögerungszeit τ entsprechend eingestellt wird. Diese Voraussetzung zu erfüllen, ist vor allem in autonomen Systemen schwierig bzw. erfordert aufwendige und zumeist unerwünschte Systemanaly-

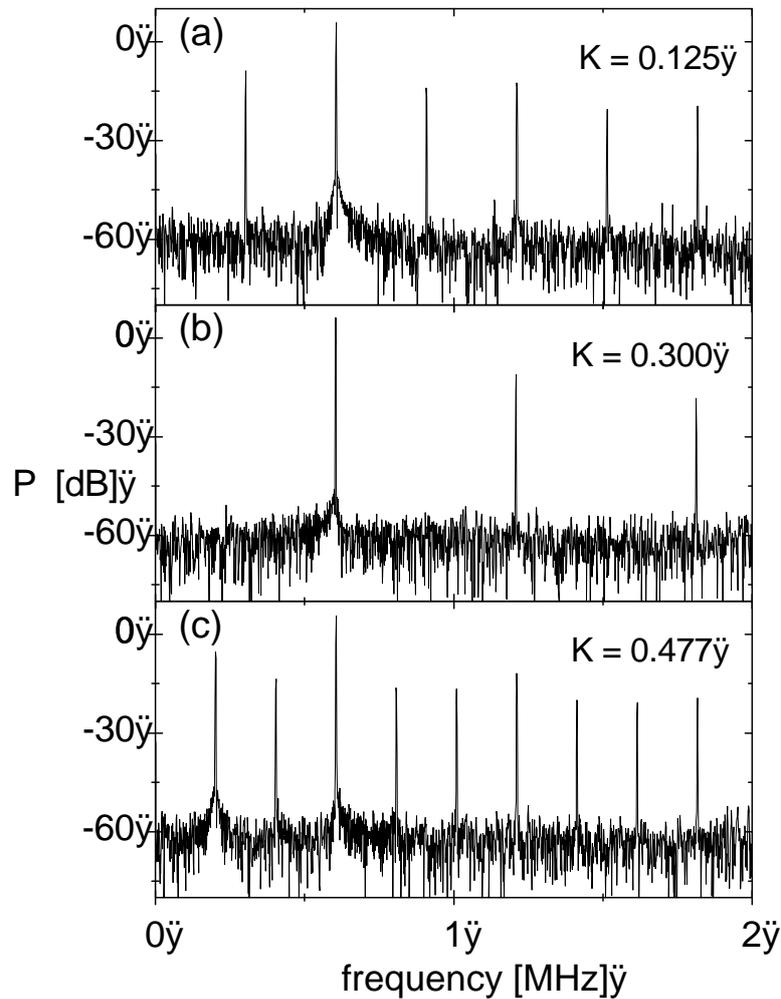


Abb. 3.11: Leistungsspektren von $x(t)$ für $\tau - T = 2.5\text{ns}$: (a) $K < K^{(\text{fl})}$, (b) $K^{(\text{fl})} < K < K^{(\text{ho})}$, (c) $K^{(\text{ho})} < K$.

sen. In Kapitel 2.3.1 wurde gezeigt, dass bei nicht allzu großer Verstimmung ein Orbit η mit Periode Θ stabilisiert wird, dessen Stabilitätseigenschaften vom wahren Orbit ξ bestimmt werden. Zudem existiert eine analytische Näherungsformel für die wahre Periode T .

Zur Überprüfung der analytischen Ergebnisse wurden Experimente am ANE-Schwingkreis (vgl. Kap. 3.2) durchgeführt. Ausgangspunkt ist der chaotische Attraktor für $R_v = 110\Omega$ (vgl. Abb. 3.4). Aus der Lage des dominanten Peaks im Leistungsspektrum wurde der Startwert für τ ermittelt. Einschalten der Kontrolle und Erhöhen der Kontrollamplitude führt zur Veränderung des chaotischen Attraktors und Auftreten einer inversen Periodenverdopplungskaskade, bis schließlich ein Periode-1-Zustand mit Periode Θ vorliegt. Dass dies nicht der instabile Orbit des freien Systems ist, erkennt man

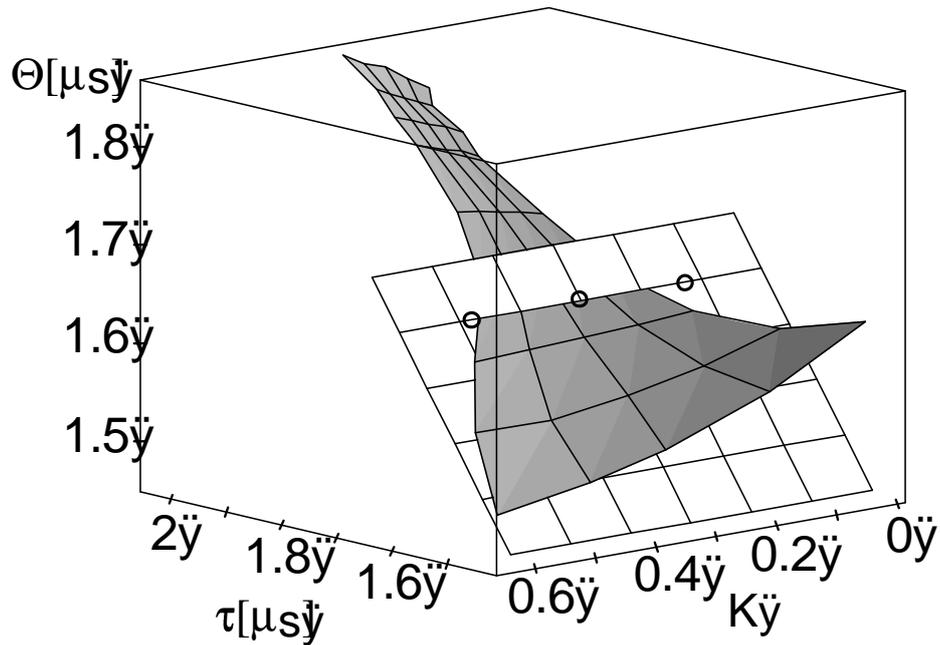


Abb. 3.12: Gemessene Periodendauer Θ in Abhängigkeit von τ und K . Die weiße Ebene entspricht $\Theta = \tau$. Die Kreise geben die Stellen der Leistungsspektren in Abb. 3.11 an.

auch am Nichtverschwinden des Kontrollsignals. Weiteres Erhöhen von K verändert den induzierten Orbit, bis dieser durch eine Hopf-Bifurkation in quasiperiodisches Systemverhalten übergeht (Abb. 3.11). Dieses Szenarium zeigt, dass induzierter und wahrer Orbit dieselben Stabilitätseigenschaften besitzen (vgl. Abb. 3.5). Misst man Θ für mehrere τ - und K -Werte, so ergibt sich die grauschraffierte Fläche in Abbildung 3.12. Die weiße Ebene entspricht dem Fall $\Theta = \tau$. Im Rahmen des Messfehlers von 1ns erhält man als Schnitt der beiden Flächen eine gerade Linie mit $\Theta = \tau = T = 1.656\mu\text{s}$ und somit die gesuchte Periodendauer T .

Zur quantitativen Überprüfung der Näherungsformel (2.27) betrachte man die τ -Abhängigkeit von Θ bei festem K (Abb. 3.13). Anfitzen von (2.27) an die Messpunkte in der Nähe von $\tau = T$ ergibt die punktierte Linie mit $T = 1.656\mu\text{s}$ und $\alpha = -0.33$. Da die Messwerte bei nicht allzu großer Verstimung eine vernachlässigbare Krümmung besitzen, kann die analytische Formel als gute Näherung angesehen werden. Selbst bei großer Verstimung kann Gleichung (2.27) im Sinne eines Newton-Verfahrens iterativ angewendet werden, um die gesuchte Periodendauer T experimentell zu bestimmen.

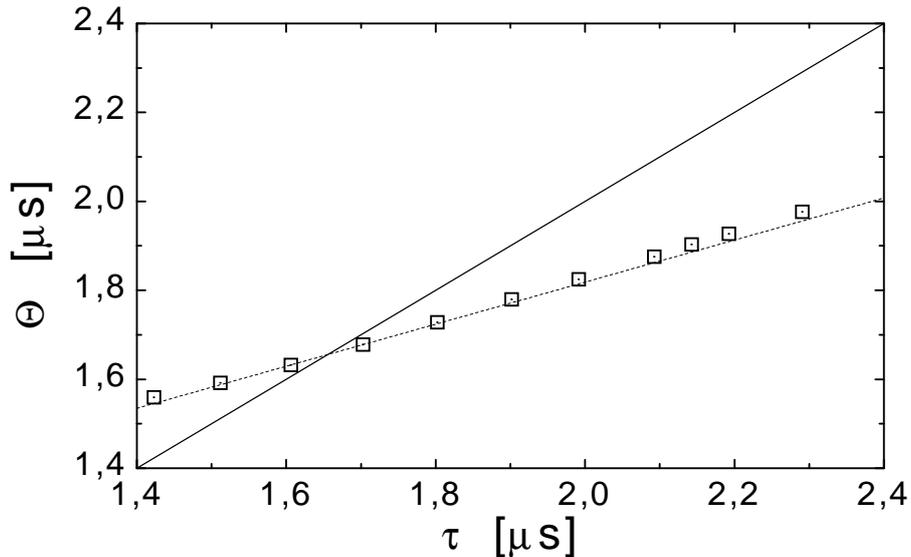


Abb. 3.13: Periode des induzierten Orbits in Abhängigkeit von der Verzögerungszeit für $K = 0.3$. Die Diagonale entspricht $\Theta = \tau$, die punktierte Linie der Linearisierung (2.27) um $T = 1.656 \mu\text{s}$.

3.5. Einfluss der Reglernachlaufzeit

Unter Reglernachlaufzeit δ versteht man alle Verzögerungszeiten, die für den Kontroll-eingriff notwendig sind. Darunter fallen beispielsweise die Detektion des Messsignals, die Erzeugung der Kontrollkraft, die Laufzeiten in Kabeln sowie die Rückkopplung des Kontrollsignals. Diese Zeiten führen zu einer zusätzlichen Verzögerung des kompletten Kontrollsignals. Dies bewirkt eine Verschiebung des Frequenzaufspaltungspunktes und somit eine Verkleinerung des Kontrollintervalls. Ab einem kritischen Wert δ_c ist Kontrolle nicht mehr möglich (vgl. Gl. (2.33)).

Zur Überprüfung der theoretischen Vorhersagen (Kap. 2.3.2) wurden Experimente am ANE-Schwingkreis (siehe Kap. 3.2) durchgeführt. Dabei wurde die Verzögerungszeit entsprechend der Periodendauer des instabilen Periode-1-Orbits auf $\tau = 1.656 \mu\text{s}$ eingestellt. Um die Auswirkungen der Reglernachlaufzeit im Detail untersuchen zu können, wurde zwischen Kontrollschaltung und Rückkopplungseingang am Schwingkreis eine Verzögerungsleitung eingebaut (Abb. 3.14). Ohne diese liegt eine Reglernachlaufzeit von $\delta_0 = 37\text{ns}$ vor. Somit lassen sich mit der zusätzlichen Verzögerung Nachlaufzeiten von $\delta = \delta_0 + \delta_{DL}$ erzeugen, wobei δ_{DL} in Schritten von 1ns variiert werden kann.

Zur Bestimmung des Kontrollintervalls wurde bei festem δ die Kontrollamplitude K durchgefahren. Die Ergebnisse für mehrere δ -Werte sind in Abbildung 3.15 dargestellt. Es ist offensichtlich, dass $K^{(\text{fl})}$ und $K^{(\text{ho})}$ stark von δ abhängen und Kontrolle ab $\delta/\tau \approx 11\%$ nicht mehr möglich ist. Um die Daten mit den analytischen Ergebnissen (2.30), (2.31) vergleichen zu können, ist es notwendig, die funktionelle Abhängigkeit des

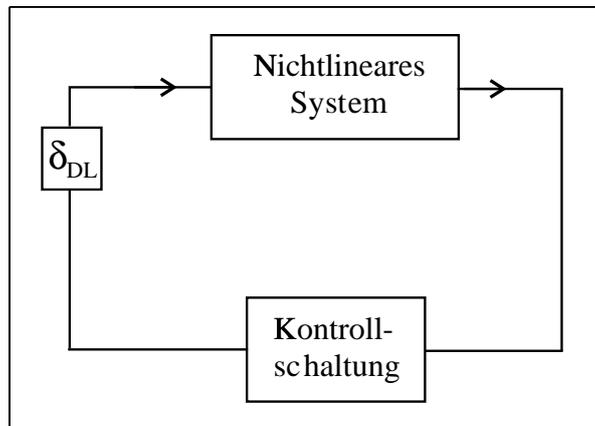


Abb. 3.14: Schematischer Aufbau mit nichtlinearem Schwingkreis, Kontrollschaltung und zusätzlicher Verzögerungsleitung zur Einstellung der Reglernachlaufzeit.

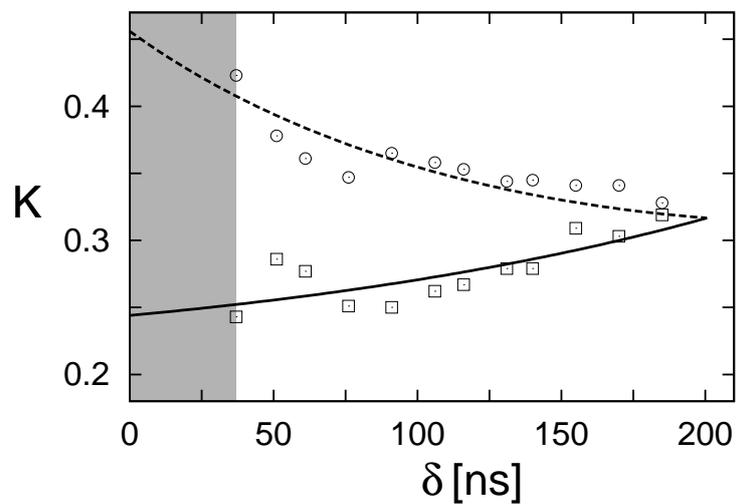


Abb. 3.15: Kontrollintervall in Abhängigkeit von der Reglernachlaufzeit, \square : $K^{(fl)}(\delta)$, \circ : $K^{(ho)}(\delta)$. Der grauschraffierte Bereich ist im vorliegendem Experiment aufgrund intrinsischer Verzögerungen δ_0 nicht zugänglich. Die Linien entsprechen Fits der analytischen Ergebnisse (2.30), (2.31) an die experimentellen Daten.

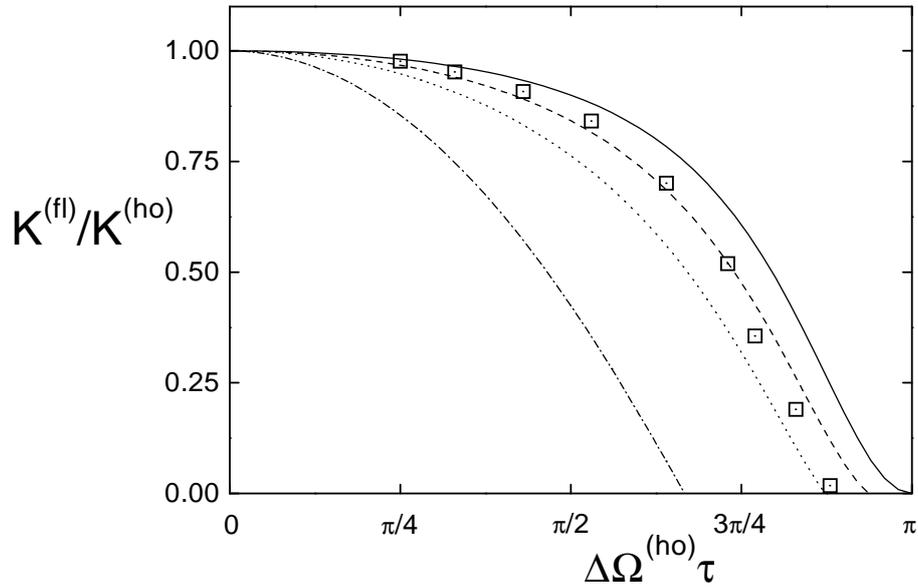


Abb. 3.16: Verhältnis der kritischen Kontrollamplituden in Abhängigkeit von der Frequenzabweichung $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$ an der Hopf-Bifurkation für $R = 0.5$ und mehrere δ -Werte: $\delta = 0$ (durchgezogene Linie), $\delta = 0.1\tau$ (gestrichelte Linie), $\delta = 0.2\tau$ (punktierte Linie), $\delta = 0.5\tau$ (strichpunktierte Linie).

Skalierungsfaktors $(-\tau\rho(\delta))$ zu kennen. Der einfachste Zusammenhang, der der Antiperiodizität (2.32) Rechnung trägt ist $(-\tau\rho(\delta)) = A \sin(\pi\delta/\tau) + B \cos(\pi\delta/\tau)$. Anfitzen der $K^{(\text{fl})}$ -Daten liefert $A = -1.4$, $B = 3.3$, sowie den Lyapunov-Exponenten des freien Orbits $\lambda\tau = 1.6$. Damit ergibt sich entsprechend Gleichung (2.33) ein kritischer Wert $\delta_c/\tau = 12.5\%$. Auch hier ist wieder eine gute Übereinstimmung zwischen experimentellen Ergebnissen und beschreibender Theorie vorhanden. Zudem stimmt die Form des sich ergebenden Kontrollgebietes mit früheren experimentellen und numerischen Untersuchungen überein [34].

Im Prinzip ist der Einfluss der Reglernachlaufzeit in allen Experimenten dieser Arbeit vorhanden. Wie stark er sich auswirkt, hängt vom exakten Aufbau des Rückkopplungszweigs ab. Zur Veranschaulichung dienen die experimentellen Daten aus Abbildung 3.10 für $R = 0.5$. Diese sind gemeinsam mit den Theoriekurven (2.34) für mehrere δ -Werte in Abbildung 3.16 dargestellt. Im Bereich kleiner $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$ -Werte kann die Abweichung zwischen experimentellen Daten und dem theoretischen Verlauf für $\delta = 0$ durch das Vorhandensein einer intrinsischen Reglernachlaufzeit erklärt werden. Der verstärkte Abfall bei großen $\Delta\Omega^{(\text{ho})}$ -Werten, d.h. bei großen kritischen Kontrollamplituden $K^{(\text{ho})}$, basiert auf nichtlinearen Effekten, die in der linearisierten Theorie nicht mehr vorhanden sind.

