



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

"Die Verebnung der Welt –
Kartographie im Mathematikunterricht"

Verfasser

Robert Weinhandl

angestrebter akademischer Grad

Magister rerum naturalium (Mag. rer. nat.)

Apetlon, 2011

Studienkennzahl lt. Studienblatt:
Studienrichtung lt. Studienblatt:
Betreuer:

A 190 456 406
Lehramtsstudium UF Geographie und Wirtschaftskunde UF Mathematik
Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Vorwort und Dankesworte

Die nachfolgende Arbeit ist zwischen Februar und November 2011 geschrieben worden. Die Idee dieser Arbeit entstand jedoch schon wesentlich früher, da mein Interesse an Geometrie sowie Kartographie bereits in der Schulzeit vorhanden war. Konkreter wurde die Vorstellung dieses Diplomarbeitsthemas durch das Seminar „Bilder der Erde: Ein mathematischer Blick auf Weltkarten“ von Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Steinbauer im Sommersemester 2010.

Ich hoffe, dass ich Teile der nachfolgenden Arbeit und Beispiele davon in meiner Tätigkeit als Lehrer umsetzen kann und somit die Theorie in die Praxis transformieren kann.

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen Menschen bedanken, welche mich auf dem Weg durch mein Studium begleitet haben. Ein besonderer Dank gilt Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz, welcher diese Diplomarbeit betreute. Ich durfte ihn als Lehrveranstaltungsleiter, Übungsleiter sowie Diplomarbeitbetreuer kennenlernen und möchte für jede dieser Erfahrungen „**Danke**“ sagen. Ein weiteres Dankeschön gilt all jenen Lehrpersonen, welche mit mir ein Stück meines Studiums gegangen sind und durch welche ich bald mein Wissen weitergeben darf. Im Speziellen möchte ich mich bei Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann von der Fakultät für Mathematik und Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Christian Vielhaber vom Institut für Geographie und Regionalforschung bedanken, von welchen ich sowohl fachlich als auch menschlich sehr viel lernen durfte.

Das größte Dankeschön soll aber meinen Eltern gehören. Ohne deren menschliche und finanzielle Unterstützung wäre mein Studium nicht zu realisieren gewesen – danke!

Apetlon, im November 2011

Robert Weinhandl

Inhaltsverzeichnis

1 Fächerübergreifender Unterricht	1
1.1 Warum fächerübergreifend unterrichten?	2
1.2 Herausforderung „fächerübergreifender Unterricht“	5
1.3 Konklusion	7
2 Mathematik in der Kartographie	8
2. 1 Verbindung der beiden Wissenschaften in der Unterstufe	8
2. 2 Verbindung der beiden Wissenschaften in der Oberstufe	14
3 Kartographie im Wahlpflichtfach Mathematik	19
3. 1 Form der Erde	19
3. 2 Größe bzw. Abmessungen der Erde	20
3. 3 Bezugssystem	21
3. 4 Der Maßstab	22
3. 5 Orthodrome	23
3. 5. 1 Umsetzung im Unterricht	31
3. 6 Loxodrome	34
3. 6. 1 Umsetzung im Unterricht	34
3. 7 Winkel	36
3. 7. 1 Dreiecke auf der Sphäre	41
3. 7. 2 Umsetzung im Unterricht	45
3. 7. 2. 1 Bearbeitung mit digitalen Medien	50
3. 8 Projektionen	51
3. 8. 1 Azimutalprojektionen	53
3. 8. 1. 1 Gnomonische Projektion	54
3. 8. 1. 2 Stereographische Projektion	55
3. 8. 1. 3 Orthographische Projektion	56
3. 8. 1. 4 Azimutale äquidistante Projektion	56
3. 8. 2 Zylinderprojektionen	58
3. 8. 2. 1 Quadratische Platkarte	59
3. 8. 2. 2 Lamberts flächentreue Zylinderprojektion	59
3. 8. 2. 3 Mercatorprojektion	60

3. 8. 3 Umsetzung im Unterricht	61
3. 9 Maßstabsfaktor	67
3. 9. 1 Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises	68
3. 9. 1. 1 Zylinderprojektion	68
3. 9. 1. 2 Azimutalprojektion	68
3. 9. 2 Maßstabsfaktor entlang eines Längenkreises	69
3. 9. 2. 1 Zylinderprojektion	69
3. 9. 2. 2 Azimutalprojektion	70
3. 9. 3 Umsetzung im Unterricht	70
3. 10 Krümmung von Flächen	72
3. 11 Ein erneuter Blick auf die Projektionen	74
3. 11. 1 Flächentreue Abbildungen	74
3. 11. 2 Konforme Abbildungen	79
4 Konkrete Umsetzung in Unterrichtsbeispielen	81
4. 1 Kartographie in der 1. Klasse AHS	81
4. 1. 1 Unterrichtsplanung	81
4. 1. 2 Ein Schularbeitsbeispiel zum Thema Maßstab	86
4. 2 Kartographie bzw. Geodäsie in der 7. Klasse AHS	88
4. 2. 1 Unterrichtsplanung	88
4. 2. 2 Zwei Schularbeitsbeispiele zum Thema Kugel	92
5 Schlussworte	94
6 Literatur	96
Curriculum Vitae	99

1 Fächerübergreifender Unterricht

Die folgende Arbeit setzt sich mit dem fächerübergreifenden Unterricht der Unterrichtsgegenstände Mathematik sowie Geographie und Wirtschaftskunde auseinander. Bevor auf eine mögliche Verbindung dieser beiden Wissenschaften näher eingegangen wird, soll erläutert werden, was sich hinter dem Begriff *fächerübergreifender Unterricht* verbirgt und was hiervon in diese Arbeit aufgenommen wird. Wie viele Begriffe in der Pädagogik und Didaktik macht auch jener des *fächerübergreifenden Unterrichts* eine inflationäre Entwicklung durch. In der Fachliteratur zu diesem Thema findet man die Begriffe des fächerübergreifenden, fächerverbindenden, fächerergänzenden oder fächerüberschreitenden Unterrichts. Weiters haben sich Termini wie themenzentrierter, mehrperspektivischer, inter-, multi- oder pluridisziplinärer Unterricht herausgebildet. Einige Autoren und Autorinnen verwenden die oben angeführten Begriffe als Synonyme, andere geben zu obigen Termini auch mehr oder weniger konkrete Definitionen. Neben der Vielzahl von Begriffen findet man in den Beiträgen zu diesem Thema auch eine Pluralität der Abstufungen dieser Unterrichtsform. Diese reicht von einem punktuellen Überschreiten der Fachgrenzen in Projekten bis hin zur „radikalen Abkehr von Fachunterricht“ (Häsing, S. 8 sowie Duncker und Popp, S. 7).

Dieser fachlichen Uneinigkeit der Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen zur Folge kann geschlossen werden, dass sich dieses wissenschaftliche Paradigma noch in der Entwicklungsphase befindet. Mithin gibt es keine allgemeingültige oder beste Auffassung dieses Begriffes, was eine individuelle Auslegung durch Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen aber auch Laien erlaubt. In dieser Arbeit wird der Begriff *fächerübergreifender Unterricht* als Synonym für die obig aufgelisteten Termini verwendet. Es wird also davon ausgegangen, dass es *eine* Art dieses Unterrichtsmodells gibt, wobei die Intensität des Fächerübergreifens von der jeweiligen Lehrperson bzw. den Lernenden gewählt werden kann. In dieser Arbeit wird der *fächerübergreifende Unterricht* als punktuell bzw. intervallartig verstanden. Dies bedeutet, dass es für das Lehrpersonal sowie die Lernenden einen klar definierten und erkennbaren Start- sowie Endpunkt des *fächerübergreifenden Unterrichts* gibt.

Weiters soll angemerkt werden, dass diese Arbeit die Fächer sowie den Fachunterricht nicht infrage stellt. Die in dieser Arbeit verwendete Definition von *fächerübergreifendem Unterricht* deckt sich mit jener von Klafki: „Lehr/Lernarrangement, das von einer komplexen

Ausgangslage ausgeht und bei deren Bearbeitung Beiträge aus unterschiedlichen fachlichen Perspektiven heranzieht“ (nach Häsing, S. 8).

1.1 Warum fächerübergreifend unterrichten?

Bevor sich diese Arbeit obiger Frage widmet, soll herausgearbeitet werden, welche Anforderungen im *Ersten Teil des Allgemeinen Teils des Lehrplans* sowohl in Mathematik als auch in Geographie und Wirtschaftskunde an den Unterricht gestellt werden. Nachfolgend werden nur jene Aspekte aufgezählt, welche sich mit *fächerübergreifenden Unterricht* in Verbindung bringen lassen.

Unter Punkt 2. *Gesetzlicher Auftrag* des *Allgemeinen Teils* findet sich jener Gesetzesauszug: „Die allgemeinbildende höhere Schule hat die Aufgabe, den Schülerinnen und Schülern eine umfassende und vertiefende Allgemeinbildung zu vermitteln und sie gleichzeitig zur Hochschulreife zu führen.“

Das Erreichen dieser Aufgabe ist mit einem reinen Fachunterricht der einzelnen Unterrichtsgegenstände wenn überhaupt dann nur schwer zu erreichen. Denn eine *umfassende und vertiefende Allgemeinbildung* ist mehr als die Summe des Wissens der einzelnen Fächer. Um dieses Ziel zu erreichen müssen die Schülerinnen und Schüler auch in der Lage sein ihre Perspektive zu ändern und ein Problem unter verschiedenen fachwissenschaftlichen Blickwinkeln betrachten können. Diese Kompetenzen und Fertigkeiten sollen in einem *fächerübergreifenden Unterricht* verstärkt geschult und trainiert werden. Auch in punkto Hochschulreife trägt der fächerübergreifende Unterricht seines bei. In vielen Wissenschaften im Allgemeinen und in der Mathematik sowie in der Geographie im Speziellen ist ein inter- oder multidisziplinäres Arbeiten an der Tagesordnung. So gibt es laut dem Telekommunikationstechniker Gerald Matz (ao. Univ.-Prof. an der TU Wien) eine rege Zusammenarbeit zwischen Mathematiker_innen und Techniker_innen. Selbiges kann in der Geographie beobachtet werden. Hierbei kommt es beispielsweise in der Raumplanung zu einem Austausch zwischen Geograph_innen und Architekt_innen. Um diese Kollaboration auf universitärem Niveau zu erleichtern bietet es sich an damit bereits in der Sekundarstufe vertraut zu werden.

In Punkt 3. *Leitvorstellungen* finden sich folgende zwei Absätze:

„Der Unterricht hat sich entsprechend § 17 des Schulunterrichtsgesetzes sowohl an wissenschaftlichen Erkenntnissen als auch an den Erfahrungen und Möglichkeiten, die die Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebenswelt mitbringen, zu orientieren.“

„Im Sinne der gemeinsamen Bildungswirkung aller Unterrichtsgegenstände hat der Unterricht die fachspezifischen Aspekte der einzelnen Unterrichtsgegenstände und damit vernetzt fächerübergreifende und fächerverbindende Aspekte zu berücksichtigen. Dies entspricht der Vernetzung und gegenseitigen Ergänzung der einzelnen Disziplinen und soll den Schülerinnen und Schülern bei der Bewältigung von Herausforderungen des täglichen Lebens helfen.“

Die im ersten Absatz formulierte Forderung des Orientierens an den Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler aus ihrer Lebenswelt bietet sich an fächerübergreifend erfüllt zu werden. Alltägliche Aufgaben oder Probleme können nur in den seltensten Fällen von einem Unterrichtsfach bearbeitet und gelöst werden. Diese Forderung wird bei Duncker und Popp auf Seite 10 behandelt und ähnlich bewertet. Darin heißt es, dass „Unterrichtsthemen mit direktem Gegenwartsbezug ... viel zum komplex [sind], als daß sie in einem Fach untergebracht oder durch eine Fachperspektive angemessen repräsentiert werden können“ (Duncker und Popp, S. 10).

Der zweite zitierte Absatz des Punkt 3 des *Allgemeinen Teils* bedarf keiner näheren Erläuterung, da hierin die Lehrerinnen und Lehrer eindeutig zum *fächerübergreifenden Unterrichten* aufgefordert werden.

Unter Punkt 5. *Bildungsbereiche* finden sich viele Forderungen, welche ein *fächerübergreifendes Unterrichten* nach sich ziehen. So heißt es in der ersten Zeile dieses Punktes: „Bildung ist mehr als die Summe des Wissens, das in den einzelnen Unterrichtsgegenständen erworben werden kann.“ Dieses Statement sollte jede Lehrperson ermutigen sich auf das *fächerübergreifende Unterrichten* einzulassen. Des Weiteren finden sich in diesem Abschnitt fünf Bildungsbereiche, deren Erreichen ein Ziel der Allgemeinbildung ist. Als Begründung wird unter anderem das Schaffen einer „Grundlage für die fächerverbindende und fächerübergreifende Zusammenarbeit“ angeführt.

Es ist also deutlich erkenntlich, dass der *fächerübergreifende Unterricht* auch in diesem Abschnitt in direkter und indirekter Weise von großer Bedeutung ist.

In den *didaktischen Grundsätzen des Allgemeinen Teils* finden sich ebenso Beiträge, welche ein *fächerübergreifendes Unterrichten* nach sich ziehen. So wird in Punkt 7. *Herstellen von Bezügen zur Lebenswelt* gefordert, dass „möglichst zeit- und lebensnahe Themen“ zu wählen sind. Weiters soll das Wissen und die Kompetenzen der Schüler und Schülerinnen durch Beiträge von Fachleuten sowie durch Lehrausgänge vertieft und gefestigt werden.

Sowohl die Bearbeitung von lebensnahen Themen als auch die Zusammenarbeit mit Fachleuten fordert von den Schülern und Schülerinnen als auch vom Lehrpersonal ein über die Fachgrenzen hinausreichendes Arbeiten und Denken ein – und somit als Vor- oder Nachbereitung *fächerübergreifendes Unterrichten*.

Einen Lanze für das *fächerübergreifende Unterrichten* wird in der „*Schul- und Unterrichtsplanung*“ des Allgemeinen Teils gebrochen. In Punkt 5. *Fächerverbindender und fächerübergreifender Unterricht* wird beschrieben, in welcher Weise und warum an allgemeinbildenden höheren Schulen *fächerübergreifend* unterrichtet werden soll bzw. muss. Hierin wird erläutert, welche Möglichkeiten des *fächerübergreifenden Unterrichtens* es gibt und welche Themen sich hierfür eignen. Weiters wird auf die unterschiedlichen Intensitäten dieser Unterrichtsform eingegangen, wobei hierbei keine Wertung vorgenommen wird. Abschließend wird in diesem Abschnitt der Mehrwert des *fächerübergreifenden Unterrichts* hervorgestrichen und auf mögliche organisatorische und administrative Hürden eingegangen.

Cum grano salis könnte man die anfänglich gestellte Frage „Warum *fächerübergreifend* unterrichten?“ ganz pragmatisch beantworten mit – „Weil ich muss!“

Dass es neben den gesetzlichen Vorschriften des *Allgemeinen Teils* des Lehrplanes noch weitere Gründe für das *fächerübergreifende Unterrichten* gibt, soll im folgenden Absatz behandelt werden.

Die Vorzüge des *fächerübergreifenden Unterrichts* bestehen darin, dass den Schülerinnen und Schülern eine Mehrperspektivität im Unterricht geboten wird und es durch das Lernen in Zusammenhängen zu einer ganzheitlichen Wahrnehmung der Wirklichkeit kommen kann. Durch das Behandeln von Problemen von Schülern und Schülerinnen sollen überfachliche Kompetenzen wie Selbstständigkeit oder Kreativität geschult werden. Weiters soll das

Lernen in dieser Unterrichtsform als aktiver Prozess wahrgenommen werden, in welchem die Schüler und Schülerinnen angeregt sind Wissen und Informationen selbstständig zu generieren (Häsing, S. 11).

Ein weiterer Vorteil, welchen der *fächerübergreifende Unterricht* mit sich bringt, ist, dass die Lehrperson nicht mehr als allwissendes und unfehlbares Individuum dargestellt wird. Dies ist sowohl für die Lernenden als auch für die Lehrenden von Vorteil. Auf der einen Seite wird den Lehrenden der Druck von den Schultern genommen, ständig das *bildende und wissende Wollmilchschwein* zu sein, und auf der anderen Seite können die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass das Wissen von Frau Professor oder Herrn Professor auch ein unter Umständen mühevoll erworbenes ist (Duncker und Popp, S. 12).

Dem bis hierher geschriebenen Loblied auf den *fächerübergreifenden Unterricht* zur Folge könnte man meinen, dass diese Unterrichtsform das Allheilmittel in punkto Schulbildung sei und „Probleme“ wie das Abschneiden bei der PISA-Studie oder die TIMSS-Resultate sowie die Diskussion über eine Gesamtschule alsbald obsolet seien. Dass dem nicht so ist und der *fächerübergreifende Unterricht* auch Probleme und große Herausforderungen mit sich bringt soll nun behandelt werden.

1.2 Herausforderung „fächerübergreifender Unterricht“

Um den Schülerinnen und Schülern einen *fächerübergreifenden Unterricht* bieten zu können bedarf es großen Einsatzes und Engagements durch die Lehrpersonen. Diese müssen in der Lage sein den sicheren Standpunkt des Experten oder der Expertin zu verlassen um sich auf das Abenteuer einzulassen zu können fächerübergreifend zu unterrichten. Die Lehrperson begibt sich somit in die Lage gleichzeitig zu lernen und zu lehren. Dies hat zur Folge, dass der Lehrer oder die Lehrerin nicht auf jede Frage seitens der Schülerinnen und Schüler eine Antwort parat haben kann. Es obliegt nun der Lehrperson diese Frage an den jeweiligen Fachkollegen bzw. Fachkollegin zu delegieren oder die gestellte Frage gemeinsam mit den Schülern und Schülerinnen zu bearbeiten. In diesem Prozess muss die Lehrperson ihr vertrautes Fachvokabular verlassen bzw. adaptieren und ein neues erlernen. Weiters muss der Lehrer oder die Lehrerin in der Lage sein ein bekanntes und unter Umständen hinsichtlich des eigenen Faches bereits vielfach gelöstes Problem aus einem ungewohnten wissenschaftlichen Blickwinkel zu begutachten. Ebenso muss sich die Lehrperson zeitweilig

von vertrauten Arbeitsmethoden trennen und mit weniger vertrauten Techniken an ein Problem herangehen. Die eben beschriebenen Umstände haben zur Folge, dass der *fächerübergreifende Unterricht* nur eine bedingte Planbarkeit mit sich bringt. Es kann sehr leicht sein, dass Altbewährtes an Wert verliert oder gänzlich wertlos wird, was aber mit einem Mehrwert für die Schülerinnen und Schüler einhergeht (Häsing, S. 10 f. sowie Duncker und Popp, S. 13 f.).

Eine weitere Herausforderung, welche der *fächerübergreifende Unterricht* mit sich bringt, ist die Zusammenarbeit von zwei oder mehreren Lehrpersonen. Es müssen die unterschiedlichen Erwartungen und Vorstellungen an diese Unterrichtsform organisiert und gewichtet werden, so dass jede beteiligte Lehrperson in einem ausreichenden Maß hiermit einverstanden ist. Durch diese intensive und anhaltende Zusammenarbeit zwischen den Lehrkräften kommt hinzu, dass sich die beteiligten Lehrer und Lehrerinnen über das Fachliche und Kollegiale hinaus schätzen sollten. Oft erstickt die Möglichkeit des *fächerübergreifenden Unterrichtens* bereits im Keim, da die beteiligten Kolleg_innen eine Antipathie trennt. Neben dieser individuellen Zu- oder Abneigung zwischen Kolleg_innen hängt das Gelingen des *fächerübergreifenden Unterrichts* auch von der Organisationsstruktur und deren Flexibilität der jeweiligen Schule ab. Je nachdem, inwieweit die Schulleitung gegenüber dieser Unterrichtsform positiv gestimmt ist, wird es zu einer Förderung und Forderung oder einer Ablehnung bzw. Verhinderung kommen. Die Möglichkeiten, die hierbei dem Schulleiter oder der Schulleiterin obliegen, sind nicht zu vernachlässigen. Durch die Möglichkeit des „Aufweichens“ des Stundenplanes kann den beteiligten Lehrerinnen und Lehrern beim *fächerübergreifenden Unterrichten* entgegen gekommen werden. Dagegen kann das Verhindern eines Lehrausganges oder des Hinzuziehens eines Fachmannes oder einer Fachfrau sich negativ auf den Erfolg dieser Unterrichtsform auswirken (Häsing, S. 10 f. sowie Duncker und Popp, S. 11 f.).

1.3 Konklusion

Trotz der unter Punkt 1.1 beschriebenen Chancen und Möglichkeiten, welche der *fächerübergreifende Unterricht* sowohl dem Lehrpersonal als auch den Schülerinnen und Schülern bietet, ist es in der Bundesrepublik Deutschland so, dass die Herausforderungen und Bedingungen in Punkt 1.2 überwiegen. Der *fächerübergreifende Unterricht* wird vom Gros des Lehrer_innenkollegiums zwar als positiv bewertet und als wünschenswert erachtet, dies spiegelt sich jedoch bei einer Bestandsaufnahme nicht wider. So ist der Anteil des *fächerübergreifenden Unterrichts* in einer gymnasialen Oberstufe am geringsten, da die anspruchsvollen und komplexen Arrangements und Rahmenbedingungen hemmender denn herausfordernd für die Lehrerinnen und Lehrer sind (Häsing, S. 78 f.).

Dem zum Trotz oder gerade deswegen wird sich die nachfolgende Arbeit mit dem *fächerübergreifenden Unterricht* zwischen den Unterrichtsgegenständen Mathematik sowie Geographie und Wirtschaftskunde im Allgemeinen und deren Verbindung in der gymnasialen Oberstufe im Speziellen auseinandersetzen.

2 Mathematik in der Kartographie

Das folgende Kapitel setzt sich mit der Verbindung der Kartographie und der Mathematik auseinander und wie jene Verbindung im Schulunterricht genutzt wird bzw. noch stärker genutzt werden kann. Es soll hierin gezeigt werden, dass diese beiden Wissenschaften wesentlich mehr verbindet, als man unter Umständen im ersten Moment vermuten würde. Man findet beim Zusammenspiel dieser Disziplinen auch eine erstaunliche Vielfalt an Komplexität und mathematischen Anspruch, welcher an den Benutzer und die Benutzerin gestellt wird. Die Anforderungen reichen von der Berechnung eines Grundrisses eines Gebäudes – was bereits in der 1. Klasse bewältigbar sein muss – bis hin zur nichteuklidischen Geometrie. Alleine die Vielzahl der Namen von herausragenden Mathematikern wie Gauß, Mercator (Kremer) oder Laplace zeigt, welche große Herausforderung die Verbindung dieser beiden Wissenschaften mit sich bringt. Aus diesem Grund können auch nicht alle Aspekte, welche diese beiden Disziplinen verbindet, in den Schulunterricht integriert oder in dieser Arbeit behandelt werden.

2. 1 Verbindung der beiden Wissenschaften in der Unterstufe

Nachfolgend soll erarbeitet werden, in welchen Schulstufen die jeweiligen Lehrpläne Möglichkeiten zum fächerübergreifenden Erreichen von Lernzielen darbieten.

Wenn man sich den *Lehrplan für Geographie und Wirtschaftskunde* der 1. Klasse AHS und die dazugehörigen Schulbücher und Atlanten ansieht, so erkennt man schnell, dass in diesem Lernjahr die Kartographie und somit unweigerlich die Mathematik eine zentrale Rolle spielen. Die Schülerinnen und Schüler dieser Klasse sollen *grundlegende Informationen über die Erde mit Globus, Karten, Atlas und Bildern* (Lehrplan Geographie und Wirtschaftskunde) erwerben. Es wird von den Lernenden jedoch nicht nur verlangt die Karten bzw. Atlanten als Träger von Informationen zu verwenden, sondern man soll sich auch mit der Entstehung jener beschäftigen und somit auch unumgänglich mit den Problemen, welche die Herstellung von Karten mit sich bringt. Jedes approbierte Geographie und Wirtschaftskunde Schulbuch dieser Klasse hat einen mehr oder weniger umfangreichen Teil, welcher sich mit der Verwendung und Erzeugung von Karten auseinandersetzt. Besonders hervorgehoben sollen hierbei die Lehrbücher „Hölzel-GW 1“ (S. 5) und „ganz klar – Geografie 1“ werden. Im Letzteren beschäftigt man sich auf den Seiten 13 bis 19 sowohl mit der Interpretation als

auch der Herstellung von Kartenblättern (siehe Abb. 1). Es wird anhand des Beispiels einer Orangenhaut auf die Probleme bei der Verebnung von dreidimensionalen Objekten eingegangen. Dabei wird den Schülerinnen und Schülern in einer altersadäquaten Weise gezeigt, dass dieser Prozess viele Probleme mit sich bringt und eine „perfekte“ Karte nicht erzeugt werden kann.



Abbildung 1: Erste Schritte von der Sphäre in die Ebene
Quelle: ganz klar - Geografie 1, S. 15

Als negatives Beispiel zu diesem Themenkomplex kann das Geographie und Wirtschaftskunde Buch „geo-link 1“ genannt werden. Auf Seite 11 des eben genannten Buches ist den Autoren ein Kardinalfehler unterlaufen. Bei der Behandlung des Maßstabes findet man folgende Erklärung: „1:1000 (sprich: eins zu eintausend) bedeutet, dass die abgebildete Landschaft in Wirklichkeit tausendmal größer ist als auf der Karte dargestellt.“ (geo-link 1, S. 11).

Auch in den verschiedenen Schulatlanten finden sich Ausführungen zur Kartenerzeugung und zu Kartennetzentwürfen. Da es heutzutage keine Stufenatlanten mehr gibt, muss der Anspruch an einen Atlas sein, für jede Klasse der Langform des Gymnasiums geeignet zu sein. Aus diesem Grund findet man hierin bereits mathematisch anspruchsvollere Inhalte wie beispielsweise die Berechnung der Länge von *Orthodromen* (S. 23 ff.) oder die Eigenschaften verschiedener Kartennetzentwürfe (Diercke Weltatlas Österreich, S. 169, Abb. 2).

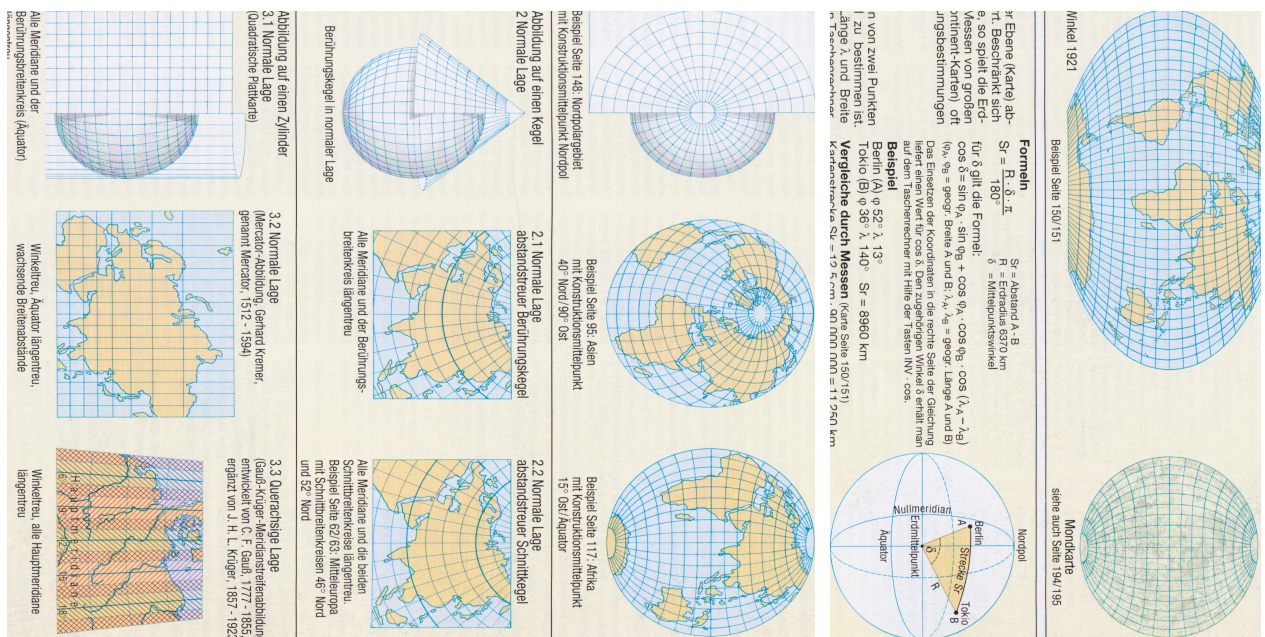


Abbildung 2: Kartennetze und Wegberechnungen in einem Schulatlas
 Quelle: Diercke Weltatlas Österreich, S. 169

In den folgenden Klassen der AHS Unterstufe werden Karten nahezu ausschließlich als Träger von Informationen bzw. Interpretationshilfen im Geographie und Wirtschaftskunde Unterricht benutzt. Dies bedeutet jedoch nicht, dass der mathematische Hintergrund in diesen Lernjahren vernachlässigbar ist. Es ist eine Anforderung, welche an das Lehrpersonal gestellt werden muss, dass er oder sie zu den jeweiligen Themen bzw. Aufgabenstellungen die am besten passenden Schul- oder Atlaskarten auswählen kann. Neben graphischer Gestaltung sowie dargestelltem Thema ist hierbei auch die *Kartenprojektion* (S. 51 ff.) von großer Bedeutung. Je nach Fragestellung soll die Lehrperson den Schülerinnen und Schülern jene Karte zur Verfügung stellen, welche die zu bearbeitenden Eigenschaften bestmöglich erhält. Selbst wenn Flächen-, Winkel- oder Längentreue (siehe S. 52) keine bedeutende Rolle beim Arbeiten mit der Karte darstellen, sollte die Lehrperson vor allem bei kleinmaßstäbigen Karten mit den jeweiligen Projektionen variieren – mögliche Variationen wären Gall-Peters-Karte im Vergleich zur Mercator-Karte. Diese beiden Karten basieren auf einer Zylinderprojektion (S. 58 ff.). Bei der Gall-Peters-Karte (Abb. 46, S. 77) wird ein *Schnittzylinder* (Abb. 47, S. 78) verwendet, wogegen bei der Mercator-Karte ein *Berührzylinder* (Abb. 28, S. 52) verwendet wird. Dem zufolge kommt es auf den Karten zu unterschiedlichen Verzerrungen des Urbildes. Den Schülerinnen und Schülern wird alsbald auffallen, dass sich die Kontinente auf diesen beiden Karten sowohl in Größe als auch Form sehr stark unterscheiden. Nun ist es wieder an der Lehrperson den Schülerinnen und

Schülern zu erläutern, warum Erdteile auf Karten unterschiedlich abgebildet werden und dass keine der Karten besser oder richtiger als die andere ist.

Im *Lehrplan* des Unterrichtsgegenstandes *Mathematik* für die AHS Unterstufe findet man bereits bei den Unterrichtszielen und Unterrichtsinhalten Unterpunkte, bei welchen sich ein fächerübergreifender Unterricht anbietet. Beim Thema „Geometrie“ wird etwa gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler *zeichnerische Darstellungen von ebenen und räumlichen Gebilden anfertigen können* oder *räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln und Längen-, Flächen- und Volumsberechnungen durchführen können* (Lehrplan Mathematik). Jede der eben genannten Kompetenzen kann durch das Arbeiten mit Karten oder kartenverwandten Materialien geschult oder gefestigt werden. Weiters kann festgehalten werden, dass sich zu jeder Klasse der Unterstufe der Lehrplanpunkt „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ findet. Bereits in der *ersten Klasse* beschäftigt man sich mit Umfangs- und Flächenberechnungen an Rechtecken und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren. Des Weiteren sollen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein Maßstabszeichnungen anzufertigen und Längen daraus ermitteln können – mit einem kleinen Mehraufwand sind so auch maßstäbliche Flächen- und Volumsberechnungen durchzuführen. Es zeigt sich also, dass bereits die erste Klasse eine Vielzahl an Möglichkeiten in punkto fächerübergreifenden Unterricht bietet. Diese Möglichkeiten werden auch von den Schulbuchautorinnen und Autoren aufgenommen und in mehr oder weniger detaillierter Art und Weise umgesetzt. So beinhalten folgende Mathematik Schulbücher der ersten Klasse angewandte Beispiele, bei welchen das Rechnen mit einem Maßstab an Karten geübt wird:

- Das ist Mathematik – S. 240
- Die Welt der Mathematik – S. 93
- MATHE BUCH – S. 45
- Mathematik 1 – Verstehen – Üben – Anwenden – S. 202
- Lebendige Mathematik 1 – S. 124 und S. 125

Die hier angegebenen Beispiele befassen sich mit Berechnungen in mittlerer bis großer Maßstabsdimension. Wenn man nun die Schulbücher nach angewandten Beispielen bei der Flächenberechnung durchforstet, so findet man ausschließlich Beispiele, welche sich in der großen Maßstabsdimension finden.

