UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

TESI DI LAUREA

IL TERZO TEOREMA DI GÖDEL - KREISEL NELLA TEORIA INTUIZIONISTICA DEI TIPI DI MARTIN - LÖF

RELATORE: Ch.mo Prof. Giovanni Sambin

LAUREANDO: Ferruccio Guidi

ANNO ACCADEMICO 1997 - 1998

A Milly e Sara

INDICE GENERALE.

Premessa. . . . . **i**

1. Sintassi della logica intuizionistica.

1.1. Nota sulla simbologia. 1
1.2. Linguaggi al primo ordine, termini e formule. 1
1.3. Sequenti. 3
Figura 1: il sistema LJ. 4

2. Risultati di teoria della dimostrazione.

2.1. Teoremi preliminari. 5
2.2. Un teorema di Herbrand. 6
Figura 2: il lemma di riflessione. 9
Figura 3: la normalizzazione delle WL. 10
Figura 4: il teorema di Herbrand - secondo passo. 11
Figura 5: il teorema di Herbrand - quarto passo. 11

3. Il metalinguaggio e la semantica intuitiva.

3.1. La semantica intuitiva. 13
3.2. Numeri naturali, funzioni e relazioni ricorrenti primitive. . . 14
3.3. Generalità sul risultato principale. 15

4. Dettagli sul risultato principale.

4.1. Il linguaggio del modello canonico e la costruzione di $R°$. . . 17
4.2. I tre lemmi principali. 20

5. Sintassi e semantica in *ITT*.

5.1. Note su ITT. 23
5.2. Il linguaggio, i termini e le formule. 23
5.3. I sequenti e le prove. 24
5.4. La semantica intuitiva in ITT. 25
5.5. Funzioni e relazioni ricorrenti primitive in ITT. 26
Figura 6: numeri naturali e liste. 27
Figura 7: l'insieme $\mathtt{V}$. 28
Figura 8: termini e loro istanze in ITT. 30
Figura 9: formule e loro istanze in ITT. 32
Figura 10: l'insieme $\mathtt{J}$. 37
Figura 11: l'interpretazione di termini e formule. 39
Figura 12: funzioni e relazioni ricorrenti primitive in ITT. . . 40

6. Formalizzazione degli enunciati in *ITT*.

6.1. Formalizzazione del modello canonico $\mathcal{C}$. 43
6.2. I risultati preliminari. 43
6.3. Il risultato principale in ITT. 44
Figura 13: i risultati preliminari in ITT. 46
Figura 14: il risultato principale in ITT. 47

Bibliografia. **49**

PREMESSA.

I teoremi di Gödel-Kreisel compaiono per la prima volta in [Kre2] e costituiscono la sistemazione, operata da G. Kreisel, di un inedito risultato dovuto a K. Gödel (1957) di cui si trova qualche vaga traccia in [Göd].
In seguito questi teoremi sono stati riproposti da altri autori fra i quali D.C. McCarty che in [McC2] indica come *terzo teorema di Gödel-Kreisel* il seguente risultato:

la completezza forte del frammento negato della logica intuizionistica rispetto alla semantica intuitiva implica la validità del principio di Markov nel metalinguaggio

dove "semantica intuitiva" è una libera traduzione di *naive semantics*.
In questa tesi proveremo che questo teorema può essere effettivamente enunciato e dimostrato nell'ambito della teoria intuizionistica dei tipi di P. Martin-Löf (*ITT*), che si trova esposta dettagliatamente in [MLS] e [NPS].
Questo risultato rappresenta il primo passo per la costruzione di una prova totalmente esprimibile in *ITT* del teorema di incompletezza della logica intuizionistica già ottenuto da Kreisel e McCarty mediante costrutti che però risultano incompatibili con la teoria fondazionale in questione (*Church thesis*, *choice sequences*, ...)
È bene ricordare che questa teoria offre un completo controllo delle informazioni necessarie per emettere ogni giudizio esprimibile nel suo linguaggio e pertanto risulta particolarmente adeguata come ambiente di sviluppo per la matematica costruttiva.
Il nostro risultato è stato ottenuto in due fasi: dapprima si è ricostruita la prova del teorema apportando alcune modifiche (a volte molto vistose) alla dimostrazione originale di Kreisel nella versione presentata da A.S. Troelstra e D. van Dalen in [TvD], poi è stata creata un'estensione di *ITT* (cioè sono stati definiti dei nuovi *set* e delle nuove funzioni) con cui è stato possibile esprimere la prova stessa.
La dimostrazione originale di Kreisel si basa sulla particolare versione del teorema di Herbrand per le formule prenesse negate che si applica quando il linguaggio è privo di segni per costanti e di segni per funzioni. Tuttavia abbiamo rilevato che tralasciando questa limitazione, la prova non solo si mantiene valida ma risulta semplificata.
Però risulta necessario enunciare e dimostrare il detto teorema di Herbrand nella sua forma più generale, che risulta essere quella in cui le prove delle formule prenesse in questione contengono (occorrenze di) assiomi non logici.
Questi assiomi, siano essi regole o formule, sono di fatto presenti in ogni sistema deduttivo basato su un linguaggio che comprenda segni per costanti e per funzioni, e sono responsabili dell'introduzione di questi segni nelle deduzioni.
Comunque il teorema risulta valido solo se le dette occorrenze degli assiomi non logici soddisfano determinate condizioni e quelle presentate in questa tesi, pur non essendo necessarie, sono certamente sufficienti.
La dimostrazione che diamo qui di questo teorema, è basata sul *midsequent theorem* che G. Gentzen dimostra in [Gen] e risulta particolarmente diretta (cioè basata su pochi teoremi precedenti) avendo solo bisogno di una versione della *cut elimination*.
Essa infine, oltre ad essere molto costruttiva e del tutto formalizzabile nell'estensione di *ITT* che preciseremo, mette chiaramente in luce il carattere commutazionale del teorema di Herbrand per le formule prenesse negate.

Tornando ora alla prova di Kreisel, notiamo che essa si basa su due lemmi (detti nel seguito lemmi principali) uno dei quali fa uso di Herbrand. L'altro si basa invece su un lemma assente sia in [Kre2] che in [TvD] e che noi abbiamo esplicitato.
In definitiva la struttura logica della prova risulta essere della forma seguente:

$$\begin{tikzcd} \text{lemma secondario} \arrow[r] & \text{primo lemma principale} \arrow[dr] & \\ & & \text{teorema di Gödel-Kreisel} \\ \text{teorema di Herbrand} \arrow[r] & \text{secondo lemma principale} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Dal lemma secondario ricaveremo anche un terzo lemma detto anch'esso principale perché pur non entrando nella prova, ha molte affinità con il primo di questi lemmi.
L'estensione di *ITT* in cui viene formalizzata questa prova si basa largamente sul *set* `N` dei numeri naturali e sul *set* `List(P)` delle liste sul *set* `P`.
Il *set* `V` delle variabili viene tenuto distinto da `N` per evitare ambiguità nelle espressioni che contengono elementi di entrambi i *set*.
Altri due *set* simili a quelli utilizzati in [Per] contengono termini e formule ma il meccanismo con cui viene gestita la sostituzione simultanea differisce totalmente da quello di H. Persson e si avvale di una potente funzione chiamata $\triangle$ che a seconda dei casi estrae i termini da una lista o li inserisce in essa.
Con altri *set* vengono gestite le formule prenesse, le sottoformule, le funzioni primitive ricorrenti, le loro componenti e le deduzioni intuizionistiche.
I rimanenti strumenti necessari vengono gestiti definendo funzioni e giudizi di *ITT*.
Il materiale esposto è stato organizzato in modo da rispettare l'ordine logico delle fasi con cui è stato ottenuto il risultato che presentiamo; infatti i primi quattro capitoli contengono la nostra versione della prova originale di Kreisel che viene poi espressa in *ITT* nei due capitoli restanti.
In particolare nel primo capitolo sono riportate le definizioni di carattere sintattico (linguaggio al primo ordine, termini, formule) ed è descritto il sistema di deduzione che si intende usare, ovvero una versione modificata del sistema LJ di Gentzen [Gen].
La presente versione di LJ deve la propria simbologia a [SBF] e le regole sui connettivi vi compaiono in forma additiva per semplificare al massimo la procedura di *cut elimination*. Inoltre l'aggiunta di contesto a destra della formula attiva nelle regole *cut* e WL (indebolimento a sinistra), permette la loro commutazione con la regola XL (scambio a sinistra). Il teorema di Herbrand per le formule prenesse negate è provato nel secondo capitolo assieme al teorema di normalizzazione per regole WL.
Il terzo capitolo introduce la semantica intuitiva, le funzioni ricorrenti primitive e le generalità sulla prova del risultato principale che viene poi esposta dettagliatamente nel capitolo successivo. L'estensione di *ITT* in cui la prova si formalizza è descritta nel capitolo cinque ed è usata nel capitolo seguente per riformulare le dimostrazioni del risultato principale e dei lemmi.
In chiusura mi sembra doveroso ringraziare il professor G. Sambin per avermi dato l'opportunità di approfondire con questa tesi alcune affascinanti tematiche di teoria della dimostrazione e di teoria dei modelli.
Ringrazio inoltre M.E. Maietti, S. Sadocco, A. Salerni e M.A. Vanzetto per il prezioso sostegno spontaneamente offertomi nei momenti più critici che si sono presentati durante lo svolgimento di questo lavoro.

CAPITOLO 1.
SINTASSI DELLA LOGICA INTUIZIONISTICA.

1.1. Nota sulla simbologia.

[1] Se $\mathtt{D}$ è un insieme ed n è un intero non negativo, indicheremo con $\mathtt{D}^n$ l'insieme delle n-uple ordinate di elementi di $\mathtt{D}$. $\mathtt{D}^n$ è dunque l'insieme delle scritture:

$$(d_1, \dots, d_n)$$

in cui ciascun d_i è un elemento di $\mathtt{D}$.
Si osservi in particolare che $\mathtt{D}^0$ contiene l'unica scrittura: $()$.
Con le notazioni:

$$d \in (d_1, \dots, d_n) \quad \text{e} \quad d \notin (d_1, \dots, d_n)$$

intenderemo asserire che d è o rispettivamente non è uno dei d_i.
Indicheremo poi con $\mathtt{D}^*$ l'unione dei $\mathtt{D}^n$ al variare di n e chiameremo nel seguito **vettori** i suoi elementi.
Dati i vettori $\overline{d}_1$ e $\overline{d}_2$ indicheremo con $\overline{d}_1 \cup \overline{d}_2$ il vettore le cui componenti sono, nell'ordine, quelle di $\overline{d}_1$ seguite da quelle di $\overline{d}_2$ che non compaiono in $\overline{d}_1$.
Scriveremo poi $\overline{d} - d$ per designare il vettore ottenuto sopprimendo nel vettore $\overline{d}$ la prima componente pari a d, se presente.

[2] Data ora la funzione g in $\mathtt{D}^n \mapsto D$ e la n-upla $\overline{f} = (f_1, \dots, f_n)$ di funzioni in $\mathtt{D}^m \mapsto \mathtt{D}$, definiamo la funzione $g \circ \overline{f}$ in $\mathtt{D}^m \mapsto \mathtt{D}$ (la **composizione**) ponendo:

$$(g \circ \overline{f})(d_1, \dots, d_m) \equiv g(f_1(d_1, \dots, d_m), \dots f_n(d_1, \dots, d_m)).$$

Analogamente si definisce $\mathtt{R} \circ \overline{f}$ se $\mathtt{R}$ è una relazione su $\mathtt{D}^n$.

[3] Una **regola** $\mathcal{I}$ che deduce la verità della proposizione $\mathtt{Q}$ (la **conclusione**) dalla verità delle proposizioni $\mathtt{P}_1, \dots, \mathtt{P}_n$ (le **assunzioni**) verrà indicata con la scrittura:

$$\frac{\mathtt{P}_1 \dots \mathtt{P}_n}{\mathtt{Q}} \mathcal{I}.$$

Si osservi in particolare che se $n = 0$ allora $\mathcal{I}$ deduce $\mathtt{Q}$ senza bisogno di assunzioni.
$\mathcal{I}$ può essere anche pensata come un grafo con n archi tesi fra $n + 1$ nodi: un nodo (il **padre**) è associato a $\mathtt{Q}$ e i restanti (i **figli**) sono associati a $\mathtt{P}_1, \dots, \mathtt{P}_n$; gli archi congiungono il padre a ciascuno dei figli.

[4] Una **prova** Π in un **sistema** S di regole può allora allora essere vista come l'albero formato dall'unione dei grafi che corrispondono a ciascuna regola di Π e ciò permette di applicare alle prove la terminologia relativa agli alberi.
In particolare chiameremo **albero** e **cammino** di una proposizione $\mathtt{P}$, rispettivamente il sottoalbero di radice $\mathtt{P}$ e il cammino che congiunge $\mathtt{P}$ alla conclusione.
A questo punto la **derivabilità** in S viene introdotta affermando che la regola $\mathcal{I}$ (non necessariamente in S) è derivabile in S quando esiste una prova Π in S tale che Π e $\mathcal{I}$ hanno le stesse assunzioni e la stessa conclusione. La proposizione $\mathtt{Q}$ è derivabile in S quando in S si deriva la regola che ha zero assunzioni e $\mathtt{Q}$ come conclusione.

1.2. Linguaggi al primo ordine, termini e formule.

[1] Un **linguaggio al primo ordine** $\mathcal{L}$ contiene i seguenti segni:

A. segni per costanti, il generico dei quali sarà c_j,
B. segni per funzioni, il generico dei quali sarà f_h e avrà arietà a_h,
C. segni per relazioni, il generico dei quali sarà R_k e avrà arietà b_k.

L'insieme $\mathtt{V}$ delle variabili sarà costituito dalla successione di segni: $x_0, x_1, \ldots$

[2] L'insieme $\mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ dei **termini** è definito per ricorrenza dalle seguenti clausole:

A. ogni variabile è un termine,
B. ogni costante è un termine,
C. se $\bar{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^{a_h}$ allora $f_h \bar{t}$ è un termine,

[3] Ad ogni $t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ associamo $\mathtt{FV}(t) \in \mathtt{V}^*$ con le variabili presenti in t. Cioè:

$$\begin{aligned}\mathtt{FV}(x_i) &\equiv (x_i),\\ \mathtt{FV}(c_j) &\equiv (),\\ \mathtt{FV}(f_h(t_1, \ldots t_{a_h})) &\equiv \mathtt{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathtt{FV}(t_{a_h}).\end{aligned}$$

La terza clausola verrà scritta anche: $\mathtt{FV}(f_h \bar{t}) \equiv \cup_{i=1}^{a_h} \mathtt{FV}(t_i)$.

[4] L'insieme $\mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ delle **formule** è definito per ricorrenza dalle seguenti clausole:

A. $\perp$ è una formula,
B. se $\bar{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^{b_k}$ allora $R_k \bar{t}$ è una formula.
C. Se A e B sono formule allora $(A) \otimes (B)$, $(A) \oplus (B)$ e $(A) \to (B)$ sono formule.
D. Se A è una formula e se $x \in \mathtt{V}$ allora $\forall x(A)$ e $\exists x(A)$ sono formule.

Per brevità, tralasceremo le parentesi ogni volta che ci sarà possibile.

[5] $\mathtt{BV}(A)$ e $\mathtt{FV}(A)$ sono i vettori di $\mathtt{V}$ che contengono rispettivamente le variabili che in A compaiono vincolate e non vincolate:
Nel seguito $\Box$ indicherà uno qualunque dei connettivi $\otimes$, $\oplus$, $\to$, e Q indicherà uno qualunque dei quantificatori $\forall$, $\exists$:

$$\begin{array}{rlrl}\mathtt{FV}(\perp) &\equiv () & \mathtt{BV}(\perp) &\equiv ()\\ \mathtt{FV}(R_k \bar{t}) &\equiv \cup_{i=1}^{b_k} \mathtt{FV}(t_i) & \mathtt{BV}(R_k \bar{t}) &\equiv ()\\ \mathtt{FV}(A \Box B) &\equiv \mathtt{FV}(A) \cup \mathtt{FV}(B) & \mathtt{BV}(A \Box B) &\equiv \mathtt{BV}(A) \cup \mathtt{BV}(B)\\ \mathtt{FV}(QxA) &\equiv \mathtt{FV}(A) - x & \mathtt{BV}(QxA) &\equiv \mathtt{BV}(A) \cup (x)\end{array}$$

[6] A e t si diranno **chiusi** (contr. **aperti**) se $\mathtt{FV}(A) = ()$ o $\mathtt{FV}(t) = ()$; A si dirà poi **proposizionale** (contr. **predicativa**) se $\mathtt{BV}(A) = ()$.

[7] Le seguenti clausole definiscono l'insieme $\mathtt{Pren}(\mathcal{L})$ delle formule **prenesse** e la **matrice** (indicata con mat) di ciascuna di esse:

$$\begin{gathered}\text{se } A \in \mathtt{PFrm}(\mathcal{L}) \text{ allora } A \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \text{ e } mat(A) \equiv A,\\ \text{se } A \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \text{ e } x \in \mathtt{V} \text{ allora } QxA \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \text{ e } mat(QxA) \equiv mat(A).\end{gathered}$$

Conviene poi estendere la funzione mat ad una formula qualunque, per renderla totale su $\mathtt{Frm}(\mathcal{L})$, e il modo più diretto è il seguente:

$$\begin{aligned}mat(\perp) &\equiv \perp\\ mat(\mathtt{R}\,\bar{t}) &\equiv \mathtt{R}\,\bar{t}\\ mat(A \Box B) &\equiv mat(A) \Box mat(B)\\ mat(QxA) &\equiv mat(A)\end{aligned}$$

[8] Considerata ora la formula A e $\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ della stessa lunghezza di $\mathtt{FV}\,(A)$, si indicherà con $A[\,\overline{t}\,]$ l'effetto della sostituzione simultanea in A delle occorrenze libere delle componenti di $\mathtt{FV}\,(A)$ con le componenti di $\overline{t}$ (prese nell'ordine).
Con $A[x/t\,]$ indicheremo invece l'effetto della sostituzione in A delle occorrenze libere della variabile x con il termine t.
Chiameremo poi **istanza** di A ogni espressione $A[\,\overline{t}\,]$ per qualche $\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ della stessa lunghezza di $\mathtt{FV}\,(A)$.
Anche queste due definzioni saranno estese ai termini.

[9] Date le formule E ed F, con le scritture:

$$E \leq F \quad \text{e} \quad E < F$$

intendiamo asserire che E è **sottoformula** o **sottoformula propria** di F nel senso di Gentzen. Queste notazioni sono definite per induzione mediante le seguenti clausole:

$$\begin{gathered} A \leq A, \\ A \leq A \text{ e } A < A, \\ \text{se } C \leq A \text{ o } C \leq B \text{ allora } C \leq A\Box B \text{ e } C < A\Box B, \\ \text{se } C \leq A[x/t\,] \text{ allora } C \leq QxA \text{ e } C < QxA, \end{gathered}$$

1.3. Sequenti.

[1] Un **sequente** σ è una scrittura della forma:

$$\Gamma \vdash A$$

con la quale asseriamo che la formula A (la **conseguente**) si dimostra assumendo le componenti del vettore di formule Γ (le **antecedenti**).
Chiamando ora "formule di σ" sia A che le componenti di Γ, possiamo definire σ come **proposizionale** quando lo sono tutte le sue formule. Una simile dichiarazione definisce i sequenti **prenessi**.
Inoltre chiameremo "sottoformule di σ" le sottoformule delle formule di σ.
In questa sede la locuzione "formula" può anche significare "occorrenza di formula".

[2] Se S è un sistema di regole le cui assunzioni e conclusioni sono sequenti, scriveremo:

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{S}} A$$

quando esiste in S una prova che conclude $\Gamma \vdash A$ senza assunzioni.

[3] Se $\mathcal{I}$ è una regola di S, le formule che compaiono in $\mathcal{I}$ sono divise in tre gruppi:

A. Sono di **contesto** quelle formule che compaiono identiche in una assunzione e nella conclusione in quanto $\mathcal{I}$ non agisce su esse.
B. Sono **laterali** quelle formule delle assunzioni che non sono di contesto.
C. Sono **principali** quelle formule della conclusione che non sono di contesto.