Während bei Verwendung des erweiterten Kontrollschemas (2.19) Orbits mit großen $\lambda\tau$ -Werten kontrolliert werden können, kann die durch Reglernachlaufzeiten hervorgerufene Einschränkung durch hohen Reflexionsparameter R nicht aufgehoben werden. Daher

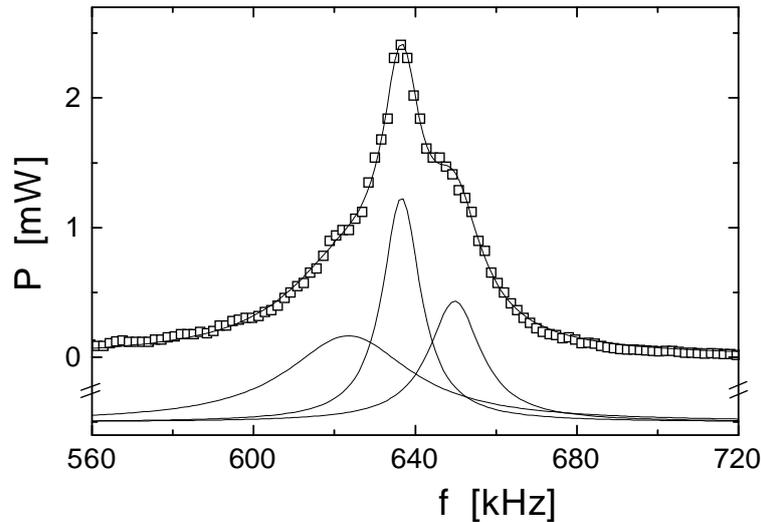


Abb. 3.17: Ausschnitt aus dem Netzwerkanalysatorspektrum für $K = 60$ (siehe Abb. 3.6). Außer den Messdaten ist ein Fit mit drei Lorentz-Linien (der Übersichtlichkeit halber nach unten verschoben) und deren Summe dargestellt.

ist es besonders in schnellen Systemen wesentlich, die intrinsische Reglernachlaufzeit im Rückkopplungszweig zu minimieren.

3.6. Weitere Floquet-Exponenten

Bei den bisher in dieser Arbeit beschriebenen Kontrollexperimenten konnte die Existenz mehrerer Floquet-Exponenten im Spektrum des Kontrollsignals zumindest für große Kontrollamplituden beobachtet werden. Dabei wurde das Kontrollintervall einzig durch den Floquet-Zweig bestimmt, der aus dem instabilen Exponenten des freien Orbits hervorgeht. Ein zweiter oder gar mehrere Exponenten erscheinen im Spektrum des Kontrollsignals für große K -Werte, doch kreuzen deren Realteile nicht den des dominanten Zweiges. Zur Veranschaulichung betrachte man die in Kapitel 3.3 beschriebenen Experimente. Der dominante Floquet-Exponent (siehe Abb. 3.7) wurde aus Lage und Breite der Lorentz-Linien in den Netzwerkanalysatorspektren (siehe Abb. 3.6) bestimmt. Auf den ersten Blick erkennt man nicht mehrere Floquet-Zweige, sondern ungewöhnliche, nicht Lorentz-förmige Linien für hohe Kontrollamplituden. Es stellt sich heraus, dass dies auf die Existenz mehrerer Peaks in einem engen Frequenzbereich zurückzuführen ist (Abb. 3.17). Da die Anzahl der „sichtbaren“ Linien mit der Kontrollamplitude weiter zunimmt und all diese in einem schmalen Frequenzintervall liegen, ist es nicht möglich, diese zusätzlichen Floquet-Zweige über einen größeren K -Bereich zu bestimmen. Daher ist in Abbildung 3.7 nur der Exponent mit dem größten Realteil eingezeichnet. Im vorlie-

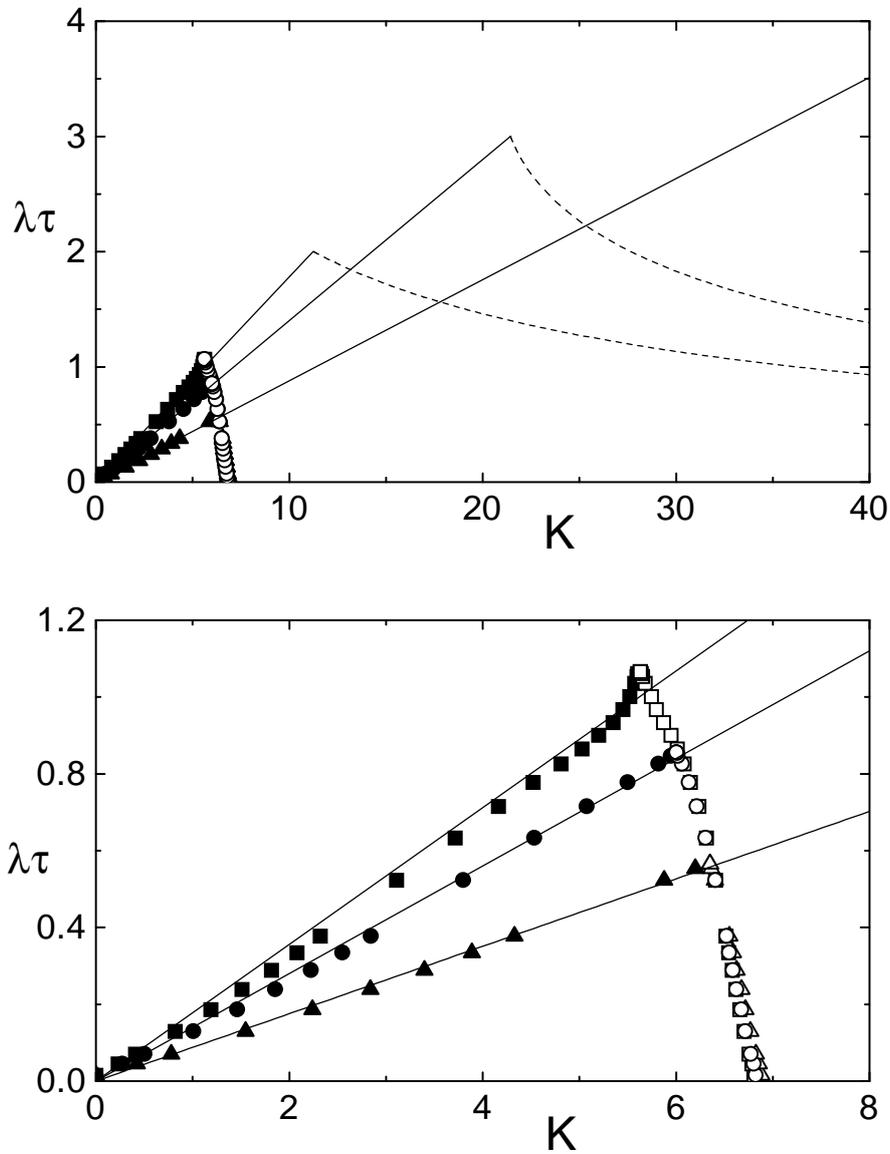


Abb. 3.18: Stabilitätsgrenzen in der K - $\lambda\tau$ Ebene für drei R -Werte: \square 0, \circ 0.2, \triangle 0.8. Gefüllte Symbole entsprechen der unteren Grenze (Flip-Bifurkation), offene Symbole der oberen Grenze (Hopf-Bifurkation). Die durchgezogenen/gestrichelten Linien entsprechen den analytischen Ergebnissen (2.21)/(2.22) mit $(-\tau\chi') = 0.088$ ($R = 0$), $(-\tau\chi') = 0.084$ ($R = 0.2$), $(-\tau\chi') = 0.079$ ($R = 0.8$). Eine Ausschnittsvergrößerung ist im unteren Bild zu sehen.

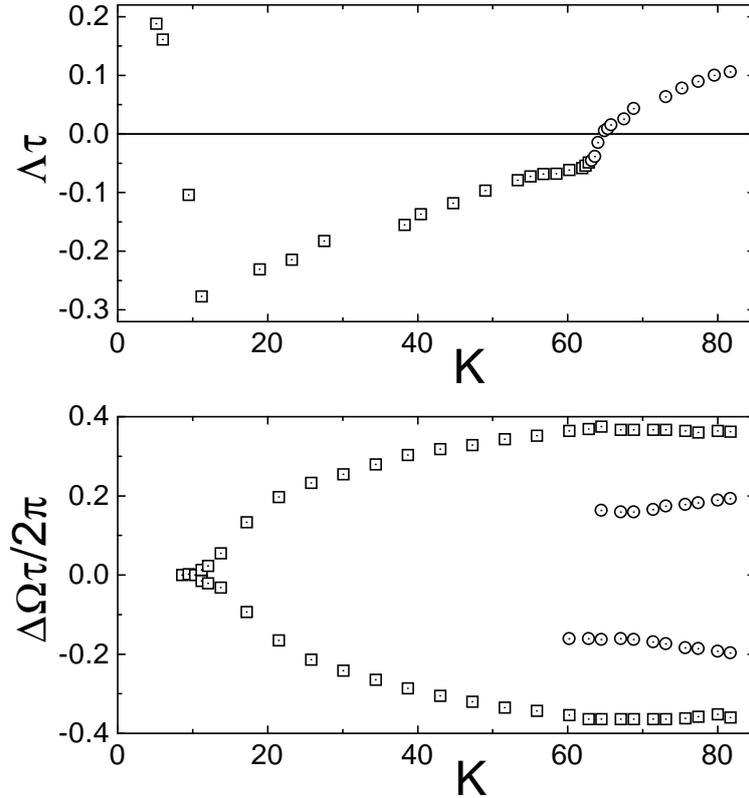


Abb. 3.19: Floquet-Exponent mit größtem Realteil in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude. Quadrate entsprechen dem ursprünglich instabilen Floquet-Zweig, Kreise einem (im Realteil) kreuzenden komplexen Exponent.

genden Beispiel bleibt der ursprünglich instabile Exponent dominant, er alleine bestimmt die Stabilität des Orbits, die Linearisierung (2.15) stellt eine gute Näherung dar.

Wie nachfolgende Beispiele zeigen werden, gibt es jedoch auch Fälle, in denen ursprünglich stabile Floquet-Exponenten die Stabilität des Orbits bestimmen und somit das Kontrollintervall einschränken. Folgende Parameter des Diodenschwingkreises wurden verwendet: $L = 517 \mu\text{H}$, $R_\Omega = 124 \Omega$, $f = 813 \text{ kHz}$, $U_A = 0.7 \text{ V} - 3.2 \text{ V}$. Durch Variation der Treiberamplitude können Periode-1-Orbits mit unterschiedlichen positiven Lyapunov Exponenten realisiert werden. Durchfahren der Kontrollamplitude liefert die untere und obere Schranke des Kontrollintervalls (Abb. 3.18). Ein Vergleich mit dem analytischen Ergebnis (2.15) macht die erhebliche Verkleinerung des Kontrollbereichs sichtbar. Entgegen der linearen Vorhersage ist Kontrolle für $\lambda\tau > 1.1$ nicht mehr möglich. Besonders auffällig ist, dass dieser kritische Wert für das erweiterte Kontrollschema sogar niedriger liegt. Die Verwendung eines hohen Reflexionsparameters R ist demnach nicht immer vorteilhaft.

Um das unerwartete Auftreten der oberen Schranke im Detail zu untersuchen, ist eine

Analyse des Floquet-Spektrums notwendig. Dieses wurde für $L = 470 \mu\text{H}$, $R_\Omega = 127 \Omega$, $f = 813 \text{ kHz}$, $U_A = 1.0 \text{ V}$ aus Transienten des Kontrollsignals gewonnen (vgl. Anhang B) und ist für $R = 0$ in Abbildung 3.19 dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass das Kontrollintervall nicht nur durch den ersten Floquet-Exponenten bestimmt wird. Durch das Kreuzen im Realteil kommt es zu einem neuen dominanten Exponenten.

4. Kontrolle komplexer Spindynamik

In diesem Kapitel wird zunächst auf die makroskopische Beschreibung der Magnetisierung des Spinsystems eingegangen. Dabei wird insbesondere die auftretende Spinwelleninstabilität beschrieben, die den Übergang zum nichtlinearen Verhalten darstellt. Nach der Beschreibung des experimentellen Aufbaus wird die in Yttrium-Eisengranat auftretende komplexe Spindynamik vorgestellt. Es folgt eine Diskussion der bisher in der Literatur veröffentlichten „Chaoskontrollexperimente“ an diesem System. Zum Abschluss werden die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente zur Chaoskontrolle mittels zeitverzögerter Rückkopplung vorgestellt.

4.1. Spinwelleninstabilitäten in Yttrium-Eisengranat

Spinsysteme stellen ergiebige Modellsysteme für das Studium der nichtlinearen Dynamik in realen Experimenten dar. Dies beruht auf den intrinsischen nichtlinearen Wechselwirkungen, die bereits in der grundlegenden Bewegungsgleichung vorhanden sind. Die Entwicklung der makroskopischen Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ in Zeit und Raum ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{r}, t) = -\gamma \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) + \text{Dämpfung} \quad (4.1)$$

mit dem gyromagnetischen Verhältnis γ . Im vorliegenden Fall eines ferromagnetischen Isolators setzt sich das effektive Magnetfeld

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{r}, t) = & \mathbf{H} + \mathbf{h} \cos \omega t + A \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \\ & + D \nabla^2 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) + \nabla \left(\nabla \int d^3 r' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

zusammen aus dem externen symmetriebrechenden statischen Magnetfeld, dem externen treibenden Mikrowellenfeld sowie den internen Feldern, hervorgerufen durch Kristallfeldanisotropie, Austausch- und Dipolarwechselwirkung. Da die internen Felder von der Magnetisierung abhängen, sorgen sie alle für das Auftreten von Nichtlinearitäten. Zur theoretischen Beschreibung der auftretenden Phänomene geht man von der parametrischen Anregung von Spinwellen aus, die durch transversales oder paralleles Pumpen der uniformen Magnetisierung hervorgerufen wird. Sowohl Suhls erste und zweite Instabilität [35] als auch die *'parallel pumping'*-Instabilität [36] basieren auf diesem parametrischen

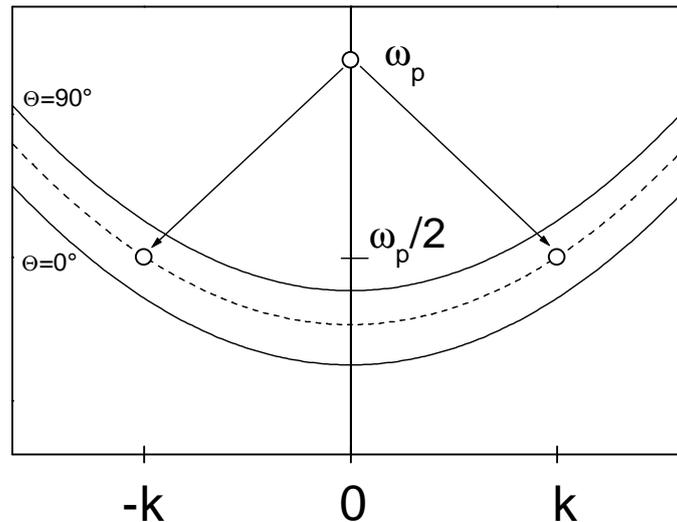


Abb. 4.1: Spinwellenband und Entstehung eines Spinwellenpaares durch Zerfall der homogenen Mode im Rahmen der ersten Suhl-Instabilität.

Prozess, bei dem Spinwellenpaare bei der halben ($\omega_k = \omega_p/2$) oder ganzen ($\omega_k = \omega_p$) Pumpfrequenz angeregt werden. Nichtlineare Beschreibungen der Spindynamik verwenden meist einen störungstheoretischen Ansatz, ausgehend von einem Satz schwach gekoppelter Eigenmoden, deren nichtlineare Kopplung untereinander erst bei großen Amplituden wirksam wird. Geeignete Eigenmoden für Gleichung (4.1) sind die uniforme Mode $\mathbf{m}_0(t) = \mathbf{b}_0 \exp(i\omega_0 t)$, die vom externen Mikrowellenfeld getrieben wird, und nichtuniforme Spinwellen und magnetostatische Moden $\mathbf{m}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t)$, die nicht direkt vom Mikrowellenfeld beeinflusst werden. Entwickelt man die Magnetisierung $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ nach diesen Eigenmoden, so ergibt sich ein Satz gekoppelter Amplitudengleichungen, deren nichtlineare Kopplungen durch Terme höherer Ordnung (*Multimagnonenprozesse*) gegeben sind. Die entstehenden Modelle zeigen zahlreiche experimentell beobachtbare nichtlineare Phänomene wie Bi- und Multistabilitäten, niederfrequente Autooszillationen, Periodenverdopplungen, Quasiperiodizität, Intermittenz und Chaos [37, 38, 39].