In der *zweiten Klasse* ergibt sich durch den vorgegebenen Lehrstoff nur eine marginale Erweiterungsmöglichkeit des fächerübergreifenden Unterrichts zwischen der Kartographie und Mathematik. Durch das Berechnen von Figuren, die sich durch Zerlegen oder Ergänzen auf Rechtecke zurückführen lassen, können die Schülerinnen und Schüler die zu berechnenden Flächen genauer approximieren – neue Fertigkeiten oder Kompetenzen können jedoch hierdurch nicht erlangt werden.

Weitaus mehr Möglichkeiten zum fächerübergreifenden Unterrichten bietet der Lehrstoff der *dritten Klasse* AHS. Im Themenbereich „Arbeiten mit Figuren und Körpern“ sollen die Schülerinnen und Schüler das „Vergrößern und Verkleinern von Figuren“ erlernen sowie „den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können“. Vor allem Ersteres der obigen Aufzählung ist für ein fächerübergreifendes Arbeiten nahezu prädestiniert. Müsste man schnell und sehr verkürzt beschreiben, was die Aufgabe eines Kartographen bzw. einer Kartographin ist, so wäre die obige Umschreibung zutreffend.

In den Schulbüchern der dritten Klassen finden sich zum Thema „Vergrößern und Verkleinern von Figuren“ einige Beispiele, welche sich mit Karten oder kartenverwandten Medien auseinandersetzen.

Beschäftigt sich der fächerübergreifende Unterricht zwischen Kartographie und Mathematik in den ersten drei Jahren einer AHS ausschließlich mit Abbildungen großen oder mittleren Maßstabes, so wird es ab der vierten Klasse möglich auch Berechnungen auf kleinmaßstäbigen Karten vorzunehmen. Mit Hilfe der Formeln zur Berechnung von Kreisumfängen und Längen von Kreisbögen können ohne größere Probleme auch weite Entfernungen von ausgezeichneten Orten berechnet werden. Jene Entfernungen die hierdurch berechenbar werden, sind diese, welche sich auf *Großkreisen* (siehe S. 26) befinden. Es sind zum Beispiel Orte, welche am selben Längengrad liegen oder sich am Äquator befinden.

Als Beispiel hierfür soll die Entfernung zwischen Assuan (Syene) und Alexandria errechnet werden. Diese ägyptischen Städte liegen nur annähernd am selben Längengrad (etwa 30° ö.L.), nahmen jedoch in der historischen Erdmessung eine ausgezeichnete Rolle ein (vergl. S. 20 f.). Alexandria befindet sich am 31. Breitenkreis und Assuan liegt am 24. Breitenkreis – jeweils nördliche Breite. Mit diesen Daten ergibt sich folgende Entfernungsberechnung (der Erdradius wird dabei mit 6371 km angenommen):

$$E_{AS} = \frac{\overbrace{B_A - B_S}^{\text{Angaben in Grad}}}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{31^\circ - 24^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{7^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 6371 \cdot \pi \approx 778 \text{ km.}$$

Um die Entfernungen von beliebigen Orten der Sphäre berechnen zu können müssen sich die Schülerinnen und Schüler noch etwas gedulden. Angewandte Beispiele zur Berechnung von *Orthodromen* findet man in den Schulbüchern „Das ist Mathematik 4“ (S. 198) sowie „Mathematik 4“ (S. 101). Eine Orthodrome ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugeloberfläche. Orthodrome werden im Abschnitt 3.5 (siehe S. 23 ff.) dieser Arbeit ausführlich behandelt. Bemerkenswert bei den eben angeführten Beispielen ist, dass sich alle Berechnungen auf Längengrade beschränken. Würde man auch Berechnungen entlang des Äquators vornehmen, so entstünde kein Mehraufwand für den bzw. die Verfasser_in, jedoch ein Mehrwert für den Bearbeiter bzw. für die Bearbeiterin der gestellten Aufgabe. Diese_r müsste sich beispielsweise bei der Berechnung der Entfernung von den Galapagos Inseln nach Singapur überlegen, ob er bzw. sie seine/ihre mathematische Reise ostwärts oder westwärts startet – die nachfolgende Rechnung soll den Unterschied, welcher sich dabei ergibt, verdeutlichen.

Die Galapagos Inseln befinden sich auf 90° westlicher Länge und Singapur auf 103° östlicher Länge – geographische Breite je 0°. Startet man seine mathematische Reise in östliche Richtung von den Galapagos Inseln aus, so ergibt sich folgende Entfernung:

$$E_{GS} = \frac{\overbrace{L_G - L_S}^{\text{Angaben in Grad}}}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{|-90^\circ - 103^\circ|}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{193^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 6371 \cdot \pi \approx 21461 \text{ km.}$$

Wenn man selbige Reise in entgegengesetzter Richtung antritt, so ergibt sich für die Länge dieses Pfades: $E_{GS_{neu}} = 2 \cdot r \cdot \pi - E_{GS} \approx 40030 - 21461 = 18569 \text{ km}$. Man sieht, dass es einen Unterschied macht, in welche Richtung man eine Reise antritt – in diesem Fall ist der Unterschied 2892 km lang.

Für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler würde sich auch die Berechnung einer Orthodrome anbieten, welche über einen Pol hinausgeht. So könnte man beispielsweise den Schülerinnen und Schülern als Denksportaufgabe die Entfernung von Mexiko City nach Almaty (Kasachstan) berechnen lassen.

Die Koordinaten der obigen Städte sind wie folgt: Mexiko City 19° n.B. / 100° w.L.

Almaty 41° n.B. / 80° ö.L.

Um nun zu überprüfen ob zwei Städte – eine Stadt östlich und eine westlich von Greenwich – am selben „Längengroßkreis“ liegen, muss die Summe ihrer geographischen Längen θ gebildet werden. Wenn gilt: $\underbrace{\theta_{Ort A}}_{\text{ö.L.}} + \underbrace{\theta_{Ort B}}_{\text{w.L.}} = 180^\circ$ ($\theta_{Ort A}, \theta_{Ort B} \in]0^\circ; 180^\circ[$), so liegen diese

beiden Orte am selben „Längengroßkreis“ und ihre Entfernung kann wie folgt errechnet werden: Da Mexiko City und Almaty auf der Nordhalbkugel liegen geht der kürzeste Weg zwischen diesen Orten über den Nordpol. Mexiko City ist 71 Breitengrade vom Nordpol entfernt ($90^\circ - 19^\circ$) und Almaty ist 49 Breitengrade vom Nordpol entfernt ($90^\circ - 41^\circ$).

$$\Rightarrow E_{MA} = \frac{\overbrace{M_{NP} + A_{NP}}^{\text{in Grad}}}{360^\circ} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{71^\circ + 49^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 6371 \cdot \pi \approx 13343 \text{ km.}$$

Man sieht, dass hierbei noch viele Möglichkeiten vorhanden sind, welche bis dato von den Schulbuchautoren und Schulbuchautorinnen noch nicht aufgenommen wurden.

2. 2 Verbindung der beiden Wissenschaften in der Oberstufe

Nachfolgend sollen die Lehrpläne sowie der Lehrstoff der Oberstufe von Geographie und Wirtschaftskunde sowie Mathematik hinsichtlich des fächerübergreifenden Unterrichts untersucht werden.

Wie im ersten Teil dieses Kapitels soll auch nun mit der Analyse des *Geographie und Wirtschaftskunde Lehrplans* begonnen werden. Bereits in den Bildungs- und Lehraufgaben finden sich viele Unterpunkte, welche ein Zusammenspiel zwischen Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde zulassen bzw. sogar einfordern. Jegliche Unterpunkte, welche bei der Methoden- als auch bei der Orientierungskompetenz aufgelistet werden, fordern ein mathematisches Grundgerüst ein um vollständig erlangt zu werden. Des Weiteren finden sich auch in der Synthese-, Umwelt- sowie Gesellschaftskompetenz Punkte, welche mathematisches Wissen zur „vollständigen“ Erreichung verlangen. So benötigt man unter anderem die Mathematik und Kartographie um die als Synthesekompetenz aufgelistete *Einsicht in das Wirkungsgefüge und die Dynamik des Raumes, der Gesellschaft und der Wirtschaft sowie in die zugrunde liegenden Machtstrukturen* [zu] vermitteln. Weiters bedarf die Forderung *Raum, Gesellschaft und Wirtschaft auch fächerübergreifend mit benachbarten natur- und sozialwissenschaftlichen Disziplinen betrachten* [zu] können der oben genannten Wissenschaften (Lehrplan Geographie und Wirtschaftskunde). Dies kann

dadurch begründet werden, dass jede Verwendung einer Karte auch eine bewusste oder unbewusste Ausübung von Macht ist. Betrachtet man beispielsweise die Hintergründe von Nachrichtensendungen, so findet man hierbei sehr oft Weltkarten. Auf den ersten Blick kann man vermuten, dass diese Weltkarten einander gleichen oder zumindest sehr ähnlich sind, denn wer würde schon vermuten, dass Nachrichtensendungen die Gesellschaft mit Kleinigkeiten wie dem Hintergrundbild perfide manipulieren möchten. Doch wenn man die verschiedenen Weltkarten genauer unter die Lupe nimmt erkennt man, dass Nachrichtensendungen aus verschiedenen Regionen der Welt immer einen anderen Ausschnitt der Erde in den Mittelpunkt stellen und somit den Betrachtern und Betrachterinnen unterschiedliche Zentren der Erde suggerieren. Doch nicht alleine die Wahl des Zentrums beeinflusst die Vorstellung des Betrachters bzw. der Betrachterin von der Erde. Ebenso spielt der gewählte Netzentwurf eine bedeutende Rolle bei der Vorstellung unseres Planeten. So ist es vom mathematischen Prozess der Verebnung einer Sphäre abhängig, welche Gebiete der Erde groß und welche klein dargestellt werden.

Bei den Umweltkompetenzen wird von den Schülerinnen und Schülern eingefordert, dass sie die *Interessensgegensätze bei der Nutzung von Räumen erkennen und somit auch die Notwendigkeit von Raumordnungsmaßnahmen begründen* (Lehrplan Geographie und Wirtschaftskunde). Um Raumordnung vollziehen oder nachvollziehen zu können bedarf es des Arbeitens mit Karten und kartenverwandten Medien. Hierbei ist zu beachten, dass für unterschiedliche raumplanerische Aktivitäten in einem Gebiet unterschiedliche Karten zu Hilfe gezogen werden müssen. So muss man bei der Ausweitung des Siedlungsgebietes flächentreue Karten als Basis verwenden, wogegen bei Straßenbautätigkeiten oder der Erweiterung des Infrastrukturnetzwerkes winkelerhaltende Karten verwendet werden. Man kann also schnell erkennen, dass die Mathematik auch bei der Umweltkompetenz des Geographie und Wirtschaftskunde Lehrplans eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt.

Die *Auseinandersetzung mit lokalen, regionalen und globalen Fragestellungen* ist eine der Gesellschaftskompetenzen, welche im Geographie und Wirtschaftskunde Lehrplan eingefordert werden. Globale Fragestellungen können nur mit globalen Karten behandelt oder analysiert werden, was zur Folge hat, dass man sich mit den mathematischen Netzentwürfen auseinandersetzen muss, welche diesen Karten zugrunde liegen.

Neben den methodischen und fachspezifischen Kompetenzen werden auch im didaktischen Grundsatz die *fächerübergreifenden Aspekte* aufgelistet, auf welche die Lehrperson

einzu gehen hat.

Im Geographie und Wirtschaftskunde Lehrstoff der Oberstufe findet man keine expliziten Punkte, welche sich dezidiert mit Kartographie auseinandersetzen. Es sind jedoch in jeder Klasse (wie erwähnt) Lernziele formuliert, die sich mit globalen Zusammenhängen oder Raumordnung und Raumplanung auseinandersetzen. Um diese Lernziele erreichen zu können ist eine Bearbeitung des Lehrstoffes mit Karten oder kartenverwandten Medien unumgänglich. Vor allem bei der Bearbeitung von globalen Fragen ist es von großer Bedeutung mit welchem Kartenmaterial man das Thema bearbeitet. Dies hat zur Folge, dass sowohl das Lehrpersonal als auch die Schülerinnen und Schüler über die unterschiedlichen Eigenschaften verschiedener Kartenprojektionen Bescheid wissen müssen um adäquate Karten wählen zu können.

Im *Mathematik-Lehrplan* der Oberstufe findet man bereits bei der Bildungs- und Lehraufgabe Aspekte, welche das fächerübergreifende Arbeiten fordern. So *sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen*. Weiters sollen die Lernenden durch ihre mathematische Bildung *Erscheinungen der Welt wahrnehmen und diese durch Abstraktion verstehen*. Durch die *Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertieft* werden. Auch in den didaktischen Grundsätzen im Allgemeinen und in den Punkten „Lernen in anwendungsorientierten Kontexten“ sowie „Lernen mit medialer Unterstützung“ im Speziellen finden sich Forderungen an das Lehrpersonal das fächerübergreifende Unterrichten – und somit in diesem Fall das Zusammenspiel zwischen Kartographie und Mathematik – zu forcieren.

Die eben durchgeführte Auflistung zeigt, dass den Lehrerinnen und Lehrer nicht nur die Möglichkeit gegeben wird fächerübergreifend zu unterrichten. Dies wird vom Lehrplan und somit vom zuständigen Ministerium ausdrücklich gefordert.

Im folgenden Abschnitt soll analysiert werden, welcher Lehrstoff sich für das fächerübergreifende Unterrichten von Mathematik und Kartographie anbietet.

Im Lehrstoff der *fünften Klasse* finden sich zwei Schwerpunktthemen, welche eine Erarbeitung mittels der Kartographie erlauben. Die Themengebiete „Trigonometrie“ sowie „Vektoren und analytische Geometrie der Ebene“ ermöglichen Berechnungen an mittel- bis großmaßstäblichen Karten. Die Schülerinnen und Schüler können mit dem erlangten Wissen dieser beiden Themenbereiche Flächenberechnungen aber auch Wegberechnungen

vornehmen. Konnten bis zur vierten Klasse nur Strecken und Entfernungen geradlinig errechnet werden, so gibt die Vektorrechnung den Schülerinnen und Schülern ein Werkzeug in die Hand realitätsnähere Berechnungen anstellen zu können. Man kann somit die Wegstrecke entlang von Straßen auf einer Karte errechnen, was eine bessere Vorstellung der hierfür benötigten Fahrzeit erlaubt. Die Schulbücher dieser Klasse bieten hierzu jedoch wenig angewandte Beispiele. Das Gros der angegebenen Aufgaben befasst sich mit dem Errechnen von fehlenden Koordinaten von geometrischen Figuren, wobei diese in keinen Kontext eingebunden sind. In den Lehrbüchern „Mathematik 5“ (von Götz-Reichel) sowie „Mathematik 5“ (von Szirucsek et al) findet man jedoch Beispiele, welche sich mit Reisen im mittleren und kleinen Maßstab befassen. So findet man bei der Vektorrechnung Aufgaben wie Strömung und Wind ein Boot (Götz-Reichel, S. 259) oder Winde ein Flugzeug (Szirucsek et al, S. 200) vom eingeschlagenen Kurs abbringen.

In der *sechsten Klasse* können viele Unterpunkte der „Analytischen Geometrie des Raumes“ fächerübergreifend erarbeitet werden. Vor allem das *Übertragen bekannter Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie* [und das] *Erkennen der Grenzen dieser Übertragbarkeit* spielt eine zentrale Rolle bei der mathematischen Behandlung der Kartographie (Lehrplan Mathematik). Die Grenzen dieser Übertragbarkeit und als Folge davon die Unmöglichkeit einer mathematisch perfekten Karte sind seit vielen Jahrhunderten bekannt, doch beschäftigten und beschäftigen sich noch immer namhafte Mathematiker und Mathematikerinnen mit diesem Thema um eine situationsbezogen bestmögliche Approximation dieses Problems zu erlangen. Des Weiteren gibt es eine Unzahl von Fragestellungen der Kartographie, welche sich mit dem *Lösen von Geometrischen Aufgaben [gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie]* auseinandersetzen (Lehrplan Mathematik). Ein weiterer für das fächerübergreifende Unterrichten wichtiger Aspekt dieser Klasse ist das Berechnen des Winkels von einander schneidenden Geraden im Raum. Dieser Tatsache zur Folge findet man in den Schulbüchern verschiedenster Autoren auch Beispiele hierzu. Weiters sind viele Aufgaben zur ebenen Vermessung oder zur Höhenmessung mit Hilfe der Winkelsätze vorhanden – siehe beispielsweise Bürger et al, S. 43 f. oder Götz-Reichel, S. 87 f. Ebenso findet man Beispiele, welche sich mit der Navigation des Flugverkehrs bzw. der Schifffahrt im mittleren Maßstab befassen (Bürger et al, S. 52 und S. 57). Bei diesen Aufgaben sollte jedoch bedacht werden, dass sich Flugzeuge oder Schiffe nur in sehr seltenen Fällen – wenn Start-

und Endpunkt am Äquator oder am selben Meridian liegen – unter Beibehaltung eines konstanten Kurses fortbewegen. Diese Tatsache kann zwar mathematisch noch nicht berücksichtigt werden, sollte jedoch erwähnt werden (siehe S. 31). Weiters sollten den Schülerinnen und Schülern auch die Grenzen der Höhenmessung mittels der Winkelsätze erläutert werden. Mit zunehmender Entfernung von zwei Objekten werden die erlangten Berechnungen als Folge der Erdkrümmung immer ungenauer und verlieren somit an Realitätsbezug.

Die „Nichtlineare analytische Geometrie“, welche sich im Lehrstoff der *siebten Klasse* befindet, bietet eine Vielzahl an Möglichkeiten um fächerübergreifend behandelt zu werden. So ist es in dieser Klasse erstmals möglich, die Sphäre mathematisch zu definieren und zu beschreiben. Mit dem Wissen und Erlernten dieses Themenbereiches wird es nun auch möglich die Entfernung von beliebigen Punkten auf der Erdoberfläche zu berechnen. Weiters eignet sich auch der Themenbereich „Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellung“ zum fächerübergreifenden Arbeiten. Bei dieser Behandlung können den Schülerinnen und Schülern auch rudimentäre Einblicke in die Differentialgeometrie gewährt werden. Auch die in diesem Lernjahr behandelte Differentialrechnung spielt für die mathematische Analyse von Karten eine wichtige Rolle. Die Schulbücher der siebenten Klasse befassen sich sehr allgemein mit den zu behandelnden Themenstellungen. Viele Aufgaben beschränken sich auf das Beschreiben einer Kugel, wenn Mittelpunkt und ein Punkt auf der Sphäre gegeben sind.

Der Lehrstoff der *achten Klasse* ist sehr analysislastig was zur Folge hat, dass es wenige Unterpunkte gibt, welche sich direkt mit der Kartographie in Verbindung bringen lassen. Die Integralrechnung im Allgemeinen und deren Anwendung zur Berechnung von Flächeninhalten und Volumina im Speziellen lassen jedoch gewisse Möglichkeiten des fächerübergreifenden Unterrichtens offen. Die Aufgaben der Schulbücher, welche eine Verbindung zwischen Mathematik und Kartographie ermöglichen sind jene, welche sich mit den Rotationskörpern befassen.

3 Kartographie im Wahlpflichtfach Mathematik

Der folgende Teil dieser Arbeit setzt sich mit der Verbindung von Mathematik und Kartographie im Wahlpflichtfach auseinander. Dieses Zusammenspiel eignet sich zum Erreichen der Bildungs- und Lehraufgabe *den Schülerinnen und Schülern eine umfassende und vertiefte Allgemeinbildung zu vermitteln und sie zugleich zur Hochschulreife zu führen (§ 34 des Schulorganisationsgesetzes)* (nach Verordnung der Bundesministerin für Bildung, Wissenschaft und Kultur, Artikel I) und genügt auch den Anforderungen der didaktischen Grundsätze des *Anknüpfens an die Vorkenntnisse und Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler, des Stärken von Selbsttätigkeit und Eigenverantwortung* und des *Herstellen von Bezügen zur Lebenswelt* (nach Verordnung der Bundesministerin für Bildung, Wissenschaft und Kultur, Artikel I). Wie wir sehen werden bietet sich sowohl die Verwendung von digitalen Medien als auch von Computeralgebrasystemen bei diesem fächerübergreifenden Unterricht an (siehe Kapitel 3.7.2.1, S. 50). Es soll nun vorgestellt werden, wie sich eine Themenabfolge bei diesem Unterricht zusammensetzen könnte und wie die einzelnen Themen bearbeitet werden.

3. 1 Form der Erde

Bevor man sich mit Messungen oder Berechnungen auf der Erdoberfläche beschäftigt oder versucht ein dreidimensionales Objekt in die Ebene zu projizieren, sollte man sich mit der Form der Erde beschäftigen. Im Altertum gab es verschiedenste Vorstellungen von der Erdgestalt. So gab es Völker oder Denkschulen, welche die Meinung vertraten, dass die Erde eine Scheibe, ein Würfel oder Zylinder sei (Abb. 3, S. 20). Wäre dies der Fall, so würde sich die Kartographie und Geodäsie wesentlich einfacher darstellen und es wäre nicht von Nöten gewesen, dass sich viele Mathematiker bzw. Mathematikerinnen mit diesem Thema befassen oder diese Arbeit geschrieben wird. Einige Jahrhunderte vor unserer Zeitrechnung begannen diese Vorstellungen jedoch zu bröckeln und man begann sich mit der Erde als Kugel zu beschäftigen (Kohlstock, S. 17). Es kann nicht eindeutig festgemacht werden wann diese Vorstellung zum ersten Mal postuliert wurde und wer der Autor hiervon war. Etwa 600 bis 500 vor Christus dürfte Anaximander, Thales von Miletus, Pythagoras oder Aristoteles erstmals die Erde als Kugel beschrieben haben. Diese Vorstellung von der Erdgestalt konnte über 2000 Jahre gehalten werden. Dem von Isaac Newton gefundenen Gravitationsgesetz

zur Folge musste im Jahre 1670 die Vorstellung der Erde als Kugel modifiziert werden. Da die Fliehkraft am Äquator am stärksten ist muss die Erde in ihrem Flüssigkeitsstadium hier eine stärkere Ausdehnung erfahren haben, was zur Folge hat, dass die Erde einem Rotationsellipsoid ähnelt. Da man auf der Erdoberfläche jedoch Berge und Täler unterschiedlichen Ausmaßes findet muss auch diese Vorstellung verändert werden. Heute spricht man von der Erde als *Geoid*, was so viel wie „erdähnlich“ bedeutet (Hake et al, S. 39 f. und Kohlstock, S. 19). Abbildung 3 zeigt einige Stadien in der Entwicklung der Vorstellung über die Gestalt der Erde.



Abbildung 3: Vorstellungen über die Form der Erde im Laufe der Zeit

Quellen:

Bild1: http://www.welt.de/multimedia/archive/01331/reise_atlas1_DW_Re_1331003p.jpg

Bild 2: http://4.bp.blogspot.com/_pSlv_pmAMVo/TQVO-LKHKpi/AAAAAAAAA4/CR907QxQN8/s1600/erd_scheibe.jpg

Bild 3: http://deutscheseelen.files.wordpress.com/2011/05/planet_erde1.jpg

Stand je 21. Mai 2011

3. 2 Größe bzw. Abmessungen der Erde

Da man sowohl in der Fachliteratur als auch in den Schulbüchern für unterschiedlichste Klassen Beiträge zur Historie der Erdmessung findet, soll an dieser Stelle auch dieses Thema kurz behandelt werden. Die erste uns bekannte Messung des Erdumfanges geht auf den Alexandriner *Eratostenes* (276 – 195 v. Chr.) zurück. Dieser erkannte, dass am 21. Juni zur Mittagszeit in Syene die Sonnenstrahlen lotrecht auf die Erdoberfläche treffen, da in einem senkrechten Brunnen am Boden kein Schatten zu erkennen war. Zur selben Zeit warf jedoch ein in Alexandria platzierter Gnomon (Stab) einen Schatten unter dem Winkel von $7,2^\circ$. Die Entfernung von Syene nach Alexandria – welche nahezu am selben Meridian liegen – beträgt 5000 Stadien. Sie wurde durch Zählen der Umdrehungen eines Wagenrades gemessen. Da es zu dieser Zeit keine eindeutige Festlegung der Länge eines Stadions gab, variieren die

daraus resultierenden Berechnungen des Erdumfangs zwischen 37125 und 46250 km. Daraus ergeben sich Radien zwischen 5909 und 7361 km. Dies hat zur Folge, dass der vor über 2200 Jahren errechnete Erdradius im Mittel nur um 11,4% vom tatsächlichen Halbmesser abweicht (Torge, S. 4 f. und Kohlstock, S. 17 f.).

Die ersten Berechnungen der großen und kleinen Halbachse des Rotationsellipsoids gehen auf Arbeiten von Gauß in den Jahren 1822-1824 im Königreich Hannover zurück. Auf Basis dieser Daten und Erkenntnissen errechnete Bessel um 1840 die Dimensionen des Erdellipsoids – dieses liegt seitdem der deutschen Landesvermessung zugrunde. Im Verlauf der Zeit konnten durch immer besser werdende Messinstrumente sowie durch Satellitentechnik die Erddimensionen genauer bestimmt werden. Die folgende Tabelle (Tab. 1) zeigt die Änderung des approximierten Erdsphäroids:

Name	Jahr	großer Radius	kleiner Radius
Bessel	1841	6 377 397 m	6 356 079 m
Clarke	1880	6 378 249 m	6 356 515 m
Hayford	1909	6 378 388 m	6 356 912 m
Krassowski	1942	6 378 245 m	6 356 863 m
IUGG	1967	6 378 160 m	6 356 775 m
IUGG/GRS80 WGS84	1980 bzw. 1984	6 378 137 m	6 356 752 m

Tabelle 1: Dimensionen des Erdsphäroids
Quelle: Hennermann, S. 84 und Hake et al, S. 40

Man sieht, dass die Unterschiede zwischen großem und kleinem Radius nicht sehr groß sind. Die Erde gleicht also in guter Näherung einer Kugel.

3. 3 Bezugssystem

Es ist praktisch nicht möglich die Erde in ihrer realen Gestalt oder als Geoid zu beschreiben. Aus diesem Grund projiziert man die Oberfläche der Erde auf eine jeweils passende Bezugsfläche (siehe Abb. 4). Diese Bezugsfläche kann im mittleren und großen Maßstab die Oberfläche eines Rotationsellipsoids und im kleinen Maßstab die Oberfläche einer Kugel sein. Um unterschiedliche Regionen der Erde im mittleren und großen Maßstab bestmöglich abbilden zu können verwendet man unterschiedliche Rotationsellipsoide als Bezugsflächen. Das beste Bezugssystem für einen Ausschnitt auf der Erdoberfläche ist jenes, bei welchem

der Abstand zur tatsächlichen Erdoberfläche minimal ist (siehe Abb. 4). Dies hat zur Folge, dass die Rotationsellipsoide in dieser Maßstabsdimension sowohl in ihren Parametern als auch in ihrem Mittelpunkt variieren. Diese Unterschiede bezeichnet man als „geodätisches Datum“. Befasst man sich mit Karten kleinen Maßstabs so ist das dazugehörige Bezugssystem die Kugel mit dem Halbmesser von 6371 km (Hennermann, S. 84 f.). Da sich der folgende Teil dieser Arbeit mit kleinmaßstäbigen Abbildungen beschäftigt und der Unterschied zwischen Ellipsoid und Kugel als Bezugssystem ein sehr kleiner ist, wird in den nachfolgenden Untersuchungen und Berechnungen immer von der Kugel mit Radius 1 als Bezugssystem ausgegangen.

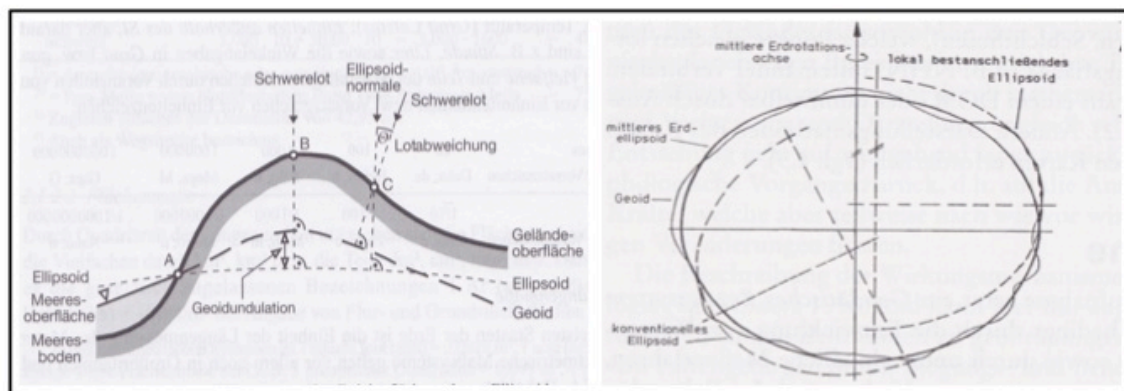


Abbildung 4: Bezugssystem und geodätisches Datum einer Karte

Quellen: Links: Hake et al, S. 41 Rechts: Kohlstock, S. 44

3. 4 Der Maßstab

Der Maßstab einer Karte gibt das Verkleinerungsverhältnis der Kartenstrecke zur Naturstrecke wieder. Angegeben wird der Maßstab wie folgt: $M = \frac{s_K}{s_N}$, wobei s_K im Zähler für die Kartenstrecke und s_N im Nenner für die Naturstrecke steht. Zur besseren Lesbarkeit und Vergleichbarkeit wird der Maßstab jedoch meist als $M = \frac{1}{m}$ angegeben. In diesem Fall nennt man „m“ die Kartenmaßstabszahl. Ein Maßstab ist umso kleiner, je größer seine Maßstabszahl ist. Es können folglich auf einer Karte mit kleinem Maßstab größere Flächen der Erde wiedergegeben werden als auf einer mit großem Maßstab.

Der Maßstab einer Karte kann sowohl numerisch als auch graphisch – mit Hilfe einer Maßstabsleiste – dargestellt werden (siehe Abb. 5). Der Vorteil eines graphischen Maßstabes ist, dass er sich bei Vergrößerungen oder Verkleinerungen der Karte mit verändert. Dies bedeutet, wenn es zu einer Größenänderung einer Karte kommt behält die Maßstabsleiste ihre Gültigkeit. Anders verhält sich der numerische Maßstab. Dieser ist nur für die tatsächliche Karte von Gültigkeit. Verändert man jene, so muss man auch den numerischen Maßstab neu errechnen.

Genau genommen hat der Maßstab – unabhängig ob graphischer oder numerischer – nur entlang gewisser Linien der Karte Gültigkeit. Hiermit wird sich das Kapitel 3.9 (siehe S. 67 ff.) ausführlich befassen.

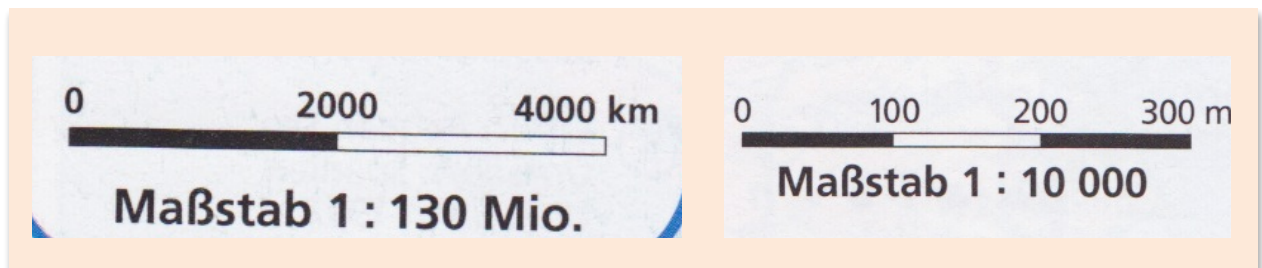


Abbildung 5: Graphischer und numerischer Maßstab in unterschiedlichen Dimensionen
Quelle: Schulatlas Österreich, S. 137 & S. 39 (vergrößert)

3. 5 Orthodrome

Wenn man sich als Laie mit Karten oder kartenverwandten Medien auseinandersetzt, so kann dies neben einem grundsätzlichen Interesse auch praktische Gründe als Ursache haben. So kann man sich beispielsweise die Frage stellen, wo eine Region oder eine Stadt liegt und zur Beantwortung dieser Frage eine Karte heranziehen. Weiters kann eine Karte hilfreich sein, wenn man sich fragt, wie weit ein gewisser Ort von einem anderen entfernt ist. Auch bei der Frage nach Größen von Regionen oder Staatsgebieten kann eine Karte unter Umständen hilfreich sein. Es ist dabei wesentlich festzuhalten, dass eine Karte beim Lösen dieser Probleme hilfreich sein kann, aber nicht hilfreich sein muss. Neben der Möglichkeit des Messens können Flächen und Entfernungen auch auf Basis der dazugehörigen Koordinaten errechnet werden. Der folgende Teil dieser Abhandlung wird sich mit der *kürzesten* Entfernung von Punkten auf der Sphäre beschäftigen und wann diese errechnet

werden soll bzw. wann man diese auch messen darf. Um diese Frage zu motivieren, begeben wir uns auf eine fiktive Autoreise durch Europa. Die nachfolgende Tabelle (Tab. 2) zeigt jeweils Start und Endpunkt der Etappe und die in der Karte gemessene Strecke.