[4] In particolare le costanti logiche sono regolate dal sistema LJ descritto in figura 1 dove si è posto: $\mathtt{FV}\,(A_1, \ldots, A_n) \equiv \mathtt{FV}\,(A_1) \cup \ldots \cup \mathtt{FV}\,(A_n)$ se $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})^n$.
Le regole di questo sistema hanno forma generale:

$$\frac{\Gamma_1, \Psi_1 \vdash C_1 \ldots \Gamma_n, \Psi_n \vdash C_n}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi \vdash C} \tag{1}$$

dove $\Gamma_1, \dots \Gamma_n$ sono vettori di formule di contesto che non devono essere omessi, e gli altri elementi rappresentano formule e vettori di formule che possono essere laterali, principali o di contesto a seconda della singola regola.
I segni del linguaggio $\mathcal{L}$ (le costanti non logiche) sono invece regolate da un sistema Σ, dipendente da $\mathcal{L}$, che può essere arbitrario purché:

A. le sue regole abbiano la forma generale (1) e
B. esso sia **consistente** con LJ, cioè il sequente $\vdash \perp$ non sia derivabile nel sistema LJ^+ottenuto dall'unione di LJ e Σ.

Chiameremo allora **dimostrabili** le regole e i sequenti derivabili in LJ^+e spesso scriveremo $\Gamma \vdash A$ al posto di $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}^+} A$.

Figura 1: il sistema LJ.

Regole **proposizionali** (sui connettivi):

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes R \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \otimes L1 \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \otimes L2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus R1 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus R2 \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \oplus B \vdash C} \oplus L$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to R \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \to B \vdash C} \to L$$

Regole **predicative** (sui quantificatori):

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad \Gamma \vdash A \quad y \notin \mathtt{FV}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall y A} \forall R \qquad \frac{y \in \mathtt{V} \quad u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad \Gamma, A[y/u] \vdash C}{\Gamma, \forall y A \vdash C} \forall L$$

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad \Gamma \vdash A[y/u]}{\Gamma \vdash \exists y A} \exists R$$

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad \Gamma, A \vdash C \quad y \notin \mathtt{FV}(\Gamma) \cup \mathtt{FV}(C)}{\Gamma, \exists y A \vdash C} \exists L$$

Regole **strutturali**:

$$\frac{}{A \vdash A} Top \qquad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash C} WR \qquad \frac{\Gamma, \Phi \vdash C}{\Gamma, A, \Phi \vdash C} WL \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C} CL \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Phi \vdash C}{\Gamma, B, A, \Phi \vdash C} XL$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A, \Phi \vdash C}{\Delta, \Gamma, \Phi \vdash C} Cut$$

Si pone poi $\neg A \equiv A \to \perp$.

CAPITOLO 2.
RISULTATI DI TEORIA DELLA DIMOSTRAZIONE.

2.1. Teoremi preliminari.

[1] Il primo risultato riguarda le regole $\otimes R$, $\rightarrow R$ e $\forall R$:

Lemma 2.1.1 di riflessione.

A. LJ$^+$*dimostra* $\Gamma \vdash A \otimes B$ *sse* LJ$^+$*dimostra* $\Gamma \vdash A$ *e* $\Gamma \vdash B$.
B. LJ$^+$*dimostra* $\Gamma \vdash A \rightarrow B$ *sse* LJ$^+$*dimostra* $\Gamma, A \vdash B$.
C. LJ$^+$*dimostra* $\Gamma \vdash \forall y A$ *sse* LJ$^+$*dimostra* $\Gamma \vdash A[y/u]$ *per ogni* $u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$.

Dimostrazione.

A. Se LJ$^+$dimostra $\Gamma \vdash A$ e $\Gamma \vdash B$ allora si aggiunge alle due prove una $\otimes R$ seguita da un conveniente numero di CL; per il viceversa, la figura 2 mostra come dedurre $\Gamma \vdash A$ da $\Gamma \vdash A \otimes B$ e il simmetrico per B è analogo.
B. Se LJ$^+$dimostra $\Gamma, A \vdash B$ si aggiunge alla prova una $\rightarrow R$.
La figura 2 mostra poi come dedurre $\Gamma, A \vdash B$ da $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.
C. Se LJ$^+$dimostra $\Gamma \vdash A[y/u]$ per ogni $u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ senza che u compaia in Γ allora si può supporre che u sia una variabile e si può quindi aggiungere una $\forall R$ al termine della prova.
La figura 2 mostra infine come dedurre $\Gamma \vdash A[y/u]$ da $\Gamma \vdash \forall y A$. $\diamondsuit$

[2] Il lemma seguente fornisce alcune proprietà di una generica prova in Π LJ$^+$: in questo contesto chiameremo **speciale** una (occorrenza di una) formula F di Π quando essa è sottoformula di una laterale di un Cut o una di regola di Σ presente nel cammino di F stessa.

Lemma 2.1.2 della sottoformula.

Ogni prova Π *in* LJ$^+$*ha le seguenti proprietà:*

A. *Ogni formula non speciale è una sottoformula del sequente conclusivo.*
B. *Ogni antecedente non speciale* F *è una sottoformula o di un'antecedente conclusiva oppure di una laterale di una* $\rightarrow R$ *presente nel cammino di* F.
C. *Ogni conseguente non speciale* F *è una sottoformula o della conseguente conclusiva oppure di una laterale di una* $\rightarrow L$ *presente nel cammino di* F.

Dimostrazione.

Si osserva che ogni regola di LJ$^+$ha le proprietà richieste e si procede per induzione sulla struttura di Π. $\diamondsuit$

[3] A seguire ecco un altro lemma sulle proprietà di Π:

Lemma 2.1.3 sull'introduzione delle formule.

Per ogni formula F *di una prova senza premesse esiste una formula* F_p *nell'albero di* F *che è identica a* F *e principale in una regola diversa da* XL. *Inoltre* F *e* F_p *sono entrambe antecedenti oppure entrambe conseguenti dei sequenti in cui compaiono.*

Dimostrazione.

Siccome la prova è senza premesse, ogni foglia è la conclusione di una Top e ciò impedisce all'albero di F di contenere solo XL o regole in cui F è di contesto. $\diamondsuit$

[4] Presentiamo poi il teorema di commutazione per la regola WL:

Teorema 2.1.4 sulla normalizzazione delle WL.

Ogni prova Π *in* LJ$^+$*si può trasformare in una prova* Π^*, *sempre in* LJ$^+$, *avente le stesse premesse e la stessa conclusione, e tale che la regola* $\mathcal{I}$ *successiva ad ogni* WL $\mathcal{I}_w$ *ha la seguente proprietà:*

A. $\mathcal{I}$ *è anch'essa una* WL *oppure*
B. $\mathcal{I}$ *è una* $\to R$ *o una regola di* Σ *in cui la formula introdotta da* $\mathcal{I}_w$ *è laterale.*

Dimostrazione.

Diremo che un'istanza $\mathcal{I}_w$ di WL è **sopra** una regola $\mathcal{I}$ quando:

1. la formula introdotta da $\mathcal{I}_w$ è di contesto per $\mathcal{I}$ e
2. la regola successiva di $\mathcal{I}_w$ è $\mathcal{I}$ oppure è una WL sopra $\mathcal{I}$.

A questo punto chiamiamo **ordine** della prova il numero delle sue regole diverse da WL nell'albero della cui conclusione c'è almeno una WL che viola 2.1.4.
Chiamiamo poi rango di una regola $\mathcal{I}$ il numero di WL sopra $\mathcal{I}$ nel senso specificato, ed infine il rango della prova sia la somma dei ranghi delle sue regole diverse da WL.
Ora ogni istanza di WL può essere commutata con la regola successiva nei casi e nei modi illustrati in figura 3; qui le prime due commutazioni diminuiscono l'ordine mentre la terza non aumenta l'ordine e diminuisce il rango.
L'enunciato 2.1.4 si prova allora per induzione sull'ordine e per sottoinduzione sul rango (che può aumentare abbassando l'ordine). $\diamondsuit$

Si noti la forma di WL con Φ per permettere la commutazione con XL.

[5] Da ultimo presentiamo il teorema di commutazione per la regola Cut.

Teorema 2.1.5 sulla normalizzazione dei Cut.

Ogni prova Π *in* LJ$^+$*si può trasformare in una prova* Π^*, *sempre in* LJ$^+$, *avente le stesse premesse e la stessa conclusione, e tale che le regole che precedono ogni* Cut $\mathcal{I}_c$ *hanno le seguenti proprietà:*

A *la formula tagliata da* $\mathcal{I}_c$ *è principale in entrambe e*
B *una di esse è una regola di* Σ *e l'altra è un cut oppure non è strutturale.*

Dimostrazione.

La prova è una modifica dell'*hauptsatz* di Gentzen in [Gen] n°2.5 pag. 87.
Prendendo come assiomi le conclusioni delle regole di Π che appartengono a Σ, si può anche usare la *cut on axioms* in [TS] n°4.4.1 pag. 97.
$\mathcal{I}_c$ non è preceduto da regole strutturali diverse da Cut perché esso commuta sempre con WR, WL, CL e XL. $\diamondsuit$

2.2. Un teorema di Herbrand.

[1] Dimostriamo ora il teorema di Herbrand per le formule prenesse negate ricalcando la prova del *midsequent theorem* di Gentzen in [Gen] n°2.1 pag. 106.
A tale scopo chiameremo **semplice** una (istanza di una) regola in cui le formule laterali e principali sono proposizionali:

Teorema 2.2.1 di Herbrand per le formule prenesse negate

Sia F prenessa e sia data una prova di $\vdash \neg F$ in LJ$^+$*in cui le istanze delle regole di Σ sono semplici nel senso specificato, allora esiste una congiunzione C di istanze di $mat(F)$ tale che $\vdash \neg C$ è derivabile in* LJ$^+$.
In ogni congiunto di C le variabili che in F sono vincolate da $\forall$, sono sostituite da termini opportuni mentre le altre non sono modificate.

Dimostrazione.

La prova di $\vdash \neg C$ è ottenuta modificando opportunamente quella di $\vdash \neg F$ mediante la seguente procedura che, per comodità del lettore, dividiamo in quattro passi.
- Primo passo: normalizzazione dei *Cut*.

Iniziamo applicando il lemma 2.1.1B che fornisce una prova di $F \vdash \bot$ e a questa applichiamo il teorema 2.1.5 per normalizzare i *Cut*.
Allora il lemma 2.1.2 ha conseguenze notevoli:

1. *Tutte le formule speciali nella prova sono proposizionali.*

Infatti sono proposizionali sia le laterali delle regole di Σ che sono semplici, sia le formule tagliate perché esse sono principali in qualche regola di Σ per via di 2.1.5.

2. *Nessuna regola proposizionale della prova ha una laterale predicativa.*

Infatti ammettendo che una tale regola esista, la sua principale non potrebbe essere una sottoformula conclusiva essendo $F \vdash \bot$ un sequente prenesso, né potrebbe essere speciale per via di 1 e ciò è in evidente contraddizione con 2.1.2A.

3. *Nessuna conseguente della prova è predicativa.*

Infatti la presenza di una conseguente predicativa è in contrasto con 2.1.2C dato che essa non può essere né sottoformula di $\bot$, né sottoformula di una laterale in una istanza di $\to L$ per quanto detto al punto 2, né può essere speciale per via di 1.

4. *La prova non contiene istanze delle regole $\forall R$ e $\exists R$.*

Infatti queste regole generano una conseguente predicativa in contrasto con 3.
- Secondo passo: commutazione delle regole predicative.

Volendo ora portare le regole predicative verso la radice, definiamo l'**ordine** di una regola predicativa $\mathcal{I}_q$ come la quantità di regole proposizionali, regole di Σ e *Cut*, dette in questo caso **estranee**, presenti nel cammino della sua conclusione.
L'ordine della prova sia poi la somma degli ordini delle sue regole predicative.
Se questo è maggiore di 0, esiste una regola predicativa $\mathcal{I}_q$ nel cammino della cui conclusione è presente una regola estranea $\mathcal{I}$. Possiamo inoltre supporre che $\mathcal{I}_q$ e $\mathcal{I}$ siano separate solo da regole strutturali.
In questo caso $\mathcal{I}$ si commuta con $\mathcal{I}_q$ nel modo indicato in figura 4 e con ciò l'ordine di $\mathcal{I}_q$ diminuisce di un'unità. Questo consente dunque di annullare l'ordine della prova.
Si noti che non è necessario riapplicare 2.1.5 dopo ogni commutazione e comunque ciò non farebbe aumentare l'ordine infatti l'eventuale *Cut* che segue $\mathcal{I}$ commuta sia con le regole di struttura sia con $\mathcal{I}_q$, abbassando addirittura l'ordine. Risulta però necessario applicare 2.1.5 dopo l'ultima commutazione.

• Terzo passo: reperimento del sequente mediano.
Annullato l'ordine della prova, si applica 2.1.4 per normalizzare le WL e si osserva che con ciò non aumenta l'ordine visto che le commutazioni introducono solo WL.
Si percorra ora l'albero della prova così ottenuta procedendo dalla radice verso le foglie e si determini la prima regola $\mathcal{I}$ diversa da $\forall L$, $\exists L$, WR, WL, CL e XL la cui conclusione si indichi con σ che si dirà **sequente mediano**.
Questo particolare sequente ha le seguenti proprietà:

1. σ è del tipo: $\Gamma \vdash \bot$ e Γ contiene solo sottoformule di F.[1]

Infatti l'asserto è senz'altro provato se σ e la conclusione $F \vdash \bot$. Altrimenti le antecedenti e la conseguente di σ devono essere rispettivamente sottoformule della antecedente e della conseguente conclusiva per via di 2.1.2B e C non essendoci istanze di $\to R$, $\to L$, Cut o regole di Σ nel cammino di σ.

2. σ è un sequente proposizionale.

Sia infatti G un'antecedente predicativa di σ e sia $\mathcal{I}_G$ la regola in cui G compare come principale secondo il lemma 2.1.3. La seguente indagine su $\mathcal{I}_G$ porta ad un assurdo se si tiene conto di 1.
$\mathcal{I}_G$ non può essere una regola di Σ o una Top o una WR per via di 3 del primo punto.
$\mathcal{I}_G$ non può essere proposizionale essendo G prenessa perché sottoformula di F.
$\mathcal{I}_G$ non può essere neanche una regola predicativa perché, visto 4 del primo punto, le $\forall R$ e le $\exists R$ non si presentano e le $\forall L$ e le $\exists L$ sono successive a $\mathcal{I}_G$.
Se $\mathcal{I}_G$ è una WL allora si può assumere che essa sia l'ultima regola della prova infatti essa non può essere seguita da una $\to R$, che avrebbe una laterale predicativa in contrasto con 2 del primo punto, e può essere commutata con le WL che la seguono per via di 2.1.4. Dunque la prova sarebbe della forma:

$$\cfrac{\overline{\overline{\vdash \bot}}}{F \vdash \bot}\,\mathcal{I}_G \equiv WL$$

da cui si potrebbe dedurre l'inconsistenza di LJ^+sopprimendo $\mathcal{I}_G$.
Siccome i casi $\mathcal{I}_G \equiv WR$, CL e Cut non si presentano perché La prima regola ha la principale a destra e le altre due non hanno principali, si giunge all'assurdo come si voleva, mancando altre possibilità di scegliere $\mathcal{I}_G$.

3. Ogni antecedente di σ è un istanza di $mat(F)$.

Infatti ogni antecedente di σ deve essere una sottoformula di $mat(F)$, per via di 1 e 2, che non può essere propria senza nel cammino di σ ci siano regole proposizionali.

4. I quantificatori di F sono introdotti solo da regole predicative.

Infatti nel cammino di σ non ci sono WL, che potrebbero essere commutate fino alla radice dando l'inconsistenza di LJ^+come nel caso $\mathcal{I}_G \equiv WL$ del punto 2.
Allora in ogni antecedente di σ le variabili che in F sono vincolate da $\forall$ sono sostituite da elementi di `Trm(`$\mathcal{L}$`)` e le altre variabili restano immutate.

---

[1] Possono essercene diverse se il cammino di σ contiene delle istanze di CL.

• Quarto passo: conclusione.
Si modifichi la prova sopprimendo il cammino di σ ma lasciando σ e si osservi che Γ non può essere vuoto senza che $\vdash \perp$ sia dimostrabile e quindi LJ$^+$sia inconsistente. Da ultimo si aggiunga alla prova il cammino indicato in figura 5. $\diamondsuit$

Visto che questo teorema risulta essere il fulcro del risultato che intendiamo provare nel seguito, è bene segnalare alcune osservazioni che potrebbero sfuggire al lettore.
L'unica ipotesi sulle occorrenze delle regole di Σ è che esse siano semplici (usata per ottenere la 1 del primo passo su cui poi verte tutta la prova).
Il teorema non regge se Σ contiene qualche sequente predicativo perché allora:

$$\frac{}{F \vdash \perp}$$

potrebbe essere un elemento di Σ.
Infine la conseguente $\perp$ non potrebbe poi essere sostituita con una diversa formula senza che $F \vdash \perp$ possa essere concluso da un'istanza di WL.

Figura 2: il lemma di riflessione.

La clausola A.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Top}{A \otimes B \vdash A}\,\otimes L1 \qquad \Gamma \vdash A \otimes B}{\Gamma \vdash A}\,Cut$$

La clausola B.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,Top \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,Top}{A, A \to B \vdash B}\,\to L \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, A \vdash B}\,Cut, XL, \ldots, XL$$

La clausola C.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A[y/u] \vdash A[y/u]}\,Top}{\forall y A \vdash A[y/u]}\,\forall L \qquad \Gamma \vdash \forall y A}{\Gamma \vdash A[y/u]}\,Cut$$

Figura 3: la normalizzazione delle WL.

Primo caso: la formula introdotta è laterale.

Prima commutazione:

$$\dfrac{\Gamma_1,\Psi_1 \vdash C_1 \ldots \dfrac{\Gamma_i,\Phi_i \vdash C_i}{\Gamma_i, A, \Phi_i \vdash C_i} WL \quad \ldots \Gamma_n, \Psi_n \vdash C_n}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi, \Phi_i \vdash C_i} \mathcal{I}$$

diventa

$$\dfrac{\Gamma_i,\Phi_i \vdash C_i}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi, \Phi_i \vdash C_i} WL, \ldots, WL$$

Questa commutazione si applica a: $\otimes L1$, $\otimes L2$, $\oplus L$, $\to L$ (con WL sulla assunzione destra), $\forall L$, $\exists L$, CL e Cut (con WL sulla assunzione sinistra) mentre i casi $\otimes R$, $\oplus R1$, $\oplus R2$, $\to L$ (con WL sulla assunzione sinistra), $\forall R$, $\exists R$, WR, WL e Cut (con WL sulla assunzione destra) non si presentano.
Non è invece possibile commutare quando $\mathcal{I}$ è $\to R$ o una generica regola di Σ.
Come si vede, questa commutazione comporta la soppressione della regola $\mathcal{I}$ e di tutti gli alberi dei suoi figli ad eccezione dell'i-esimo.
Infine la WL sparisce se $n \equiv 1$ e $\Psi \equiv \emptyset$ (in LJ se $\mathcal{I} \equiv CL$), nel caso generale tuttavia la commutazione può aumentare il numero di WL della prova.

Seconda commutazione:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, B, \Phi \vdash C}{\Gamma, A, B, \Phi \vdash C} WL}{\Gamma, B, A, \Phi \vdash C} XL \quad \text{diventa} \quad \dfrac{\Gamma, B, \Phi \vdash C}{\Gamma, B, A, \Phi \vdash C} WL$$

Questa commutazione si applica quando $\mathcal{I} \equiv XL$ e anche qui $\mathcal{I}$ viene soppressa.

Secondo caso: la formula introdotta è di contesto.

Terza commutazione:

$$\dfrac{\Gamma_1,\Psi_1 \vdash C_1 \ldots \dfrac{\Gamma_i,\Psi_i \vdash C_i}{\Gamma_i, A, \Psi_i \vdash C_i} WL \quad \ldots \Gamma_l, \Psi_l \vdash C_l}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i, A, \Gamma_{i+1}, \ldots, \Gamma_l, \Psi \vdash C} \mathcal{I}$$

diventa

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1,\Psi_1 \vdash C_1 \ldots \Gamma_l, \Psi_l \vdash C_l}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l, \Psi \vdash C} \mathcal{I}}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_i, A, \Gamma_{i+1}, \ldots, \Gamma_l, \Psi \vdash C} WL$$

Questa commutazione si applica a tutte le regole di LJ^+ma è superflua se $\mathcal{I}$ è WL.

Figura 4: il teorema di Herbrand - secondo passo.