An der ersten Suhl-Instabilität [35] werden Spinwellen durch transversales Pumpen der uniformen Mode parametrisch erzeugt. Dabei zerfällt die gepumpte uniforme Mode in zwei Spinwellen mit der halben Pumpfrequenz, $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_p/2$, und entgegengesetzten Wellenvektoren ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$), entsprechend der Erhaltung von Energie und Quasiimpuls (Abb. 4.1). Diese Instabilität kann entweder nichtresonant ($\omega_p \neq \omega_0$) als *subsidiäre Absorption* oder resonant ($\omega_p = \omega_0$) innerhalb des *Koinzidenzbereichs* beobachtet werden. Während in ferromagnetischen Kugeln

$$\omega_0 = \gamma(H + H_a) \quad (4.3)$$

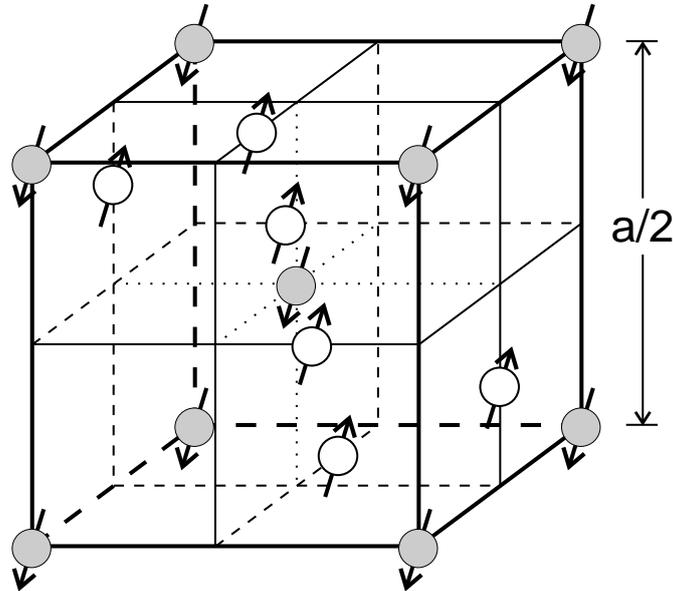


Abb. 4.2: Magnetische Struktur von YIG. Dargestellt sind die Fe^{3+} -Ionen einer achteckigen Einheitszelle.

proportional zum statischen Magnetfeld ist, hängt

$$\omega_{\mathbf{k}} = \gamma \sqrt{(H_i + Dk^2)(H_i + Dk^2 + 4\pi M_S \sin^2 \Theta_{\mathbf{k}})} \quad (4.4)$$

auf kompliziertere Art vom internen Feld $H_i = H + H_a - 4/3 \pi M_S$ wie auch von Betrag und Richtung des Wellenvektors \mathbf{k} ab. Aufgrund der $\Theta_{\mathbf{k}}$ -Abhängigkeit ergibt sich ein ganzes Band von Frequenzen, das so genannte *Spinwellenband* (Abb. 4.1).

Die für Yttrium-Eisengranat wichtigsten Größen sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

$\gamma = 2\pi \cdot 2.798 \text{ MHz/Oe}$	gyromagnetisches Verhältnis
$\Delta H < 1 \text{ Oe}$	Linienbreite (300 K)
$4\pi M_S = 1760 \text{ Oe}$	Sättigungsmagnetisierung (300 K)
$D = 4.48 \cdot 10^{-9} \text{ Oe cm}^2$	Spinwellensteifigkeit
$T_c = 559 \text{ K}$	Ordnungstemperatur
$H_a = -57 \text{ Oe}$	schwache kubische Kristallfeldanisotropie (in $\langle 111 \rangle$ -Richtung)

Tab. 4.1: Überblick über wichtige Größen bei Resonanzexperimenten an Yttrium-Eisengranat-Kugeln.

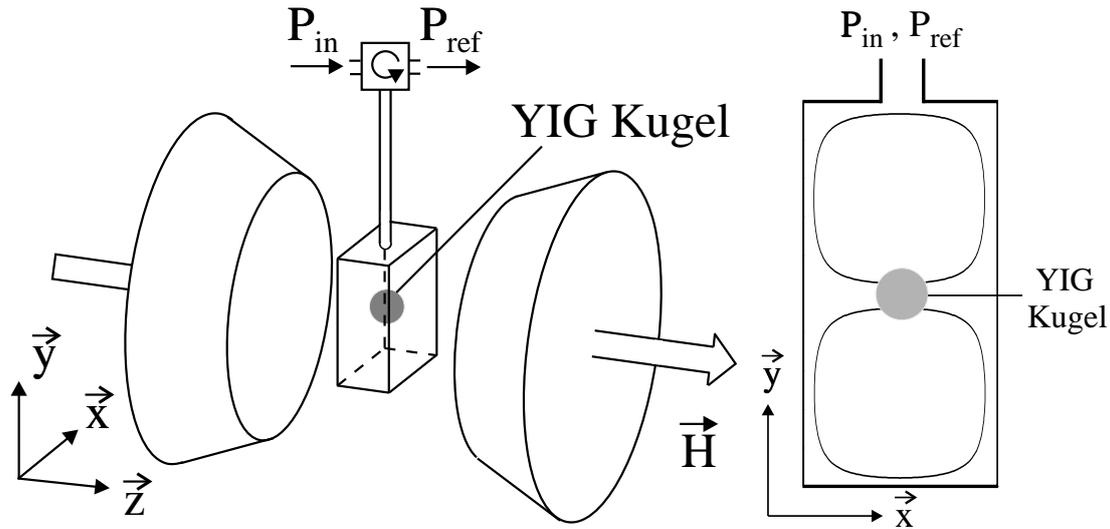


Abb. 4.3: YIG-Probe im Magnetfeld. Der Schnitt durch den Resonator zeigt die magnetische Komponente der Mikrowellenmode für Anregung und Nachweis der Spinwellen.

4.2. Experimenteller Aufbau

Yttrium-Eisengranat (YIG) gilt als Standardferromagnet für die Untersuchung nichtlinearer Spindynamik. Genau genommen ist YIG ein ferrimagnetischer Isolator mit kubischer Symmetrie, dessen Einheitszelle acht Formeleinheiten $Y_3Fe_5O_{12}$ besitzt. Die magnetischen Fe^{3+} -Ionen (${}^6S_{5/2}$) bilden zwei Untergitter mit jeweils 2 bzw. 3 Fe^{3+} -Ionen pro achtel Einheitszelle (Abb. 4.2). Die Kopplung innerhalb der Untergitter ist ferromagnetisch, die zwischen den Untergittern antiferromagnetisch. Somit entsteht pro Formeleinheit eine ferromagnetische Gesamtmagnetisierung von $5 \mu_B$. Diese wird im statischen Magnetfeld ausgerichtet und durch ein transversales Mikrowellenfeld angeregt. Bei den verwendeten niedrigen Anregungsfrequenzen um 9.4 GHz treten keine antiferromagnetischen Moden auf, YIG verhält sich ferromagnetisch. Aufgrund seiner hohen Ordnungstemperatur von $T_c = 559$ K ist der Kristall bei Raumtemperatur magnetisch geordnet. Somit können dort auch die Resonanzexperimente durchgeführt werden. Experimentell sehr entscheidend ist die geringe Dämpfung in YIG. So besitzen hochwertige Proben eine Linienbreite von etwa 0.4 Oe, woraus sich äußerst niedrige Schwellen für die Spinwelleninstabilitäten ergeben. Experimente mit resonanter Anregung können beispielsweise mit einem Standard-ESR-Spektrometer durchgeführt werden.

Die Experimente, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, fanden im Bereich der *subsidiären Absorption* und der *'parallel pumping'*-Instabilität statt. Bei den zugrunde liegenden nichtresonanten Anregungen steigt die Instabilitätsschwelle stark an. Daher wird der Einsatz eines dem Sender nachgeschalteten Leistungsverstärkers

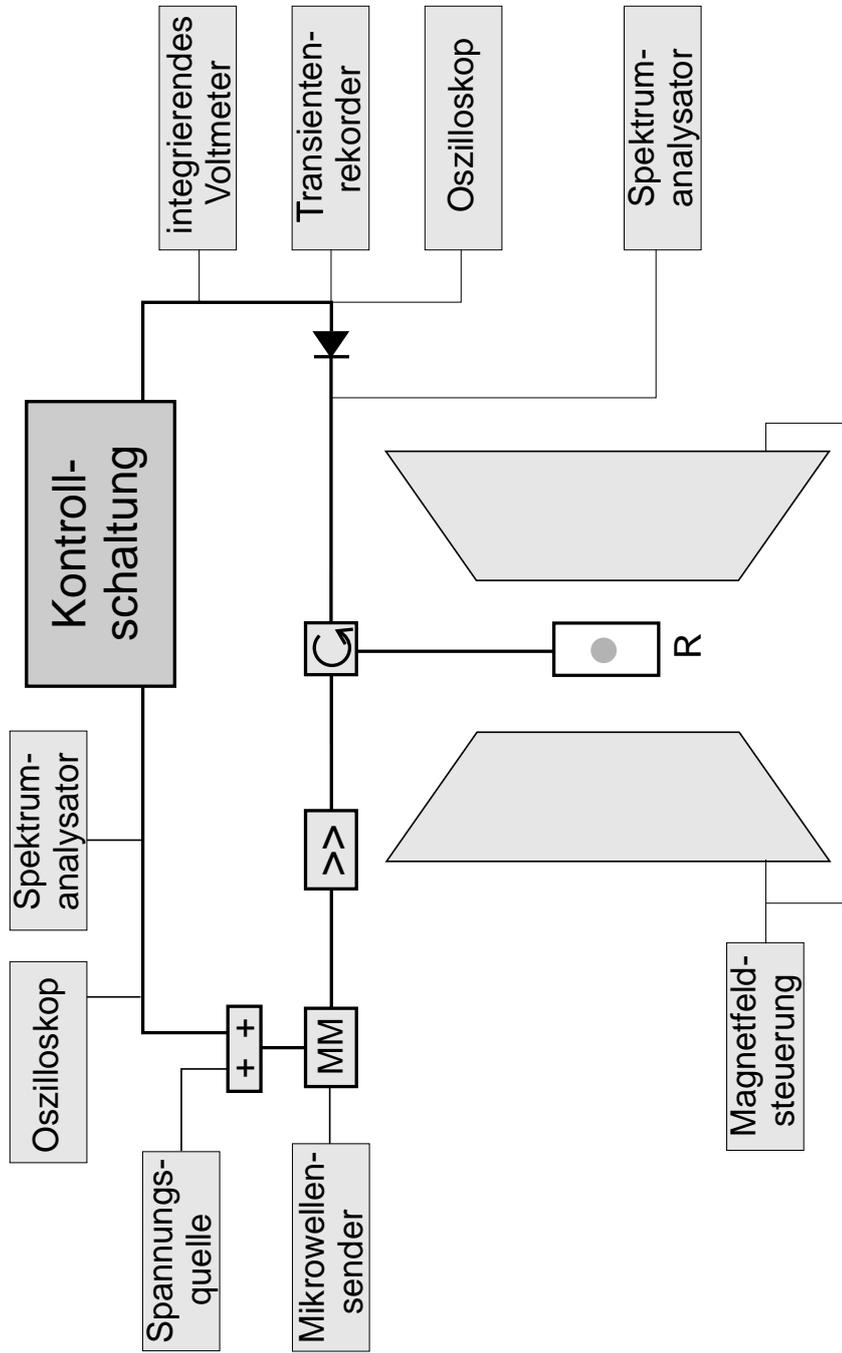


Abb. 4.4: Experimenteller Aufbau für die Untersuchung und Kontrolle chaotischer Spindynamik in YIG-Kugeln.
 MM: Mikrowellenmodulator, R: Resonator mit Probe, weitere Beschreibung im Text.

(20 Watt) und eines Mikrowellenresonators (Güte 2000) erforderlich (Abb. 4.3). Die vom Resonator reflektierte Leistung kann direkt mit einem Spektrumanalysator ausgewertet werden. Zudem wird die an der Nachweisdiode abfallende Spannung mit einem Oszilloskop dargestellt, gegebenenfalls mit einem integrierendem Voltmeter gemittelt und einem Transientenrekorder abgespeichert (Abb. 4.4). Dabei standen Abtastraten bis zu 500 Millionen Punkte/s und eine Vertikalaufösung bis zu 12 Bit zur Verfügung. Die Messungen fanden bei Raumtemperatur statt. Verwendet wurde eine Kugel aus reinem Yttrium-Eisengranat mit 0.7 mm Durchmesser, die in $\langle 111 \rangle$ -Richtung zum statischen Magnetfeld orientiert war.

Als Messsignal für die Erzeugung der Kontrollkraft dient die an der Nachweisdiode abfallende Spannung (Abb. 4.4). Die Rückkopplung erfolgt über eine Amplitudenmodulation der anregenden Mikrowelle. Damit der Modulator überhaupt ein Signal durchlässt, muss eine Vorspannung angelegt werden. Zur Überprüfung des Kontrolleingriffs wird das Kontrollsignal per Oszilloskop und Spektrumanalysator dargestellt.

4.3. Systemverhalten

Die *subsidiäre Absorption* zeigt sich als zusätzliche Absorptionsstruktur im ferromagnetischen Resonanzspektrum unterhalb der Hauptresonanz. Mit steigender Mikrowellenleistung kommt es zu einer starken Verbreiterung, die vom Auftreten von Autooszillationen und weiteren Bifurkationen begleitet wird. Bedingt durch die Verwendung eines Resonators stehen als wesentliche externe Systemparameter nur die Mikrowellenleistung P_{in} und das statische Magnetfeld H zur Verfügung. In Abhängigkeit von diesen beiden Größen kommt es zu einer Vielzahl nichtlinearer Phänomene (Abb. 4.5).

Die untere Linie zeigt die Abhängigkeit der Suhl-Schwelle vom Magnetfeld, die so genannte *butterfly*-Kurve. Im Folgenden wird die Mikrowellenleistung P_{in} auf den niedrigsten Schwellenwert normiert. Bei hohen Feldern kommt es zum steilen Anstieg der Schwelle. Die halbe Pumpfrequenz fällt unter das Spinwellenband, eine parametrische Anregung von Spinwellen im Rahmen der ersten Suhl-Instabilität ist nicht mehr möglich. Hervorgerufen durch eine Hopf-Bifurkation, zeigen sich Autooszillationen mit Frequenzen zwischen 200 kHz und 2 MHz. Diese Frequenzen liegen etwa vier Größenordnungen unterhalb der treibenden Mikrowelle. Bei höheren Leistungen treten unterschiedliche Routen ins Chaos auf: Periodenverdopplungen, Quasiperiodizität, sowie Intermittenz.

Entgegen früheren Untersuchungen [40, 41] wurde bei der verwendeten YIG-Probe keine vollständige Periodenverdopplungskaskade ins Chaos beobachtet. Vielmehr kommt es häufig nur zu einer einzigen Verdopplung. Ausgehend von Periode-1 oder Periode-2-Oszillationen führt eine anschließende Hopf-Bifurkation zu quasiperiodischer Dynamik, die teilweise durch eine weitere Bifurkation in chaotisches Zeitverhalten übergeht. Es treten aber auch intermittente Übergänge ins Chaos auf. Einen Überblick über die verschiedenen Intermittenz-Typen, die bei Spinwelleninstabilitäten auftreten, liefern [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]. Ein intermittenter Übergang vom Typ III konnte für die erst-

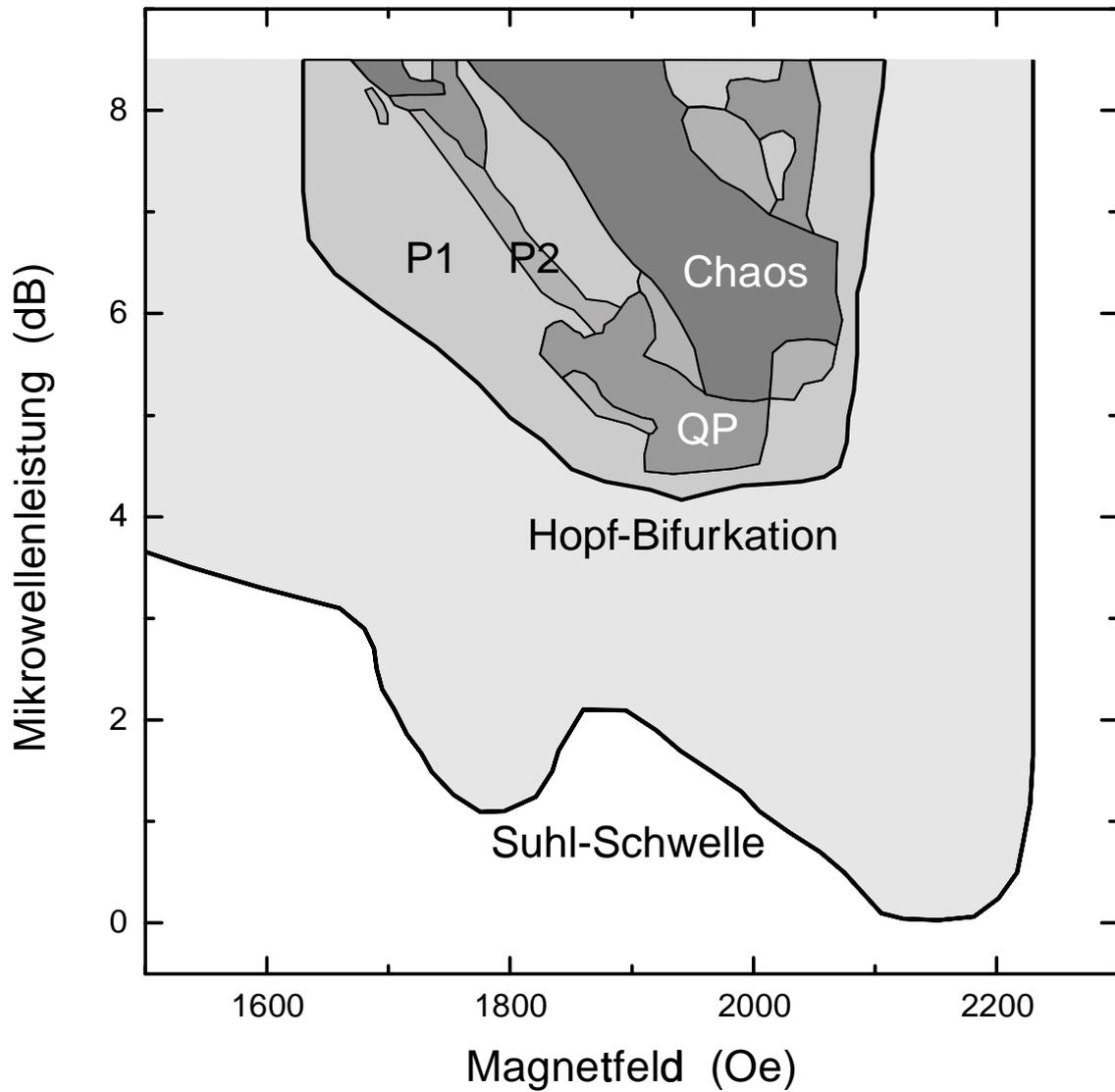


Abb. 4.5: Dynamisches Systemverhalten bei subsidiärer Absorption im zweidimensionalen Systemparameterraum aus statischem Magnetfeld und Mikrowellenleistung. Oberhalb der Hopf-Bifurkation kommt es zu Periode-1 (P1), Periode-2 (P2), quasiperiodischem (QP) und chaotischem (Chaos) Zeitverhalten. Gleiche Grauwerte entsprechen gleicher Dynamik.

