universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Das Phänomen des zyklischen Siebens für nichtkreuzende Partitionen

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Sabine Beil
Matrikelnummer:	0402679
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Univ.-Prof. Dr. Christian Krattenthaler

Wien, im Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Phänomen des zyklischen Siebens ist eine Eigenschaft einer erzeugenden Funktion $X(q)$ einer Menge kombinatorischer Objekte X, auf der eine endliche, zyklische Gruppe C operiert. Bezeichnet $\omega : C \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ eine Einbettung von C in $\mathbb{C}^\times$, so erfüllt das Tripel $(X, X(q), C)$ das *Phänomen des zyklischen Siebens*, falls

$$X(\omega(c)) = |\{x \in X : c \cdot x = x\}|$$

gilt. Äquivalent gilt für die Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_{|C|-1}$ in

$$X(q) \equiv \sum_{j=0}^{|C|-1} \alpha_j q^j \bmod (q^{|C|} - 1),$$

dass α_j die Anzahl aller Bahnen der Operation von C auf X, deren Stabilisatorordnung j teilt, ist. Definiert wurde das Phänomen des zyklischen Siebens von V. Reiner, D. Stanton und D. White 2003 in *The Cyclic Sieving Phenomenon* ([**41**]) und ist einer Erweiterung des $q = -1$-Phänomens von J. Stembridge ([**48**], [**47**]).

Ziel dieser Arbeit ist es, das Phänomen des zyklischen Siebens für sog. W-nichtkreuzende Partitionen zu formulieren und zu beweisen. Als Grundlage diente hierfür der Artikel *Cyclic Sieving of Noncrossing Partitions for Complex Reflection Groups* von D. Bessis und V. Reiner ([**11**]). Was sind W-nichtkreuzende Partitionen? Vorweg sei gesagt, dass W hier eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe bezeichnet. Der Begriff der W-nichtkreuzenden Partitionen ist eine algebraische Verallgemeinerung nichtkreuzender Partitionen einer endlichen Menge:

Definition. Zwei disjunkte Blöcke P und Q einer Partition von $\{1, \ldots, n\}$ *kreuzen* sich, wenn es natürliche Zahlen $1 \leq a < b < c < d \leq n$ mit $\{a, c\} \subseteq P$ und $\{b, d\} \subseteq Q$ gibt. Kreuzen sich keine Blöcke einer Partition von $\{1, \ldots, n\}$, so heißt diese *nichtkreuzend*.

Werden auf einem Kreis n Punkte eingezeichnet und im Uhrzeigersinn von 1 bis n nummeriert, so ist die Bedingung, dass sich zwei disjunkte Blöcke P und Q einer Partition $\mathcal{P}$ von $[n]$ kreuzen, äquivalent dazu, dass sich die konvexen Hüllen von P und Q schneiden. Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 1 ein Beispiel einer kreuzenden und einer nichtkreuzenden Partition.

Im Zusammenhang mit der algebraischen Verallgemeinerung des Begriffs der nichtkreuzenden Partitionen spielen unitäre Spiegelungsgruppen eine zentrale Rolle. Worum handelt es sich also bei einer unitären Spiegelungsgruppe? Als *Spiegelung* auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V bezeichnet man einen Endomorphismus von V endlicher Ordnung, der eine Hyperebene in V punktweise fixiert. Wird eine Gruppe G von Spiegelungen auf V erzeugt, dann heißt sie *unitäre Spiegelungsgruppe* von V. Eine irreduzible Spiegelungsgruppe von V, die von $\dim_{\mathbb{C}} V$ Spiegelungen erzeugt wird, heißt *wohlerzeugt*. In Kapitel 3 werden wir sehen, dass in einer wohlerzeugten Spiegelungsgruppe W stets Coxeterelemente - bestimmte reguläre Elemente - existieren. Außerdem können wir eine solche Gruppe mit einer

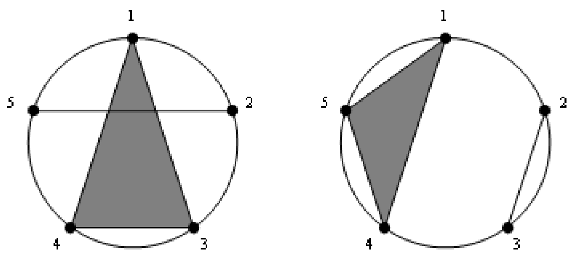

Abbildung 1. Eine kreuzende und eine nichtkreuzende Partition von $\{1, \ldots, 5\}$.

Halbordnung versehen, so dass für ein Coxeterelement c und das neutrale Element 1_W die Relation $1_W \leq c$ erfüllt ist. Das Ordnungsideal $[1_W, c]$ in W heißt dann die Menge der *W-nichtkreuzenden Partitionen* und wird mit $NC(W)$ bezeichnet. Der Begriff der W-nichtkreuzenden Partitionen geht zurück auf D. Bessis, T. Brady und C. Watt ([**8**], [**17**] und [**16**]).

Wollen wir das Phänomen des zyklischen Siebens für die Menge W-nicht- kreuzender Partitionen $NC(W)$ formulieren, so benötigen wir noch eine zyklische Gruppe, die auf $NC(W)$ operiert, und eine erzeugende Funktion von $NC(W)$.

Um eine geeignete zyklische Gruppe zu finden, betrachten wir wieder unser Beispiel der Menge nichtkreuzender Partitionen einer endlichen Menge $\{1, \ldots, n\}$. Hier soll die von $(1\ 2 \cdots n-1\ n)$ erzeugte, zyklische Untergruppe von S_n auf der Menge der nichtkreuzenden Partitionen operieren. Anschaulich werden durch diese Aktion die n Punkte am Kreis gegen den Uhrzeigersinn verschoben. In der algebraischen Verallgemeinerung entspricht diese Abbildung der Konjugation mit einem Coxeterelement. Als zyklische Gruppe wählen wir daher die von einem Coxeterelement c erzeugte, zyklische Gruppe C, die durch Konjugation auf $NC(W)$ operiert.

In Kapitel 2 wird gezeigt, dass einer unitären Spiegelungsgruppe von V eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_{\dim_{\mathbb{C}} V}$ zugeordnet werden können, die *Grade* von G. Sind $d_1 \leq \cdots \leq d_{\dim_{\mathbb{C}} V}$ die Grade von W, so ist

$$\operatorname{Cat}(W, q) = \prod_{i=1}^{\dim_{\mathbb{C}} V} \frac{[d_{\dim_{\mathbb{C}} V} + d_i]_q}{[d_i]_q}$$

eine erzeugende Funktion von $NC(W)$, wobei $[m]_q = \frac{1-q^m}{1-q}$. Jetzt haben wir ein den Voraussetzungen des Phänomens des zyklischen Siebens genügendes Tripel gefunden.

Satz (D. Bessis und V. Reiner [**11**], Therem 1.1). Das Tripel

$$(NC(W), \operatorname{Cat}(W, q), C)$$

erfüllt das Phänomen des zyklischen Siebens.

Zu Beginn wird in Kapitel 1 das Phänomen des zyklischen Siebens basierend auf dem Artikel *The Cyclic Sieving Phenomenon* von V. Reiner, D. Stanton und D. White ([**41**]) eingeführt. Um dann zu beweisen, dass $NC(W)$ das Phänomen des zyklischen Siebens erfüllt, benötigen wir einerseits Grundlagen über unitäre Spiegelungsgruppen (Kapitel 2) und reguläre Elemente einer unitären Spiegelungsgruppe (Kapitel 3) und andererseits einige Resultate aus dem Gebiet der Zopfgruppen unitärer Spiegelungsgruppen (Kapitel 4), das der algebraische Topologie zugeordnet werden kann. Für die Kapitel 2 und 3 diente hauptsächlich das Buch *Unitary Reflection Groups* von G. I. Lehrer und D. Taylor ([**35**]) als Grundlage und Kapitel 4 orientiert sich an mehrere Artikel (z. B. [**7**], [**9**]) von D. Bessis. Im letzten Kapitel werden die davor ausgearbeiteten Ergebnisse zu einem Beweis des obigen Satzes zusammengefügt.

Abschließend wollen wir die Aussage des Satzes noch an einem Beispiel veranschaulichen, nämlich der Menge nichtkreuzenden Partitionen $NC(5)$ von $\{1, \ldots, 5\}$. Als zyklische Gruppe wählen wir hier die von (1 2 3 4 5) erzeugten Untergruppe C von S_5, die in natürlicher Weise auf $NC(5)$ operiert. Die Ereugendenfunktion modulo $q^5 - 1$ ist dann $8q^4 + 8q^3 + 8q^2 + 8q + 10$. Wie wir am Anfang gesehen haben, ist der konstante Term 10 die Anzahl jener C-Bahnen in $NC(5)$, deren Stabilisatorordnung 0 teilt, also die Anzahl aller C-Bahnen in $NC(5)$. Weil die Stabilisatorordnung von 8 Bahnen 1 teilen und daher schon 1 sein muss, operiert C auf 8 Bahnen frei.

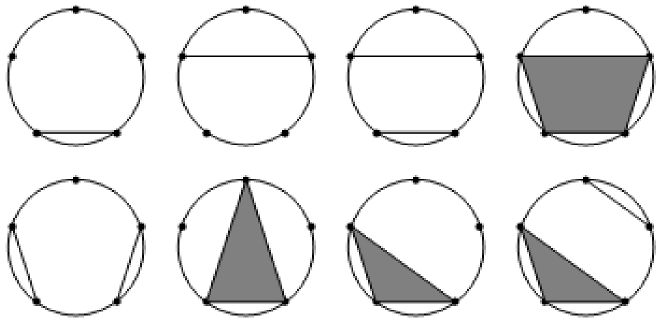

ABBILDUNG 2. Repräsentanten der freien Bahnen der Operation von C auf $NC(5)$.

KAPITEL 1

Das Phänomen des zyklischen Siebens

J. R. Stembridge ([**48**], [**47**]) definierte 1994 das $q = -1$-*Phänomen*. 2003 wurde diese Definition von V. Reiner, D. Stanton und D. White ([**41**]) erweitert:

Seien X eine endliche Menge, $n \in \mathbb{N}$ und C eine zyklische Gruppe der Ordnung n, die auf X operiert. Alle Elemente einer C-Bahn $\mathcal{O}$ in X besitzen dieselbe Stabilisatoruntergruppe, deren Ordnung deswegen als *Stabilisatorordnung* der Bahn $\mathcal{O}$ bezeichnet wird. Wähle außerdem eine Einbettung $\omega : C \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ von C in $\mathbb{C}^\times$, deren Bild in $\mathbb{C}^\times$ dann genau die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln ist.

Definition 1.1. Ein Polynom $X(q)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$, das $X(1) = |X|$ erfüllt, heißt *q-Zähler* oder *erzeugende Funktion für X*. Ist $X(q)$ eine erzeugende Funktion für X, so bezeichnen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ die eindeutig bestimmten Koeffizienten in

$$X(q) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i q^i \mod (q^n - 1).$$

Seien nun $X(q)$ eine erzeugende Funktion von X und $A_X := \bigoplus_{j \geq 0} A_{X,j}$ ein graduierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, sodass

$$\sum_{j \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} A_{X,j} q^j = X(q)$$

gilt. Insbesondere muss dann $\dim_{\mathbb{C}} A_X = |X|$ gelten. Die zyklische Gruppe C operiere auf jeder Komponente $A_{X,j}$ von A_X durch

$$c \cdot v := \omega(c)^j v$$

für $c \in C$, $v \in A_{X,j}$, womit eine Operation von C auf $A_X = \bigoplus_{j \geq 0} A_{X,j}$ gegeben ist.

Satz 1.2 (V. Reiner, D. Stanton und D. White [**41**], Proposition 2.1). *Wird die Notation wie oben gewählt, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Für alle $c \in C$ gilt

$$X(\omega(c)) = |\{x \in X : c \cdot x = x\}|.$$

(ii) Die Anzahl der Bahnen von C in X, deren Stabilisatorordnung i teilt, ist α_i für alle $0 \leq i \leq n-1$.

(iii) Die Darstellung von C auf A_X ist isomorph zu der zur C-Aktion auf X gehörenden Permutationsdarstellung von C auf $\mathbb{C}[X]$.

Definition 1.3. Ein Tripel $(X, X(q), C)$ erfüllt das *Phänomen des zyklischen Siebens*, falls es einer der äquivalenten Bedingungen aus Satz 1.2 genügt.

Falls C eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist, so beschreibt das Phänomen des zyklischen Siebens für ein Tripel $(X, X(q), C)$ das $q = -1$-Phänomen von J. R. Stembridge.

Um Satz 1.2 zu beweisen, werden noch einige Begriffe und Resultate aus der Darstellungstheorie benötigt, siehe hierfür zum Beispiel Kapitel XVIII in *Algebra* von Serge Lang ([**30**]).

DEFINITION 1.4. Seien G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G.

(i) Sind V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung, so heißt die Einschränkung von ρ auf H die *Restriktion* oder *Einschränkung* dieser Darstellung auf H und wird mit $\mathrm{Res}_H^G \rho : H \to GL(V)$ bezeichnet.

(ii) Sind W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\rho : H \to GL(W)$ eine Darstellung, m der Index von H in G und $x_1, \ldots, x_m$ Repräsentanten der Linksnebenklassen in G/H, so definiere $V := \bigoplus_{i=1}^{m} x_i W$, wo die $x_i W$ zu W isomorphe $\mathbb{C}$-Vektorräume sind. Da G disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen in G/H ist, gibt es für jedes $g \in G$ und für jedes $1 \leq i \leq m$ ein $1 \leq j_{g,i} \leq m$ und ein $h_{g,i} \in H$, sodass
$$gx_i = x_{j_{g,i}} h_{g,i}$$
ist. Die *induzierte Darstellung* $\mathrm{Ind}_H^G \rho : G \to GL(V)$ von H auf G ist dann definiert als
$$\mathrm{Ind}_H^G \rho(g)(v) = \mathrm{Ind}_H^G \rho(g)(\sum_{i=1}^{m} x_i w_i) = \sum_{i=1}^{m} x_{j_{g,i}} \rho(h_{g,i})(w_i)$$
für $g \in G$, $v \in V$ und gewisse $w_1, \ldots, w_m \in W$.

BEISPIEL 1.5. G operiert auf G/H durch $g \cdot xH = gxH$. Die zur G-Aktion auf G/H gehörende Permutationsdarstellung $\mathbb{C}[G/H]$ wird von der eindimensionalen, trivialen Darstellung von H auf $\mathbb{C}$ induziert.

BEMERKUNG 1.6. Der Charakter von Res_H^G ist die Einschränkung des Charakters der Darstellung von G auf H.
Ist $B = \{w_1, \ldots, w_s\}$ eine Basis von W, so ist $\mathcal{B} := \{x_i w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq s\}$ eine Basis von $V = \bigoplus_{j=1}^{m} x_j W$. Bezeichnet $\mathcal{D}_B(h)$ die Darstellungsmatrix der Operation von $h \in H$ auf W, so ist die Darstellungsmatrix der induzierten Darstellung von H gleich $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(g) = (D_{i,j}(x_j^{-1} g x_i))_{1 \leq i,j \leq m}$ für $g \in G$, wobei $D_{i,j}$ eine $s \times s$ - Matrix ist, die definiert ist durch
$$D_{i,j}(x_j^{-1} g x_i) = \begin{cases} D_B(x_j^{-1} g x_i), & \text{falls } x_j^{-1} g x_i \in H, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Bezeichnet χ_W den Charakter der Darstellung von H auf W, so ist der Charakter der induzierten Darstellung von G auf H
$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}(g) = \mathrm{Spur}(\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(g)) = \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \chi_W(x_i^{-1} g x_i).$$
für $g \in G$ und $\mathcal{I}_g = \{i \in \{1, \ldots, m\} : x_i^{-1} g x_i \in H\}$.

Sind G eine endliche Gruppe, V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\rho, \mu : G \to GL(V)$ Darstellungen von G mit Charakteren χ_ρ und χ_μ, so sei
$$(\rho, \mu) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \chi_\mu(g^{-1}).$$

Proposition 1.7 (**Frobenius-Reziprozität**). *Sind G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe von G und U, W endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume, $\rho : G \to GL(U)$ und $\mu : H \to GL(W)$ Darstellungen, dann gilt*

$$(\mathrm{Ind}_H^G \mu, \rho)_G = (\mu, \mathrm{Res}_H^G \rho)_H.$$

Beweis: Bezeichnet $\mathcal{I}_g = \{i \in \{1, \ldots, m\} : x_i^{-1} g x_i \in H\}$ für $g \in G$, so ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ind}_H^G \mu, \rho)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Ind}_H^G \mu}(g) \chi_\rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g^{-1}) \sum_{i \in \mathcal{I}_g} \chi_\mu(x_i^{-1} g x_i) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{g \in x_i H x_i^{-1}} \chi_\rho(g^{-1}) \chi_\mu(x_i^{-1} g x_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h \in H} \chi_\rho(x_i h^{-1} x_i^{-1}) \chi_\mu(h) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{m} \sum_{h \in H} \chi_\rho(h^{-1}) \chi_\mu(h) = \frac{m}{|G|} \sum_{h \in H} \chi_\rho(h^{-1}) \chi_\mu(h) \\
&= (\mu, \mathrm{Res}_H^G \rho)_H.
\end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 1.2: Um die Äquivalenz von (i) und (iii) zu zeigen, verwenden wir, dass zwei Darstellungen einer Gruppe genau dann isomorph sind, wenn ihre Charaktere übereinstimmen.

Um den Charakter der zur C-Aktion auf X gehörenden Permutationsdarstellung $\mathbb{C}[X]$ zu berechnen, betrachte die Basis X von $\mathbb{C}[X]$ und die Darstellungsmatrix der Operation eines $c \in C$ auf $\mathbb{C}[X]$, deren $(x, y)-$te Eintragung entweder 1, nämlich, wenn $c \cdot x = y$ ist, oder 0 ist. Die Spur dieser Darstellungsmatrix von c und damit der Charakter in c ist daher $|\{x \in X : c \cdot x = x\}|$.

Der Charakter der Darstellung von C auf A_X ist die Summe der Charaktere der Darstellungen von C auf den einzelnen Komponenten $A_{X,j}$ von A_X. Da der Charakter der Darstellung von C auf $A_{X,j}$ in einem $c \in C$ gleich $\dim_{\mathbb{C}} A_{X,j} \omega(c)^j$ ist, muss $X(\omega(c))$ der Charakter der Darstellung von C auf A_X sein.

Die Gleichheit von $|\{x \in X : c \cdot x = x\}|$ und $X(\omega(c))$ für alle $c \in C$ gilt also genau dann, wenn die Darstellung von C auf A_X und die zur C-Aktion auf X gehörende Permutationsdarstellung isomorph sind.

Um die Äquivalenz von (ii) und (iii) zu beweisen, definiere zunächst für jedes $l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ eine irreduzible (eindimensionale) Darstellungen von C durch

$$\begin{aligned}
\sigma_l &: C \to GL(\mathbb{C}), \\
\sigma_l(c)(z) &= \omega(c)^l z.
\end{aligned}$$

Die zyklische Gruppe C der Ordnung n besitzt n Konjugationsklassen und daher n Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen. Deswegen sind $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ schon alle irreduziblen Darstellungen von C. Da $(\sigma_l, A_X)_C$ bzw. $(\sigma_l, \mathbb{C}[X])_C$ die Dimension der isotypischen Komponente von A_X bzw. $\mathbb{C}[X]$ vom Typ σ_l für alle $l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, sind die Darstellungen von C auf A_X und die zu der C-Aktion auf X gehörende Permutationsdarstellung auf $\mathbb{C}[X]$ genau dann isomorph, wenn die Gleichung $(\sigma_l, A_X)_C = (\sigma_l, \mathbb{C}[X])_C$ erfüllt ist.

Weil $\omega(c)^{-1}$ für jedes $c \in C$ eine n-te komplexe Einheitswurzel ist, gilt

$$X(\omega(c)^{-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \omega(c)^{-i}$$

und daher

$$\sum_{c\in C}\omega(c)^l X(\omega(c)^{-1}) = \sum_{c\in C}(\alpha_l + \sum_{k\neq l}\alpha_k\omega(c)^{l-k}) = n\alpha_l + \sum_{k\neq l}\alpha_k \sum_{c\in C}\omega(c)^{l-k} = n\alpha_l,$$

weil $\sum_{i=0}^{n-1}\omega^i = \frac{\omega^n-1}{\omega-1} = 0$ für jede n-te Einheitswurzel $\omega \neq 1$ gilt. Das heißt aber, dass

$$\alpha_l = (\sigma_l, A_X)_C$$

für alle $l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt.