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma_1, \Psi_1 \vdash C_1 \ldots$}
\AxiomC{$\Gamma_0, A[y/u] \vdash C_0$}
\RightLabel{$\mathcal{I}_q$}
\UnaryInfC{$\Gamma_0, QyA \vdash C_0$}
\doubleLine
\RightLabel{S}
\UnaryInfC{$\Gamma_i, \Psi_i \vdash C_i$}
\AxiomC{$\ldots \Gamma_n, \Psi_n \vdash C_n$}
\RightLabel{$\mathcal{I}$}
\TrinaryInfC{$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi \vdash C$}
\end{prooftree}

diventa

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma_1, \Psi_1 \vdash C_1 \ldots$}
\AxiomC{$\Gamma_0, A[y/u] \vdash C_0$}
\doubleLine
\RightLabel{$XL \ldots XL$}
\UnaryInfC{$A[y/u], \Gamma_0 \vdash C_0$}
\RightLabel{WL}
\UnaryInfC{$A[y/u], \Gamma_0, QyA \vdash C_0$}
\doubleLine
\RightLabel{S}
\UnaryInfC{$A[y/u], \Gamma_i, \Psi_i \vdash C_i$}
\AxiomC{$\ldots \Gamma_n, \Psi_n \vdash C_n$}
\RightLabel{$\mathcal{I}$}
\TrinaryInfC{$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{i-1}, A[y/u], \Gamma_i, \ldots, \Gamma_n, \Psi \vdash C$}
\doubleLine
\RightLabel{$XL \ldots XL$}
\UnaryInfC{$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi, A[y/u] \vdash C$}
\RightLabel{$\mathcal{I}_q$}
\UnaryInfC{$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi, QyA \vdash C$}
\doubleLine
\RightLabel{$XL \ldots XL, CL$}
\UnaryInfC{$\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi \vdash C$}
\end{prooftree}

Le regole di struttura fra $\mathcal{I}_q$ ed $\mathcal{I}$ sono state marcate con S, $\mathcal{I}_q$ può essere solo $\forall L$ o $\exists L$, u è y se Q è $\exists$ e rinominando le variabili, si può evitare che y compaia in $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi$ o in C. L'analisi delle regole di struttura mostra che QyA deve comparire in Γ_i, Ψ_i. QyA deve poi essere di contesto per $\mathcal{I}$ perché essa non può avere una laterale predicativa essendo estranea (si vedano nn.1 e 2 del primo punto) ed è per tanto possibile applicare la CL al termine del tratto.

Figura 5: il teorema di Herbrand - quarto passo.

\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Delta, A, B \vdash \bot$}
\RightLabel{$\otimes L2$}
\UnaryInfC{$\Delta, A, A \otimes B \vdash \bot$}
\RightLabel{XL}
\UnaryInfC{$\Delta, A \otimes B, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\otimes L1$}
\UnaryInfC{$\Delta, A \otimes B, A \otimes B \vdash \bot$}
\RightLabel{$\otimes CL$}
\UnaryInfC{$\Delta, A \otimes B \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{Π_0}
\UnaryInfC{$C \vdash \bot$}
\RightLabel{$\to R$}
\UnaryInfC{$\vdash \neg C$}
\end{prooftree}

Il blocco Π_0 permette di ripetere la sequenza antecedente se necessario.
Si è supposto che $\Gamma \equiv \Delta, A, B$ abbia almeno due elementi, altrimenti basta la $\to R$.

CAPITOLO 3.
IL METALINGUAGGIO E LA SEMANTICA INTUITIVA.

3.1. La semantica intuitiva.

[1] la teoria fondazionale (metalinguaggio) in cui il terzo teorema di Gödel-Kreisel si esprime e si dimostra può essere scelta in vario modo; i requisiti minimi sono:

1. Occorrono insiemi, costanti, funzioni e relazioni.
2. Occorre un modello standard dei numeri naturali (cioè soddisfacente a tutti gli assiomi di Peano ed al principio di induzione) con uguaglianza decidibile.
3. Occorre poter rappresentare funzioni e relazioni primitive ricorrenti.
4. Occorrono metaconnettivi e metaquantificatori per costruire le proposizioni.
5. Le proposizioni devono prevedere una nozione di verità che renda valide le regole della logica intuizionistica: ad esempio quelle del sistema NJ di Gentzen in [Gen].
6. Occorre poter rappresentare termini, formule e derivazioni intuizionistiche.

Vale la pena di notare che il quinto requisito non solo garantisce la presenza di uno strumento indubbiamente necessario (la nozione di verità), ma impone ad esso delle condizioni di estrema rilevanza (la validità delle regole di NJ) che consentiranno fra l'altro di provare un teorema di validità per la semantica intuitiva.

[2] Mentre per le costanti logiche del linguaggio si sono usati i simboli:

$$\bot,\ \neg,\ \otimes,\ \oplus,\ \to, \forall,\ \exists,$$

per le costanti logiche del metalinguaggio si useranno i simboli:

$$\widetilde{\bot},\ \widetilde{\neg},\ \widetilde{\otimes},\ \widetilde{\oplus},\ \widetilde{\to}, \widetilde{\forall},\ \widetilde{\exists}.$$

[3] Un **modello** $\mathcal{M}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ nel metalinguaggio scelto è costituito da un insieme $\mathtt{D}$ e da costanti $c_j^{\mathcal{M}} \in \mathtt{D}$, funzioni $f_h^{\mathcal{M}} : \mathtt{D}^{a_h} \mapsto \mathtt{D}$ e relazioni $\mathtt{R}_k^{\mathcal{M}}$ su $\mathtt{D}^{b_k}$ corrispondenti ai segni di $\mathcal{L}$.
Le funzioni $f_h^{\mathcal{M}}$ hanno arietà a_h mentre le relazioni $\mathtt{R}_k^{\mathcal{M}}$ hanno arietà b_k.
L'**interpretazione** in $\mathcal{M}$ dei termini e delle formule di $\mathcal{L}$ è definita come segue:
L'interpretazione di $t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ è la funzione $t^{\mathcal{M}} : \mathtt{D}^n \mapsto \mathtt{D}$ dove n è la lunghezza di $\mathtt{FV}(t)$, definita dalle seguenti clausole:

$$x_i^{\mathcal{M}} \equiv \lambda d_i.d_i,$$
$$(c_j)^{\mathcal{M}} \equiv \lambda d.c_j^{\mathcal{M}},$$
$$f_h(t_1, \dots, t_{a_h})^{\mathcal{M}} \equiv f_h^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{a_h}^{\mathcal{M}}).$$

L'interpretazione di $F \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ è la relazione $A^{\mathcal{M}}$ su $\mathtt{D}^n$ dove n è la lunghezza di $\mathtt{FV}(A)$, definita dalle seguenti clausole:

$$\bot^{\mathcal{M}} \equiv \widetilde{\bot},$$
$$\mathtt{R}_k(t_1, \dots, t_{b_k})^{\mathcal{M}} \equiv \mathtt{R}_k^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_{b_k}^{\mathcal{M}}),$$
$$(A \Box B)^{\mathcal{M}} \equiv A^{\mathcal{M}}\ \widetilde{\Box}\ B^{\mathcal{M}},$$
$$(Qx_iA)^{\mathcal{M}} \equiv (\widetilde{Q}d_i \in \mathtt{D})A^{\mathcal{M}}.$$

Questa interpretazione giustifica l'attributo di "intuitiva" dato alla semantica.
Le interpretazioni di un sequente σ e di una regola $\mathcal{I}$ sono il sequente $\sigma^{\mathcal{M}}$ e la regola $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ ottenuti interpretando in $\mathcal{M}$ le formule di σ e di $\mathcal{I}$ una ad una.

[4] La definizione di validità nel sistema semantico S è data ponendo che la regola $\mathcal{I}$ sia **valida** in $\mathcal{M}$, e si scrive $\mathcal{M} \models \mathcal{I}$, quando $\mathcal{I}^{\mathcal{M}}$ è derivabile in S. Indicheremo poi con la scrittura: $\models \mathcal{I}$ il fatto che $\mathcal{I}$ è valida in ogni modello di $\mathcal{L}$.
Richiedendo allora che le regole di Σ siano valide in ogni modello di $\mathcal{L}$ (estensione del requisito 5), è possibile dare un teorema di validità per questa semantica:

Teorema 3.1.1 di validità della semantica intuitiva.

Ogni regola dimostrabile è valida in ogni modello di $\mathcal{L}$.

Dimostrazione.

La dimostrazione si fa per induzione sulla struttura della prova della regola. $\diamondsuit$

3.2. Numeri naturali, funzioni e relazioni ricorrenti primitive.

[1] Stabiliamo ora le notazioni per i numeri naturali e le relazioni primitive ricorrenti. L'insieme $\mathtt{N}$ dei **numeri naturali** contiene la costante $\widetilde{0}$ e su esso sono definite la funzione **successore** $\widetilde{s}$ e la relazione di uguaglianza designata da $\widetilde{=}$; qui la tilde indica semplicemente che questi segni appartengono al metalinguaggio.
$\widetilde{s}$ e $\widetilde{=}$ verificano le seguenti clausole:

1. iniettività di $\widetilde{s}$: $(\widetilde{s}\, n_1 \widetilde{=} \widetilde{s}\, n_2) \widetilde{\to} (n_1 \widetilde{=} n_2)$,
2. quarto assioma di Peano: $\widetilde{\neg}(\widetilde{s}\, n \widetilde{=} \widetilde{0})$,
3. per ogni funzione proposizionale $\mathtt{P}$ vale il principio di induzione: $\mathtt{P}(\widetilde{0})$ e $\mathtt{P}(n) \widetilde{\to} \mathtt{P}(\widetilde{s}\, n)$ provata senza assunzioni su n, implicano $\mathtt{P}(m)$,
4. decidibilità di $\widetilde{=}$: $(n_1 \widetilde{=} n_2) \widetilde{\oplus} \widetilde{\neg}(n_1 \widetilde{=} n_2)$,

ed infine il naturale $\widetilde{1}$ è ovviamente definito da $\widetilde{1} \equiv \widetilde{s}\,\widetilde{0}$.

[2] Sono **ricorrenti primitive** le seguenti funzioni:

1. la funzione identicamente nulla (definita da $\widetilde{z}(n) \equiv \widetilde{0}$),
2. la funzione successore,
3. la funzione proiezione i-esima di arietà m (definita da $\widetilde{pr}_i(n_1, \dots, n_m) \equiv n_i$),
4. la composizione generalizzata di funzioni ricorrenti primitive,
5. la funzione $\widetilde{r}(h, g)$ definita per induzione dalle seguenti clausole:
$$\begin{cases} \widetilde{r}(h,g)(\widetilde{0}, n_1, \dots n_m) \equiv h(n_1, \dots n_m) \\ \widetilde{r}(h,g)(\widetilde{s}\, n_0, n_1, \dots n_m) \equiv g(n_0, n_1, \dots n_m, \widetilde{r}(h,g)(n_0, n_1, \dots n_m)) \end{cases}$$
quando le funzioni g e h sono ricorrenti primitive ed hanno la corretta arietà.

Nel seguito indicheremo con `Prim` l'insieme di queste funzioni.
Definiamo anche le **componenti** di una $f \in \mathtt{Prim}$ nel seguente modo:

1. f è sempre una componente di f stessa.
2. Se f è $\widetilde{z}$ o $\widetilde{s}$ o $\widetilde{pr}_i$, non ci sono altre componenti.
3. Se f è $h(g_1, \dots, g_n)$ o $\widetilde{r}(h, g)$, si aggiungono le componenti di h e, a seconda dei casi, quelle di g o quelle di ciascuna g_i.

[3] Una relazione $\mathtt{R}$ su $\mathtt{N}^b$ si dice **ricorrente primitiva** se tale è la sua funzione caratteristica $\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) : \mathtt{N}^b \mapsto \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$, definita dalla posizione:
$$(\widetilde{\chi}(\mathtt{R})\, \overline{n} \widetilde{=} \widetilde{0}) \widetilde{\leftrightarrow} \mathtt{R}\, \overline{n}$$

[4] Fra le funzioni in `Prim`, una ci sarà molto utile nel prossimo capitolo; si tratta della funzione $\widetilde{p}$ detta **predecessore** e definita da:

$$\widetilde{p}\,\widetilde{0} \equiv \widetilde{0} \quad \text{e} \quad \widetilde{p}\,\widetilde{s}\,n \equiv n$$

che gode della seguente proprietà:

Lemma 3.2.1 sulla funzione predecessore.

Per ogni $n \in \mathtt{N}$ *vale:* $(n \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{0}) \mathbin{\widetilde{\oplus}} (n \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{s}\,\widetilde{p}\,n)$.

Dimostrazione.

L'asserto si prova per induzione su n e vale certamente se $n \equiv \widetilde{0}$.
Da $n \equiv \widetilde{p}\,\widetilde{s}\,n$ segue poi $\widetilde{s}\,n \equiv \widetilde{s}\,\widetilde{p}\,\widetilde{s}\,n$ da cui si può concludere senza assumere l'ipotesi induttiva. $\diamondsuit$

3.3. Generalità sul risultato principale.

[1] Siamo ora in grado di enunciare il risultato principale, presentato qui assieme alla traccia della dimostrazione che in seguito sarà sviluppata nei dettagli:

Teorema 3.3.1: risultato principale.

Se $\models \neg\neg F$ *implica* $\vdash \neg\neg F$ *per ogni* $F \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ *(completezza del frammento negato) allora il principio di Markov vale per ogni relazione ricorrente primitiva* $\mathtt{R}$.

Per principio di Markov si intende il seguente:

$$MP \equiv \widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n} \mathrel{\widetilde{\rightarrow}} (\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)R\,\overline{n}$$

Dimostrazione.

Fissata la relazione ricorrente primitiva $\mathtt{R}$ si trova una formula R° di un linguaggio $\mathcal{L}$ (dipendente da $\mathtt{R}$) con un modello (canonico) $\mathcal{C}$ tale che:

$$\mathcal{C} \models R^\circ \text{ sse } (\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n}$$

Assumendo allora $\widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n}$ si ha $\mathcal{C} \models \neg\neg R^\circ$ perché $\widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(R^\circ)^{\mathcal{C}} = (\neg\neg R^\circ)^{\mathcal{C}}$.
Si applica ora il seguente lemma che dimostreremo:

$$1.\ \text{Se } \mathcal{C} \models \neg\neg R^\circ \text{ allora } \models \neg\neg R^\circ$$

e si giunge a $\vdash \neg\neg R^\circ$ usando l'ipotesi di completezza con $F \equiv \neg\neg R^\circ$.
Il successivo lemma che dimostreremo:

$$2.\ \text{Se } \vdash \neg\neg R^\circ \text{ allora } \mathcal{C} \models R^\circ$$

e che vale nell'ipotesi che siano semplici le occorrenze delle regole di Σ che compaiono nella prova di $\neg\neg R^\circ$,(2)permette di concludere. $\diamondsuit$

A margine dimostreremo anche il seguente lemma su R°:

$$3.\ \text{Se } \mathcal{C} \models R^\circ \text{ allora } \models R^\circ$$

(2) Nella prova originale Kreisel lavora in logica pura e quindi per lui $\Sigma = \emptyset$.

CAPITOLO 4.
DETTAGLI SUL RISULTATO PRINCIPALE.

4.1. Il linguaggio del modello canonico e la costruzione di R°.

[1] Fissata la relazione $\mathtt{R}$, il linguaggio in cui verrà scritta R° è:

$$\mathcal{L} \equiv \{0, s\,, \chi_i, =\}$$

con l'interpretazione nel **modello canonico**:

$$\mathcal{C} \equiv \{\mathtt{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s}\,, \widetilde{\chi}_i, \widetilde{=}\}$$

(dove le $\widetilde{\chi}_i$ sono le componenti della funzione $\widetilde{\chi}(\mathtt{R})$) data da:

$$0^{\mathcal{C}} \equiv \widetilde{0}, \quad s^{\,\mathcal{C}} \equiv \widetilde{s}\,, \quad \chi_i^{\mathcal{C}} \equiv \widetilde{\chi}_i, \quad =^{\mathcal{C}} \equiv\ \widetilde{=}\,.$$

Indichiamo ora con NP (naturali e primitive) la congiunzione delle seguenti formule di $\mathcal{L}$ che si intendono chiuse universalmente (alle variabili usate qui sono stati dati più indici perché siano tutte distinte fra loro):

1. riflessività di $=$: $(x_1 = x_1)$,
2. simmetria di $=$: $(x_2 = y_2) \to (y_2 = x_2)$,
3. transitività di $=$: $(x_3 = y_3) \otimes (y_3 = z_3) \to (x_3 = z_3)$,
4. iniettività di s: $(x_4 = y_4) \leftrightarrow (s\,(x_4) = s\,(y_4))$,
5. quarto assioma di Peano: $\neg(s\,x_5 = 0)$,
6. buona definizione di χ_i: $(\,\overline{x}_6 = \overline{y}_6) \to (\chi_i\,\overline{x}_6 = \chi_i\,\overline{y}_6)$,
   e poi per ogni i una delle seguenti formule a seconda dei casi:
7. $\chi_i x_7^i = 0$ se $\widetilde{\chi}_i = \widetilde{z}$,
8. $\chi_i x_8^i = s\,x_8^i$ se $\widetilde{\chi}_i = \widetilde{s}\,$,
9. $\chi_i((x_9^i)_1, \ldots, (x_9^i)_m) = (x_9^i)_j$ se $\widetilde{\chi}_i = \widetilde{pr}_j$,
10. $\chi_i\,\overline{x}_{10}^i = \chi_k(\chi_{j_1}\overline{x}_{10}^i, \ldots, \chi_{j_n}\overline{x}_{10}^i)$ se $\widetilde{\chi}_i = \widetilde{\chi}_k(\widetilde{\chi}_{j_1}, \ldots, \widetilde{\chi}_{j_n})$,
11. $\begin{cases} \chi_i(0,\, \overline{x}_{11}^i) = \chi_k\,\overline{x}_{11}^i \\ \chi_i(s\,y_{11}^i,\, \overline{x}_{11}^i) = \chi_j(y_{11}^i,\, \overline{x}_{11}^i, \chi_i(y_{11}^i,\, \overline{x}_{11}^i)) \end{cases}$ se $\widetilde{\chi}_i = \widetilde{r}(\widetilde{\chi}_k, \widetilde{\chi}_j)$.

[2] Le prime proprietà di NP sono lemmi immediati:

Lemma 4.1.1 sulla formula NP.

La formula NP gode delle seguenti proprietà:

A. *NP è equivalente ad una formula prenessa,*
B. $\mathcal{C} \models NP$.

Dimostrazione

A. NP è una congiunzione di formule prenesse.
B. L'asserto deriva dalla definizione stessa di $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

Indichiamo allora con NP_P la matrice della formula prenessa di 4.1.1A.
La proprietà notevole di NP è invece la seguente:

Lemma 4.1.2 sui modelli in cui vale NP.

Per ogni modello $\mathcal{M} \equiv \{\mathtt{D}, 0^{\mathcal{M}}, s^{\,\mathcal{M}}, \chi_i^{\mathcal{M}}, =^{\mathcal{M}}\}$ tale che $\mathcal{M} \models NP$ esiste una funzione iniettiva π da $\mathtt{N}$ a $\mathtt{D}$ tale che:

A. *per ogni $u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ si ha $u^{\mathcal{M}} =^{\mathcal{M}} \pi\,(u^{\mathcal{C}})$,*

B. *per ogni* $F \in \mathtt{PFrm}(\mathcal{L})$ *si ha* $F^{\mathcal{M}} \widetilde{\leftrightarrow} F^{\mathcal{C}}$,
C. *per ogni* $F \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})$ *senza* $\exists$ *si ha* $F^{\mathcal{M}} \widetilde{\rightarrow} F^{\mathcal{C}}$,
D. *per ogni* $F \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})$ *senza* $\forall$ *si ha* $F^{\mathcal{M}} \widetilde{\leftarrow} F^{\mathcal{C}}$.