Startpunkt	Endpunkt	Gemessene Strecke (in cm)
Wien	Malaga	12,2
Malaga	Lissabon	3
Lissabon	Amsterdam	10,7
Amsterdam	Königsberg	6,3
Königsberg	Odessa	6,8
Odessa	Dubrovnik	6,4
Dubrovnik	Wien	3,6
Summe der zurückgelegten Etappen		49

Tabelle 2: Stationen und gemessene Strecken der fiktiven Autoreise

Die oben angegebenen Entfernungen basieren auf dem Kartenblatt eines Schulatlas, welches in verkleinerter Form nun dargestellt wird: Abb. 6.



Abbildung 6: Reise durch Europa auf einem Kartenblatt
Karte: Schulatlas Österreich, S. 40, Maßstab 1:17,5 Mio (verkleinert)

Mit den gemessenen Entfernungen und deren Summe von 49 cm kann mit Hilfe des Maßstabes die Naturstrecke dieser Tour errechnet werden. Aus Kapitel 3.4 (siehe S. 22) wissen wir dass gilt: $Naturstrecke = Gemessene\ Strecke \cdot Maßstabszahl$, also (siehe Abb. 6) $Naturstrecke = 49\ (cm) \cdot 17,5\ Mio = \underline{8575\ km}$.

Untersucht man die zurückgelegte Route nun mit Google Earth, so liefert einem das Tool „Pfad“ eine Gesamtstrecke von 8410 km durch alleinige Berechnung mit den jeweiligen Koordinaten. Der Grund für diese Differenz wird in Kapitel 3.9 (siehe S. 67 ff.) geklärt. Wenn man diese Reise mit einem VW Golf Diesel – welcher einen Verbrauch 7,5l/100km vorweist – zurücklegt und die aktuellen Dieselpreise – EUR 1,375 (Stand 25. Aug. 2011 bei Avanti, Gaußplatz 1, 1020 Wien) – berücksichtigt, so ergeben sich folgende Kosten für diese Reise:

Nach Berechnungen auf der Karte: EUR 884,30

Nach Berechnungen mit Google Earth: EUR 867,30

Man sieht, dass die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten einen (kleinen) preislichen Unterschied der Reisekosten von EUR 17 nach sich ziehen. Ändert man allerdings nun die Perspektive von einer Privatperson hin zu einem/r Unternehmer_in, welche_r eine Spedition sein/ihr Eigen nennt, so hat die obige Differenz der Strecken erheblichere Auswirkungen, da ein LKW 30l/100km und mehr verbraucht und die errechnete Strecke mehrmals pro Woche von der ganzen Flotte zurückgelegt wird. Die Frage, wie weit ein Ort von einem anderen Ort de facto entfernt ist, ist also mehr als eine akademische Frage und trifft auf direktem oder indirektem Weg jeden Reisenden und Konsumenten, auch wenn die Berechnung der Distanz hier der jeweiligen Luftlinie folgt.

In der Ebene ist die Entfernung zweier Punkte definiert als die Länge der (geraden) Strecke, welche diese Punkte verbindet. Da wir uns aber auf einer Sphäre befinden, gibt es dort keine Strecken oder Geraden und deshalb muss eine Alternative erarbeitet werden. Die Kugeloberfläche weist eine Krümmung (in einer Richtung) von $K = \frac{1}{r}$ auf, was für unsere weiteren Untersuchungen von Belang ist (siehe Kap. 3.10, S. 72; dort wird die gaußsche Krümmung thematisiert). Die Abhängigkeit der Krümmung vom Radius zeigt, dass mit steigendem Radius die Krümmung kleiner wird. Es seien nun P und Q zwei Punkte auf der Sphäre. Es gibt unendliche viele Ebenen ε , welche diese zwei Punkte beinhalten und die Sphäre schneiden. Der Schnitt dieser Ebenen und der Sphäre liefert nun Kreise mit Radien R wobei gilt $R \leq r$ ($r = Kugelradius$). Die daraus entstehenden Kreise besitzen wiederum eine

Krümmung für die gilt: $K = \frac{1}{R}$. Es folgt daraus, dass die Krümmung eines Kreises umso geringer ist je größer sein Radius ist. Diese Tatsache kann man veranschaulichen, indem man zwei Kreisbögen mit gleicher Länge aber unterschiedlichen Radien untersucht (siehe Abb. 7). Es zeigt sich also, dass mit größer werdendem Radius die Entfernung zweier Punkte immer „gerader“ wird oder „The larger circle is straighter“ (Feeman, S. 23 f. und Klein, S. 280).

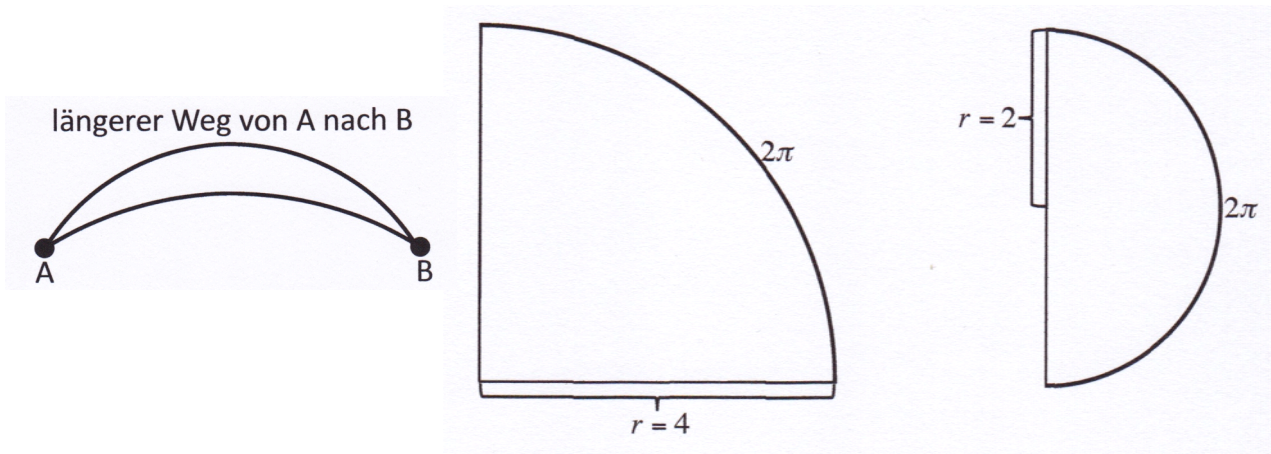


Abbildung 7: Mit größer werdendem Radius wird der Weg von A nach B kürzer. (links) Gleiche Bogenlänge bei unterschiedlichen Radien. Der Halbkreis ist stärker gekrümmt. (Mitte und rechts)

Diesem Prinzip wollen wir nun bei der Berechnung der Entfernung zweier Punkte auf einer Sphäre folgen. Wenn man eine Ebene mit den Punkten P und Q mit der Sphäre schneidet, so erhält man den größten Radius R wenn die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft. Für diesen Kreis gilt $R=r$ – dieser Kreis hat den größtmöglichen Radius auf der Sphäre und wird deshalb als *Großkreis* bezeichnet. Besondere halbe Großkreise sind *Meridiane*. Sie stehen senkrecht auf den Äquator und verlaufen von Pol zu Pol (Abb. 8). Im Gegensatz dazu findet man *Kleinkreise* parallel zum Äquator (er ist der einzige Großkreis auf der Erde, der senkrecht zu den Meridianen steht), sie heißen *Breitenkreise* (Abb. 8). Der Kreisbogen zwischen den Punkten P und Q ist die *kürzeste Verbindung* jener Punkte. Er wird als *Orthodrome* bezeichnet. Orthodrome werden nur bei der sogenannten gnomonischen Projektion (siehe Kapitel 3.8.1.1, S. 54) stets als Geraden abgebildet (Hake at al, S. 62 f. und Feeman, S. 24).

Nun soll die Entfernung dieser beiden Punkte errechnet werden. Es seien $P = (\phi_1, \theta_1)$ und $Q = (\phi_2, \theta_2)$ die Kugelkoordinaten von P und Q . Dabei ist ϕ die *geographische Breite* eines Punktes auf der Erdoberfläche. Sie misst den vertikalen Winkelabstand zum Äquator in

nördlicher oder südlicher Richtung. Der Winkel θ gibt die *geographische Länge* des Punktes an, also den horizontalen Winkelabstand in westlicher oder östlicher Richtung zum Nullmeridian, der durch Greenwich verläuft (Abb. 8). Um die Berechnung beginnen zu können wandeln wir die Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten um (Abb. 9).

$$x = r \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta)$$

Hierfür gilt: $y = r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta)$

$$z = r \cdot \sin(\phi)$$

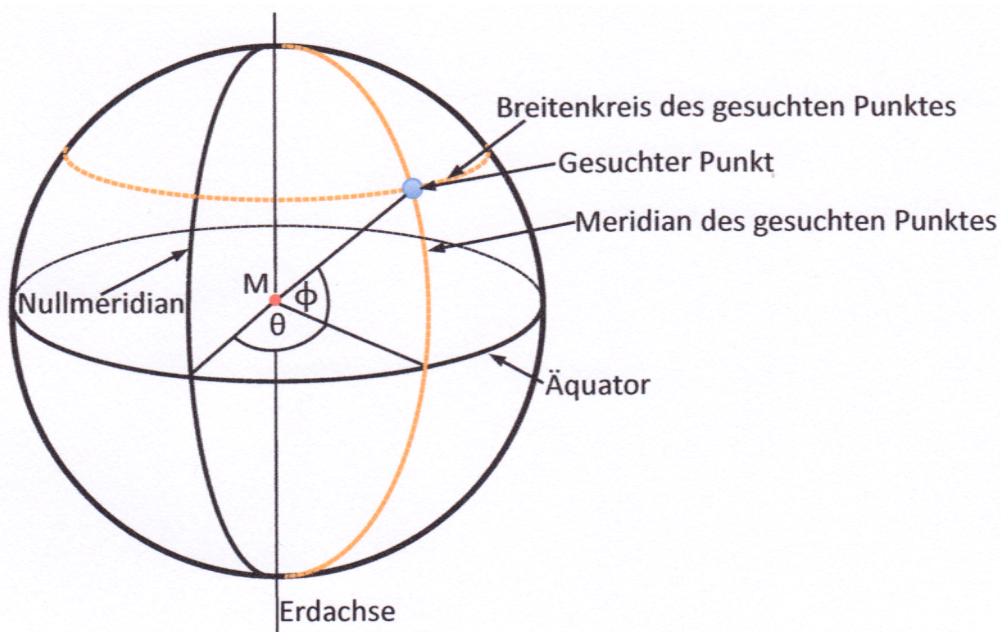


Abbildung 8: Bestimmung der geographischen Koordinaten eines Punktes

Ein **Meridian** ist ein halber Großkreis, welcher von einem geographischen Pol zum anderen verläuft.

Ein **Breitenkreis** ist ein zum Äquator paralleler Kleinkreis der Kugel.

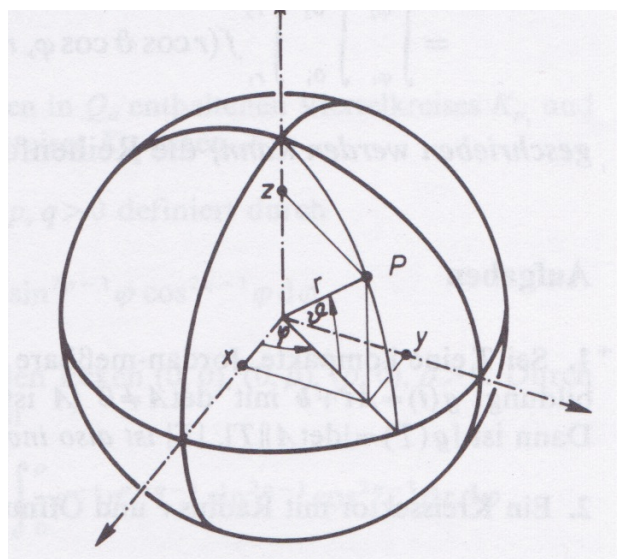


Abbildung 9: Bestimmung der kartesischen Kugelkoordinaten

Hierbei muss ν durch ϕ und φ durch θ ersetzt werden.

Quelle: Heuser, S. 489

Damit ergibt sich für unsere Punkte: $P = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \cdot \cos(\theta_1) \\ \cos(\phi_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ \sin(\phi_1) \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_2) \\ \cos(\phi_2) \cdot \sin(\theta_2) \\ \sin(\phi_2) \end{pmatrix}$. Als

nächstes sollen nun die Pfeile vom Ursprung (Kugelmittelpunkt) zu den jeweiligen Punkten

gebildet werden – also $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \cdot \cos(\theta_1) \\ \cos(\phi_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ \sin(\phi_1) \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_2) \\ \cos(\phi_2) \cdot \sin(\theta_2) \\ \sin(\phi_2) \end{pmatrix}$.

Der Winkel zweier Pfeile ist bestimmt durch den Cosinus des Skalarproduktes der Pfeile gebrochen durch das Produkt der Längen der Pfeile – $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$.

Da die betrachtete Kugel ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Radius 1 besitzt ist der Nenner der vorangegangenen Gleichung stets 1. Es folgt somit für die Punkte P und Q

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos(\phi_1) \cdot \cos(\theta_1) \\ \cos(\phi_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ \sin(\phi_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_2) \\ \cos(\phi_2) \cdot \sin(\theta_2) \\ \sin(\phi_2) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \cos(\phi_1) \cdot \cos(\theta_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_2) + \cos(\phi_1) \cdot \sin(\theta_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot \sin(\theta_2) + \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi_2) \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \cos(\phi_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)) + \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi_2) \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \cos(\phi_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi_2) \\ &\Rightarrow \alpha = \arccos(\cos(\phi_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi_2)). \end{aligned}$$

Damit kann im Allgemeinen die Entfernung d zweier Punkte P und Q mit obigen Koordinaten und Radius R errechnet werden:

$$d = R \cdot \arccos(\cos(\phi_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi_2))$$

bzw.

$$d = \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot \alpha}{360} \quad [\alpha \text{ in Grad}]$$

wobei $\alpha = \arccos(\cos(\phi_1) \cdot \cos(\phi_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\phi_1) \cdot \sin(\phi_2))$ ist

(Hake et al, S. 58, S. 62; Feeman, S. 26 f. und Heuser, S. 489).

Als Beispiel soll nun die kürzeste Entfernung von Wien nach Tokio errechnet werden. Dabei legen wir den Erdradius mit 6371 km fest. Wien hat die geographischen Koordinaten $\phi \approx 48^\circ \text{N}$ und $\theta \approx 16^\circ \text{O}$ und Tokio $\phi \approx 35,5^\circ \text{N}$ und $\theta \approx 139,5^\circ \text{O} \Rightarrow$

$$\alpha = \arccos(\cos(48^\circ) \cdot \cos(35,5^\circ) \cdot \cos(16^\circ - 139,5^\circ) + \sin(48^\circ) \cdot \sin(35,5^\circ))$$

$$\Rightarrow \alpha \approx \arccos(0,131) \approx 82,48^\circ$$

$$\Rightarrow d \approx \frac{2 \cdot 6371 \cdot \pi \cdot 82,48}{360} \approx 9170 \text{ km}$$

Da sowohl Wien also auch Tokio auf der Nordhemisphäre und östlich von Greenwich liegen, sind beim obigen Beispiel die Vorzeichen der geographischen Koordinaten alle positiv. Anders stellt sich die Situation dar, wenn die Orte auf der Nord- und Südhemisphäre liegen sowie östlich und westlich vom Nullmeridian. Auf der Nordhalbkugel sowie östlich von Greenwich werden die Breiten- und Längengrade mit einem positiven Vorzeichen versehen, wogegen Orte auf der Südhalbkugel sowie westlich von Greenwich mit einem negativen Vorzeichen versehen werden.

Es gilt somit: $\phi^\circ \text{n.B.} \triangleq \phi^\circ$ $\phi^\circ \text{s.B.} \triangleq -\phi^\circ$ $\theta^\circ \text{ö.L.} \triangleq \theta^\circ$ $\theta^\circ \text{w.L.} \triangleq -\theta^\circ$.

Exemplarisch für diese Tatsache soll die Entfernung von Rio de Janeiro nach Neu Delhi errechnet werden.

Die geographischen Koordinaten von Rio sind 23° s.B. bzw. 43° w.L. und jene von Neu Delhi sind 29° n.B. und 77° ö.L. Damit ergibt sich folgender Winkel α zwischen diesen beiden Orten: $\alpha = \arccos(\cos(-23) \cdot \cos(29) \cdot \cos(-43 - 77) + \sin(-23) \cdot \sin(29)) \approx \arccos(-0,592)$

$\Rightarrow \alpha \approx 126,3^\circ$. Damit gilt für die Entfernung d von Rio nach Neu Delhi:

$$d \approx \frac{2 \cdot 6371 \cdot \pi \cdot 126,3}{360} \approx 14044 \text{ km.}$$

Nun soll bewiesen werden, dass es keine kürzere Verbindung zweier Punkte auf einer Sphäre gibt, als den Weg entlang eines Großkreises.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat die Sphäre Radius 1 und ihr Mittelpunkt sei der Koordinatenursprung. Weiters sei ein Punkt der Nordpol N und der zweite Punkt (genannt P) besitzt die Koordinaten ϕ_1 und θ_1 (Angaben in Radiant). Die (Winkel-)Entfernung der Punkte entlang des Großkreises ist somit $\frac{\pi}{2} - \phi_1$ (Abb. 33, S. 57). Es ist nun zu zeigen, dass jeder Weg

vom Nordpol zum Punkt P länger oder gleich lang $\frac{\pi}{2} - \phi_1$ ist. Der Weg, welchen wir vom Nordpol zu unserem Punkt P zurücklegen, kann durch die Funktionen $\phi(t)$ und $\theta(t)$ beschrieben werden. Hierbei gibt $\phi(t)$ den Breitengrad wieder, auf welchen wir uns zum

Zeitpunkt t befinden und $\theta(t)$ den Längengrad zum Zeitpunkt t . Es gilt $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$ und $\theta(0)$ ist nicht definiert. Zum Zeitpunkt t befindet man sich also am Punkt $r(t) = [\phi(t), \theta(t)]$ bzw. in

$$\text{kartesischen Koordinaten } r(t) = \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \\ \cos(\phi(t)) \cdot \sin(\theta(t)) \\ \sin(\phi(t)) \end{pmatrix}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t ist die Ableitung des Positionsvektors $r(t)$ – also $r'(t)$:

$$r'(t) = \left\langle -\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \cos \theta(t) - \cos \phi(t) \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}, -\sin \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \sin \theta(t) + \cos \phi(t) \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt}, \cos \phi(t) \frac{d\phi}{dt} \right\rangle.$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist der Betrag des Geschwindigkeitsvektors – also

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \cos^2 \phi(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}, \text{ da gilt:}$$

$$\begin{aligned} \|r'(t)\|^2 &= \sin^2 \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \cos^2 \theta(t) + 2 \sin \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right) \cos \theta(t) \cos \phi(t) \sin \theta(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \cos^2 \phi(t) \sin^2 \theta(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &+ \sin^2 \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta(t) - 2 \sin \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right) \sin \theta(t) \cos \phi(t) \cos \theta(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \cos^2 \phi(t) \cos^2 \theta(t) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos^2 \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= \sin^2 \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \underbrace{(\cos^2 \theta(t) + \sin^2 \theta(t))}_{=1} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos^2 \phi(t) \underbrace{(\sin^2 \theta(t) + \cos^2 \theta(t))}_{=1} + \cos^2 \phi(t) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ &= \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \underbrace{(\sin^2 \phi(t) + \cos^2 \phi(t))}_{=1} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos^2 \phi(t) = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos^2 \phi(t). \end{aligned}$$

Der Weg vom Nordpol zum Punkt P beginnt zum Zeitpunkt $t=0$ und endet zur Zeit t_1 . Somit

$$\text{ergibt sich für den zurückgelegten Weg: } L = \int_{t=0}^{t_1} \|r'(t)\| dt.$$

$$\text{Man beachte, dass gilt: } \|r'(t)\| \geq \left| \frac{d\phi}{dt} \right| \geq -\frac{d\phi}{dt}.$$

$$\Rightarrow L \geq \int_{t=0}^{t_1} -\frac{d\phi}{dt} dt = \phi(0) - \phi(t_1) = \frac{\pi}{2} - \phi_1 \quad \text{q.e.d. (Feeman, S. 25 f.)}$$

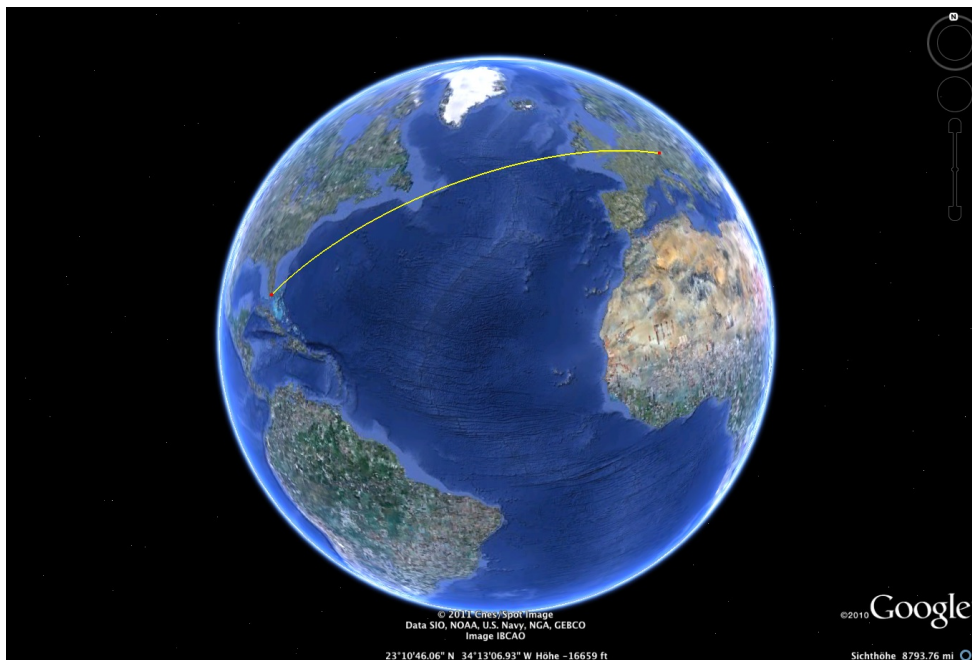


Abbildung 10: Orthodrome von Wien nach Miami
Erstellt mit Google Earth

Man beachte noch, dass das Folgen einer Orthodrome (z. B. auf dem Weg von Wien nach Miami, Abb. 10) nach sich zieht, dass der Kurs ständig korrigiert werden muss. Die nötige Kurskorrektur kann man in einer gnomonischen Karte (weil dort Orthodrome als Geraden erscheinen) ablesen und somit die Orthodrome in jede andere Karte übertragen.

3. 5. 1 Umsetzung im Unterricht

Die Behandlung der Orthodrome bietet eine Vielzahl von Möglichkeiten im fächerübergreifenden Unterricht verwendet zu werden.

Die einfachste Verwendung dieses Themenkomplexes im Unterricht ist das Berechnen von Entfernungen zwischen verschiedenen Orten. Die verwendeten Orte können von der Lehrperson vorgegeben werden oder von den Schüler_innen selbst gewählt werden. Weiters bietet sich an die Orthodrome auch in einer Karte einzuzeichnen. Um dieses Vorhaben in die Tat umsetzen zu können wird es von Nöten sein, die Orthodrome in einer gnomonischen Karte einzuzeichnen – in dieser Abbildung werden Orthodrome als Geraden dargestellt. Die Schnittpunkte der Orthodrome und der Meridiane in dieser Abbildung sollen nun in die verwendete Weltkarte übertragen werden und jene Punkte durch Geraden verbunden

werden. Dadurch zeigt sich schnell, dass die kürzeste Verbindung zwischen Punkten nicht dem intuitiv vermuteten Weg – sprich einer Geraden auf der Karte – entspricht.

Weiters bietet sich an die Entfernung zweier Punkte zu errechnen, welche am selben Breitenkreis liegen und die Orthodrome einzuzeichnen – z. B. von New York nach Neapel (beide ca. 40,5° n. B.). Dadurch zeigt sich den Schüler_innen, dass es von Bedeutung ist, ob man den Weg entlang eines Breitenkreises hinter sich bringt oder ob man entlang einer Orthodrome wandert – in diesem Fall fliegt (vergleiche Abb. 42, S. 72, und Aufgabe 2 auf S. 71).

Beispiel

Es soll nun die Länge der Orthodrome zwischen Wien und Moskau berechnet werden. Die geographischen Koordinaten dieser Städte sind wie folgt:

	ϕ	θ
Wien	48° n. B.	16° ö. L.
Moskau	55° n. B.	38° ö. L.

die Koordinaten in Radiant sind dann:

$$\left(\alpha[\text{rad}] = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha[\text{Grad}] \right)$$

Wien	0,84	0,28
Moskau	0,96	0,66

hiermit ergeben sich folgende kart. Koordinaten, wobei der Erdradius mit 6371 km festgelegt sei.

	Wien	Moskau
X	4098	2880
Y	1175	2250
Z	4735	5219

Diese Koordinaten sind gleichzeitig die Richtungsvektoren vom Erdmittelpunkt zu den

einzelnen Städten. Es gilt somit: $\vec{OW} = \begin{pmatrix} 4098 \\ 1175 \\ 4735 \end{pmatrix}$ und $\vec{OM} = \begin{pmatrix} 2880 \\ 2250 \\ 5219 \end{pmatrix}$.

Der Winkel, welchen diese beiden Städte im Erdmittelpunkt einschließen, kann mit der

Formel $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ errechnet werden. Für die Städte Wien und Moskau ergibt dies

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4098 \\ 1175 \\ 4735 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2880 \\ 2250 \\ 5219 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4098 \\ 1175 \\ 4735 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2880 \\ 2250 \\ 5219 \end{pmatrix}} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{\begin{pmatrix} 4098 \\ 1175 \\ 4735 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2880 \\ 2250 \\ 5219 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4098 \\ 1175 \\ 4735 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2880 \\ 2250 \\ 5219 \end{pmatrix}} \right) = 15,29^\circ$$

Die Entfernung von Wien nach Moskau ist somit $\frac{\alpha}{360} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \frac{15,29}{360} \cdot 2 \cdot 6371 \cdot \pi \approx 1700 \text{ km}$.

Die direkte Verbindung von Wien nach Moskau – also durch die Erde hindurch – besitzt den

Richtungsvektor $\vec{WM} = \begin{pmatrix} -1218 \\ 1075 \\ 484 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich für diese Strecke eine Länge von

$|\vec{WM}| \approx 1695 \text{ km}$. Es zeigt sich, dass der Weg durch die Erde hindurch um 5 km kürzer als jener auf der Oberfläche unseres Planeten ist (Abb. 11).

In Punkt 3.7.2.1 (siehe S. 50) wird die Berechnung der Länge einer Orthodrome nochmals unter Zuhilfenahme von Microsoft Excel behandelt.

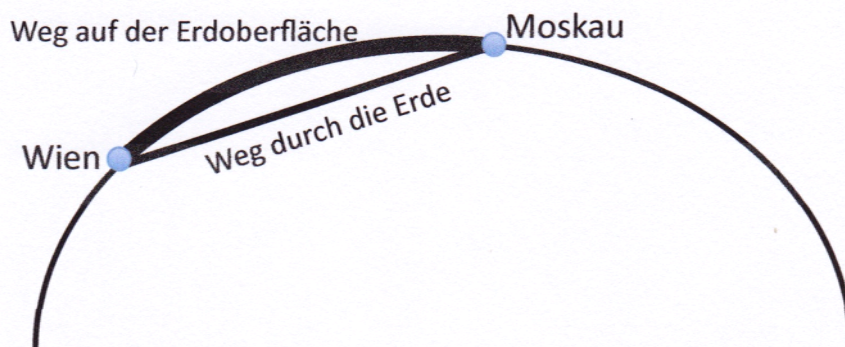


Abbildung 11: Vergleich von Wegen auf der Erdoberfläche zu jenen durch die Erde

3. 6 Loxodrome

Möchte man eine Strecke zwischen den Punkten X und Y auf der Erdoberfläche entlang einer konstanten Kompasspeilung zurücklegen, so bewegt man sich auf einer *Loxodrome* (siehe Abb. 12 bzw. Abb. 13). Im Allgemeinen bildet diese Verbindung nicht die kürzeste Strecke zwischen zwei Punkten – Ausnahmen bilden Punktepaare welche am selben Meridian oder am Äquator liegen. Hierbei fallen die Loxodrome mit den Orthodromen zusammen. Von großer Bedeutung waren die Loxodrome vor allem in der historischen Seefahrt, da man die Schiffe meist unter konstanter Kompasspeilung navigierte. Das *Azimut* α – konstante Kompasspeilung – zwischen zwei Orten $X = (\phi_1, \theta_1)$ und $Y = (\phi_2, \theta_2)$ kann wie folgt errechnet werden:

$$\tan(\alpha) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\ln\left(\tan\left(45^\circ + \frac{\phi_2}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(45^\circ + \frac{\phi_1}{2}\right)\right)} \quad (\text{Hake et al, S. 63}).$$

3. 6. 1 Umsetzung im Unterricht

Die Auseinandersetzung mit Loxodromen ermöglicht nur eine begrenzte Umsetzung im fächerübergreifenden Unterricht, weswegen hierauf nur kurz eingegangen wird. Die Schüler_innen sollen mit der obigen Formel die Loxodrome zwischen zwei Orten errechnen. Hierfür eignen sich vor allem Hafenstädte, welche durch einen Ozean getrennt sind – beispielsweise: Dakar – New York, Kapstadt – Rio de Janeiro oder Perth – Mogadischu. Den Schüler_innen kann noch mitgeteilt und gezeigt werden, dass, wenn man einer Loxodrome nicht in einer Haupthimmelsrichtung folgt, man im Grenzfall einen Pol erreicht (Abb. 12).

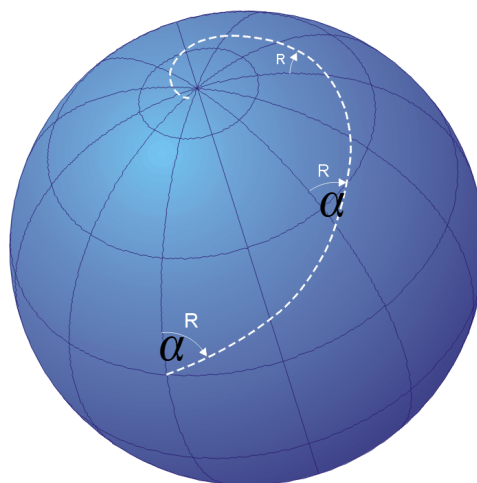


Abbildung 12: Loxodrome welche sich einem Pol nähert

Quelle: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/archive/d/d6/20070925180128!Loxodrome.png>
Stand: 17.08.2011

Beispiel

Aus der obigen Auflistung soll nun beispielhaft das Azimut zwischen Perth und Mogadischu errechnet werden. Die Koordinaten dieser beiden Städte sind wie folgt:

Perth (32° s. B. und 116° ö. L.)

Mogadischu (2° n. B. und 45° ö. L.)

