

LA DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR Y LOS NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARES

Dr. Paulino E. Mallo, CPN María A. Artola, CPN Mónica V. García, CPN/Lic. Diego Martínez, CPN/Lic. Marcelo J. Galante, CPN/Lic. Mariano E. Pascual, Sr. Mariano Morettini

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales - Universidad Nacional de Mar del Plata
pmallo@argenet.com.ar - <http://www.gimb-mdp.org>

RESUMEN

La ciencia matemática y la Estadística basan su desarrollo teórico en el principio aristotélico del tercero excluido, el *A o noA*. Los logros que con ellas se han alcanzado son muchos, pero adolecen, en algunos casos, de falta de adecuación con la realidad. Muchas veces tenemos incertidumbre sobre el valor que puede tomar una variable en el futuro o no podemos cuantificarla en el presente.

Frente a esta circunstancia surgió, en el siglo XX, la Matemática Difusa, que no se basa en una lógica bivaluada, sino en una multivaluada, admitiendo no sólo el *A* y el *noA* como alternativas, sino las infinitas posibilidades que en el medio se encuentran.

La reacción de muchos científicos ante la aparición de esta nueva disciplina fue tildarla de “probabilidad encubierta”. Sin embargo, en la probabilidad también subyace el principio del tercero excluido.

En el presente trabajo presentamos las nociones básicas de la Matemática Borrosa y el concepto de Número Borroso Triangular. Por otra parte, realizamos un análisis de la distribución probabilística triangular, dado la semejanza en su representación gráfica con la de los números borrosos triangulares.

Una vez realizados ambos desarrollos efectuamos una comparación entre ambas herramientas para proponer luego un ejemplo de aplicación, en el cual trabajamos con la distribución triangular, por un lado, y con la Matemática Borrosa, por el otro. Se comparan, posteriormente los resultados y se sacan las conclusiones pertinentes.

PALABRAS CLAVES: Matemática Borrosa, número borroso triangular, distribución triangular, lógica multivaluada.

1. INTRODUCCIÓN

Como todos sabemos, la Matemática tradicional parte del principio aristotélico denominado del *tercero excluido*, al que se suele referir de la siguiente manera: A o no A . Es decir, sólo existen dos alternativas: que sea A o que sea no A . De esta manera, si decimos que el desvío standard de la variable “altura de las personas habitantes de la Argentina” es de 0,35 metros, la alternativa A sería que efectivamente el desvío standard referido sea 0,35 metros, y la alternativa *no A* es que dicho desvío standard no sea 0,35 metros.

Desde siempre, distintos matemáticos han dudado en ciertos momentos sobre la total adaptación de la Matemática fundada en el principio del tercero excluido a la realidad donde debe ser aplicada. Así, por ejemplo, Albert Einstein llegó a decir que *“en la medida en que las leyes de las matemáticas se refieran a la realidad, no son ciertas. Y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad”*[Kosko, 1995].

Si pensamos, por ejemplo, en la calificación de las personas como altas, la alternativa A sería que la persona es alta, y la alternativa *no A*, que la persona no es alta. Sin embargo, no es difícil concluir que en la realidad todas las personas son altas, en mayor o menor grado, por lo tanto, la clasificación en altas o no altas no es del todo correcta, hay personas más altas y hay personas menos altas. En estos casos el principio del tercero excluido pierde practicidad.

Esta disociación parcial entre la Matemática y la realidad ha llevado al surgimiento de la lógica multivaluada, en la que se deja de lado el principio del tercero excluido para considerar todas las alternativas que van del A al *no A*, del 0 al 1.

Esta lógica multivaluada, o difusa, ha sido el sustento del desarrollo de la Matemática Borrosa, o Matemática Difusa, que ha venido a dar solución a aquellas situaciones en las que la Matemática tradicional presenta falencias.

La Matemática tradicional es de un valor incalculable cuando se trabaja en condiciones de certeza, porque podemos afirmar que algo efectivamente es A , pero cuando nos enfrentamos a la incertidumbre, ya no podemos considerar sólo dos opciones, se hace necesario recurrir a la Matemática Borrosa, la que trabaja con infinitas alternativas intermedias entre el A y el *no A*.

Cuando comenzó a difundirse este nuevo paradigma, muchos argumentaron que la borrosidad es probabilidad encubierta, sin embargo esto no es así, y para brindar una posible explicación del por qué es que realizamos el presente trabajo, partiendo de la comparación de un número borroso triangular (NBT) con la distribución triangular.