Dimostrazione.
Innanzi tutto definiamo π per ricorrenza nel seguente modo:

$$\pi\,\widetilde{0} \equiv 0^{\mathcal{M}}, \qquad \pi\,\widetilde{s}\,n \equiv s^{\mathcal{M}}\pi\,n.$$

poi procediamo alla verifica delle varie tesi.
• Verifica della tesi A.
La tesi è senz'altro verificata se u è una variabile o se è la costante 0. Se invece u è un segno di funzione che opera sul vettore $\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$, dobbiamo assumere l'ipotesi induttiva $\overline{t}^{\mathcal{M}} =^{\mathcal{M}} \pi\,\overline{t}^{\mathcal{C}}$ (intesa componente per componente) che si può anche scrivere $\overline{d} =^{\mathcal{M}} \pi\,\overline{m}$ una volta che si sia posto $\overline{d} \equiv \overline{t}^{\mathcal{M}}$ e $\overline{m} \equiv \overline{t}^{\mathcal{C}}$.
A questo punto se $u \equiv s\,t$ la tesi vale ancora, esaminiamo allora il caso $u \equiv \chi_i\,\overline{t}$ che porta a dover dimostrare $\chi_i^{\mathcal{M}}\,\overline{d} =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{\chi}_i\,\overline{m}$.
La dimostrazione si fa per induzione sulla struttura di $\widetilde{\chi}_i$:

casi di base:

1. caso $\widetilde{\chi}_i \equiv \widetilde{z}$: si deve provare $\chi_i^{\mathcal{M}}d =^{\mathcal{M}} 0^{\mathcal{M}}$.
   La tesi si ottiene da $\mathcal{M} \models (\chi_i t = 0)$ che dà proprio $\chi_i^{\mathcal{M}}d =^{\mathcal{M}} 0^{\mathcal{M}}$.
2. caso $\widetilde{\chi}_i \equiv \widetilde{s}$: si deve provare: $\chi_i^{\mathcal{M}}d =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{s}\,m$.
   La tesi si ottiene da $s^{\mathcal{M}}\pi\,m =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{s}\,m$
   e da $\mathcal{M} \models (\chi_i t = s\,t)$ cioè da $\chi_i^{\mathcal{M}}d =^{\mathcal{M}} s^{\mathcal{M}}d$.
3. caso $\widetilde{\chi}_i \equiv p_j^l$: si deve provare $\chi_i^{\mathcal{M}}\,\overline{d} =^{\mathcal{M}} \pi\,m_j$.
   La tesi si ottiene da $\mathcal{M} \models (\chi_i\,\overline{t} = t_j)$ cioè da $\chi_i^{\mathcal{M}}\,\overline{d} =^{\mathcal{M}} d_j$.

Casi ricorrenti.

1. caso $\widetilde{\chi}_i \equiv \widetilde{\chi}_k(\widetilde{\chi}_{j_1}, \ldots, \widetilde{\chi}_{j_n})$: ponendo per brevità:
   $$\overline{\chi} \equiv (\chi_{j_1}, \ldots, \chi_{j_n}) \qquad \text{e} \qquad \overline{\chi}\,\overline{t} \equiv (\chi_{j_1}\overline{t}, \ldots, \chi_{j_n}\overline{t}),$$
   si deve dimostrare: $\chi_i^{\mathcal{M}}\,\overline{d} =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{\chi}_k\,\overline{\chi}^{\mathcal{C}}\,\overline{m}$.
   La tesi si ottiene da $\mathcal{M} \models (\chi_i\,\overline{t} = \chi_k\,\overline{\chi}\,\overline{t})$ cioè da $\chi_i^{\mathcal{M}}\,\overline{d} = \chi_k^{\mathcal{M}}\,\overline{\chi}^{\mathcal{M}}\,\overline{d}$
   facendo uso di $\overline{v} \equiv \overline{\chi}\,\overline{t}$ e delle ipotesi induttive:
   $$\overline{\chi}^{\mathcal{M}}\,\overline{d} =^{\mathcal{M}} \pi\,\overline{\chi}^{\mathcal{C}}\,\overline{m} \qquad \text{e} \qquad \chi_k^{\mathcal{M}}\,\overline{v}^{\mathcal{M}} =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{\chi}_k\,\overline{v}^{\mathcal{C}}.$$
2. caso $\widetilde{\chi}_i \equiv \widetilde{r}(\widetilde{\chi}_k, \widetilde{\chi}_j)$: avendo posto $e = \pi\,n$, si devono dimostrare le clausole:
   $$\begin{cases} \chi_i^{\mathcal{M}}(0^{\mathcal{M}}, \overline{d}) =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{\chi}_k\,\overline{m} \\ \chi_i^{\mathcal{M}}(s^{\mathcal{M}}e, \overline{d}) =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{\chi}_j(n, \overline{m}, \widetilde{\chi}_i(n, \overline{m})) \end{cases}$$
   Prima clausola.
   La tesi si ha da $\mathcal{M} \models (\chi_i(0, \overline{t}) = \chi_k\,\overline{t})$ cioè da $\chi_i^{\mathcal{M}}(0^{\mathcal{M}}, \overline{d}) =^{\mathcal{M}} \chi_k^{\mathcal{M}}\,\overline{d}$
   usando l'ipotesi induttiva $\chi_k^{\mathcal{M}}\,\overline{d} =^{\mathcal{M}} \pi\,\widetilde{\chi}_k\,\overline{m}$.
   Seconda clausola.
   La tesi si ha da $\mathcal{M} \models (\chi_i(s\,v, \overline{t}) = \chi_j(v, \overline{t}, \chi_i(v, \overline{t})))$
   cioè da $\chi_i^{\mathcal{M}}(s^{\mathcal{M}}e, \overline{d}) =^{\mathcal{M}} \chi_j^{\mathcal{M}}(e, \overline{d}, \chi_i^{\mathcal{M}}(e, \overline{d}))$ ponendo $e \equiv v^{\mathcal{M}}$, $n \equiv v^{\mathcal{C}}$.
   Si fa inoltre uso dell'ipotesi induttiva:

$$\chi_j^{\mathcal{M}}(e, \overline{d}, \chi_i^{\mathcal{M}}(e, \overline{d})) =^{\mathcal{M}} \pi\, \widetilde{\chi}_j(n, \overline{m}, \widetilde{\chi}_i(n, \overline{m})).$$

• Verifica della tesi B.
$F^{\mathcal{M}}\overline{d} \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} F^{\mathcal{C}}\overline{m}$ si dimostra per induzione sulla struttura di F.
Anche qui si pone $d \equiv t^{\mathcal{M}}$, $m \equiv t^{\mathcal{C}}$, $e \equiv u^{\mathcal{M}}$, $n \equiv u^{\mathcal{C}}$ e si assumono le ipotesi $d =^{\mathcal{M}} \pi\, m$, $e =^{\mathcal{M}} \pi\, n$ giustificate dalla tesi A.
L'unico predicato atomico è l'uguaglianza per cui bisogna provare
$(t = u)^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} (t = u)^{\mathcal{C}}$ cioè $(\pi\, m =^{\mathcal{M}} \pi\, n) \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} (m \mathrel{\widetilde{=}} n)$.

Da sinistra a destra la tesi è l'iniettività di π e si dimostra per induzione su m.
Se $m \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{0}$ allora $\pi\, n =^{\mathcal{M}} 0^{\mathcal{M}}$. Però se $\widetilde{\neg}(n \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{0})$ esiste $n^* \equiv \widetilde{p}\, n$ tale che $n \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{s}\, n^*$ per 3.2.1, ma $0^D =^{\mathcal{M}} s^{\mathcal{M}}\pi\, n^*$ è assurdo e si conclude $n \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{0}$ perché $\mathrel{\widetilde{=}}$ è decidibile.
Se $m \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{s}\, m^*$ allora si ha $s^{\mathcal{M}}\pi\, m^* =^{\mathcal{M}} \pi\, n$ e dunque $\widetilde{\neg}(\pi\, n =^{\mathcal{M}} 0^{\mathcal{M}})$ da cui $\widetilde{\neg}(n \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{0})$.
Per 3.2.1 esiste poi $n^* \equiv \widetilde{p}\, n$ tale che $\widetilde{s}\, n^* \mathrel{\widetilde{=}} n$ e si ha $s^{\mathcal{M}}\pi\, m^* =^{\mathcal{M}} \pi\, n =^{\mathcal{M}} s^{\mathcal{M}}\pi\, n^*$ da cui $\pi\, m^* =^{\mathcal{M}} \pi\, n^*$ cioè $m^* \mathrel{\widetilde{=}} n^*$ per l'ipotesi induttiva e si conclude $m \mathrel{\widetilde{=}} n$.

Da destra a sinistra la tesi è la compatibilità di π con $=^{\mathcal{M}}$ e si usa l'induzione su m.
Se $m \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{0}$ allora la tesi è verificata perché $0^{\mathcal{M}} =^{\mathcal{M}} 0^{\mathcal{M}}$.
Se $m \mathrel{\widetilde{=}} \widetilde{s}\, m^*$ allora posto $n^* \equiv m^*$ si ha $\widetilde{s}\, n^* \mathrel{\widetilde{=}} n$ e $m^* \mathrel{\widetilde{=}} n^*$ e così l'ipotesi induttiva dà $\pi\, m^* =^{\mathcal{M}} \pi\, n^*$ ossia $s^{\mathcal{M}}\pi\, m^* =^{\mathcal{M}} s^{\mathcal{M}}\pi\, n^*$ che subito conclude.

Connettivi: nel caso $F \equiv E_1 \Box E_2$ si deve provare $(E_1 \Box E_2)^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} (E_1 \Box E_2)^{\mathcal{C}}$.
La tesi è ottenuta nel modo seguente:
$(E_1 \Box E_2)^{\mathcal{M}}$ sse $E_1^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\Box}} E_2^{\mathcal{M}}$ sse $E_1^{\mathcal{C}} \mathrel{\widetilde{\Box}} F_2^{\mathcal{C}}$ sse $(E_1 \Box E_2)^{\mathcal{C}}$,
assumendo le ipotesi induttive: $E_1^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} E_1^{\mathcal{C}}$ e $E_2^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} E_2^{\mathcal{C}}$.
• Verifica delle tesi C e D.
Quantificatori:

1. caso $F \equiv \forall x(Ex)$: bisogna provare $(\widetilde{\forall} d \in \mathtt{D})(E^{\mathcal{M}}d) \mathrel{\widetilde{\to}} (\widetilde{\forall} n \in \mathtt{N})(E^{\mathcal{C}}n)$.
   Se $(\widetilde{\forall} d \in \mathtt{D})(E^{\mathcal{M}}d)$ allora $n \in \mathtt{N}$ implica $E^{\mathcal{M}}\pi\, n$ ovvero $E^{\mathcal{C}}(n)$ per l'ipotesi induttiva $E^{\mathcal{M}}\pi\, n \mathrel{\widetilde{\to}} E^{\mathcal{C}}n$. Si conclude dunque $(\widetilde{\forall} n \in \mathtt{N})(E^{\mathcal{C}}n)$ come si voleva.
2. caso $F \equiv (\exists x)\ E(x)$: bisogna provare $(\widetilde{\exists} n \in \mathtt{N})(E^{\mathcal{C}}n) \mathrel{\widetilde{\to}} (\widetilde{\exists} d \in \mathtt{D})(E^{\mathcal{M}}d)$.
   Se assumiamo $(\widetilde{\exists} n \in \mathtt{N})(E^{\mathcal{C}}n)$ e poniamo $d \equiv \pi\, n$, l'ipotesi induttiva fornisce $E^{\mathcal{C}}n \mathrel{\widetilde{\to}} E^{\mathcal{M}}d$ che permette di concludere. $\Diamond$

[3] La formula R° che compare nella dimostrazione del teorema 3.3.1, si costruisce a partire dal segno χ_i che si interpreta in $\widetilde{\chi}(\mathtt{R})$ nel modello canonico e che chiameremo convenzionalmente χ_0 (cioè assumiamo $\chi_0^{\mathcal{C}} \equiv \widetilde{\chi}(\mathtt{R})$). Poniamo allora:(3)

$$ER \equiv \exists\, \overline{x}(\chi_0\, \overline{x} = 0) \quad \text{e} \quad R^\circ \equiv NP \to ER.$$

Lemma 4.1.3 sulla validità delle formule ER e R°.

Le formule ER e R° hanno le seguenti proprietà:

A. *$\neg ER$ è equivalente ad una formula prenessa senza $\exists$,*
B. *$\mathcal{C} \models ER$ sse $(\widetilde{\exists}\, \overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\, \overline{n}$,*
C. *$\mathcal{C} \models R^\circ$ sse $(\widetilde{\exists}\, \overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\, \overline{n}$.*

Dimostrazione.

(3) La definizione di ER non è essenziale ed è introdotta solo per comodità.

A. si ha $\neg ER \leftrightarrow \forall \overline{x} \neg(\chi_0 \overline{x} = 0)$.
B. Si ha $\mathcal{C} \models ER$ sse $(\widetilde{\exists} \overline{n} \in \mathtt{N}^b)(\chi_0^{\mathcal{C}} \overline{n} \cong \widetilde{0})$ che subito conclude.
C. Poiché $\mathcal{C} \models NP$ vale per il lemma 4.1.1B, si ha $\mathcal{C} \models R^\circ$ sse $\mathcal{C} \models ER$. $\diamondsuit$

Poniamo ora:

$$ER_P \equiv (\chi_0 \overline{x} = 0)$$

di modo che $\neg ER_P$ sia la matrice della formula prenessa in 4.1.3A.

4.2. I tre lemmi principali.

[1] Diamo ora la prova del lemma 1 citato nella dimostrazione del teorema 3.3.1.

Lemma 4.2.1 sulla validità di $\neg\neg \boldsymbol{R}^\circ$.

Se $\mathcal{C} \models \neg\neg R^\circ$ allora $\models \neg\neg R^\circ$.

Dimostrazione.

La dimostrazione consta di due passi.

- Primo passo: Se $\mathcal{C} \models \neg\neg R^\circ$ allora $\models \neg(NP \otimes \neg ER)$.

Fissiamo un modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, assumiamo $\mathcal{M} \models (NP \otimes \neg ER)$ per ottenere un assurdo e concludiamo per la genericità di $\mathcal{M}$.
$\mathcal{M} \models NP$ permette di applicare il lemma 4.1.2C a $\neg ER$ (ovvero al suo equivalente secondo 4.1.3A) da cui si ha $(\neg ER)^{\mathsf{D}} \widetilde{\rightarrow} (\neg ER)^{\mathcal{C}}$ che assieme a $\mathcal{M} \models \neg ER$, porge $\mathcal{C} \models \neg ER$ che combinato poi con $\mathcal{C} \models MP$ (da 4.1.1B) dà infine $\mathcal{C} \models (NP \otimes \neg ER)$. Visto ora che $(NP \otimes \neg ER) \vdash \neg R^\circ$, l'ipotesi $\mathcal{C} \models \neg\neg R^\circ$ porta all'assurdo.

- Secondo passo: Se $\models \neg(NP \otimes \neg ER)$ allora $\models \neg\neg R^\circ$.

La tesi segue dalla seguente deduzione valida in LJ:

$$\neg(NP \otimes \neg ER) \vdash \neg\neg(NP \rightarrow ER)$$

e dalla definizione $R^\circ \equiv (NP \rightarrow ER)$. $\diamondsuit$

[2] Diamo poi la prova del lemma 3 citato a margine del teorema 3.3.1.

Lemma 4.2.2 sulla validità di $\boldsymbol{R}^\circ$.

Se $\mathcal{C} \models R^\circ$ allora $\models R^\circ$.

Dimostrazione.

Fissiamo un modello $\mathcal{M}$ di $\mathcal{L}$, dimostriamo $\mathcal{M} \models R^\circ$ cioè $\mathcal{M} \models (NP \rightarrow ER)$ e concludiamo per la genericità di $\mathcal{M}$.
Assumiamo allora $\mathcal{M} \models MP$ per ottenere $\mathcal{M} \models ER$ nel seguente modo:
applicando il lemma 4.1.2D a ER, che non contiene $\forall$, si ha $ER^{\mathcal{C}} \widetilde{\rightarrow} ER^{\mathcal{M}}$ e l'ipotesi $\mathcal{C} \models R^\circ$ assieme a $\mathcal{C} \models NP$ dà $\mathcal{C} \models ER$ che permette di concludere. $\diamondsuit$

[3] Diamo infine la prova del lemma 2 citato nella dimostrazione del teorema 3.3.1.

Lemma 4.2.3 sulla dimostrabilità di $\neg\neg \boldsymbol{R}^\circ$.

Se LJ$^+$*dimostra* $\vdash \neg\neg R^\circ$ *con una prova in cui tutte le occorrenze delle regole di* Σ *sono semplici (secondo* [1] *di* 2.2*) allora* $\mathcal{C} \models R^\circ$.

Dimostrazione.

La dimostrazione consta di tre passi.

• Primo passo: esiste una formula prenessa F tale che $\vdash (F \to \neg R^\circ)$.

Ricordando che $R^\circ \equiv (NP \to ER)$, si ha $\vdash (NP \otimes \neg ER) \to \neg R^\circ$ e per 4.1.1A e 4.1.3A, $NP \otimes \neg ER$ è equivalente ad una formula prenessa F (perché congiunzione di formule prenesse) di matrice $E \equiv NP_P \otimes \neg ER_P$.

• Secondo passo: se $\vdash \neg F$ allora $\mathcal{C} \models R^\circ$.

Applicando ad F il teorema 2.2.1 si ha $\vdash \neg C$ dove $C \equiv \otimes_i E[\,\overline{t}^{\,i}\,]$ è una congiunzione di istanze di E e il teorema 3.1.1 dà allora $\mathcal{C} \models \neg \otimes_i E[\,\overline{t}^{\,i}\,]$ e quindi $\mathcal{C} \models \oplus_i \neg E[\,\overline{t}^{\,i}\,]$ perché le $(E[\,\overline{t}^{\,i}\,])^{\mathcal{C}}$ sono decidibili essendo proposizionali e costruite sul predicato $\widetilde{\cong}$. ponendo poi $E[\,\overline{t}^{\,i}\,] \equiv NP_P[\,\overline{u}^{\,i}\,] \otimes \neg ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,]$ dove $\overline{u}^{\,i}$ e $\overline{v}^{\,i}$ sono ottenuti da $\overline{t}^{\,i}$, si ha $\mathcal{C} \models \oplus_i \neg(NP_P[\,\overline{u}^{\,i}\,] \otimes \neg ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,])$ ovvero $\mathcal{C} \models (\oplus_i \neg NP_P[\,\overline{u}^{\,i}\,]) \oplus (\oplus_i ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,])$.

Siccome $\mathcal{C} \models NP_P[\,\overline{u}^{\,i}\,]$ per via di 4.1.1B si conclude $\mathcal{C} \models \oplus_i ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,]$.

Ponendo ora $\overline{n}^{\,i} \equiv (\overline{v}^{\,i})^{\mathcal{C}}$ si trova $(ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,])^{\mathcal{C}} \;\widetilde{\leftrightarrow}\; \mathtt{R}\,\overline{n}^{\,i}$ (perché $(ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,])^{\mathcal{C}}$ è $\chi_0^{\mathcal{C}}\,\overline{n}^{\,i} \,\widetilde{\cong}\, \widetilde{0}$) e così $\mathcal{C} \models \oplus_i ER_P[\,\overline{v}^{\,i}\,]$ è equivalente alla validità di $\widetilde{\oplus}_i\, \mathtt{R}(\,\overline{n}^{\,i})$ che implica $(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n}$ variando i in un insieme finito. Il lemma 4.1.3C conclude.

• Terzo passo: conclusione.

Siccome $\vdash (F \to \neg R^\circ)$ allora $\vdash \neg\neg R^\circ$ implica $\vdash \neg F$ da cui subito $\mathcal{C} \models R^\circ$ $\diamondsuit$

CAPITOLO 5.
SINTASSI E SEMANTICA IN *ITT*.

5.1. Note su *ITT*.

[1] Intendiamo ora rienunciare il teorema 3.3.1 nel caso particolare in cui la teoria fondazionale S sia la teoria intuizionistica dei tipi di P. Martin-Löf (*ITT*) [MLS].
Nel seguito si adotta il seguente formalismo:

$$\begin{array}{rl} [\,] & \text{racchiudono le assunzioni nei giudizi condizionali,} \\ \{\,\} & \text{racchiudono le variabili vincolate nell'espressione seguente,} \end{array}$$

$$ap(e, b_1, \ldots, b_n) \equiv ap(\ldots ap(e, b_1), \ldots, b_n),$$
$$e(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n) \equiv ap(e(a_1, \ldots, a_m), b_1, \ldots, b_n).$$

Le regole per i set $\mathtt{N}$ (numeri naturali) e $\mathtt{P}^* \equiv \mathtt{List(P)}$ (liste sul set $\mathtt{P}$) sono riportate in figura 6 per comodità del lettore e per fissare il formalismo usato.(4)
A volte converrà usare a al posto di $a \star nil$ per non appesantire la notazione.

5.2. Il linguaggio, i termini e le formule.

[1] Volendo nel seguito formalizzare in *ITT* i concetti esposti nei capitoli 1 e 3, premettiamo che le costanti non logiche c_j, f_h e $\mathtt{R}_k$ del linguaggio $\mathcal{L}$ in [1] di 1.2 vanno intese qui come **selettori** ovvero come costanti implicitamente definite.
$\mathtt{V}$ viene formalizzato in modo isomorfo a $\mathtt{N}$ intendendo che al naturale i corrisponda la variabile x_i; $\mathtt{V}$ ed $\mathtt{N}$ vengono comunque tenuti distinti per evitare ambiguità nelle espressioni che contengono elementi di entrambi i tipi.
Le regole di $\mathtt{V}$ sono in figura 7 con le funzioni e i giudizi da definire su $\mathtt{V}^*$.
L'isomorfismo fra $\mathtt{V}$ ed $\mathtt{N}$ risulta provato dal seguente:

Teorema 5.2.1 sull'isomorfismo fra $\mathtt{V}$ ed $\mathtt{N}$.