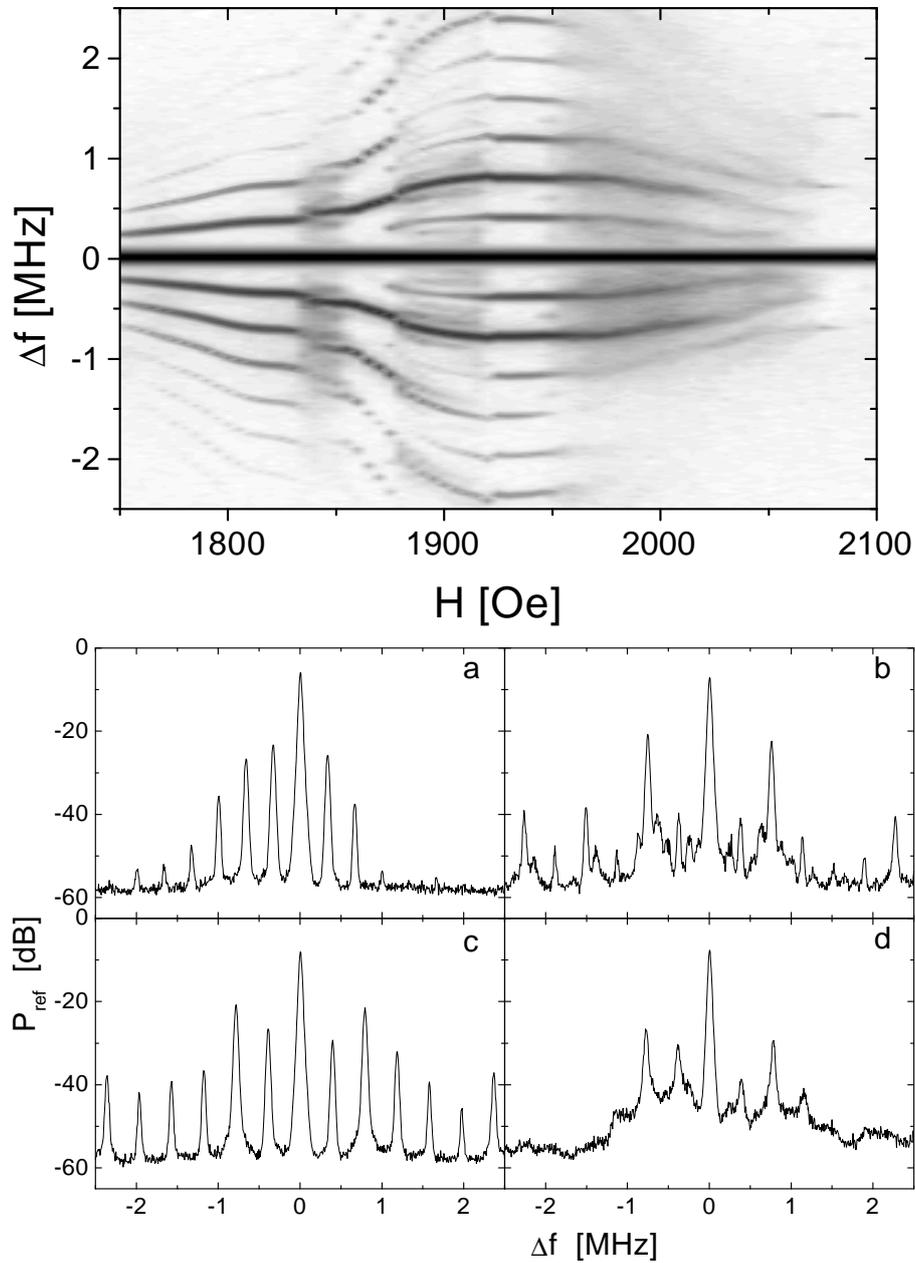


Abb. 4.6: Leistungsspektren bei subsidiärer Absorption für $P_{in} = 5.8$ dB in Abhängigkeit vom statischem Magnetfeld. Oben: Graustufendarstellung (weiß: -60 dB, schwarz: -10 dB); unten: Einzelspektren. (a) Periode-1 bei 1795 Oe, (b) Quasiperiodizität bei 1895 Oe, (c) Periode-2 bei 1920 Oe, (d) Chaos bei 1970 Oe).

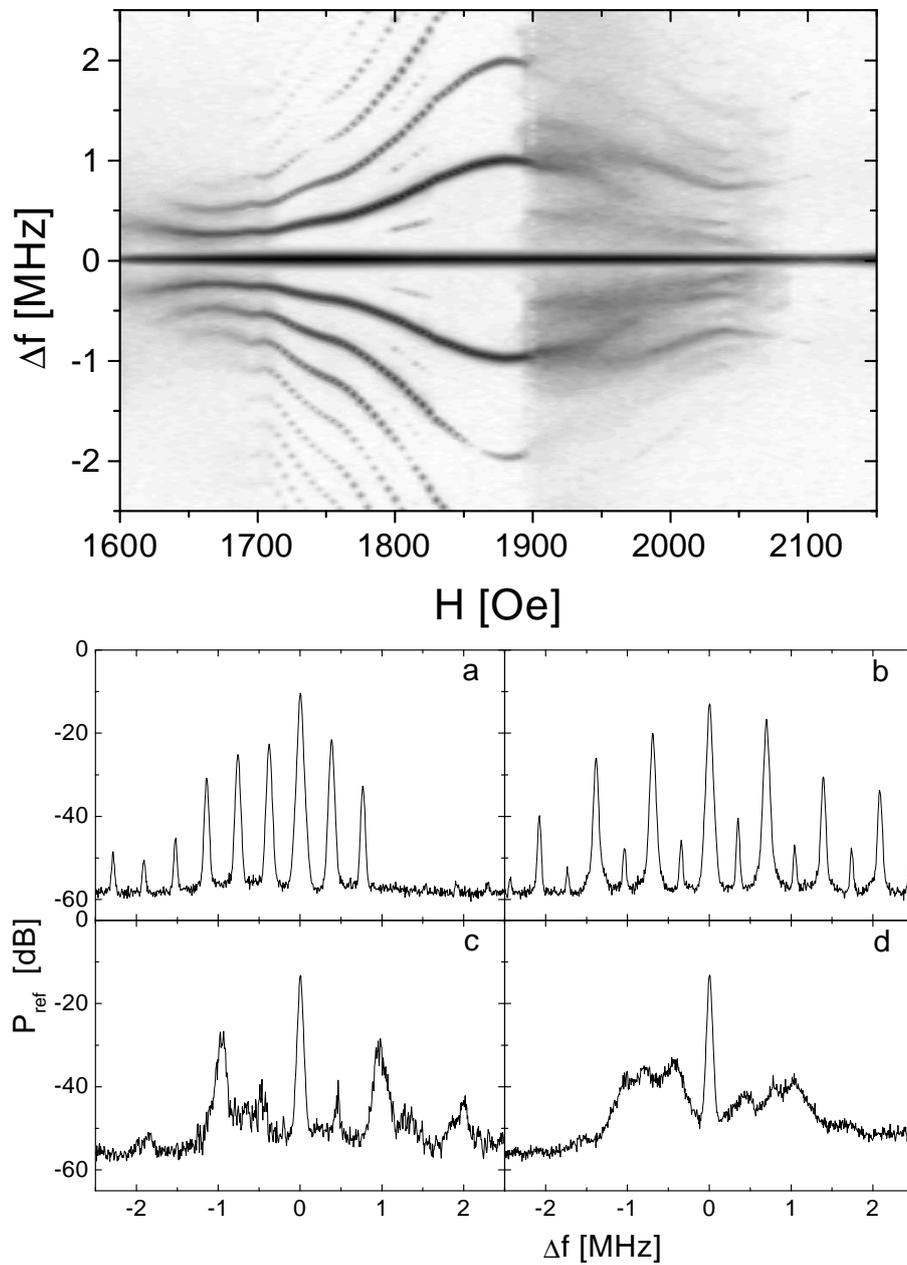


Abb. 4.7: Leistungsspektren bei subsidiärer Absorption für $P_{in} = 6.6$ dB in Abhängigkeit vom statischem Magnetfeld. Oben: Graustufendarstellung (weiß: -60 dB, schwarz: -10 dB); unten: Einzelspektren. (a) Periode-1 bei 1745 Oe, (b) Periode-2 bei 1815 Oe, (c) Intermittenz bei 1900 Oe, (d) Chaos bei 1950 Oe.

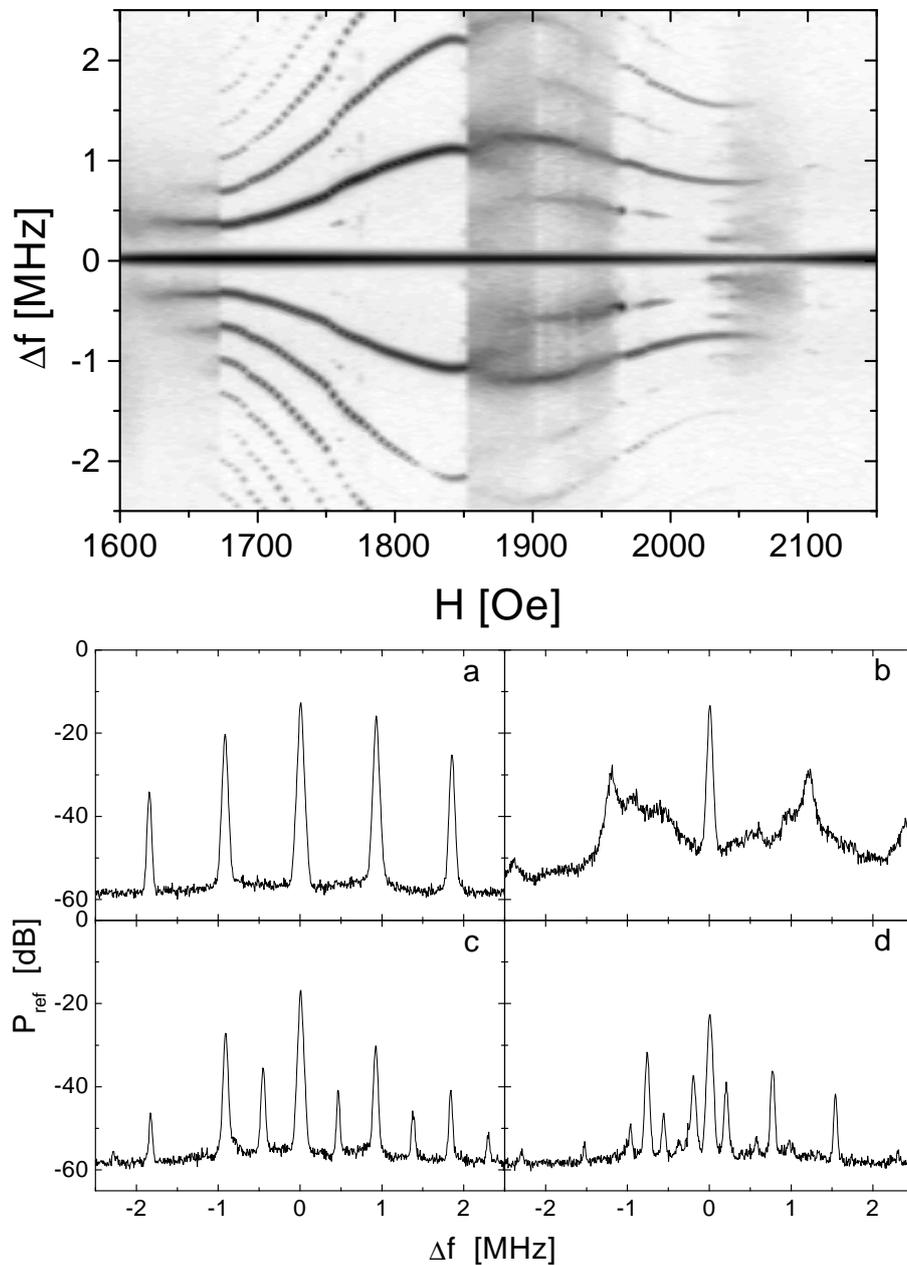


Abb. 4.8: Leistungsspektren bei subsidiärer Absorption für $P_{in} = 7.4$ dB in Abhängigkeit vom statischem Magnetfeld. Oben: Graustufendarstellung (weiß: -60 dB, schwarz: -10 dB); unten: Einzelspektren. (a) Periode-1 bei 1795 Oe, (b) Chaos bei 1880 Oe, (c) Periode-2 bei 1980 Oe, (d) Quasiperiodizität bei 2030 Oe.

malige experimentelle Realisierung von stochastischer Resonanz bei chaotischer Dynamik genutzt werden [49, 50, 51]. Dabei wurde anstelle externen Rauschens die intrinsische chaotische Dynamik des Systems ausgenutzt, um Übergänge zwischen regulärem und irregulärem Zeitverhalten zu induzieren.

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Bifurkationen und der dadurch hervorgerufenen Systemdynamiken wurden für mehrere Anregungsamplituden P_{in} Leistungsspektren aufgenommen. Diese sind jeweils in Abhängigkeit vom statischen Magnetfeld als zweidimensionale Graustufen-Frequenzlandschaften in den Abbildungen 4.6 – 4.8 dargestellt. Die Zentrallinie ($\Delta f = 0$ MHz) entspricht der anregenden Mikrowelle ($\omega_p = 2\pi \cdot 9.4$ GHz), die dunklen Streifen Seitenbändern, die im Zeitverhalten als Autooszillationen sichtbar werden. Zusätzlich zu den Frequenzlandschaften sind jeweils vier Spektren zu ausgewählten Magnetfeldwerten abgebildet. In Abbildung 4.6 erkennt man Periode-1, quasiperiodisches, Periode-2 und chaotisches Zeitverhalten. Für $P_{in} = 6.6$ dB (vgl. Abb. 4.7) sind Spektren zu Periode-1, Periode-2, intermittentem und chaotischem Zeitverhalten dargestellt. Zur Charakterisierung von Intermittenz sind Spektren aus langen Zeitreihen (viele Übergänge zwischen regulärem und irregulärem Systemverhalten) nicht geeignet. Man erhält eine Mittelung aus Linienspektren (reguläres Zeitverhalten) und breitbandigen Spektren (irreguläres Zeitverhalten). Diese Zusammensetzung lässt sich für $P_{in} = 6.6$ dB und $H = 1900$ Oe durchaus erraten. Die Einzelspektren in Abbildung 4.8 stellen Periode-1, chaotische, Periode-2 und quasiperiodische Oszillationen dar.

Anhand der drei Frequenzlandschaften wird deutlich, dass die Autooszillationsfrequenz stark vom statischen Magnetfeld und von der Mikrowellenleistung abhängt. Dies erschwert das exakte Einstellen der Verzögerungszeit für Kontrollzwecke. Untersuchungen von Rödelsperger [46] ergaben eine Dimension von $D_2 \approx 2.1$ für die sich ausbildenden chaotischen Attraktoren. Es kommt offenbar zur Versklavung der großen Anzahl interner Freiheitsgrade, marginales Chaos bildet sich aus. Die Bestimmung des größten globalen Lyapunov-Exponenten ergibt $\lambda_1 \approx 0.04$ (μs)⁻¹ [52]. Dieser ist nicht identisch mit den Lyapunov-Exponenten der instabilen Orbits, sondern stellt eine gewichtete Mittelung dar. Als erste grobe Abschätzung kann dieser Wert jedoch verwendet werden. Bei typischen Periodendauern von $T \approx 2$ μs erhält man somit $\lambda T \approx 0.08$. Die Instabilität ist folglich nicht so stark, dass eine erfolgreiche Kontrolle mittels zeitverzögerter Rückkopplung von vornherein auszuschließen wäre.

Bei der 'parallel pumping'-Instabilität werden ebenfalls Spinwellenpaare bei der halben Pumpfrequenz ($\omega_{\mathbf{k}} = \omega_p/2$) und entgegengesetzten Wellenvektoren ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) angeregt (Abb. 4.1). Im Gegensatz zur Suhl-Instabilität erfolgt ihre Ankopplung an die treibende Mikrowelle nicht über den Umweg der homogenen Mode, sondern direkt über die periodische Änderung der Magnetisierungskomponente in Feldrichtung. Dies führt zu einer veränderten Instabilitätsschwelle (Abb. 4.9). Oberhalb der Schwelle führt eine Hopf-Bifurkation zum Auftreten von Autooszillationen, die über verschiedene Routen ins Chaos übergehen. Die Dynamik ähnelt stark dem Systemverhalten bei subsidiärer Absorption. Detaillierte Untersuchungen in einem umfangreichen Parameterbereich wurden

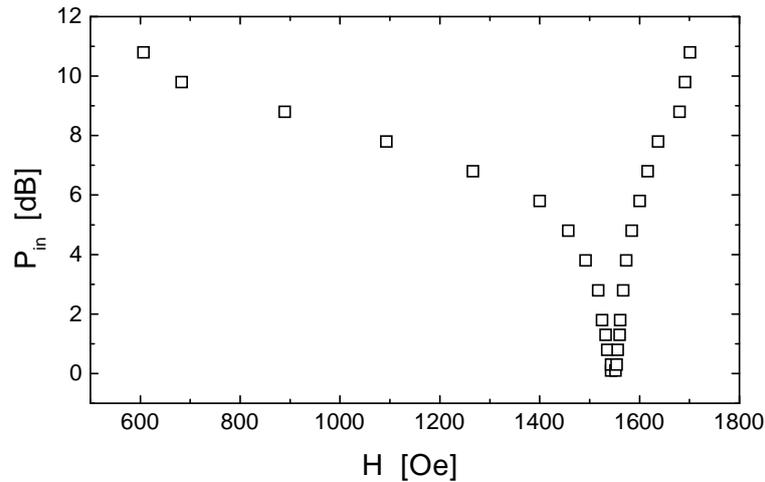


Abb. 4.9: Abhängigkeit der 'parallel pumping'-Instabilitätsschwelle vom statischen Magnetfeld. Die Mikrowellenleistung ist auf den niedrigsten Schwellenwert normiert.

im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt. Der interessierte Leser sei auf die Literatur verwiesen [39, 38, 53].