Ist $\mathcal{O}$ eine Bahn von C in X, so stimmen die Stabilisatoren aller Elemente aus $\mathcal{O}$ bezüglich der Operation von C auf X überein. Bezeichnet also $C_{\mathcal{O}}$ die Stabilisatoruntergruppe dieser Bahn, dann operiert C auf $C/C_{\mathcal{O}}$ via $c \cdot xC_{\mathcal{O}} = cxC_{\mathcal{O}}$, und die zur C-Aktion gehörende Permutationsdarstellung $\mathbb{C}[C/C_{\mathcal{O}}]$ wird von der trivialen Darstellung $\mathbf{1}$ von $C_{\mathcal{O}}$ auf $\mathbb{C}$ induziert, siehe Beispiel 1.5. Nun ist aber X disjunkte Vereinigung der Bahnen von C und daher ist

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\mathcal{O}\in C\backslash X}\mathbb{C}[\mathcal{O}] = \bigoplus_{\mathcal{O}\in C\backslash X}\mathbb{C}[C/C_{\mathcal{O}}],$$

da $\mathcal{O} \cong C/C_{\mathcal{O}}$ für alle Bahnen $\mathcal{O}$ von C in X gilt. Die zur C-Aktion gehörende Permutationsdarstellung $\mathbb{C}[X]$ ist also die direkte Summe $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{\mathcal{O}\in C\backslash X}\operatorname{Ind}_{C_{\mathcal{O}}}^C\mathbf{1}$. Somit ist

$$\begin{aligned}(\sigma_l, \mathbb{C}[X])_C &= \sum_{\mathcal{O}\in C\backslash X}(\sigma_l, \operatorname{Ind}_{C_{\mathcal{O}}}^C\mathbf{1})_C = \sum_{\mathcal{O}\in C\backslash X}(\operatorname{Res}_{C_{\mathcal{O}}}^C\sigma_l, \mathbf{1})_{C_{\mathcal{O}}}\\ &= \sum_{\{\mathcal{O}\in C\backslash X:\ |C_{\mathcal{O}}| \text{ teilt } l\}} 1\\ &= |\{C\text{-Bahnen } \mathcal{O} \text{ in } X\text{: Stabilisatorordnung von } \mathcal{O} \text{ teilt } l\}|,\end{aligned}$$

denn

$$(\operatorname{Res}_{C_{\mathcal{O}}}^C\sigma_l, \mathbf{1})_{C_{\mathcal{O}}} = \frac{1}{|C_{\mathcal{O}}|}\sum_{c\in C_{\mathcal{O}}}\omega(c)^l = \begin{cases}\frac{1}{|C_{\mathcal{O}}|}\sum\limits_{c\in C_{\mathcal{O}}} 1 = 1, & \text{falls } l \text{ von } |C_{\mathcal{O}}| \text{ geteilt wird,}\\ \frac{\omega(\hat{c})^{|C_{\mathcal{O}}|}-1}{|C_{\mathcal{O}}|(\omega(\hat{c})-1)} = 0, & \text{sonst,}\end{cases}$$

wobei $\hat{c}$ ein Erzeuger von $C_{\mathcal{O}}$ ist.

Insgesamt ist α_l die Anzahl der C-Bahnen in X, deren Stabilisatorordnung l teilt, für alle $l \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann, wenn die Darstellung von C auf A_X und die zur C-Aktion auf X gehörende Permutationsdarstellung isomorph sind. □

Im Folgenden soll ein Beispiel für ein Tripel gegeben werden, das das Phänomen des zyklischen Siebens erfüllt.

Definition 1.8. Sind $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und q eine Unbestimmte, so definiere

$$[n]_q := \frac{q^n-1}{q-1},$$
$$[n]_q! := \prod_{i=1}^n\frac{(q^i-1)}{(q-1)}$$

und den q-*Binomialkoeffizienten* als

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} = \frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\cdots(q-1)}.$$

Proposition 1.9. *Es gelten zwei q-Pascalregeln für den q-Binomialkoeffizienten, nämlich*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

und

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq n-1$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Da $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = [k]_q + q^k[n-k]_q$ für alle $1 \leq k \leq n-1$ gilt, muss

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} = \frac{[n-1]_q!([k]_q + q^k[n-k]_q)}{[k]_q![n-k]_q!} \\ &= \frac{[n-1]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!} + q^k \frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

für alle $1 \leq k \leq n-1$ gelten. Die zweite Regel folgt aus $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$. □

Korollar 1.10. *Jeder q-Binomialkoeffizient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ist ein Polynom in q.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1$ Polynome in q. Mittels Induktion nach n und Proposition 1.9 folgt dann die Aussage. □

Satz 1.11. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathcal{P}_{n,k}$ die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $[n]$, wobei $0 \leq k \leq n$ gelte, dann ist*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{S \in \mathcal{P}_{n,k}} q^{\sum_{s \in S} s}. \tag{1}$$

Insbesondere sind jeder q-Binomialkoeffizient ein Polynom in q mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$ und $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q=1} = \sum_{S \in \mathcal{P}_{n,k}} 1 = \binom{n}{k}$.

Beweis: Induktion nach n:

Ist $n = 1$, dann sind $\mathcal{P}_{1,0} = \{\emptyset\}$ und daher die rechte Seite in (1) für $k = 0$ gleich $1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q$ und $\mathcal{P}_{1,1} = \{\{1\}\}$ und somit die rechte Seite in (1) für $k = 1$ gleich $1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$.

Sei $n > 1$. Ist $k = 0$, dann ist analog zum Fall $n = 1$ die Behauptung bewiesen. Sei also $k \geq 1$. Schreibe $\mathcal{P}_{n,k} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$, wo $\mathcal{B} := \{S \in \mathcal{P}_{n,k} : n \notin S\}$ und $\mathcal{B}' := \{S \in \mathcal{P}_{n,k} : n \in S\}$ sind. Aber $\mathcal{B}$ ist dann gleich $\mathcal{P}_{n-1,k}$ und $\mathcal{B}'$ besteht aus den Elementen in $\mathcal{P}_{n-1,k-1}$ vereinigt mit $\{n\}$, womit

$$\begin{aligned}\sum_{S\in\mathcal{P}_{n,k}} q^{-\frac{k(k+1)}{2}+\sum\limits_{s\in S} s} &= \sum_{S\in\mathcal{B}} q^{-\frac{k(k+1)}{2}+\sum\limits_{s\in S} s} + \sum_{S\in\mathcal{B}'} q^{-\frac{k(k+1)}{2}+\sum\limits_{s\in S} s}\\ &= \sum_{S\in\mathcal{P}_{n-1,k}} q^{-\frac{k(k+1)}{2}+\sum\limits_{s\in S} s} + \sum_{S\in\mathcal{P}_{n-1,k-1}} q^{n-\frac{k(k+1)}{2}+\sum\limits_{s\in S} s}\\ &= \sum_{S\in\mathcal{P}_{n-1,k}} q^{-\frac{k(k+1)}{2}+\sum\limits_{s\in S} s} + \sum_{S\in\mathcal{P}_{n-1,k-1}} q^{-\frac{(k-1)k}{2}+\sum\limits_{s\in S} s} q^{n-k}\\ &= \begin{bmatrix} n-1\\ k\end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1\\ k-1\end{bmatrix}_q\\ &= \begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q\end{aligned}$$

nach Proposition 1.9 gilt. □

Die q-Binomialkoeffizienten $\begin{bmatrix} N\\ k\end{bmatrix}_q$ bzw. $\begin{bmatrix} N+k-1\\ k\end{bmatrix}_q$ sind nach Satz 1.11 erzeugende Funktionen im Sinne der Definition 1.1 der Menge der k-elementigen Teilmengen von $[N]$ bzw. der Menge der k-elementigen Multimengen mit Elementen aus $[N]$, da $\binom{N+k-1}{k}$ die Anzahl der k-elementige Multimengen mit Elementen aus $[N]$ ist.

Definition 1.12. Eine zyklische Untergruppe C von S_N der Ordnung n operiert *fast frei* auf der Menge $[N]$, falls C von einem Element c mit einer der folgenden Eigenschaften erzeugt wird:

(i) c ist das Produkt von a disjunkten Zykel der Länge n, womit $N = an$ gelten muss.
(ii) c ist das Produkt von $a+1$ disjunkten Zykel, wovon a der Länge n und einer der Länge 1 sind, womit $N = an+1$ gelten muss.

Satz 1.13. *Sei C eine zyklische Gruppe der Ordnung n, die fast frei auf $[N]$ operiert.*

(i) Sind X die Menge der k-elementigen Teilmengen in $[N]$ und $X(q) := \begin{bmatrix} N\\ k\end{bmatrix}_q$, so erfüllt (X,X(q),C) das Phänomen des zyklischen Siebens.
(ii) Sind X die Menge der k-elementigen Multimengen in $[N]$ und $X(q) := \begin{bmatrix} N+k-1\\ k\end{bmatrix}_q$, so erfüllt (X,X(q),C) das Phänomen des zyklischen Siebens.

Beweis: Siehe [**41**, Theorem 1.1].

Beispiel 1.14. Seien $k = n = 6$, $N = 12$ und C die zyklische Untergruppe der S_{12}, die von (1 3 5 7 9 11)(2 4 6 8 10 12) erzeugt wird. Dann operiert C auf der Menge aller 6-elementigen Teilmengen von $[12] = \{1,\ldots,12\}$ und es ist

$$X(q) = \begin{bmatrix} 12\\ 6\end{bmatrix}_q \equiv 160 + 150q + 156q^2 + 152q^3 + 156q^4 + 150q^5 \mod (q^6-1).$$

Die Anzahl aller Bahnen von C ist also 160 und die der Bahnen von C, auf denen C frei operiert, ist 150. Außerdem gibt es 156 Bahnen von C, deren Stabilisatorordnungen 2 teilen, das heißt, entweder 1 oder 2 sind, da es aber 150 Bahnen mit Stabilisatorordnung 1 geben muss, gibt es genau 6 Bahnen mit Stabilisatorordnung 2. Analog gibt es 2 Bahnen mit Stabilisatorordnung 3, 2 mit Stabilisatorordnung 6 und keine mit Stabilisatorordnungen 4 und 5.

Beispiel 1.15. Bezeichnen $n = k = 4$, $N = 8$ und C die zyklische Untergruppe von S_8, die von $(1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6\ 8)$ erzeugt wird, so operiert C auf der Menge aller 4-elementigen Multimengen mit Träger $[8] = \{1, \ldots, 8\}$ und es gilt

$$X(q) = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}_q \equiv 86 + 80q + 84q^2 + 80q^3 (\mathrm{mod}(q^4 - 1)).$$

Insgesamt besitzt C also 86 Bahnen, davon operiert C auf 80 frei, 4 haben die Stabilisatorordnung 2 und 2 die Stabilisatorordnung 4.

KAPITEL 2

Unitäre Spiegelungsgruppen

In diesem Kapitel soll eine Einführung in die wichtigsten Begriffe im Zusammenhang mit Spiegelungsgruppen eines $\mathbb{C}$-Vektorraums, auch Pseudo-Spiegelungen genannt, gegeben werden.

1. Unitäre Spiegelungsgruppen

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und n die Dimension von V über $\mathbb{C}$.

DEFINITION 2.1. Sei G eine Untergruppe von $GL(V)$. Ein inneres Produkt $(.,.)$ auf V heißt *G-invariant*, falls $(g(v), g(w)) = (v, w)$ für alle $g \in G$ und $v, w \in V$ gilt. Ein $x \in GL(V)$ heißt *unitär* bzgl. $(.,.)$, wenn $(.,.)$ invariant bezüglich der von x erzeugten Untergruppe von G ist. Es bezeichne $U(V)$ die Gruppe aller unitären Elemente von $GL(V)$, die sogenannte *unitäre Gruppe* von V.

LEMMA 2.2. *Sei G eine endliche Untergruppe von $GL(V)$, so gibt es ein G-invariantes inneres Produkt auf V.*

Beweis: Sei $[.,.] : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ein inneres Produkt auf V. Definiere eine Abbildung $(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ durch $(v, w) := \sum_{g \in G}[g(v), g(w)]$. Diese ist ein G-invariantes inneres Produkt auf V. □

DEFINITION 2.3. Ist $g \in \mathrm{End}(V)$, so definiere

(*i*) $\mathrm{Fix}(g) = \ker(1 - g) = \{v \in V : g(v) = v\}$ und

(*ii*) $[V, g] = \mathrm{Im}(1 - g)$.

LEMMA 2.4. *Ist $(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ ein inneres Produkt auf V, so gilt $[V, g] = (\mathrm{Fix}(g))^{\perp}$ für alle $g \in U(V)$.*

Beweis: Sei $g \in U(V)$, dann gilt $[V, g] \subseteq (\mathrm{Fix}(g))^{\perp}$, denn für beliebige $u \in [V, g]$, $v \in \mathrm{Fix}(g)$ gelten $u = (1 - g)(w)$ für ein $w \in V$ und

$$\begin{aligned}(u, v) &= (w - g(w), v) = (w, v) - (g(w), v) = (g(w), g(v)) - (g(w), v)\\ &= (g(w), g(v) - v) = 0.\end{aligned}$$

Da die Dimensionen von $[V, g]$ und $(\mathrm{Fix}(g))^{\perp}$ übereinstimmen, ist die Behauptung bewiesen. □

DEFINITION 2.5. Ein $r \in GL(V)$ heißt *Spiegelung* oder *Pseudo-Spiegelung* auf V, falls die Ordnung von r endlich und $\dim_{\mathbb{C}}[V, r] = 1$ sind. Insbesondere ist $\mathrm{Fix}(r)$ eine Hyperebene in V, die sogenannte *spiegelnde Hyperebene* von r.

Sind $(.,.)$ ein inneres Produkt auf V, $a \in V$ mit $(a, a) = 1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine primitive m-te Einheitswurzel für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist $r_{a,\alpha} : V \longrightarrow V$,

$$r_{a,\alpha}(v) := v - (1 - \alpha)(v, a)a, \tag{2}$$

eine unitäre Spiegelung der Ordnung m auf V bezüglich $(.,.)$, die die Hyperebene $\mathbb{C}a^{\perp}$ fixiert. Dieses a heißt dann *Wurzel* von r.

Lemma 2.6. *Sind r eine bezüglich eines Skalarprodukts $(.,.)$ unitäre Spiegelung auf V mit spiegelnder Hyperebene H und Ordnung m und $a \in V$, sodass $(a,a) = 1$ und $[V,r] = \mathbb{C}a$ gelten, dann gibt es eine primitive m-te Einheitswurzel $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass $r = r_{a,\alpha}$ gilt.*

Beweis: Da $v - r(v) = (1-r)(v) \in [V,r]$ für alle $v \in V$ gilt, gibt es ein Funktional $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}$, das $v - r(v) = \varphi(v)a$ für alle v erfüllt. Außerdem hat φ den Kern H. Da $a \notin H$ ist, gibt es eine m-te Einheitswurzel $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass $r(a) = \alpha a$ und somit $\varphi(a) = 1 - \alpha$ gelten. Schließlich ist $\varphi(v) = (1-\alpha)(v,a)$, denn die Abbildung $v \mapsto (v,a)$ hat wie φ Kern H. □

Bemerkung 2.7. Allgemeiner gibt es für eine unitäre Spiegelung r mit spiegelnder Hyperebene H und ein Funktional $L_H \in V^*$ mit Kern H eine primitive m-te Einheitswurzel α, sodass $r(v) = v - (1-\alpha)\frac{L_H(v)}{L_H(a)}a$ für alle $v \in V$ gilt.

Lemma 2.8. *Für alle $g \in U(V)$ ist $g \circ r_{a,\alpha} \circ g^{-1} = r_{g(a),\alpha}$.*

Beweis: Für $g \in U(V)$ ist $gr_{a,\alpha}g^{-1}(v) = v - (1-\alpha)\frac{(v,g(a))}{(g(a),g(a))}g(a)$ für alle $v \in V$. □

Bemerkung 2.9. Sind r eine Spiegelung von V und $H = \mathrm{Fix}(r)$ die spiegelnde Hyperebene von r, so sind grg^{-1} wieder eine Spiegelung von V und $g \cdot H = \mathrm{Fix}(grg^{-1})$ die spiegelnde Hyperebene von grg^{-1} für alle $g \in U(V)$

Lemma 2.10. *Jede Spiegelung von V ist unitär bezüglich eines inneren Produkts auf V.*

Beweis: Sei $r \in GL(V)$ eine Spiegelung von V, so ist die Ordnung von r endlich. Die zyklische Untergruppe G von $GL(V)$, die von r erzeugt wird, hat nun endliche Ordnung, womit es nach Lemma 2.2 ein G-invariantes inneres Produkt auf V gibt. □

Ist r eine Spiegelung von V der Ordnung m, so gibt es nach Lemma 2.4, Lemma 2.10 ein inneres Produkt auf V mit $[V,r] = \mathrm{Fix}(r)^\perp$ und $V = \mathrm{Fix}(r) \oplus [V,r]$. Bezeichnet a eine Wurzel von r, das heißt, $(a,a) = 1$ und $[V,r] = \mathbb{C}a$, so gibt es eine primitive m-te Einheitswurzel α mit $r = r_{a,\alpha}$ nach Lemma 2.6. Insbesondere ist $r(a) = r_{a,\alpha}(a) = \alpha a$. Somit besitzt r die Eigenwerte 1 mit der Vielfachheit $n-1$ und α mit der Vielfachheit 1.

Jede endliche Untergruppe von $GL(V)$, die von Spiegelungen erzeugt wird, wird nach Lemma 2.2 insbesondere von unitären Spiegelungen erzeugt.

Definition 2.11. Eine *unitäre Spiegelungsgruppe* von V ist eine endliche Untergruppe von $GL(V)$, die von Spiegelungen erzeugt wird.

Beispiel 2.12. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(.,.)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

(i): Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist die zyklische Gruppe $\mathcal{C}_m$ der m-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ bezüglich der Linksmultiplikation eine unitäre Spiegelungsgruppe von $\mathbb{C}$.

(ii): Die symmetrische Gruppe S_n operiert treu auf $\mathbb{C}^n$ via Permutation der Koordinaten für jedes n in $\mathbb{N}$ und kann daher als Untergruppe von $U_n(\mathbb{C})$ aufgefasst werden. Ist $\tau = (i\ j) \in S_n$ eine Transposition, dann hat diese die Ordnung 2 und fixiert den $(n-1)$-dimensionalen Teilraum $H_\tau := \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i = x_j\}$ von $\mathbb{C}^n$. Jede Transposition ist also eine unitäre Spiegelung auf $\mathbb{C}^n$ bezüglich $(.,.)$. Da S_n von Transpositionen erzeugt wird, ist die symmetrische Gruppe S_n eine unitäre Spiegelungsgruppe auf $\mathbb{C}^n$.

(iii): Die Diedergruppe der Ordnung $2m$ wird für jedes m in $\mathbb{N}$ von

$$x = \begin{pmatrix} 0 & -e^{\frac{2\Pi i}{m}} \\ -e^{-\frac{2\Pi i}{m}} & 0 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

aus $U_2(\mathbb{C})$ erzeugt. Außerdem fixieren x und y jeweils Geraden in $\mathbb{C}^2$. Die Diedergruppe der Ordnung $2m$ wird also von unitären Spiegelungen in $U_2(\mathbb{C})$ erzeugt und ist somit eine unitäre Spiegelungsgruppe auf $\mathbb{C}^2$, die sogenannte *Coxetergruppe vom Typ* $I_2(m)$.

(iv): Eine *vorzeichenbehaftete Permutation* von $[n]$ bezeichnet eine Permutation σ von $[\pm n] := \{-n, -n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, n-1, n\}$, die $\sigma(i) = -\sigma(-i)$ für alle $i \in [n]$ erfüllt. Die Gruppe der vorzeichenbehafteten Permutationen wird von der Menge

$$\{(i,-i) : i \in [n]\} \cup \{(i,j)(-i,-j) : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{(i,-j)(j,-i) : 1 \leq i < j \leq n\}$$

erzeugt. Außerdem operiert sie auf $\mathbb{C}^n$ durch Permutieren und Ändern der Vorzeichen der Koordinaten. Es gelten dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Fix}((i,-i)) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i = 0\} \text{ für alle } i \in [n], \\ \mathrm{Fix}((i,j)(-i,-j)) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i = x_j\} \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n \text{ und} \\ \mathrm{Fix}((i,-j)(j,-i)) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i = -x_j\} \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Somit ist die Menge der vorzeichenbehafteten Permutationen eine unitäre Spiegelungsgruppe von $\mathbb{C}^n$, die sogenannte *Coxetergruppe vom Typ* B_n.

(v): Die von der Menge

$$\{(i,j)(-i,-j) : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{(i,-j),(j,-i) : 1 \leq i < j \leq n\}$$

erzeugte Untergruppe der Gruppe vorzeichenbehafteter Permutationen von $[n]$ heißt die *Coxetergruppe vom Typ* D_n.

(vi): Bezeichnet $[(\theta_1, \ldots, \theta_n)|\sigma]$ für eine Permutation $\sigma \in S_n$ und $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{C}$ jene $n \times n$ Matrix, deren $(i, \sigma(i))$-ten Einträge θ_i für alle $i \in [n]$ und deren restliche Einträge 0 sind, so ist

$$G(m,n,p) := \{[(\theta_1, \ldots, \theta_n)|\sigma] : \sigma \in S_n, \theta_i \in \mathbb{C} \text{ mit } \theta_i^m = 1 \text{ für alle } i \in [n] \\ \text{und } (\prod_{i=1}^{n} \theta_i)^{\frac{m}{p}}\}$$

für $m, n, p \in \mathbb{N}$ mit $p|m$ eine unitäre Spiegelungsgruppe auf $\mathbb{C}^n$.