Mittels $1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57,3^\circ$ bzw. $1^\circ \approx 0,0175 \text{ rad}$ lassen sich diese Koordinaten einfach und

schnell in Radiant darstellen. Hierbei gilt dann:

Perth (-0,56; 2,02)

Mogadischu (0,035; 0,785)

Eingesetzt in die obige Formel ergibt sich: $\alpha = \arctan \left(\frac{0,785 - 2,02}{\ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{0,035}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{-0,56}{2}\right)} \right)} \right)$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan \left(\frac{-1,235}{\ln \frac{\tan(0,8029)}{\tan(0,505)}} \right) = -63,2^\circ.$$

In Abbildung 13 ist α eingezeichnet. Hält man also einen Winkel von $63,2^\circ$ zur nördlichen Richtung, dann kommt man von Perth nach Mogadischu.



Abbildung 13: Loxodrome zwischen Perth und Mogadishu
 Karte: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/Mercator-proj.png>
 Stand: 24.08.2011

3. 7 Winkel

In der Geographie bzw. in der Navigation werden Winkel immer zwischen zwei Punkten und gegen eine vordefinierte Richtung gemessen. In den meisten Fällen ist diese vorgegebene Richtung die magnetische Nordrichtung. Gemessen kann der Winkel mit einer Bussole oder einem Theodoliten werden. Der hierbei erlangte Winkel ist das Azimut der Verbindung zweier Punkte gegen die Nordrichtung (siehe Abb. 13). Winkel werden so immer entsprechend der Loxodrome gemessen. Für diese Arbeit von größerer Bedeutung ist jedoch, wie der Winkelbegriff der Ebene auf die Sphäre transformiert werden kann (Hake et al, S. 303 f.).

In der Ebene wird der Winkel von zwei Halbgeraden, welche einen gemeinsamen Punkt haben, begrenzt. Die Strecke ist in der Ebene die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Wie bereits in Kapitel 3.5 (siehe S. 25) erwähnt, kann es auf einer Kugeloberfläche keine Geraden oder Halbgeraden geben. Anstelle der Strecken als kürzesten Verbindungen treten bei der Geometrie der Sphäre die Großkreisbögen (Kapitel 3.5, S. 23 ff.). Auf der Sphäre wird ein Winkel von zwei Großkreisbögen, welche einen gemeinsamen Punkt haben, begrenzt. An dieser Stelle ist zum ersten Mal deutlich ersichtlich, dass die Geometrie der Kugel nicht identisch mit jener der Ebene ist. Können in der Ebene zwei Geraden unterschiedliche Lagen zueinander haben – nämlich parallel oder schneidend in einem Punkt – so können zwei

unterschiedliche Großkreise auf der Sphäre *nur eine* gegenseitige Lage besitzen: Zwei Großkreise einer Kugel müssen einander immer in zwei *antipodalen* Punkten schneiden. Dies hat zur Folge, dass das Parallelenpostulat von Euklid auf der Sphäre nicht gehalten werden kann. Die Folgen hiervon wird man in den nachfolgenden Abhandlungen öfters erkennen können.

Parallelenaxiom nach Euklid: „Endlich, wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“ (Euklid nach Klein, S. 271 f.)

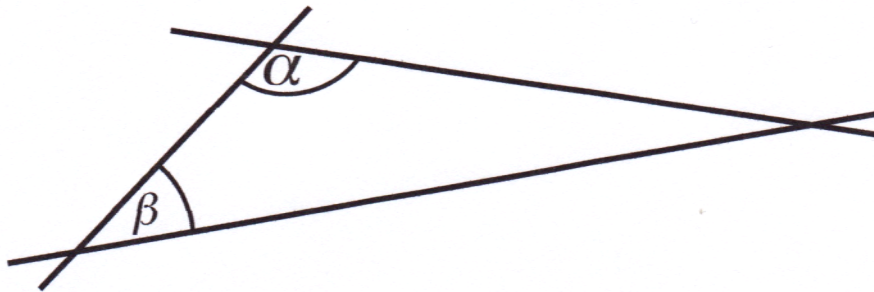


Abbildung 14: Veranschaulichung des „Parallelenaxioms nach Euklid“: $\alpha + \beta < 180^\circ$

Parallelenaxiom „der Moderne“: „Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g mit $P \notin g$ existiert genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \{\}$.“

www2.math.uni-wuppertal.de/~lind/NE_Skript.pdf – Stand: 11. August 2011

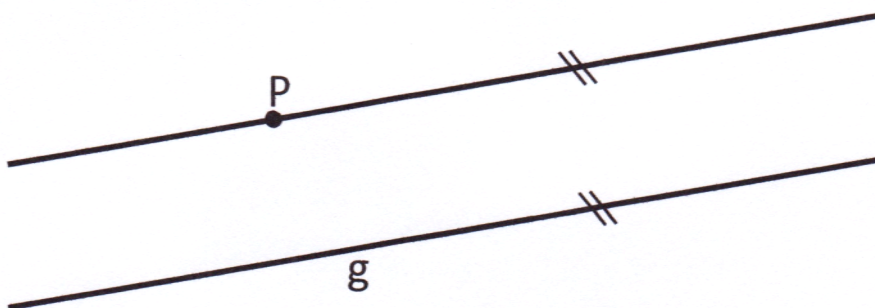


Abbildung 15: Veranschaulichung des „Parallelenaxioms der Moderne“

Es soll nun gezeigt werden, dass die obigen Axiome äquivalent sind:

Parallelenaxiom nach Euklid \rightarrow Parallelenaxiom „der Moderne“

Schon Euklid beweist im 1. Buch, dass das Parallelenaxiom nach Euklid impliziert: Es gibt mindestens eine Parallele. Man erhält sie indem man die Normale auf P durch g zieht und dort wieder die Normale errichtet.

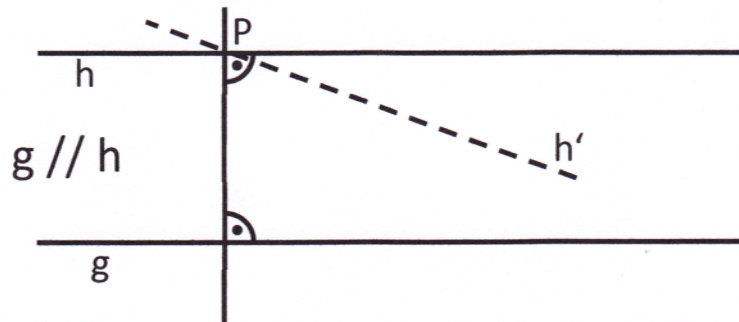


Abbildung 16: Es kann nur eine parallele Gerade zu g geben, welche durch den Punkt P verläuft

Eine zweite parallele Gerade h' kann es nicht geben, weil dann auf einer Seite die Summe der inneren Winkel kleiner als 180° ist.

Es gibt also genau eine Parallele und damit auch "höchstens" eine.

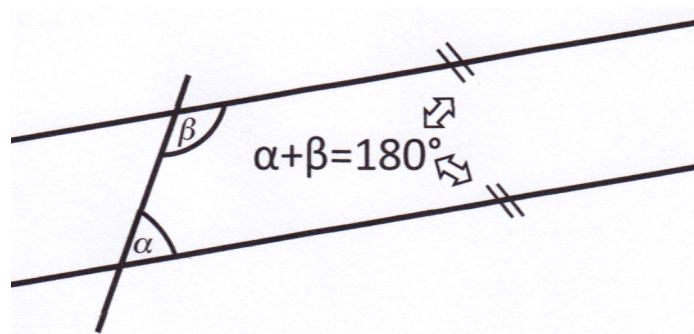


Abbildung 17: Parallele Geraden geschnitten von einer weiteren Geraden

Parallelenaxiom „der Moderne“ \rightarrow Parallelenaxiom nach Euklid

Aus dem Parallelenaxiom der Moderne folgt, dass die Winkelsumme im Dreieck stets 180° ist.

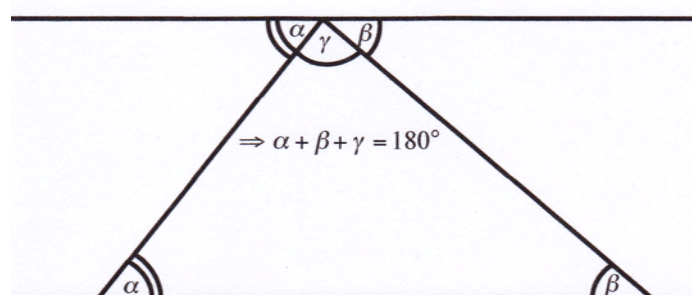


Abbildung 18: Winkelsumme im ebenen Dreieck

Würde das Parallelenaxiom nach Euklid nicht gelten, folgt in beiden Fällen (die zweite Gerade schneidet nicht oder auf der anderen Seite), die Existenz eines Dreiecks mit Winkelsumme $>180^\circ$.

- Kein Schnittpunkt $\rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \rightarrow g \parallel h$

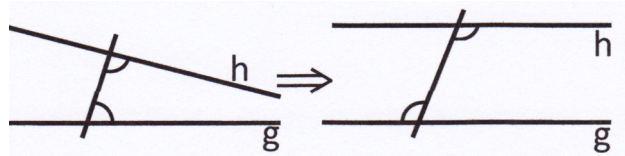


Abbildung 19a: Zur Veranschaulichung der Äquivalenz der obigen Parallelenaxiome

- Schnittpunkt

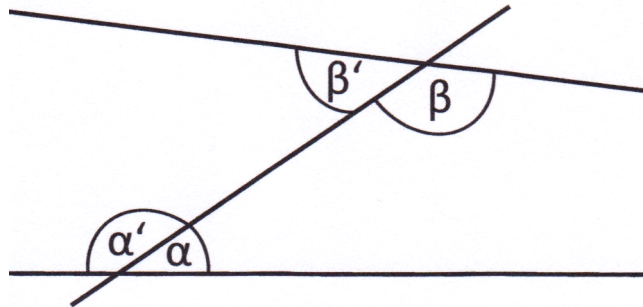


Abbildung 19b: Zur Veranschaulichung der Äquivalenz der obigen Parallelenaxiome

Es gibt einen Schnittpunkt \rightarrow Dreieck mit Winkelsumme $> 180^\circ$, weil

$$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow \underbrace{(180^\circ - \alpha)}_{\alpha'} + \underbrace{(180^\circ - \beta)}_{\beta'} = 360^\circ - (\alpha + \beta) > 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$



Abbildung 20: Sphärischer Winkel zwischen Miami - Wien - Recife
Erstellt mit Google Earth

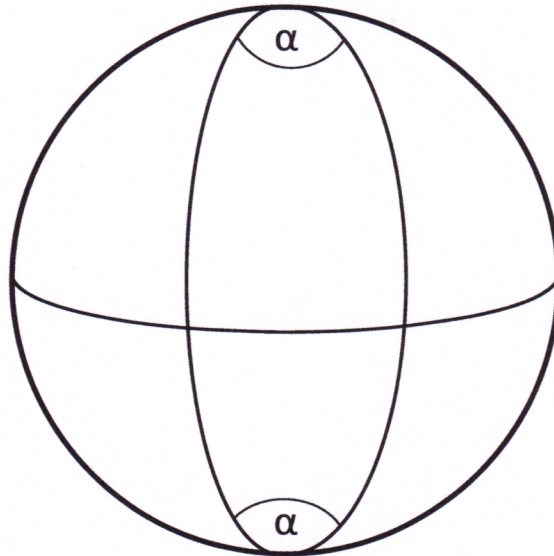


Abbildung 21: Sphärisches Zweieck mit Winkel α

Um nun die identischen Winkel zu bestimmen, welche zwei Großkreise miteinander einschließen, erinnert man sich an die Art und Weise wie jene erzeugt werden. Einen Großkreis einer Sphäre erhält man, wenn man eine Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel verläuft, mit der Kugel schneidet. Zwei unterschiedliche Großkreise müssen also per Definition in zwei unterschiedlichen Ebenen liegen, welche beide den Mittelpunkt der Kugel beinhalten. Schneidet man nun diese Ebenen, so erhält man eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Kugel sowie durch die antipodalen Punkte der Großkreise auf der Kugel verläuft. Der Schnittwinkel dieser Ebenen ist gleich den Winkeln, welche die Großkreise in ihren Antipoden aufweisen (Abb. 20). Dieser Winkel α kann Werte zwischen 0° und 180° einnehmen – also $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Das somit aus den Großkreisböden entstandene Zweieck hat also die Winkelsumme $2 \cdot \alpha$ (Abb. 21). Daraus folgt, dass die Winkelsumme eines sphärischen Zweiecks einen Wert des offenen Intervalls $]0^\circ; 360^\circ[$ annehmen muss (Feeman, S. 29 f.).

3. 7. 1 Dreiecke auf der Sphäre

Ähnlich wie bei der Berechnung von Entfernungen auf der Sphäre im Vergleich zur Entfernung anhand einer Kartenmessung, kann nun auch bei Flächen vorgegangen werden. Als Referenzfläche hierfür bietet sich das Staatsgebiet von Wyoming (USA) an, da jenes nur von Längen- und Breitenkreisen begrenzt wird. Nimmt man eine Schulatlas-Karte als Basis für die Berechnung, so ergibt sich folgende Fläche (Abb. 22).

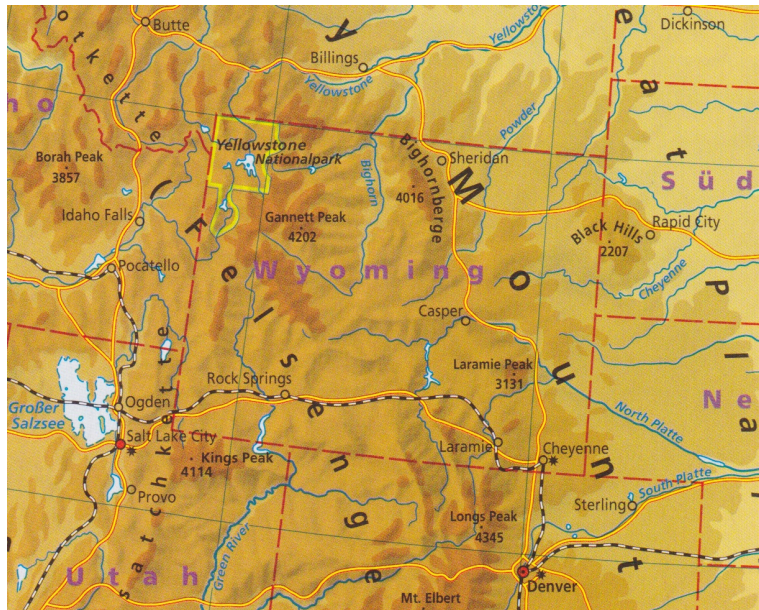


Abbildung 22: Staatsgebiet von Wyoming
Quelle: Schulatlas Österreich, S. 96, Maßstab 1:10 Mio. (vergrößert)

In der Karte weist dieses Gebiet eine Länge von 5,6 cm und eine Breite von 4,3 cm auf. Berechnet man nun mit dem bereitgestellten Maßstab die Naturstrecken hiervon, so erhält man für das Staatsgebiet von Wyoming eine Länge von 560 km und eine Breite von 430 km. Diesen Daten zur Folge ist das (ebene!) Staatsgebiet 240.800 km^2 groß. De facto beträgt die Fläche von Wyoming jedoch $251.500,8 \text{ km}^2$

(www.census.gov/population/www/censusdata/files/90den_stco.txt – Stand 25.8.2011).

Es ist also die vom US-Zensus ausgewiesene Fläche um $10.700,8 \text{ km}^2$ oder 4,44% größer als jene durch Kartenmessung. Der Grund hierfür wird in Kapitel 3.9, S. 67, erklärt.

Wendet man nun dieses Fehlermaß von 4,44% (dazu müsste man den Kartenausschnitt aus Abb. 22 stark vergrößern – das Fehlermaß ändert sich dabei nicht) auf den österreichischen Immobilienmarkt an, so ergeben sich nicht unwesentliche Preisunterschiede für ein Grundstück.

Angenommen man möchte in Neusiedl am See (Burgenland) ein Grundstück für ein Einfamilienhaus kaufen, welches nach Kartenberechnungen 1.000m^2 groß ist. Bei gleichem Fehlermaß wie bei der Karte der USA wäre dieses Grundstück real $1.044,4\text{m}^2$ groß. Bei Quadratmeterpreisen zwischen EUR 130 und EUR 250 zieht dieser flächenmäßige Unterschied einen preislichen Unterschied zwischen EUR 5.772 und EUR 11.100 nach sich. Noch deutlicher werden die preislichen Unterschiede, wenn man ein flächengleiches Grundstück in St. Anton am Arlberg (Tirol) erwerben möchte. Hier ergeben sich monetäre Abweichungen zwischen EUR 48.840 und EUR 66.600, da sich in jener Gemeinde der Quadratmeterpreis zwischen EUR 1.100 und EUR 1.500 beläuft.

(Quadratmeterpreise für Neusiedl am See (Burgenland) und St. Anton am Arlberg (Tirol) nach: <http://www.gewinn.com/immobilien/preisuebersichten/oesterreich-immobilienpreisuebersicht-2011/> - Stand 25.8.2011, nicht öffentliche Quelle)

Offenbar führt die Flächenberechnung von Gebieten auf der Erde unter Zuhilfenahme einer Karte zu unbefriedigenden Ergebnissen. Aus diesem Grund wird sich der nachfolgende Teil dieser Arbeit mit Dreiecken auf der Kugel befassen und wie man deren Flächen errechnet. Denn mit Hilfe von Dreiecken können andere Flächen (näherungsweise) ausgelegt werden. Ein sphärisches Dreieck entsteht durch die Verbindung von drei Punkten auf der Sphäre – wir werden diese Punkte mit A , B und C bezeichnen – durch Großkreisbögen. Die Winkel, welche die Großkreisbögen in den Punkten einschließen, werden mit α , β und γ bezeichnet. Den obigen Untersuchungen zur Folge muss jeder dieser Winkel echt kleiner als 180° sein. Anders als in der ebenen Geometrie, wo die Winkelsumme eines jeden Dreiecks 180° beträgt, stellt sich die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks dar. Dies soll nachfolgend im Fokus der Untersuchung stehen.

Das untersuchte Dreieck soll ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen Pol als Scheitel haben – diesen Punkt bezeichnet man mit C und den dazugehörigen Winkel mit γ . Dies hat zur Folge, dass zwei Seiten des Dreiecks von Meridianen (Abb. 8, S. 27) gebildet werden. Der Einfachheit halber soll die dritte Dreiecksseite der Äquator sein (siehe Abb. 23). Der Äquator und die Meridiane schneiden einander in den Punkten A und B unter den Winkeln α und β . Der Winkel zwischen Äquator und jedem Meridian ist gleich 90° – somit folgt $\alpha = \beta = 90^\circ$. Da die Punkte A , B und C ein Dreieck aufspannen muss der Winkel γ größer als Null sein. Somit gilt für die Innenwinkelsumme dieses Dreiecks $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$. Hätte man anstatt des Äquators einen anderen Großkreis als dritte Seite des Dreiecks gewählt, so hätte dies die darauf basierenden Folgerungen nicht beeinflusst. Denn die so entstandene Winkelsumme

von α und β hätte wiederum 180° ergeben, da diese Winkel supplementär sein müssen. Den Wert $\varepsilon := \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$, um welchen die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks größer ist als jene des planeren Dreiecks, nennt man *Exzess*. Die Frage ist nun, wie groß dieser Exzess bzw. wie groß die Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks sein kann. Es wurde bereits oben erwähnt, dass der Winkel zwischen zwei Großkreisen kleiner als 180° sein muss (siehe S. 40). Daraus ergibt sich, dass die Winkelsumme kleiner als 540° sein muss. Für ein sphärisches Dreieck muss also $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$ gelten (Feeman, S. 29 f. und Klein, S. 200 f.).

Welcher Zusammenhang zwischen Dreiecksfläche und Exzess des Dreiecks vorherrscht soll nun untersucht werden. Hierzu nehmen wir wieder das Dreieck zur Hand, welches von zwei Meridianen – welche einander unter dem Winkel γ schneiden – und dem Äquator begrenzt wird.

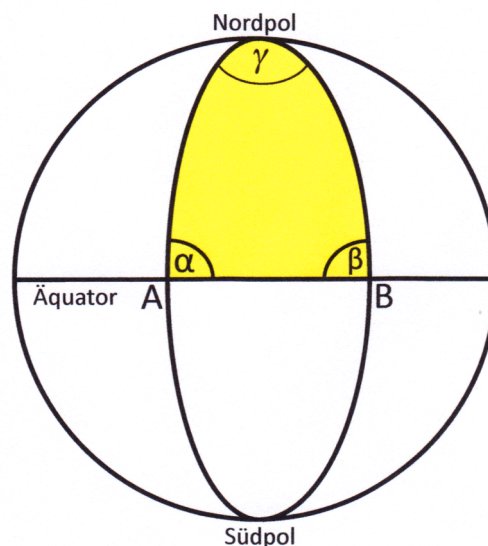


Abbildung 23: Fläche (gelb), welche von zwei Meridianen und dem Äquator begrenzt wird

Wir wissen, dass die Kugeloberfläche $4 \cdot \pi \cdot r^2$ ist. Daraus folgt, dass die Oberfläche einer Hemisphäre $2 \cdot \pi \cdot r^2$ ist. Der Winkel γ , welcher von den zwei Meridianen eingeschlossen wird, muss nach obigen Überlegungen $< 180^\circ$ sein. Die von diesen Meridianen begrenzte Kugeloberfläche muss also $\frac{\gamma}{360^\circ} = \frac{\gamma}{2\pi}$ der gesamten Kugeloberfläche sein. Für das Gebiet

begrenzt von zwei Meridianen und dem Äquator ergibt sich also eine Oberfläche von $\frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 = \gamma \cdot r^2$ (siehe Abb. 23). Der Exzess dieses sphärischen Dreiecks

beträgt γ° , weil wie gesagt, die Winkel zwischen Meridianen und Äquator immer 90° sind. Es kann also hierbei ein linearer Zusammenhang zwischen Exzess und Fläche eines (bestimmten) Dreiecks festgestellt werden.

Die Herleitung der Flächenformel eines sphärischen Dreiecks kann jedoch auch anderweitig erfolgen. Es seien P , Q und R die Eckpunkte eines allgemeinen sphärischen Dreiecks. Die dazugehörigen Winkel seien φ , ψ und ζ (Abb. 24).

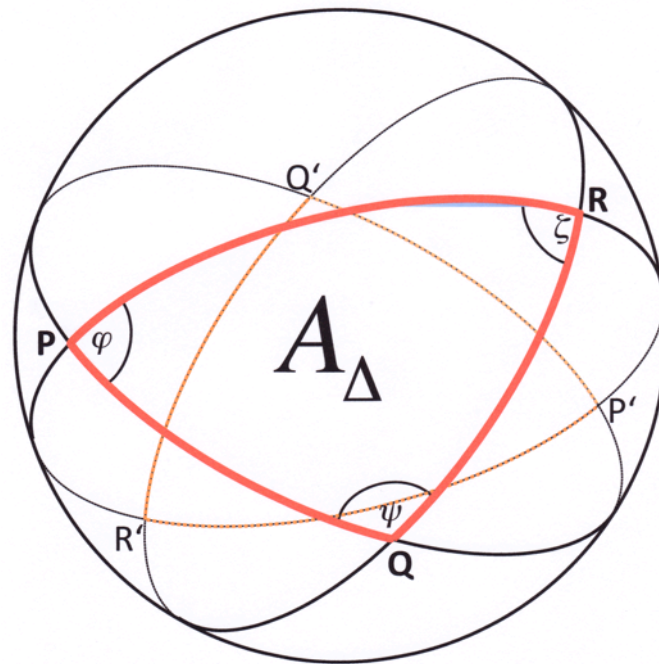


Abbildung 24: Sphärisches Dreieck mit den Eckpunkten P , Q und R

Die Oberfläche, welche von zwei Großkreisen, die einander im Winkel φ schneiden, begrenzt wird, beträgt $\frac{\varphi}{180^\circ} = \frac{\varphi}{\pi}$ der gesamten Sphäre – das Doppelte des Gebietes, das zwei Meridiane im selben Winkel zueinander begrenzen. Gleiches gilt für die Oberflächen zwischen zwei einander im Winkel ψ bzw. ζ schneidenden Großkreisen. Fügt man nun die so entstandenen Zweiecke zusammen, so wird das Komplement der Dreiecke genau einmal überdeckt. Die Dreiecksflächen – die Dreiecke haben die Eckpunkte P , Q und R sowie P' , Q' , und R' (siehe Abb. 24) – werden jedoch je dreimal von den Zweiecken überdeckt. Die Fläche der jeweiligen Zweiecke wird nun mit A_φ , A_ψ bzw. A_ζ bezeichnet. A_Δ sei die gesuchte Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten P , Q und R (siehe Abb. 24, rotes Dreieck) und A_S die

Fläche der Sphäre. Aus den obigen Bemerkungen folgt, dass $A_\varphi + A_\psi + A_\xi - A_S = 4 \cdot A_\Delta$ gilt.

Somit folgt $A_\Delta = \frac{A_\varphi + A_\psi + A_\xi - A_S}{4}$ was gleich der obigen Formel ist:

$$A_\Delta = \frac{\frac{\varphi}{\pi} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{\psi}{\pi} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 + \frac{\xi}{\pi} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \pi \cdot r^2}{4} = \frac{\varphi \cdot 4 \cdot r^2 + \psi \cdot 4 \cdot r^2 + \xi \cdot 4 \cdot r^2 - 4 \cdot \pi \cdot r^2}{4}$$

$$= \frac{4 \cdot r^2 \cdot \left(\overbrace{\varphi + \psi + \xi}^{\pi + \varepsilon} - \pi \right)}{4} = r^2 \cdot (\pi + \varepsilon - \pi) = r^2 \cdot \varepsilon \text{ (Klein, S. 201).}$$

Damit folgt, dass die Oberfläche von verschiedenen Dreiecken einer Sphäre dann und nur dann gleich ist, wenn deren Winkelsumme gleich ist (Feeman, S. 30 f. und Liebmann, S. 41 f.).

Das eben behandelte Thema zeigt, dass es nicht möglich ist, eine längentreue und konforme (winkeltreue) Abbildung (siehe S. 52) einer Sphäre zu erzeugen. Denn wäre dies möglich, so müsste die Karte die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten auf der Sphäre auch als kürzeste Verbindungen wiedergeben. Es würden also Großkreise der Sphäre als Geraden in der Karte abgebildet werden. Zieht man nun ein beliebiges sphärisches Dreieck für seine Untersuchungen heran, so müssen die Seiten dessen Bildes Geraden sein. Die Winkelsumme des planaren Dreiecks ist aber gleich 180° . Dies steht im Widerspruch zur obigen Erkenntnis, dass die Winkelsumme eines jeden sphärischen Dreiecks $180^\circ + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0^\circ$ sein muss. Es wurde also gerade gezeigt, dass es keine längen- und winkeltreue Karte geben kann (Feeman, S. 31).

3. 7. 2 Umsetzung im Unterricht

Das eben behandelte Themengebiet liefert eine Vielzahl von Umsetzungsmöglichkeiten im Unterricht. Hiervon soll nun ein kurzer Überblick gegeben werden.

Berechnungen:

Die Schüler_innen sollen mit dem generierten Wissen Flächenberechnungen von Dreiecken auf einer Sphäre vornehmen. Um dies bewerkstelligen zu können sind jedoch einige Vorarbeiten der Schüler_innen zu tätigen. In einem ersten Schritt müssen die Schüler_innen die geographischen Koordinaten der gegebenen Eckpunkte in kartesische Koordinaten umwandeln. Wie hierbei vorzugehen ist wurde bereits in dieser Arbeit beschrieben (siehe S.

27). Dann müssen drei Ebenen erstellt werden, welche je zwei Eckpunkte des Dreiecks sowie den Mittelpunkt der Kugel beinhalten. Im Anschluss daran sind die drei Schnittwinkel der Ebenen zu berechnen. Erst wenn diese Vorarbeiten getätigt wurden kann man sich der eigentlichen Dreiecksberechnung zuwenden.

Beispiel.

A) *Ermittle die Koordinaten von Graz, Linz und Wien und berechne den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks, welches diese drei Städte als Eckpunkte hat!*

B) *Ermittle die Koordinaten von Moskau, Neu Delhi und Peking und berechne den Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks, welches diese drei Städte als Eckpunkte hat!*

Im Anschluss daran sind die Flächeninhalte dieser Dreiecke direkt aus der Karte zu berechnen (siehe S. 41).

Bei diesen Berechnungen wird einigen Schüler_innen auffallen, dass mit kleiner werdenden Maßstab der relative Unterschied zwischen den beiden oben angeführten Berechnungsmöglichkeiten (sphärisches Dreieck versus ebenes Dreieck) größer wird. Dies kann dadurch begründet werden, dass im kleinen Maßstab – also wenn große Ausschnitte der Erde abgebildet werden – der Abstand zwischen Bezugsfläche und Erdoberfläche größer ist, als wenn kleine Ausschnitte der Erde in einer Karte – in diesem Fall eine Karte mit großem Maßstab – dargestellt werden (siehe S. 22 f.). Eine weitere Ursache für die relativ größer werdenden Unterschiede bei den Berechnungen mit kleiner werdenden Kartenmaßstäben ist der (nicht konstante) Maßstabsfaktor der Karten (siehe S. 67 ff.). Es bietet sich auch an Berechnungen an unterschiedlichen Karten vorzunehmen, welche den selben Maßstab besitzen und welche den selben Ausschnitt der Erde darstellen. Der Unterschied der verwendeten Karten soll deren zugrundeliegende Projektion sein (siehe Kapitel 3.8, S. 51 ff.). Hierbei wird man erkennen können, dass unterschiedliche Projektionen ein unterschiedliches Fehlermaß nach sich ziehen.

Mit dem Wissen um die Berechnung von sphärischen Dreiecken können jedoch auch andere geometrische Formen berechnet werden. Nach einer gewissen Auseinandersetzung und Festigung der sphärischen Dreiecke kann den Schüler_innen auch die Aufgabe gestellt werden, den Flächeninhalt eines allgemeinen *sphärischen Vierecks* zu berechnen. In der ersten Phase der Behandlung dieses neuen Problems soll den Schüler_innen durch die

Lehrperson nicht geholfen werden. Den Lernenden soll die Möglichkeit gegeben werden, einen Teil der sphärischen Geometrie selbstständig zu erkunden. Es kann davon ausgegangen werden, dass ein Schüler bzw. eine Schülerin diesen gordischen Knoten mit mathematischen Mitteln durchschlägt. Die Lösung des Problems ist, dass man das Viereck entlang einer Diagonalen – welche wiederum ein Großkreisbogen ist – in zwei Dreiecke teilt. Danach erfolgt die Berechnung wie bereits erläutert.

Nun können die Schüler_innen auch Berechnungen von Vierecken vornehmen. Aufgaben hierzu könnten wie folgt gestaltet sein.

Beispiel.

- A) Ermittle die Koordinaten von Graz, Linz, Salzburg und Wien und berechne den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks, welches diese vier Städte als Eckpunkte hat!*
- B) Ermittle die Koordinaten von Los Angeles, Jacksonville (Florida), Boston und Seattle und berechne den Flächeninhalt des sphärischen Vierecks, welches diese vier Städte als Eckpunkte hat!*

Im Anschluss daran sind die Flächeninhalte dieser Vierecke direkt aus der Karte zu berechnen.

Mit dem erlangten Wissen können nun die Schüler_innen den Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks berechnen. Es ist ab nun möglich die Fläche eines Staatsgebietes sehr genau zu approximieren. Die Schüler_innen sollen nun das Gebiet eines beliebigen Staats berechnen. Sie sollen bei dessen Wahl jedoch darauf achten, dass sich der Grenzverlauf für ihre Berechnungen als günstig erweist. Die Wahl der Referenzpunkte und der dadurch entstehenden Dreiecke soll den Schüler_innen selbst überlassen sein.

Noch wichtiger als die konkreten Berechnungen auf der Sphäre ist jedoch, dass man hierbei den Schüler_innen das mathematische Arbeiten und Argumentieren *lege artis* vermitteln kann. Die Schüler_innen können beim Arbeiten mit sphärischen Dreiecken erfahren wie man mathematisch argumentiert und schlussfolgert (es gibt keine längen- und winkeltreuen Abbildungen der Sphäre in die Ebene [siehe S. 45]; Flächeninhalt eines (bestimmten) sphärischen Dreiecks auf zwei Arten herleiten [siehe S. 42 ff.]). Weiters können sie hierbei dem mathematischen Beweisen wesentlich näher kommen als dies mit in Schulbüchern vorgefertigten Beweisen möglich ist. Da davon ausgegangen werden kann, dass sich jene Schüler_innen für das Wahlpflichtfach Mathematik melden, welche am mathematischen

Arbeiten und/oder Denken interessiert sind, kann ihnen hiermit ein kleiner Ausblick auf das Mathematikstudium gegeben werden.