Se per $y \in \mathtt{V}$ e sotto le ipotesi indicate al solito con ...:
$\mathtt{D}(z)$ set $[z \in \mathtt{V}]$, $d_0 \in \mathtt{D}(x\,\widetilde{0})$, $d(z, e) \in \mathtt{D}(s_{\,v} z)$ $[z \in \mathtt{V}, e \in \mathtt{D}(z)]$
si pone $d_v(m, e) \equiv d(x_m, e)$ e quindi:

$$0_v \equiv x\,(\widetilde{0}),$$
$$s_{\,v}(y) \equiv x\,\widetilde{s}\,varind\,y,$$
$$natrec_v(y, d_0, d) \equiv natrec(varind\,y, d_0, d_v).$$

allora 0_v, $s_{\,v}$ e $natrec_v$ verificano regole analoghe a quelle di $\widetilde{0}$, $\widetilde{s}$ e $natrec$.

Dimostrazione.

Le regole di introduzione sono di verifica immediata:

$$\frac{}{0_v \in \mathtt{V}} \qquad \frac{y \in \mathtt{V}}{s_{\,v}(y) \in \mathtt{V}}$$

Per provare la regola di eliminazione:

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad \ldots}{natrec_v(y, d_0, d) \in \mathtt{D}(y)}$$

poniamo $D_v(m) \equiv \mathtt{D}(x_m)$ di modo che $d_0 \in D_v(\widetilde{0})$.

(4) Tratto sostanzialmente da [NPS].

assumendo ora $m \in \mathtt{N}, e \in D_v(m)$ si trova $x_m \in \mathtt{V}, e \in \mathtt{D}(x_m)$ che per ipotesi fornisce $d(x_m, e) \in \mathtt{D}(s\,_v x_m)$ e quindi $d_v(m, e) \in D_v(\widetilde{s}\,m)$.
Dall'ipotesi $y \in \mathtt{V}$ segue poi $varind\,y \in \mathtt{N}$ e dunque
$natrec(varind\,y, d_0, d_v) \in D_v(varind\,y)$.
La tesi segue allora dalla validità di $x\,varind\,y = y \in \mathtt{V}\ [y \in \mathtt{V}]$.
Per provare le regole di uguaglianza:

$$\frac{\dots}{natrec_v(0_v, d_0, d) = d_0 \in \mathtt{D}(0_v)}$$

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad \dots}{natrec_v(s\,_v y, d_0, d) = d(y, natrec_v(y, d_0, d)) \in \mathtt{D}(s\,_v y)}$$

si osserva che:

$$natrec_v(0_v, d_0, d) = natrec(\widetilde{0}, d_0, d_v) \in D_v(\widetilde{0})$$
$$natrec_v(s\,_v y, d_0, d) = natrec(\widetilde{s}\,varind\,y, d_0, d_v) \in D_v(\widetilde{s}\,varind\,y)$$

e si fa uso di: $natrec(\widetilde{s}\,varind\,y, d_0, d_v) = d(y, natrec(varind\,y, d, d_v)) \in \mathtt{D}(s\,_v y)$. $\diamondsuit$

Ovviamente è anche possibile definire x e $varind$ in termini di $s\,_v$ e $natrec_v$ ponendo:

$$x'(n) \equiv natrec(n, 0_v, \{z\}\, s\,_v z)$$
$$varind'(y) \equiv natrec_v(y, \widetilde{0}, \{m\}\, \widetilde{s}\,m)$$

e quindi ricavare le regole che definiscono $\mathtt{V}$, come mostra il seguente:

Teorema 5.2.2 sulle proprietà di x' e $varind'$.

Le funzioni x' e $varind'$ definite sopra soddisfano le regole di $\mathtt{V}$.

Dimostrazione.

$$\frac{n \in \mathtt{N}}{x'n \in \mathtt{V}} \qquad \frac{y \in \mathtt{V}}{varind'y \in \mathtt{N}} \qquad \frac{n \in \mathtt{N}}{varind'x'n = n \in \mathtt{N}} \qquad \frac{y \in \mathtt{V}}{x'varind'y = y \in \mathtt{V}}$$

Le prime due regole sono di facile verifica; per le altre due si pone:

$$A(n) \equiv \mathtt{Eq}(\mathtt{N}, varind'x'n, n) \quad B(y) \equiv \mathtt{Eq}(\mathtt{V}, x'varind'y, y)$$

e si provano A e B per induzione su $\mathtt{N}$ e $\mathtt{V}$ rispettivamente. $\diamondsuit$

[2] In accordo con [2] di 1.2 e [4] di 1.2 le figure 8 e 9 presentano gli insiemi $\mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ e $\mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ con variabili libere, variabili vincolate e istanze.
Per definire le formule proposizionali e predicative si conviene che l'asserzione di $A \in \mathtt{PFrm}(\mathcal{L})$ equivalga all'asserzione simultanea di $A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ e di $\mathtt{BV}\,(A) = nil \in \mathtt{N}$ e che l'asserzione di $A \in \mathtt{QFrm}(\mathcal{L})$ equivalga all'asserzione simultanea di $A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ e di $\mathtt{BV}\,(A) \neq nil$.
La figura 9 mostra anche definire le formule prenesse e le sottoformule.

5.3. I sequenti e le prove.

[1] L'insieme $\mathtt{Seq}(\mathcal{L})$ dei **sequenti** di $\mathcal{L}$ può essere definito ponendo:

$$\mathtt{Seq}(\mathcal{L}) \equiv \mathtt{Frm}(\mathcal{L})^* \,\widetilde{\otimes}\, \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad \text{e} \quad \Gamma \vdash A \equiv (\Gamma, A) \in \mathtt{Seq}(\mathcal{L})$$

[2] La formalizzazione di una prova in LJ$^+$con forma generale:

$$\frac{\sigma_1, \dots, \sigma_n}{\sigma}\,\Pi$$

dove $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \sigma \in \mathtt{Seq}(\mathcal{L})$, risulta invece più complessa perché, oltre alle premesse e alla conclusione, dobbiamo necessariamente ricordare la sua struttura interna.

Definiamo allora in figura 10 l'insieme $\mathtt{J}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma)$ i cui elementi rappresentano le possibili strutture di Π mediante appositi selettori.
A questo punto ha senso porre la seguente definizione di **dimostrabilità**:

$$\mathrm{LJ}^+ \text{ dimostra } \Pi \text{ quando } \mathtt{J}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma) \text{ true.}$$

La bontà di questa definizione è provata dal seguente teorema:

Teorema 5.3.1 sulla dimostrabilità mediante $\mathtt{J}$**.**

$\mathtt{J}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma)$ true *sse* Π *è dimostrabile secondo* [4] *di* 1.3.

Dimostrazione.

L'asserto deriva subito dai due fatti seguenti che sono di verifica immediata:

1. Tutte le regole di LJ^+risultano dimostrabili secondo la precedente definizione.
2. Ogni costante canonica di $\mathtt{J}$ individua la propria regola di introduzione.

Dal primo fatto segue che Π dimostrabile implica $\mathtt{J}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma)$ true, dal secondo segue invece la possibilità di costruire l'albero delle regole che introducono un dato elemento in $\mathtt{J}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma)$. Le regole vengono poi convertite nelle analoghe di LJ^+tralasciando quelle strutturali che agiscono sul primo argomento di $\mathtt{J}$.
Questo procedimento fornisce una prova di Π in LJ^+. $\diamondsuit$

5.4. La semantica intuitiva in *ITT*.

[1] Volendo ora formalizzare i concetti esposti nel capitolo 3, occorre notare che *ITT* soddisfa certamente le proprietà postulate in [1] di 3.1 per la teoria fondazionale S.
In accordo con [3] di 3.1 un **modello** del linguaggio $\mathcal{L}$ è del tipo:

$$\mathcal{M} \equiv \{\mathtt{D}, c_j^{\mathcal{M}}, f_h^{\mathcal{M}}, \mathtt{R}_k^{\mathcal{M}}\}$$

dove gli elementi indicati soddisfano le seguenti regole:

$$\frac{}{\mathtt{D}\ \text{set}} \qquad \frac{}{c_j^{\mathcal{M}} \in \mathtt{D}} \qquad \frac{}{f_h^{\mathcal{M}} \in \mathtt{D}^{a_h} \mapsto \mathtt{D}} \qquad \frac{}{\mathtt{R}_k^{\mathcal{M}}(\xi_1, \ldots, \xi_{b_k})\ \text{set}\ [\xi_1 \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_{b_k} \in \mathtt{D}]}$$

Qui $\mathtt{D}^n$ è definito dalle seguenti posizioni:

$$\mathtt{D}^0 \equiv \mathtt{T}, \quad \mathtt{D}^1 \equiv \mathtt{D}, \quad \mathtt{D}^{m+\widetilde{1}} \equiv \mathtt{D} \mapsto \mathtt{D}^m$$

in cui $\mathtt{T}$ è l'insieme con un elemento.
ξ indica una variabile di *ITT* e $\overline{\xi}$ indica una sequenza di queste variabili. Fra queste sequenze risulta definita intuitivamente l'operazione $\cup$ come in [1] di 1.1.
In figura 11 è definita l'interpretazione in $\mathcal{M}$ di termini e formule.

[2] In *ITT* la nozione di validità assume la seguente forma:

$$\mathcal{M} \models F \text{ con } F \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \text{ significa } (F)^{\mathcal{M}} \text{ true.}$$

Questa definizione è qui da preferirsi a $\vdash_{\mathrm{ITT}} (F^{\mathcal{M}}$ true) perché pone validità e dimostrabilità allo stesso livello di riferimento. Le due definizioni sono comunque equivalenti dal punto di vista concettuale.
Nel caso in esame, la prova diretta del teorema 3.1.1 che qui riformuliamo, è basata in ultima analisi sul seguente asserto provato in [Gen]:

$$\text{Se } \vdash_{\mathrm{LJ}} F \text{ allora } \vdash_{\mathrm{NJ}} F \text{ per ogni } F \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}).$$

oltre che sul teorema 5.3.1 e sul fatto che *ITT* rende valide le regole di NJ: [MLS].

Teorema 5.4.1: formalizzazione del teorema 3.1.1.

In ITT si dimostra la seguente regola:

$$\frac{F \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \qquad \vdash_{\mathrm{LJ+}} F}{\models F}\, SV$$

5.5. Funzioni e relazioni ricorrenti primitive in *ITT*.

[1] L'insieme $\mathtt{Prim}$ è definito in figura 12 secondo [2] di 3.2.
Le componenti di una $f \in \mathtt{Prim}$ si possono trattare con un insieme $\mathtt{PRC}(f)$ genarato in accordo con [2] di 3.2 e formalizzato sempre in figura 12.

[2] Una relazione $\mathtt{R}\,\overline{n}$ su $\mathtt{N}$ è espressa da una famiglia di insiemi:

$$\mathtt{R}(n_1, \ldots, n_b) \text{ set } \;[\,\overline{n}_1 \in \mathtt{N}, \ldots n_b \in \mathtt{N}]$$

Si dirà che $\mathtt{R}$ è una relazione ricorrente primitiva quando $\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}$ dove $\widetilde{\chi}(\mathtt{R})$ è la funzione caratteristica di $\mathtt{R}$, definita anch'essa in figura 12.

Figura 6: numeri naturali e liste.

L'insieme $\mathtt{N}$ dei numeri naturali.

L'insieme $\mathtt{N}$ è definito dalle seguenti regole:

formazione: $$\frac{}{\mathtt{N}\ \text{set}}$$

introduzioni: $$\frac{}{\widetilde{0} \in \mathtt{N}} \qquad \frac{n \in \mathtt{N}}{\widetilde{s}\,(n) \in \mathtt{N}}$$

eliminazione: $$\frac{n \in \mathtt{N} \quad \ldots}{natrec(n, d_0, d) \in \mathtt{D}(n)}$$

uguaglianze: $$\frac{\ldots}{natrec(\widetilde{0}, d_0, d) = d_0 \in \mathtt{D}(\widetilde{0})}$$

$$\frac{n \in \mathtt{N} \quad \ldots}{natrec(\widetilde{s}\,n, d_0, d) = d(n, natrec(n, d_0, d)) \in \mathtt{D}(\widetilde{s}\,n)}$$

dove ... rappresenta le premesse:

$\mathtt{D}(m)$ set $[m \in \mathtt{N}]$, $\quad d_0 \in \mathtt{D}(\widetilde{0})$, $\quad d(m, e) \in \mathtt{D}(\widetilde{s}\,m)$ $[m \in \mathtt{N}, e \in \mathtt{D}(m)]$.

L'insieme $\mathtt{P}^*$ delle liste su $\mathtt{P}$.

Posto $cons(a, \overline{a}) \equiv a \star \overline{a}$, l'insieme $\mathtt{P}^*$ è definito dalle seguenti regole:

formazione: $$\frac{\mathtt{P}\ \text{set}}{\mathtt{P}^*\ \text{set}}$$

introduzioni: $$\frac{}{nil \in \mathtt{P}^*} \qquad \frac{a \in \mathtt{P} \quad \overline{a} \in \mathtt{P}^*}{a \star \overline{a} \in \mathtt{P}^*}$$

eliminazione: $$\frac{\overline{a} \in \mathtt{P}^* \quad \ldots}{listrec(\overline{a}, d_{nil}, d) \in \mathtt{D}(\overline{a})}$$

uguaglianze: $$\frac{\ldots}{listrec(nil, d_{nil}, d) = d_{nil} \in \mathtt{D}(nil)}$$

$$\frac{a \in \mathtt{P} \quad \overline{a} \in \mathtt{P}^* \quad \ldots}{listrec(a \star \overline{a}, d_{nil}, d) = d(a, \overline{a}, listrec(\overline{a}, d_{nil}, d)) \in \mathtt{D}(a \star \overline{a})}$$

dove ... rappresenta le premesse:

$\mathtt{D}(\overline{b})$ set $[\overline{b} \in \mathtt{P}^*]$, $\quad d_{nil} \in \mathtt{D}(nil)$, $\quad d(b, \overline{b}, e) \in \mathtt{D}(b \star \overline{b})$ $[b \in P, \overline{b} \in \mathtt{P}^*, e \in \mathtt{D}(\overline{b})]$.

Funzioni e giudizi d'uso generale.

Nel seguito si intenderà $\mathtt{P}$ set.

1. *pos* soddisfa $pos\,(n) \in \mathtt{N}$ $[n \in \mathtt{N}]$ e ritorna $\widetilde{0}$ se $n = \widetilde{0}$ oppure $\widetilde{1}$:
$$pos\,(n) \equiv natrec(n, \widetilde{0}, \widetilde{1}).$$
2. *hd* soddisfa $hd\,(\overline{a}; a) \in \mathtt{P}$ $[\overline{a} \in \mathtt{P}^*, a \in \mathtt{P}]$
e ritorna la prima componente (la testa) di $\overline{a}$ se $\overline{a} \neq nil$ oppure a:
$$hd\,(\overline{a}) \equiv listrec(\overline{a}, \lambda a.a, \{b\}\, \lambda a.b).$$
3. *tl* soddisfa $tl\,(\overline{a}) \in \mathtt{P}^*$ $[\overline{a} \in \mathtt{P}^*]$
e ritorna $\overline{a}$ senza la testa (cioè la coda di $\overline{a}$) oppure *nil*:
$$tl\,(\overline{a}) \equiv listrec(\overline{a}, nil, \{\overline{b}\}\, \overline{b}).$$

Figura 6: numeri naturali e liste (continua).

4. *len* soddisfa $len\,(\overline{a}) \in \mathtt{N}\ [\overline{a} \in \mathtt{P}^*]$
e ritorna il numero di componenti (la lunghezza) di $\overline{a}$:
$$len\,(\overline{a}) \equiv listrec(\overline{a}, \widetilde{0}, \{e\}\,\widetilde{s}\,e).$$
5. *proj* soddisfa $proj\,(n; \overline{a}, a) \in \mathtt{P}\ [n \in \mathtt{N}, \overline{a} \in \mathtt{P}^*, a \in \mathtt{P}]$
e ritorna la componente di $\overline{a}$ al posto n oppure a:
$$proj\,(n) \equiv natrec(n, \lambda\alpha.hd\,\overline{a}, \{e\}\,\lambda\alpha.ap(e, q\,\overline{a}))$$
6. *append* soddisfa $append(\overline{a}_1; \overline{a}_2) \in \mathtt{P}^*\ [\overline{a}_1 \in \mathtt{P}^*, \overline{a}_2 \in \mathtt{P}^*]$
e ritorna la concatenazione di $\overline{a}_2$ dopo $\overline{a}_1$:
$$append(\overline{a}_1) \equiv listrec(\overline{a}_1, \lambda\alpha_2.\alpha_2, \{a, e\}\,\lambda\alpha_2.a \star ap(e, \overline{a}_2)).$$
dove si conviene che l'operatore λ leghi meno di ogni operatore binario infisso. Poniamo poi $(\overline{a}_1 \mathbin{@} \overline{a}_2) \equiv append(\overline{a}_1; \overline{a}_2)$.
7. $\overline{a} \neq nil$ giudica l'essere $\overline{a} \in \mathtt{P}^*$ diverso da *nil*:
$$\overline{y} \neq nil \equiv pos\,len\,\overline{a} = \widetilde{1} \in \mathtt{N}$$

Figura 7: l'insieme $\mathtt{V}$.

L'insieme $\mathtt{V}$ delle variabili.

L'insieme $\mathtt{V}$ è definito dalle seguenti regole:

formazione: $$\frac{}{\mathtt{V}\ \mathrm{set}}$$

introduzione: $$\frac{n \in \mathtt{N}}{x\,(n) \in \mathtt{V}}$$

eliminazione: $$\frac{y \in \mathtt{V}}{varind\,(y) \in \mathtt{N}}$$

uguaglianze: $$\frac{n \in \mathtt{N}}{varind\,(x\,(n)) = n \in \mathtt{N}} \qquad \frac{y \in \mathtt{V}}{x\,(varind\,(y)) = y \in \mathtt{V}}$$

e si pone $x_n \equiv x\,(n)$.

Funzioni e giudizi su $\mathtt{V}$.

Nel seguito si intende $\mathtt{P}$ set:

1. *case* soddisfa $case(y_1, y_2, a_1, a_2) \in \mathtt{P}\ [y_1 \in \mathtt{V}, y_2 \in \mathtt{V}, a_1 \in \mathtt{P}, a_2 \in \mathtt{P}]$
e ritorna a_1 se $y_1 = y_2$ oppure a_2:
$$\begin{aligned} case(y_1, y_2, a_1, a_2) \equiv natrec(&(varind\,y_1 - varind\,y_2) + \\ &(varind\,y_2 - varind\,y_1), \\ &a_1, a_2 \\ &). \end{aligned}$$
2. *count* soddisfa $count(\overline{y}; y) \in \mathtt{N}\ [\overline{y} \in \mathtt{V}^*, y \in \mathtt{V}]$
e ritorna il numero di occorrenze di y in $\overline{y}$:
$$count(\overline{y}) \equiv listrec(\overline{y}, \lambda y.\widetilde{0}, \{b, e\}\,\lambda y.case(b, y, \widetilde{s}\,ap(e, y), ap(e, y))).$$

Figura 7: l'insieme $\mathtt{V}$ (continua).