Proposition 2.13. *Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V, dann ist jedes Element aus G diagonalisierbar.*

Beweis: Sei $g \in G$. Ist $m := \mathrm{ord}(g)$, dann ist $t^m - 1$ ein annihilierendes Polynom von g und wird daher vom Minimalpolynom von g geteilt. Nun gilt aber $t^m - 1 = \prod_{j=0}^{m-1}(t - \zeta_j)$, wo $\zeta_0, \ldots, \zeta_{m-1}$ paarweise verschiedene m-te Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ sind. Daher ist g diagonalisierbar nach [**26**, Hauptsatz 5.5.3 (ii)]. □

Sind G eine Gruppe und $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G, dann wird V als *G-Modul* bezeichnet. In diesem Fall wird ein Teilraum U von V, der $G \cdot U \subseteq U$ erfüllt, G-Untermodul von V genannt. Besitzt nun ein G-Modul V nur die G-Untermoduln $\{0\}$ und V, dann heißt er *irreduzibel*.

Definition 2.14. Ist G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V, dann ist die Inklusion $\imath : G \longrightarrow GL(V)$ eine treue Darstellung von G, die sog. *natürliche Darstellung* von G. Eine unitäre Spiegelungsgruppe G heißt *irreduzibel*, falls V bezüglich der natürlichen Darstellung von G ein irreduzibler G-Modul ist.

Beispiel 2.15. Die symmetrische Gruppe S_n ist keine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe von $\mathbb{C}^n$, da zum Beispiel der Teilraum $W := \{(x_1, \ldots, x_n)^t : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ von $\mathbb{C}^n$ unter S_n invariant ist. S_n ist aber eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe von W und wird dann als *Coxetergruppe vom Typ A_{n-1}* bezeichnet.

2. Invariantenalgebra und Grade einer unitären Spiegelungsgruppen

Der Begriff der Invariantenalgebra einer endlichen Gruppe, die auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums wirkt, hat eine große Bedeutung im Zusammenhang mit unitären Spiegelungsgruppen. So ist eine endliche Gruppe, die auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum wirkt, genau dann eine Spiegelungsgruppe, wenn der zugehörige Invariantenalgebra eine Polynomalgebra über $\mathbb{C}$ ist, wie in gezeigt werden wird.

Seien in diesem Abschnitt V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und n die Dimension von V.

Es soll zunächst die Invariantenalgebra einer endlichen Untergruppe von $GL(V)$ definiert werden.

Die *Tensoralgebra* von V ist definiert als die direkte Summe

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{T}^r(V),$$

wobei $\mathcal{T}^r(V) := V^{\otimes r}$ ist. Durch lineares Fortsetzen auf $\mathcal{T}(V)$ der Abbildungen $\cdot : \mathcal{T}^k(V) \times \mathcal{T}^l(V) \longrightarrow \mathcal{T}^{k+l}(V)$, die durch

$$(v_1 \otimes ... \otimes v_k) \cdot (w_1 \otimes ... \otimes w_l) := v_1 \otimes ... \otimes v_k \otimes w_1 \otimes ... \otimes w_l$$

für $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l \in V$ und für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ eindeutig festgelegt sind, ist eine Multiplikation auf $\mathcal{T}(V)$ definiert.

Bezeichnet $\mathcal{I}$ jenes Ideal in $\mathcal{T}(V)$, das von der Menge $\{u \otimes v - v \otimes u : u, v \in V\}$ erzeugt wird, dann definiere die *symmetrische Algebra* von V als die Quotientenalgebra

$$\mathcal{S}(V) := \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}.$$

Jedes Element in $\mathcal{I}$ ist eine Summe von Elementen der Form $a \otimes (u \otimes v - u \otimes v) \otimes b$ für $u, v \in V$ und homogene $a, b \in \mathcal{T}(V)$ ist. Da diese Summanden homogen sind, ist $\mathcal{I} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{I} \cap \mathcal{T}^k(V)$. Mit $\mathcal{S}^k(V) := \mathcal{T}^k(V)/(\mathcal{I} \cap \mathcal{T}^k(V))$ gilt insbesondere

$$\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}^k(V).$$

Ist $p : T(V) \twoheadrightarrow \mathcal{T}(V)/\mathcal{I}$, $p(a) = a + \mathcal{I}$, die kanonische Projektion, so setze

$$v_1 \cdots v_k := p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_k \in V$. Aus der Definition von $\mathcal{I}$ folgt unmittelbar, dass $\mathcal{S}(V)$ eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra ist. Da $V \cap \mathcal{I} = \{0\}$ ist, kann V in $\mathcal{S}(V)$ auf natürliche Weise eingebettet werden.

Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und

$$\mathcal{B}_k := \{v_{i_1} \cdots v_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\} \subseteq \mathcal{S}^k(V)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, dann sind $\mathcal{B}_k$ eine Basis von $\mathcal{S}^k(V)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{S}(V)$ und $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$ isomorphe $\mathbb{C}$-Algebren.

Bezeichnet V^* den Dualraum von V und ist $\{X_1, \dots, X_n\}$ die Dualbasis von V^* zu $\{v_1, \dots, v_n\}$, so ist

$$S := \mathcal{S}(V^*)$$

isomorph zu $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Ist $\imath : V \longrightarrow \mathcal{S}(V)$ die natürliche Einbettung von V in $\mathcal{S}(V)$, dann besagt die *universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra*, dass es für jede lineare Abbildung $l : V \longrightarrow A$ in eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra mit 1 einen eindeutig bestimmten $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus $L : S(V) \longrightarrow A$ mit $L(1) = 1$ gibt, der $l = L \circ \imath$ erfüllt. Siehe zum Beispiel [**28**, Proposition 6.23(b)].

Ist $v \in V$, so definiere eine lineare Abbildung $l_v : V^* \to \mathbb{C}$ durch

$$l_v(\varphi) = \varphi(v)$$

für $\varphi \in V^*$. Es gibt nun einen eindeutig bestimmten $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus

$$L_v : S \to \mathbb{C}$$

mit $L_v(1) = 1$ und $l_v = L_v \circ \imath$ nach der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra. Für ein $P \in S$ setze dann $P(v) = L_v(P)$.

Lemma 2.16 (**Lagrange Interpolation**). *Sind $w_1, \dots, w_s$ paarweise verschiedene Elemente aus V und $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{C}$ beliebig, so gibt es ein $P \in S$, sodass $P(w_i) = a_i$ für alle $1 \leq i \leq s$ gilt.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es Polynome $P_1, \dots, P_s$ gibt, sodass $P_i(w_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq s$ gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, dies nur für P_1 zu zeigen.

Hierfür verwenden wir Induktion über s. Für $s = 1$ ist die Aussage klar und deswegen sei $s > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann ein $Q \in S$ mit $Q(w_i) = \delta_{1i}$ für $i \in \{1, \dots, s-1\}$. Weil $w_1 \neq w_s$ ist, gibt es eine lineare Funktion $L \in S$ mit $L(w_1) \neq L(w_s)$. Definiere $P_1 := Q\frac{L - L(w_s)}{L(w_s) - L(w_s)}$, so erfüllt P_1 das Gewünschte. ☐

Definiere eine Darstellung $\theta : GL(V) \longrightarrow GL(V^*)$ durch

$$\theta(g)(\varphi) := \varphi \circ g^{-1}.$$

Für jedes $g \in GL(V)$ ist $\theta(g) : V^* \longrightarrow \mathcal{S}(V^*)$ linear. Nach der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra gibt es für jedes $g \in GL(V)$ einen eindeutig bestimmten Algebrahomomorphismus $\Theta(g) : \mathcal{S}(V^*) \longrightarrow \mathcal{S}(V^*)$ mit $\Theta(g)(1) = 1$ und $\theta(g) = \Theta(g) \circ \imath$. Durch $\Theta : GL(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S}(V^*)), g \mapsto \Theta(g)$, ist eine Darstellung von $GL(V)$ auf $\mathcal{S}(V^*)$ gegeben, denn aus $\theta(g \circ h)(\varphi) = \theta(g)(\theta(h)(\varphi))$ für alle $g, h \in GL(V)$ und $\varphi \in V^*$ folgt $\Theta(g \circ h) = \Theta(g) \circ \Theta(h)$ für alle $g, h \in GL(V)$ aus der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra.
Für die Darstellung Θ von G auf S soll ab jetzt für $g \in G$ und $P \in S$ die Bezeichnung

$$g \cdot P := \Theta(g)(P)$$

verwendet werden.

Eine unitäre Spiegelung auf V wirkt dann in besonderer Weise auf S.

LEMMA 2.17. *Seien $r \in GL(V)$ eine unitäre Spiegelung von V, $H = \mathrm{Fix}(r)$ die spiegelnde Hyperebene von r und $L_H \in V^*$ mit Kern H wie in Bemerkung 2.7 aufgefasst als Element in $S = \mathcal{S}(V^*)$, so ist L_H homogen vom Grad 1 und es gibt für alle $P \in S$ ein $Q \in S$ mit*

$$r \cdot P = P + L_H Q.$$

Beweis: Weil $\mathrm{Fix}(r^{-1}) = H$ ist, ist auch r^{-1} eine unitäre Spiegelung von V. Ist a eine Wurzel von r, so ist a auch Wurzel von r^{-1}. Nach Bemerkung 2.7 gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $r^{-1}(v) = v + \lambda L_H(v)a$ für alle $v \in V$ und daher gilt

$$(r \cdot \varphi)(v) = \varphi(r^{-1}(v)) = \varphi(v) + \lambda L_H(v)\varphi(a)$$

für alle $\varphi \in V^*$. Insbesondere gibt es für alle $\varphi \in V^*$ ein $\beta(\varphi) \in \mathbb{C}$ mit

$$r \cdot \varphi - \varphi = \beta(\varphi) L_H.$$

Sind $P_1, P_2 \in S$, sodass es $Q_1, Q_2 \in S$ mit $r \cdot P_1 = P_1 + L_H Q_1$ und $r \cdot P_2 = P_2 + L_H Q_2$ gibt, dann ist

$$r \cdot (P_1 P_2) - P_1 P_2 = r \cdot P_1 (r \cdot P_2 - P_2) + (r \cdot P_1 - P_1) P_2 = L_H(r \cdot P_1 Q_2 + Q_1 P_2),$$

womit die Behauptung auch für $P_1 P_2$ gilt. Da S von V^* erzeugt wird, ist die Behauptung nun für alle $P \in S$ gezeigt. □

Bezeichnet nun $M(g)$ die Darstellungsmatrix eines g in $GL(V)$ bezüglich einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V, so gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$ und die zugehörige Dualbasis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von V^*

$$\begin{aligned}(g \cdot X_i)(v) &= X_i(g^{-1}(v)) = X_i(g^{-1}(\sum_{j=1}^n X_j(v)v_j)) = \sum_{j=1}^n X_j(v) X_i(g^{-1}(v_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n X_j(v) M_{ij}(g^{-1}) = M(g^{-1})_i \begin{pmatrix} X_1(v) \\ \vdots \\ X_n(v) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wo $M(g^{-1})_i$ die i-te Zeile der Matrix $M(g^{-1})$ ist. Somit ist die Darstellung von $GL(V)$ auf $\mathcal{S}(V^*) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}(g \cdot P)(X_1, \dots, X_n) &= P(g \cdot X_1), \dots, g \cdot X_n) \\ &= P\Big(M(g)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}\Big).\end{aligned}$$

Bezeichnet $M^*(g)$ die Darstellungsmatrix von $\theta(g)$ bezüglich der Dualbasis $\{X_1, \dots, X_n\}$ von V^* für jedes $g \in GL(V)$, so ist $M^*(g) = (M(g)^{-1})^t$.

Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\{X_1, \dots, X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*. Für ein unitäre Abbildung $g \in U(V)$ ist dann auch $M(g)$ unitär. Mit obiger Notation heißt das $M(g)^t \cdot \overline{M(g)} = 1$.

LEMMA 2.18. *Sei $g \in U(V)$ eine unitäre Abbildung. Wählt man die Bezeichnungen wie oben, dann ist $M^*(g) = \overline{M(g)}$.*

DEFINITION 2.19. Sei G eine Untergruppe von $GL(V)$. Ein $P \in S$ heißt *G-invariant*, falls $g \cdot P = P$ für alle $g \in G$ gilt. Die Algebra aller G-invarianten Polynome in S wird die *Invariantenalgebra* von G genannt. Sie wird mit $\mathcal{J}$ oder S^G bezeichnet.

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen den G-invarianten Polynomen in S und der Operation von G auf V einer unitären Spiegelungsgruppe G wurde von E. Noether formuliert:

SATZ 2.20 (**Noether**). *Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V. Sind $v, w \in V$, so gibt es genau dann ein $g \in G$ mit $g(v) = w$, wenn $P(v) = P(w)$ für alle $P \in S^G$ gilt.*

Beweis:

($\Rightarrow$) : Es gelte $g(v) = w$ für ein $g \in G$, dann ist $P(w) = P(g(v)) = P(v)$ für alle $P \in S^G$.

($\Leftarrow$) : Sei $P(v) = P(w)$ für alle $P \in S^G$. Liegt w nicht im Orbit Gv von v, so gibt es nach Lemma 2.16 ein $Q \in S$ mit $Q(g(v)) = 1$ für alle $g \in G$ und $Q(w) = 0$. Definiere nun $P := \prod_{g \in G} gQ$, dann sind $P \in S^G$, $P(v) = 1$ und $P(w) = 0$. Widerspruch. □

DEFINITION 2.21. Sei G eine endliche Untergruppe von $GL(V)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} R_G : &S \longrightarrow S^G, \\ R_G(P) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot P, \end{aligned}$$

heißt der *Reynoldsoperator* von G.

Ist G eine endliche Untergruppe von $GL(V)$, so erfüllt der Reynoldsoperator

$$\begin{aligned} R_G(P) &= P \text{ für alle } P \in S^G, \\ R_G(\alpha f + g) &= \alpha R_G(f) + R_G(g) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{C} \text{ und } f, g \in S \text{ und} \\ R_G(PQ) &= P R_G(Q) \text{ für alle } P \in S^G \text{ und } Q \in S. \end{aligned}$$

Sei F das von $\mathcal{J}^+ := \{P \in S^G : P(0) = 0\}$ erzeugte Ideal in S. Weil der Polynomring $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch ist, kann F von endlich vielen Elementen erzeugt werden.

Der folgende Satz wurde erstmals von David Hilbert 1890 ([**25**]) formuliert und bewiesen.

SATZ 2.22. *Seien G eine endliche Untergruppe von $GL(V)$ und $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_s\}$ ein Erzeugendensystem von F über S, wobei $f_1, \ldots, f_s$ homogen und G-invariant sind, so wird S^G als $\mathbb{C}$-Algebra von $\mathcal{F}$ erzeugt.*

Beweis: OBdA, sei $f_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq s$. Ist jedes homogene Polynom $P \in S^G$ ein Polynom über $\mathbb{C}$ in $f_1, \ldots, f_s$, dann ist auch jedes Polynom in S^G ein Polynom in $f_1, \ldots, f_s$. Sei also $P \in S^G$ homogen. Der Beweis wird via Induktion über den Grad von P geführt.
Ist deg $P = 0$, dann ist P ein Polynom in $f_1, \ldots, f_s$ über $\mathbb{C}$.
Sei nun deg $P \geq 1$ und es gelte für alle homogenen Polynome in S^G von kleinerem Grad als P, dass sie ein Polynom in $f_1, \ldots, f_s$ über $\mathbb{C}$ sind. Weil P homogen ist, ist P ein Element in F. Somit können homogene Polynome $P_1, \ldots, P_s \in S$ gewählt werden, sodass $\deg(P_i) = \deg(P) - \deg(f_i)$ für alle $1 \leq i \leq s$ und $P = \sum_{i=1}^{s} P_i f_i$ gelten. Es gilt dann

$$P = R_G(P) = \sum_{i=1}^{s} R_G(P_i) f_i,$$

wobei $R_G(P_i) \in S^G$ entweder homogen vom selben Grad wie P_i oder das Nullpolynom ist. Nun ist $\deg(R_G(P_i)) = \deg(P_i) < \deg(P)$ für alle $i = 1, \ldots, s$, also ist $R_G(P_i)$ nach Induktionsvoraussetzung ein Polynom in $f_1, \ldots, f_s$. Somit ist P ein Polynom in $f_1, \ldots, f_s$. □

Die Invariantenalgebra einer endlichen Untergruppe G von $GL(V)$ wird also von endlich vielen homogenen und G-invarianten Polynomen erzeugt. Ist G außerdem eine unitäre Spiegelungsgruppe, so sind die Elemente jedes minimalen Erzeugendensystems von F, das aus homogenen, G-invarianten Polynomen besteht, algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$, wie im Folgenden bewiesen werden wird. Insbesondere ist dann die Invariantenalgebra von G eine Polynomalgebra.

Dazu wird noch das folgende, etwas technische Lemma benötigt.

Lemma 2.23 (**Chevalley** ([**21**])). *Seien G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V, $r \in \mathbb{N}$ und $U_1, \ldots, U_r \in S^G$ homogene Polynome, sodass U_1 kein Element des von $U_2, .., U_r$ erzeugten Ideals in S^G ist. Falls es homogene Polynome $P_1, \ldots, P_r \in S$ gibt, sodass*

$$\sum_{i=1}^{r} P_i U_i = 0 \tag{3}$$

gilt, dann ist $P_1 \in F$.

Beweis: Wird der Reynoldsoperator auf (3) angewandt, so ergibt sich

$$R_G(P_1)U_1 + \cdots + R_G(P_r)U_r = 0. \tag{$*$}$$

Induktion nach dem Grad von P_1:
Ist der Grad von P_1 gleich 0, so muss nach Voraussetzung $P_1 = 0 \in F$ sein, denn wäre $P_1 \neq 0 \in \mathbb{C}$, so würde U_1 wegen $R_G(P_1) = P_1$ in ($*$) im von $U_2, \ldots, U_r$ erzeugten Ideal in S^G liegen.
Sei $\deg P_1 > 0$. Ist $G = 1$, dann sind $F = \mathcal{J}^+$ und daher $P_1 \in F$. Seien also $G \neq 1$ und r_H eine Spiegelung in G mit spiegelnder Hyperebene H. Wird r_H auf (3) angewandt und wird dann $\sum_{i=1}^{r} P_i U_i$ subtrahiert, so folgt $\sum_{i=1}^{r} (r_H \cdot P_i - P_i) U_i = 0$. Wegen Lemma 2.17 gibt es für alle $i = 1, \ldots, r$ ein homogenes Polynom Q_i vom Grad kleiner P_i mit $r_H \cdot P_i - P_i = L_H Q_i$. Insbesondere muss $\sum_{i=1}^{r} Q_i U_i = 0$ gelten und somit gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass $Q_1 \in F$ und daher $r_H \cdot P_1 - P_1 = L_H Q_1 \in F$ sind. Da G von Spiegelungen erzeugt wird, gilt $g \cdot P_1 - P_1 \in F$ für alle $g \in G$. Schließlich gelten $R_G(P_1) - P_1 \in F$ und deswegen $P_1 \in F$. □

Shephard und Todd ([**43**]) bewiesen erstmals, dass die Invariantenalgebra einer irreduziblen unitären Spiegelungsgruppe G eine Polynomalgebra ist, indem sie für jede irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe ein Erzeugendensystem aus algebraisch unabhängigen, homogenen und G-invarianten Polynomen angaben. Chevalley ([**21**]) gab dann erstmals einen für alle reellen Spiegelungsgruppen uniform geltenden Beweis, der auch für unitäre Spiegelungsgruppen gilt, wie später Serre ([**42**]) bemerkte.

Satz 2.24. *Sind G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V und $\mathcal{F}$ ein aus homogenen und G-invarianten Polynomen bestehendes minimales Erzeugendensystem von F, so sind die Elemente von $\mathcal{F}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$.*

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_s\}$. Angenommen, $f_1, \dots, f_s$ sind algebraisch abhängig, dann gibt es ein nichttriviales Polynom $H \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_s]$, das

$$H(f_1, \dots, f_s) = 0$$

erfüllt. Da $H \neq 0$ gilt, gibt es ein Monom $cY_1^{k_1} \cdots Y_s^{k_s}$ in H mit $c \neq 0$. Sind $d_1, \dots, d_s$ die Grade der erzeugenden Polynome, dann sei $h := k_1 d_1 + \cdots + k_s d_s$. Da $H(f_1, \dots, f_s) = 0$ ist, muss insbesondere die Summe aller Monome vom Grad h in $H(f_1, \dots, f_s)$, welche genau die Summe aller Monome $c_{\ell_1,\dots,\ell_n} Y_1^{\ell_1} \cdots Y_s^{\ell_s}$ mit $\ell_1 d_1 + \cdots + \ell_s d_s = h$ in H an der Stelle $(f_1, \dots, f_s)$ ist, das Nullpolynom sein. Es gibt daher ein $h \in \mathbb{N}$, sodass H so gewählt werden kann, dass $k_1 d_1 + \cdots + k_s d_s = h$ für jedes Monom $Y_1^{k_1} \cdots Y_s^{k_s}$, $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}_0$, von H gilt.