4.4. Kontrollexperimente

Erste Untersuchungen zur „Kontrolle“ chaotischer Spindynamik wurden bereits unmittelbar nach Erscheinen der Pionierarbeit von Ott, Grebogi und Yorke [1] durchgeführt. Einige Arbeiten sollten jedoch eher der Kategorie „Chaosunterdrückung“ zugeordnet werden, da nicht immer instabile Zustände stabilisiert werden. Vor der Präsentation eigener Ergebnisse wird ein kritischer Überblick über bisherige Experimente gegeben.

4.4.1. Stand der Forschung

Zur Unterdrückung chaotischer Dynamik verwenden Azevedo und Rezende [54] eine Methode, die nicht auf der Rückkopplung einer Messgröße beruht. Stattdessen wird ein Systemparameter periodisch moduliert [55]. In Abhängigkeit von Modulationsfrequenz und -amplitude erhalten sie mehrere Arnold-Zungen mit periodischem Zeitverhalten. Für unterschiedliche Modulationsformen²(Sinus, Rechteck, Puls) besitzen die periodischen Zustände verschiedene Gestalt. Diese induzierten Orbits entsprechen nicht den instabilen Bahnen des freien Systems. Leider bringen die Autoren ihre interessanten Ergebnisse mit der Methode von Ott, Grebogi und Yorke in Verbindung.

²Der Einfluss der Modulationsform auf die Unterdrückung von Chaos wurde in [56] im Detail untersucht.

Von Hunt [2] wurde eine Variante der Kontrollmethode nach Ott, Grebogi und Yorke entwickelt, die als *occasional proportional feedback* in die Literatur eingegangen ist. Dieses speziell für nichtautonome Systeme geeignete Schema koppelt die Differenz zwischen Messgröße und Referenzzustand auf das System zurück, sofern bei fester Phase des Treibers das Messsignal in einem definierten Fenster liegt. Diese Methode wurde von Henn [4] für autonome Systeme erweitert. Zur Definition des benötigten Fensters in einem dreidimensionalen Phasenraum wird neben dem Messsignal dessen erste und zweite Ableitung verwendet. Dieses Schema wurde als selbstgebaute Anlogschaltung in die Praxis umgesetzt und erfolgreich zur Kontrolle chaotischer Spindynamik eingesetzt [57, 4, 58].

Unterdrückung von Spinwellenchaos gelang Rödelsperger durch *schnelle* (im Vergleich zur Systemdynamik) parametrische Modulation [46]. Dies bewirkt eine effektive Verkleinerung des modulierten Systemparameters [59, 60]. Auch hier entsprechen die induzierten Orbits nicht den instabilen Bahnen des freien Systems. Im Gegensatz zur *resonanten* parametrischen Modulation [55] werden große Modulationsamplituden benötigt.

Wigen und Mitarbeiter haben mehrere Methoden eingesetzt, um in YIG-Filmen chaotische Spindynamik zu unterdrücken. Ihr *'open loop'*-Schema entspricht der resonanten parametrischen Modulation zur Induzierung periodischer Orbits [61]. Bei ihrer *'closed loop'*-Methode wird das Messsignal (Spannung an der Nachweisdiode) auf einen Systemparameter (statisches Magnetfeld) rückgekoppelt [61]. Dadurch können sie die Spindynamik in einen nichttrivialen stationären Zustand überführen. Die Rückkopplung der so erhaltenen Gleichspannung entspricht einer Verschiebung des statischen Magnetfeldes in einen Bereich, in dem stationäres Zeitverhalten stabil ist. Als weiteres *'closed loop'*-Schema verwenden diese Autoren die zeitverzögerte Rückkopplungsmethode in einer deutlich abgewandelten Version [62, 63]. Sie bilden die Differenz zwischen verzögertem Messsignal und dessen Gleichspannungsanteil. Vor Erreichen des angestrebten Fixpunktes beobachten sie eine Reihe periodischer Zustände. Aufgrund der Konstruktion des Kontrollsignals können diese aber keine instabilen Lösungen des freien Systems darstellen, auch wenn die Abweichungen zuweilen klein sind.

Da Bernard [14] die Kontrolle chaotischer Spindynamik nach der Pyragas-Methode nicht gelang, wandelte er dieses Kontrollschema ab. Er führte einen Gewichtungsfaktor ϵ für den verzögerten Teil des Kontrollsignals ein. Mit $\epsilon = 0.8$ konnte er periodische Zustände stabilisieren, die auch hier nicht den instabilen Lösungen des freien Systems entsprechen. Das letztendlich periodische Kontrollsignal sorgt für eine Parametermodulation ähnlich der resonanten parametrischen Modulation [55].

4.4.2. Experimentelle Ergebnisse

Am Anfang standen Überlegungen, wie sich das oben diskutierte Kontrollschema beim vorliegenden Experiment möglichst effektiv technisch umsetzen lässt. Die am Resonator reflektierte Mikrowellenleistung wird mit Hilfe einer Nachweisdiode gleichgerichtet. Dieses Signal dient als Messgröße zur Konstruktion der Kontrollkraft. Die Rückkopplung

kann auf drei Arten erfolgen: durch Modulation des statischen Magnetfeldes, der Mikrowellenamplitude oder -frequenz. Eine Magnetfeldmodulation ist bei den benötigten Frequenzen aufgrund der hohen Dämpfungsverluste in den Resonatorwänden wenig praktikabel. Die Modulation von Amplitude und Frequenz können als eingebaute Funktionen des verwendeten Mikrowellengenerator umgesetzt werden. Diese Umsetzung der Modulation im Generator ist jedoch sehr langsam. Für den kompletten Aufbau ergab sich eine Reglernachlaufzeit von $\delta = 1.8 \mu\text{s}$. Bei typischen Oszillationsdauern im μs -Bereich ist dieser Wert unerwünscht hoch. Durch die Verwendung eines externen Amplitudenmodulators konnte die Reglernachlaufzeit auf $\delta = 0.2 \mu\text{s}$ gesenkt werden. Der experimentelle Aufbau mit Rückkopplungszweig ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die dick eingezeichneten Kabel und dick umrandeten Geräte sind Bauteile, die zur Reglernachlaufzeit beitragen. Bei allen folgenden Experimenten wurde dementsprechend eine Amplitudenmodulation der anregenden Mikrowelle für die Rückkopplung verwendet. Dies entspricht einer direkten Kraft auf die uniforme Mode an Stelle der oft benutzten parametrischen Rückkopplung. Bei den hier beschriebenen Kontrollexperimenten wurde ausschließlich das einfache Rückkopplungsschema ($R = 0$) verwendet. Erläuterungen hierzu werden weiter unten gegeben.

Unterdrückung einer stabilen Periode-2-Oszillation

Das erste Kontrollexperiment [64, 65] wurde im Bereich der 'parallel pumping'-Instabilität durchgeführt. Zur besseren Beurteilung des Systemverhaltens unter Kontrolleinfluss wurde als Ausgangspunkt zunächst ein stabiler Periode-2-Zustand ausgewählt (Abbn. 4.10, 4.11, $K = 0$). Dieser ging aus einer Periodenverdopplung hervor und lässt somit einen instabilen Periode-1-Orbit mit flippender Nachbarschaft zurück ($\omega = \pi/T$). Dieser instabile Orbit sollte stabilisiert werden. Entsprechend der Position des sehr scharfen, dominanten Peaks im Spektrum, wurde eine Verzögerungszeit von $\tau = 2.09 \mu\text{s}$ eingestellt. Einschalten der Rückkopplung und Erhöhen der Kontrollamplitude führt zur Unterdrückung der Periode-2-Komponente, bis schließlich der gewünschte Orbit stabilisiert ist (Abbn. 4.10, 4.11, $K = 0.2$). Das Abfallen des Kontrollsignals unter das Rauschniveau gilt als Indiz für erfolgreiche Kontrolle. Durch weiteres Erhöhen der Kontrollamplitude verliert der Orbit seine Stabilität. Eine Hopf-Bifurkation führt zu einem zusätzlichen breiten Peak bei 1.53 MHz (Abbn. 4.10, 4.11, $K = 0.5$). Die Entstehung des quasiperiodischen Verhaltens wird vom Aufweiten des Torus begleitet. Qualitativ gleicht das beobachtete Verhalten den theoretischen Vorhersagen. Das Kontrollintervall wird beschränkt durch eine Flip-Bifurkation bei kleinen K -Werten und durch eine Hopf-Bifurkation bei großen K -Werten. Da der Realteil des Floquet-Exponenten im Bereich des oberen kritischen Wertes eine relativ geringe Steigung besitzt (vgl. Abbn. 2.2, 3.7) und im experimentellen System immer ein gewisser Rauschanteil vorhanden ist, kündigt sich die bevorstehende Hopf-Instabilität bereits vorzeitig im Spektrum an. Ein solches Verhalten wurde im vorliegenden Experiment jedoch nicht beobachtet, stattdessen erfolgte die Destabilisierung des kontrollierten Orbits relativ abrupt. Dieses Phänomen

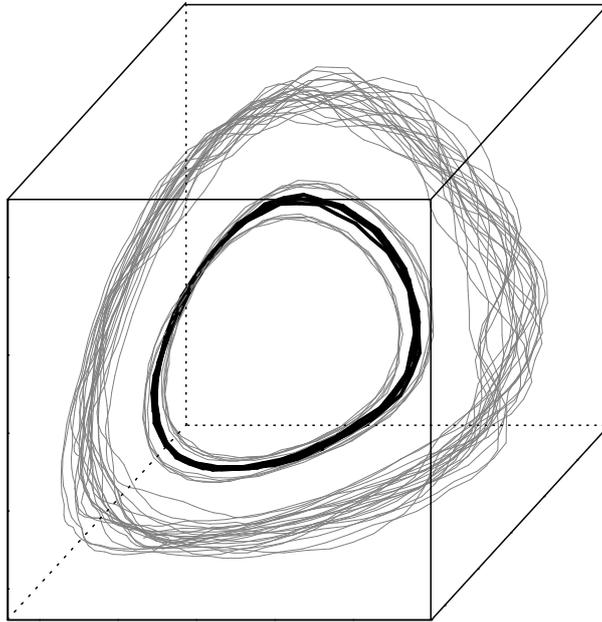


Abb. 4.10: Unterdrückung stabiler Periode-2-Oszillation ('parallel pumping', $f = 9.4$ GHz, $P_{in} = 13.3$ dB, $H = 1613$ Oe). Der stabilisierte Periode-1-Orbit ($K = 0.2$, schwarz) liegt in der Nähe des Periode-2-Ausgangsorbis ($K = 0$). Der rückkopplungsinduzierte Torus ($K = 0.5$) wird für große K -Werte aufgeweitet.

konnte im Nachhinein auf das Kreuzen im Realteil des ursprünglich dominanten Floquet-Zweiges mit einem stabilen Exponenten zurückgeführt werden (vgl. Abb. 3.19).

Detaillierte Analyse

Um das beobachtete Verhalten erklären zu können, wurden detaillierte Untersuchungen im Bereich der subsidiären Absorption durchgeführt. In Abhängigkeit von der Kontrollamplitude wurden Leistungsspektren aufgenommen, die als zweidimensionale Graustufenendarstellung in Abbildung 4.12 zu sehen sind. Auch hier entspricht $\Delta f = 0$ wieder der anregenden Mikrowelle ($f = 9.4$ GHz), die dunklen Streifen stellen Seitenbänder dar, die im Zeitverhalten als Autooszillationen sichtbar werden. Zusätzlich zur Frequenzlandschaft sind vier Spektren zu ausgewählten Kontrollamplituden abgebildet. Ausgangspunkt ist wiederum ein stabiler Periode-2-Orbit (Abb. 4.12, $K = 0$). Entsprechend der Position des dominanten Peaks im Spektrum, wurde eine Verzögerungszeit von $\tau = 1.54 \mu\text{s}$ eingestellt. Einschalten der Rückkopplung und Erhöhen der Kontrollamplitude führt zur Absenkung der Periode-2-Komponente (Abb. 4.12, $K \neq 0$). Bevor es zur Aufspaltung dieses Floquet-Exponenten kommt (vgl. Abbn. 2.2, 3.6, 3.7), treten bereits Seitenbänder um die vorhandenen Peaks im Spektrum auf (Abb. 4.12, $K > 1.0$).

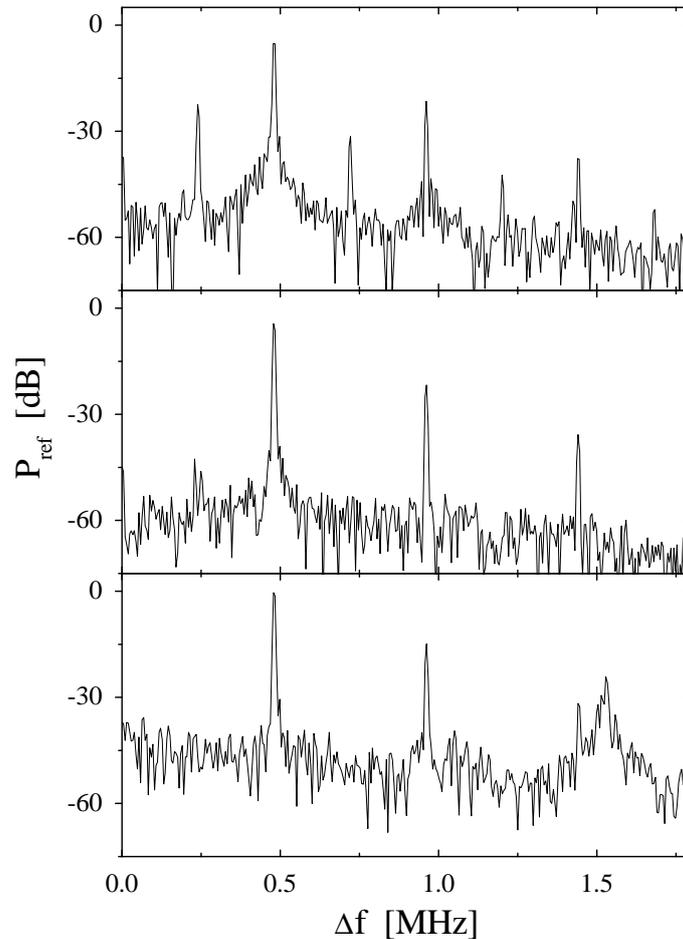


Abb. 4.11: Spektren zur in Abbildung 4.10 dargestellten Phasenraumdynamik. Von oben nach unten: stabiler Periode-2-Orbit ($K = 0$), kontrollierter Periode-1-Orbit ($K = 0.2$), rückkopplungsinduzierte Quasiperiodizität ($K = 0.5$).

Der zugehörige Floquet-Exponent wird bei Erhöhen der Kontrollamplitude dominant und sorgt somit dafür, dass der angestrebte Periode-1-Orbit nicht stabilisiert werden kann. Daher ist es hier nicht möglich, die im Anhang B beschriebenen Methoden zur Bestimmung der Floquet-Exponenten einzusetzen. Stattdessen sind in Abbildung 4.13 die Intensitäten des Periode-2-Peaks (340 kHz), des sich ausbildenden Hopf-Peaks (730 kHz) sowie seiner ersten Oberwelle dargestellt. Es ist deutlich sichtbar, dass der den Hopf-Peaks zugehörige Floquet-Exponent dominant wird und die Stabilisierung des Periode-1-Orbits verhindert. Es ist also nicht die Instabilität des Orbits oder dessen Länge, d.h. ein hoher $\lambda\tau$ -Wert, sondern das Kreuzen im Realteil der Floquet-Exponenten für das Ausbleiben der Kontrolle verantwortlich.

Im vorangehenden Kontrollexperiment ist es ebenfalls dieses Phänomen, das für die abrupte Destabilisierung sorgt. Dort existierte jedoch ein Kontrollamplitudenintervall,

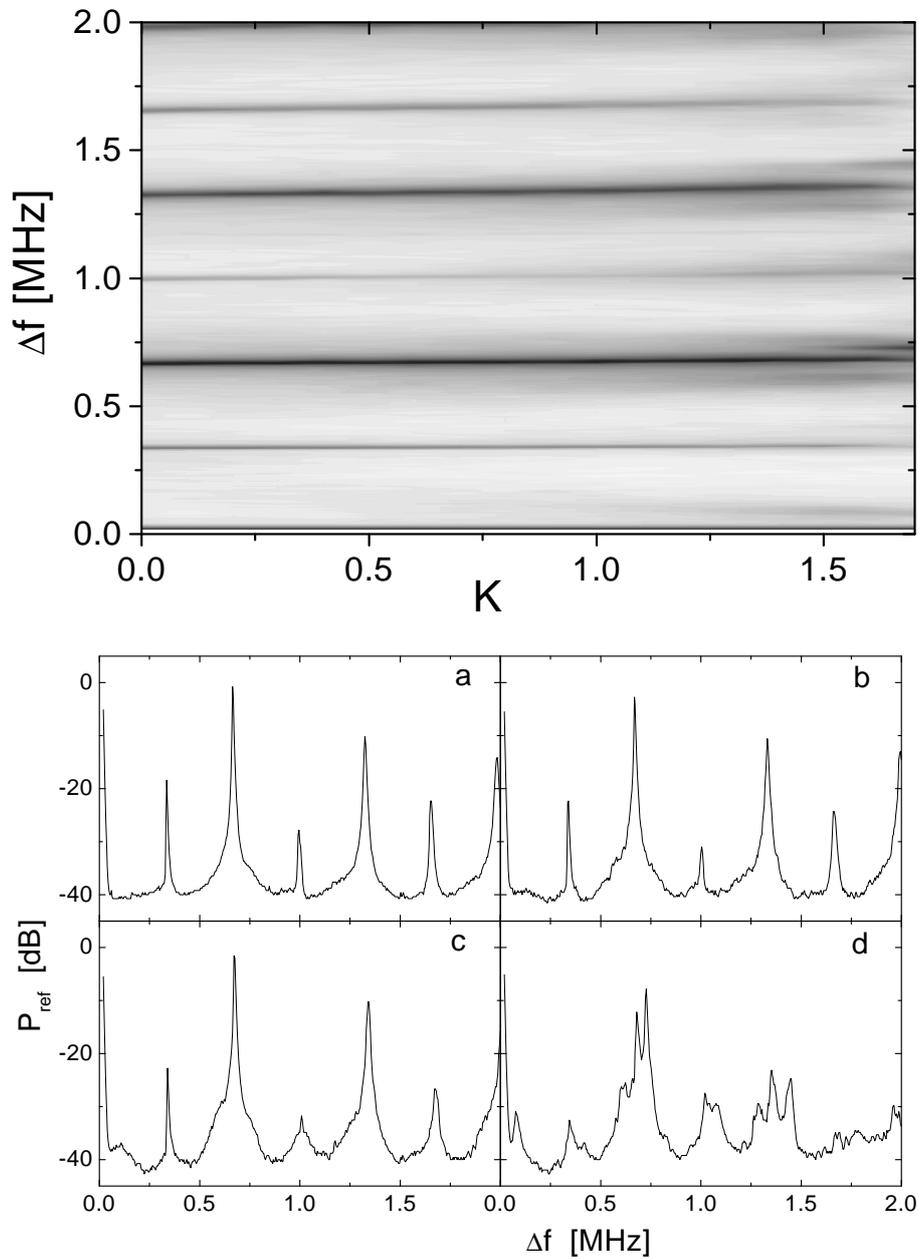


Abb. 4.12: Leistungsspektren in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude (subsidiäre Absorption, $f = 9.4$ GHz, $P_{in} = 5.4$ dB, $H = 1852$ Oe). Oben: Graustufenarstellung (weiß: -45 dB, schwarz: 5 dB). Unten: (a) stabiler Periode-2-Ausgangszustand ($K = 0$), (b) und (c) reduzierte Periode-2-Komponente ($K = 0.5, 1.0$), (d) quasiperiodischer Zustand ($K = 1.7$).