Beispiel

Es soll nun beispielhaft die Fläche des sphärischen Dreiecks berechnet werden, welches die Städte Wien, Moskau und Istanbul als Eckpunkte besitzt (Abb. 25, S. 49).

Die geographischen Koordinaten dieser Städte sind wie folgt:

Wien	48° n. B.	16° ö. L.	
Moskau	55° n. B.	38° ö. L.	die Koordinaten in Radiant sind dann:
Istanbul	41° n. B.	29° ö. L.	

	ϕ	θ	
Wien	0,84	0,28	
Moskau	0,96	0,66	hiermit ergeben sich mit Radius 6371km
Istanbul	0,72	0,51	folgende kart. Koordinaten:

	Wien	Moskau	Istanbul
X	4098	2880	4205
Y	1175	2250	2331
Z	4735	5219	4180

Diese Koordinaten sind gleichzeitig die Richtungsvektoren vom Erdmittelpunkt zu den

einzelnen Städten. Es gilt somit: $\vec{OW} = \begin{pmatrix} 4098 \\ 1175 \\ 4735 \end{pmatrix}$, $\vec{OM} = \begin{pmatrix} 2880 \\ 2250 \\ 5219 \end{pmatrix}$ und $\vec{OI} = \begin{pmatrix} 4205 \\ 2331 \\ 4180 \end{pmatrix}$.

Hiermit können nun die Kreuzprodukte errechnet werden, welche zur Bestimmung der einzelnen Winkel von Nöten sind:

$$\vec{OW} \times \vec{OM} = \begin{pmatrix} -4519399 \\ -7752484 \\ 5835698 \end{pmatrix} \quad \vec{OW} \times \vec{OI} = \begin{pmatrix} -6125293 \\ 2782600 \\ 4610988 \end{pmatrix} \quad \vec{OM} \times \vec{OI} = \begin{pmatrix} -2761983 \\ 9911203 \\ -2748646 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OW} \times \vec{OM} = -\vec{OM} \times \vec{OW} \quad \vec{OW} \times \vec{OI} = -\vec{OI} \times \vec{OW} \quad \vec{OM} \times \vec{OI} = -\vec{OI} \times \vec{OM}$$

Mit der Formel $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ können nun die Winkel des sphärischen Dreiecks errechnet

werden. Die Resultate hiervon sind wie folgt: $\langle_{WMI} = 45,15^\circ$, $\langle_{MIW} = 68,51^\circ$ und $\langle_{IWM} = 67,78^\circ$.

Damit ergibt sich die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks von $181,44^\circ$. Der Exzess beträgt also $1,44^\circ$ oder $0,025$ rad. Für die Fläche eines sphärischen Dreiecks gilt:

$$F_{\Delta} = \text{Exzess} \cdot r^2 \text{ (Exzess in Radiant)}. \text{ Damit: } F_{\Delta_{WMI}} = 0,025 \cdot 6371^2 \approx 1018777 \text{ km}^2.$$

Beim obigen Beispiel wurde stets mit den „genauen“ Daten – sprich mit den Werten des CAS's – gerechnet. Wiedergegeben wurden jedoch stets gerundete Werte.

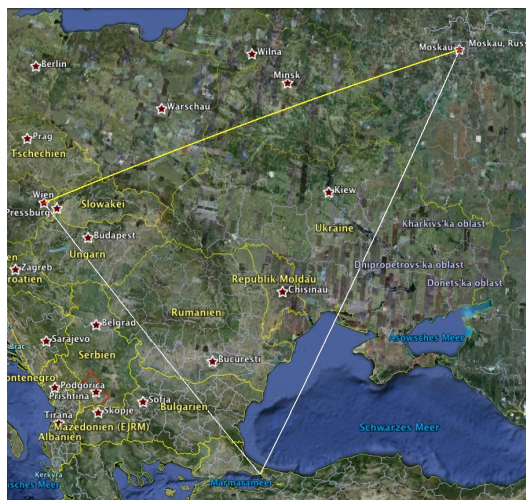


Abbildung 25: Sphärisches Dreieck mit den Eckpunkten Wien, Moskau und Istanbul
Erstellt mit Google Earth

Wenn man nun die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten Wien, Istanbul und Moskau mit Hilfe von Messungen in einer Karte (Abb. 26, S. 50) errechnet, so kommt man zu folgendem Ergebnis. Die Strecke von Wien nach Istanbul ist in der Karte $5,3$ cm lang. Der Maßstab dieser Karte ist mit $1:24$ Mio. gegeben. Dadurch ergibt sich eine Naturstrecke von 1272 km. Die „Höhe“ auf die Strecke Wien-Istanbul nach Moskau ist in der Karte $6,4$ cm lang. Wendet man wieder den Maßstab an, so folgt damit eine Naturstrecke von 1536 km. Die Flächenformel des (ebenen) Dreiecks ergibt mit den obigen Daten einen Flächeninhalt von 976896 km^2 .

Wenn man nun die Flächeninhalte des Dreiecks Wien-Istanbul-Moskau auf Basis von Messung bzw. unter Zuhilfenahme der Koordinaten vergleicht, so ergibt sich eine Differenz der Flächen von 41881 km^2 . Der hierbei entstandene Unterschied ist etwa halb so groß wie das gesamte österreichische Staatsgebiet (ca. 84000 km^2).



Abbildung 26: Dreieck mit den Eckpunkten Wien, Moskau und Istanbul
 Quelle: Diercke Weltatlas Österreich, S. 49, Maßstab 1:24 Mio. (vergrößert)

3. 7. 2. 1 Bearbeitung mit digitalen Medien

Mit dem bis hierhin generierten Wissen über die Geometrie der Kugel und den Berechnungen auf jener bietet es sich an, ein entsprechendes Programm mit den Schüler_innen zu verfassen. Hierfür ist das Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft Excel, welches aller Voraussicht nach auf den meisten Schulcomputern installiert ist, vollkommen ausreichend.

Das Programm soll geographische Koordinaten in kartesische Koordinaten umwandeln können, Winkel sowie Länge der Orthodrome zwischen zwei Orten berechnen können und Winkel, Exzess sowie Fläche von sphärischen Dreiecken berechnen können. Beim Verfassen dieses Programms soll darauf geachtet werden, dass der Input von den Schüler_innen kommt. Alleine bei der technischen Realisierung soll die Lehrperson hilfreich eingreifen, falls dies von Nöten ist.

Im Anhang dieser Arbeit befindet sich eine CD mit einem solchen Programm (sowohl als xlsx- als auch als xls-Datei).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2			40030,1398	Berechnungen auf unserer Erde									
3													
4													
5	Ort Name	Wien											
6	Breite	48	0,83775733										
7	Länge	16	0,27925244										
8		Grad	Radiant										
9													
10													
11													
12	Ort Name	Rom											
13	Breite	42	0,73303767										
14	Länge	12	0,20943933										
15		Grad	Radiant										
16													
17													
18													
19													
20	Ort Name	London											
21	Breite	51	0,89011717										
22	Länge	0	0										
23		Grad	Radiant										
24													
25													
26													
27													
28													
29													
30													
31													
32													
33													
34													
35													
36													
37													
38													
39													

Abbildung 27: Berechnungen auf der Erde mit Hilfe des erstellten Programms

3. 8 Projektionen

Das Ziel bzw. die Aufgabe der Kartenprojektionen oder Kartennetzentwürfe ist es die Kugeloberfläche – das Urbild – auf eine Ebene oder einen Zylindermantel – also auf eine Bezugsfläche (siehe S. 21 f.) – abzubilden. Man möchte also ein dreidimensionales Objekt – in unserem Falle eine Kugel – „verebnen“. Bei diesem Vorhaben kann man sich physikalische Tatsachen und Gesetze zunutze machen (siehe beispielsweise Kapitel 3.8.1.1 „Gnomonische Projektion“, S. 54), oder man folgt „nur“ mathematischen Argumentationen (siehe beispielsweise Kapitel 3.8.1.4 Azimutale äquidistante Projektion, S. 56 f.). Dieser Teil der Wissenschaft wird auch als *mathematische Kartographie* bezeichnet.

Bei den weiteren Untersuchungen und Analysen wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder angenommen, dass die Erde eine Kugel mit Radius 1 ist. Im weiteren Verlauf wird sich diese Arbeit mit Gradnetzentwürfen (Netz der Längen- und Breitenkreise einer Kugel) in

normaler Lage oder kartographischen Abbildungen im engeren Sinn befassen. *Normale Lage* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Erdachse mit der Achse der Abbildungsfläche (Zylinderabbildungen, S. 58 ff.) zusammenfällt oder diese auf die Erdachse normal steht (Azimutalabbildungen, S. 53 ff. – beide siehe Abb. 28).

Da man keine Sphäre verzerrungsfrei in eine Ebene abbilden kann, gibt es keine perfekten Karten. Es können jedoch einzelne Eigenschaften bei der Abbildung erhalten werden.

Längentreue Diese herrscht dann vor, wenn das Maß des Verhältnisses von zwei Kartenstrecken gleich dem Maß des Verhältnisses der dazugehörenden Naturstrecken ist. Diese Eigenschaft kann jedoch nur in ausgezeichneten Orientierungen erlangt werden.

Flächentreue Eine Karte ist dann flächentreu, wenn das Maß von Kartenflächen gleich dem Maß ihrer Flächen auf der Erdoberfläche ist. Diese Eigenschaft kann jedoch zur Folge haben, dass die Form der abgebildeten Fläche von ihrer realen Form stark abweicht.

Winkeltreue oder Konformität liegt vor, wenn Winkel der Sphäre auf der Karte unverändert abgebildet werden.

Unabhängig von den im Nachfolgenden näher beschriebenen Projektionen muss jeder abgebildete Punkt gewissen mathematischen Gesetzen entsprechen. Der Kartenpunkt wird mit polaren Koordinaten als m, α oder mit kartesischen Koordinaten als x', y' zum Urbild in geographischen Koordinaten ϕ, θ angegeben. Die geographische Koordinate ϕ gibt die geographische Breite wieder und die geographische Koordinate θ die geographische Länge (siehe Abb. 8, S. 27). Bei *echten Abbildungen* hängen die Bildkoordinaten des Punktes von jeweils nur einem Parameter des Urbildes ab. Somit ergeben sich folgende Gleichungen:

$$m = f_1(\phi); \alpha = f_2(\theta) \text{ bzw. } x' = f_3(\phi); y' = f_4(\theta) \quad (\text{Hake et al, S. 54 f.}).$$

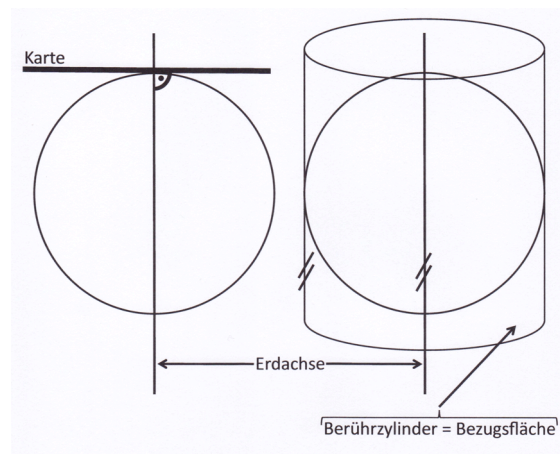


Abbildung 28: Abbildungs- bzw. Bezugsfläche bei der Azimutalabbildung (links) bzw. bei der Zylinderabbildung (rechts)

3. 8. 1 Azimutalprojektionen

Bei der Azimutalprojektion wird die Sphäre ohne Zuhilfenahme einer Bezugsfläche auf eine Ebene projiziert (Abb. 28 links). Die Bildebene berührt hierbei an einem Punkt die Kugel, welcher das Zentrum der Karte darstellt. In den häufigsten Fällen bildet der Nord- oder Südpol diesen Berührungspunkt. Da diese Wahl des Berührungspunktes auch die nachfolgenden Rechnungen erleichtert wird o. B. d. A. angenommen, dass bei allen Azimutalprojektionen der Berührungspunkt ein Pol ist. Vor allem bei quadratischen Kartenblättern eignet sich diese Abbildung, da die Verzerrungen in alle Richtungen im gleichen Ausmaß anwachsen. Da sie bei dieser Projektion mit fallender geographischer Breite immer größer werden sollten nur Gebiete vom jeweiligen Pol bis zum 60. Breitenkreis abgebildet werden. In der Karte erscheinen hierbei die Meridiane als Geraden, welche einander im Pol schneiden. Die Breitenkreise werden als konzentrische Kreise dargestellt, deren Mittelpunkt der jeweilige Pol ist (Abb. 29). Die Radien der jeweiligen Breitenkreise sind von der Projektionsart abhängig, welche nun erläutert werden sollen (Kohlstock, S. 28 f. und Hake et al, S. 67 f.).



Abbildung 29: Azimutale Abbildung der Arktis

Quelle: Hölzel -Universalatlas, S. 175, Maßstab 1:40 Mio. (vergrößert)

3. 8. 1. 1 Gnomonische Projektion

Diese Abbildung ist die älteste uns heute noch bekannte Methode zur Verebnung einer Sphäre. Bereits Thales von Milet kannte und arbeitete im 6. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung mit dieser Projektion. Bei der gnomonischen Abbildung liegt die Projektionsquelle im Kugelmittelpunkt. Der Pol wird hierbei als Punkt in die Kartenmitte abgebildet. Entfernt man sich vom Pol so nehmen die Verzerrungen sehr schnell zu, was diese Karte nur bedingt nutzbar macht. Der große Vorteil dieser Abbildungsvariante ist, dass alle Großkreise als Geraden dargestellt werden. Großkreise entstehen durch den Schnitt einer Kugel mit einer Ebene, welche den Mittelpunkt der Kugel enthält. Damit entspricht der kürzesten Verbindung auf der Karte auch die kürzeste Verbindung in der Realität. Diese Eigenschaft macht die gnomonische Projektion vor allem für Luft- und Seefahrt interessant. Für den Radius des Breitenkreises auf der Karte mit geographischer Breite ϕ ergibt sich $r(\phi) = \tan(\delta)$ (siehe Abb. 30). Der Winkel δ ist hierbei zum Winkel ϕ komplementär. Es gilt also $\delta = 90^\circ - \phi$. Diese Modifikation wurde vorgenommen, um die Rechnungen zu vereinfachen. Auch bei den nachfolgenden Projektionen wird dies durchgeführt. Diese Formel zeigt, dass mit jener Projektion jeweils nur eine Hemisphäre mit geographischer Breite $< 90^\circ$ abgebildet werden kann da gilt: $\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \tan \alpha = \infty$ (Hake et al, S. 68 f. und Feeman, S. 11 f. bzw. S. 41 f.).

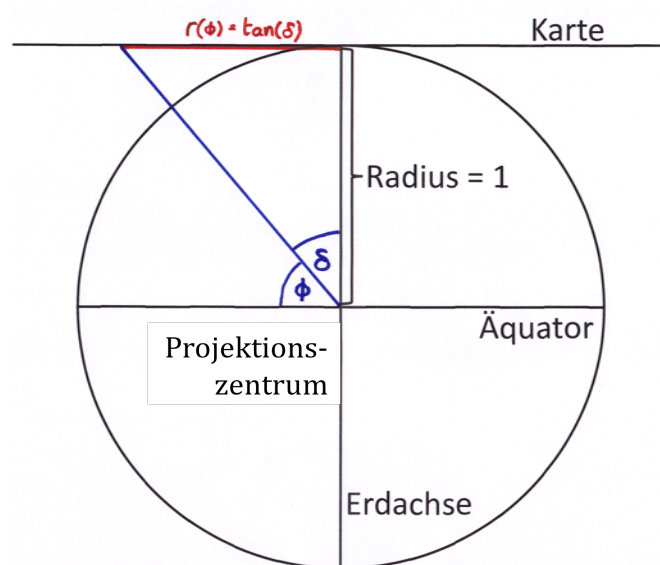


Abbildung 30: Formel für den Radius zur Gnomonischen Projektion

3. 8. 1. 2 Stereographische Projektion

Bei der stereographischen Abbildung liegt die Projektionsquelle dem Berührungspunkt von Kugel und Ebene gegenüber (siehe Abb. 31). Dieser Punkt wird als *Antipode* bezeichnet. Die Meridiane bilden wieder ein Geradenbüschel deren Schnittpunkt mit dem Pol zusammenfällt. Für den Radius mit geographischer Breite ϕ ergibt sich nun $r(\phi) = 2 \cdot \tan\left(\frac{\delta}{2}\right)$ (siehe Abb. 31, $\frac{\delta}{2}$ ergibt sich aus dem Peripheriewinkelsatz). Dadurch zeigt sich, dass mit dieser Projektion – wenn auch mit großen Verzerrungen an den Rändern – die Sphäre bis auf die Antipode abgebildet werden kann (Kohlstock, S. 30 und Feeman, S. 42 f.).

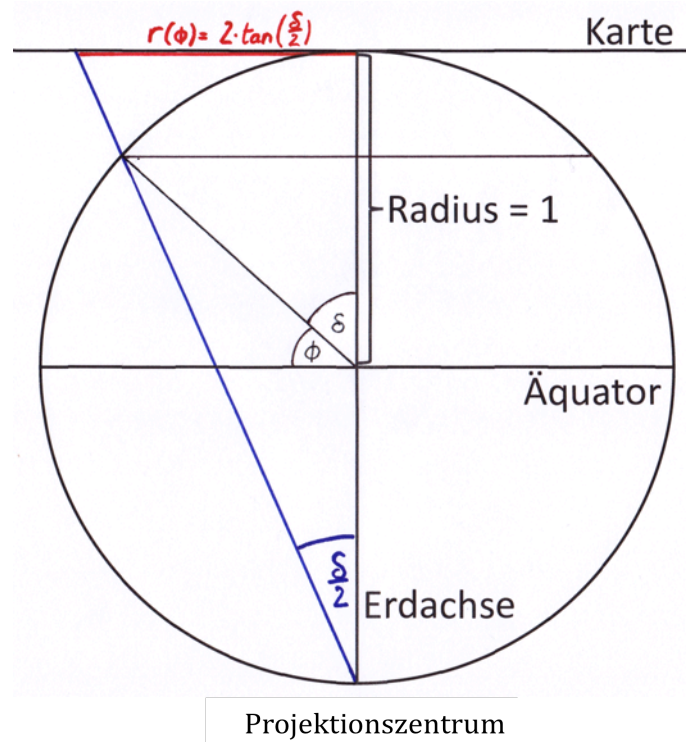


Abbildung 31: Formel für den Radius zur Stereographischen Projektion

3. 8. 1. 3 Orthographische Projektion

Bei dieser Abbildung liegt das Projektionszentrum im Unendlichen. Dies hat zur Folge dass die Sphäre orthogonal auf die Ebene projiziert wird (siehe Abb. 32). Somit kann wie bei der gnomonischen Abbildung nur eine Hemisphäre dargestellt werden, jedoch diesmal inklusive Äquator. Die Längengrade bilden wieder ein Geradenbüschel, deren Schnittpunkt im Pol liegt. Die Breitenkreise werden als konzentrische Kreise abgebildet, wobei deren Abstand mit wachsender Breite geringer wird. Für den Radius des Breitenkreises auf der Karte mit geographischer Breite ϕ gilt nun folgende Formel: $r(\phi) = \sin(\delta)$ (Hake et al, S. 70 und Feeman, S. 43).

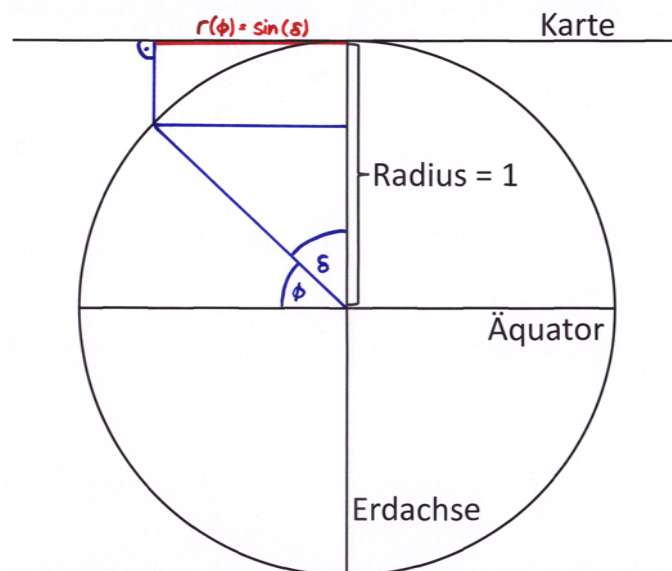


Abbildung 32: Formel für den Radius zur Orthographischen Projektion

3. 8. 1. 4 Azimutale äquidistante Projektion

Wie bei den bisherigen azimutalen Projektionen bilden auch bei dieser die Meridiane ein Geradenbüschel und die Breitenkreise konzentrische Kreise um den Schnittpunkt dieses Büschels. Anders als bei den bisherigen Abbildungen basiert diese jedoch auf keinem physikalischen Prinzip. Dies bedeutet, dass es keine Lichtquelle gibt, von welcher aus die Punkte der Sphäre auf eine Ebene projiziert werden. Die azimutale äquidistante Projektion ist eine rein mathematische Abbildung. Euler bewies bereits im Jahr 1775, dass es nicht möglich ist, eine Karte einer Sphäre zu konstruieren, welche von jedem Punkt aus in jede Richtung längentreu ist. Es ist jedoch möglich eine Abbildung zu erzeugen, welche von *einem*

Punkt in jede Richtung längentreu ist. Diese Eigenschaft besitzt die azimutale äquidistante Projektion für den Pol. Es entspricht also jede Kartenstrecke vom Pol ausgehend der dazugehörigen Naturstrecke. Um eine solche Karte einfacher erzeugen zu können nehmen wir einige Modifikationen im Urbild und Bildbereich vor. Die Breitenkreise werden nun nicht mehr in Gradmaß sondern als Bogenmaß angegeben. Der Nordpol hat hierbei den Wert $\frac{\pi}{2}$ rad, der Äquator 0 rad und der Südpol $-\frac{\pi}{2}$ rad. Bei der Karte, die im folgenden Teil konstruiert werden soll, nehmen wir den Südpol als Ursprung an. Der Breitenkreis mit Latitude (=geographische Breite) ϕ ($\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$) hat auf der Sphäre mit Radius 1 eine (Winkel-)Entfernung von $\frac{\pi}{2} + \phi$ vom Südpol (Abb. 33). Der hierzu gehörende Kreis der Abbildung soll nun den Radius $r \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right)$ haben, wobei r der konstante frei wählbare Faktor ist, um welchen der Kartenradius gestreckt oder gestaucht werden soll. Somit entsteht eine Karte der kompletten Sphäre, welche zum und durch den Südpol längentreu ist. Der Nordpol wird hierbei als Kreis mit Radius $r \cdot \pi$ dargestellt. Für den Maßstab M dieser Karte gilt:

$$M = \frac{\overbrace{r \cdot \frac{\pi}{2}}^{\text{Radius des Äquators in der Karte}}}{\underbrace{R}_{\text{Erdradius}}} \quad \text{bzw. für } r: r \cdot \frac{\pi}{2} = M \cdot R = \frac{R}{m}, \text{ also } r = \frac{2R}{\pi m}.$$

Es ist auch möglich jeden anderen Punkt der Sphäre bei dieser Abbildung als Ursprung zu definieren. Somit kann man von jedem Punkt der Erde aus eine längentreue Karte erstellen (Feeman, S. 43 f.).

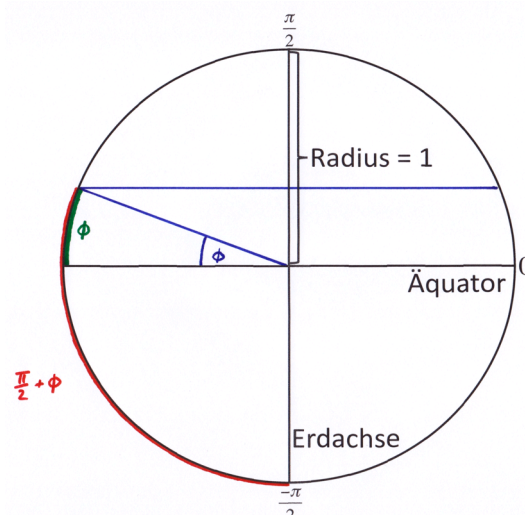


Abbildung 33: (Winkel-)Abstand eines Punktes mit geogr. Breite ϕ vom Südpol

3. 8. 2 Zylinderprojektionen

Der folgende Teil dieser Arbeit wird sich mit der zylindrischen Projektion auseinandersetzen. Der hierbei verwendete Zylinder wird ein Berührzylinder in normaler Lage sein. Dies bedeutet, dass die Sphäre entlang des Äquators mit einem Zylinder umwickelt wird, dessen Radius gleich dem Kugelradius ist. Der Zylindermantel ist bei dieser Projektion der Bildbereich (Abb. 28 rechts, S. 52). Das Abbild auf diesem räumlichen Körper kann ohne Verzerrungen in die Ebene projiziert werden. Unabhängig welche Zylinderprojektion man im Speziellen wählt besitzen deren Karten gemeinsame Eigenschaften (Abb. 34).

Der Äquator und alle weiteren Breitenkreise sowie die Pole werden als waagrechte Geraden der Länge $2 \cdot \pi$ dargestellt – erinnere, wir haben wieder festgelegt, dass die Sphäre o. B. d. A. den Radius 1 besitzt. Dies hat zur Folge, dass nur der Äquator längentreu abgebildet wird und somit nur Messungen und Berechnungen entlang dieses Breitenkreises vorgenommen werden können. Alle anderen Breitenkreise erfahren eine Streckung auf die Länge $2 \cdot \pi$ und somit kommt es mit steigender Entfernung vom Äquator zu immer größeren Verzerrungen. Der Abstand zwischen den einzelnen Breitenkreisen ist von der jeweiligen Projektion und den gewünschten Karteneigenschaften abhängig und wird später näher untersucht.

Die Meridiane werden bei der Zylinderprojektion als senkrechte Geraden abgebildet. Der Abstand zwischen zwei Meridianbildern ist hierbei stets äquidistant. Die Länge der Meridiane ist wie der Abstand der Breitenkreise von der Projektion und den Karteneigenschaften abhängig.

Unabhängig von der gewählten Abbildungsweise und Karteneigenschaft sind die Gradnetze der Zylinderabbildung immer rechtwinkelig (Feeman, S. 12 f. und Kohlstock, S. 26 f.).

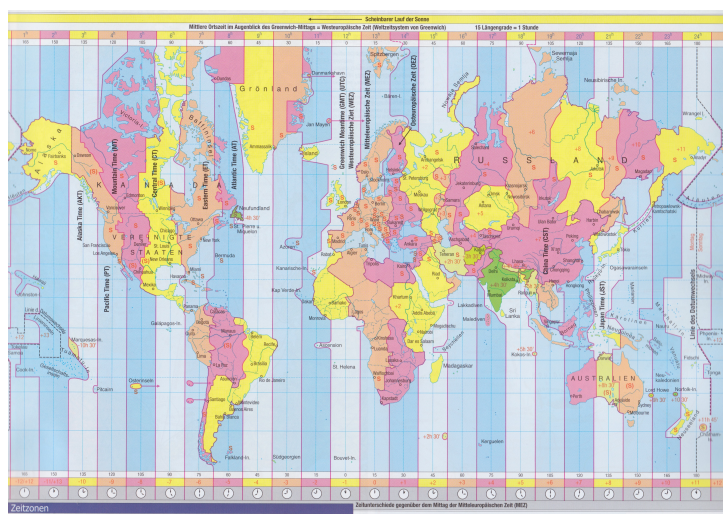


Abbildung 34: Zeitzonenkarte als typische Zylinderabbildung

Quelle: Hölzel-Universalatlas, S. 176 (verkleinert)

3. 8. 2. 1 Quadratische Plattkarte

Die quadratische Plattkarte ist eine einfache und sehr alte Zylinderprojektion. Hierbei wird der Äquator längentreu abgebildet und die Meridiane sind halb so lang wie der Äquator. Die dadurch entstandene Karte im Verhältnis 2:1 entspricht somit der Proportion des Maßes des Äquators zu einem des Meridians, der ja per Definition ein Halbgroßkreis ist (siehe Abb. 35). Mit den oben vereinbarten Vereinfachungen hat diese Karte die Länge $2 \cdot \pi$ und die Breite π . Der Breitenkreis mit geographischer Breite ϕ° – unabhängig ob in Nord- oder Südrichtung – hat einen (Winkel-)Abstand von $\frac{\phi \cdot \pi}{180}$ vom Äquator. Dadurch entsteht eine längentreue Karte entlang der Meridiane. Der Äquator ist der einzige Breitenkreis dieser Karte, welcher längentreu abgebildet wird. Alle weiteren Breitenkreise werden verzerrt dargestellt. Hierbei ist $\frac{1}{\cos(\phi)}$ der Verzerrungsfaktor des Breitenkreises mit geographischer Breite ϕ (siehe Abb. 35). Dies bedeutet, dass das Bild des Breitenkreises um den Faktor $\frac{1}{\cos(\phi)}$ länger ist als die dazugehörige Naturstrecke (Feeman, S. 45 und Hake et al, S. 71 f.).

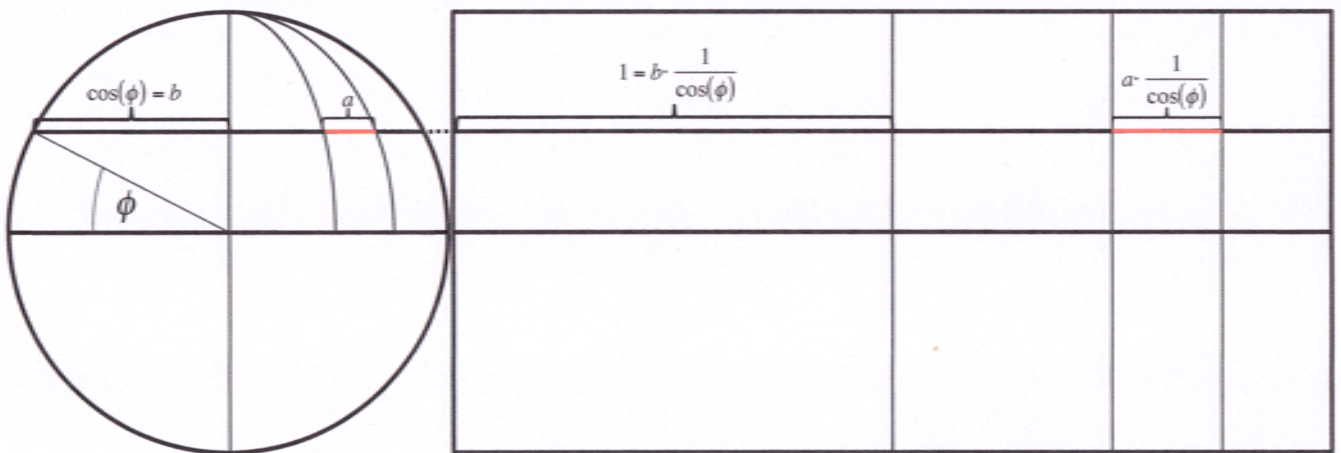


Abbildung 35: Abbildungsprinzip der quadratischen Plattkarte

3. 8. 2. 2 Lamberts flächentreue Zylinderprojektion

Die im Nachfolgenden beschriebene Kartenprojektion geht auf Johann Heinrich Lambert zurück, welcher diese Abbildung im Jahr 1772 vorstellte. Hierbei wird der Äquator wieder seiner Länge entsprechend abgebildet. Daraus ergibt sich, dass die entstehende Karte von

der Länge $2 \cdot \pi$ sein muss. Die Breitenkreise werden jedoch orthogonal zur Erdachse auf den Zylinder projiziert (siehe Abb. 36). Dies hat zur Folge, dass die Breite dieser Karte 2 Einheiten lang ist. Das somit entstandene Maß der Karte ist also $\frac{l}{b} = \frac{2 \cdot \pi}{2} = \pi$. Die Meridiane bei Lamberts flächentreuer Zylinderprojektion (so heißt diese Projektion; zum Nachweis der Flächentreue siehe: Hake et al, S. 72 f. oder Kap. 3.11.1, S. 74 ff.) sind äquidistant senkrechte Geraden mit Länge 2. Der Abstand eines Breitenkreises vom Äquator mit geographischer Breite ϕ kann mit der Formel $h(\phi) = \sin(\phi)$ errechnet werden (siehe Abb. 36). Im späteren Verlauf dieser Arbeit wird auf diese Abbildung nochmals zurückgekommen und mit vertieftem Wissen untersucht (Feeman, S. 13).