Sei H nun so gewählt, dass h minimal ist. Für $1 \leq i \leq s$ setze $H_i := \frac{\partial H}{\partial Y_i}$ und $U_i := H_i(f_1, \dots, f_s)$, dann sind $U_1, \dots, U_s$ homogen und G-invariant. Da H nichttrivial ist, gibt es eine nichttriviale partielle Ableitung H_{i_0} von H und wegen der Minimalität von h ist auch $U_{i_0} \neq 0$. Sei $\{U_1, \dots, U_t\}$ ein minimales Erzeugendensystem des von $\{U_1, \dots, U_s\}$ erzeugten Ideals in S^G (nach möglicher Umnummerierung), das heißt, es gibt für alle $t < k \leq s$ Elemente $V_{k_1}, \dots, V_{k_t}$ in S^G, sodass $U_k = \sum_{j=1}^{t} V_{k_j} U_j$ und $\deg(V_{k_j}) = \deg(U_k) - \deg(U_j) = d_j - d_k$ für alle $1 \leq j \leq t$ gelten. Partielles Ableiten beider Seiten der Gleichung $0 = H(f_1, \dots, f_s)$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial H}{\partial X_i} &= \sum_{k=1}^{s} U_k \frac{\partial f_k}{\partial X_i} = \sum_{k=1}^{t} U_k \frac{\partial f_k}{\partial X_i} + \sum_{k=t+1}^{s} \sum_{j=1}^{t} V_{k_j} U_j \frac{\partial f_k}{\partial X_i} \\ &= \sum_{j=1}^{t} U_j \Big(\frac{\partial f_j}{\partial X_i} + \sum_{k=t+1}^{s} V_{k_j} \frac{\partial f_k}{\partial X_i} \Big) \end{aligned}$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Außerdem ist für alle $1 \leq i \leq t$ nach Konstruktion U_i nicht in dem von $\{U_j : 1 \leq j \leq t \text{ und } j \neq i\}$ erzeugten Ideal in S^G enthalten. Nach Lemma 2.23 gilt nun für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $j \in \{1, \dots, t\}$, dass $\frac{\partial f_j}{\partial X_i} + \sum_{k=t+1}^{s} V_{k_j} \frac{\partial f_k}{\partial X_i} \in F$ ist. Diese Polynome haben für alle j unabhängig von i entweder Grad $d_j - 1$ oder sind 0. Da F von $f_1, \dots, f_s$ erzeugt wird, existieren homogene Polynome $q_{i,j,m}$ mit

$$(*) \qquad \frac{\partial f_j}{\partial X_i} + \sum_{k=t+1}^{s} V_{k_j} \frac{\partial f_k}{\partial X_i} = \sum_{m=1}^{s} q_{i,j,m} f_m$$

für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq s$. Mittels Multiplizieren beider Seiten von $(*)$ mit X_i, mittels Summieren über alle i und mittels Anwenden der Eulerformel, die besagt, dass $\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial X_i} = \deg(f) \cdot f$ für beliebige Polynome $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ gilt, folgt schließlich die Identität

$$d_1 f_1 + \sum_{k=t+1}^{s} V_{k_1} d_k f_k = \sum_{m=1}^{s} \tilde{q}_m f_m.$$

Ist $\tilde{q}_1 \neq 0$, dann ist $\tilde{q}_1 f_1$ homogen vom Grad größer als d_1. Da $d_1 f_1 + \sum_{k=t+1}^{s} V_{k_1} d_k f_k$ homogen vom Grad d_1 ist, wird der Term $\tilde{q}_1 f_1$ durch Terme von $\sum_{m=1}^{s} \tilde{q}_m f_m$ ausgelöscht. Dies bedeutet aber, dass f_1 im Erzeugnis von $f_2, \dots, f_s$ liegt, was ein Widerspruch zur Minimalität des Erzeugendensystems $\{f_1, \dots, f_s\}$ ist. Die $f_1, \dots, f_s$ müssen also algebraisch unabhängig sein. $\square$

Definition 2.25. Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V. Eine Menge von homogenen, algebraisch unabhängigen Polynomen, die ein Erzeugendensystem der $\mathbb{C}$-Algebra S^G bildet, heißt eine Menge von *Basisinvarianten* von G.

Eine Menge von Basisinvarianten einer unitären Spiegelungsgruppe G ist nicht eindeutig. Jedoch sind ihre Mächtigkeit und die Grade ihrer homogenen Elemente eindeutig bestimmt, wie als nächstes bewiesen werden soll. Dazu muss der Quotientenkörper der Invariantenalgebra von G genauer betrachtet werden.

Der Beweis des folgenden Satzes kann zum Beispiel in [**30**, VI §1 Theorem 1.8] nachgelesen werden.

Satz 2.26 (**Artin**). *Seien L ein Körper, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von L und $K := L^G$ der Körper der Fixpunkte von G in L. Dann ist L eine endliche Galoiserweiterung von K vom Grad $[L : K] = |G|$ mit Galoisgruppe G.*

Sei G eine Untergruppe von $GL(V)$ und bezeichne $\mathbb{C}(V^*)$ den Quotientenkörper von S, so ist durch $g \cdot \frac{P}{Q} = \frac{g \cdot P}{g \cdot Q}$ für $g \in G, P, Q \in S, Q \neq 0$ eine Operation von G auf $\mathbb{C}(V^*)$ gegeben.

Korollar 2.27. *Seien G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V und $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_s\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G, dann stimmen der Körper der Fixpunkte der Operation von G auf $\mathbb{C}(V^*)$ und der Quotientenkörper $\mathbb{C}(S^G) = \mathbb{C}(f_1, \ldots, f_s)$ von S^G überein. Außerdem ist $\mathbb{C}(V^*)$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{C}(S^G)$ vom Grad $|G|$ mit Galoisgruppe G.*

Beweis: Jedes Element aus $\mathbb{C}(V^*)$ kann in der Form $\frac{P}{Q}$ mit $Q \in S^G$ geschrieben werden, denn es gilt $\frac{P}{Q} = \frac{P \prod_{g \neq 1} g \cdot Q}{\prod_{g \in G} g \cdot Q}$. Ist nun $\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(V^*)^G$ mit $Q \in S^G$, dann muss auch $P \in S^G$ gelten. Somit ist $\mathbb{C}(V^*)^G = \mathbb{C}(S^G)$. Aus Artins Satz folgt, dass $\mathbb{C}(V^*)$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{C}(S^G)$ vom Grad $|G|$ mit Galoisgruppe G ist. □

Der Beweis des folgenden Satzes stammt von C. Chevalley ([**21**]).

Satz 2.28. *Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V.*

(i) Die Kardinalität einer beliebigen Menge von Basisinvarianten von G ist $n = \dim_{\mathbb{C}} V$.
(ii) Die Grade der Elemente einer Menge von Basisinvarianten von G sind eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_s\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G und $d_1, \ldots, d_n$ die Grade der Elemente von $\mathcal{F}$. Da $\mathbb{C}(V^*)$ nach Korollar 2.27 eine endliche Galoiserweiterung von $\mathbb{C}(S^G)$ ist, stimmen die Transzendenzgrade über $\mathbb{C}$ von $\mathbb{C}(V^*)$ und $\mathbb{C}(S^G)$ überein, siehe zum Beispiel [**30**, S.355-356]. Nun ist aber der Transzendenzgrad von $\mathbb{C}(V^*)$ gleich n und der von $\mathbb{C}(S^G) = \mathbb{C}(f_1, \ldots, f_s)$ gleich s, da $f_1, \ldots, f_s$ algebraisch unabhängig sind, woraus die erste Behauptung folgt.

Seien nun $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine weitere Menge von Basisinvarianten von G und $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_n$ die Grade der Elemente von $\mathcal{G}$, dann gibt es Polynome $F_1, \ldots, F_n$ und $G_1, \ldots, G_n$, sodass $g_i = G_i(f_1, \ldots, f_n)$ und $f_i = F_i(g_1, \ldots, g_n)$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Differenzieren nach g_j und Verwenden der Kettenregel ergibt

$$\frac{\partial G_i}{\partial g_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial f_k} \frac{\partial F_k}{\partial g_j} = \delta_{ij}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dies bedeutet aber $(\frac{\partial G_i}{\partial f_j})_{1 \leq i,j \leq n} \cdot (\frac{\partial F_k}{\partial g_l})_{1 \leq k,l \leq n} = I_n$. Insbesondere sind die Determinanten von $(\frac{\partial G_i}{\partial f_j})_{1 \leq i,j \leq n}$ und $(\frac{\partial F_k}{\partial g_l})_{1 \leq k,l \leq n}$ ungleich 0. Somit gibt es Permutationen $\sigma, \pi \in S_n$, sodass $\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial f_{\pi(i)}} \neq 0$ und $\prod_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial g_{\sigma(k)}} \neq 0$ sind, und daher sind g_i ein nichtkonstantes Polynom in $f_{\pi(i)}$ und f_k ein nichtkonstantes Polynom in $g_{\sigma(k)}$ für alle $1 \leq i, k \leq n$. Da deswegen insbesondere $\tilde{d}_i \geq d_{\pi(i)}$ und $d_k \geq \tilde{d}_{\sigma(k)}$ für alle $1 \leq i, k \leq n$ gilt, muss $\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i = \sum_{i=1}^{n} d_i$ gelten. Wäre nun $\tilde{d}_i < d_{\pi(i)}$ für ein $i \in [n]$, dann würde das einen Widerspruch zu $\sum_{i=1}^{n} \tilde{d}_i = \sum_{i=1}^{n} d_i$ ergeben. Es muss also $\tilde{d}_i = d_{\pi(i)}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gelten. □

Definition 2.29. Sei G eine Spiegelungsgruppe von V. Die Grade der Basisinvarianten von G werden die *Grade* von G genannt und mit $d_1, \ldots, d_n$ bezeichnet.

Bemerkung 2.30. Die Grade einer unitären Spiegelungsgruppe G müssen alle größer 0 sein, da die Elemente einer Menge von Basisinvarianten algebraisch unabhängig sind.

Zum Schluss dieses Abschnitts soll noch ein erstes Beispiel für die Wichtigkeit der Grade einer unitären Spiegelungsgruppe gezeigt werden.

Proposition 2.31. *Sind G eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe v und $d_1, \ldots, d_n$ die Grade von G, dann ist das Zentrum $Z(G)$ von G eine zyklische Untergruppe von G der Ordnung* $\mathrm{ggT}(d_1, \ldots, d_n)$.

Beweis: Da G irreduzibel ist, ist V ein einfacher $\mathbb{C}[G]$-Modul. Nach dem Lemma von Schur gilt deswegen $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V) = \{\lambda \cdot id_V : \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$. Nun ist aber jedes Element aus $Z(G)$ eine Einheit in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V)$ und nach Lemma B.1 ist jede endliche Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ zyklisch, womit auch $Z(G)$ zyklisch ist.
Sei $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G. Nach obiger Überlegung gibt es für jedes $g \in Z(G)$ ein $\lambda_g \in \mathbb{C}$ mit $g = \lambda_g \cdot id_V$ und $f_i = g \cdot f_i = \lambda_g^{-d_i} f_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Insbesondere muss $\lambda_g^{d_i} = 1$ für alle $g \in Z(G)$ und für alle i gelten. Die Ordnung jedes Elements aus $Z(G)$ muss alle Grade $d_1, \ldots, d_n$ und somit auch $ggT(d_1, \ldots, d_n)$ teilen. Insgesamt teilt $|Z(G)|$ dann $ggT(d_1, \ldots, d_n)$.
Umgekehrt, sei λ eine primitive d-te Einheitswurzel, sodass d ein Teiler von $d_1, \ldots, d_n$ ist, dann definiert die Multiplikation $\lambda \cdot id_V \in GL(V)$ eine Operation auf $\mathbb{C}(V^*)$, die $\mathbb{C}(S^G)$ fixiert, weswegen $\lambda \cdot id_V$ in der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(V^*)/\mathbb{C}(S^G))$ enthalten ist. Diese ist aber nach Korollar 2.27 gleich G, womit $\lambda \cdot id_V \in Z(G)$ gilt. Es sind also d und somit $ggT(d_1, \ldots, d_n)$ Teiler von $|Z(G)|$.
Insgesamt ist daher $|Z(G)| = ggT(d_1, \ldots, d_n)$. □

3. Koinvariantenalgebra und Kograde unitärer Spiegelungsgruppen

Sind G eine endliche Gruppe, V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $|G|$ und $\{v_g : g \in G\}$ eine Basis von V, dann heißt die durch

$$h \cdot v_g := v_{hg} \text{ für alle } g, h \in G$$

eindeutig festgelegte Darstellung die *reguläre Darstellung* von G.

Seien nun V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $n = \dim_{\mathbb{C}} V$, G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V und F das von $\mathcal{J}^+ = \{P \in S^G : P(0) = 0\}$ erzeugte Ideal in S.

Definition 2.32. Die Quotientenalgebra S/F heißt die *Koinvariantenalgebra* von G.

Es wirkt G auf dem Quotientenkörper $\mathbb{C}(V^*)$ von S durch $g \cdot \frac{P}{Q} = \frac{g \cdot P}{g \cdot Q}$ für $g \in G, P, Q \in S, Q \neq 0$. Nach Korollar 2.27 ist $\mathbb{C}(V^*)$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{C}(S^G)$ vom Grad $|G|$ mit Galoisgruppe G.

Proposition 2.33. *Wird $\mathbb{C}(V^*)$ als Vektorraum über $\mathbb{C}(S^G)$ betrachtet, so ist die Darstellung von G auf $\mathbb{C}(V^*)$ die reguläre Darstellung.*

Beweis: Nach dem Satz über Normalbasen von Galoiserweiterungen, siehe zum Beispiel [**30**, Kapitel VI §13], gibt es ein $\theta \in \mathbb{C}(V^*)$, sodass $\{g \cdot \theta : g \in G\}$ eine Basis von $\mathbb{C}(V^*)$ über $\mathbb{C}(S^G)$ ist. Nun folgt sofort, dass die Darstellung von G auf $\mathbb{C}(V^*)$ über $\mathbb{C}(S^G)$ die reguläre Darstellung ist. □

Proposition 2.34 (**Chevalley [21]**). *Seien $P_1, \ldots, P_m$ homogene Elemente in S, sodass*

$$\overline{P_1} = P_1 + F, \ldots, \overline{P_m} = P_m + F \in S/F$$

linear unabhängig über $\mathbb{C}$ sind, dann sind $P_1, \ldots, P_m$ als Elemente in $\mathbb{C}(V^*)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}(S^G)$.

Beweis: Angenommen, es gibt $A_1, \ldots, A_m \in S^G$ nicht alle 0 und $B_1, \ldots, B_m$ in S^G ungleich Null mit

$$(*) \qquad \frac{A_1}{B_1} P_1 + \cdots + \frac{A_m}{B_m} P_m = 0,$$

so gibt es $U_1, \ldots, U_m \in S^G$, die nicht alle 0 sind, mit $U_1 P_1 + \cdots + U_m P_m = 0$. Seien $U_1, \ldots, U_m$ so nummeriert, dass $U_1, \ldots, U_k$ ungleich 0 und $U_{k+1} = \cdots = U_m = 0$ sind. Es können $U_1, \ldots, U_k$ nun homogen mit $\deg(P_i) + \deg(U_i) = h$ für ein festes h gewählt werden, sodass

$$(**) \qquad U_1 P_1 + \cdots + U_k P_k = 0$$

gilt. Diese $U_1, \ldots, U_k$ seien außerdem so geordnet, dass

$$\deg(U_1) = \cdots = \deg(U_t) < \deg(U_{t+1}) \leq \cdots \leq \deg(U_k)$$

und damit $\deg(P_1) = \cdots = \det(P_t)$ gelten. Nach Voraussetzung und Lemma 2.23 muss nach möglicher Umnummerierung U_1 in dem von $\{U_2, \ldots, U_t\}$ erzeugten Ideal liegen. Es gilt also

$$(***) \qquad U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_t U_t = 0$$

für gewisse $a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{C}$. Unter Verwendung der Identität $(***)$ kann nun in $(**)$ der Term U_1 eliminiert werden und es bleibt die Identität

$$U_2(P_2 - a_2 P_1) + \cdots + U_t(P_t - a_t P_1) + U_{t+1} P_{t+1} + \cdots + U_k P_k = 0.$$

Diese ist nun aber von der Form $(**)$. Daher kann obiges Verfahren wiederholt werden, so oft, bis $U_1, \ldots, U_{t-1}$ eliminiert sind, und es gilt dann

$$U_t \sum_{i=1}^{t} b_i P_i + U_{t+1} P_{t+1} + \cdots + U_k P_k = 0$$

für gewisse $b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{C}$, die nicht alle 0 sind. Da U_t nicht im von $\{U_{t+1}, \ldots, U_k\}$ in S^G erzeugten Ideal liegen kann, da $\deg(U_t) < \deg(U_i)$ für alle $i > t$ ist, ist $\sum_{i=1}^{t} b_i P_i \in F$ nach Lemma 2.23, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Es müssen also $P_1, \ldots, P_m$ als Elemente in $\mathbb{C}(V^*)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}(S^G)$ sein. □

Korollar 2.35. *Es gilt*

$$|G| = \dim_{\mathbb{C}(S^G)} \mathbb{C}(V^*) \geq \dim_{\mathbb{C}} S/F.$$

Lemma 2.36. *Seien $P_1, \ldots, P_m$ homogene Polynome, sodass $\{\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_m}\}$ eine Basis von S/F ist. Dann kann jedes $P \in S$ auf eindeutige Weise als $P = U_1 P_1 + \cdots + U_m P_m$ mit $U_1, \ldots, U_m \in S^G$ geschrieben werden.*

Beweis: (Chevalley [**21**]) Es genügt zu zeigen, dass sich jedes homogene Polynom P in S in dieser Form schreiben lässt. Die Eindeutigkeit folgt dann aus Proposition 2.34. Ist deg $P = 0$, dann gilt die Behauptung. Sei also deg $P > 0$, dann gibt es nach Voraussetzung $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ und $Q \in F$ mit $P = a_1P_1 + \cdots + a_mP_m + Q$. Da F von homogenen, G-invarianten Polynomen $f_1, \dots, f_n$ erzeugt werden kann, gibt es homogene Polynome A_i mit $\deg(A_i) < \deg(P)$ und $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i f_i$. Die Behauptung folgt nun mittels Induktion. □

KOROLLAR 2.37. *Es gilt*

$$\dim_{\mathbb{C}} S/F = |G|.$$

Beweis: Seien $P_1, \dots, P_m$ homogene Polynome in S, sodass $\{\overline{P_1}, \dots, \overline{P_m}\}$ eine Basis von S/F ist. Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{C}(V^*)$ von $P_1, \dots, P_m$ über $\mathbb{C}(S^G)$ erzeugt wird. Sei also $\frac{P}{Q} \in \mathbb{C}(V^*)$, dann gibt es nach dem Beweis von Korollar 2.27 ein $\tilde{P} \in S$ und ein $\tilde{Q} \in S^G$, sodass $\frac{P}{Q} = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ ist. Nach Lemma 2.36 gibt es eindeutige $U_1, \dots, U_m \in S^G$ mit $\tilde{P} = \sum\limits_{i=1}^{m} U_iP_i$, womit $\frac{P}{Q} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{U_i}{\tilde{Q}} P_i$, wobei $\frac{U_i}{\tilde{Q}} \in \mathbb{C}(S^G)$ gilt, ist. □

KOROLLAR 2.38. *Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe, dann gilt $S \cong S^G \otimes_{\mathbb{C}} S/F$ als graduierte G-Moduln.*

Beweis: Seien $P_1, \dots, P_m$ homogene Polynome in S, sodass $\{\overline{P_1}, \dots, \overline{P_m}\}$ eine Basis von S/F ist. Definiere eine $\mathbb{C}$-bilineare Abbildung

$$\phi : S^G \times S/F \longrightarrow S, \ \phi((U, \overline{P_i})) = UP_i,$$

dann induziert diese nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts und nach Lemma 2.36 einen Isomorphismus $\Phi : S^G \otimes S/F \longrightarrow S$ mit $\phi((U \otimes \overline{P_i})) = UP_i$. □

PROPOSITION 2.39. *Die Darstellung von G auf S/F ist die reguläre Darstellung.*

Beweis: Wähle homogene Polynome $P_1, \dots, P_m \in S$, sodass $\{\overline{P_1}, \dots, \overline{P_m}\}$ eine Basis von S/F bildet. Nach Korollar 2.38 gibt es für alle $g \in G$ Elemente $U_{ij}(g)$ aus S^G, die $g \cdot P_j = \sum\limits_{i=1}^{m} U_{ij}(g)P_i$ für alle j erfüllen. Weil nach Korollar 2.37 $\{P_1, \dots, P_m\}$ eine Basis von $\mathbb{C}(V^*)$ über $\mathbb{C}(S^G)$ bildet, ist die Spur der Aktion von g auf $\mathbb{C}(V^*)$ über $\mathbb{C}(S^G)$ gleich $\sum\limits_{i=1}^{n} U_{ii}(g)$. Nun gilt aber $\sum\limits_{i=1}^{m} U_{ii}(g) = 0$ für alle $g \neq 1$ wegen Proposition 2.33 und $\sum\limits_{i=1}^{m} U_{ii}(1) = |G|$. Insbesondere ist also auch die Spur der Operation von g auf S/F gleich 0, falls $g \neq 1$, oder gleich $|G|$, falls $g = 1$, das heißt, die Darstellung von G auf S/F ist die reguläre Darstellung. □

Als nächstes wird ein weiterer wichtiger Begriff eingeführt, nämlich der der Kograde einer Spiegelungsgruppe. Definiere zunächst eine *Derivation* einer kommutativen $\mathbb{C}$-Algebra A als eine lineare Abbildung $D : A \longrightarrow A$, die

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

für alle $a, b \in A$ erfüllt. Die Menge aller Derivationen von A ist dann ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, der mit $\mathrm{Der}(A)$ bezeichnet wird. Ist zum Beispiel $A = \mathcal{S}(V^*)$, dann wird ein Polynom in Derivationen von $\mathcal{S}(V^*)$ *Differentialoperator* von V genannt.