3. *index* soddisfa $index(\overline{y}; y) \in \mathtt{N}$ $[\overline{y} \in \mathtt{V}^*, y \in \mathtt{V}]$
e ritorna la posizione della prima occorrenza di y in $\overline{y}$ oppure $len\ \overline{y}$:
$$index(\overline{y}) \equiv listrec(\overline{y}, \lambda y.\widetilde{0}, \{b, e\}\ \lambda y.case(b, y, \widetilde{0}, \widetilde{s}\ ap(e, y))).$$
4. $\sqcup$ soddisfa $\sqcup(\overline{y}; y) \in \mathtt{V}^*$ $[\overline{y} \in \mathtt{V}^*, y \in \mathtt{V}]$ e ritorna $\overline{y} \cup (y \star nil)$:
$$\sqcup(\overline{y}) \equiv listrec(\overline{y}, \lambda y.y \star nil, \{b, \overline{b}, e\}\ \lambda y.case(b, y, b \star \overline{b}, b \star ap(e, y))).$$
Si farà uso della notazione infissa: $\overline{y} \sqcup y \equiv \sqcup(\overline{y}; y)$.
5. $\cup$ soddisfa $\cup(\overline{y}_2; \overline{y}_1) \in \mathtt{V}^*$ $[\overline{y}_2 \in \mathtt{V}^*, \overline{y}_1 \in \mathtt{V}^*]$ e ritorna $\overline{y}_1 \cup \overline{y}_2$:
$$\cup(\overline{y}_2) \equiv listrec(\overline{y}_2, \lambda\alpha_1.\alpha_1, \{b, e\}\ \lambda\alpha_1.(\overline{y}_1 \sqcup b) \star ap(e, \overline{y}_1)).$$
Si farà uso della notazione infissa: $\overline{y}_1 \cup \overline{y}_2 \equiv \cup(\overline{y}_2; \overline{y}_1)$.
6. $-$ soddisfa $-(\overline{y}; y) \in \mathtt{V}^*$ $[\overline{y} \in \mathtt{V}^*, y \in \mathtt{V}]$ e ritorna $\overline{y} - (y \star nil)$:
$$-(\overline{y}) \equiv listrec(\overline{y}, \lambda y.nil, \{b, \overline{b}, e\}\ \lambda y.case(b, y, \overline{b}, b \star ap(e, y))).$$
Si farà uso della notazione infissa: $\overline{y} - y \equiv -(\overline{y}; y)$.
7. $y \in \overline{y}$ giudica l'appartenenza di $y \in \mathtt{V}$ ad $\overline{y} \in \mathtt{V}^*$:
$$y \in \overline{y} \equiv pos\ count(\overline{y}; y) = \widetilde{1} \in \mathtt{N}$$
8. $y \notin \overline{y}$ giudica la non appartenenza di $y \in \mathtt{V}$ ad $\overline{y} \in \mathtt{V}^*$:
$$y \notin \overline{y} \equiv count(\overline{y}; y) = \widetilde{0} \in \mathtt{N}$$

Figura 8: termini e loro istanze in *ITT*.

L'insieme $\mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ dei termini.

Posto $y^t \equiv t(y)$ quando $y \in \mathtt{V}$, l'insieme $\mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ è definito dalle seguenti regole: (quelle riguardanti c_j e f_h sono una per ogni j e una per ogni h)

formazione: $$\frac{}{\mathtt{Trm}(\mathcal{L})\ \mathrm{set}}$$

introduzioni: $$\frac{y \in \mathtt{V}}{y^t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})} \qquad \frac{}{c_j \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})} \qquad \frac{\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^* \quad len\ \overline{t} = a_h \in \mathtt{N}}{f_h(\overline{t}) \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})}$$

eliminazione: $$\frac{t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad \ldots}{trmrec(t, \ldots) \in \mathtt{D}(t)}$$

uguaglianze: $$\frac{y \in \mathtt{V} \quad \ldots}{trmrec(y^t, \ldots) = d_v(y) \in \mathtt{D}(y^t)} \qquad \frac{\ldots}{trmrec(c_j, \ldots) = d_c^j \in \mathtt{D}(c_j)}$$

$$\frac{\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^* \quad len\ \overline{t} = a_h \in \mathtt{N} \quad \ldots}{\begin{array}{l} trmrec(f_h\overline{t}, \ldots) = d_f^h(\ \overline{t}, \\ \qquad trmrec(t_1, \ldots), \ldots, \\ \qquad trmrec(t_{a_h}, \ldots) \\ \quad) \in \mathtt{D}(f_h\overline{t}) \end{array}}$$

Se $\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ e $n \in \mathtt{N}$ allora $t_n \equiv proj\,(n - \widetilde{1};\, \overline{t}, 0_v^t)$ (la n-esima componente). Con questa definizione si ha $t_0 = t_1$ e $t_n = 0_v^t$ se $n > len\ \overline{t}$. Il termine 0_v^t è presente solo per rendere totale la funzione t_n.

... come premessa delle regole indica le premesse:

$$\begin{array}{c} \mathtt{D}(u)\ \mathrm{set}\ [u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})], \\ d_v(z) \in \mathtt{D}(z^t)\ [z \in \mathtt{V}]\ \text{(non è lo stesso } d_v \text{ di 5.2.1)}, \\ d_c^j \in \mathtt{D}(c_j)\ \text{per ogni } j, \\ d_f^h(\overline{u}, e_1, \ldots, e_{a_h}) \in \mathtt{D}(f_h\overline{u})\ [\overline{u} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*, \\ \qquad len\ \overline{u} = a_h \in \mathtt{N}, \\ \qquad e_1 \in \mathtt{D}(u_1), \ldots, e_{a_h} \in \mathtt{D}(u_{a_h}) \\ \quad]\ \text{per ogni } h. \end{array}$$

... come argomento di *trmrec* indica gli argomenti:
d_v, d_c^j per ogni j, d_f^h per ogni h.

Le funzioni inerenti ai termini.

1. $\mathtt{FV}$ soddisfa $\mathtt{FV}(t) \in \mathtt{V}^*$ $[t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})]$ e ritorna la lista delle variabili libere di t:
$$\begin{array}{l} \mathtt{FV}(t) \equiv trmrec(\ t, \\ \qquad \{z\}\, z \star nil, \\ \qquad nil\ \text{(ripetere per ogni } j), \\ \qquad \{e_1, \ldots, e_{a_h}\}\, e_1 \cup \ldots \cup e_{a_h}\ \text{(ripetere per ogni } h) \\ \quad) \end{array}$$
2. $\triangledown$ soddisfa $\triangledown(y, \overline{t}, \overline{y}_2) \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ $[y \in \mathtt{V}, \overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*, \overline{y}_2 \in \mathtt{V}^*]$ e ritorna la componente di $\overline{t}$ che si trova nella posizione di y in $\overline{y}_2$ oppure y^t:
$$\triangledown(y, \overline{t}, \overline{y}_2) \equiv proj\,(index(\overline{y}_2; y);\, \overline{t}, y^t).$$

Figura 8: termini e loro istanze in ITT (continua).

3. $\triangle$ soddisfa $\triangle(\overline{y}_1;\, \overline{t},\, \overline{y}_2) \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ $[\overline{y}_1 \in \mathtt{V}^*,\, \overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*,\, \overline{y}_2 \in \mathtt{V}^*]$ e ritorna la concatenazione degli $\bigtriangledown(y,\, \overline{t},\, \overline{y}_2)$ per gli y in $\overline{y}_1$ oppure nil:
$$\triangle(\overline{y}_1) \equiv listrec(\overline{y}_1, \lambda\,\overline{t}.\lambda\,\overline{y}_2.nil, \{b,e\}\,\lambda\,\overline{t}.\lambda\,\overline{y}_2.\bigtriangledown(b,\, \overline{t},\, \overline{y}_2) \star ap(e,\, \overline{t},\, \overline{y}_2)).$$
L'operatore $\triangle$ serve a definire l'istanza di un termine composto o di una formula composta che, come noto, è costruita sulle istanze dei rispettivi componenti.
4. $trmins$ soddisfa $trmins(t;\, \overline{v}) \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})$ $[t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}),\, \overline{v} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*]$ e ritorna l'istanza $t[\overline{v}]$:
$$\begin{array}{ll} trmins(t) \equiv trmrec(\ t, & \\ & \{z\}\,\lambda\,\overline{v}.hd\,(\triangle(z \star nil;\, \overline{v}, z \star nil); z^t), \\ & \lambda\,\overline{v}.c_j \text{ (ripetere per ogni } j), \\ & \{\overline{u}, e_1, \dots, e_{a_h}\}\,\lambda\,\overline{v}.f_h(\ ap(e_1, \triangle(\mathtt{FV}\,u_1;\, \overline{v}, \mathtt{FV}\,f_h\,\overline{u})), \dots, \\ & \qquad\qquad\qquad ap(e_{a_h}, \triangle(\mathtt{FV}\,u_{a_h};\, \overline{v}, \mathtt{FV}\,f_h\,\overline{u})) \\ & \qquad\qquad\quad \text{) (ripetere per ogni } h) \\ &) \end{array}$$
Naturalmente si pone per definizione $t[\overline{v}] \equiv trmins(t;\, \overline{v})$.
Si noti infine che se $z \in \mathtt{V}$ e $\overline{v} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ allora:
$$hd\,(\triangle(z \star nil,\, \overline{v}, z \star nil); z^t) = \begin{cases} z^t \text{ se } \overline{v} = nil. \\ v_1 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Le prossime due funzioni servono per definire formalmente $A[y/u]$:

5. to_trm soddisfa $to\_trm\,(\overline{y}) \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ $[\overline{y} \in \mathtt{V}^*]$ e ritorna la lista ottenuta trasformando ogni componente y_i di $\overline{y}$ nel termine y_i^t:
$$to\_trm\,(\overline{y}) \equiv listrec(\overline{y}, nil, \{b,e\}\, b^t \star e).$$
6. $subst$ soddisfa $subst(\overline{t}; n, u) \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ $[\overline{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*, n \in \mathtt{N}, u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})]$ e ritorna $\overline{t}$ con l'n-esima componente sostituita da u:
$$\begin{array}{ll} subst(\overline{t}) \equiv listrec(\overline{t}, & \\ & \lambda n.\lambda u.nil, \\ & \{b,\, \overline{b}, e\}\,\lambda n.\lambda u.natrec(n, \\ & \qquad\qquad\qquad u \star \overline{b}, \\ & \qquad\qquad\qquad b \star ap(e, \widetilde{p}\,n, u) \\ & \qquad\qquad\quad) \\ &) \end{array}$$

Figura 9: formule e loro istanze in ITT.

L'insieme $\mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ delle formule.

Posto $A \Box B \equiv \Box(A, B)$ e $QyA \equiv Q(y, A)$, l'insieme $\mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ è definito dalle regole: (quelle su $\mathtt{R}_k$, $\Box$ e Q vanno ripetute per ogni k, ogni connettivo e ogni quantificatore)

formazione: $$\frac{}{\mathtt{Frm}(\mathcal{L})\ \text{set}}$$

introduzioni: $$\frac{}{\bot \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})} \qquad \frac{\bar{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^* \quad len\ \bar{t} = b_k \in \mathtt{N}}{\mathtt{R}_k(\bar{t}) \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}{A \Box B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})} \qquad \frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad y \in \mathtt{V}}{QyA \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}$$

eliminazione: $$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad \ldots}{frmrec(A, \ldots) \in \mathtt{D}(A)}$$

uguaglianze: $$\frac{\ldots}{frmrec(\bot, \ldots) = d_\bot \in \mathtt{D}(\bot)}$$

$$\frac{\bar{t} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^* \quad len\ \bar{t} = b_k \in \mathtt{N} \quad \ldots}{frmrec(R_k \bar{t}, \ldots) = d_r^k(\bar{t}) \in \mathtt{D}(R_k \bar{t})}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad \ldots}{\begin{array}{l} frmrec(A \Box B, \ldots) = d_\Box(A, B, frmrec(A, \ldots), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad frmrec(B, \ldots)) \in \mathtt{D}(A \Box B) \end{array}}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad y \in \mathtt{V} \quad \ldots}{frmrec(QyA, \ldots) = d_Q(A, y, frmrec(A, \ldots)) \in \mathtt{D}(QyA)}$$

$\ldots$ come premessa delle regole indica le premesse seguenti:

$$\begin{array}{c} \mathtt{D}(C)\ \text{set}\ [C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})], \\ d_\bot \in \mathtt{D}(\bot), \\ d_r^k(\overline{u}) \in \mathtt{D}(R_k \overline{u})\ [\overline{u} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*, len\ \overline{u} = b_k \in \mathtt{N}]\ \text{per ogni } k, \\ d_\Box(C, D, e_C, e_D) \in \mathtt{D}(C \Box D)\ [C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), D \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), \\ \qquad\qquad e_C \in \mathtt{D}(C), e_D \in \mathtt{D}(D) \\ \qquad]\ \text{per ogni } \Box, \\ d_Q(C, z, e) \in \mathtt{D}(QzC)\ [C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), z \in \mathtt{V}, e \in \mathtt{D}(C)]\ \text{per ogni } Q \end{array}$$

$\ldots$ come argomento di $frmrec$ indica gli argomenti seguenti:
$d_\bot$, d_r^k per ogni k, $d_\Box$ per ogni $\Box$, d_Q per ogni Q.

Figura 9: formule e loro istanze in *ITT* (continua).

Le funzioni inerenti alle formule.

1. $\mathtt{FV}$ soddisfa $\mathtt{FV}\,(A) \in \mathtt{V}^*\ [A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})]$
   e ritorna la lista delle variabili libere di A:
   (si noti che questo $\mathtt{FV}$ non è lo stesso di quello definito in figura 8)
   $$\begin{aligned}\mathtt{FV}\,(A) \equiv frmrec(\ & A,\\ & nil,\\ & \{\,\overline{u}\}\,\mathtt{FV}\,u_1 \cup \ldots \cup \mathtt{FV}\,u_{b_k} \text{ (ripetere per ogni } k),\\ & \{e_C, e_D\}\,e_C \cup e_D \text{ (ripetere per ogni } \Box),\\ & \{z, e\}\,e - z \text{ (ripetere per ogni } Q)\\ )&\end{aligned}$$
2. Estendiamo $\mathtt{FV}$ in modo che soddisfi $\mathtt{FV}\,(\Gamma) \in \mathtt{V}^*\ [\Gamma \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})^*]$
   e ritorni l'unione dei $\mathtt{FV}\,(A)$ per $A \in \Gamma$:
   $$\mathtt{FV}\,(\Gamma) \equiv listrec(\Gamma, nil, \{b, e\}\,\mathtt{FV}\,(b) \cup e)$$
3. $\mathtt{BV}_\forall$ soddisfa $\mathtt{BV}_\forall(A) \in \mathtt{V}^*\ [A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})]$
   e ritorna la lista delle variabili di A vincolate da $\forall$:
   $$\begin{aligned}\mathtt{BV}_\forall(A) \equiv frmrec(\ & A,\\ & nil,\\ & nil \text{ (ripetere per ogni } k),\\ & \{e_C, e_D\}\,e_C \cup e_D \text{ (ripetere per ogni } \Box),\\ & \{z, e\}\,e \cup (z \star nil),\\ & \{e\}\,e\\ )&\end{aligned}$$
4. $\mathtt{BV}_\exists$ soddisfa $\mathtt{BV}_\exists(A) \in \mathtt{V}^*\ [A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})]$
   e ritorna la lista delle variabili di A vincolate da $\exists$:
   $$\begin{aligned}\mathtt{BV}_\exists(A) \equiv frmrec(\ & A,\\ & nil,\\ & nil \text{ (ripetere per ogni } k),\\ & \{e_C, e_D\}\,e_C \cup e_D \text{ (ripetere per ogni } \Box),\\ & \{e\}\,e,\\ & \{z, e\}\,e \cup (z \star nil)\\ )&\end{aligned}$$
5. $\mathtt{BV}$ soddisfa $\mathtt{BV}\,(A) \in \mathtt{V}^*\ [A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})]$
   e ritorna la lista delle variabili vincolate di A:
   $$\mathtt{BV}\,(A) \equiv \mathtt{BV}_\forall \cup \mathtt{BV}_\exists.$$
6. $subst_f$ soddisfa $subst_f(A, y, u) \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})\ [A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), y \in \mathtt{V}, u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})]$
   e ritorna l'istanza $A[y/u]$:
   $$subst_f(A, y, u) \equiv A[subst(to\_trm\,\mathtt{FV}\,A; index(\mathtt{FV}\,A; y), u)\,].$$
   Naturalmente si pone per definizione: $A[y/u] \equiv subst_f(A, y, u)$.

Figura 9: formule e loro istanze in *ITT* (continua).

7. $frmins$ soddisfa $frmins(A; \overline{v}) \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ $[A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), \overline{v} \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*]$
e ritorna l'istanza $A[\overline{v}]$:

$$
\begin{aligned}
frmins(t) \equiv frmrec(\ & A,\\
& \lambda\overline{v}.d_{\perp},\\
& \{\overline{u}\}\ \lambda\overline{v}.\mathtt{R}_k(\ u_1[\triangle(\mathtt{FV}\,u_1;\ \overline{v}, \mathtt{FV}\,\mathtt{R}_k\,\overline{u})\,]\ @ \ldots @\\
& \qquad\qquad u_{b_k}[\triangle(\mathtt{FV}\,u_{b_k};\ \overline{v}, \mathtt{FV}\,\mathtt{R}_k\,\overline{u})\,]\\
& \qquad\quad)\ \text{(ripetere per ogni } k\text{)},\\
& \{C, D, e_C, e_D\}\ \lambda\overline{v}.ap(e_C, \triangle(\mathtt{FV}\,C;\ \overline{v}, \mathtt{FV}\,C\Box D))\Box\\
& \qquad\qquad\qquad ap(e_D, \triangle(\mathtt{FV}\,D;\ \overline{v}, \mathtt{FV}\,C\Box D))\\
& \qquad\qquad\qquad \text{(ripetere per ogni } \Box\text{)},\\
& \{C, z, e\}\ \lambda\overline{v}.Qz\,ap(e, \triangle(\mathtt{FV}\,C;\ \overline{v}, \mathtt{FV}\,QzC))\\
& \qquad\qquad \text{(ripetere per ogni } Q\text{)}\\
)&
\end{aligned}
$$

Naturalmente si pone per definizione $A[\overline{v}] \equiv frmins(A; \overline{v})$.

8. mat soddisfa $mat(A) \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ $[A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})]$
e ritorna la matrice estesa di A:

$$
\begin{aligned}
mat(F) \equiv frmrec(\ & A,\\
& \perp,\\
& \{\overline{t}\}\,\mathtt{R}_k(\overline{t})\ \text{(ripetere per ogni } k\text{)},\\
& \{e_C, e_D\}\,e_C\Box e_D\ \text{(ripetere per ogni } \Box\text{)},\\
& \{e\}\,e\ \text{(ripetere per ogni } Q\text{)}\\
)&
\end{aligned}
$$

Ovviamente è facile vedere che $\mathtt{BV}\,matA = nil \in \mathtt{V}^*$.

Figura 9: formule e loro istanze in *ITT* (continua).

Le formule prenesse.

L'insieme $\mathtt{Pren}(\mathcal{L})$ ha un elemento canonico $pren\,(A)$ per ogni formula prenessa A ed è definito dalle regole:
(quelle riguardanti Q vanno ripetute per ogni quantificatore)

formazione: $$\frac{}{\mathtt{Pren}(\mathcal{L})\ \mathrm{set}}$$

introduzioni: $$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad \mathtt{BV}\,(A) = nil \in \mathtt{V}^*}{pren\,(A) \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad pren\,(A) \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \quad y \in \mathtt{V}}{pren\,(QyA) \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})}$$

eliminazione: $$\frac{a \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \quad \ldots}{prnrec(a, \ldots) \in \mathtt{D}(a)}$$

uguaglianze: $$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad \mathtt{BV}\,(A) = nil \in \mathtt{V}^* \quad \ldots}{prnrec(pren\,(A), \ldots) = d_p(A) \in \mathtt{D}(pren\,A)}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad pren\,(A) \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \quad y \in \mathtt{V} \quad \ldots}{\begin{array}{l} prnrec(pren\,QyA, \ldots) = d_Q(A, y, prnrec(pren\,A, \ldots) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad) \in \mathtt{D}(pren\,QyA) \end{array}}$$

$\ldots$ come premessa delle regole indica le premesse seguenti:

$$\mathtt{D}(b)\ \mathrm{set}\ [b \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})],$$
$$d_p(A) \in \mathtt{D}(pren\,A)\ [A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), \mathtt{BV}\,(A) = nil \in \mathtt{V}^*],$$
$$\begin{array}{l} d_Q(E, z, e) \in \mathtt{D}(pren\,QzE)\ [\ E \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}), pren\,E \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \in \mathtt{V}, e \in \mathtt{D}(pren\,E) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad]\ \text{(ripetere per ogni } Q) \end{array}$$

$\ldots$ come argomento di *prnrec* indica gli argomenti: d_p e d_Q per ogni Q.
Ovviamente conveniamo che l'asserzione $A \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})$ equivalga alla simultanea asserzione di $A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ e di $pren\,(A) \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})$.

Figura 9: formule e loro istanze in *ITT* (continua).

Le sottoformule di una formula.