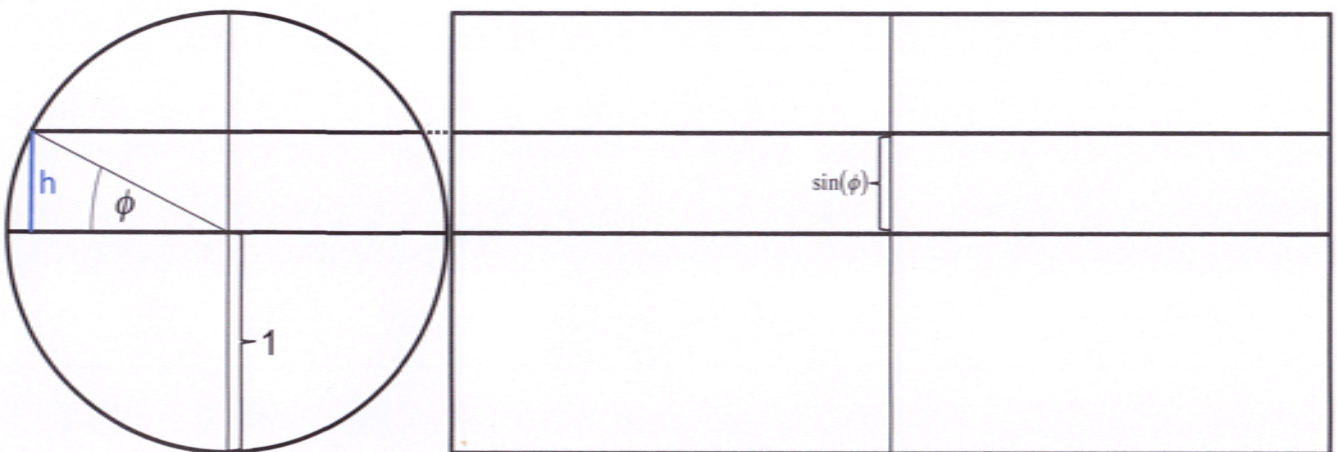


Abbildung 36: Abstand eines Breitenkreises vom Äquator bei der Zylinderprojektion

3. 8. 2. 3 Mercatorprojektion

Bei der Mercatorprojektion handelt es sich um eine winkeltreue oder konforme zylindrische Abbildung. Längen- und Breitenkreise bilden hierbei wieder ein rechtwinkeliges Gradnetz. Die Meridiane werden hierbei wieder in senkrechter sowie äquidistanter Weise dargestellt. Wie bereits oben erwähnt (siehe S. 58) entstehen dadurch mit steigender Breite immer größer werdende Verzerrungen der Breitenkreise. Bei geographischer Breite ϕ gibt es eine Verzerrung von $\frac{1}{\cos(\phi)}$ des dazugehörigen Breitenkreises (wie bei der quadratischen Plattkarte). Um nun eine winkeltreue Karte zu erzeugen muss die Verzerrung der Meridiane gleich jener der Breitenkreise sein. Die geforderte Verzerrung des Meridians erhält man durch das Integral der Verzerrung entlang des dazugehörigen Breitenkreises. In Abschnitt

3.9.2.1 (siehe S. 69) wird gezeigt, dass die Verzerrung eines Längenkreises zwischen den Breiten $\phi+t$ und ϕ gleich $h'(t)$ ist, wobei $h(\phi)$ der Abstand des Breitenkreises ϕ vom Äquator ist. Aus dem Verzerrungsfaktor $h'(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)}$ für die Breitenkreise ergibt sich der

Maßstabsfaktor in Richtung der Meridiane:

$$h(\phi') = \int_0^{\phi'} \frac{1}{\cos(\phi)} d\phi = \ln \left(\tan \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \right) \Big|_0^{\phi'} = \ln \left(\tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) \right).$$

Entfernung des Breitenkreises mit geogr. Br. ϕ' in der Karte Verzerrungsfaktor $h'(\phi)$

Diese Abbildung ist rein mathematisch und kann durch keine physikalische Projektion erzeugt werden. Die Pole können bei dieser Projektion nicht abgebildet werden, denn nach obiger Formel würden diese im Unendlichen liegen. Die Besonderheit dieser Karte ist, dass die Geraden des Bildes auch im Urbild die Meridiane im selben Winkel schneiden. Diese Eigenschaft macht jene Abbildungsweise vor allem für die Seefahrt interessant (Hake et al, S. 72 f.).

3. 8. 3 Umsetzung im Unterricht

Die oben präsentierten Kartenprojektionen können von der Lehrperson vorgestellt werden, jedoch auch von den Schüler_innen. Letzteres würde sich anbieten, da die Komplexität des Vorzutragenden sich in überschaubaren Grenzen hält. Die Schüler_innen können in einem Partnerreferat jeweils eine Kartenprojektion vorstellen und für die restlichen Schüler_innen ein Handout fertigen. Bei der Referatsvorbereitung müssen jedoch verwendete Quellen sowie Medien der Präsentation mit der Lehrperson abgestimmt werden. Weiters sollte die Lehrperson das Handout vorab lesen, damit mögliche Fehler und Falschinformationen nicht verbreitet werden. Bei diesen Vorträgen können die Schüler_innen ihre Präsentationskompetenz in Hinblick auf die mündliche Matura erproben. Es können bereits im Vorfeld der Matura Möglichkeiten oder Schwächen gewisser Schüler_innen in punkto mathematischen Vortragens erkannt werden und diese gegebenenfalls gefördert oder korrigiert werden.

Mit dem Wissen, welches die Schüler_innen bis hierhin erlangt haben, ist es möglich, einfache Karten im kleinen Maßstab zu erzeugen.

Zuerst sollen die Schüler_innen eine Tabelle erzeugen, welche die Eck-Koordinaten der abzubildenden Landfläche beinhaltet (siehe Tab. 3, S. 63). Mit diesem Datensatz als Basis können nun unterschiedliche Aufgaben an die Schüler_innen gestellt werden.

1. Möglichkeit

Den Schüler_innen wird vorgegeben, welche Karte sie erzeugen sollen. Mit diesem Wissen müssen die Schüler_innen nun Berechnungen anstellen, wie Längen und Breitenkreise dargestellt werden. Weiters müssen die Schüler_innen geeignete Abstände der Meridiane sowie Breitenkreise (z. B. 10° , siehe S. 64) wählen, um die Basisdaten in der Karte abtragen zu können. Die mathematische Herausforderung bei dieser Aufgabenart ist technischer Natur. Die Schüler_innen müssen vorgegebene Daten bzw. Datensätze mit technischen Hilfsmitteln wie Taschenrechner oder CAS bearbeiten um somit einen Datensatz zu erlangen, welcher die Basis ihrer Kartenerstellung ist. Eine mögliche Aufgabenstellung hierzu wäre:

Aufgabe: *Erstelle mit Hilfe deiner Basisdaten eine orthographische Karte der nördlichen Hemisphäre!*

Da eine Aufgabe dieser Art sehr zeit- und arbeitsaufwändig ist, wird es sich anbieten die Aufgabenstellung auf mehrere Schüler_innen zu verteilen. So kann diese Aufgabe von vier Schüler_innen bearbeitet werden, wobei jede_r ein Kartenstück von 90° geographischer Länge erstellt. Wenn dies erfolgte, so können die einzelnen Kartenstücke zu einer Karte zusammengeführt werden. Vorab sollen die Schüler_innen jedoch den Hinweis erhalten, dass sie sich bei der Wahl der Intervalle der Breitenkreise sowie bei der Wahl der Kartengröße absprechen sollen.

2. Möglichkeit

Den Schüler_innen wird vorgegeben wofür sie eine Karte erzeugen sollen. Im Gegensatz zur ersten Möglichkeit wird nun die kognitive und handlungsorientierte Kompetenz der Schüler_innen angesprochen. Jene müssen sich vorab Gedanken machen, welche Eigenschaften ihre Karte erhalten muss und welche vernachlässigbar sind. Nach diesen Vorarbeiten ist ähnlich wie bei der ersten Möglichkeit vorzugehen.

Aufgabe: *Erstelle mit Hilfe deiner Basisdaten eine Karte der südlichen Hemisphäre, welche sich für den Flugverkehr eignet!*

Diese Aufgabenstellung sollte in Partner- oder Gruppenarbeit erledigt werden. Sowohl bei der Beratschlagung der zu wählenden Abbildungseigenschaften als auch der darauf basierenden Wahl der Abbildung als auch bei der Umsetzung ist das Zusammenarbeiten mit anderen Schüler_innen hilfreich.

Beispiel

Aufgabe: Erstelle eine orthographische Karte jener Gebiete von Mittel- und Nordamerika, welche sich auf der nördlichen Hemisphäre befinden!

Vorgehensweise:

1. Erstelle einen Datensatz mit jenen Punkten der Erde, welche in der Abbildung die Eckpunkte des darzustellenden Gebiets bilden! Dieser Datensatz muss aus geographischen Koordinaten bestehen, damit jene in den Netzentwurf übertragen werden können: Tab. 3.

Ort	geogr. Breite	geogr. Länge
Quito	0°	80° W
Jurado	7° N	77° W
Puerto Vallarta	20° N	105° W
Caspar	39° N	123° W
Yakutat Bay	60° N	140° W
Wales	65° N	168° W
Belle Isle	51° N	55° W
Stumpy Point	35° N	75° W
Fernandina Beach	30° N	81° W
Key Largo	25° N	80° W
Porter Island	30° N	84° W
Cuba Island	27° N	97° W
Coatzacoalcos	18° N	94° W
Acandi	8,5° N	77° W
Cayenne	5° N	52° W
Soure	0°	48,5° W

Tabelle 3: Rohdaten zur Erstellung einer Karte

2. Erstelle einen Netzentwurf, in welchem die geographischen Koordinaten des obigen Datensatzes übertragen werden können! Hierbei ist vor allem darauf zu achten, dass die Breitenkreise mit einem Faktor gestreckt werden, so dass die Formen der Landflächen erkenntlich sind aber auch auf das abzubildende Medium passen. Wenn die Karte auf einem Blatt im Format DIN A4 gezeichnet wird, so bietet sich der Faktor 10 zum Strecken der Breitenkreisradien an.

Für die Bilder der Breiten- und Längenkreise des Kartennetzes wählen wir Abstände von jeweils 10° . Die Längenkreise können einfach mit einem Winkelmesser von einem Pol ausgehend abgetragen werden. Für die Breitenkreise müssen vorab die jeweiligen Radien r errechnet werden. Bei der orthographischen Karte und unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Abbildungsfläche ist hierbei folgende Formel anzuwenden: $r(\phi) = 10 \cdot \sin(\delta)$ (S. 56). Hierbei ist ϕ die geographische Breite des Breitenkreises und δ der dazugehörige Komplementärwinkel. Damit ergeben sich folgende Breitenkreisradien im Bild: Tab. 4.

geogr. Breite	Radius in der Karte
0°	10 cm
10°	9,8 cm
20°	9,4 cm
30°	8,7 cm
40°	7,7 cm
50°	6,4 cm
60°	5 cm
70°	3,4 cm
80°	1,7 cm
90°	0 cm

Tabelle 4: Radien der Breitenkreise im Bild

Mit diesen Daten kann das nachfolgend abgebildete Kartennetz erstellt werden:

Abb. 37.

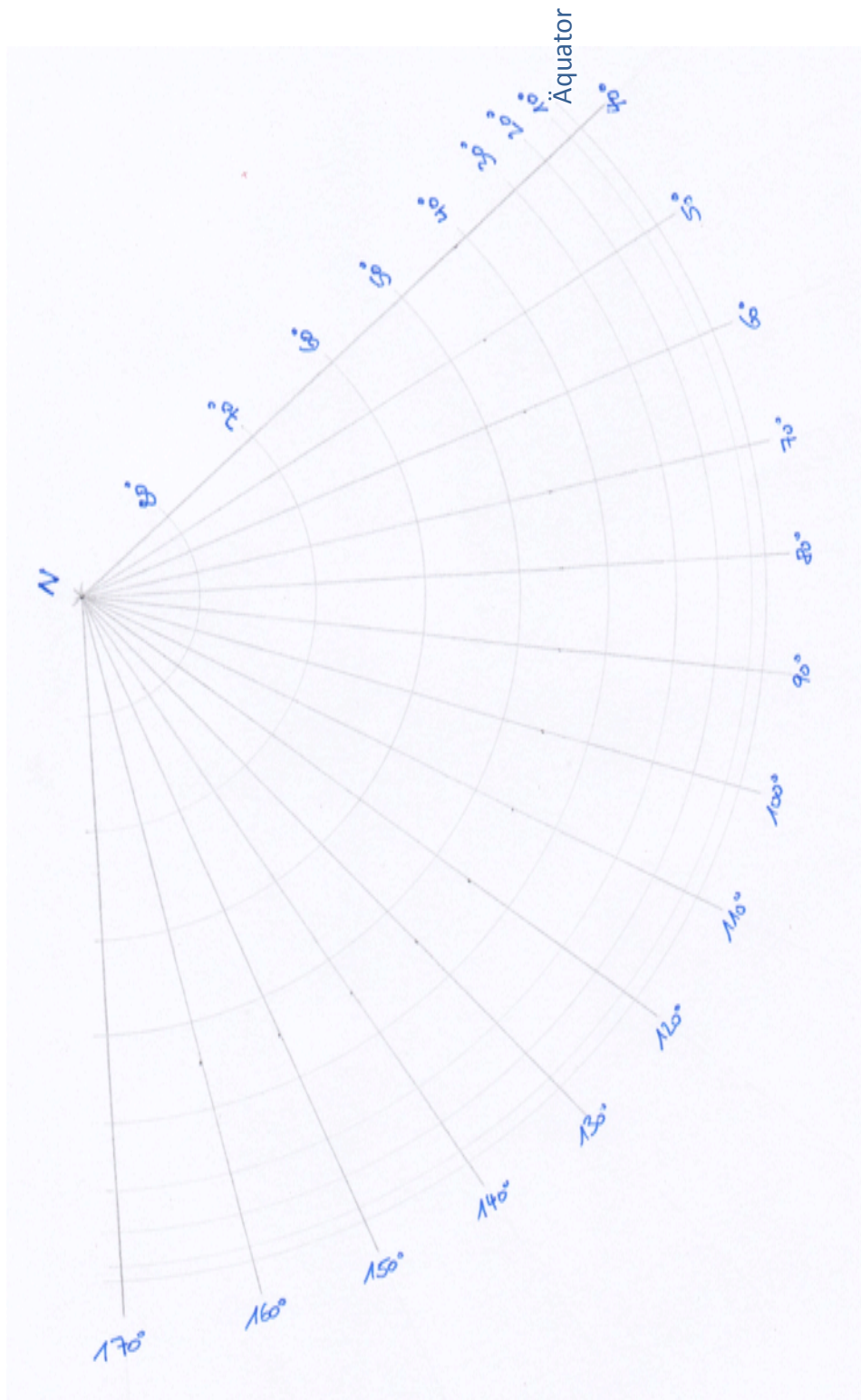


Abbildung 37: Kartennetzentwurf für eine orthographische Abbildung

Nun müssen die geographischen Koordinaten des Rohdatensatzes (siehe Tab. 3, S. 63) in das Kartennetz übertragen werden und diese Punkte verbunden werden. Das Resultat hiervon ist eine Karte der fragten Landfläche: Abb. 38.



Abbildung 38: Orthographische Karte von Mittel- und Nordamerika

3. 9 Maßstabsfaktor

Im Kapitel 3.5 konnte bereits nachgewiesen werden, dass die Entfernung zwischen zwei Orten auf der Erde ungleich der mittels Karten errechneten Strecke ist (siehe S. 23 ff.). Dies lässt sich nicht nur dadurch begründen, da man bei den Berechnungen nicht immer einem Großkreis folgte. Eine weitere Tatsache, welche dies nach sich zieht, ist, dass es keine vollständig längentreue Karte geben kann. Bei Karten im großen und mittleren Maßstab werden die Unterschiede von realer Strecke und mit einer Karte errechneten Strecke nur sehr gering sein, weswegen auf solchen Karten das „Messen und Rechnen“ auch erlaubt ist. Bei Karten von einem Maßstab von 1:1 Mio. und kleiner werden die Unterschiede der errechneten und realen Strecke zwischen zwei Orten immer deutlicher und man sollte bei jenen Karten davon Abstand nehmen Strecken zu messen und auf dieser Basis die Entfernung zu bestimmen. Die Tatsache, welche diesem Umstand zu Grunde liegt, ist, dass es *keine Karte mit konstantem Maßstab* geben kann. Um dies erlangen zu können würde man eine vollständig längentreue Karte der Erdoberfläche benötigen, was jedoch nicht möglich ist (siehe S. 56). Da diese Arbeit großteils mit kleinmaßstäbigen Karten arbeitet, soll nun der Maßstabsfaktor genauer bearbeitet werden (Kohlstock, S. 15 und Hake et al, S. 149). Es besitzt also jeder Punkt einer Karte in jede Richtung einen unterschiedlichen Maßstab. Um diese so entstehenden Maßstabsfaktoren berechnen zu können, rufen wir die Definition des Maßstabs wieder in Erinnerung – $M = \frac{s_K}{s_N}$. Da der Maßstabsfaktor für geringe Entfernungen nahezu konstant ist, wollen wir nun den „lokalen Maßstab“ näher untersuchen. Hierzu verwendet man die Formel $M \approx \frac{\Delta s_K}{\Delta s_N}$. Da es zu jedem Punkt einer Karte unendliche viele Richtungen gibt, welche alle eine eigene Berechnung erfordern, werden wir uns im Folgenden nur mit dem Maßstabsfaktor in der Nord-Süd-Richtung und der Ost-West-Richtung beschäftigen. Dies hängt auch damit zusammen, dass die Maßstabsfaktoren dieser beiden Richtungen für viele Eigenschaften der Karten maßgebend sind. Die hierbei untersuchten Kartenprojektionen werden die Zylinder- und die Azimutalprojektion sein (Feeman, S. 18 f.).

3. 9. 1 Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises

3. 9. 1. 1 Zylinderprojektion

Bei der Zylinderprojektion wird der Äquator auf der x -Achse mit der Länge $2 \cdot \pi$ abgebildet. Die Breitenkreise sind hierzu parallele Gerade mit selbiger Länge. Die Längengrade werden als zum Äquator orthogonale und äquidistante Geraden mit Länge π abgebildet (Kohlstock, S. 26 f.). Legt man nun die Strecke zwischen zwei Punkten entlang eines Breitenkreises auf der Karte zurück, so ist dieser Weg $(\theta + t) - \theta$ (also t) lang. Hierbei ist der Punkt $(\theta + t)$ der Endpunkt und θ der Startpunkt des Weges. Dabei wurde dieser Weg entlang des Breitenkreises mit Breite ϕ zurückgelegt. Die Naturstrecke dieses Weges entlang des gegebenen Breitenkreises lässt sich durch $t \cdot \cos(\phi)$ beschreiben, weil $\frac{1}{\cos(\phi)}$ der Verzerrungsfaktor der Breitenkreise ist (S. 59). Hiermit und mit der oben angegebenen Formel für den lokalen Maßstab ergibt sich die Formel für den Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises (Abb. 39):

$$M_b = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_K}{\Delta s_N} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t \cdot \cos(\phi)} = \frac{1}{\cos(\phi)} (= \sec(\phi)) \quad (\text{Feeman, S. 19}).$$

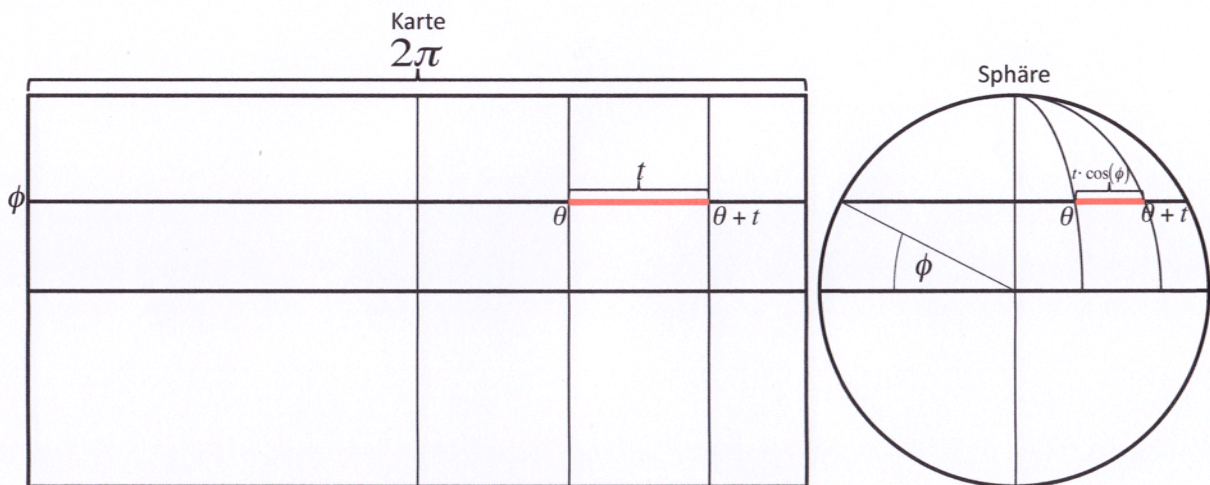


Abbildung 39: Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises (Zylinderabbildung)

3. 9. 1. 2 Azimutalprojektion

Bei der Azimutalprojektion in polständiger Lage werden die Meridiane als Geraden wiedergegeben. Diese schneiden einander alle im Pol und bilden somit ein Geradenbüschel. Die Breitenkreise werden als konzentrische Kreise abgebildet deren Mittelpunkt der Pol ist. Der Unterschied der Radien bei dieser Projektion hängt davon ab, ob man eine flächen-, winkel- oder mittelabstandstreue Karte erhalten möchte. Die Funktion $r(\phi)$ gibt den Radius

des Breitenkreises mit Breite ϕ wieder. Die Naturstrecke dieses Breitenkreises lässt sich durch $\cos(\phi)$ berechnen: es ist $r(\phi) = \sin(\delta) = \sin(90^\circ - \phi) = \cos(\phi)$ (S. 56, orthographische Projektion). Legt man nun einen Weg entlang des Breitenkreises $r(\phi)$ auf der Karte zwischen den Längengraden $(\theta + t)$ und θ zurück, so beträgt der Weg auf der Karte $t \cdot r(\phi)$. Der dazugehörige Weg auf der Kugel kann durch $t \cdot \cos(\phi)$ berechnet werden (Abb. 40). Wenden wir wieder unsere Formel zum lokalen Maßstab an, so erhält man den Maßstabsfaktor der Azimutalprojektion mit Breite ϕ , nämlich:

$$M_b = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot r(\phi)}{t \cdot \cos(\phi)} = \frac{r(\phi)}{\cos(\phi)} (= r(\phi) \cdot \sec(\phi)) \quad (\text{Feeman, S. 19 f.}).$$

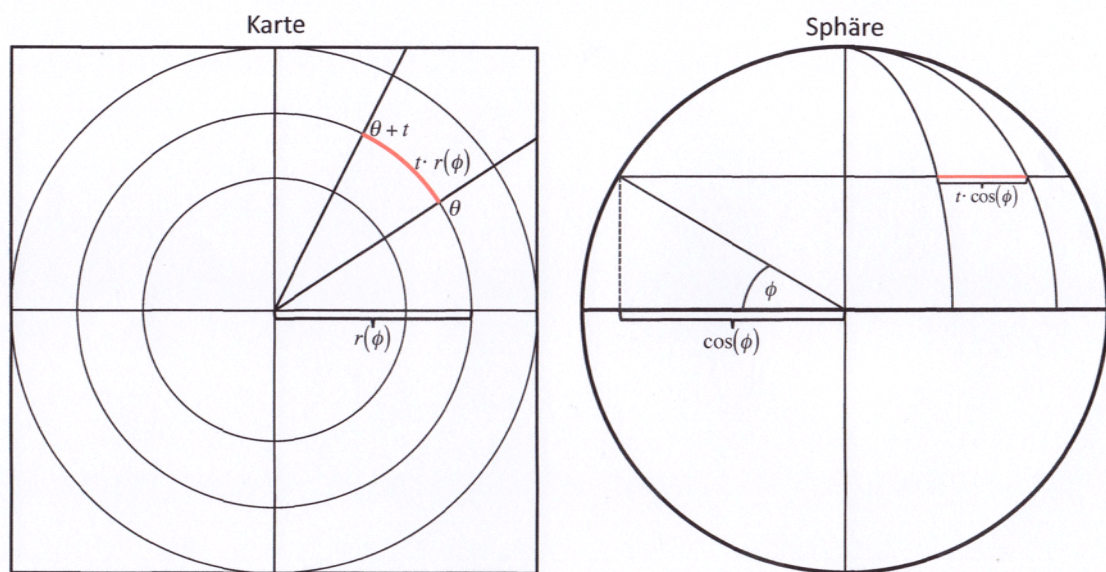


Abbildung 40: Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises (Azimutalabbildung)

3. 9. 2 Maßstabsfaktor entlang eines Längengrades

3. 9. 2. 1 Zylinderprojektion

Bei der Zylinderprojektion hat der Breitenkreis mit Breite ϕ den Abstand $h(\phi)$ vom Äquator. Die Funktion h variiert je nach Anforderungen, muss aber in diesem Fall auch nicht näher untersucht werden. Bewegt man sich nun entlang eines Längengrades zwischen den Breiten ϕ und $(\phi + t)$, so legt man auf der Karte einen Weg von $h(\phi + t) - h(\phi)$ zurück. Die zurückgelegte Naturstrecke errechnet man aus der Differenz $(\phi + t) - \phi$. Dies ergibt also (wieder) eine Strecke von t . Wendet man nun die Formel des lokalen Maßstabs an so

bekommt man den Maßstabsfaktor entlang eines Meridians. Dieser sieht also wie folgt aus:

$$M_l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\phi + t) - h(\phi)}{t} = h'(\phi).$$

3. 9. 2. 2 Azimutalprojektion

Sehr ähnlich erhält man den Maßstabsfaktor entlang eines Längengrades bei der Azimutalprojektion. Bewegt man sich entlang des Meridians zwischen den Breiten $\phi + t$ und ϕ , so ist die zurückgelegte Kartenstrecke $r(\phi + t) - r(\phi)$ lang. Die entsprechende Naturstrecke dazu hat die Länge t und somit bekommt den Maßstabsfaktor

$$M_l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(\phi + t) - r(\phi)}{t} = r'(\phi) \quad (\text{Feeman, S. 20}).$$

Mit dem so gewonnenen Wissen können nun Entfernungen entlang von Meridianen und Breitenkreisen errechnet werden. Es ist jedoch zu beachten, dass Karten meist keine Informationen bereitstellen wie die Funktion $h(x)$ oder $r(x)$ definiert sind. Weiters sollte man beachten, dass die somit errechneten Längen nur entlang der Meridiane auch die kürzesten Verbindungen sind. Bewegt man sich entlang eines Breitenkreises zwischen zwei Orten, so ist dies im Allgemeinen nicht die kürzeste Verbindung (siehe Abb. 42, S. 72) – eine Ausnahme hierbei bildet der Äquator. Wie man allgemein zu den kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten auf einer Kugel kommt wurde in Kapitel 3.5 (siehe S. 23 ff.) behandelt.

3. 9. 3 Umsetzung im Unterricht

Ähnlich wie bei den Kartenprojektionen können auch bei diesem Themenbündel einzelne Aspekte bzw. Subthemen von Schüler_innen vorgetragen werden. Zu beachten ist hierbei jedoch, dass das Vortragen des Maßstabsfaktors erst Schüler_innen ermöglicht wird, welche sich in der siebten oder achten Klasse befinden. Dies begründet sich dadurch, da die Differentialrechnung erst in der siebten Klasse bearbeitet wird und hierfür unerlässlich ist. Der Maßstab im Allgemeinen kann auch von Schüler_innen einer sechsten Klasse (oder früher) präsentiert werden.

Des Weiteren können mit dem Wissen um Maßstab bzw. Maßstabsfaktor nun auch etliche Berechnungen an Karten vorgenommen werden. Die mögliche Fülle an Aufgaben könnte den nachfolgenden Beispielen folgen.

Aufgabe 1: Berechne unter Zuhilfenahme deiner Karte die Entfernung von Wien nach Windhuk (Namibia) entlang eines Meridians!

Aufgabe 2: Berechne unter Zuhilfenahme deiner Karte die Entfernung von Wien nach Chabarowsk (Russland) entlang eines Breitenkreises (Abb. 41)!

(Die hierfür verwendeten Karten sollten von der Lehrperson zur Verfügung gestellt werden.)

Die Aufgabe 2 soll nun zur besseren Veranschaulichung dienen.



Abbildung 41: Die Städte Wien und Chabarowsk auf einer Zylinderkarte
Quelle: Hölzel-Universalatlas, S. 176, verkleinert

Die Städte Wien und Chabarowsk liegen beide etwa am 48. Breitengrad. Der auf der Karte gemessene Abstand dieser beiden Orte beträgt etwa 9,2 cm. Der Maßstab der zugrunde liegenden Karte beträgt 1:150 Mio. Daraus ergibt sich mit der Formel für den Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises (siehe S. 68) ein Maßstab von:

$$M_{48^\circ n.B.} = \frac{1}{\cos(48^\circ)} \cdot 150000000 \approx 224171482,5. \text{ Für die Kartenstrecke von 9,2 cm ergibt dies}$$

damit eine Naturstrecke von etwa 20624 km. Vergleicht man nun die errechnete Strecke mit jener der kürzesten Verbindung laut Google Earth, so zeigen sich große Unterschiede. Die Orthodrome hat eine Länge von etwa 7772 km und ist somit nur ein Drittel im Vergleich zur oben errechneten Länge (Abb. 42). Dies kann dadurch begründet werden, dass der Weg entlang eines Breitenkreises, der nicht der Äquator ist, stets länger ist als eine Orthodrome und da bei kleinmaßstäblichen Karten Messungen (9,2 cm) immer ungenau sind.

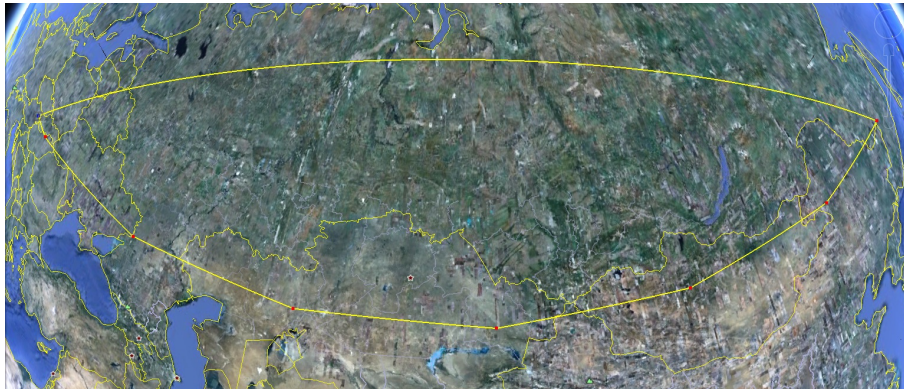


Abbildung 42: Vergleich einer Wegstrecke entlang einer Orthodrome (oben) und entlang eines Breitenkreises (unten)
Erstellt mit Google Earth

Die Resultate von Aufgaben des Typs 2 können herangezogen werden, um sich Gedanken zu machen, ob die so errechneten Entfernungen auch die kürzesten sind. Weiters können digitale Globen oder Google Earth bei der Untersuchung der errechneten Entfernungen herangezogen werden. Es kann angenommen werden, dass den Schüler_innen sehr schnell auffällt, dass bei der Entfernungsberechnung von Orten des selben Breitengrades (ungleich dem Äquator) die digitalen Medien nicht den jeweiligen Breitenkreis wählen.

3. 10 Krümmung von Flächen

Bis zum jetzigen Zeitpunkt weiß man, dass es keine perfekte Karte einer Sphäre oder eines noch so kleinen Ausschnitts davon geben kann. Weiters wurde oben gezeigt, dass auch gewisse Kombinationen von Eigenschaften nicht möglich sind. Es kann z. B. keine Abbildung der Erdoberfläche geben, welche gleichzeitig längentreu und konform ist (siehe S. 45). Es wurde bereits zum Ende des 18. Jahrhunderts von Leonhard Euler bewiesen, dass es keine Karte geben kann, welche einen konstanten Maßstab besitzt – also eine isometrische Abbildung der Sphäre in einer Ebene (S. 56).