Die $\mathbb{C}$-Algebra der Differentialoperatoren von V wird mit $\mathrm{Diff}(V)$ bezeichnet. Für ein $v \in V$ und ein $f \in S$ definiere die *Richtungsableitung in Richtung* v als

$$D_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Sind $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{X_1, \ldots, X_n\}$ die Dualbasis von V^* zu $\{v_1, \ldots, v_n\}$, dann ist

$$D_{v_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \tag{4}$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Die Abbildung $D : V \longrightarrow \mathrm{Diff}(V)$, $v \mapsto D_v$, ist linear. Nach der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra lässt sich diese Abbildung zu einem $\mathbb{C}$-Algebrahomomorphismus $D : \mathcal{S}(V) \longrightarrow \mathrm{Diff}(V)$ fortsetzen. Das Bild von $\mathcal{S}(V)$ in $\mathrm{Diff}(V)$ wird mit $\mathcal{D}_{\mathcal{S}(\mathcal{V})}$ bezeichnet.

Lemma 2.40. *Sind $g \in GL(V)$, $f \in \mathcal{S}(V)$ und $P \in \mathcal{S}(V^*)$, so ist*

$$g \cdot (D_f P) = D_{g \cdot f}(g \cdot P).$$

Beweis: Ist die Behauptung für $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(V)$ gezeigt, dann gilt sie auch für ihr Produkt $f_1 f_2 =: f$, denn

$$\begin{aligned} g \cdot D_f P &= g \cdot D_{f_1 f_2} P = g \cdot D_{f_1}(D_{f_2} P) = D_{g \cdot f_1}(g \cdot D_{f_2} P) \\ &= D_{g \cdot f_1}(D_{g \cdot f_2}(g \cdot P)) = D_{(g \cdot f_1)(g \cdot f_2)}(g \cdot P) = D_{g \cdot f}(g \cdot P). \end{aligned}$$

Da die Behauptung linear in f ist, genügt es, zu zeigen, dass die Behauptung für $f = v \in V$ gilt.
Für $v, x \in V$ gilt nun

$$\begin{aligned} g \cdot D_v P(x) = D_v P(g^{-1}(x)) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{P(g^{-1}(x) + tv) - P(g^{-1}(x))}{t} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{g \cdot P(x + tg(v)) - g \cdot P(x)}{t} = D_{g \cdot v}(g \cdot P)(x). \end{aligned}$$

□

Da $GL(V)$ auf V auf natürliche Weise durch $g \cdot v = g(v)$ für $g \in GL(V)$, $v \in V$ operiert, kann für jedes $g \in GL(V)$ die lineare Abbildung $V \to \mathcal{S}(V), v \mapsto g(v)$, auf eindeutige Weise zu einem Algebrahomomorphismus $L_g : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(V)$ mit $L_g(1) = 1$ und $L_g(v) = g(v)$ für alle $v \in V$ fortgesetzt werden nach der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra.

Somit operiert $GL(V)$ auf $\mathcal{S}(V)$ durch $g \mapsto L_g$ für $g \in GL(V)$. Ist G eine Untergruppe von $GL(V)$, so heißt ein $f \in \mathcal{S}(V)$, das $L_g(f) = f$ für alle $g \in G$ erfüllt, G-invariant. Die $\mathbb{C}$-Algebra aller G-invarianten Elemente in $\mathcal{S}(V)$ wird dann mit $\mathcal{S}(V)^G$ bezeichnet. Die Graduierung von $\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}^k(V)$ wird auf $\mathcal{S}(V)^G$ vererbt, das heißt, $\mathcal{S}(V)^G = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{S}(V)^G \cap \mathcal{S}^k(V)$. Es bezeichne dann $\mathcal{J}(V)^+ := \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{S}(V)^G \cap \mathcal{S}^k(V)$.

Definition 2.41. Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V. Ein $P \in \mathcal{S}(V^*)$ heißt *G-harmonisch*, falls $D_f(P) = 0$ für alle f in $\mathcal{J}(V)^+$ gilt. Der Vektorraum aller G-harmonischen Polynome wird mit $\mathcal{H}$ bezeichnet.

Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V. Die Menge der G-harmonischen Polynome und die Koinvariantenalgebra von G sind isomorphe G-Moduln nach [**35**, S. 181-184]. Daher ist die Darstellung von G auf $\mathcal{H}$ die reguläre Darstellung nach Proposition 2.39.

Sei $\mathcal{A}(G)$ die Menge der spiegelnden Hyperebenen von G. Wähle für jede spiegelnde Hyperebene H von G eine Linearform $L_H \in V^*$ mit $\ker(L_H) = H$ und setze

$$\Pi = \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{e_H - 1},$$

wo e_H die Ordnung der Untergruppe $G_H = \{g \in G : H \subseteq \mathrm{Fix}(g)\}$ von V ist.

Nach [**35**, Theorem 9.38] ist $P \in \mathcal{S}(V^*)$ genau dann G-harmonisch, wenn es ein $f \in \mathcal{S}(V)$ mit $P = D_f(\Pi)$ gibt. Ist also $N = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} (e_H - 1)$ die Anzahl der Spiegelungen in G, dann ist $\mathcal{H}$ ein graduierter G-Modul $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k$, wo $\mathcal{H}_N = \mathbb{C}\Pi$ und $\mathcal{H}_k = \mathcal{H} \cap \mathcal{S}^k(V^*)$ der von den $(N-k)$-ten partiellen Ableitungen von Π erzeugte $\mathbb{C}$-Vektorraum sind.

Falls nun M_1, M_2, M endlich-dimensionale G-Moduln und χ_{M_1} bzw. χ_{M_2} die Charaktere der Darstellung von G auf M_1 bzw. M_2 sind, dann sei

$$(M_1, M_2) := (\chi_{M_1}, \chi_{M_2}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(M_1, M_2).$$

Definition 2.42. Für einen G-Modul M der Dimension r sei

$$f_M(t) := \sum_{i=0}^{N} (M, \mathcal{H}_i) t^i = t^{q_1(M)} + \cdots + t^{q_r(M)},$$

wobei $q_i(M) \leq q_{i+1}(M)$ für alle $1 \leq i \leq r-1$, N die Anzahl der Spiegelungen in G und $r = (M, \mathcal{H})$ sind.

Das r-Tupel $(q_1(M), \ldots, q_r(M))$ heißt *Folge der M-Exponenten* von G.

Ist M ein G-Modul, dann sei $M^G := \{m \in M : g \cdot m = m$ für alle $g \in G\}$.

Lemma 2.43. *Seien M_1, M_2 endlich-dimensionale G-Moduln. Dann gelten*

(i) $M_1 \otimes M_2^* \cong \mathrm{Hom}(M_2, M_1)$,
(ii) $(M_1 \otimes M_2^*)^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(M_2, M_1)$ *und*
(iii) $\dim_{\mathbb{C}}(M_1 \otimes M_2^*)^G = (M_2, M_1)$.

Beweis: Siehe [**30**, Kapitel XVI §5]. □

Sei M ein irreduzibler, endlich-dimensionaler G-Modul. Da die Darstellung von G auf $\mathcal{H}$ die reguläre Darstellung und der Charakter χ der regulären Darstellung durch $\chi(1) = |G|$ und $\chi(g) = 0$ für alle $g \neq 1 \in G$ gegeben sind, gilt $(M, \mathcal{H}) = \dim_{\mathbb{C}} M$.

Auf $S \otimes M^*$ ist eine Darstellung von G via

$$g \cdot (P \otimes y) := g \cdot P \otimes g \cdot y$$

für $P \in S$ und für $y \in M^*$ gegeben.

Definition 2.44. Seien G eine Gruppe und $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ ein G-Modul, der direkte Summe endlich-dimensionaler G-Moduln $\{M_i\}_{i \geq 0}$ ist, dann heißt M ein *graduierter* G-Modul.

Wird $S \otimes M^*$ mit der Graduierung $S \otimes M^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} (S^k \otimes M^*)$ betrachtet, dann sind die graduierten Bestandteile $\{S^k \otimes M^*\}_{k \geq 0}$ von $S \otimes M^*$ bezüglich dieser Wirkung G-invariant, das heißt, $S \otimes M^*$ ist ein graduierter G-Modul.

Betrachte $\mathcal{H}\otimes M^*$ mit der Graduierung $\mathcal{H}\otimes M^* = \bigoplus_{i=0}^{N}(\mathcal{H}_i\otimes M^*)$, dann ist

$$(\mathcal{H}\otimes M^*)^G = \bigoplus_{i=0}^{N}(\mathcal{H}_i\otimes M^*)^G,$$

wobei N die Anzahl der Spiegelungen in G ist. Außerdem ist mit Lemma 2.43

$$r = (M,\mathcal{H}) = \dim_{\mathbb{C}} M.$$

Wähle nun Basen $\mathcal{B}_i = \{u_{i_1},\dots,u_{i_{(\mathcal{H}_i,M)}}\}$ von $(\mathcal{H}_i\otimes M^*)^G$ für alle $0\le i\le N$, dann ist $\mathcal{B} = \{u_1,\dots,u_r\} := \bigcup_{i=0}^{N}\mathcal{B}_i$ eine Basis von $(\mathcal{H}\otimes M^*)^G$, sodass mit entsprechender Nummerierung u_i homogen vom Grad $q_i(M)$ für alle $1\le i\le r$ ist.
Es gilt $\mathcal{H}\otimes(M_1\oplus M_2) = (\mathcal{H}\otimes M_1)\oplus(\mathcal{H}\otimes M_2)$ für beliebige G-Moduln M_1, M_2. Ist also M ein beliebiger endlich-dimensionaler G-Modul, so besitzt $(\mathcal{H}\otimes M^*)^G$ eine Basis $\{u_1,\dots,u_r\}$, sodass jedes u_i homogen vom Grad $q_i(M)$ ist.

Seien also M ein beliebiger endlich-dimensionaler G-Modul und $r = \dim_{\mathbb{C}} M$, dann wird $S\otimes M$ zu einem S-Modul via $P\cdot(Q\otimes y) := (PQ)\otimes y$ für alle $P, Q\in S$ und $y\in M$.

Proposition 2.45. *(i) $S\otimes M$ und $(S\otimes M^*)^G$ sind freie S^G-Moduln.*
(ii) Ist $\{u_1,\dots,u_r\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $(\mathcal{H}\otimes M^*)^G$, dann ist $\{u_1,\dots,u_r\}$ eine S^G-Basis von $(S\otimes M^*)^G$.
(iii) Sind die $u_1,\dots,u_r$ in (ii) homogen, dann sind ihre Grade die M-Exponenten von G, das heißt, $\deg u_i = q_i(M)$ für alle $1\le i\le r$.

Beweis: Es gilt $S\cong S^G\otimes\mathcal{H}$ nach Korollar 2.38 und aufgrund der Gleichheit von $\mathcal{H}$ und der Koinvariantenalgebra. Falls $\{H_1,\dots,H_{|G|}\}$ eine Basis von $\mathcal{H}$ ist, so lässt sich jedes $P\in S$ eindeutig schreiben als $P = \sum_{j=1}^{|G|} F_j H_j$, wo $F_j\in S^G$ für alle $1\le j\le |G|$ ist. Daher ist S ein freier S^G-Modul, wobei jede Basis von $\mathcal{H}$ eine S^G-Basis von S ist. Somit ist $S\otimes M$ ein freier S^G-Modul.
Schließlich ist mit obiger Notation

$$\begin{aligned}(S\otimes M^*)^G &\cong ((S^G\otimes\mathcal{H})\otimes M^*)^G \cong (S^G\otimes(\mathcal{H}\otimes M^*))^G \cong S^G\otimes(\mathcal{H}\otimes M^*)^G\\ &\cong S^G u_1\otimes\cdots\otimes S^G u_r,\end{aligned}$$

womit die restlichen Behauptungen bewiesen sind. □

Definition 2.46. Sei G eine Spiegelungsgruppe von V. Die *Kograde* von G sind definiert als

$$d_j^* := q_j(V^*) - 1$$

für alle $1\le j\le n$.

4. Hilbert-Poincaréreihen unitärer Spiegelungsgruppen

Ein wichtiges Werkzeug im Zusammenhang mit der Invariantentheorie endlicher Gruppen ist die Hilbert-Poincaréreihe. Mit ihrer Hilfe können wichtige Anwendungen der Invariantentheorie für unitäre Spiegelungsgruppen bewiesen werden.

4.1. Hilbert-Poincaréreihen.

DEFINITION 2.47. Seien G eine Gruppe und $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ ein graduierter G-Modul.

(i) Die *Hilbert-Poincaréreihe* von M sei die formale Potenzreihe

$$P_M(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim(M_i) t^i \in \mathbb{Z}[[t]].$$

(ii) Für beliebiges $g \in G$ sei die *relative Hilbert-Poincaréreihe* die formale Potenzreihe

$$P_M(g,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Spur}(g, M_i) t^i \in \mathbb{C}[[t]],$$

wo $\mathrm{Spur}(g, M_i)$ die Spur der Einschränkung von g auf M_i bezeichnet. Insbesondere ist $P_M(1,t) = P_M(t)$.

(iii) Sind G eine endliche Gruppe, V_χ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\rho_\chi : G \longrightarrow GL(V_\chi)$ eine irreduzible Darstellung von G mit Charakter χ, dann definiere

$$P_{M,\chi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (M_i, V_\chi) t^i \in \mathbb{Z}[[t]],$$

wo (M_i, V_χ) jene Häufigkeit ist, mit der V_χ in der Zerlegung von M_i in irreduzible G-Moduln vorkommt.

LEMMA 2.48. *Sind G eine Gruppe, M_1 und M_2 graduierte G-Moduln und $g \in G$, so sind*

$$P_{M_1 \oplus M_2}(g,t) = P_{M_1}(g,t) + P_{M_2}(g,t) \text{ und}$$

$$P_{M_1 \otimes M_2}(g,t) = P_{M_1}(g,t) P_{M_2}(g,t).$$

Beweis: Sind $M_1 = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_{1,i}$ und $M_2 = \bigoplus_{j=0}^{\infty} M_{2,j}$, so sind

$$(M_1 \oplus M_2)_k = M_{1,k} \oplus M_{2,k} \text{ bzw.}$$

$$(M_1 \otimes M_2)_k = \bigoplus_{i=0}^{k} M_{1,i} \otimes M_{2,k-i}$$

die k-ten graduierten Komponenten von $M_1 \oplus M_2$ bzw. $M_1 \otimes M_2$, womit

$$\mathrm{Spur}(g, (M_1 \oplus M_2)_k) = \mathrm{Spur}(g, M_{1,k}) + \mathrm{Spur}(g, M_{2,k}) \text{ bzw.}$$

$$\mathrm{Spur}(g, (M_1 \otimes M_2)_k) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Spur}(g, M_{1,i}) \mathrm{Spur}(g, M_{2,k-i})$$

sind. Die erste Behauptung folgt sofort und die zweite aus der Definition des Produkts zweier formaler Potenzreihen. $\square$

Sind G eine endliche Gruppe, M ein endlich dimensionaler G-Modul und $r = \dim_{\mathbb{C}} M$, so setze

$$\mathcal{W}^k(M) = \mathrm{span}\{m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \in \mathcal{T}^k(M) : \exists i \neq j \in [k] \text{ mit } m_i = m_j\} \subseteq \mathcal{T}^k(M).$$

Bezeichnet $\mathcal{W}(M) = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{W}^k(M)$, so ist die *Graßmann-Algebra* oder *äußere Algebra* die Faktoralgebra

$$\Lambda(M) = \mathcal{T}(M)/\mathcal{W}(M).$$

Das Produkt auf $\Lambda(M)$ wird mit $a \wedge b$ für $a, b \in \Lambda(M)$ bezeichnet. Sind $a \in \Lambda^k(M)$ und $b \in \Lambda^l(M)$, so ist $a \wedge b = (-1)^{k+l} b \wedge a$. Insbesondere sind $m \wedge m = 0$ für alle $m \in M$ und $\mathcal{T}^k(M)/\mathcal{W}^k(M) = 0$ für alle $k > r$.
Bezeichnet $\Lambda^k(M) = \mathcal{T}^k(M)/\mathcal{W}^k(M)$, so sind $\Lambda(M)$ und $\bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k(M)$ als $\mathbb{C}$-Vektorräume isomorph. Ist $\{m_1, \ldots, m_r\}$ eine Basis von M, dann ist

$$\{m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_k} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r\}$$

eine Basis von $\Lambda^k(M)$, deren Mächtigkeit $\binom{r}{k}$ ist. Die Dimension von $\Lambda(M)$ ist daher 2^r.

Die Wirkung von G auf M kann auf $S \otimes \Lambda(M)$ fortgesetzt werden.

LEMMA 2.49. *Seien W_1, W_2 endlich dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume, dann gelten*
(i) $\mathcal{S}(W_1 \oplus W_2) \cong \mathcal{S}(W_1) \otimes \mathcal{S}(W_2)$ *und*
(ii) $\Lambda(W_1 \oplus W_2) \cong \Lambda(W_1) \otimes \Lambda(W_2)$.

Beweis:
(i) Siehe [**30**, Kapitel XVI Proposition 8.2].
(ii) Siehe [**30**, Kapitel XIX Proposition 1.4].

□

Als nächstes werden einige Hilbert-Poincaréreihen explizit angegeben.

BEISPIEL 2.50. Sind $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{X_1, \ldots, X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*, so ist $\mathcal{S}(V^*) = \mathcal{S}(\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}X_j) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{S}(\mathbb{C}X_j) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathbb{C}[X_j]$ nach Lemma 2.49(i).
Weil $P_{\mathbb{C}[X]}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i = \frac{1}{1-t}$ ist, gilt nach Lemma 2.48

$$P_S(t) = \frac{1}{(1-t)^n}. \tag{5}$$

BEISPIEL 2.51. Sind G eine unitäre Spiegelungsgruppe, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{X_1, \ldots, X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*, so ist

$$S^G = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] = \mathcal{S}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C} \cdot f_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{C}[f_i]$$

nach Lemma 2.49(i), wo $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G mit $\deg(f_i) = d_i$ ist. Daher gelten

$$P_{\mathbb{C}[f_i]}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{d_i k} = \frac{1}{1 - t^{d_i}}$$

für alle $1 \leq i \leq n$ und

$$P_{S^G}(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t^{d_i}}. \tag{6}$$

Beispiel 2.52. Sei $V = \bigoplus_{k\geq 1} V_k$ ein graduierter endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sind $d \in \mathbb{N}$ und U ein eindimensionaler Teilraum von V_d, so sind $\Lambda(U) = \mathbb{C} \oplus U$ und daher nach Lemma 2.48

$$P_{\Lambda(U)}(t) = 1 + t^d.$$

Aus Lemma 2.49(ii) folgt somit

$$P_{\Lambda(V)}(t) = \prod_{i\geq 1}(1+t^i)^{\dim(V_i)}.$$

Beispiel 2.53. Seien G eine unitäre Spiegelungsgruppe mit Graden $d_1, \dots, d_n$ und M ein graduierter G-Modul. Nach Proposition 2.45 und Beispiel 2.51 ist

$$P_{(S\otimes M^*)^G}(t) = P_{S^G \otimes (\mathcal{H}\otimes M^*)^G}(t) \overset{2.48}{=} P_{S^G}(t) f_M(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}} f_M(t).$$

Lemma 2.54. *Sind V ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und G eine endliche Gruppe, die auf V operiert, dann gilt für alle $g \in G$*

$$P_{\mathcal{S}(V)}(g,t) = \frac{1}{\det_V(1-gt)}. \tag{7}$$

Beweis: Sei $g \in G$. Da G endlich und daher auch die Ordnung von g endlich ist, kann eine Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ von V bestehend aus g-Eigenvektoren mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gewählt werden. Insbesondere bildet dann die Menge der Monome in $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von $\mathcal{S}(V)$, die aus g-Eigenvektoren besteht. Genauer ist jedes Monom $v_1^{k_1} \cdots v_m^{k_m}$ ein g-Eigenvektor mit Eigenwert $\lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_m^{k_m}$. Wir betrachten $\mathcal{S}(V)$ mit der Graduierung $\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}^k(V)$, wo $\mathcal{S}^k(V)$ den von der Menge der homogenen Polynome in $v_1, \dots, v_m$ vom Grad k erzeugten Teilraum von $\mathcal{S}(V)$ bezeichnet. Dann gilt

$$\mathrm{Spur}(g, \mathcal{S}^k(V)) = \sum_{(k_1,\dots,k_m)\in\mathcal{I}_k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_m^{k_m}$$

für $\mathcal{I}_k = \{(k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m : \sum_{i=1}^{m} k_i = k\}$. Schließlich ist

$$P_{\mathcal{S}(V)}(g,t) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{(k_1,\dots,k_m)\in\mathcal{I}_k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_m^{k_m})t^k = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-\lambda_i t} = \frac{1}{\det_V(1-gt)}.$$

□

Lemma 2.55. *Ist G eine endliche Gruppe, die auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V operiert, so gilt für alle $g \in G$*

$$P_{\Lambda(V)}(g,t) = \det_V(1+gt) \tag{8}$$

.