Posto $B \leq A \equiv sf(A,B) \in \mathtt{Sub}(A)$, l'insieme $\mathtt{Sub}(A)$ è definito dalle regole:
(quelle su $\Box$ e Q vanno ripetute per ogni connettivo e per ogni quantificatore)

formazione:
$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}{\mathtt{Sub}(A)\ \mathrm{set}}$$

introduzioni:
$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}{A \leq A} \qquad \frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}{\bot \leq A}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \leq A}{C \leq A \Box B}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \leq B}{C \leq A \Box B}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad y \in \mathtt{V} \quad t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \leq A[y/t]}{C \leq QyA}$$

Qui le regole di eliminazione ed uguaglianza non sono state riportate.

Le sottoformule proprie di una formula.

Posto $B < A \equiv psf(A,B) \in \mathtt{PSub}(A)$, l'insieme $\mathtt{PSub}(A)$ è definito dalle regole:
(quelle su $\Box$ e Q vanno ripetute per ogni connettivo e per ogni quantificatore)

formazione:
$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}{\mathtt{PSub}(A)\ \mathrm{set}}$$

introduzioni:
$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}{\bot < A}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \leq A}{C < A \Box B}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad B \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \leq B}{C < A \Box B}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad y \in \mathtt{V} \quad t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad C \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \quad C \leq A[y/t]}{C < QyA}$$

Anche qui le regole di eliminazione ed uguaglianza non sono state riportate.

Figura 10: l'insieme $\mathtt{J}$.

L'insieme $\mathtt{J}$ è definito dalle seguenti regole:

$$\text{formazione:}\quad \frac{\overline{\sigma} \in \mathtt{Seq}(\mathcal{L})^* \quad \sigma \in \mathtt{Seq}(\mathcal{L})}{\mathtt{J}(\overline{\sigma}, \sigma)\ \text{set}}$$

Le regole seguenti sono tutte introduzioni; in particolare le prime tre permettono le operazioni di indebolimento, contrazione e scambio sul primo argomento di $\mathtt{J}$:

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \sigma)}{w(\overline{\sigma}, \sigma_0, \sigma, a) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma} @ \sigma_0), \sigma)}$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}((\overline{\sigma} @ \sigma_0 @ \sigma_0), \sigma)}{c(\overline{\sigma}, \sigma_0, \sigma, a) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma} @ \sigma_0), \sigma)}$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 @ \sigma_1 @ \sigma_2 @ \overline{\sigma}_2), \sigma)}{x(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma, a) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 @ \sigma_2 @ \sigma_1 @ \overline{\sigma}_2), \sigma)}$$

Le seguenti introduzioni equivalgono alle regole proposizionali di LJ:

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_1, \Gamma \vdash A) \quad b \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_2, \Delta \vdash B)}{andR(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \Gamma, \Delta, A, B, a, b) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 @ \overline{\sigma}_2), (\Gamma @ \Delta) \vdash A \otimes B)} \otimes R$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ A) \vdash C)}{andL1(\overline{\sigma}, \Gamma, A, B, C, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ A \otimes B) \vdash C)} \otimes L1$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ B) \vdash C)}{andL2(\overline{\sigma}, \Gamma, B, A, C, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ A \otimes B) \vdash C)} \otimes L2$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash A)}{orR1(\overline{\sigma}, \Gamma, A, B, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash A \oplus B)} \oplus R1$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash B)}{orR1(\overline{\sigma}, \Gamma, B, A, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash A \oplus B)} \oplus R2$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_1, (\Gamma @ A) \vdash C) \quad b \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_2, (\Delta @ B) \vdash C)}{orL(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \Gamma, \Delta, A, B, C, a, b) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 @ \overline{\sigma}_2), (\Gamma @ \Delta @ A \oplus B) \vdash C)} \oplus L$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ A) \vdash B)}{impR(\overline{\sigma}, \Gamma, A, B, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash A \to B)} \to R$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_1, \Gamma \vdash A) \quad b \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_2, (\Delta @ B) \vdash C)}{impL(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \Gamma, \Delta, A, B, C, a, b) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 @ \overline{\sigma}_2), (\Gamma @ \Delta @ A \to B) \vdash C)} \to L$$

Le seguenti introduzioni equivalgono alle regole predicative di LJ:

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash A) \quad y \notin \mathtt{FV}(\Gamma)}{allR(\overline{\sigma}, \Gamma, A, y, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash \forall y A)} \forall R$$

$$\frac{y \in \mathtt{FV}(A) \quad t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ A[y/t]) \vdash C)}{allL(\overline{\sigma}, \Gamma, A, C, y, t, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ \forall y A) \vdash C)} \forall L$$

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad t \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L}) \quad a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash A[y/t])}{exR(\overline{\sigma}, \Gamma, A, y, t, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash \exists y A)} \exists R$$

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ A) \vdash C) \quad y \notin \mathtt{FV}(\Gamma @ C)}{exL(\overline{\sigma}, \Gamma, A, C, y, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma @ \exists y A) \vdash C)} \exists L$$

Figura 10: l'insieme $\mathtt{J}$ (continua).

Le seguenti introduzioni equivalgono alle regole strutturali di LJ:

$$\frac{}{top(A) \in \mathtt{J}(nil, A \vdash A)}\,Top$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash \bot)}{wR(\overline{\sigma}, \Gamma, C, A, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, \Gamma \vdash C)}\,WR$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma \mathbin{@} \Phi) \vdash C)}{wL(\overline{\sigma}, \Gamma, \Phi, A, C, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma \mathbin{@} A \mathbin{@} \Phi) \vdash C)}\,WL$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma \mathbin{@} A \mathbin{@} A) \vdash C)}{cL(\overline{\sigma}, \Gamma, A, C, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma \mathbin{@} A) \vdash C)}\,CL$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma \mathbin{@} A \mathbin{@} B \mathbin{@} \Phi) \vdash C)}{xL(\overline{\sigma}, \Gamma, \Phi, A, B, C, a) \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}, (\Gamma \mathbin{@} B \mathbin{@} A \mathbin{@} \Phi) \vdash C)}\,XL$$

$$\frac{a \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_1, \Gamma \vdash A) \quad b \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_2, (\Delta \mathbin{@} A \mathbin{@} \Phi) \vdash C)}{cut(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \Delta, \Gamma, \Phi, A, C, a, b) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 \mathbin{@} \overline{\sigma}_2), (\Delta \mathbin{@} \Gamma \mathbin{@} \Phi) \vdash C)}\,Cut$$

Occorre poi introdurre una diversa costante canonica di $\mathtt{J}$ per ogni regola di Σ; in accordo con [4] di 1.3 queste introduzioni hanno la forma generale:

$$\frac{a_1 \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_1, (\Gamma_1 \mathbin{@} \Psi_1) \vdash C_1) \ldots a_n \in \mathtt{J}(\overline{\sigma}_n, (\Gamma_n \mathbin{@} \Psi_n) \vdash C_n)}{\begin{array}{l} d(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n, \\ \quad \Gamma_1, \Psi_1, \ldots, \Gamma_n, \Psi_n, \Psi, \\ \quad C_1, \ldots, C_n, C, \\ \quad a_1, \ldots, a_n \\ \ ) \in \mathtt{J}((\overline{\sigma}_1 \mathbin{@} \ldots \mathbin{@} \overline{\sigma}_n), (\Gamma_1 \mathbin{@} \ldots \mathbin{@} \Gamma_n \mathbin{@} \Psi) \vdash C) \end{array}}$$

Le regole di eliminazione e di uguaglianza di $\mathtt{J}$ non sono state riportate.

Figura 11: l'interpretazione di termini e formule.

L'interpretazione in $\mathcal{M}$ dei termini di $\mathcal{L}$.

La funzione $trmint_{\mathcal{M}}(t)$ ritorna l'interpretazione di $t \in \mathtt{Trm(}\mathcal{L}\mathtt{)}$ ed è definita dalle seguenti regole: (quelle riguardanti c_j e f_h sono una per ogni j e una per ogni h)

formazione: $$\frac{t \in \mathtt{Trm(}\mathcal{L}\mathtt{)}}{trmint_{\mathcal{M}}(t) \in \mathtt{D}^n \mapsto \mathtt{D}} \text{ con } n \equiv len\,\mathtt{FV}\,t$$

uguaglianze: $$\frac{y \in \mathtt{V}}{trmint_{\mathcal{M}}(y^t) = \lambda d_m.d_m \in \mathtt{D} \mapsto \mathtt{D}} \text{ con } m \equiv varind\,y$$

$$\frac{}{trmint_{\mathcal{M}}(c_j) = \lambda\xi.c_j^{\mathcal{M}} \in \mathtt{T} \mapsto \mathtt{D}}$$

$$\frac{\overline{t} \in \mathtt{Trm(}\mathcal{L}\mathtt{)} \quad len\,(\overline{t}) = a_h \in \mathtt{N}}{\begin{array}{l} trmint_{\mathcal{M}}(f_h\,\overline{t}) = \lambda\,\overline{\xi}_1 \cup \ldots \cup \overline{\xi}_{a_h}.ap(f_h^{\mathcal{M}}, \\ \qquad trmint_{\mathcal{M}}(t_1;\,\overline{\xi}_1), \ldots, \\ \qquad trmint_{\mathcal{M}}(t_{a_h};\,\overline{\xi}_{a_h}) \\ \qquad) \in \mathtt{D}^n \mapsto \mathtt{D} \end{array}}$$

Nell'ultima regola ogni $\overline{\xi}_i$ è una lista di variabili lunga $len\,\mathtt{FV}\,t_i$ e $n \equiv len\,\mathtt{FV}\,f_h\,\overline{t}$. Naturalmente si pone per definizione $(t)^{\mathcal{M}} \equiv trmint_{\mathcal{M}}(t)$.

L'interpretazione in $\mathcal{M}$ delle formule di $\mathcal{L}$.

$\mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(A)$ rappresenta l'interpretazione di $t \in \mathtt{Trm(}\mathcal{L}\mathtt{)}$ ed è definita dalle regole: (quelle su $\mathtt{R}_k$, $\Box$ e Q vanno ripetute per ogni k, ogni connettivo e ogni quantificatore)

formazione: $$\frac{A \in \mathtt{Frm(}\mathcal{L}\mathtt{)}}{\mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(A, \xi_1, \ldots, \xi_n) \text{ set } [\xi_1 \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_n \in \mathtt{D}]} \text{ con } n \equiv len\,\mathtt{FV}\,A$$

uguaglianze: $$\frac{}{\mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(\bot) = \emptyset}$$

$$\frac{\overline{t} \in \mathtt{Trm(}\mathcal{L}\mathtt{)}^* \quad len\,(\overline{t}) = b_k \in \mathtt{N}}{\begin{array}{c} \mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(\mathtt{R}_k\,\overline{t},\,\overline{\xi}_1 \cup \ldots \cup \overline{\xi}_{b_k}) = \mathtt{R}_k^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\,\overline{\xi}_1, \ldots, t_{b_k}^{\mathcal{M}}\,\overline{\xi}_{b_k}) \\ [\xi_{1,1} \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_{1,n_1} \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_{b_k,1} \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_{b_k,n_{b_k}} \in \mathtt{D}] \end{array}}$$

$$\frac{A \in \mathtt{Frm(}\mathcal{L}\mathtt{)} \quad B \in \mathtt{Frm(}\mathcal{L}\mathtt{)}}{\begin{array}{c} \mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(A \Box B,\,\overline{\xi}_A \cup \overline{\xi}_B) = \mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(A,\,\overline{\xi}_A)\,\widetilde{\Box}\,\mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(B,\,\overline{\xi}_B) \\ [\xi_{A,1} \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_{A,n_A} \in \mathtt{D}, \xi_{B,1} \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_{B,n_B} \in \mathtt{D}] \end{array}}$$

$$\frac{y \in \mathtt{V} \quad A \in \mathtt{Frm(}\mathcal{L}\mathtt{)}}{\begin{array}{c} \mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(QyA,\,\overline{\xi}) = (\widetilde{Q}d_m \in \mathtt{D})\mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(A, d_m,\,\overline{\xi}) \\ [\xi_1 \in \mathtt{D}, \ldots, \xi_n \in \mathtt{D}] \end{array}}$$

Nella terza regola ogni lista $\overline{\xi}_i$ è lunga $n_i \equiv len\,\mathtt{FV}\,t_i$ e ha componenti $\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,n_i}$.
Nella quarta regola $\overline{\xi}_A$ è lunga $n_A \equiv len\,\mathtt{FV}\,A$ e $\overline{\xi}_B$ è lunga $n_B \equiv len\,\mathtt{FV}\,B$.
Nella quinta regola $\overline{\xi}$ è lunga $n \equiv len\,\mathtt{FV}\,QyA$ e $m \equiv varind\,y$.
Naturalmente si pone $(A)^{\mathcal{M}} \equiv \mathtt{FrmInt}_{\mathcal{M}}(A, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ dove $n \equiv len\,\mathtt{FV}\,A$.

Figura 12: funzioni e relazioni ricorrenti primitive in ITT.

Le funzioni ricorrenti primitive.

L'insieme $\mathtt{Pren}(\mathcal{L})$ è definito dalle seguenti regole:

formazione: $\dfrac{}{\mathtt{Prim}\ \mathrm{set}}$

introduzioni: $\dfrac{}{prim\,(\widetilde{z}) \in \mathtt{Prim}} \quad \dfrac{}{prim\,(\widetilde{s}\,) \in \mathtt{Prim}} \quad \dfrac{i \in \mathtt{N}}{prim\,(\widetilde{pr}_i) \in \mathtt{Prim}}$

$$\dfrac{\begin{array}{l} g_1 \in \mathtt{D}^{m_1} \mapsto \mathtt{D} \quad prim\,(g_1) \in \mathtt{Prim} \quad \ldots \\ g_n \in \mathtt{D}^{m_n} \mapsto \mathtt{D} \quad prim\,(g_n) \in \mathtt{Prim} \\ h \in \mathtt{D}^n \mapsto \mathtt{D} \quad prim\,(h) \in \mathtt{Prim} \end{array}}{prim\,(h \circ \overline{g}) \in \mathtt{Prim}}$$

$$\dfrac{h \in \mathtt{D}^n \mapsto \mathtt{D} \quad g \in \mathtt{D}^{n+\widetilde{2}} \mapsto \mathtt{D} \quad prim\,(h) \in \mathtt{Prim} \quad prim\,(g) \in \mathtt{Prim}}{prim\,(\widetilde{r}(h,g)) \in \mathtt{Prim}}$$

dove si pongono le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned} \widetilde{z} &\equiv \lambda\xi.\widetilde{0} \text{ è di tipo } \mathtt{N} \mapsto \mathtt{N}, \\ \widetilde{s} &\equiv \lambda\xi.\widetilde{s}\,\xi \text{ è di tipo } \mathtt{N} \mapsto \mathtt{N}, \\ \widetilde{pr}_i &\equiv \lambda\,\overline{\xi}.\xi_i \text{ è di tipo } \mathtt{N}^m \mapsto \mathtt{N} \text{ ed è definita per } 1 \leq i \leq m, \\ h \circ \overline{g} &\equiv \lambda\,\overline{\xi}_1 \cup \ldots \cup \overline{\xi}_n.ap(h, ap(g_1, \overline{\xi}_1), \ldots, ap(g_n, \overline{\xi}_n)), \\ \widetilde{r}(h,g) &\equiv \lambda n.natrec(n, h, \{m,e\}\,\lambda\,\overline{\xi}.ap(g, m, \overline{\xi}, ap(e, \overline{\xi}))). \end{aligned}$$

Nella definizione di $h \circ \overline{g}$ ciascuna lista $\overline{\xi}_i$ ha lunghezza m_i.
Le regole di eliminazione ed uguaglianza non sono state riportate.
Ovviamente $f \in \mathtt{Prim}$ sarà sinonimo di $prim\,(f) \in \mathtt{Prim}$.

Le componenti di una funzione ricorrente primitiva.

Indicando che g è una componente di f col simbolo $g \leq f$, formalizzato dal giudizio $prc(f,g) \in \mathtt{PRC}(f)$, l'insieme $\mathtt{PRC}$ è definito dalle seguenti regole:

formazione: $\dfrac{f \in \mathtt{Prim}}{\mathtt{PRC}(f)\ \mathrm{set}}$

introduzioni: $\dfrac{f \in \mathtt{Prim}}{f \leq f}$

$$\dfrac{h \circ \overline{g} \in \mathtt{Prim} \quad h_0 \leq h}{h_0 \leq h \circ \overline{g}} \quad \dfrac{h \circ \overline{g} \in \mathtt{Prim} \quad g_0 \leq g_i}{g_0 \leq h \circ \overline{g}}$$

$$\dfrac{\widetilde{r}(h,g) \in \mathtt{Prim} \quad h_0 \leq h}{h_0 \leq \widetilde{r}(h,g)} \quad \dfrac{\widetilde{r}(h,g) \in \mathtt{Prim} \quad g_0 \leq g}{g_0 \leq \widetilde{r}(h,g)}$$

Le regole di eliminazione ed uguaglianza non sono state riportate.

Figura 12: funzioni e relazioni ricorrenti primitive in *ITT* (continua).

La funzione caratteristica di una famiglia di insiemi.

La funzione caratteristica $\widetilde{\chi}(\mathtt{P})$ della famiglia $\mathtt{P}$ è definita dalle regole seguenti:

formazione:
$$\frac{\mathtt{P}(n_1,\ldots,n_b)\ \text{set}\ [n_1 \in \mathtt{N},\ldots,n_b \in \mathtt{N}]}{\widetilde{\chi}(\mathtt{P}) \in \mathtt{N}^b \mapsto \mathtt{N}}$$

uguaglianze:
$$\frac{\mathtt{P}(n_1,\ldots,n_b)\ \text{true}\ [n_1 \in \mathtt{N},\ldots,n_b \in \mathtt{N}]}{\overline{ap(\widetilde{\chi}(\mathtt{P}),n_1,\ldots,n_b) = \widetilde{0} \in \mathtt{N}\ [n_1 \in \mathtt{N},\ldots,n_b \in \mathtt{N}]}}$$

$$\frac{\mathtt{P}(n_1,\ldots,n_b) = \emptyset\ [n_1 \in \mathtt{N},\ldots,n_b \in \mathtt{N}]}{\overline{ap(\widetilde{\chi}(\mathtt{P}),n_1,\ldots,n_b) = \widetilde{1} \in \mathtt{N}\ [n_1 \in \mathtt{N},\ldots,n_b \in \mathtt{N}]}}$$

dove il doppio tratto indica che le uguaglianze valgono anche da sotto in su.
La versione di $\widetilde{\chi}(\mathtt{P})$ con i testimoni non è stata riportata.

CAPITOLO 6.
FORMALIZZAZIONE DEI RISULTATI IN *ITT*.

6.1. Formalizzazione del modello canonico $\mathcal{C}$.

[1] L'apparato formale esposto in precedenza può essere usato per esprimere in *ITT* il risultato principale e i lemmi su cui esso si basa.
In accordo con [1] di 4.1 il modello canonico è del tipo:

$$\mathcal{C} \equiv \{\mathtt{N}, \widetilde{0}, \widetilde{s}, \widetilde{\chi}_i, \widetilde{=}\}$$

dove $\mathtt{N}$ e $\widetilde{0}$ sono definiti in figura 7 e la funzione $\widetilde{s}$ è definita in figura 12.
Le funzioni $\widetilde{\chi}_i$ sono le componenti di $\widetilde{\chi}(\mathtt{R})$ e quindi si introduce la regola:

$$\frac{\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}}{\widetilde{\chi}_i \leq \widetilde{\chi}(\mathtt{R})}$$

Si pone infine $(n_1 \widetilde{=} n_2) \equiv \mathtt{Eq}(\mathtt{N}, n_1, n_2)$.

6.2. I risultati preliminari.

[1] Il primo risultato formalizza il teorema di Herbrand:

Teorema 6.2.1: formalizzazione del teorema 2.2.1 (Herbrand).
In ITT si dimostra la seguente regola:

$$\frac{F \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \qquad \vdash \neg F}{\vdash \neg \otimes_{i=1}^{n} mat(F)[\,\overline{t}_i\,]}\, H$$

in cui il numero n e i $\overline{t}_i \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})^*$ sono determinati costruttivamente.

La dimostrazione è già stata esposta in dettaglio nel capitolo 2.

[2] Il secondo risultato formalizza il lemma sul predecessore:

Lemma 6.2.2: formalizzazione del lemma 3.2.1.
In ITT si dimostra la seguente regola:

$$\frac{n \in \mathtt{N}}{(n \widetilde{=} \widetilde{0}) \mathbin{\widetilde{\oplus}} (n \widetilde{=} \widetilde{s}\,\widetilde{prn})\ \mathrm{true}}\, PR$$

Dimostrazione.
La prova è riportata in figura 13. $\diamondsuit$

[3] Il terzo risultato, formalizza i primi asserti sulla formula NP:

Lemma 6.2.3: formalizzazione del lemma 4.1.1.
In ITT si dimostrano la seguenti regole:

$$\frac{}{NP \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}\, A \qquad \frac{}{NP_P \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})}\, B \qquad \frac{}{\vdash (NP_P \leftrightarrow NP)}\, C \qquad \frac{\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}}{\mathcal{C} \models NP}\, D$$

dove NP_P è la chiusura universale della congiunzione degli assiomi in [1] *di* 4.1.