2. LOS NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARES

Como hemos dicho, en situaciones donde la información con la que se trabaja es cierta, la Matemática tradicional es de correcta aplicación, y significa una herramienta por demás útil, sin embargo, atento a que decidimos en un marco de incertidumbre, la Matemática borrosa nos permitirá tomar mejores decisiones.

Entre los distintos elementos de la matemática borrosa decidimos valernos de los números borrosos triangulares. Un número borroso triangular (NBT) puede definirse como aquel subconjunto borroso que se halla formado por una secuencia finita o infinita de intervalos de confianza, que surgen de asignar un nivel de confianza α a los valores de un conjunto referencial dado, el que define su grado de pertenencia; medido a través de sus funciones características de pertenencia ($\mu_{(x)}$) lineales.

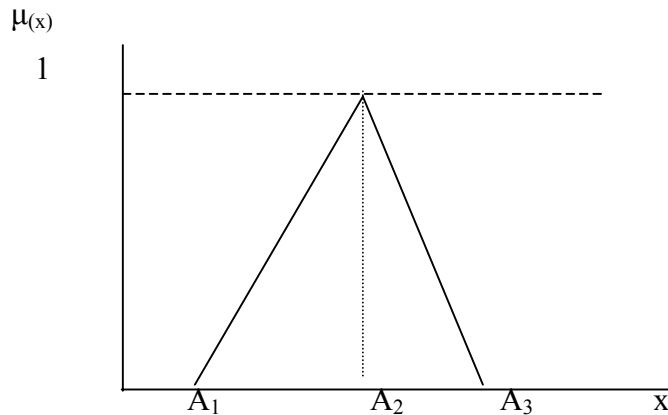
El número borroso triangular puede expresarse como un número impreciso: $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ siendo $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, lo que implica simplicidad en el cálculo tanto de los números borrosos en sí como de las operaciones entre ellos. Posee tres valores críticos:

- a) un valor central cuyo nivel de confianza α es igual a 1. Generalmente este valor proviene de un estudio técnico exhaustivo de la variable analizada;
- b) dos valores extremos cuyos niveles de confianza α son iguales a cero. El estudio nos permite definir que la variable no tomará valores más allá de dichos extremos.

Supongamos lo siguiente: si A_0 es una unidad presupuestaria cuyo número borroso triangular es igual a (13,15,22), el valor de 15 unidades monetarias proviene del estudio técnico realizado y, por lo tanto, su nivel de confianza es igual a uno, y además sabemos que el valor que adoptará la unidad presupuestaria no se ubicará fuera de los extremos 13 y 22, cuyos niveles de confianza son iguales a cero.

También se lo expresa a través de sus funciones características de pertenencia. Es decir, como un número borroso en el que sus límites $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ están representados por $\mu_{(x)}$ lineales, y cuando $\alpha = 1$, dichas funciones se intersectan.

Veamos el siguiente gráfico para facilitar la comprensión de la herramienta utilizada:



Donde $\mu_{(x)}$ representa el grado de confianza, que va desde cero hasta uno.

También podemos representar los números borrosos a través de la función $\mu_{\tilde{A}}(x)$ que indica los niveles de confianza α de dicho número borroso para cada valor $x \in R$. Para ello, habrá que determinar la función $\mu_{\tilde{A}}^i(x)$ a la izquierda del valor central del número borroso y la función $\mu_{\tilde{A}}^d(x)$ a la derecha del mismo valor, debiendo cumplirse para un determinado valor de x la siguiente igualdad: $\mu_{\tilde{A}}^i(x) = 1 = \mu_{\tilde{A}}^d(x)$

Por ejemplo, el NBT $A=[-4;1;4]$ puede representarse de la siguiente manera:

$\forall x \in R$:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \quad \text{si } x \leq -4$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x+4}{5} \quad \text{si } -4 \leq x \leq 1$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{-x+4}{3} \quad \text{si } 1 \leq x \leq 4$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0 \quad \text{si } 4 \leq x$$

Las operaciones básicas y generales con NBTs son de la siguiente manera:

- a) para sumar dos NBTs simplemente se suman los valores mínimos, más posibles y máximos para obtener el valor mínimo, más posible y máximo del NBT resultante. Por ejemplo: si $A = [8;10;13]$ y $B = [2;5;9]$, será $A+B = [10;15;22]$
- b) para restar dos NBTs, generalmente (considerando que posee algunas excepciones) se resta del valor mínimo del primer NBT el máximo del segundo, obteniéndose el mínimo del resultante; el de mayor confianza se obtiene restándole al primer valor central el segundo; y el máximo del NBT resultante se obtendrá de restar el máximo del segundo del máximo del primero. Por ejemplo: $A-B = [-1;5;11]$
- c) para la multiplicación de NBTs deberán multiplicarse el mínimo del primero por el mínimo y el máximo del segundo y el máximo del primero por el mínimo y el máximo del segundo, siendo el menor de los cuatro resultados obtenidos el mínimo del NBT resultante y el máximo de aquellos cuatro valores el máximo del nuevo NBT. El valor central se obtendrá multiplicando los valores centrales de los factores. Por ejemplo: $A(.)B = [16;50;117]$
- d) para la división de NBTs se procederá de manera análoga a la multiplicación, pero el divisor será el inverso del segundo NBT, cuyo mínimo será el inverso del máximo del segundo NBT, el máximo será el inverso del mínimo de dicho NBT y el más confiable será el inverso del más confiable de aquel NBT. Por ejemplo: $A(:)B = [0,88;2;6,5]$

3. LOS NBTs Y LA DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR

Si $Q_p = A_1$; $Q_m = A_2$ y $Q_o = A_3$, la representación gráfica del NBT y de la distribución triangular serán similares: el intervalo que consideran es el mismo y ambos tendrán un idéntico valor como más posible o más probable, respectivamente.

Ante estas similitudes resulta forzoso preguntarse cuales son las diferencias que justifican la utilización de la lógica borrosa y no la clásica y por demás útil probabilidad.

La principal diferencia entre ambos métodos es que uno parte del ya explicado principio del tercero excluido (la distribución triangular) mientras que el otro (los NBTs) lo descartan.

Además, si bien al representar gráficamente a ambos observamos que poseen igual eje de abscisas, no sucede lo mismo con las ordenadas, ya que la distribución triangular mide frecuencia y los NBTs nivel de confianza.

Creemos que se ganará en comprensión si proponemos un ejemplo concreto en lugar de continuar teorizando sobre aquello que diferencia a ambos métodos, pero antes presentaremos los atributos principales de la distribución triangular.

La distribución triangular posee tres valores de referencia: uno mínimo (Q_p), uno medio (Q_m) y otro máximo (Q_o) y una altura de $2/(Q_o-Q_p)$.

Las funciones de dominio $[Q_p;Q_m]$ y $[Q_m;Q_o]$ serán, respectivamente:

$$Y_1 = \frac{-2Q_p}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)} + \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}x$$

$$Y_2 = \frac{2Q_o}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)} - \frac{2}{(Q_o - Q_p)(Q_o - Q_m)}x$$

Por lo tanto, la media será: $m_1 = \int_a^b xf(x)dx = \int_{Q_p}^{Q_m} xY_1dx + \int_{Q_m}^{Q_o} xY_2dx$, es decir:

$$m_1 = \frac{Q_p^3(Q_o - Q_m) - Q_m^3(Q_o - Q_p) + Q_o^3(Q_m - Q_p)}{3(Q_o - Q_m)(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

Asimismo, la variancia será $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Disponemos de m_1 y, de manera

análoga, se calcula m_2 :
$$m_2 = \frac{Q_p^4(Q_o - Q_m) - Q_m^4(Q_o - Q_p) + Q_o^4(Q_m - Q_p)}{6(Q_o - Q_m)(Q_o - Q_p)(Q_m - Q_p)}$$

Consideremos ahora una empresa que está evaluando la conveniencia o no de expandir su actividad, añadiendo, por ejemplo, la fabricación de camisas a la de remeras.

Uno de los métodos más tradicionales para la evaluación de proyectos de inversión es el del *valor actual neto* (VAN), que se obtiene de sumar los distintos flujos de fondos futuros, actualizados por una tasa.

Supongamos que el proyecto signifique una inversión inicial en capital de trabajo y en maquinarias de \$25.000, y que se estima en los cinco años siguientes producirá ingresos adicionales netos de \$4.000, \$5.000, \$6.100, \$5.400 y \$4.500. Si bien la suma de los ingresos es igual a los egresos, el proyecto no es recomendable, porque los \$25.000 de inversión se deben pagar en el momento inicial, mientras que los

ingresos se irán obteniendo con el correr del tiempo. En conclusión, para hacer comparables esos importes deben actualizarse por una tasa de interés, determinándose el VAN de la siguiente manera:

$$VAN = -FFN_0 + \frac{FFN_1}{(1+k)} + \frac{FFN_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{FFN_n}{(1+k)^n}$$

La regla de decisión será que se recomiendan aquellos proyectos con VAN positivo y no aquellos con VAN negativo, siendo indiferentes los que posean un VAN de cero.