Beweis: Seien $g \in G$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von g besteht, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die zugehörigen Eigenwerte, $1 \leq k \leq m$ und $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m\}$, dann hat $\Lambda^k(V)$ die Basis $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k\}$. Weil

$$g \cdot (v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}) = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}$$

für alle $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_k$ gilt, ist $\mathrm{Spur}(g, \Lambda^k(V)) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{I}_k} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}$, was aber auch der Koeffizient von t^k in $\prod_{j=1}^{m}(1+\lambda_j t) = \det_V(1+gt)$ ist. Insgesamt gilt nun

$$P_{\Lambda(V)}(g,t) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{Spur}(g, \Lambda^k(V))t^k = \det_V(1+gt).$$

□

Sind G eine endliche Gruppe, M ein graduierter G-Modul, V_χ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\rho_\chi : G \longrightarrow GL(V_\chi)$ eine irreduzible Darstellung von G mit Charakter χ. Die *χ-isotypische Komponente* M_χ von M ist definiert als die direkte Summe über alle zu V_χ isomorphen irreduziblen G-Moduln in der Zerlegung von M in irreduzible G-Moduln. Da $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ ein graduierter G-Modul ist, ist $M_\chi = \bigoplus_{i=0}^{\infty}(M_i)_\chi$. Schließlich ist

$$P_{M_\chi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dim(M_i)_\chi t^i = \sum_{i=0}^{\infty}(M_i, V_\chi)\dim V_\chi t^i = \chi(1)P_{M,\chi}(t).$$

Lemma 2.56. *Es ist*

$$P_{M_\chi}(t) = \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}P_M(g,t).$$

Beweis: Da die Identitäten

$$(M_i, V_\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}\mathrm{Spur}(g, M_i) \text{ und } P_{M_\chi}(t) = \chi(1)P_{M,\chi}(t)$$

gelten, folgt die Behauptung. □

Satz 2.57 (**Molien [36]**). *Ist G eine endliche Gruppe, die auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V operiert, dann gilt*

$$P_{S^G}(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det_V(1-gt)}.$$

Beweis: Wähle einen eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V_χ zusammen mit der trivialen Darstellung, so sind die triviale Darstellung irreduzibel und der Charakter $\chi = 1$. Die χ-isotypische Komponente von S ist dann aber genau S^G und somit gilt

$$P_{S^G}(t) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}P_S(g,t) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det_{V^*}(1-g^{-1}t)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det_V(1-gt)},$$

denn die Eigenwerte der Operation von $g \in G$ auf V^* sind die von g^{-1} nach den Überlegungen vor Lemma 2.18, da das Spektrum einer Matrix gleich dem Spektrum ihrer Transponierten ist. □

4.2. Ordnung einer unitären Spiegelungsgruppe und Anzahl der Spiegelungen in einer unitären Spiegelungsgruppe. Mithilfe des Satzes von Molien kann nun die erste wichtige Anwendung der Invariantentheorie und der Hilbert-Poincaréreihe bewiesen werden.

Satz 2.58 (**Shephard und Todd [43]**). *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $n = \dim_{\mathbb{C}} V$. Sind G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V und $d_1, \ldots, d_n$ die Grade von G, dann ist*

(i)

$$|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

und es gibt

(ii)

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1) \text{ unitäre Spiegelungen in } G.$$

Beweis: Seien $g \in G$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von g, dann ist $\frac{1}{\det(1-gt)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-\lambda_i t)}$. Multiplizieren beider Seiten mit $(1-t)^n$ ergibt

$$\frac{(1-t)^n}{\det(1-gt)} = \prod_{i=1}^{s} \frac{(1-t)}{(1-\lambda_i t)},$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ genau die Eigenwerte von g ungleich 1 sind. Außerdem ist

$$\frac{1-t}{1-t^{d_i}} = \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}}.$$

Unter Verwendung des Satzes von Molien und (6) folgt weiters, dass

$$(*) \qquad |G| \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}} = \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(1-gt)}$$

ist. Das Multiplizieren beider Seiten in $(*)$ mit $(1-t)^n$ und die Wahl $t=1$ liefert mit obigen Überlegungen $|G| \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = 1$, womit (i) gezeigt ist.

Ein Element $g \in G$ ist genau dann eine Spiegelung, wenn g genau einen Eigenwert $\lambda(g) \neq 1$ hat, der eine Einheitswurzel ist. Insbesondere ist also für eine Spiegelung $g \in G$ dann $\det(1-gt) = (1-t)^{n-1}(1-\lambda(g)t)$. Durch Subtrahieren von $\frac{1}{(1-t)^n}$ auf beiden Seiten von $(*)$ und durch anschließendes Multiplizieren mit $(1-t)^{n-1}$ ergeben sich für die linke Seite

$$\begin{aligned}
|G| \prod_{i=1}^{n} \frac{(1-t)^{n-1}}{1-t^{d_i}} - \frac{1}{1-t} &= \frac{|G|}{1-t} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1}} - \frac{1}{1-t} \\
&= \frac{|G| - \prod_{i=1}^{n}(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})}{(1-t)\prod_{i=1}^{n}(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})}
\end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} \frac{(1-t)^{n-1}}{\det(1-gt)} - \frac{1}{1-t} &= (1-t)^{n-1} \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq 1}} \frac{1}{\det(1-gt)} \\
&= \sum_{g\in R} \frac{1}{1-\lambda(g)t} + \sum_{\substack{g\notin R\\ g\neq 1}} \frac{(1-t)^{s(g)-1}}{(1-\lambda_1(g)t)\cdots(1-\lambda_{s(g)}(g)t)} \\
&= \sum_{g\in R} \frac{1}{1-\lambda(g)t} + (1-t)h(t),
\end{aligned}$$

wo R die Menge der Spiegelungen in G, $s(g) \geq 2$ die Anzahl der Eigenwerte unleich 1 eines $g \neq 1$ aus G, $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_{s(g)}(g)$ die Eigenwerte von g ungleich 1 und $h(t)$

eine rationale Funktion, deren Nenner nicht durch $(1-t)$ teilbar ist, bezeichnen. Insgesamt gilt also

$$(**) \qquad \frac{|G| - \prod_{i=1}^{n}(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})}{(1-t)\prod_{i=1}^{n}(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})} = \sum_{g\in R}\frac{1}{1-\lambda(g)t} + (1-t)h(t).$$

Setze nun $H(t) := |G| - \prod_{i=1}^{n}(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})$, so ist $H(1)=0$ wegen $|G| = \prod_{i_1}^{n} d_i$ und die Taylorentwicklung von H um 1 ist gegeben durch

$$H(t) = H'(1)(t-1) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{H^{(n)}(1)}{n!}(t-1)^n.$$

Wähle nun $t=1$ in $(**)$, dann ergibt sich

$$-\frac{H'(1)}{|G|} = \sum_{g\in R}\frac{1}{1-\lambda(g)}.$$

Nun gilt aber $H'(t) = -\sum_{i=1}^{n}(1+2t+3t^2+\cdots+(d_i-1)t^{d_i-2})\prod_{j\neq i}(1+t+t^2+\cdots+t^{d_j-1})$ und daher sind $H'(1) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(d_i-1)}{2}\prod_{j\neq i}d_j = -\frac{|G|}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i-1)$ und

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i-1) = \sum_{g\in R}\frac{1}{1-\lambda(g)}.$$

Ist zum Beispiel $n=1$ und $G=\langle g\rangle$, wo g eine Spiegelung von V der Ordnung d mit Eigenwert $\lambda\neq 1$ ist, dann gilt $\frac{1}{2}(d-1) = \prod_{i=1}^{d-1}\frac{1}{1-\lambda^i}$. Die Menge R ist aber disjunkte Vereinigung der Mengen von Spiegelungen in G, die den maximalen zyklischen Untergruppen von G, die bis auf 1 nur Spiegelungen enthalten, entsprechen. Bezeichnet $\mathcal{R}$ die Menge aller maximalen zyklischen Untergruppen von G, die bis auf 1 nur aus Spiegelungen bestehen, so ist schließlich

$$|R| = \sum_{G'\in\mathcal{R}}(|G'|-1) = \sum_{G'\in\mathcal{R}} 2\sum_{g\neq 1\in G'}\frac{1}{1-\lambda(g)} = 2\sum_{g\in R}\frac{1}{1-\lambda(g)} = \sum_{i=1}^{n}(d_i-1).$$

□

4.3. Charakterisierung unitärer Spiegelungsgruppen. In Satz 2.22, Satz 2.24 und Satz 2.28 wurde gezeigt, dass die Invariantenalgebra S^G einer unitären Spiegelungsgruppe G in $U_n(\mathbb{C})$ von n algebraisch unabhängigen, homogenen Elementen $f_1,\ldots,f_n$ in S^G, deren Grade $d_1,\ldots,d_n$ unabhängig von der Wahl der $f_1,\ldots,f_n$ sind, erzeugt wird. Außerdem gilt $|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i$ nach Satz 2.58. In diesem Unterabschnitt soll gezeigt werden, dass diese Bedingungen eine unitäre Spiegelungsgruppe charakterisieren.

Lemma 2.59 (**Springer [45]**). *Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $S=\mathcal{S}(V^*)$ die symmetrische Algebra von V^* und $f_1,\ldots,f_n$ algebraisch unabhängige, homogene Elemente in S, deren Grade $d_1,\ldots,d_n$ so nummeriert seien, dass $d_1\leq\cdots\leq d_n$ gilt. Ist T die Unteralgebra von S, die von $f_1,\ldots,f_n$ erzeugt wird, so gilt:*

(i) Für alle i ist d_i der kleinste Grad eines homogenen Polynoms in T, das nicht in der von $f_1,\ldots,f_{i-1}$ erzeugten Unteralgebra liegt, und,

(ii) falls $g_1, \dots, g_n \in S$ algebraisch unabhängige, homogene Elemente in T mit Graden $e_1 \leq \dots \leq e_n$ sind, gilt $d_i \leq e_i$ für alle i.

Beweis:

(i): Seien $i \in \{1, \dots, n\}$ und f ein beliebiges homogenes Polynom vom Grad d in T, das nicht in der von $f_1, \dots, f_{i-1}$ erzeugten Unteralgebra liegt, dann gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]$, sodass $f = P(f_1, \dots, f_n)$ gilt. Ist $Y_1^{m_1} \cdots Y_n^{m_n}$ ein Monom in P, so gilt $d_1 m_1 + \dots + d_n m_n = d$, weil $f_1, \dots, f_n$ algebraisch unabhängig sind. Weil f nicht in der von $f_1, \dots, f_{i-1}$ erzeugten Unteralgebra von S liegt, gibt es somit ein $j \geq i$, sodass $m_j > 0$ und damit insgesamt $d \geq d_j \geq d_i$ ist.

(ii): Da $g_1, \dots, g_n$ Elemente aus T sind, gibt es Polynome $G_1, \dots, G_n$ in n Unbestimmten über $\mathbb{C}$, sodass $g_i = G_i(f_1, \dots, f_n)$ für alle i gilt. Für jedes i in $\{1, \dots, n\}$ ist $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_{i-1})$ eine rein transzendente Körpererweiterung von $\mathbb{C}$ mit Transzendenzgrad

$$\text{tr}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(f_1, \dots, f_{i-1}) = i - 1. \tag{$*$}$$

Wären $G_1, \dots, G_i$ Polynome in $Y_1, \dots, Y_{i-1}$, so wären nach Voraussetzung $g_1, \dots, g_i$ in $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_{i-1})$ algebraisch unabhängig, was ein Widerspruch zu $(*)$ ist. Daher gibt es ein $j \leq i$ und ein $k \geq i$, sodass Y_k in G_j vorkommt. Das heißt aber, dass $e_i \geq e_j \geq d_k \geq d_i$ gelten muss. □

Die Charakterisierung unitärer Spiegelungsgruppen geht zurück auf Shephard und Todd ([**43**]). Die hier gewählte Version stammt von Springer ([**45**]).

Satz 2.60 (**Charakterisierung unitärer Spiegelungsgruppen**). *Seien G eine endliche Gruppe, die auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V operiert, und $n = \dim_{\mathbb{C}} V$. Sind $f_1, \dots, f_n$ homogene, algebraisch unabhängige Elemente in S^G mit $d_i = \deg(f_i)$ für alle i, so gilt:*

(i) $|G| \leq \prod_{i=1}^{n} d_i$.

(ii) Ist $|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i$, so ist G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V. Weiters wird dann S^G als $\mathbb{C}$-Algebra von $f_1, \dots, f_n$ erzeugt.

(iii) Falls S^G als $\mathbb{C}$-Algebra von $f_1, \dots, f_n$ erzeugt wird, gilt $|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i$. Außerdem ist dann G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V.

Beweis: Sind $\{S_i^G\}_{i \geq 0}$ die homogenen Komponenten von S^G und a_i deren Dimensionen, so ist

$$\sum_{i \geq 0} a_i t^i = P_{S^G}(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1 - gt)}$$

nach Satz 2.57. Bezeichnen $\{S_i\}_{i \geq 0}$ die homogenen Komponenten von S, so gilt stets $0 \leq a_i \leq \dim_{\mathbb{C}} S_i$. Aus Beispiel 2.50 folgt

$$0 \leq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det_V(1 - gt)} \leq \frac{1}{(1 - t)^n},$$

womit gezeigt ist, dass $\sum_{i \geq 0} a_i t^i$ für $|t| < 1$ konvergiert.

Bezeichnen B jene Unteralgebra von S^G, die von $f_1, \dots, f_n$ erzeugt wird, und $\{b_i\}_{i \geq 0}$ die Dimensionen der homogenen Komponenten $\{B \cap S_i\}_{i \geq 0}$ von B, so muss wegen $B \cap S_i \subseteq S_i^G$ gelten, dass $b_i \leq a_i$ ist. Schließlich konvergiert auch

$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}} = \sum_{i \geq 0} b_i t^i$ für $|t| < 1$ nach Beispiel 2.51.
Zusammengefasst gilt für $0 \leq t < 1$

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}} \leq \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1-gt)}.$$

(i): Multiplizieren beider Seiten mit $(1-t)^n$ in $(*)$ ergibt

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})} \leq \frac{1}{|G|} + (1-t)h(t)$$

für eine rationale Funktion $h(t)$, deren Nenner nicht durch $(1-t)$ teilbar ist. Wird nun der linksseitige Grenzwert betrachtet, so folgt

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = \lim_{t \to 1^-} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+t+t^2+\cdots+t^{d_i-1})} \leq \lim_{t \to 1^-} \left(\frac{1}{|G|} + (1-t)h(t)\right) = \frac{1}{|G|}.$$

(ii): Es gelte nun $|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i$. Multiplizieren mit $|G|$, Subtrahieren von $\frac{1}{(1-t)^n}$ auf beiden Seiten in $(*)$ und anschließendes Multiplizieren beider Seiten mit $(1-t)^{n-1}$ ergeben

$$(**) \qquad \frac{|G| - \prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})}{(1-t)\prod_{i=1}^{n}(1+t+\cdots+t^{d_i-1})} \leq \sum_{g \in R} \frac{1}{1-\lambda(g)t} + (1-t)h(t),$$

für eine rationale Funktion $h(t)$, deren Nenner nicht durch $(1-t)$ teilbar ist, die Menge der unitären Spiegelungen R in G und jenen Eigenwert $\lambda(g)$ einer unitären Spiegelung g, der ungleich 1 ist. Wird der linkseitige Grenzwert in t gegen 1 in $(**)$ betrachtet, so gilt mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 2.58(ii)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1) \leq \frac{1}{2}|R|.$$

Seien jetzt G' jene Untergruppe von G, die von den Spiegelungen in G erzeugt wird, und $e_1, \ldots, e_n$ die Grade von G', dann sind die Polynome $f_1, \ldots, f_n$ auch G'-invariant. Aus Lemma 2.59 folgt daher $e_i \leq d_i$ für alle i. Aber nach Satz 2.58(ii) müssen $|R| = \sum_{i=1}^{n}(e_i - 1)$ und damit

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1) \leq |R| = \sum_{i=1}^{n}(e_i - 1) \leq \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$$

gelten, woraus $|G'| = \prod_{i=1}^{n} e_i = \prod_{i=1}^{n} d_i = |G|$ und schließlich $G' = G$ folgen.

(iii): Wird die $\mathbb{C}$-Algebra S^G von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugt, so sind $a_i = b_i$ für alle i und

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-t^{d_i}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(1-gt)}.$$

Schließlich ergeben Multiplizieren mit $(1-t)^n$ und Setzen von t gleich 1 die Gleichheit von $|G|$ und $\prod_{j=1}^{n} d_j$. Der Rest folgt aus (ii). $\square$

5. Steinbergs Fixpunktsatz

Seien $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{C}^n$, G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G und $\mathcal{A}(G)$ die Menge der spiegelnden Hyperebenen von G.

Definition 2.61. Die Bahnenabbildung sei die Abbildung $\omega_{G,\mathcal{F}} : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$,

$$\omega_{G,\mathcal{F}}(v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v)).$$

Da $f_1, \ldots, f_n$ G-invariant sind, ist die Bahnenabbildung $\omega_{G,\mathcal{F}}$ konstant auf jeder Bahn von G in V. Die Bahnenabbildung $\omega_{G,\mathcal{F}}$ induziert daher eine Abbildung

$$\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}} : G\backslash V \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

wobei $G\backslash V$ den Bahnenraum von G in V bezeichnet.

Proposition 2.62. *Die Abbildung* $\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}} : G\backslash V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *ist bijektiv.*

Beweis: Die Surjektivität von $\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}}$ folgt aus Lemma B.6 und die Injektivität aus Satz 2.20. □

Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{X_1, \ldots, X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*.

Definition 2.63. Die Jacobimatrix der Bahnenabbildung $\omega_{G,\mathcal{F}}$ bezeichne mit

$$\operatorname{Jac}(\omega_{G,\mathcal{F}}) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

und die Determinante der Jacobimatrix von $\omega_{G,\mathcal{F}}$ bezeichne mit

$$\Pi := \det\left(\operatorname{Jac}(\omega_{G,\mathcal{F}})\right) \in S.$$

Weil die Abbildung $D : V \to \operatorname{Diff}(V)$, $v \mapsto D_v$ linear ist, ist Π bis auf Multiplikation mit einem Skalar unabhängig von der Wahl der Basis von V und der sich so ergebenden Dualbasis von V^*.

Lemma 2.64. *Elemente* $g_1, \ldots, g_n$ *in* $S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ *sind genau dann algebraisch unabhängig, wenn* $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\right)_{1 \le i,j \le n} \neq 0$ *gilt.*

Beweis:

($\Rightarrow$): Da $g_1, \ldots, g_n$ algebraisch unabhängig und $\mathbb{C}(g_1, \ldots, g_n) \subseteq \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ sind, ist der Transzendenzgrad von $\mathbb{C}(g_1, \ldots, g_n)$ über $\mathbb{C}$ dann $\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(g_1, \ldots, g_n) = n$. Die Polynome $X_i, g_1, \ldots, g_n$ sind daher für jedes i algebraisch abhängig, das heißt, es gibt für alle i nichttriviale Polynome $Q_i \in \mathbb{C}[Y_0, \ldots, Y_n]$ mit

$$Q_i(X_i, g_1, \ldots, g_n) = 0.$$

Differenzieren nach X_j ergibt für jedes i

$$\delta_{i,j}\frac{\partial Q_i}{\partial Y_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial Y_k}\frac{\partial g_k}{\partial X_j} = 0.$$

Diese Gleichungen bedeuten in Matrixschreibweise aber nichts anderes als

$$\operatorname{diag}\left(-\frac{\partial Q_1}{\partial Y_0}, \ldots, -\frac{\partial Q_n}{\partial Y_0}\right) = \left(\frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}\right)_{1 \le i,j \le n} \left(\frac{\partial g_k}{\partial X_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$$

Wäre $\frac{\partial Q_i}{\partial Y_0} = 0$ für ein i, so wäre $Q_i(X_i, g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{C}[g_1, \ldots, g_n]$, was ein Widerspruch zu der algebraischen Unabhängigkeit von $g_1, \ldots, g_n$ ist. Weil somit $\frac{\partial Q_i}{\partial Y_0} \neq 0$ für alle i gilt, muss $\det\left(\frac{\partial g_k}{\partial X_l}\right)_{1 \le k,l \le n} \neq 0$ gelten.