Dimostrazione.
Le clausole A e B sono di verifica immediata; per D si può consultare [MLS].
La clausola C vale perché LJ dimostra la formula:

$$(\forall y_1 A_1) \otimes (\forall y_2 A_2) \leftrightarrow \forall y_1 \forall y_2 (A_1 \otimes A_2)$$

quando $y_1 \notin \mathtt{FV}(A_2)$ e $y_2 \notin \mathtt{FV}(A_1)$. $\diamondsuit$

[4] Il quarto risultato formalizza l'ulteriore proprietà della formula NP

Lemma 6.2.4: formalizzazione del lemma 4.1.2

In ITT si dimostrano la seguenti regole:

$$\frac{u \in \mathtt{Trm}(\mathcal{L})}{u^{\mathcal{M}} = \pi\,(u^{\mathcal{C}}) \in \mathtt{D}}\,A \qquad \frac{F \in \mathtt{PFrm}(\mathcal{L})}{F^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\leftrightarrow}} F^{\mathcal{C}}\ \mathrm{true}}\,B$$

$$\frac{F \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \quad \mathtt{BV}_{\exists}(F) = \mathit{nil} \in \mathtt{V}^*}{F^{\mathcal{M}} \mathrel{\widetilde{\rightarrow}} F^{\mathcal{C}}\ \mathrm{true}}\,C \qquad \frac{F \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L}) \quad \mathtt{BV}_{\forall}(F) = \mathit{nil} \in \mathtt{V}^*}{F^{\mathcal{C}} \mathrel{\widetilde{\rightarrow}} F^{\mathsf{D}}\ \mathrm{true}}\,D$$

che valgono sotto l'ipotesi $\mathcal{M} \models NP$.

La dimostrazione è già stata esposta in dettaglio nel capitolo 4.

[5] Il quinto risultato formalizza gli asserti sulla formula ER:

Lemma 6.2.5: formalizzazione del lemma 4.1.3A e B.

Se $ER_N \equiv \forall\,\overline{x}(\neg ER_P)$ allora in ITT si dimostrano la seguenti regole:

$$\frac{}{ER \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})}\,A \qquad \frac{}{ER_N \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})}\,B \qquad \frac{}{\mathtt{BV}_{\exists}(ER_N) = \mathit{nil} \in \mathtt{V}^*}\,C$$

$$\frac{}{\vdash (ER_N \leftrightarrow \neg ER)}\,D \qquad \frac{\mathcal{C} \models ER}{(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n}\ \mathrm{true}}\,E \qquad \frac{}{\mathtt{BV}_{\forall}(ER) = \mathit{nil} \in \mathtt{V}^*}\,F$$

dove la linea doppia in E indica che l'implicazione vale in entrambi i sensi.

Qui e nel seguito si pone: $(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b) \equiv (\widetilde{\exists} n_1 \in \mathtt{N}, \ldots, \widetilde{\exists} n_b \in \mathtt{N})$.

Dimostrazione.

Le clausole A, B, C, F sono di verifica immediata; D vale perché LJ dimostra:

$$\forall y(\neg A) \leftrightarrow \neg\exists y A$$

se $y \in \mathtt{FV}\,(A)$; la clausola E è riportata sempre in figura 13. $\Diamond$

[6] Il sesto risultato formalizza gli asserti sulla formula R°:

Lemma 6.2.6: formalizzazione del lemma 4.1.3C.

In ITT si dimostrano la seguenti regole:

$$\frac{}{R^{\circ} \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}\,A \qquad \frac{\mathcal{C} \models R^{\circ}}{(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n}\ \mathrm{true}}\,B$$

dove la linea doppia in B indica che l'implicazione vale in entrambi i sensi. L'inferenza B vale sotto l'ipotesi $\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}$.

Dimostrazione.

La clausola A è di verifica immediata; B è riportata sempre in figura 13. $\Diamond$

6.3. Il risultato principale in *ITT*.

[1] Formalizziamo dapprima i tre lemmi citati in [1] di 3.3:

Teorema 6.3.1: formalizzazione dei lemmi 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3.
In ITT si possono dimostrare le regole:

$$\frac{\mathcal{C} \models \neg\neg R^{\circ}}{\models \neg\neg R^{\circ}} A \qquad \frac{\mathcal{C} \models R^{\circ}}{\models R^{\circ}} B \qquad \frac{\vdash \neg\neg R^{\circ}}{\mathcal{C} \models R^{\circ}} C$$

che valgono sotto l'ipotesi $\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}$.

Dimostrazione.

La prova è riportata in figura 14. $\diamondsuit$

Il teorema 3.3.1 si può allora formalizzare come segue:

Teorema 6.3.2 Formalizzazione del risultato principale.
In ITT è possibile dimostrare che:

$$\frac{F \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L}) \qquad \models \neg\neg F}{\vdash \neg\neg F} SC \quad \textit{implica} \quad \frac{\mathtt{R}\,\overline{n}\ \mathrm{set}\ [\overline{n} \in \mathtt{N}^{b}] \quad \widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}}{\widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^{b})\mathtt{R}\,\overline{n} \mathrel{\widetilde{\to}} (\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^{b})\mathtt{R}\,\overline{n}\ \mathrm{true}} MP$$

dove SC esprime la completezza e MP esprime il principio di Markov.
Qui si pone: $\mathtt{R}\,\overline{n}\ \mathrm{set}\ [\overline{n} \in \mathtt{N}^{b}] \equiv \mathtt{R}(n_1, \ldots, n_b)\ \mathrm{set}\ [n_1 \in \mathtt{N}, \ldots, n_b \in \mathtt{N}]$.

Dimostrazione.

La prova formale è riportata sempre in figura 14. $\diamondsuit$

Figura 13: i risultati preliminari in *ITT*.

Il lemma 6.2.2.

Sia $\mathtt{P}(n) \equiv (n \mathrel{\widetilde{\cong}} \widetilde{0}) \mathbin{\widetilde{\oplus}} (n \mathrel{\widetilde{\cong}} \widetilde{s}\,\widetilde{pr} n)$:

$$\dfrac{n \in \mathtt{N} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\widetilde{0} \in \mathtt{N}}\,A}{\widetilde{0} = \widetilde{0} \in \mathtt{N}}\,Rif}{\widetilde{0} \mathrel{\widetilde{\cong}} \widetilde{0} \text{ true}}\,\mathtt{Eq}\ I}{\mathtt{P}(\widetilde{0}) \text{ true}}\,\widetilde{\oplus}\ I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[m \in \mathtt{N}]^1}{m = \widetilde{pr}\,\widetilde{s}\, m \in \mathtt{N}}\,B}{\widetilde{s}\, m = \widetilde{s}\,\widetilde{pr}\,\widetilde{s}\, m \in \mathtt{N}}\,C}{\widetilde{s}\, m \mathrel{\widetilde{\cong}} \widetilde{s}\,\widetilde{pr}\,\widetilde{s}\, m \text{ true}}\,\mathtt{Eq}\ I}{\mathtt{P}(\widetilde{s}\, m) \text{ true}}\,\widetilde{\oplus}\ I}{\mathtt{P}(n) \text{ true}}\,1\,D$$

A e D provengono dalle regole che definiscono $\mathtt{N}$.
B e C provengono da immediate proprietà di $\widetilde{pr}$ e $\widetilde{s}$.

Il lemma 6.2.5.

La clausola E.

$$\begin{array}{c} (ER)^{\mathcal{C}} \text{ true} \\ \hline\hline (\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)(\widetilde{\chi}(\mathtt{R})\,\overline{n} \mathrel{\widetilde{\cong}} \widetilde{0}) \text{ true} \\ \hline\hline (\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n} \text{ true} \end{array}$$

Le inferenze vengono dalle regole dell'interpretazione e della funzione caratteristica.

Il lemma 6.2.6.

La clausola B.

$$\dfrac{\dfrac{(R^\circ)^{\mathcal{C}} \text{ true} \qquad \dfrac{\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}}{(NP)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,6.2.3D}{(ER)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,\widetilde{\rightarrow} E}{(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n} \text{ true}}\,6.2.5E \Downarrow \qquad \dfrac{\dfrac{(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^b)\mathtt{R}\,\overline{n} \text{ true}}{(ER)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,6.2.5E \Uparrow}{(R^\circ)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,W$$

Prima della $\widetilde{\rightarrow} E$ e dopo la W c'è una regola dell'interpretazione.

Figura 14: il risultato principale in *ITT*.

Il teorema 6.3.1.

La clausola A.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}$}
\RightLabel{6.2.3D}
\UnaryInfC{$(NP)^{\mathcal{C}}$ true}
\AxiomC{$[(NP \otimes \neg ER)^{\mathcal{M}}$ true$]^1$}
\RightLabel{vedi sotto}
\UnaryInfC{$(\neg ER)^{\mathcal{C}}$ true}
\RightLabel{$\widetilde{\otimes}\ I$}
\BinaryInfC{$(NP)^{\mathcal{C}}\ \widetilde{\otimes}\ (\neg ER)^{\mathcal{C}}$ true}
\RightLabel{B}
\UnaryInfC{$(\neg R^{\circ})^{\mathcal{C}}$ true}
\AxiomC{$(\neg\neg R^{\circ})^{\mathcal{C}}$ true}
\RightLabel{C}
\UnaryInfC{$\widetilde{\neg}(\neg R^{\circ})^{\mathcal{C}}$ true}
\RightLabel{$\widetilde{\rightarrow}\ E$}
\BinaryInfC{$\emptyset$ true}
\RightLabel{$1\ \widetilde{\rightarrow}\ I$}
\UnaryInfC{$\widetilde{\neg}(NP \otimes \neg ER)^{\mathcal{M}}$ true}
\RightLabel{D}
\UnaryInfC{$(\neg\neg R^{\circ})^{\mathcal{M}}$ true}
\end{prooftree}
$$

B proviene dal teorema 5.4.1 sapendo che $\vdash (A \otimes \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$.
Servono inoltre alcune regole dell'interpretazione.
C proviene dalle regole dell'interpretazione.
anche D proviene dal teorema 5.4.1 sapendo che $\vdash \neg(A \otimes \neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$.
Anche qui servono inoltre alcune regole dell'interpretazione.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(NP \otimes \neg ER)^{\mathcal{M}}$ true}
\RightLabel{$\widetilde{\otimes}\ E$}
\UnaryInfC{$(NP)^{\mathcal{M}}$ true}
\RightLabel{6.2.4C}
\UnaryInfC{$(ER_N)^{\mathcal{M}}\ \widetilde{\rightarrow}\ (ER_N)^{\mathcal{C}}$ true}
\RightLabel{A}
\UnaryInfC{$(\neg ER)^{\mathcal{M}}\ \widetilde{\rightarrow}\ (\neg ER)^{\mathcal{C}}$ true}
\AxiomC{$(NP \otimes \neg ER)^{\mathcal{M}}$ true}
\RightLabel{$\widetilde{\otimes}\ E$}
\UnaryInfC{$(\neg ER)^{\mathcal{M}}$ true}
\RightLabel{$\widetilde{\rightarrow}\ E$}
\BinaryInfC{$(\neg ER)^{\mathcal{C}}$ true}
\end{prooftree}
$$

Prima delle $\widetilde{\otimes}\ E$ c'è una regola dell'interpretazione.
A 6.2.4C si premettono $ER_N \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ e $\mathtt{BV}_{\exists}(ER_N) = nil \in \mathtt{V}^*$ da 6.2.5B e C.
A viene da 6.2.5D, da 5.4.1 applicato ad $\mathcal{M}$ e $\mathcal{C}$ e dalle regole dell'interpretazione.

La clausola B.

Sia F la chiusura universale della formula: $mat(NP) \otimes mat(ER_N)$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$F \in \mathtt{Pren}(\mathcal{L})$}
\AxiomC{$\vdash \neg\neg R^{\circ}$}
\AxiomC{}
\RightLabel{A_1}
\UnaryInfC{$\vdash (F \rightarrow \neg R^{\circ})$}
\RightLabel{A_2}
\BinaryInfC{$\vdash \neg F$}
\RightLabel{H}
\BinaryInfC{$\vdash \neg \otimes_{i=1}^{n} mat(F)[\,\overline{t}_i\,]$}
\RightLabel{B}
\UnaryInfC{$\vdash (\neg \otimes_{i=1}^{n} (mat(NP)[\,\overline{u}_i\,] \otimes mat(ER_N)[\,\overline{v}_i\,])$}
\RightLabel{C}
\UnaryInfC{$(\neg \otimes_{i=1}^{n} (mat(NP)[\,\overline{u}_i\,] \otimes mat(ER_N)[\,\overline{v}_i\,]))^{\mathcal{C}}$ true}
\UnaryInfC{$\widetilde{\neg}\ \widetilde{\otimes}_{i=1}^{n} ((mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}}\ \widetilde{\otimes}\ (mat(ER_N)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}})$ true}
\RightLabel{D_1}
\UnaryInfC{$\widetilde{\oplus}_{i=1}^{n} (\neg(mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}}\ \widetilde{\oplus}\ \widetilde{\neg}(mat(ER_N)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}})$ true}
\RightLabel{D_2}
\UnaryInfC{$\widetilde{\oplus}_{i=1}^{n} (\neg(mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}}\ \widetilde{\oplus}\ (mat(ER)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}})$ true}
\end{prooftree}
$$

Le inferenze A provengono in sostanza da 5.3.1.
B vale assumendo $mat(F)[\,\overline{t}_i\,] = mat(NP)[\,\overline{u}_i\,] \otimes mat(ER_N)[\,\overline{v}_i\,]$.
C proviene dal teorema di validità 5.4.1.
Le inferenze D sussistono perché $=^{\mathcal{C}}$ è una proposizione decidibile.

Figura 14: il risultato principale in *ITT* (continua).

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim} \qquad
\dfrac{\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} (\neg(mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}} \mathbin{\widetilde{\oplus}} (mat(ER)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}}) \text{ true}}{(\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} \widetilde{\neg}(mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}}) \mathbin{\widetilde{\oplus}} (\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} (mat(ER)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}}) \text{ true}}
}{\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} (mat(ER)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,F
}{\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} (\chi_0\,\overline{v}_i = 0)^{\mathcal{C}} \text{ true}}
}{(ER)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,\widetilde{\oplus}\,E
}{(R^{\circ})^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,W
$$

L'inferenza F.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}}{(NP)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,6.2.3D
}{\widetilde{\bigotimes}_{i=1}^{n} (mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,\widetilde{\forall}E, \widetilde{\otimes}\,I
}{\neg \widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} \widetilde{\neg}(mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,G
\qquad
[\,\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} \widetilde{\neg}(mat(NP)[\,\overline{u}_i\,])^{\mathcal{C}} \text{ true}\,]^{1}
}{\bot \text{ true}}\,\widetilde{\rightarrow}\,E
}{\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} (mat(ER)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,\bot
}{\widetilde{\bigoplus}_{i=1}^{n} (mat(ER)[\,\overline{v}_i\,])^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,1\ \widetilde{\oplus}\,E
$$

G sussiste perché $=^{\mathcal{C}}$ è una proposizione decidibile.
La premessa maggiore della $\widetilde{\oplus}\,E$ è quella riportata in precedenza.

La clausola C.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}}{(NP)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,6.2.3D
\qquad (R^{\circ})^{\mathcal{C}} \text{ true}
}{(ER)^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,\widetilde{\rightarrow}\,E
\qquad
\dfrac{[(NP)^{\mathcal{M}} \text{ true}]^{1}}{(ER)^{\mathcal{C}} \mathbin{\widetilde{\rightarrow}} (ER)^{\mathcal{M}} \text{ true}}\,6.2.4D
}{(ER)^{\mathcal{M}} \text{ true}}\,\widetilde{\rightarrow}\,E
}{(R^{\circ})^{\mathcal{M}} \text{ true}}\,1\ \widetilde{\rightarrow}\,I
$$

6.2.4D ha le premesse $ER \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})$ e $\mathtt{BV}_{\forall}(ER) = nil \in \mathtt{V}^{*}$ da 6.2.5A ed F.

Il teorema 6.3.2.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{R^{\circ} \in \mathtt{Frm}(\mathcal{L})}\,6.2.6A
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{[\widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^{b})\mathtt{R}\,\overline{n} \text{ true}]^{1}}{\widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(R^{\circ})^{\mathcal{C}} \text{ true}}\,6.2.6B \Uparrow
}{\mathcal{C} \models \neg\neg R^{\circ}}\,A
}{\models \neg\neg R^{\circ}}\,6.3.1A
}{\vdash \neg\neg R^{\circ}}\,SC
}{\mathcal{C} \models R^{\circ}}\,6.3.1C
}{(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^{b})\mathtt{R}\,\overline{n} \text{ true}}\,6.2.6B \Downarrow
}{\widetilde{\neg}\widetilde{\neg}(\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^{b})\mathtt{R}\,\overline{n} \mathbin{\widetilde{\rightarrow}} (\widetilde{\exists}\,\overline{n} \in \mathtt{N}^{b})\mathtt{R}\,\overline{n} \text{ true}}\,1\ \widetilde{\rightarrow}\,I
$$

Le regole 6.3.1 hanno anche la premessa $\widetilde{\chi}(\mathtt{R}) \in \mathtt{Prim}$.
A proviene dalle regole sull'interpretazione.
L'ipotesi $\mathtt{R}\,\overline{n}$ set $[\overline{n} \in \mathtt{N}^{b}]$ è stata omessa.

BIBLIOGRAFIA.

Nel compilare la bibliografia si sono usate le seguenti abbreviazioni:
C.T.T.C.S. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science
E.M.G Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete
S.L.F.M. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics

[ASL] The Association for Symbolic Logic:
Twenty-Third Annual Meeting,
The Journal of Symbolic Logic 23/4 (December 1958).

[Bee] M.J. Beeson:
Foundations of Constructive Mathematics,
E.M.G. 3. Folge · Band 6, Springer Verlag 1985.

[Gen] G. Gentzen:
Investigations into Logical Deduction (1935),
in M.E. Szabo: *The Collected Papers of Gerard Gentzen*,
S.L.F.M., North Holland Publishing Company 1969.

[Göd] K. Gödel:
On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems I (1931),
in S. Feferman et al.:
Kurt Gödel - Collected Works,
Oxford University Press 1986.

[Kre1] G. Kreisel:
Elementary Completeness Properties of Intuitionistic Logic with a Note on Negations of Prenex Formulae,
The Journal of Symbolic Logic 23/3 (September 1958).

[Kre2] G. Kreisel:
On Weak Completeness of Intuitionistic Predicate Logic,
The Journal of Symbolic Logic 27/2 (June 1962).

[McC1] D.C. McCarty:
Incompleteness of Intuitionistic Metamathematics,
Notre Dame Journal of Formal Logic 32/3 (Summer 1991)

[McC2] D.C. McCarty:
On Theorems of Gödel and Kreisel: Completeness and Markov's Principle,
Notre Dame Journal of Formal Logic 35/1 (Winter 1994)

[McC3] D.C. McCarty:
Undecidability and Intuitionistic Incompleteness,
The Journal of Philosophical Logic 22/5 (1996)

[MLS] P. Martin-Löf:
Intuitionistic Type Theory (notes by G. Sambin),
Studies in Proof Theory (Lecture Notes) 1, Bibliopolis 1984.

[NPS] B. Nordsdröm, K. Petersson, J.M. Smith:
Programming in Martin-Löf's Type Theory - an introduction,
Oxford University Press 1980.

[Per] H. Persson:
Constructive Completeness of Intuitionistic Predicate Logic: A Formalisation in Type Theory,
Department of Computing Science, Göteborg University 1996

[SBF] G. Sambin, G. Battilotti, C. Faggian:
Basic Logic: Reflection, Simmetry, Visibility,
apparirà in: The Journal of Symbolic Logic.

[Tak] G. Takeuti:
Proof Theory,
S.L.F.M. 81, North Holland Publishing Company 1975.

[TvD] A.S. Troelstra, D. van Dalen:
Constructivism in Mathematics - an introduction,
S.L.F.M. 121 & 123, Elsevier Science Publishers B.V. 1988.

[TS] A.S. Troelstra, H. Schwichtenberg:
Basic Proof Theory,
C.T.T.C.S. 43, Cambridge University Press 1996.