En el ejemplo que presentamos no habría dificultades en el cálculo del VAN. Si suponemos que $k=0,05$, tendremos:

$$VAN = -25.000 + \frac{4.000}{1,05} + \frac{5.000}{1,05^2} + \frac{6.100}{1,05^3} + \frac{5.400}{1,05^4} + \frac{4.500}{1,05^5} = -3.417,46$$

Dado que obtuvimos un VAN negativo, no se recomienda el proyecto.

Ahora bien, ¿podemos asegurar que los flujos de fondos netos serán de \$4.000, \$5.000, \$6.100, \$5.400 y \$4.500 para los años primero a quinto? Lo lógico es que no podamos, sencillamente son aquellos valores en los que más confianza tenemos, pero no que serán ellos con certeza, porque si no ¿dónde está el riesgo empresarial?

La teoría de las probabilidades ha propuesto un avance en la evaluación de proyectos de inversión al suponer que cada flujo de fondos neto futuro es una variable aleatoria que responde a una distribución de probabilidad. Se suelen usar, para tal fin, la distribución normal, la distribución beta y, en menor medida, la distribución triangular. En realidad no podemos afirmar que la variable en estudio sigue una distribución triangular, como tampoco podemos hacerlo para ninguna otra función de distribución, pero el argumento que se utiliza para hacer uso de tal distribución es la simplicidad, ya que sólo es necesario proponer un valor pesimista, otro optimista y uno intermedio más probable.

En el ejemplo siguiente utilizaremos la distribución triangular con el fin de lograr una mejor comparación con los NBTs, aunque las conclusiones serán válidas para cualquier distribución que se utilice.

Supongamos que el proyecto en evaluación tiene una vida útil de cinco años, y que los flujos de fondos futuros esperados son:

$$FFN_0 = -25.000$$

$$FFN_1: Q_p=1.000 \quad Q_m=4.000 \quad Q_o=6.700$$

FFN₂: Q_p=2.000 Q_m=5.000 Q_o=8.500 FFN₃: Q_p=3.200 Q_m=6.100 Q_o=9.300
 FFN₄: Q_p=3.400 Q_m=5.400 Q_o=7.050 FFN₅: Q_p=2.900 Q_m=4.500 Q_o=5.850

La inversión inicial es cierta, por lo que no posee un valor pesimista y otro optimista, está liberada de incertidumbre. Las medias restantes serán:

$$m_1 = 3.900 \quad m_2 = 5.166,67 \quad m_3 = 6.200 \quad m_4 = 5.283,33 \quad m_5 = 4.416,67$$

Con estos valores, y suponiendo que la tasa de interés que se adopte es cierta, a efectos de simplificar el ejemplo, el VAN obtenido será de:

$$VAN = -25.000 + \frac{3.900}{1,05} + \frac{5.166,67}{1,05^2} + \frac{6.200}{1,05^3} + \frac{5.283,33}{1,05^4} + \frac{4.416,67}{1,05^5} = -3.436,41$$

Como vemos, el VAN arrojado también es negativo, por lo que se llega a la misma decisión: no llevar a cabo el proyecto. Además, la diferencia entre el VAN obtenido de esta manera y aquel que obtuvimos sin considerar incertidumbre es mínima. Esto ocurre porque la media de cada flujo de fondo neto esperado es muy similar al valor central, es decir, el triángulo que cada uno describiría es casi simétrico, pero no siempre ambos VAN se asemejan tanto.

Veremos ahora que sucede si calculamos el VAN con NBTs¹:

$$VAN = -25.000 + \frac{(1.000;4.000;6.700)}{1,05} + \frac{(2.000;5.000;8.500)}{1,05^2} + \frac{(3.200;6.100;9.300)}{1,05^3} + \frac{(3.400;5.400;7.050)}{1,05^4} + \frac{(2.900;4.500;5.850)}{1,05^5} = (-14.399,83; -3.417,37; 7.508,20)$$

Este resultado se interpreta de la manera siguiente: el proyecto tendrá un VAN que se encontrará ente una pérdida de \$14.399,83 y una ganancia de \$7.508,20, siendo lo más posible que se obtenga una pérdida de \$3.417,37.

Así observamos la gran diferencia entre ambos métodos: trabajando con la distribución triangular, obtenemos un VAN negativo pero, con NBTs, si bien arribamos a la conclusión de que lo más posible es que el proyecto tenga un VAN negativo, se considera la posibilidad de que posea un VAN positivo. Con la distribución triangular no nos queda más alternativa que rechazar el proyecto, con la Matemática borrosa, en

¹ Si el lector está interesado en un análisis más exhaustivo del tema puede consultar el trabajo *Flujos de fondos proyectados en situación de incertidumbre*, del Grupo de Investigación de Matemática Borrosa de la FCEyS de la UNMdP, publicado en los Anales del XIII Congreso Nacional de Profesionales en Ciencias Económicas, Área Contabilidad y Auditoría.

cambio, vemos que existe la posibilidad de que el proyecto sea rentable, si bien no es lo más posible.