($\Leftarrow$): Indirekt, angenommen $g_1, \ldots, g_n$ sind algebraisch abhängig, dann gibt es ein nichttriviales Polynom $Q \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_n]$ mit $Q(g_1, \ldots, g_n) = 0$. Differenzieren nach X_j ergibt aber $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial Q}{\partial Y_k} \frac{\partial g_k}{\partial X_j} = 0$, woraus dann $\frac{\partial Q}{\partial Y_k} = 0$ für alle k folgen muss. Q muss also konstant und damit das Nullpolynom sein, was ein Widerspruch ist. □

KOROLLAR 2.65. *Das Polynom* Π *ist ein homogenes Element in* S*, dessen Grad die Anzahl der unitären Spiegelungen in* G *ist.*

Beweis: Seien $d_1, \ldots, d_n$ die Grade von G. Da nach Lemma 2.64 die Determinante von $\mathrm{Jac}(\omega_{G,\mathcal{F}})$ ungleich 0 ist, ist Π ein homogenes Polynom vom Grad $\sum\limits_{i=1}^{n}(d_i - 1)$, was nach Satz 2.58(ii) die Anzahl unitärer Spiegelungen in G ist. □

Sind $H_1, \ldots, H_s$ die spiegelnden Hyperebenen von G, so bezeichne e_i die Ordnung der zyklischen Untergruppe $G_{H_i} := \{g \in G : g \cdot v = v$ für alle $v \in H_i\}$ von G für alle i.

LEMMA 2.66. *Sind* $L_1, \ldots, L_s \in V^*$*, sodass* $\ker L_i = H_i$ *für alle* i *ist, dann teilt* $\prod\limits_{i=1}^{s} L_i^{e_i - 1}$ *für alle* $g_1, \ldots, g_n \in S^G$ *die Determinante von* $\left(\frac{\partial g_k}{\partial X_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$.

Beweis: Seien $r_1, \ldots, r_s$ unitäre Spiegelungen in G, sodass r_i ein Erzeuger von G_{H_i} für alle $1 \le i \le s$ ist. Nach Lemma 2.10 gibt es ein Skalarprodukt $(.,.)$ auf V, sodass $G \subseteq U(V)$ gilt. Wähle eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V bezüglich $(.,.)$, sodass b_1 eine Wurzel von r_1 ist. Außerdem sei $Y_1, \ldots, Y_n$ die zugehörige Dualbasis von V^*. Weil jedes $v \in V$ die Darstellung $v = \sum\limits_{i=1}^{n}(v, b_i)b_i$ besitzt, hat Y_1 Kern H_1. Somit ist L_1 ein skalares Vielfaches von Y_1.
Es gibt eine primitive e_1-te Einheitswurzel ε_1 in $\mathbb{C}$ mit

$$(r_1 \cdot Y_1)(v) = Y_1(r_1^{-1}(v)) = (r_1^{-1}(v), b_1) = (v, r_1(b_1)) = \varepsilon_1 Y_1(v)$$

für alle $v \in V$ und es gilt $r_1 \cdot Y_i = Y_i$ für alle $i \ge 2$. Insgesamt muss also

$$r_1 \cdot (Y_1^{m_1} \cdots Y_n^{m_n}) = \varepsilon_1^{m_1} Y_1^{m_1} \cdots Y_n^{m_n}$$

für alle $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ gelten. Daraus folgt aber, dass ein Polynom $f \in S$ mit $r_1 \cdot f = f$ ein Polynom in $Y_1^{e_1}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}[Y_2, \ldots, Y_n]$ sein muss. Da $g_j \in S^G$ für alle j ist, teilt insbesondere $Y_1^{e_1 - 1}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g_j}{\partial Y_1}$ für alle $1 \le j \le n$. Somit teilt $L_1^{e_1 - 1}$ auch die Determinante von $\left(\frac{\partial g_k}{\partial X_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$, da $\det\left(\frac{\partial g_k}{\partial Y_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$ ein skalares Vielfaches von $\det\left(\frac{\partial g_k}{\partial X_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$ ist.
Analog teilen auch $L_i^{e_i - 1}$, $i \ge 2$, die Determinante von $\left(\frac{\partial g_k}{\partial X_l}\right)_{1 \le k,l \le n}$. □

PROPOSITION 2.67. *Sind* $L_1, \ldots, L_s \in V^*$*, sodass* $\ker(L_i) = H_i$ *für alle* i *ist, so gibt es eine Konstante* $c \neq 0$ *mit* $\Pi = c \prod\limits_{i=1}^{s} L_i^{e_i - 1}$.

Beweis: Der Grad von $\prod\limits_{i=1}^{s} L_i^{e_i - 1}$ ist $\sum\limits_{i=1}^{s}(e_i - 1)$, was die Anzahl der unitären Spiegelungen in G ist. Nach Korollar 2.65 ist dies auch der Grad von Π. Weil Π von $\prod\limits_{i=1}^{s} L_i^{e_i - 1}$ nach Lemma 2.66 geteilt wird, muss es eine Konstante $c \neq 0$ geben, sodass $\Pi = c \prod\limits_{i=1}^{s} L_i^{e_i - 1}$ ist. □

Folgender Satz wurde erstmals von R. Steinberg [**46**, Theorem 1.5] formuliert und bewiesen. Der hier angeführte Beweis stammt von G.I. Lehrer ([**31**]).

SATZ 2.68 (**Steinbergs Fixpunktsatz**). *Ist $v \in V$, dann ist der punktweise Stabilisator*

$$G_v = \{g \in G : g \cdot v = v\}$$

von v genau jene unitäre Spiegelungsgruppe von V, die von jenen Spiegelungen in G, die v fixieren, erzeugt wird.

Beweis: Setze $K = G_v$ und sei K_0 jene Untergruppe von K, die von den Spiegelungen in K erzeugt wird. Dann ist K_0 ein Normalteiler von K, denn sind r_H eine unitäre Spiegelung in K_0 und $g \in K$, so ist gr_hg^{-1} eine unitäre Spiegelung von V mit $(gr_Hg^{-1})(v) = v$, das heißt, $gr_hg^{-1} \in K_0$.
Weil K_0 eine unitäre Spiegelungsgruppe von V ist, wird nach Satz 2.28 die Invariantenalgebra S^{K_0} von homogenen, algebraisch unabhängigen Polynomen $P_1, \dots, P_n$ erzeugt. Seien nun $P_1, \dots, P_n$ so nummeriert, dass $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ mit $d_i := \deg P_i$ gilt.

Behauptung: Für jedes $g \in K$ gibt es eine Menge von Basisinvarianten von K_0, die aus g-Eigenvektoren besteht.

Beweis der Behauptung: Seien $g \in K$, $f \in S^{K_0}$ und $h \in K_0$, so gilt $h \cdot (g \cdot f) = g \cdot ((g^{-1}hg) \cdot f) = g \cdot f$, da K_0 von g normalisiert wird. Somit ist S^{K_0} invariant unter der Operation von K. Bezeichnen $\{(S^{K_0})^r\}_{r \geq 0}$ die endlich-dimensionalen homogenen Bestandteile von S^{K_0}, das heißt, $S^{K_0} = \bigoplus_{r \geq 0} (S^{K_0})^r$, so sind diese ebenfalls invariant unter g. Die Unteralgebra von S^{K_0}, die von allen Basisinvarianten von K_0, deren Grad höchstens $r - 1$ ist, erzeugt wird, bezeichne mit $A(r)$ und die lineare Hülle jener Basisinvarianten von K_0, deren Grad r ist, mit $B(r)$. Dann gilt $(S^{K_0})^r = A(r)^r \oplus B(r)$. Weil $A(r)^r$ und $(S^{K_0})^r$ invariant unter Wirkung von g sind, muss auch $B(r)$ invariant unter g sein. Deswegen können nach Proposition 2.13 sowohl eine Basis von $B(r)$ bestehend aus g-Eigenvektoren als auch eine von $A(r)^r$ bestehend aus g-Eigenvektoren gewählt werden. Weil aber nun jene $\mathbb{C}$-Algebra, die von $A(r)$ und $B(r)$ erzeugt wird, $A(r + 1)$ ist, kann $A(r + 1)$ von Basisinvarianten vom Grad kleiner r und homogenen g-Eigenvektoren vom Grad r erzeugt werden. Schließlich ist induktiv gezeigt, da $A(1) = \mathbb{C}$ ist, dass $A(r)$ für alle $r \geq 0$ von homogenen g-Eigenvektoren erzeugt werden kann. Insbesondere gibt es eine Menge von Basisinvarianten von K_0 bestehend aus g-Eigenvektoren.

Behauptung: Für alle $g \in K$ gibt es eine Menge von Basisinvarianten von K_0, deren Elemente alle invariant unter der Operation von g sind.

Beweis der Behauptung: Seien $g \in K$ und $\{P_1, \dots, P_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von K_0, sodass für alle $1 \leq i \leq n$

$$(*) \qquad g \cdot P_i = \varepsilon_i P_i$$

für ein $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$ gilt. Weiters seien $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G,

$$\omega_{G,\mathcal{F}} : V \longrightarrow \mathbb{C}^n, \ \omega_{G,\mathcal{F}}(w) = (f_1(w), \dots, f_n(w)) \text{ für } w \in V,$$

die zugehörige Bahnabbildung von G und

$$\Phi_{K_0} : V \to \mathbb{C}^n, \ \Phi_{K_0}(w) = (P_1(w), \dots, P_n(w)) \text{ für } w \in V.$$

Da $f_1, \dots, f_n$ insbesondere K_0-invariant sind, gibt es Polynome $Q_1, \dots, Q_n$ in n Unbestimmten über $\mathbb{C}$, die $f_i = Q_i(P_1, \dots, P_n)$ für alle $1 \leq i \leq n$ erfüllen. Ist

$$\Phi_{\mathcal{F}_0} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ \Phi_{\mathcal{F}_0}(y) = (Q_1(y), \dots, Q_n(y)),$$

so gelten $\omega_{G,\mathcal{F}} = \Phi_{K_0} \circ \Phi_{\mathcal{F}_0}$ und mit der Kettenregel

$$\det(\mathrm{Jac}(\omega_{G,\mathcal{F}})) = \det\left(\frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}(P_1, \dots, P_n)\right)_{1\le i,j\le n} \det(\mathrm{Jac}(\Phi_{\mathcal{F}_0})).$$

Aus Proposition 2.67 folgt nun für ein $c \neq 0$ aus $\mathbb{C}$

$$\det(\left(\frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}(P_1, \dots, P_n)\right)_{1\le i,j\le n})(X_1, \dots, X_n) = c \prod_{H\in\mathcal{A}(G) \text{ mit } v\notin H} L_H^{e_H - 1},$$

wo $L_H \in V^*$ mit Kern H und e_H die Ordnung des punktweisen Stabilisators G_H von H für alle $H \in \mathcal{A}(G)$ sind. Insbesondere ist

$$\det(\left(\frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}(P_1(v), \dots, P_n(v))\right)_{1\le i,j\le n}) \neq 0,$$

woraus mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\partial Q_{\sigma(i)}}{\partial Y_i}(P_1(v), \dots, P_n(v)) \neq 0$$

für eine Permutation $\sigma \in S_n$ folgt, das heißt, für alle i ist

$$(**) \qquad \frac{\partial Q_{\sigma(i)}}{\partial Y_i}(P_1(v), \dots, P_n(v)) \neq 0.$$

Da $g \cdot Q_i(P_1, \dots, P_n) = g \cdot f_i = f_i = Q_i(P_1, \dots, P_n)$ gilt, muss mit $(*)$ für jedes Monom $Y_1^{m_1} \cdots Y_n^{m_n}$ in Q_i gelten, dass $\prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{m_k} = 1$ ist. Ist nun $Y_1^{m_1} \cdots Y_n^{m_n}$ ein Monom von Q_i, so ist das entsprechende Monom in $g \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}(P_1, \dots, P_n)$ entweder $\varepsilon_j^{-1} \prod_{k=1}^{n} \varepsilon_k^{m_k} P_1^{m_1} \cdots P_n^{m_n} = \varepsilon_j^{-1} P_1^{m_1} \cdots P_{j-1}^{m_{j-1}} P_j^{m_j - 1} P_{j+1}^{m_{j+1}} \cdots P_n^{m_n}$ oder 0, das heißt,

$$g \cdot \frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}(P_1, \cdots, P_n) = \varepsilon_j^{-1} \frac{\partial Q_i}{\partial Y_j}(P_1, \cdots, P_n).$$

Insbesondere gilt mit $(**)$ für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{-1} \frac{\partial Q_{\sigma(i)}}{\partial Y_i}(P_1(v), \dots, P_n(v)) &= g \cdot \frac{\partial Q_{\sigma(i)}}{\partial Y_i}(P_1(v), \dots, P_n(v)) \\ &= \frac{\partial Q_{\sigma(i)}}{\partial Y_i}(P_1(g^{-1}(v)), \dots, P_n(g^{-1}(v))) \\ &= \frac{\partial Q_{\sigma(i)}}{\partial Y_i}(P_1(v), \dots, P_n(v)) \neq 0, \end{aligned}$$

das heißt, $\varepsilon_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Da es für jedes $g \in K$ eine Menge von Basisinvarianten von K_0 gibt, deren Elemente invariant unter der Wirkung von g sind, ist jedes Element in S^{K_0} insbesondere g-invariant. Somit ist jedes Element in S^{K_0} auch K-invariant, das heißt, $S^{K_0} \subseteq S^K$. Wegen $K_0 \subsetneq K$ gilt damit schon $S^{K_0} = S^K$. Schließlich folgt aus Satz 2.60 nun aber $|K| = \prod_{i=1}^{n} d_i = |K_0|$, womit $K = K_0$ sein muss. □

KOROLLAR 2.69. *Ist U eine Teilmenge von V, so ist der punktweise Stabilisator*

$$G_U = \{g \in G : g \cdot u = u \text{ für alle } u \in U\}$$

genau jene unitäre Spiegelungsgruppe von V, die von den Spiegelungen in G, deren spiegelnde Hyperebenen U enthalten, erzeugt wird.

Beweis: Da G auf V linear operiert, fixiert ein $g \in G$ die Teilmenge U genau dann punktweise, wenn g die lineare Hülle von U fixiert. Sei also U ein Teilraum von V, dann fixiert ein $g \in G$ aber U genau dann punktweise, wenn g eine Basis von U punktweise fixiert. U kann also endlich angenommen werden und die Behauptung folgt via Induktion aus Satz 2.68. $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts wird eine erste Anwendung von Steinbergs Fixpunktsatz gezeigt. Dazu wird noch das folgende Lemma benötigt.

Sei $(.,.)$ ein G-invariantes Skalarprodukt auf V.

DEFINITION 2.70. Spiegelnde Hyperebenen $H_1, \dots, H_s$ von G heißen *unabhängig*, falls es linear unabhängige Elemente $a_1, \dots, a_s$ in V gibt, die $H_1 = (\mathbb{C}a_1)^\perp, \dots, H_s = (\mathbb{C}a_s)^\perp$ erfüllen.

LEMMA 2.71. *Spiegelnde Hyperebenen $H_1, \dots, H_s$ von G sind genau dann unabhängig, wenn s die Kodimension von $\bigcap_{i=1}^{s} H_i$ in V ist.*

Beweis: Seien $a_1, \dots, a_s \in V$ so, dass $H_1^\perp = \mathbb{C}a_1, \dots, H_s^\perp = \mathbb{C}a_s$ sind. Da allgemein für Teilräume U, W von V gilt, dass $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ ist, müssen in diesem Fall $\bigcap_{i=1}^{s} H_i = \bigcap_{i=1}^{s} (\mathbb{C}a_i)^\perp = (\sum_{i=1}^{s} \mathbb{C}a_i)^\perp$ und $\operatorname{codim}_V \bigcap_{i=1}^{s} H_i = \dim_{\mathbb{C}}(\sum_{i=1}^{s} \mathbb{C}a_i)$ gelten. $\square$

PROPOSITION 2.72. *(i) Sind $r_1, \dots, r_s \in G$ unitäre Spiegelungen von V, sodass die spiegelnden Hyperebenen $H_1 = \operatorname{Fix}(r_1), \dots, H_s = \operatorname{Fix}(r_s)$ unabhängig sind, dann gilt*

$$\bigcap_{i=1}^{s} H_i = \operatorname{Fix}(r_1 \cdots r_s).$$

(ii) Für jedes $g \in G$ ist $\operatorname{Fix}(g) = \bigcap_{\substack{H \in \mathcal{A}(G) \\ \operatorname{Fix}(g) \subseteq H}} H.$

Beweis:

(i): Seien $X = \bigcap_{i=1}^{s} H_i$ und $H_1 = (\mathbb{C}a_1)^\perp, \dots, H_s = (\mathbb{C}a_s)^\perp$. Da r_i jedes Element aus X für alle $1 \leq i \leq s$ fixiert, ist X in $\operatorname{Fix}(r_1 \cdots r_s)$ enthalten. Ist umgekehrt v in $\operatorname{Fix}(r_1 \cdots r_s)$, so sind $(r_2 \cdots r_s)(v) = r_1^{-1}(v)$ und daher $v + \sum_{i=2}^{s} \alpha_i a_i = v + \alpha_1 a_1$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$ nach Bemerkung 2.7. Weil $a_1 \dots, a_s$ linear unabhängig sind, müssen $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ und damit $r_1(v) = v$ und $v \in \operatorname{Fix}(r_2 \dots r_s)$ gelten. Wiederholen dieses Arguments ergibt $r_i(v) = v$ für alle $1 \leq i \leq s$, das heißt, $v \in \bigcap_{i=1}^{s} H_i$ und $\operatorname{Fix}(r_1 \cdots r_s) \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} H_i = X$.

(ii): Weil $g \in G$ im punktweisen Stabilisator von $\mathrm{Fix}(g)$ enthalten ist, ist g Produkt von unitären Spiegelungen in G, deren spiegelnden Hyperebenen $\mathrm{Fix}(g)$ enthalten, nach Korollar 2.69. Diese unitären Spiegelungen fixieren aber $\bigcap\limits_{\substack{H\in\mathcal{A}(G)\\ \mathrm{Fix}(g)\subseteq H}} H$ punktweise, woraus $\mathrm{Fix}(g) \supseteq \bigcap\limits_{\substack{H\in\mathcal{A}(G)\\ \mathrm{Fix}(g)\subseteq H}} H$ folgt. □

6. Satz von Gutkin

Sei G eine unitäre Spiegelungsgruppe von $V = \mathbb{C}^n$.

6.1. Satz von Gutkin und mittelbare G-Moduln. Seien M ein endlichdimensionaler G-Modul und $r = \dim_{\mathbb{C}} M$. Ist $\rho : G \longrightarrow GL(M)$ eine Darstellung von G auf M, so ist

$$\rho^* : G \longrightarrow GL(M^*),\ \rho^*(g)(\varphi) := \varphi \circ \rho(g^{-1}),$$

eine Darstellung von G auf M^*.

Seien $\mathcal{H}$ die Menge der G-harmonischen Polynome und $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$, sodass jedes u_i homogen vom Grad $q_i(M)$ ist.

Ist $\{y_1, \ldots, y_r\}$ eine Basis von M^*, so gibt es eindeutig bestimmte $A_{ij} \in \mathcal{H}$, die homogen vom Grad $q_i(M)$ sind, sodass für alle $1 \le i \le r$

$$u_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ij} \otimes y_j$$

gilt. Schließlich definiere

$$\Pi_M = \det(A_{ij})_{1 \le i,j \le r}.$$

Lemma 2.73. *Das Element $\Pi_M \neq 0$ in S ist homogen vom Grad $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i(M)$ und eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit einem Skalar ungleich* 0.