Es befassen und befassten sich jedoch eine Vielzahl von Mathematiker_innen mit den Problemen und Möglichkeiten der Verebnung von räumlichen Gebilden. Man fand heraus, dass es möglich ist, einen Kegel – besser gesagt einen Ausschnitt des Kegelmantels – verzerrungsfrei in eine Ebene abzubilden. Dem gegenüber konnten jedoch andere, ebenfalls gekrümmte Gebilde wie beispielsweise ein Torus nicht ohne Verlust gewisser Eigenschaften

verebnet werden. Man kam also zum Schluss, dass *Krümmung nicht gleich Krümmung* ist. Im Laufe seines Lebens „musste“ sich auch einer der größten Mathematiker aller Zeiten mit diesen Problemen auseinandersetzen. Carl Friedrich Gauß befasste sich mehrmals mit der Vermessung von Staaten und Königreichen sowie der Darstellung jener Gebiete. Er war auch maßgeblich an der 1818 beginnenden Vermessung des Königreichs Hannover beteiligt. Im Zuge dieser Untersuchung fand Gauß heraus, dass die Gestalt (Krümmung) eines Körpers durch gewisse geodätische Messungen bestimmt werden kann. Hierfür spielen vor allem die Winkelsummen von Dreiecken auf diesen Gebilden eine entscheidende Rolle. Jene Formen, deren Winkelsummen größer als 180° sind, sollen als *positiv gekrümmt* bezeichnet werden, und jene, deren Winkelsummen kleiner als 180° sind, als *negativ gekrümmt* (Abb. 43).

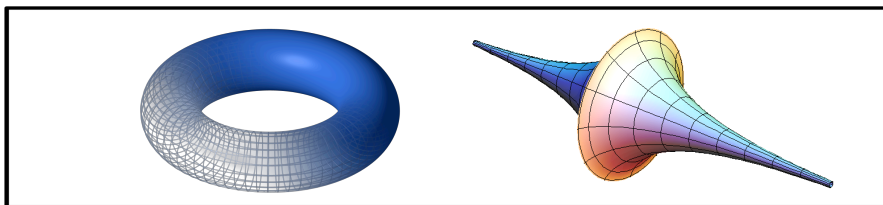


Abbildung 43: Beispiele für positiv (links) und negativ (rechts) gekrümmte Flächen

Quellen: links: <http://www.toppix.de/wp-content/uploads/2008/12/torus.png> /
rechts: www.toppix.de/wp-content/uploads/2008/12/torus.png - Stand je 23.9.2011

Darauf basierend konnte Carl Friedrich Gauß in seinem *theorema egregium* zeigen, dass man einen Körper auf einen weiteren nur dann verzerrungsfrei abbilden kann, wenn Urbild und Bild die selbe *gaußsche Krümmung* (K_g) vorweisen. Dies ist jedoch nur eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die verzerrungsfreie Abbildung.

Im Allgemeinen ist die gaußsche Krümmung ein lokales Phänomen. Man stelle sich beispielsweise einen Torus (siehe Abb. 43 [links]) oder eine Pseudosphäre (siehe Abb. 43 [rechts]) vor. An unterschiedlichen Stellen dieser beiden dreidimensionalen Körper können verschiedene gaußsche Krümmungen festgestellt werden. Genauer formuliert muss also die notwendige Bedingung für eine verzerrungsfreie Abbildung lauten, dass die gaußsche Krümmung eines jeden Urbildpunktes gleich der gaußschen Krümmung des dazugehörigen Bildpunktes ist.

Allgemein erhält man die gaußsche Krümmung einer Fläche in einem Punkt P als Produkt der Kehrwerte der Hauptkrümmungsradien dieses Punktes. Die Hauptkrümmungsradien werden vom Maximum und Minimum der Krümmungsradien gebildet. Es gilt also folgende Formel:

$K_g = \frac{1}{R_{\max} \cdot R_{\min}}$. Gibt es auf einem Körper gewisse Punkte, an welchen die Hauptkrümmungsradien gleich sind, so bezeichnet man diese Punkte als *Nabelpunkte*. Für alle Punkte einer Sphäre gilt $R_{\max} = R_{\min}$. Es sind also alle Punkte einer Kugeloberfläche Nabelpunkte. Daher gilt für das gaußsche Krümmungsmaß auf der ganzen Kugel $K_g = \frac{1}{R^2}$ (Klein, S. 280 f. und Feeman, S. 36 f.).

3. 11 Ein erneuter Blick auf die Projektionen

Der folgende Teil dieser Arbeit wird sich ein letztes Mal mit flächen- und winkeltreuen Karten auseinandersetzen. Hierbei soll mit den flächentreuen Karten begonnen werden.

3. 11. 1 Flächentreue Abbildungen

In einem ersten Schritt wird die Fläche zwischen zwei Längen- und Breitenkreisen errechnet. Um dies bewerkstelligen zu können soll erst die Fläche zwischen zwei Breitenkreisen errechnet werden. Man nimmt an, dass ein Breitenkreis der Äquator ist und der zweite Breitenkreis die geographische Breite ϕ besitzt. Die Oberfläche einer Kugel beträgt $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Eine Halbkugel hat dem zufolge eine Oberfläche von $2 \cdot \pi \cdot r^2$. Die gesuchte Fläche ist nun die Fläche der Halbkugel abzüglich der Kugelkalotte nördlich oder südlich des gegebenen Breitenkreises (Abb. 44). Die Fläche der Kugelkalotte wird mit der Formel $2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ errechnet. Um diese Rechnung ausführen zu können muss also die Höhe h errechnet werden. Es gilt: $\sin(\phi) = \frac{d}{r} \Rightarrow d = r \cdot \sin(\phi) \Rightarrow h = r - d = r - r \cdot \sin(\phi) = r \cdot (1 - \sin(\phi))$.

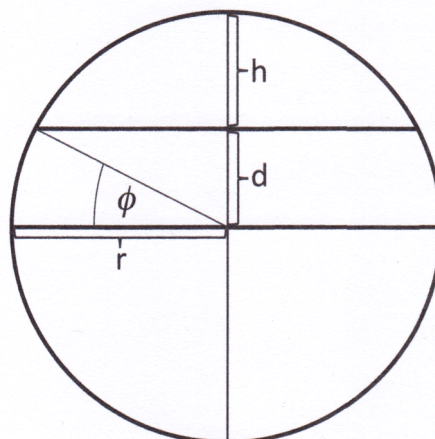


Abbildung 44: Skizze zur Herleitung der Flächenformel für die Kugelkalotte

Für die Fläche zwischen den oben angegebenen Breitenkreisen gilt also $A_B = A_{HK} - A_{KA}$.

Damit: $A_B = 2 \cdot \pi \cdot r^2 - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Rightarrow A_B = 2 \cdot \pi \cdot r^2 - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (1 - \sin(\phi)) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (1 - 1 + \sin(\phi)) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sin(\phi)$.

Möchte man nun allgemein die Fläche zwischen zwei Breitenkreisen mit Breiten ϕ_1 und ϕ_2 errechnen, so muss man bei obiger Formel nur leichte Modifikationen vornehmen und es ergibt sich $A_B = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))$ (für $\phi_2 > \phi_1$).

Die Fläche welche zwischen den Meridianen mit Länge θ_2 und θ_1 liegt (für $\theta_2 > \theta_1$) hat einen

Anteil von $\frac{\theta_2 - \theta_1}{360^\circ} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi}$ der gesamten Kugeloberfläche. Mit diesem Wissen ergibt sich

nun für den Flächeninhalt zwischen den oben angegebenen Längen- und Breitenkreisen:

$$A_{BL} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1)) \Rightarrow A_{BL} = r^2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1)) \text{ (Abb. 45).}$$

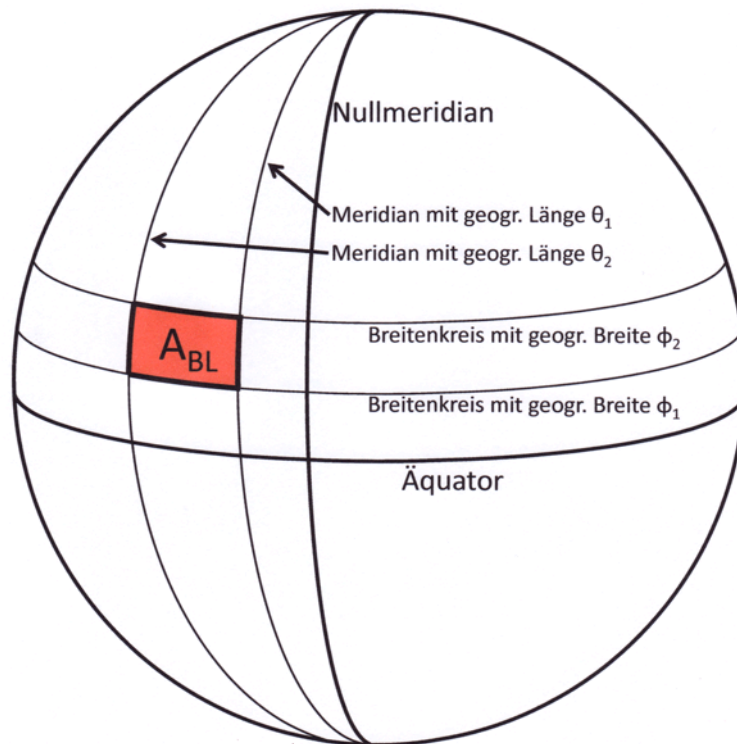


Abbildung 45: Fläche zwischen geogr. Breite ϕ_2 und ϕ_1 sowie geogr. Länge θ_2 und θ_1

Es kann nun jedes Land oder jedes Gebiet der Erde mit mehr oder weniger solchen Vierecken bedeckt werden. Eine Karte ist also genau dann flächentreu, wenn alle Vierecke der Sphäre in ihren korrekten Proportionen wiedergegeben werden (Feeman, S. 49 f.).

Für die *flächentreue zylindrische Karte nach Lambert* gilt, dass alle Breitenkreise als Geraden mit Länge $2 \cdot r \cdot \pi$ dargestellt werden. Die Meridiane sind Geraden mit Länge $2 \cdot r$ und stehen auf die Breitenkreise normal. Die Fläche dieser Karte ist mit $4 \cdot r^2 \cdot \pi$ gleich der Oberfläche

der dazugehörenden Kugel (Flächentreue). Der Abstand der Breitenkreise wird mit steigender geographischer Breite immer geringer. Der Abstand des Breitenkreises mit Breite ϕ vom Äquator gleich $\sin(\phi)$ (siehe S. 60).

Johann Heinrich Lambert veröffentlichte auch eine *azimutale flächentreue Abbildung*. Diese Karte soll den Nordpol als Zentrum haben und den bereits oben beschriebenen Eigenschaften von azimutalen Abbildungen folgen (Meridiane sind Geradenbüschel – Breitenkreise sind konzentrische Kreise um den Pol).

Um nun *des Pudels Kern* dieser Abbildungen zu erkennen muss man die Maßstabsfaktoren dieser Abbildungen genauer untersuchen. Für den Maßstabsfaktor entlang eines

Breitenkreises bei einer zylindrischen Abbildung gilt $M_b = \frac{1}{\cos(\phi)}$ (siehe S. 68). Für den

Maßstabsfaktor dieser Abbildung entlang eines Längenkreeses gilt $M_l = h'(\phi)$ (siehe S. 69).

Die Funktion $h(\phi)$ gibt hierbei die Entfernung des Bildes des Breitenkreises vom Äquator an.

Bei azimutalen Abbildungen sind die Maßstabsfaktoren wie folgt: $M_b = \frac{r(\phi)}{\cos(\phi)}$ (siehe S. 69)

und $M_l = r'(\phi)$ (siehe S. 70). Dabei wird der Radius des Breitenkreises ϕ mit $r(\phi)$ in der Karte wiedergegeben. Für ein Viereck – begrenzt durch zwei Breitenkreise und zwei Meridiane – gilt also, dass die Länge um den Faktor M_l und die Breite um den Faktor M_b gestreckt oder gestaucht wird. Die Fläche des gesamten Vierecks wurde hierdurch also um den Faktor $M_b \cdot M_l$ vergrößert oder verkleinert.

Eine flächentreue Karte erhält man, wenn nun diese Verzerrungen über die ganze Karte hinweg gleich sind. Anders ausgedrückt, wenn $M_b \cdot M_l = \text{konstant}$ gilt.

Bei der zylindrischen Abbildung muss also $\frac{1}{\cos(\phi)} \cdot h'(\phi) = \text{konstant}$ gelten. Da $h(\phi)$ gleich

$\sin(\phi)$ ist (siehe S. 60), gilt $\frac{1}{\cos(\phi)} \cdot h'(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)} \cdot \cos(\phi) = 1$ – also konstant.

Für azimutale Abbildungen muss selbiges gelten.

Die Gleichung hierfür ist $r'(\phi) \cdot \frac{r(\phi)}{\cos(\phi)} = \text{konstant}$.

Die Lösung dieser Differentialgleichung bringt $r(\phi) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ – da gilt:

$$r'(\phi) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow r \cdot r' \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right] \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} = -\cos(\phi) \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} = -1.$$

Für eine azimutale flächentreue Abbildung muss also der Radius des Breitenkreisbildes mit geographischer Breite ϕ gleich $2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$ sein (Feeman, S. 49 f. und Hake et al, S. 60 f.).

Solche Abbildungen – vor allem die zylindrischen flächentreuen Karten – besitzen die negative Eigenschaft, dass sie die Form der abzubildenden Flächen verzerren. Mit steigender Breite kommt es schnell zu starken Verzerrungen der Landflächen was zur Folge hat, dass dieser Kartentyp sehr selten verwendet wird (Abb. 46).

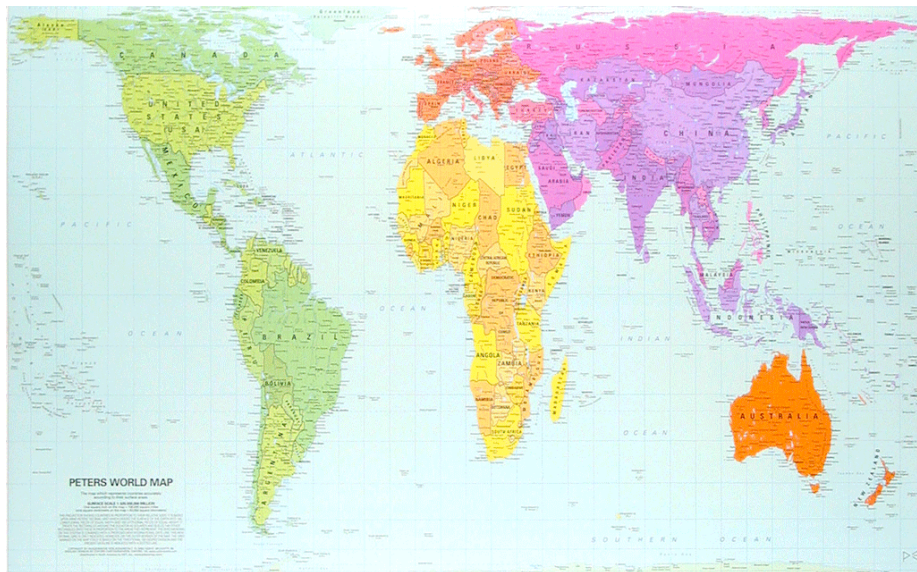


Abbildung 46: Peters-Karte als Beispiel einer flächentreuen Abbildung

Quelle: verändert nach

http://2.bp.blogspot.com/_6Z3_v5HO_V8/TPiOz9d8dZI/AAAAAAAAAul/npv1P9_CaTk/s1600/petersprojection-over3.gif
Stand 23.09.2011

Um die Verzerrungen nun auch nahe den Polen in einem erträglichen Maß zu halten, muss der Zylinder modifiziert werden. Anstelle eines Berührzylinders soll nun ein *Schnittzylinder* als Bildmenge gewählt werden (Abb. 47). Hierdurch hat die Karte nun zwei Breitenkreise, welche längentreu dargestellt werden. Die Länge deren Bilder beträgt hierbei $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos(\phi)$ wobei r der *Streckungsfaktor* dieser Breitenkreisbilder ist. Jene Breitenkreise, welche eine geringere geographische Breite besitzen, werden auf diese Länge gestaucht, jene die eine größere Breite besitzen werden auf diese Länge gestreckt. Dadurch kommt es zu einer Dreiteilung der Karte und geringeren Verzerrungen. Der Abstand der Breitenkreise mit Breite

ϕ_1 vom Äquator muss bei dieser Abbildung $h(\phi_1) = \underset{\text{für Berührzylinder}}{r \cdot \sin(\phi_1)} \cdot \underset{\text{Verzerrungsfaktor}}{\frac{1}{\cos(\phi)}}$ betragen. Damit

ergibt sich eine Gesamtfläche von $4 \cdot \pi \cdot r^2$ für die Karte (setze $\phi_1 = 90^\circ$) – was für eine flächentreue Karte von Nöten ist.

Die Wahl des Schnittzylinders (Abb. 47) und somit der längentreuen Breitenkreise steht dem Verfasser bzw. der Verfasserin der Karte frei. Es gibt jedoch einige Schnittzylinder, welche im Laufe der Zeit an Bekanntheit und Bedeutung gewonnen haben. Die bekannteste und auch sehr umstrittene zylindrische flächentreue Abbildung ist die Gall-Peters-Karte. Diese Karte bildet die Breitenkreise mit 45° nördlicher bzw. südlicher Breite längentreu ab. Arno Peters publizierte diese Karte – mit oder ohne dem Wissen, dass diese Karte bereits über 100 Jahre zuvor von James Gall veröffentlicht wurde – in den 1970er Jahren (siehe Abb. 46, S. 77). Diese Karte gibt die Gestalt jener Länder um den Äquator auf Kosten der Länder der mittleren Breiten sehr genau wieder. Dadurch sollte auf die Bedeutung und Wichtigkeit der Entwicklungsländer aufmerksam gemacht werden und deren Probleme in den Fokus gerückt werden.

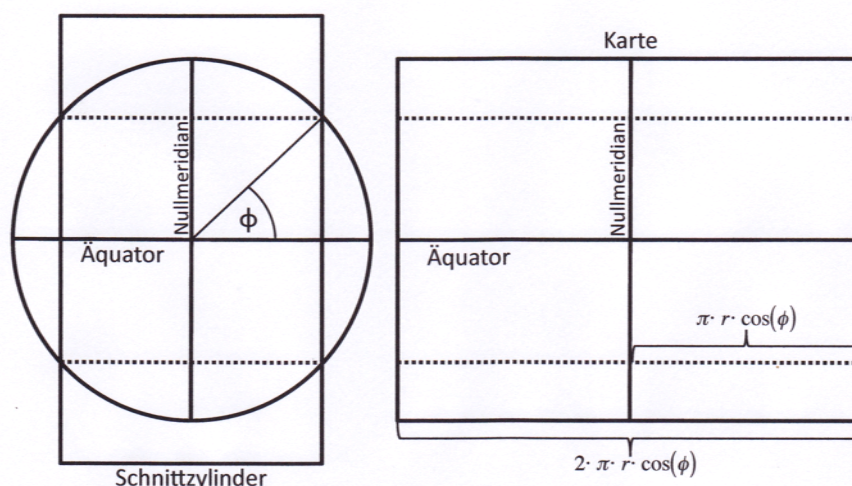


Abbildung 47: Karte auf Basis eines Schnittzylinders

Eine weitere Möglichkeit der flächentreuen Abbildung der Erde stellen die *Planisphären* dar. Hierbei ist der Bildbereich eine Ellipse oder eine ellipsenähnliche Fläche. Die Meridiane werden hierbei stets als gekrümmte Linien dargestellt wogegen die Darstellung der Breitenkreise von der jeweiligen Projektion abhängt. Die bekanntesten Planisphären sind jene von Mollweide und Robinson (Feeman, S. 49 f. und Hake et al, S. 60 f.).

3. 11. 2 Konforme Abbildungen

Ähnlich den flächentreuen Karten sollen nun auch den konformen Abbildungen nochmals untersucht werden. Eine Karte ist dann winkeltreu, wenn der Winkel zwischen zwei Pfaden auf der Kugel gleich dem Winkel ihrer Bilder ist. Um nun überprüfen zu können, ob eine Projektion konform ist, müsste man alle Winkel aller Pfade auf der Sphäre und in der Karte messen. Da dieses Vorhaben nicht zu realisieren ist, suchte man nach anderweitigen Möglichkeiten.

Die Tatsache, dass alle Winkel von Urbildern und Bildern gleich sein müssen um eine Karte konform nennen zu dürfen, hat zur Folge, dass auch die Winkel, welche die Längen- und Breitenkreise einschließen, identisch sein müssen. Der Winkel, welcher von beliebigen Breiten- und Längenkreisen auf der Sphäre eingeschlossen wird, ist stets ein rechter. Demnach müssen die Bilder der Breitenkreise und Meridiane ebenfalls einen rechten Winkel bilden. Diese Eigenschaft wird bei den zylindrischen und azimutalen Karten erfüllt – dies ist jedoch nur eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung. Um nun Winkeltreue in jedem Punkt zu erhalten, müssen die Maßstabsfaktoren entlang des dazugehörigen Breiten- und Längenkrees gleich sein. Es muss also $M_b = M_l$ gelten. Typische konforme Abbildungen sind die Mercatorprojektion (siehe S. 60) und die stereographische Projektion (siehe S. 55). Letztere soll nun näher untersucht werden.

Die stereographische Projektion erlebte zum Ende des 17. Jahrhunderts eine Renaissance, nachdem sie bereits vor Christi Geburt von den Griechen entdeckt und verwendet wurde. Edmund Hally verwendete sie für Sternkarten und konnte beweisen, dass diese Abbildung winkeltreu ist. Wie bereits in Kapitel 3.8.1 (siehe S. 53 ff.) erwähnt, bilden bei einer azimutalen Projektion die Längenkreise eine Geradenbüschel, welche einander in einem Pol schneiden und die Breitenkreise werden als konzentrische Kreise dargestellt, deren Mittelpunkt wiederum ein Pol ist. Für den Radius eines solchen Breitenkreisbildes mit geographischer Breite ϕ gilt (nach Feeman, S. 62):

$$r(\phi) = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} = 2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right). \quad (\text{Es ist: } \frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \tan(\alpha), \text{ wie man durch}$$

Nachrechnen leicht sieht.) Aus Kapitel 3.9.1.2 (siehe S. 68 f.) wissen wir nun, dass für den Maßstabsfaktor entlang eines Breitenkreises gilt: $M_b = r(\phi) \cdot \sec(\phi) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$, da gilt:

$$\begin{aligned}
r(\phi) \cdot \sec(\phi) &= 2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} = \frac{2 \cdot \cos(\phi)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} \cdot \frac{1}{\cos(\phi)} = \\
&= \frac{2}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)} = \frac{2}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + 1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \\
&= 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right). \text{ Kapitel 3.9.2.2 (siehe S. 70) liefert f\u00fcr den Ma\u00dfstabsfaktor}
\end{aligned}$$

entlang eines L\u00e4ngenkreises: $M_l = r'(\phi) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$. Es gilt somit $M_l = M_b$, womit folgt, dass die stereographische Projektion konform (winkeltreu) ist (Feeman, S. 61 ff.).

4 Konkrete Umsetzung in Unterrichtsbeispielen

Das folgende Kapitel setzt sich mit konkreten Unterrichtsbeispielen um Thema „Kartographie im Mathematikunterricht“ auseinander. Es soll beschrieben werden, wie sich mögliche Schulübungsstunden zu diesem Thema darstellen könnten und welche Beispiele zur Hausübung zu bearbeiten wären. Weiters soll zu jedem Unterrichtsthema auch ein Schularbeitsbeispiel vorgestellt werden.

4. 1 Kartographie in der 1. Klasse AHS

Es soll nun vorgestellt werden, wie sich ein möglicher Einstieg in das Thema „Arbeiten mit einem Maßstab“ darstellen könnte.

Lehrplanbezug:

1.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern

- Maßstabszeichnungen anfertigen und Längen daraus ermitteln können
- Umfangs- und Flächenberechnungen an Rechtecken (und einfachen daraus zusammengesetzten Figuren)

1.2 Arbeiten mit Variablen

- Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können

In der nachfolgenden Unterrichtsplanung wird vor allem der unter Lehrplanpunkt 1. 3 aufgelistete Lehrstoff behandelt. „Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können“ kann jedoch bei der Behandlung des Maßstabs gefestigt und vertieft werden bzw. aus einem anderen Blickwinkel von Seiten der Schüler_innen bearbeitet werden.

4. 1. 1 Unterrichtsplanung

Es wird angenommen, dass der Lehrstoff des Lehrplans für Mathematik, welcher sich in Lehrplanpunkt „1. 1 Arbeiten mit Zahlen und Maßen“ findet, bereits im Schuljahr behandelt wurde. Die darin erworbenen Kompetenzen und Fertigkeiten bilden die Basis des im Nachfolgenden beschriebenen Unterrichtsbeispiels. Aus diesem Grund ist in der Jahresplanung darauf zu achten, dass das „Arbeiten mit einem Maßstab“ zu einem Zeitpunkt vorgesehen ist, wo diese grundlegenden Fähigkeiten bereits erlangt wurden. Sollte darauf nicht geachtet werden, so wird das Erreichen der Lernziele für viele Schüler_innen erheblich erschwert werden oder unmöglich werden.

Es wird angenommen, dass sich die Schule, in welcher der Unterricht stattfindet, in Wien befindet, eine Unterrichtsstunde an dieser Schule 50 Minuten dauert und das verwendete Schulbuch „Das ist Mathematik 1“ ist.

Phase / Zeit	Behandelte Themen bzw. Beispiele
Phase I 0' – 5'	- Administrative bzw. organisatorische Tätigkeiten
Phase II 5' – 10'	- Einführung bzw. Motivation des Themas - Anknüpfen an die Vorerfahrungen der Schüler_innen
Phase III 10' – 20'	- Grundlegendes Wissen über den Maßstab erlangen - Textverstehendes Lesen von mathematischen Texten
Phase IV 20' – 35'	- Bearbeitung konkreter Beispiele zum Thema Maßstab
Phase V 35' – 48'	- Bearbeitung des Arbeitsblattes
48' – 50'	Hausübung

Tabelle 5: Zeittafel der Unterrichtseinheit

Phase I

Zu Beginn der Unterrichtseinheit werden von der Lehrperson Eintragungen in das Klassenbuch vorgenommen, es werden verbesserte Hausübungen returniert sowie kurz besprochen und die aktuellen Hausübungen abgesammelt.

Phase II

Die Lehrperson zeichnet sehr stark vereinfachte Gegenstände in verkleinerter Form an die Tafel (Abb. 48). Die Schüler_innen sollen anschließend benennen was an die Tafel skizziert wurde.



Abbildung 48: Tafelbild zum Einstieg

Die Lehrperson fragte nun die Klasse, ob es denn so kleine Bäume oder Häuser in der Realität gibt. Es kann davon ausgegangen werden, dass dies von den Schüler_innen verneint wird und diese einwenden, dass es sich hierbei nur um Modelle („Bilder“) der Realität handelt.

Nun fragt die Lehrperson die Klasse, was man denn benötigt um herauszufinden, wie groß der skizzierte Baum in der Realität sei. Nach kurzer Zeit sollte der Terminus „Maßstab“ genannt werden. Ist dies nicht der Fall, so soll der Begriff von der Lehrperson genannt werden.

Nun sollen die Schüler_innen berichten, was sie über diesen Begriff bereits wissen oder ob dieser Begriff bereits in anderen Unterrichtsgegenständen thematisiert wurde.

Phase III

Es soll nun mit den Schüler_innen die Schulbuchseite 238 behandelt werden. Dabei soll das beschriebene Musterbeispiel von einem bzw. einer Schüler_in laut vorgelesen werden und der theoretische Teil von einem bzw. einer anderen Schüler_in. Im Anschluss daran sollen die Schüler_innen wiederholen, was sie sich aus dem Gelesenen gemerkt haben. Dies soll die Basis der nachfolgenden Heftnotiz sein.

Der Maßstab

Der Maßstab ist das Verkleinerungsverhältnis eines Modells der Realität im Vergleich zum realen Gegenstand.

Der Maßstab M wird angegeben als: $M = \frac{1}{m}$. Man nennt „ m “ die Maßstabszahl.

Ist m groß, so können große Gegenstände der Realität dargestellt werden.

Ist m klein, so können nur kleine Gegenstände der Realität dargestellt werden.

Berechnungen mit dem Maßstab

Es gilt: $Naturstrecke = \underbrace{\text{gemessene Strecke}}_{\text{gemessen in einer Karte / Modell}} \cdot \text{Maßstabszahl}$

Beispiel 1:

Eine Strecke ist in einer Karte 5 cm lang. Der Maßstab der Karte ist 1:1000. Wie lange ist die dazugehörige Naturstrecke?

Es gilt: $Naturstrecke = \text{gemessene Strecke} \cdot \text{Maßstabszahl}$ – also:

$$Naturstrecke = 5 \text{ cm} \cdot 1000 = 5000 \text{ cm} = \underline{50 \text{ m}}.$$

Antwort: Die Naturstrecke ist 50 Meter lang.

Beispiel 2:

Eine Naturstrecke ist 2 km lang. Diese Strecke soll nun in eine Karte mit Maßstab 1:10000 gezeichnet werden. Wie lange ist die Strecke in der Karte?

Es gilt: $\text{Naturstrecke} = \text{gemessene Strecke} \cdot \text{Maßstabszahl}$ – daraus folgt:

$$\text{gemessene Strecke} = \frac{\text{Naturstrecke}}{\text{Maßstabszahl}} \text{ – also:}$$

$$\text{gemessene Strecke} = \frac{2 \text{ km}}{10.000} = \frac{2000 \text{ m}}{10.000} = 0,2 \text{ m} = 2 \text{ dm}$$

Antwort: Die Strecke in der Karte ist 2 Dezimeter lang.

Phase IV

Mit Hilfe der obigen Ausführung zum Maßstab sollen nun die Beispiele 1232b sowie 1233b (Abb. 49) gelöst werden. Die Lehrperson steht in dieser Phase für Fragen zur Verfügung, er oder sie rechnet die Beispiele jedoch nicht an der Tafel.

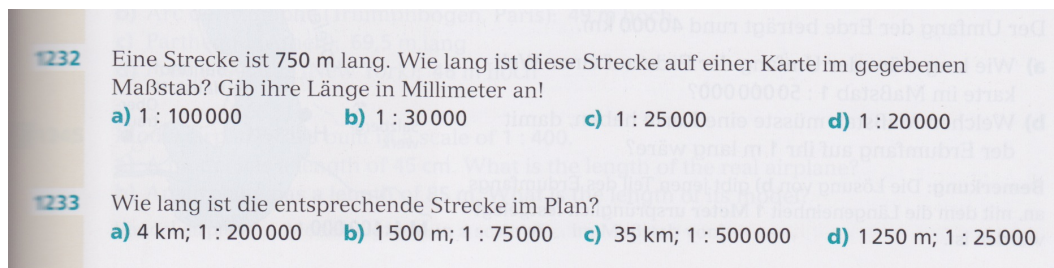


Abbildung 49: Beispiele zum Üben des Maßstabs
Quelle: Reichel und Humenberger, S. 239

Phase V

Nun sollen die Schüler_innen in Partnerarbeit das zur Verfügung gestellte Arbeitsblatt (nächste Seite) lösen. Neben dem jeweiligen Rechenweg sowie numerischen Ergebnis soll auch diskutiert werden, ob das Ergebnis einen Sinn ergibt – also ob es in der Realität so große bzw. kleine Objekte gibt.

Arbeitsblatt

Miss die Länge des dargestellten Objekts und berechne mit Hilfe des beigegebenen Maßstabs die reale Länge des Objekts.



Finger - Maßstab = 1:100

Quelle: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Finger.agr.jpg>



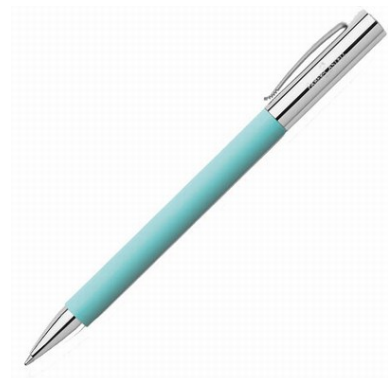
Ast - Maßstab = 1:10

Quelle: <http://www.eder-thomas.at/alben/tiere%20wildlife/tiere%20wildlife/album/sliedes/fliege%20am%20ast.nef.jpg>



Regenschirm - Maßstab = 1:250

Quelle: http://static.freepik.com/fotos-kostenlos/regenschirm-geschlossen_19-121570.jpg



Kugelschreiber - Maßstab = 1:2

Quelle: http://imworld.aufeminin.com/dossiers/D20090609/Ambition-T-rkis-Kugelschrei-103829_L.jpg

Als Hausübung sind die Beispiele: 1232a sowie 1233a zu berechnen sowie selbst ein Beispiel wie im Arbeitsblatt zu finden, wo der Maßstab sinnvoll ist.