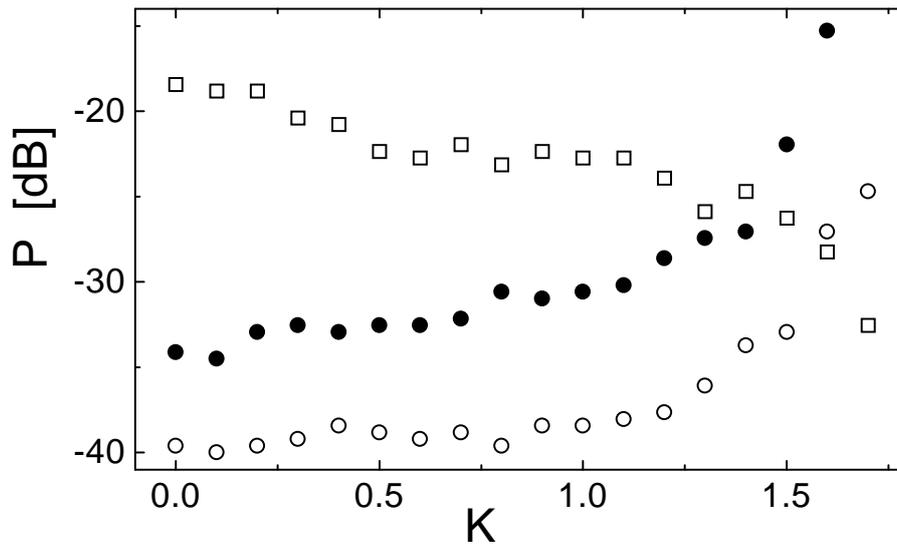


Abb. 4.13: Intensität des Periode-2-Peaks (□ 340 kHz), des sich ausbildenden Hopf-Peaks (● 730 kHz) sowie seiner ersten Oberwelle (○) in Abhängigkeit von der Kontrollamplitude.

in dem der instabile Orbit stabilisiert werden konnte (vgl. Abbn. 4.10, 4.11).

Numerische Simulationen am Toda-Oszillator haben ergeben, dass sich Reglernachlaufzeiten δ stark auf den Verlauf der durch die Rückkopplung induzierten Floquet-Zweige auswirken [66]. Mit zunehmendem δ wird der Anstieg im Realteil steiler, so dass das Kreuzen mit dem dominanten Zweig bei immer kleineren Kontrollamplituden auftritt. Die Destabilisierung wird zu kleineren K -Werten verschoben bis schließlich eine erfolgreiche Kontrolle nicht mehr möglich ist. Im Spinwellenexperiment konnte die Reglernachlaufzeit jedoch nicht unter $\delta = 0.2 \mu\text{s}$ gesenkt werden. Geht man davon aus, dass die beiden Periode-2-Ausgangsortbits in den Kontrollexperimenten ('parallel pump' und subsidiäre Absorption) ähnliche Lyapunov-Exponenten besitzen, so erscheint plausibel, warum im ersten Fall der Periode-1-Orbit mit höherer Wahrscheinlichkeit stabilisierbar ist (hier auch stabilisiert werden konnte). Dort beträgt die relative Reglernachlaufzeit $\delta/\tau_{pp} = 9.6\%$ gegenüber $\delta/\tau_{sub1} = 13\%$ im zweiten Fall.

Die Verwendung des erweiterten Rückkopplungsschemas ($R \neq 0$) brachte keine verbesserten Stabilitätseigenschaften. Wie beim Schwingkreisexperiment in Abbildung 3.18 führt ein vormals stabiler Floquet-Exponent bereits bei kleinen Kontrollamplituden zur Destabilisierung. In diesen Fällen ist es besser, das einfache Rückkopplungsschema ($R = 0$) einzusetzen. Daher wurde bei allen hier beschriebenen Kontrollexperimenten am Spinsystem mit $R = 0$ gearbeitet.

Neben den Stabilitätseigenschaften ist ein weiteres Phänomen deutlich erkennbar in der Frequenzlandschaft (vgl. Abb. 4.12). Bei Erhöhen der Kontrollamplitude steigt die Oszillationsfrequenz leicht an. Die Ursache liegt in einer leicht verstimmtten Verzögerungs-

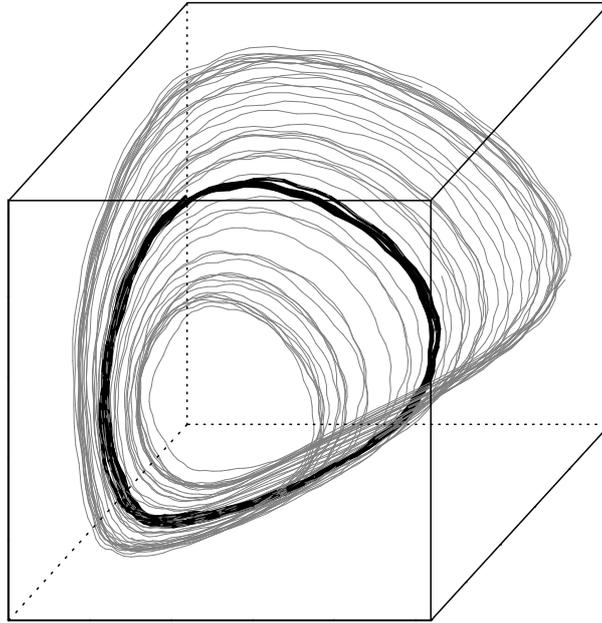


Abb. 4.14: Unterdrückung chaotischer Spindynamik (subsidiäre Absorption, $f = 9.4$ GHz, $P_{in} = 8.5$ dB, $H = 1865$ Oe). Der stabilisierte Periode-1-Orbit ($K = 0.37$, schwarz) ist in den chaotischen Attraktor ($K = 0$) eingebettet.

zeit (vgl. Kap. 2.3.1, 3.4). Bei Stabilisierung eines induzierten Orbits kann dieser Effekt ausgenutzt werden, um die exakte Verzögerungszeit zu bestimmen.

Unterdrückung chaotischer Dynamik

Beim nächsten Kontrollexperiment [64, 65] im Bereich der subsidiären Absorption ist ein chaotischer Attraktor Ausgangspunkt der Untersuchungen. Da keine vollständige Periodenverdopplungskaskade im untersuchten Systemparameterbereich vorliegt (vgl. Kap. 4.3), musste eine andere Route ausgesucht werden. Eine erste Hopf-Bifurkation sorgt für das Auftreten von Autooszillationen. Eine anschließende Periodenverdopplung führt zu Periode-2-Oszillationen und gewährleistet eine flippende Umgebung ($\omega = \pi/T$) des instabilen Periode-1-Orbits, der im Folgenden stabilisiert werden soll. Zwei weitere Hopf-Bifurkationen sorgen für quasiperiodische Dynamik und Übergang zum Chaos.

Dem dominanten Peak im Spektrum des freien Systems (Abbn. 4.15, $K = 0$) entsprechend wurde eine Verzögerungszeit von $\tau = 2.08 \mu\text{s}$ eingestellt. Anlegen der Rückkopplung und Erhöhen der Kontrollamplitude führt zu starker Unterdrückung des irregulären Verhaltens (Abbn. 4.14, 4.15, $K = 0.37$). Der Periode-1-Peak und dessen Harmonische werden schmaler, die Periode-2-Komponente sinkt um etwa 15 dB. Die Frequenzkomponenten, die sich aus der zweiten Hopf-Bifurkation ergeben, werden jedoch kaum beeinflusst. Da allerdings eine Leistungsseparation von circa 30 dB gegenüber dem Periode-1-

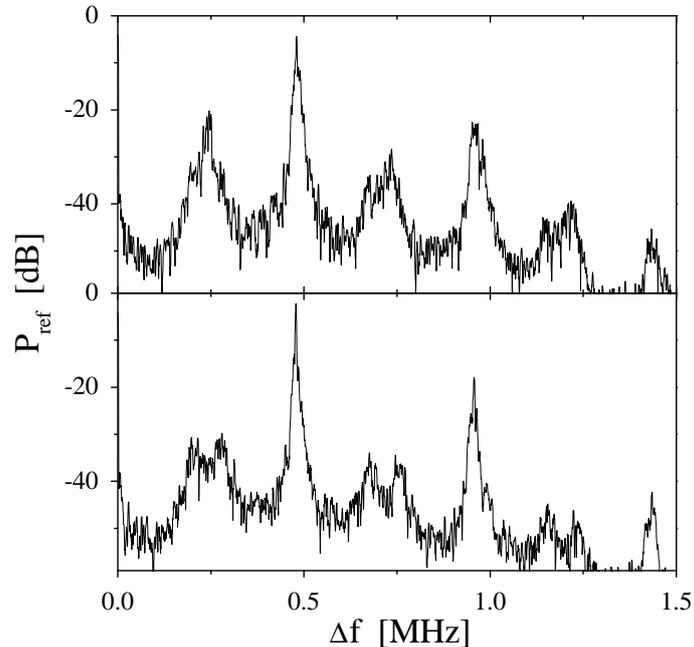


Abb. 4.15: Spektren zu der in Abbildung 4.14 dargestellten Phasenraumdynamik. Oben: chaotischer Zustand ($K = 0$), unten: stabilisierte Periode-1-Oszillation ($K = 0.37$).

Peak vorliegt, ergibt sich in der Phasenraumdarstellung ein nur leicht verschmierter, in den chaotischen Attraktor eingebetteter Orbit (Abb. 4.14). Wie in den vorangehenden Experimenten wird bei weiterem Erhöhen der Kontrollamplitude ein vormals stabiler Floquet-Exponent dominant und führt zur Destabilisierung des Systems.

Im vorliegenden Fall ergibt sich wiederum eine relative Reglernachlaufzeit von etwa $\delta/\tau_{\text{sub}2} = 9.6\%$. Der Lyapunov-Exponent des instabilen Periode-1-Orbits ist hier allerdings größer als im 'parallel pump'-Experiment. Somit ist es nicht verwunderlich, dass dort eine bessere Kontrollqualität erzielt werden konnte.

Quintessenz

Bei der Kontrolle komplexer Spindynamik mit Hilfe zeitverzögerter Rückkopplung ist es nicht ausreichend, nur den instabilen Floquet-Exponenten des freien Systems zu betrachten. Gerade hier spielt das komplette Eigenwertspektrum eine entscheidende Rolle. Dabei ist zu beachten, dass die Anzahl der effektiven Freiheitsgrade ohne Rückkopplung gering ist ($D_2 \approx 2.1$ für die sich ausbildenden chaotischen Attraktoren [46]), die Gesamtzahl aller Freiheitsgrade jedoch sehr hoch (Anzahl der Spinwellenmoden). Durch die Rückkopplung erhält jeder Freiheitsgrad ein Floquet-Spektrum mit (abzählbar) unendlich vielen Zweigen. Da für den Bereich weit oberhalb der Instabilitätsschwelle, in dem chaotische Dynamik auftritt, keine guten mathematischen Modelle für das Spin-

system existieren, kann der Einfluss der stabilen Exponenten nicht numerisch analysiert werden.

Von besonderer Bedeutung in diesem schnellen System ist der Einfluss der Reglernachlaufzeit δ . Dabei sind nicht nur die Auswirkungen auf den ursprünglich dominanten Floquet-Zweig zu beachten, die in den Kapiteln 2.3.2 und 3.5 untersucht wurden, sondern vor allem die Beeinflussung der stabilen Exponenten. Sehr vorteilhaft wäre eine weitere Absenkung von δ . Dies könnte möglicherweise durch den Einsatz anderer Bauteile erreicht werden.

Zu Beginn dieses Unterkapitels wurde bereits auf die Frage der Rückkopplung eingegangen. Ohne gute Modellgleichungen lässt sich die effektivste Methode a priori nicht bestimmen. Da sich mit Hilfe einer resonanten (sinusförmigen) Modulation [55] der Mikrowellenamplitude Spinwellenchaos mit kleinen Modulationsamplituden unterdrücken lässt, scheint die Rückkopplung über die Mikrowellenleistung eine geeignete Methode darzustellen. Azevedo und Rezende [54] verwendeten bei ihren Experimenten zur Unterdrückung von chaotischer Spindynamik eine resonante Modulation des statischen Magnetfeldes. Daher könnte auch ein Rückkopplung über das Magnetfeld eine effektive Methode darstellen. Prinzipiell können auch beide Größen gleichzeitig variiert werden. Letztendlich scheint man bei der Wahl der besten Rückkopplung auf 'trial and error' angewiesen zu sein.

5. Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit ist es gelungen, neue Erkenntnisse zum Mechanismus der zeitverzögerten Rückkopplungskontrolle zu gewinnen. Mit Hilfe einer systemunabhängigen Theorie, die in Zusammenarbeit mit W. Just und J. Holyst entwickelt wurde, konnte die Wirkungsweise dieser Kontrollmethode erklärt werden. Entscheidend für die erfolgreiche Stabilisierung eines instabilen periodischen Orbits ist das Vorhandensein einer endlichen Torsion in dessen unmittelbarer Umgebung, d.h. ein von null abweichender Imaginärteil im instabilen Floquet-Exponenten³.

Durch Linearisierung der Eigenwertgleichung konnten auch quantitative Aussagen hergeleitet werden, die experimentell an nichtlinearen elektronischen Schwingkreisen überprüft wurden. Das sich ergebende Kontrollintervall wird für kleine Kontrollamplituden durch eine Flip-Bifurkation beschränkt. Durch Kollision zweier Floquet-Zweige entsteht ein komplex konjugiertes Paar, das für große Kontrollamplituden durch eine Hopf-Bifurkation zur Destabilisierung des Orbits führt. Dieses Szenarium wurde im Experiment am nichtlinearen Diodenschwingkreis nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ bestätigt. Die angesprochene Frequenzaufspaltung ist letztendlich dafür verantwortlich, dass Orbits mit großen Lyapunov-Exponenten oder langen Periodendauern mit dem einfachen Rückkopplungsschema nicht kontrolliert werden können. Die Lockerung dieser Einschränkung durch Verwendung des erweiterten Kontrollschemas konnte analytisch begründet und experimentell demonstriert werden. Durch Ausnutzung systemparameterfreier Relationen wurde die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment untermauert.

Speziell bei autonomen Systemen steht man häufig vor dem Problem, die exakte Periodendauer des instabilen Orbits a priori zu kennen, um die Verzögerungszeit entsprechend einstellen zu können. Analytisch wie auch experimentell konnte gezeigt werden, dass bei nicht allzu großer Verstimmung ein periodischer Orbit induziert wird. Dieser besitzt im Wesentlichen die Stabilitätseigenschaften des wahren Orbits. Aus der Periode des induzierten Zustands lässt sich mit Hilfe einer hergeleiteten Näherungsformel die wahre Periode bestimmen. Bei größeren Verstimmungen kann diese Formel im Sinne eines Newton-Verfahrens eingesetzt werden. Entgegen früheren Annahmen ist es daher nicht dringend erforderlich, die Periode des instabilen Orbits möglichst exakt zu kennen. Bei Experimenten am ANE-Schwingkreis war es zumeist ausreichend, aus dem dominan-

³Davon abweichende Ausnahmen wurden in Kapitel 2.1 angesprochen.

ten Peak im Frequenzspektrum einen ersten Näherungswert zu ermitteln. Mit diesem lässt sich ein periodischer Orbit induzieren. Anschließend kann das Näherungsverfahren angewendet werden. Unter Umständen ist es notwendig, nicht nur die Verzögerungszeit sondern auch die Kontrollamplitude nachzuregeln.

Die Anwendbarkeit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle wird vor allem in schnellen experimentellen Systemen durch Reglernachlaufzeiten eingeschränkt. Durch Einsatz einer variablen künstlichen Nachlaufzeit im Rückkopplungsweig konnte dieses Phänomen experimentell untersucht werden. Diese Verzögerung des kompletten Kontrollsignals führt zur Verschiebung des Frequenzaufspaltungspunktes und somit zur Reduzierung des Kontrollintervalls. Oberhalb einer kritischen Reglernachlaufzeit ist die Kontrolle des instabilen Orbits nicht mehr möglich. Diese Einschränkung kann durch Verwendung des erweiterten Rückkopplungsschemas zwar etwas gelockert, nicht aber aufgehoben werden.