Otra diferencia la encontramos cuando comparamos los flujos de fondos netos considerados en cada caso. Tomemos, por ejemplo, el primer período: mediante la distribución triangular calculamos una media de \$3.900, este es un claro ejemplo de por qué decimos que la teoría de probabilidades se basa en el principio del tercero excluido: los flujos de fondos netos del primer año, se afirma, serán de \$3.900, que sería la alternativa *A*. Dichos flujos de fondos serán de \$3.900, o no, no existe una tercera alternativa. No importa como hayamos arribado a ese valor, no importa que sea una media que surja de considerar todos los valores posibles que puede tomar la variable en cuestión, se elige un valor y sólo uno, los flujos de fondos para el primer año serán de \$3.900 o no serán de \$3.900. En cambio, los NBTs consideran todos los valores posibles que puede tomar la variable, y con todos ellos trabaja para llegar al resultado final, que, es cierto, no goza de la misma precisión que los resultados que pueden obtenerse con la Matemática tradicional: tendremos un VAN de (-14.399,83;-3.417,37;7.508,20), en lugar de uno de -3.436,41, pero no tiene menos exactitud. El NBT resultante es menos preciso que un número cierto, pero se condice más con la realidad, otorga sinceramiento a la información, evita la falacia de considerar como cierto a algo que no lo es, porque, en definitiva, cuando decimos que los flujos de fondos netos para el período uno serán de \$3.900 es eso lo que hacemos: somos conscientes de que no podemos asegurar qué valor adoptará la variable el año próximo, pero hacemos de cuenta que sí podemos, puede tomar el valor 3.900 o puede que no, pero suponemos que sí. Esa es una simplificación mediante la cual nos estamos autoengañando.

Es cierto que resulta más simple trabajar con números precisos, pero, lamentablemente, el mundo real nos plantea muchas situaciones imprecisas, las cuales no pueden ser tratadas adecuadamente mediante la lógica bivalente del tercero excluido.

Alguien podría argumentar que considerando la variancia de cada flujo de fondos neto podemos obtener el desvío standard del VAN, arribando a un resultado compatible con el de la Matemática Borrosa.

$$\sigma^2(VAN) = 0 + \frac{1.354.989,12}{1,05^2} + \frac{1.763.876,17}{1,05^4} + \frac{1.551.668,84}{1,05^6} + \frac{556.799,52}{1,05^8} + \frac{363.476,35}{1,05^{10}} = 4.438.046,32$$

Por lo tanto, el desvío standard del VAN será: \$2.106,67.

Así, argumentarán, disponemos de la media y del desvío standard del VAN y, suponiendo que tal variable sigue una distribución normal, podemos afirmar que existe un 68,26% de probabilidad de que el VAN se encuentra entre $-5.543,08$ y $-1.329,74$.

Sin embargo, así no escapa al principio del tercero excluido: el VAN del proyecto estará entre $-5.543,08$ y $-1.329,74$ o no. Lo único que hicimos es ampliar el rango de A , pero sigue habiendo dos alternativas.

Es probable que el VAN se encuentre dentro de dicho intervalo, pero no podemos asegurarlo. En cambio, sí podemos asegurar que se encontrará entre el valor mínimo y el máximo del NBT obtenido. Por supuesto, el NBT de cada flujo de fondo neto deberá ser fijado por un *experto* en la materia, y no en forma arbitraria.

Frente un contexto de constante cambio, la información que brinda una estimación en términos de certeza (Matemática tradicional) resultará más inexacta que una estimación en términos difusos, ya que ambas son realizadas en el campo de la incertidumbre.

Para cuantificar la imprecisión tampoco resultan adecuadas las técnicas probabilísticas, ya que aceptaríamos la equivalencia entre los fenómenos imprecisos y los aleatorios. Por lo tanto, al apartarnos del paradigma del tercero excluido logramos un acercamiento a la realidad.

De este modo, en relación a la modelización y resolución de problemas en ambientes inciertos la matemática borrosa “nos permitirá, a falta de ser más exactos, ser mas honestos” [Kauffmann y Gil Aluja, 1987] mejorando la información necesaria para la toma de decisiones.

REFERENCIAS

[Kauffmann y Gil Aluja, 1987] *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*; Editorial Hispanoeuropea; Barcelona; 1987; págs 19/20.

[Kosko, 1995] *Pensamiento Borroso*; Editorial Crítica; 1995; pág 17.