Lernziele:

- i) Die Schüler_innen sollen den Begriff des Maßstabs und der Maßstabszahl kennenlernen und erkennen können, ob mit dem gegebenen Maßstab große oder kleine Teile der Realität dargestellt werden können.
- ii) Die Schüler_innen sollen die reale Strecke errechnen können, wenn Kartenstrecke sowie Maßstab gegeben sind sowie vice versa.

4. 1. 2 Ein Schularbeitsbeispiel zum Thema Maßstab

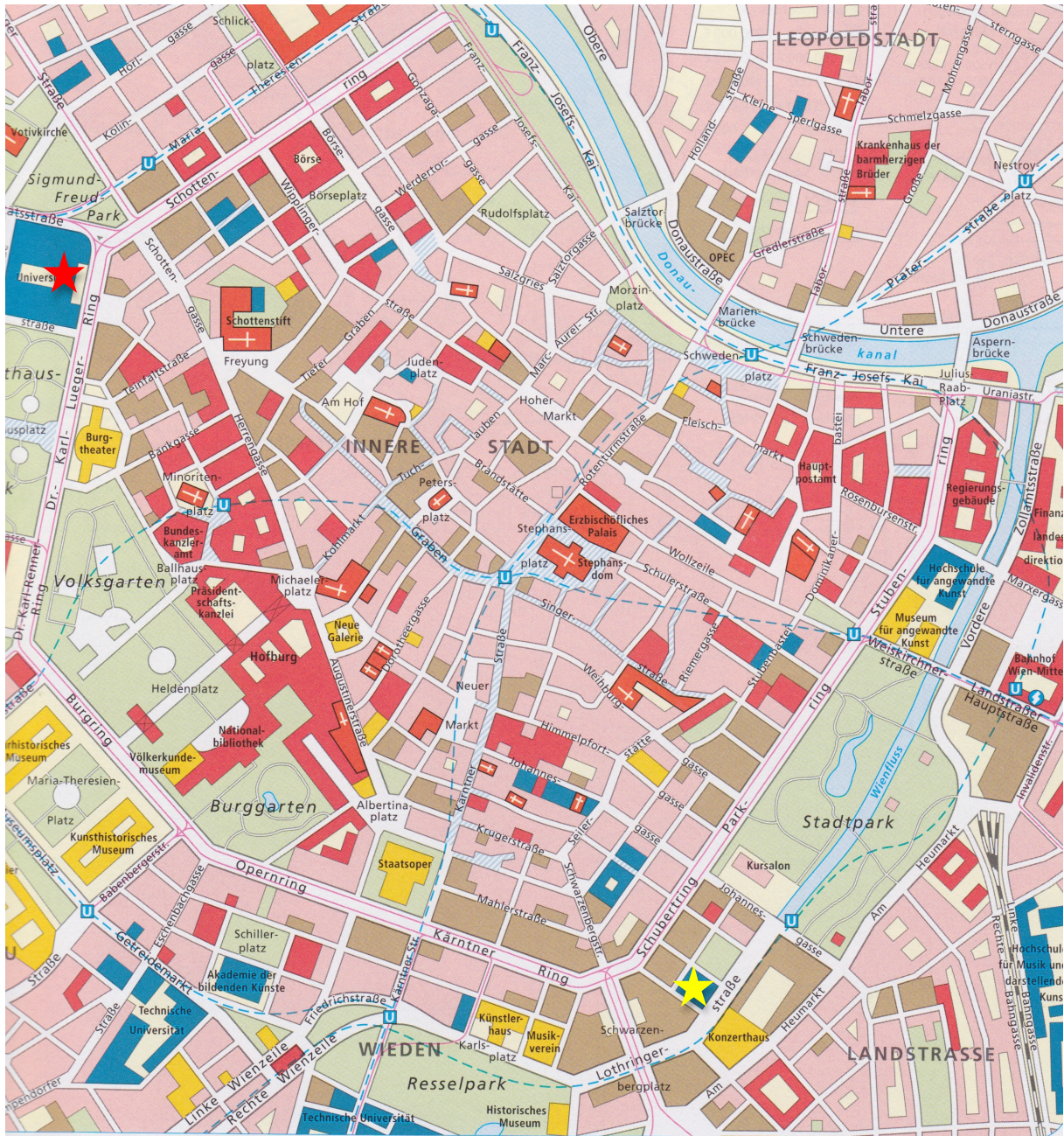
Beispiel 1: Wanderung durch Wien

A)

Zeichne den Weg vom Akademischen Gymnasium (gelber Stern) zur Universität (roter Stern) entlang des Rings ein. Berechne mit Hilfe des Maßstabs die dazugehörige Naturstrecke!

B)

Wie lange benötigst du für diese Strecke, wenn du 4 km/h schnell gehst?



**Abbildung 50: Karte der Stadt Wien
Maßstab 1:10000**

Quelle: Schulatlas Österreich, S. 9 (verkleinert)

Lösung:

A)

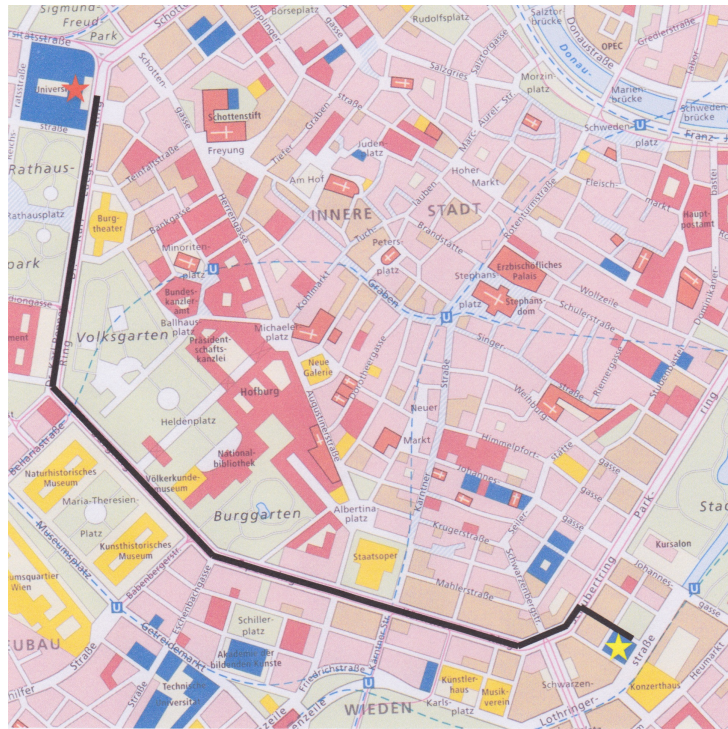


Abbildung 51: Weg vom AkG zur Universität Wien
Quelle: Schulatlas Österreich, S. 9 (verkleinert)

Die Kartenstrecke des obig eingezeichneten Weges ist 21,5 cm lang. Bei den Arbeiten der Schüler_innen muss darauf geachtet werden, dass der eingezeichnete Weg auch der in der Karte gemessene ist. Weiters sollte den Schüler_innen eine „angemessene“ Fehlertoleranz beim Messen zugestanden werden. Bei diesem konkreten Beispiel (Abb. 50 bzw. Abb. 51) bietet sich eine Fehlermaß vom einem Zentimeter zur eingezeichneten Strecke an.

Mit der Formel $Naturstrecke = gemessene\ Strecke \cdot Maßstabszahl$ ergibt sich folgende Naturstrecke: $21,5(cm) \cdot 10000 = 215000\ cm = 2150\ m = 2,15\ km$.

Antwort: Die Naturstrecke vom Akademischen Gymnasium zur Universität ist 2,15 km lang.

B)

Für die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung gilt: $Geschwindigkeit = \frac{Weg}{Zeit}$.

Daraus ergibt sich: $Zeit = \frac{Weg}{Geschwindigkeit}$. Mit den obigen Daten ergibt sich somit:

$$Zeit = \frac{2,15}{4} \approx 0,54\ Std \approx 32\ min.$$

Antwort: Man benötigt vom Akademischen Gymnasium zur Universität etwa 32 Minuten.

4. 2 Kartographie bzw. Geodäsie in der 7. Klasse AHS

Es soll nun untersucht werden, wie sich eine mögliche Verbindung zwischen Mathematik sowie Kartographie in der gymnasialen Oberstufe darstellen könnte. Hierzu würde sich beispielsweise die Vektorrechnung oder die nichtlineare analytische Geometrie anbieten. Exemplarisch soll diese Verbindung nun am Thema „Kugel“ untersucht werden.

Lehrplanbezug:

Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittlinien durch Gleichungen
- Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittlinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten

4. 2. 1 Unterrichtsplanung

Die im Nachfolgenden vorgestellte Unterrichtsplanung soll am Ende des oben angegebenen Lehrstoffes erfolgen. Diese Einheit soll zur Wiederholung sowie Festigung der gelernten Fähigkeiten und Kompetenzen des Lehrplanpunktes „Nichtlineare analytische Geometrie“ beitragen. Weiters sollen auch andere Lehrstoffpunkte der gymnasialen Oberstufe hierbei aufgefrischt werden sowie den Schüler_innen *lebensnahe* Einsatzmöglichkeiten der Mathematik gezeigt werden.

Die in dieser Unterrichtsplanung verwendeten Beispiele wurde aus dem Mathematiklehrbuch „Mathematik 3“ S. 30 übernommen bzw. danach modifiziert.

Phase / Zeit	Behandelte Themen bzw. Beispiele
Phase I 0' – 5'	- Administrative bzw. organisatorische Tätigkeiten
Phase II 5' – 25'	- Einführung bzw. Motivation des Themas - Anknüpfen an die Vorerfahrungen der Schüler_innen
Phase III 25' – 48'	- Grundlegendes Wissen über den Maßstab erlangen - Textverstehendes Lesen von mathematischen Texten
48' – 50'	Hausübung

Tabelle 6: Zeittafel der Unterrichtseinheit

Phase I

Zu Beginn der Unterrichtseinheit werden von der Lehrperson Eintragungen in das Klassenbuch vorgenommen, es werden verbesserte Hausübungen returniert sowie kurz besprochen und die aktuellen Hausübungen abgesammelt.

Phase II

Die Schüler_innen sollen folgendes Beispiel unter Zuhilfenahme der Winkelsätze lösen:

„Wie viel Prozent der Oberfläche einer Kugel mit Radius $r=5$ werden von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet, wenn ihr Abstand vom Kugelmittelpunkt 6,25 beträgt?“ (Taschner, S. 30)

Dieses Beispiel soll in mehrere Schritte aufgeteilt werden und jeder einzelne Schritt an der Tafel von einem Schüler bzw. einer Schülerin bearbeitet werden.

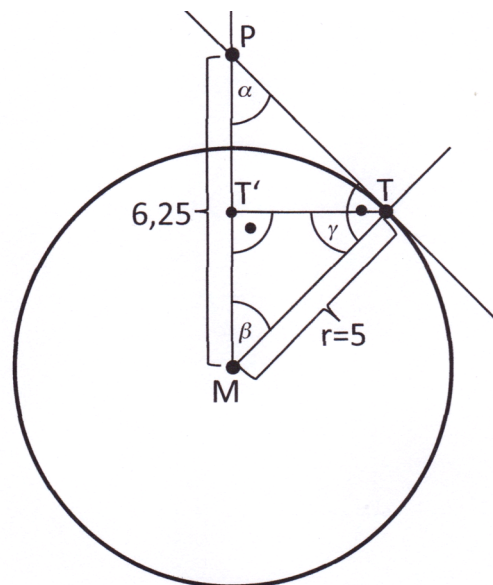


Abbildung 52: Skizze zum obigen Beispiel

Bei diesem Beispiel ist der Radius $r=5$ sowie die Strecke MP mit 6,25 gegeben. Weiters weiß man, dass der Winkel MTP gleich 90° ist (Abb. 52).

Damit: $\sin(\alpha) = \frac{5}{6,25} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{5}{6,25}\right) \approx 53^\circ$. Hiermit folgt $\beta \approx 37^\circ$ und $\underbrace{\alpha = \gamma}_{\text{ähnliche Dreiecke}} \approx 53^\circ$.

Die Strecke MT' soll als h' bezeichnet werden.

Wiederum gilt: $\sin(\gamma) = \frac{h'}{r} \Rightarrow h' = r \cdot \sin(\gamma) = 5 \cdot \sin(53^\circ) \approx 4$.

Damit folgt, dass die Höhe der Kugelkalotte etwa 1 Einheit beträgt. Die Oberfläche der Kugelkalotte kann mit der Formel $O_{KK} = 2 \cdot r \cdot h \cdot \pi$ errechnet werden. Für dieses konkrete Beispiel ergibt dies $O_{KK} = 2 \cdot r \cdot h \cdot \pi \approx 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \pi = 10 \cdot \pi$. Die Oberfläche der gegebenen Kugel ist $O_K = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 100 \cdot \pi$.

Damit folgt, dass 10% der Kugeloberfläche von der Lichtquelle beleuchtet werden.

Phase III

Das nachfolgend angegebene Beispiel sollen die Schüler_innen in Einzel- oder Partnerarbeit lösen.

„Die Erdkugel besitzt einen Radius von 6370 Kilometern. Wie viel Prozent ihrer Oberfläche werden in einem Zeitpunkt von einem Satelliten aus erfasst, der sich 19.110 Kilometer von der Erde entfernt bewegt?“ (verändert nach Taschner, S. 30).

Die Lehrperson steht hierbei den Schüler_innen zur Verfügung, falls diese etwaige Fragen haben.

Lösung:

Bevor mit den Rechnungen begonnen wird sollen die Schüler_innen eine Skizze (Abb. 53) des obig beschriebenen Sachverhalts anfertigen.

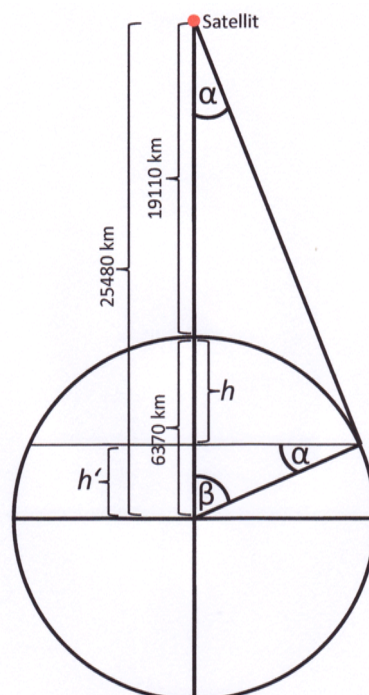


Abbildung 53: Erfassung der Erdoberfläche durch einen Satelliten

Mit den obigen Daten ergibt sich: $\sin(\alpha) = \frac{6370}{25480} \Rightarrow \alpha \approx 14,5^\circ \Rightarrow \beta \approx 75,5^\circ$. Als nächster Schritt wird nun die Strecke h' errechnet. Es gilt: $h' = 6370 \cdot \sin(14,5) \approx 1595 \text{ km}$. Damit muss die Länge der Strecke h gleich 4775 km lang sein. Wendet man nun die Formel für die Oberfläche einer Kugelkalotte (S. 90) auf diese Daten an, so erhält man folgende Fläche: $O_{KK} = 2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot 4775 \approx 191114077 \text{ km}^2$. Die Oberfläche der gesamten Sphäre mit Radius 6370 km beträgt rund 509904364 km^2 . Hiermit folgt, dass etwa 37,5% der Erdoberfläche vom Satelliten erfasst werden.

Als Hausübung soll das Beispiel aus der ersten Phase nochmals gelöst werden – nun jedoch **ohne** Zuhilfenahme der Winkelsätze.

Lösung:

Wenn man das erste Beispiel ohne Winkelsätze bzw. Trigonometrie lösen möchte, so kann man sich *ähnliche Dreiecke* zu Nutze machen. Das Dreieck mit den Eckpunkten P , T und M ist ähnlich zum Dreieck mit den Eckpunkten T , T' und M (Abb. 52). Daraus folgt, dass gelten muss: $\frac{\overline{MT'}}{\overline{TM}} = \frac{\overline{TM}}{\overline{PM}} \Rightarrow \frac{\overline{MT'}}{5} = \frac{5}{6,25} \Rightarrow \overline{MT'} = 4$. Die Höhe der zu berechnenden Kugelkalotte ist folglich 1 Einheit lang. Damit ergibt sich eine Oberfläche von 10π Quadrateinheiten. Da die Oberfläche der gesamten Sphäre 100π Quadrateinheiten ist, werden 10% der Kugeloberfläche beleuchtet.

Lernziele:

- i) Die Schüler_innen sollen ihr Wissen und ihre Kompetenzen aus mehreren Bereichen nutzen können um ein konkretes Problem lösen zu können.
- ii) Die Schüler_innen sollen auf verschiedene Arten an ein Problem herangehen können.

4. 2. 2 Zwei Schularbeitsbeispiele zum Thema Kugel

Beispiel 1: Gnomonische Projektion

Bei der gnomonischen Projektion befindet sich im Erdmittelpunkt die Lichtquelle. Alle Punkte einer Hemisphäre werden in eine Ebene abgebildet, welche zur Erdachse orthogonal ist und am Pol die Erdkugel schneidet. Der Radius der Erde sei 1. Bestimme den Abstand der Bildpunkte P' und Q' , deren Urbildpunkte P und Q folgende geographischen Koordinaten besitzen: P (48° n.B./ 16° ö.L.), Q (65° n.B./ 16° ö.L.).

Fertige vor der Rechnung eine entsprechende Konstruktion mit Zirkel und Lineal an.

Lösung:

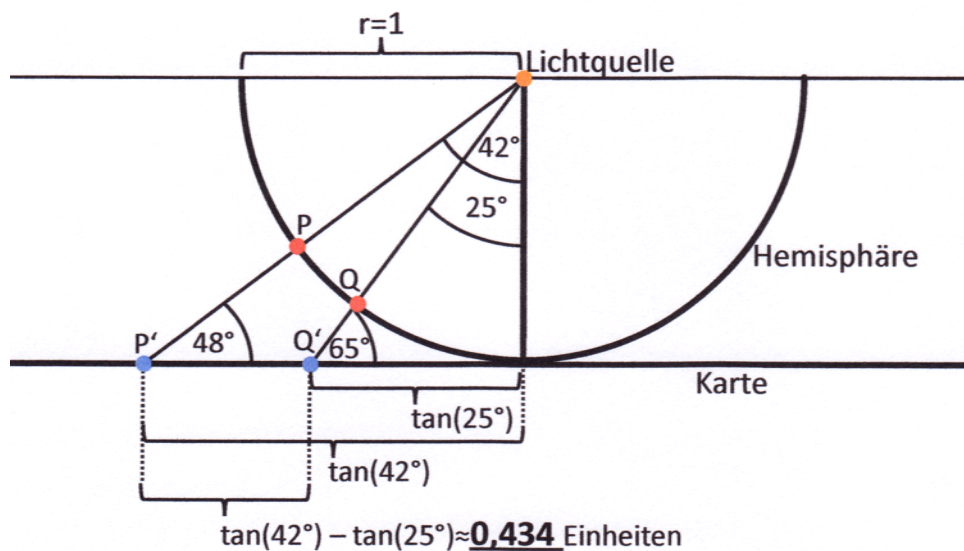


Abbildung 54: Skizze zur Lösung des ersten Schularbeitsbeispiels

Konstruktionsanleitung:

- 1) Zuerst wird der Halbkreis gezeichnet.
- 2) Es wird die Karten- sowie die dazu parallele Äquatorebene gezeichnet
- 3) In einem Winkel von 48° bzw. 65° zur Äquatorebene werden Strecken vom Halbkreismittelpunkt (Lichtquelle) bis zur Kartenebene gezeichnet.

Die Schnittpunkte dieser Strecken mit dem Halbkreis ergeben die Urbildpunkte P bzw. Q ; die Schnittpunkte mit der Kartenebene ergeben die Bildpunkte P' bzw. Q' (Abb. 54). Die Abstände der Bildpunkte vom Schnittpunkt der Kartenebene und des Halbkreises betragen $\tan(42^\circ)$ bzw. $\tan(25^\circ)$. Damit beträgt der Abstand der Bildpunkte etwa 0,434 Einheiten.

Beispiel 2: Satellit

Eine Satellit umkreist die Erde (Radius $r=6370 \text{ km}$). In einem Zeitpunkt erfasst dieser Satellit 25% der Erdoberfläche.

- Wie weit ist der Satellit von der Erde entfernt?
- Wie weit sind die entferntesten Punkte der Erdoberfläche, welche noch vom Satelliten erfasst werden, in diesem Zeitpunkt von jenem entfernt?

Fertige vorab eine Freihandskizze an (Abb. 55)!

Lösung:

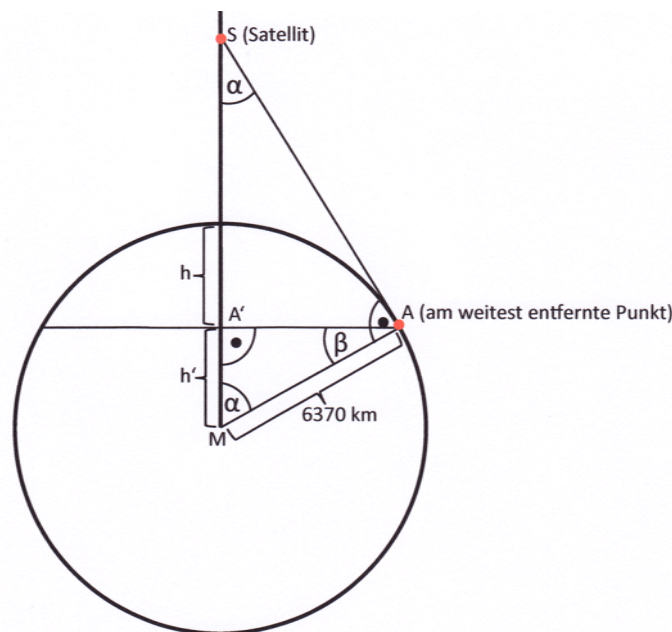


Abbildung 55: Skizze zur Lösung von Beispiel 2

a)

Die Oberfläche der Erde ist gleich: $O_{Erde} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi = 4 \cdot 6370^2 \cdot \pi \approx 509904364 \text{ km}^2$. Gesucht sind jedoch 25% dieser Kugeloberfläche. Dies entspricht: 127476091 km^2 . Hiermit folgt:

$$O_{KK} = 2 \cdot r \cdot h \cdot \pi = 127476091 \Rightarrow h = \frac{127476091}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{127476091}{2 \cdot 6370 \cdot \pi} = \frac{127476091}{12740 \cdot \pi} = 3185 \text{ km.}$$

Damit gilt: $h'=3185 \text{ km}$ ($=h$). Das Dreieck mit den Eckpunkten S, A und M ist ähnlich zu jenem mit den Eckpunkten A, A' und M. Somit muss gelten:

$$\frac{\overline{MS}}{6370} = \frac{6370}{3185} \Rightarrow \overline{MS} = 12740 \text{ km.}$$

Der Satellit ist also 6370 km von der Erde entfernt, also genau einen Erdradius.

b)

Das Dreieck mit den Eckpunkten S, A und M hat im Eckpunkt A einen rechten Winkel. Somit folgt nach dem *Lehrsatz des Pythagoras*:

$$\overline{SA}^2 = 12740^2 - 6370^2 \Rightarrow \overline{SA} = 6370 \cdot \sqrt{3} \text{ km.}$$

Die entferntesten Punkte der Erdoberfläche sind also rund 11030 km vom Satelliten entfernt.

5 Schlussworte

Im Gegensatz zu anderen Diplomarbeiten oder anderweitigen Monographien möchte ich kein Zitat an den Anfang meiner Arbeit stellen, sondern mit einem solchen beginnen zu schließen.

Man reist nicht um anzukommen, sondern um am Weg zu sein.

Johann Wolfgang von Goethe

Dieses Zitat beschreibt meine Auffassung von Mathematik im Allgemeinen und jene meiner Diplomarbeit im Speziellen sehr treffend. Im Zentrum meiner Untersuchungen der Verbindungen zwischen Mathematik und Geographie und Wirtschaftskunde standen nicht numerische Ergebnisse oder „fertige“ Formeln, sondern der Weg, wie man die Erde mathematisch erkunden kann. Man soll am Beispiel der Kugel nachvollziehen können, wie ein Mathematiker bzw. eine Mathematikerin argumentiert bzw. schlussfolgert und dass es zum gewünschten Ergebnis oder zur gesuchten Formel viele Wege gibt.

Das erste Kapitel sollte die Vorteile und Vorzüge des fächerübergreifenden Unterrichts hervor streichen, jedoch auch die Herausforderungen beleuchten, welche damit verbunden sind. Es wurde hierin beschrieben, welchen Mehrwert die schulische Behandlung eines konkreten Problems hat, wenn man sich jenem aus unterschiedlichen Richtungen nähert. Dieser Erfahrung als Lehrer in spe sehe ich mit großer Spannung entgegen und ich hoffe, dass sich der fächerübergreifende Unterricht verstärkt in den Schulen finden wird – ich werde auf alle Fälle das Meinige hierzu beitragen.

Das zweite Kapitel sollte das Vorurteil brechen, dass Mathematik nur in Verbindung mit Physik oder Chemie fächerübergreifend unterrichtet werden kann. Meines Erachtens ist es möglich, dass man jedes Unterrichtsfach in Verbindung mit Mathematik fächerübergreifend lehrt – was am Beispiel der Geographie und Wirtschaftskunde gezeigt wurde.

Den Kern meiner Arbeit bildete das Kapitel drei. Darin sollte gezeigt werden, welche Teile der nichteuklidischen Geometrie mit den Schülerinnen und Schülern behandelt werden könnten und dass diese gewissen Aspekte jenes Teilgebiets der Mathematik auch selbständig erarbeitet werden können. Weiters sollte verdeutlicht werden, dass die Möglichkeiten, ein reales Problem mathematisch darzustellen, begrenzt sind und dass man

hiervon öfter im Alltag betroffen ist als man unter Umständen glaubt. Die Hauptaufgabe der „Kartographie in Wahlpflichtfach Mathematik“ ist jedoch den Schülerinnen und Schülern das mathematische Argumentieren und Schlussfolgern näher zu bringen und somit die Lernenden in die mathematische Denkweise einzuführen.

Der letzte Abschnitt dieser Arbeit sollte zeigen, wie einfach man die Geographie und Wirtschaftskunde in den Mathematikunterricht integrieren und jenen dadurch mit noch mehr Leben füllen kann.

Abschließend möchte ich festhalten, dass mir das Abfassen dieser Arbeit sehr viel Freude bereitet hat. Noch mehr Freude empfinde ich jedoch, wenn ich daran denke, dass ich die Theorie dieser Arbeit in die Tat umsetzen werde.

6 Literatur

FACHLITERATUR

DUNCKER, L. und W. POPP, 1998, Fächerübergreifender Unterricht in der Sekundarstufe I und II – Prinzipien, Perspektiven, Beispiele. – Bad Heilbrunn

FEEMAN, T., 2002, Portraits of the Earth – A Mathematician Looks at Maps. – Villanova

HÄSING, P., 2009, Fächerübergreifender Unterricht in der gymnasialen Oberstufe aus Sicht der Lehrenden – Eine qualitative Studie. – Kassel

HAKE, G., D. GRÜNREICH und L. MENG, 2002, Kartographie – Visualisierung raum-zeitlicher Informationen – 8., vollständig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. – Berlin

HENNERMANN, K., 2006, Kartographie und GIS – Eine Einführung. – Darmstadt

HEUSER, H., 2004, Lehrbuch der Analysis – Teil 2 – 13. durchgesehene Auflage. – Wiesbaden

KLEIN, F., 2006, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie. – Saarbrücken

KOHLSTOCK, P., 2010, Kartographie – Eine Einführung – 2., überarbeitete Auflage. – Paderborn

LIEBMANN, H., 1923, Nichteuklidische Geometrie – Dritte, neubearbeitete Auflage. – Berlin und Leipzig

TORGE, W., 2003, Geodäsie – 2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. – Berlin

ATLANTEN

DIERCKE Weltatlas Österreich, 1995, Wien

HÖLZEL-UNIVERSALATLAS zu Geographie und Geschichte, 2006, Wien

SCHULATLAS Österreich, 2006, Wien

SCHULBÜCHER

GEOGRAPHIE UND WIRTSCHAFTSKUNDE

KLAPPACHER, O. et al, 2001, geo-link 1 – Lehr- und Arbeitsbuch. – Linz

MÜLLER, A., 2007, ganz klar – Geografie 1. – Wien

ZEUGNER, K., 2006, Hölzel-GW 1 – Faszination Erde 5. Schulstufe. – Wien

MATHEMATIK

1. Klasse

DORFMAYR, A., A. MISTLBACHER und A. NUSSBAUMER, 2006, MATHE BUCH 1. – Wien

GOLLMANN, M. et al, 2001, LEBENDIGE MATHEMATIK 1. – Wien

HUMENBERGER, H., Hrsg., 2007, Das ist Mathematik 1. – Wien

LEWISCH, I., 1987, Mathematik Verstehen – Üben – Anwenden – Band 1. – Wien

RAUBIK, U., 2001, Die Welt der Mathematik 1. – Wien

4. Klasse

BOXHOFER, E. et al, 2008, Mathematix 4. – Linz

HUMENBERGER, H., Hrsg., 2010, Das ist Mathematik 4. – Wien

5. Klasse

GÖTZ, St., H.-Ch. REICHEL, Hrsg., 2010, Mathematik 5. – Wien

SZIRUCSEK, E., 1989, Mathematik 5. – Korneuburg

6. Klasse

BÜRGER, H. et al, 2000, Mathematik Oberstufe 2. – Wien

GÖTZ, St., H.-Ch. REICHEL, Hrsg., 2010, Mathematik 6. – Wien

7. Klasse

TASCHNER, R., 2000, Mathematik 3. – Wien

LEHRPLÄNE

Die Unter- und Oberstufenlehrpläne der Pflichtgegenstände *Mathematik* und *Geographie und Wirtschaftskunde* sowie der *allgemeine Teil der Lehrpläne* wurden der Homepage des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur entnommen.

Unter nachfolgenden URLs sind diese abrufbar:

Lehrpläne der AHS-Unterstufe

http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.xml

Lehrpläne der AHS-Oberstufe

http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.xml

Allgemeiner Teil der Lehrpläne

(Verordnung der Bundesministerin für Bildung, Wissenschaft und Kultur, Artikel I)

www.bmukk.gv.at/medienpool/775/ahs1.pdf

Stand je 15. Juli 2011

Curriculum Vitae

Daten zu meiner Person

Name

Robert Weinhandl

Geboren

Am 22. September 1985

Geburtsort

Kittsee

Staatsbürgerschaft

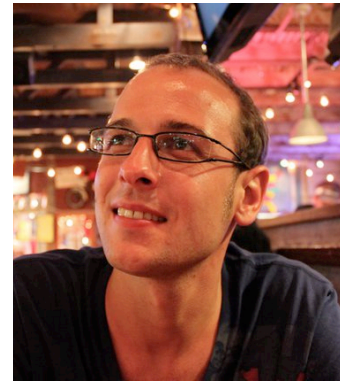
Österreich

Konfession

röm.-kath.

Familienstand

Ledig



Schulischer Werdegang

von Schuljahr 1992/1993
bis Schuljahr 1995/1996

Volksschule der Gemeinde Apetlon

von Schuljahr 1996/1997
bis Schuljahr 1999/2000

Bundesgymnasium und
Bundesrealgymnasium Neusiedl am See
(Unterstufe – Realgymnasium mit Geometrisch Zeichnen)

von Schuljahr 2000/2001
bis Schuljahr 2003/2004

Bundesgymnasium und
Bundesrealgymnasium Neusiedl am See
(Oberstufe – Realgymnasium mit Darstellender Geometrie
und Französisch)

Reifeprüfung am 11. Juni 2004

Im Zuge der Reifeprüfung wurde eine Fachbereichsarbeit in Geographie und Wirtschaftskunde geschrieben. Titel der Arbeit: „Entwicklung und Struktur des Weinbaus in den Gemeinden Apetlon, Gols, Mönchhof und Weiden.“

Universitärer Werdegang

von Wintersemester 2004/05
bis Wintersemester 2005/06

Studium an der Wirtschaftsuniversität Wien
Studienfach
Wirtschaft und Recht (1. Abschnitt)

seit Wintersemester 2005/06

Studium an der Universität Wien
Lehramtsstudium Mathematik sowie Geographie
und Wirtschaftskunde

Berufliche Erfahrungen

von Juli 2003
bis September 2003

Freier Mitarbeiter der „BVZ – Neusiedl“
Burgenländische Volkszeitung

seit Juli 2004

Mitarbeiter der UniCredit Bank Austria AG
bzw. UniCredit Business Partner GmbH

seit Oktober 2011

Unterrichtstätigkeit als Sondervertragslehrer am
Akademischen Gymnasium Wien