Experimentelle Untersuchungen am nichtlinearen Diodenschwingkreis haben ergeben, dass es unter Umständen nicht ausreichend ist, nur das Verhalten des ursprünglich instabilen Floquet-Exponenten zu betrachten. Zuweilen treten Kreuzungen im Realteil der Eigenwerte auf. Diese können zu einem neuen dominanten Floquet-Zweig führen, der eventuell das Kontrollintervall reduziert oder sogar eine Stabilisierung des instabilen Orbits gänzlich verhindert. Erste Ansätze für eine theoretische Beschreibung wurden präsentiert. Das Fehlen einer analytischen Theorie für Floquet-Probleme erschwert derzeit weitere Fortschritte auf diesem Gebiet. Gerade hier ist der gezielte Einsatz numerischer Simulationen an einfachen Modellsystemen und auch experimentell relevanten Modellen wünschenswert. Solche Untersuchungen könnten möglicherweise auch den Einfluss von Reglernachlaufzeiten auf diese ursprünglich stabilen Floquet-Exponenten klären.

Die Erkenntnisse aus den Kontrollexperimenten an den elektronischen Schwingkreisen bilden gemeinsam mit den theoretischen Überlegungen die Grundlage für die erfolgreiche Anwendung zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle in komplexen Systemen.

Ferromagnetische Resonanzexperimente an einkristallinen Yttrium-Eisengranat-Kugeln haben die Vielfalt dieses Spinsystems an nichtlinearen Phänomenen aufgezeigt. Bei hohen Mikrowellenleistungen wird die homogene Spinpräzession instabil, es kommt zur Ausbildung von Spinwellen und magnetostatischen Moden. Durch eine Hopf-Bifurkation kommt es zum Auftreten von Autooszillationen, die über verschiedene Routen ins Chaos übergehen. Aufgrund der hohen Systemfrequenzen ist die Anwendung aufwendiger Algorithmen zur Kontrolle der chaotischen Dynamik nicht möglich. Daher bietet sich die Verwendung zeitverzögerter Rückkopplungsmethoden an, die relativ leicht experimentell umgesetzt werden können.

Bei der Durchführung der Kontrollexperimente zeigte es sich, dass die Rückkopplung ein relativ kompliziertes Floquet-Spektrum hervorruft. Kreuzungen im Realteil der Eigenwerte führen dazu, dass ursprünglich stabile Exponenten dominant werden und das Kontrollintervall einschränken. Dieses Phänomen hängt stark von der relativen Reglernachlaufzeit ab, so dass deren weitestgehende Reduktion im Spinwellenexperiment für erfolgreiche Kontrolle wesentlich ist. In diesem Zusammenhang wird deutlich, dass die

Verwendung der erweiterten Rückkopplungsmethode mit hohem Reflexionsparameter gegenüber dem einfachen Schema nicht grundsätzlich bessere Kontrollergebnisse erzielt. Zuweilen ist das Gegenteil der Fall. Bei Kenntnis der Bewegungsgleichungen lässt sich durch geschickte Wahl der Rückkopplung eine Optimierung der Kontrolle erzielen. Ohne passende Modellgleichungen ist man jedoch auf experimentelles Ausprobieren angewiesen.

Ungeachtet dieser offenen Fragen zur Optimierung der Kontrolle zeigen die hier präsentierten Experimente, dass sich die chaotische Spindynamik mit Hilfe zeitverzögerter Rückkopplung kontrollieren lässt. Der erfolgreiche Einsatz bei diesem komplexen System zeigt die Stärke der Kontrollmethode auf und lässt auf zukünftige technische Anwendungen hoffen.

A. Kontrollschaltung

Für die in dieser Arbeit beschriebenen Experimente standen mir zwei Kontrollschaltungen zur Verfügung. Sie entstanden im Rahmen der Diplomarbeiten von Bernard [14] und Müller [67]. Detaillierte Beschreibungen können dort nachgelesen werden. Beide Schaltungen bestehen aus einer Kaskade elektronischer Verzögerungsbausteine mit einer Grenzfrequenz von etwa 3 MHz und mehreren Operationsverstärkern, die als Vorverstärker, Subtrahierer oder Invertierer eingesetzt werden. Der Hauptunterschied liegt in der Kontrollkraft, die erzeugt werden kann. Mit der Bernard'schen Platine kann nur die einfache zeitverzögerte Rückkopplung (vgl. Gl. (2.2)) generiert werden, während die Müller'sche Schaltung das erweiterte Rückkopplungsschema (vgl. Gl. (2.3)) erzeugen kann (siehe Abb. A.1).

$$\begin{aligned} F(t) &= -K[U(t) - (1 - R)S(t - \tau)] \\ S(t) &= U(t) + RS(t - \tau) \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit Reflexionsparameter $R = 0 \dots 1$ und Verzögerungszeit $\tau = 10\text{ns} \dots 21\mu\text{s}$.

Auf beiden Kontrollplatinen befinden sich zwar Potentiometer, um die Kontrollamplitude variieren zu können, doch sind diese nicht geeicht. Daher wird die Verstärkung der Schaltungen auf einen Wert fixiert (K_0), und das Kontrollsignal anschließend mit einem zeitlich konstanten Faktor K_1 oder einem Rechtecksignal ($K_{1a} \rightarrow K_{1b} \rightarrow K_{1a} \rightarrow K_{1b} \dots$) multipliziert. Mit Letzterem lassen sich Ein-, Aus- und Umschaltexperimente verwirklichen, mit deren Hilfe aus Transienten des Kontrollsignals Floquet-Exponenten experimentell bestimmt werden können (vgl. Anhang B). Die Gesamtverstärkung ergibt sich somit zu $K = K_0 \cdot K_1$.

Doch wie erhält man K_0 ? Zunächst wird die Verzögerungszeit eingestellt. Dazu wird auf den Eingang der Schaltung eine sinusförmige Spannung mit entsprechender Frequenz gegeben. Einzelne Verzögerungsbausteine werden hinzu- bzw. ausgeschaltet, bis das Signal am Ausgang verschwindet. Da jeder Verzögerungsbaustein eine Dämpfung des verzögerten Signals bewirkt, muss ständig die Feinverstärkung im Verzögerungsweig nachgeregelt werden. Ist τ eingestellt, wird an den Eingang eine sinusförmige Spannung mit der entsprechend halben Frequenz angelegt.

$$U_{ein} = A_{ein} \sin(\pi/\tau t) \tag{A.2}$$

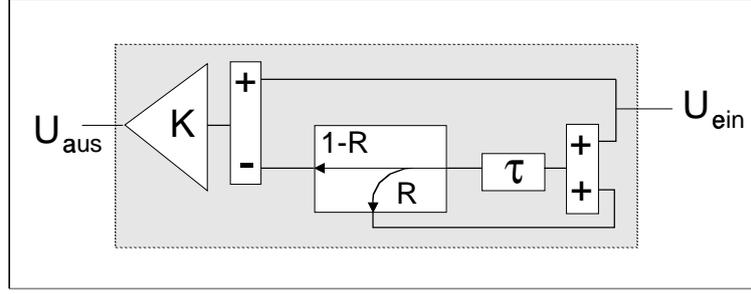


Abb. A.1: Schematischer Aufbau der Kontrollschaltung für erweiterte zeitverzögerte Rückkopplung.

Dadurch addieren sich die unverzögerte und die verzögerte Spannung konstruktiv.

$$\begin{aligned}
U_{aus} &= K_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} R^{\nu} \{A_{ein} \sin(\pi/\tau (t - \nu\tau)) - A_{ein} \sin(\pi/\tau (t - (\nu + 1)\tau))\} \\
&= 2A_{ein}K_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} R^{\nu} \sin(\pi/\tau (t - \nu\tau)) \\
&= 2A_{ein}K_0 \sin(\pi/\tau t) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} R^{\nu} \\
&= 2A_{ein}K_0/(1 + R) \sin(\pi/\tau t) \\
&\equiv A_{aus} \sin(\pi/\tau t)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Aus dem Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsamplitude ergibt sich in Abhängigkeit von Reflexionsparameter R die Platinenverstärkung

$$K_0 = \frac{A_{aus}}{2A_{ein}} (1 + R) \quad . \tag{A.4}$$

Aufwendig sind Experimente an autonomen Systemen, wenn die Periodendauer des zu stabilisierenden Orbits nicht exakt bekannt ist. Diese kann zwar mit Hilfe der in Kapitel 2.3.1 beschriebenen Methode bestimmt werden, doch muss bei jeder Änderung von τ die Feinverstärkung im Verzögerungsweig nachgeregelt werden. Um das zu vermeiden, wird derzeit an einer Digitalisierung der Kontrollschaltung gearbeitet [68]. Probleme bzw. Kosten ergeben sich dabei aufgrund der relevanten Zeitskala.

Bei den Untersuchungen zur Reglernachlaufzeit wurden beide Schaltungen eingesetzt, eine zur Erzeugung der Kontrollkraft und der Verzögerungsteil der anderen als zusätzliche regelbare Zeitverzögerung.

Andere Gruppen [34, 69] diskutieren dem Erfolg eigener Kontrollmethoden häufig anhand der so genannten Transferfunktion der Kontrollschaltung. Diese in der konventionellen Kontrolltheorie gebräuchliche Größe beschreibt die Frequenzabhängigkeit

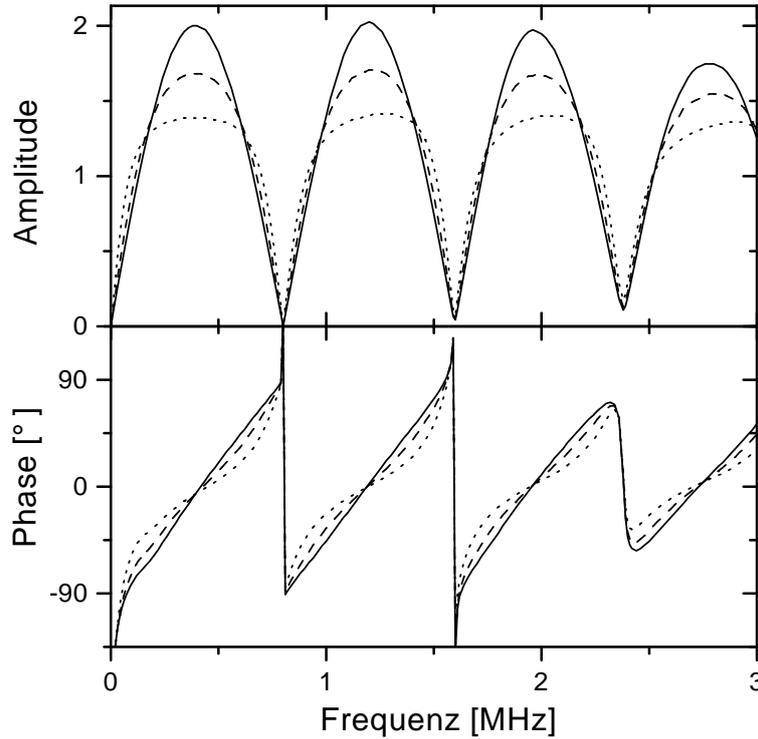


Abb. A.2: Amplitude und Phase der Transferfunktion der Müller'schen Kontrollschaltung für $R = 0$ (durchgezogen), 0.2 (gestrichelt), 0.5 (punktiert).

des Quotienten aus Eingangs- zu Ausgangssignals. Für die erweiterte zeitverzögerte Rückkopplung erhält man

$$\text{TF}(f) = \frac{1 - e^{i2\pi f\tau}}{1 - R e^{i2\pi f\tau}} \quad (\text{A.5})$$

Im Betrag der Transferfunktion ergeben sich eine Reihe von Einbrüchen, bei denen die Funktion auf Null abfällt (Abb. A.2). Dies ist notwendig, um das Verschwinden der Kontrollkraft bei erfolgreicher Kontrolle zu gewährleisten. Das Verhalten zwischen den Einbrüchen hängt stark vom Reflexionsparameter R ab. Die Struktur des Ausdrucks (A.5) findet sich als Argument von Γ in den charakteristischen Gleichungen (2.12), (2.20) wieder ($i2\pi f \rightarrow -(\Lambda + i\Omega)$). Es lassen sich jedoch nicht alle Voraussetzungen für erfolgreiche Kontrolle mit Hilfe der Transferfunktion erklären. Einsichtig ist, dass der instabile Orbit des freien System eine endliche Torsion besitzen muss. Beträgt der Imaginärteil des Floquet-Exponenten $\omega = 0 \bmod 2\pi$, so können kleine Störungen ungehindert anwachsen, da genau bei diesen Frequenzen die Nullstellen von TF liegen. Es ist allerdings nicht möglich, Vorhersagen für das Kontrollgebiet ($K^{(\text{fl})}$, $K^{(\text{ho})}$, $\lambda\tau_c$) zu machen. Auch einschränkende Einflüsse wie z.B. eine verstimmte Verzögerungszeit können hiermit nicht untersucht werden.

Im Zusammenhang mit der Transferfunktion gibt es eine interessante Arbeit von

Basso und Koautoren [69]. Mit Hilfe des Kreis-Kriteriums leiten sie ein optimales Kontrollschema her, das natürlich vom System, dessen Parametern und dem zu stabilisierenden Orbit abhängt. Die Kenntnis der zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen ist erforderlich. Selbst wenn man für das eigene System ein gutes Modell besitzt und somit das optimale Schema näherungsweise bestimmen kann, so ist die Realisierung im Experiment jedoch nicht praktikabel. Auf jedes System, jeden Parametersatz und jeden Orbit müsste die Kontrollschaltung entsprechend angepasst werden.

B. Experimentelle Bestimmung von Floquet-Exponenten

Die analytische Berechnung des Floquet-Spektrums einer periodischen Lösung in nicht-linearen zeitkontinuierlichen Systemen aus Eigenwertgleichungen wie (2.11) ist zumeist nicht möglich. Eine Diskussion der linearisierten charakteristischen Gleichung (2.15) ist in [24] zu finden. Bei Kenntnis der Bewegungsgleichungen ist es ferner möglich, das Floquet-Spektrum numerisch exakt zu berechnen [70]. Zur experimentellen Bestimmung der Floquet-Exponenten eines instabilen periodischen Orbits existieren mehrere Möglichkeiten. Zwei dieser Verfahren sollen hier kurz vorgestellt sowie ihre Stärken und Schwächen diskutiert werden.

Die erste Methode basiert auf der Auswertung von Ein-, Um- bzw. Ausschaltexperimenten. Für Kontrollamplituden innerhalb $[K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}]$ wird aus Zeittransienten beim Einschalten der Rückkopplung ($0 \rightarrow K$) das exponentielle Zulaufen auf den Orbit ausgenutzt. Der exponentielle Abfall des Kontrollsignals (Abb. B.1) liefert den Realteil des Floquet-Exponenten, die Lage der Peaks im zugehörigen Frequenzspektrum die Imaginärteile. Liegt K außerhalb des Kontrollintervalls, so wird bei stabilisiertem Orbit (K_0) die Kontrollamplitude auf K geschaltet ($K_0 \rightarrow K$), das System läuft exponentiell vom Orbit weg. Aus dem exponentiellen Anstieg des Kontrollsignals erhält man den Realteil des Floquet-Exponenten, aus der Lage der Peaks im zugehörigen Frequenzspektrum die Imaginärteile. Beim Ausschaltexperiment ($K_0 \rightarrow 0$) ergibt sich dementsprechend der Floquet-Exponent des ungestörten Orbits. Tragen mehrere Exponenten zur Dynamik bei, so können die Realteile auch aus der Breite der Peaks im Frequenzspektrum bestimmt werden. Dazu wäre eine hohe Frequenzauflösung wünschenswert. Die Länge t_S der aufgenommenen Transiente ergibt sich aus der Abtastrate r und der Anzahl der Messpunkte N zu $t_S = N/r$. Die Frequenzauflösung δf im Spektrum ist durch den Quotienten aus Nyquist-Frequenz $f_N = 0.5r$ und Punktzahl $N_f = 0.5N$ gegeben, d.h. $\delta f = f_N/N_f$. Somit ist $\delta f = 1/t_S$ umgekehrt proportional zur Länge der aufgenommenen Transiente. Da der exponentielle Abfall/Anstieg nicht über beliebig viele Dekaden verfolgt werden kann, führt dies vor allem bei betragsmäßig großen Realteilen zu kurzen verwertbaren Transienten und daher zu niedrigen Frequenzauflösungen. Ein großer Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit, die Floquet-Exponenten für beliebige Kontrollamplituden (auch außerhalb $[K^{(\text{fl})}, K^{(\text{ho})}]$) bestimmen zu können.

Die zweite Methode verwendet einen störungstheoretischen Ansatz. Der Orbit wird

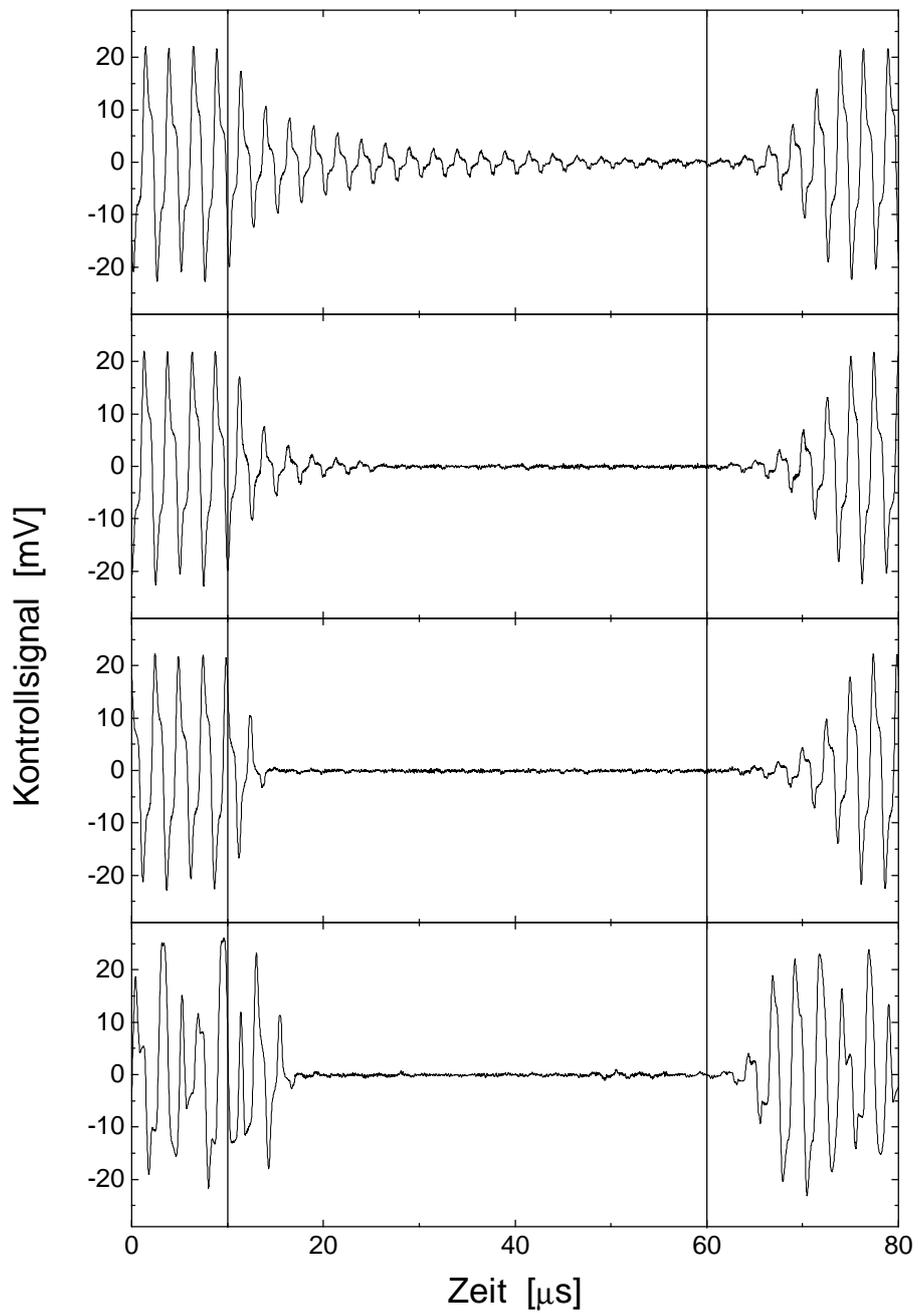


Abb. B.1: Exponentieller Abfall/Anstieg des Kontrollsignals für folgende Schaltprozesse in der Kontrollamplitude: $0 \rightarrow 12.8 \rightarrow 0$; $0 \rightarrow 16 \rightarrow 0$; $0 \rightarrow 20 \rightarrow 0$; $-20 \rightarrow 20 \rightarrow -20$. Die vertikalen Striche markieren die Umschaltzeitpunkte. $K^{(\Omega)} = 10.4$, $K^{(\text{ho})} = 148$.

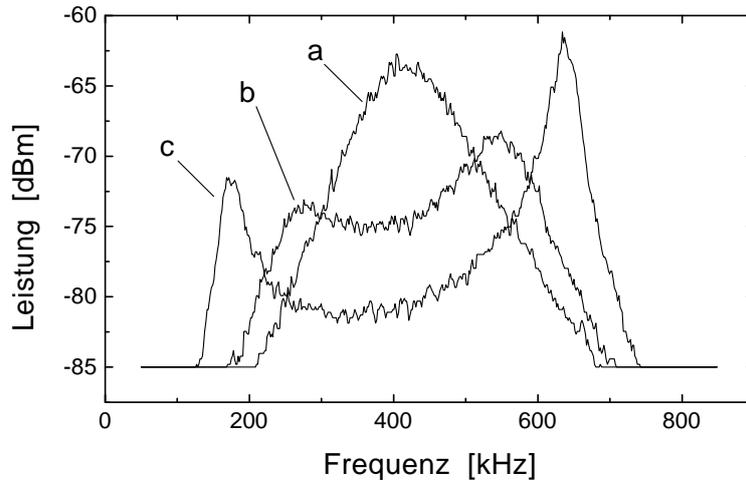


Abb. B.2: Leistungsspektren des Kontrollsignals bei Störung eines stabilisierten Orbits (a) vor der Frequenzaufspaltung ($K^{(fl)} < K < K^{(opt)}$), (b) und (c) nach der Frequenzaufspaltung ($K^{(opt)} < K < K^{(ho)}$).

durch Anwenden der zeitverzögerten Rückkopplung stabilisiert. Durch eine zusätzliche kleine sinusförmige Modulation eines Systemparameters wird der Orbit gestört, es entsteht eine torusförmige Dynamik. Die Amplitude des Kontrollsignal an der Modulationsfrequenz wird für viele Frequenzen gemessen. Dafür kann man einen Lock-In Verstärker oder einen Netzwerkanalysator verwenden. Auf diese Weise erhält man die Transferfunktion des Gesamtsystems bestehend aus Schwingkreis und Kontrollschaltung (Abb. B.2, vgl. Anhang A). Aus Lage und Breite der Lorentz-Kurven in diesen Spektren ergeben sich wiederum Imaginär- und Realteile der Floquet-Exponenten [24]. Durch geeignete Wahl der Modulationsamplitude wird gewährleistet, dass man sich immer in der (linearen) Umgebung des Orbits befindet. Die Frequenzauflösung der Spektren kann beliebig gewählt werden. Diesem großen Vorteil steht allerdings ein entsprechender Nachteil gegenüber: Das Verfahren kann nur bei kontrolliertem Orbit, d.h. für Kontrollamplituden innerhalb $[K^{(fl)}, K^{(ho)}]$ angewendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] E. Ott, C. Grebogi, Y.A. Yorke, *Controlling chaos*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990)
- [2] E.R. Hunt, *Stabilizing high-periodic orbits in a chaotic system: the diode resonator*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1953 (1991)
- [3] U. Dressler, G. Nitsche, *Controlling chaos using time delay coordinates*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1 (1992)
- [4] R. Henn, *Kontrolle chaotischer Dynamik an schnellen experimentellen Systemen*, Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt (1993)
- [5] B. Hübinger, R. Doerner, W. Martienssen, *Local control of chaotic motion*, Z. Phys. B **90**, 103 (1993)
- [6] T. Shinbrot, *Progress in the control of chaos*, Adv. Phys. **44**, 73 (1995)
- [7] *From chaos to order - methodologies, perspectives and applications*, herausgegeben von G. Chen, X. Ding, (World Scientific, Singapore, 1998)
- [8] *Handbook of Chaos Control*, herausgegeben von H.G. Schuster (VCH, Weinheim, 1999)
- [9] K. Pyragas, *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992)
- [10] J.E.S. Socolar, D.W. Sukov, D.J. Gauthier, *Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems*, Phys. Rev. E **50**, 3245 (1994)
- [11] K. Pyragas, A. Tamaševičius, *Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **180**, 99 (1993)
- [12] S. Bielawski, D. Derozier, P. Glorieux, *Controlling unstable periodic orbits by a delayed continuous feedback*, Phys. Rev. E **49**, R 971 (1994)
- [13] A. Kittel, J. Parisi, K. Pyragas, R. Richter *Delayed feedback control of chaos in an electronic double-scroll oscillator*, Z. Naturf. A **49**, 843 (1994)

- [14] Th. Bernard, *Chaoskontrolle nach Pyragas: Delayed Feedback Control*, Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt (1995)
- [15] T. Pierre, G. Bonhomme, A. Atipo, *Controlling the chaotic regime of nonlinear ionization waves using time-delay autosynchronization method*, Phys. Rev. Lett. **76**, 2290 (1996)
- [16] T. Hikihara and T. Kawagoshi, *An experimental study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos*, Phys. Lett. A **211**, 29 (1996)
- [17] R. Bellman, *Differential-Difference Equations*, (Acad. Press, New York, 1963)
- [18] T. Bernard, R. Henn, W. Just, E. Reibold, F. Rödelsperger, H. Benner, *Suppressing and controlling chaos in spin-wave instabilities in Nonlinear Microwave Signal Processing: Towards a New Range of Devices*, herausgegeben von R. Marcelli (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996), pp. 373-400.
- [19] W. Just, T. Bernard, M. Ostheimer, E. Reibold, H. Benner, *Mechanism of time-delayed feedback control*, Phys. Rev. Lett. **78**, 203 (1997)
- [20] W. Just, J. Möckel, D. Reckwerth, E. Reibold, H. Benner, *Delayed feedback control of autonomous systems*, Phys. Rev. Lett. **81**, 562 (1998)
- [21] W. Just, *Principles of time delayed feedback control*, in [8], pp. 21-41
- [22] W. Just, D. Reckwerth, E. Reibold, H. Benner, *Influence of control loop latency on time-delayed feedback control*, Phys. Rev. E **59**, 2826 (1999)
- [23] W. Just, E. Reibold, H. Benner, K. Kacperski, P. Fronczak, J. Hołyst, *Limits of time-delayed feedback control*, Phys. Lett. A **254**, 158 (1999)
- [24] W. Just, E. Reibold, K. Kacperski, P. Fronczak, J. Hołyst, H. Benner, *Do stable exponents influence time delayed feedback control?*, Phys. Rev. E, voraussichtlich Ausgabe vom 1. Mai (2000)
- [25] H. Nakajima, *On analytical properties of delayed feedback control of chaos*, Phys. Lett. A **232**, 207 (1997)
- [26] H. Nakajima, Y. Ueda, *Limitation of generalized delayed feedback control*, Physica D **111**, 143 (1998)
- [27] H. Nakajima, Y. Ueda, *Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries*, Phys. Rev. E **58**, 1757 (1998)
- [28] A. Kittel, J. Parisi, K. Pyragas, *Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time*, Phys. Lett. A **198**, 433 (1995)

-
- [29] H. Nakajima, H. Ito, Y. Ueda, *Automatic adjustment of delay time and feedback gain in delayed feedback control of chaos*, IEICE Trans. Fund. **E 80**, 1554 (1997)
- [30] L. Collatz, *Über Stabilität von Regelungen mit Nachlaufzeit*, Z. angew. Math. Mech. **25-27**, 60 (1947)
- [31] W. Just, *Private Mitteilung* (1998)
- [32] N.B. Tufillaro, T. Abbott, J. Reilly, *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley, Redwood, 1992)
- [33] B. Lang, *Topologische Analyse instabiler periodischer Orbits aus Zeitreihen*, Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt (1999)
- [34] D.W. Sukow, M.E. Bleich, D.J. Gauthier, J.E.S. Socolar, *Controlling chaos in a fast diode resonator using extended time-delay autosynchronization: Experimental observations and theoretical analysis*, Chaos **7**, 560 (1997)
- [35] H. Suhl, *The theory of magnetic resonance at high signal powers*, J. Phys. Chem. Solids **1**, 209 (1957)
- [36] V.E. Zakharov, V.S. L'vov, S.S. Starobinets, *Spin-wave turbulence beyond the parametric excitation threshold*, Sov. Phys.-Usp. **17**, 896 (1975)
- [37] H. Benner, F. Rödelberger, G. Wiese, *Chaotic dynamics in spin-wave instabilities in Nonlinear Dynamics in Solids*, herausgegeben von H. Thomas, (Springer, Berlin, 1992), p. 129
- [38] V.S. L'vov, *Wave Turbulence under Parametric Excitation: Applications to Magnets*, (Springer, Berlin, 1994)
- [39] *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials*, herausgegeben von P.E. Wigen (World Scientific, Singapore, 1994)
- [40] G. Gibson, C. Jeffries, *Observation of period doubling and chaos in spin-wave instabilities in yttrium iron garnet*, Phys. Rev. A **29**, 811 (1984)
- [41] F.M. de Aguiar, S.M. Rezende, *Observation of subharmonic routes to chaos in parallel-pumped spin waves in yttrium iron garnet*, Phys. Rev. Lett. **56**, 1070 (1986)
- [42] T.L. Carrol, L.M. Pecora, F.J. Rachford, *Chaotic transients and multiple attractors in spin-wave experiments*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2891 (1987)
- [43] F.M. de Aguiar, *Intermittencies in the presence of symmetry in spin-wave experiments*, Phys. Rev. A **40**, 7244 (1989)

- [44] F. Rödelsperger, T. Weyrauch, H. Benner, *Different types of intermittency observed in transverse-pumped spin-wave instabilities*, J. Magn. Magn. Mater. **104-107**, 1075 (1992)
- [45] F.M. de Aguiar, A. Azevedo, S.M. Rezende, *Magnetic-field-induced intermittency in spin-wave experiments*, J. Appl. Phys. **73**, 6825 (1993)
- [46] F. Rödelsperger, *Chaos und Spinwelleninstabilitäten*, (Harri Deutsch, Frankfurt, 1994)
- [47] F. Rödelsperger, A. Čenys, H. Benner, *On-off intermittency in spin-wave instabilities*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2594 (1995)
- [48] J. Becker, F. Rödelsperger, Th. Weyrauch, H. Benner, W. Just, A. Čenys, *Intermittency in spin-wave instabilities*, Phys. Rev. E **59**, 1622 (1999)
- [49] E. Reibold, *Stochastische Resonanz bei Spinwelleninstabilitäten*, Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt (1995)
- [50] E. Reibold, W. Just, J. Becker, H. Benner, *Stochastic resonance in chaotic spin-wave dynamics*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3101 (1997)
- [51] E. Reibold, W. Just, J. Becker, H. Benner, *Stochastic resonance without noise*, in *Proceedings of the 4th Experimental Chaos Conference*, herausgegeben von M. Ding, W. Ditto, L. Pecora, S. Vohra, M. Spano (World Scientific, Singapore, 1998), p. 229
- [52] J. Leonardy, *Private Mitteilung an F. Rödelsperger*(1992)
- [53] M. Mino, H. Urakami, V.L. Safonov, K. Zouta, H. Yamazaki, *The onset of auto-oscillations of parametrically excited spin-wave pairs*, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 409 (1998)
- [54] A. Azevedo, S.M. Rezende, *Controlling chaos in spin-wave instabilities*, Phys. Rev. Lett. **66**, 1342 (1991)
- [55] R. Lima, M. Pettini, *Suppression of chaos by resonant parametric perturbation*, Phys. Rev. A **41**, 726 (1990)
- [56] F. Rödelsperger, Yu.S. Kivshar, H. Benner, *Reshaping-induced chaos suppression*, Phys. Rev. E **51**, 869 (1995)
- [57] R. Henn, F. Rödelsperger, H. Benner, *Controlling unstable periodic orbits and hyperbolic fixed points in spin-wave turbulence*, in *Proc. 26th Congress Ampere on Magnetic Resonance*, herausgegeben von A. Anagnostopoulos, F. Milia, A. Simopoulos (Athen 1992) p. 371

- [58] R. Henn, F. Rödelsperger, H. Benner, *Controlling unstable periodic orbits due to OGY in a spin-wave experiment*, J. Magn. Magn. Mater. **140-144**, 1935 (1995)
- [59] Yu.S. Kivshar, F. Rödelsperger, H. Benner, *Suppression of chaos by nonresonant parametric perturbations*, Phys. Rev. E **49**, 319 (1994)
- [60] F. Rödelsperger, Yu.S. Kivshar, H. Benner, *Route out of chaos by hf parametric perturbations in spin-wave instabilities*, J. Magn. Magn. Mater. **140-144**, 1953 (1995)
- [61] M. Ye, D.W. Peterman, P.E. Wigen, *Controlling chaos in a thin circular YIG film*, J. Appl. Phys. **73**, 6822 (1993)
- [62] M. Ye, D.W. Peterman, P.E. Wigen, *Controlling chaos in thin YIG films with a time-delayed method*, Phys. Lett. A **203**, 23 (1995)
- [63] P.E. Wigen, M. Ye, D.W. Peterman, *Controlling chaos in ferromagnetic resonance*, J. Magn. Magn. Mater. **140-144**, 2074 (1995)
- [64] H. Benner, E. Reibold, *Chaos control in spin systems*, in [8], pp. 563-589
- [65] W. Just, E. Reibold, H. Benner, *Time-delayed feedback control: Theory and application*, in *Proceedings of the 5th Experimental Chaos Conference*, herausgegeben von M. Ding, W. Ditto, A. Osborne, L. Pecora, M. Spano (World Scientific, Singapore, 2000), im Druck
- [66] P. Fronczak, *Private Mitteilung* (1999)
- [67] M. Müller, *Chaoskontrolle an einem Festkörper-Laser*, Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt (1997)
- [68] D. Reckwerth, *Chaoskontrolle mit zeitverzögerter Rückkopplung an schnellen experimentellen Systemen*, Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt (1998)
- [69] M. Basso, R. Genesio, L. Giovanardi, A. Tesi, G. Torrini, *On optimal stabilization of periodic orbits via time delayed feedback control*, Int. J. Bif. Chaos **8**, 1699 (1998)
- [70] M.E. Bleich, J.E.S. Socolar, *Stability of periodic orbits controlled by time-delay feedback*, Phys. Lett. A **210**, 87 (1996)

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name: Ekkehard Reibold
Geburtsdatum: 27. Juni 1968
Geburtsort: Völklingen/Saar
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Bildungsweg

August 1974 – Juni 1977 Besuch der Grundschule, Kehl-Auenheim
August 1977 – Juni 1978 Besuch der Grundschule, Lahr-Kippenheimweiler
August 1978 – Mai 1988 Besuch des Max-Planck-Gymnasiums, Lahr
September 1985 – Juni 1986 Besuch der Centennial Secondary School, Belleville, Ontario, Kanada
Mai 1988 Abitur

Juli 1988 – Oktober 1988 Wehrdienst, Stetten am kalten Markt
Oktober 1988 – Januar 1989 Zivildienst, Kreiskrankenhaus, Lahr
Februar 1989 – März 1990 Zivildienst, Verein der Freunde der Lahrer Werkstätten für Behinderte, Lahr

April 1990 – Oktober 1995 Studium der Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt
April 1992 Vordiplom
April 1994 – Oktober 1995 Hauptpraktikum und Diplomarbeit über das Thema „Stochastische Resonanz bei Spinwelleninstabilitäten“ am Institut für Festkörperphysik
Oktober 1995 Diplom

seit Dezember 1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörperphysik der Technischen Universität Darmstadt