Beweis: Es ist Π_M entweder homogen vom Grad $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i(M)$ oder das Nullelement. In Kapitel 3 wird der Begriff eines regulären Vektors eingeführt werden. Es handelt sich dabei um einen Vektor $v \in V$, der in keiner spiegelnden Hyperebene von G enthalten ist. Ist also v ein regulärer Vektor, so ist die Einschränkung von $\psi_v : S \otimes M^* \longrightarrow M^*$, $\psi_v(P \otimes y) = P(v)y$, auf $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$ ein Isomorphismus von $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$ und M^* nach [**35**, Lemma 10.5]. Somit ist $\{\psi_v(u_1), \ldots, \psi_v(u_r)\}$ eine Basis von M^*. Außerdem gilt $\psi_v(u_i) = \sum\limits_{j=1}^{r} A_{ij}(v) y_j$ und, weil $\{y_1, \ldots, y_r\}$ eine Basis von M^* ist, ist $\det(A_{ij})(v) \neq 0$ und daher $\Pi_M \neq 0$.
Ist $\{y'_1, \ldots, y'_r\}$ eine beliebige Basis von M^*, so gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ mit $y_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ij} y'_j$ für alle $1 \le i \le r$. Schließlich ist

$$u_i = \sum_{k=1}^{r} A_{ik} \otimes y_k = \sum_{j=1}^{r}(\sum_{k=1}^{r} \alpha_{kj} A_{ik}) \otimes y'_j =: \sum_{j=1}^{r} B_{ij} \otimes y'_j$$

und daher ist $\det(B_{ij}) = \det(\alpha_{ij})\det(A_{ij}) = \det(\alpha_{ij})\Pi_M$, wobei $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ ist. Analoges gilt für beliebige aus homogenen Elementen bestehende Basen von $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$. □

Definiere eine S-bilineare Abbildung $(S \otimes M) \times (S \otimes M^*) \longrightarrow S$ durch

$$(P \otimes y, Q \otimes y^*) \mapsto y^*(y)PQ.$$

Diese lässt sich zu einer Abbildung

$$(.,.)_M : (S \otimes M)^G \times (S \otimes M^*)^G \longrightarrow S^G.$$

einschränken. Ist $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_r\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $(\mathcal{H} \otimes M)^G$, sodass w_i homogen vom Grad $q_i(M^*)$ für alle i ist, so sind $\mathcal{B}$ eine S^G-Basis von $(S \otimes M^*)^G$ und $\mathcal{C}$ eine von $(S \otimes M)^G$ nach Proposition 2.45.

DEFINITION 2.74. Die Matrix $Q_M = ((w_i, u_j)_M)_{1 \le i,j \le r}$ heißt die *Diskriminantenmatrix* von M und deren Determinante $\Delta_M = \det(Q_M)$ heißt die *M-Diskriminante* von G.

LEMMA 2.75. *Bis auf Multiplikation mit einer Konstanten ungleich* 0 *gilt*

$$\Delta_M = \Pi_M \Pi_{M^*}.$$

Insbesondere ist $\Delta_M \neq 0$ *bis auf Multiplikation mit einem Skalar ungleich* 0 *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Seien $\{y_1, \ldots, y_r\}$ eine Basis von M und $\{y_1^*, \ldots, y_r^*\}$ die zugehörige Dualbasis von M^*, dann gibt es eindeutig bestimmte, homogene Elemente $A_{i,j}, A_{i,j}^* \in \mathcal{H}$, $1 \le i,j \le r$, sodass $u_i = \sum\limits_{k=1}^{r} A_{i,k}^* y_k^*$ und $w_j = \sum\limits_{l=1}^{r} A_{j,l} y_l$ für alle i und j gilt. Somit sind

$$(w_i, u_j)_M = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} y_k^*(y_l) A_{i,l} A_{j,k}^* = \sum_{k=1}^{r} A_{i,k} A_{j,k}^*$$

und $Q_M = (A_{i,j})_{1 \le i,j \le r} (A_{i,j}^*)_{1 \le i,j \le r}^t$, womit $\det(Q_M) = \Pi_M \Pi_{M^*}$ ist. Der Rest der Aussage folgt aus Lemma 2.73. □

LEMMA 2.76. *Es gelten*

(i) $g \cdot \Pi_M = \det_M(g) \Pi_M$ *für alle* $g \in G$ *und*
(ii) $A = B\Pi_M$ *für ein* $B \in S^G$, *falls* $M \cong \mathbb{C}A$ *für ein* $A \in S^G$ *ist.*

Beweis:

(i) Sei $\{y_1, \ldots, y_r\}$ eine Basis von M^* und setze $y_M = y_1 \wedge \cdots \wedge y_r \in \Lambda^r(M^*)$, so gilt

$$g \cdot y_M = \det_M(g)^{-1} y_M.$$

Ist $u_M := u_1 \cdots u_r \in (S \otimes \Lambda(M^*))^G$, so gibt es eindeutig bestimmte $A_{ij} \in \mathcal{H}$ mit

$$u_M = (\sum A_{1j} \otimes y_j) \cdots (\sum A_{rj} \otimes y_j) = \det((A_{ij})_{1 \le i,j \le r}) \otimes y_M = \Pi_M \otimes y_M.$$

Da u_M G-invariant ist, gilt schließlich

$$\Pi_M \otimes y_M = g \cdot (\Pi_M \otimes y_M) = g \cdot \Pi_M \otimes \det_M(g)^{-1} y_M,$$

und damit $g \cdot \Pi_M = \det_M(g) \Pi_M$ für alle $g \in G$.

(ii) Sei $M \cong \mathbb{C}A$ für ein $A \in S^G$, so ist $\Pi_M \in \mathcal{H}$. Da $(\mathcal{H}, M) = \dim_{\mathbb{C}} M = 1$ gilt, kommt M genau einmal in der Zerlegung von $\mathcal{H}$ in irreduzible G-Moduln vor, das heißt, $\mathcal{H}$ besitzt genau einen G-Untermodul, der isomorph zu M ist. Nun sind aber M und $\mathbb{C}\Pi_M$ isomorph als G-Moduln nach (i) und nach Korollar 2.38 sind auch S und $S^G \otimes \mathcal{H}$ isomorph als G-Moduln, woraus folgt, dass es ein $B \in S^G$ mit $A = B\Pi_M$ gibt. □

KOROLLAR 2.77. *Es gibt ein* $B \in S^G$ *mit* $\Pi_M = B\Pi_{\Lambda^r(M)}$.

Beweis: Ist $\{m_1, \dots, m_r\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von M, so ist $\Lambda^r(M) = \mathbb{C}m_1 \wedge \cdots \wedge m_r$ eindimensional. Da $g \cdot m_1 \wedge \cdots \wedge m_r = \det_M(g) m_1 \wedge \cdots \wedge m_r$ für alle $g \in G$ gilt, sind $\Lambda^r(M)$ und $\mathbb{C}\Pi_M$ als G-Moduln isomorph. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 2.76(ii). □

DEFINITION 2.78. Definiere

$$C(G, M) = \sum_{i=1}^{r} q_i(M).$$

Ist H eine spiegelnde Hyperebene von G, dann bezeichne G_H jene zyklische Untergruppe von G, die H punktweise fixiert. Insbesondere ist G_H die von einer Spiegelung r_H von V mit $\mathrm{Fix}(r_H) = H$ erzeugte Untergruppe von G. Definiere nun

$$C(H, M) = C(G_H, \mathrm{Res}^G_{G_H} M).$$

BEMERKUNG 2.79. Sind M_1 und M_2 zwei G-Moduln, so ist

$$C(G, M_1 \oplus M_2) = C(G, M_1) + C(G, M_2).$$

Seien H eine spiegelnde Hyperebene von G, r_H eine unitäre Spiegelung von V, die G_H erzeugt, e_H die Ordnung von r_H und $\varepsilon_H := \det(r_H)$.

BEMERKUNG 2.80. Sei $\{\sigma_k\}_{k=0}^{e_H-1}$ die Menge der Isomorphieklassen der eindimensionalen, irreduziblen Darstellungen von G_H, die durch Skalarmultiplikation mit ε_H^k gegeben sind. Da die Anzahl der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G_H die Anzahl der Konjugationsklassen von G_H ist, sind $\sigma_0, \dots, \sigma_{e_H-1}$ schon alle Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G_H.
Nach [**35**, Theorem 9.38] gilt für die Menge der G_H-harmonischen Polynome $\mathcal{H}_H = \bigoplus_{j=0}^{e_H-1} L_H^j$, wo L_H eine Linearform mit Kern H ist. Da $V = H \oplus H^\perp$ ist, gilt außerdem

$$r_H \cdot L_H = \varepsilon_H^{-1} L_H.$$

Sind nun $k \in \mathbb{N}$ und $\{y_k\}$ eine Basis eines eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V_k, so ist

$$r_H \cdot (L_H^k \otimes y_k) = (r_H \cdot L_H^k) \otimes (\sigma_k(r_H)(y_k)) = (\varepsilon_H^{-k} L_H^k) \otimes (\varepsilon_H^k y_k) = L_H^k \otimes y_k,$$

das heißt, $L_H^k \otimes y_k \in (\mathcal{H}_H \otimes V_k)^{G_H}$. Da $L_H^k \otimes y_k \neq 0$ und die Dimension von $(\mathcal{H}_H \otimes V_k)^{G_H}$ gleich 1 sind, sind $\{L_H^k \otimes y_k\}$ eine Basis von $(\mathcal{H}_H \otimes V_k)^{G_H}$ und $q(V_k) = e_H - k$.

Ist $\rho : G \to GL(M)$ eine Darstellung von G auf M, so sind $(\mathrm{Res}^G_{G_H} \rho)^* = \bigoplus_{j=1}^{r} \sigma_{i_j}$ und

$$C(H, M) = \sum_{j=1}^{r} q(V_{e_H - i_j}) = \sum_{j=1}^{r} i_j \tag{9}$$

für gewisse $0 \leq i_j \leq e_H - 1$. Dies ist äquivalent dazu, dass die Operation von r_H auf M^* die Eigenwerte $\varepsilon_H^{i_1}, \dots, \varepsilon_H^{i_r}$ hat.

Folgender Satz stammt von E. A. Gutkin ([**23**]):

SATZ 2.81 (**Gutkin**). *Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, mit*

$$\Pi_M = c \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{C(H,M)}.$$

Beweis: Nach Lemma 2.73 ist $\Pi_M \neq 0$ ein homogenes Polynom vom Grad $C(G,M)$. Definiere

$$\Lambda_M := \prod_{H\in\mathcal{A}(G)} L_H^{C(H,M)}.$$

Behauptung: Λ_M teilt Π_M.

Beweis der Behauptung: Sei $H \in \mathcal{A}(G)$. Es genügt zu zeigen, dass Π_M von $L_H^{C(H,M)}$ geteilt wird. Seien dazu $G_H = \{g \in G : H \subseteq \mathrm{Fix}(g)\}$ eine zyklische Untergruppe von G, r_H eine unitäre Spiegelung in G mit $\mathrm{Fix}(r_H) = H$, die G_H erzeugt, und $\varepsilon_H = \det(r_H)$.

Bezeichnet ρ jene Darstellung von G auf M, die M zu einem G-Modul macht, dann gilt $\rho^* = \bigoplus_{j=1}^{r} \varepsilon_H^{i_j}$ für gewisse $0 \leq i_j \leq e_H - 1$. Daher gilt für eine geeignete Basis $\{y_1, \ldots, y_r\}$ von M^* und für ein Element $\sum_{j=1}^{r} A_j \otimes y_j$ in $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$ dann

$$\sum_{j=1}^{r} A_j \otimes y_j = r_H \cdot (\sum_{j=1}^{r} A_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{r} (r_H \cdot A_j) \otimes \varepsilon_H^{i_j} y_j.$$

Somit muss $r_H \cdot A_j = \varepsilon_H^{-i_j} A_j$ gelten. Wähle nun eine Basis $\{X_1, \ldots, X_n\}$ von V^*, sodass $X_1 = L_H$ und $r_H \cdot X_j = X_j$ für alle $j \geq 2$ sind. Insbesondere gilt dann $r_H \cdot X_1 = \varepsilon_H^{-1} X_1$. Ist nun $X_1^{k_1} \cdots X_r^{k_r}$ ein Monom in S, so gilt

$$r_H \cdot X_1^{k_1} \cdots X_r^{k_r} = \varepsilon_H^{-k_1} X_1^{k_1} \cdots X_r^{k_r}.$$

Kommt ein Monom $X_1^{k_1} \cdots X_r^{k_r}$ in A_j aufgefasst als Element in $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ vor, so ist $k_1 \equiv i_j \mod e_H$. Insbesondere ist dann $k_1 \geq i_j$, das heißt, dass $L_H^{i_j}$ das Monom $X_1^{k_1} \cdots X_r^{k_r}$ teilt. Da dieses aber ein beliebiges Monom in A_j war, teilt $L_H^{i_j}$ nun A_j. Ist $\{u_i = \sum_{j=1}^{r} A_{i,j} \otimes y_j \mid 1 \leq i \leq r\}$ eine beliebige Menge von r Elementen aus $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$, dann wird

$$\det((A_{ij})_{1\leq i,j\leq r}) = \sum_{\tau\in S_r} \operatorname{sgn} \tau \prod_{k=1}^{r} A_{k,\tau(k)}$$

von $\prod_{j=1}^{r} L_H^{i_j} = L_H^{C(H,M)}$ geteilt. Insbesondere wird daher Π_M von $L_H^{C(H,M)}$ geteilt.

Behauptung: Π_M und Λ_M haben denselben Grad, das heißt, $C(G,M) = \sum_{H\in\mathcal{A}(G)} C(H,M)$.

Beweis der Behauptung: Es bezeichne

$$\rho_{\mathrm{reg}} : G \to GL(\mathbb{C}[G]),\ \rho_{\mathrm{reg}}(g)(\sum_{h\in G} \alpha_h h) = \sum_{h\in G} \alpha_h gh = \sum_{h\in G} \alpha_{g^{-1}h} h,$$

die reguläre Darstellung von G. Für diese gilt aber, wenn $\{(\rho_1, V_1), \ldots, (\rho_s, V_s)\}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von G ist, dass

$$\rho_{\mathrm{reg}} = \bigoplus_{j=1}^{s} \dim_{\mathbb{C}} V_j \cdot \rho_j$$

ist. Insbesondere kommt bis auf Isomorphie jede irreduzible Darstellung von G in der Zerlegung der regulären Darstellung in irreduzible Darstellungen von G vor. Da Π_{V_j} von Λ_{V_j} nach (i) geteilt wird, gilt

$$(*) \qquad C(G, V_j) \geq \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, V_j)$$

für alle $1 \leq j \leq s$. Es genügt die Behauptung für die reguläre Darstellung $\mathbb{C}[G]$ zu zeigen, denn gilt $C(G, \mathbb{C}[G]) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, \mathbb{C}[G])$, dann gilt $C(G, V_j) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, V_j)$ für alle $1 \leq j \leq s$ nach Bemerkung 2.79 und $(*)$.
Die reguläre Darstellung induziert die Darstellung von G auf $\mathbb{C}[G]^*$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{reg}}^*(g)(X_l)(\sum_{h \in G} \alpha_h h) = X_l(\rho_{\text{reg}}(g^{-1})(\sum_{h \in G} \alpha_h h)) = X_l(\sum_{h \in G} \alpha_{gh} h) = \alpha_{gl} \\ = X_{gl}(\sum_{h \in G} \alpha_h h),\end{aligned}$$

wo $\{X_l : l \in G\}$ die Dualbasis zu G von $\mathbb{C}[G]$ und $g \in G$ sind. Die Darstellungen ρ_{reg} und ρ_{reg}^* sind also isomorph.
Sei H eine spiegelnde Hyperebene von G. Wähle einen Repräsentanten g_k jeder Rechtsnebenklasse von G_H in G, $1 \leq k \leq [G : G_H]$, so gilt

$$\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{k=1}^{[G:G_H]} \mathbb{C}[G_H g_k]$$

als G_H-Moduln. Die Darstellungsmatrix der Operation von r_H auf $\mathbb{C}[G_H g_k]$ entspricht der Permutationsmatrix der Permutation $(1\ 2 \ldots e_H)$ und hat daher genau die e_H-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ als Eigenwerte, womit $\rho_{\text{reg}} = \frac{|G|}{e_H} \bigoplus_{j=0}^{e_H - 1} \sigma_j$ und daher

$$C(H, \mathbb{C}[G]) = \frac{|G|}{e_H} \sum_{j=0}^{e_H - 1} j = \frac{|G|}{2}(e_H - 1)$$

nach Bemerkung 2.80 gelten. Der Grad von $\Lambda_{\mathbb{C}[G]}$ ist schließlich $\sum_{H \in \mathcal{A}(G)} \frac{|G|}{2}(e_H - 1) = \frac{|G|}{2} N$, wo N die Anzahl der Spiegelungen in G bezeichnet.
Ein Element $\sum_{g \in G} P_g \otimes g \in S \otimes \mathbb{C}[G]$ ist genau dann G-invariant, wenn

$$\sum_{h \in G} P_h \otimes h = g \cdot \sum_{h \in G} P_h \otimes h = \sum_{h \in G} g \cdot P_{g^{-1}h} \otimes h$$

für alle $g \in G$ erfüllt ist. Dies gilt aber genau dann, wenn $g \cdot P_1 = P_g$ für alle $g \in G$ gilt. Da die Darstellung von G auf $\mathcal{H}$ die reguläre Darstellung ist, gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G]^*)^G = |G|$. Ist nun $\{B_i : 1 \leq i \leq |G|\}$ eine Basis von $\mathcal{H}$, sodass jeweils $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k$ Elemente dieser Basis homogen vom Grad k sind, wobei $1 \leq k \leq N$ ist, dann ist $\{\sum_{g \in G} g \cdot B_i \otimes X_g : 1 \leq i \leq |G|\}$ eine Basis von $(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}[G]^*)^G$ und der Grad von $\Pi_{\mathbb{C}[G]}$ gleich $\sum_{j=1}^{|G|} \deg(B_j) = \sum_{k=0}^{N} k \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k$. Betrachte nun

$$\sum_{k=0}^{N} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k t^k = P_{\mathcal{H}}(t) = \frac{P_S(t)}{P_{S^G}(t)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{d_i}}{1 - t} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{d_i - 1} t^j,$$

was durch Differenzieren nach t und setzen von $t = 1$ zu der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{N} k \cdot \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_k = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{d_i - 1} j) \prod_{k \neq i} d_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) \prod_{j=1}^{n} d_j = \frac{|G|}{2} N$$

führt. Schließlich ist der Grad von $\Pi_{\mathbb{C}[G]}$ gleich $\frac{|G|}{2}N$ und somit gleich dem von $\Lambda_{\mathbb{C}[G]}$. □

Beispiel 2.82. Sind H eine spiegelnde Hyperebene von G, r_H eine unitäre Spiegelung in G von maximaler Ordnung, die H fixiert, e_H die Ordnung von r_H und $\det(r_H) = \varepsilon_H$, so sind $1, \ldots, 1, \varepsilon_H$ die Eigenwerte von r_H und $1, \ldots, 1, \varepsilon_H^{e_H - 1}$ die Eigenwerte der Operation von r_H auf V^* nach Lemma 2.18. Mit (9) folgt dann $C(H, V) = e_H - 1$ und $C(H, V^*) = 1$, womit es c_V, c_{V^*} und c in $\mathbb{C}^\times$ nach dem Satz von Gutkin und Lemma 2.75 mit

$$\begin{aligned} \Pi_V &= c_V \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{e_H - 1}, \\ \Pi_{V^*} &= c_{V^*} \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H \text{ und} \\ \Delta_V &= c \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{e_H} \end{aligned}$$

gibt.

Korollar 2.83. *(i)* $C(G, M) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, M)$

(ii) Es gibt $c \neq 0$ in $\mathbb{C}$ mit $\Pi_{\Lambda^r M} = c\Pi_M$ genau dann, wenn $C(H, M) \leq e_H - 1$ für alle $H \in \mathcal{A}(G)$ gilt.

Beweis:

(i) ist nach dem Satz von Gutkin klar.

(ii) Da Π_M von $\Pi_{\Lambda^r(M)}$ nach Korollar 2.77 geteilt wird, genügt es zu zeigen, dass die Grade von Π_M und $\Pi_{\Lambda^r M}$ genau dann übereinstimmen, wenn $C(H, M) \leq e_H - 1$ für alle $H \in \mathcal{A}(G)$ gilt.

Weil $\Lambda^r M$ eindimensional ist, sind $q(\Lambda^r M)$ der Grad von $\Pi_{\Lambda^r M}$ und daher $0 \leq q(\Lambda^r M) \leq \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, M)$ nach dem Satz von Gutkin. Wird der Satz von Gutkin auf $\Lambda^r M$ angewandt, so folgt

$$q(\Lambda^r M) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, \Lambda^r M).$$

Seien H eine spiegelnde Hyperebene von G, r_H eine Spiegelung in G von maximaler Ordnung, die H fixiert, e_H die Ordnung von r_H und $\varepsilon_H = \det(r_H)$. Bezeichnet ρ jene Darstellung von G auf M, die M zu einem G-Modul macht, so ist $(\mathrm{Res}^G_{G_H} \rho)^* = \bigoplus_{j=1}^{r} \sigma_{i_j}$ für gewisse $0 \leq i_j \leq e_H - 1$. Die Notation ist hier wie in Bemerkung 2.80 gewählt.

Seien $\{y_1, \ldots, y_r\}$ eine Basis von M^*, sodass $r_H \cdot y_j = \varepsilon_H^{i_j} y_j$ für alle $1 \leq j \leq r$ gilt, und $y_M = y_1 \wedge \cdots \wedge y_r$, dann ist

$$r_H \cdot y_M = \varepsilon_H^{C(H,M)} y_M.$$

Da die Operation von r_H auf $\Lambda^r M^*$ nur den Eigenwert $\varepsilon_H^{C(H,M)}$ besitzt, gilt

$$C(H, \Lambda^r M) \equiv C(H, M) \mod e_H$$

nach (9). Insgesamt gilt daher

$$q(\Pi_{\Lambda^r M}) = \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, \Lambda^r M) \equiv \sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, M) \mod e_H$$

Somit stimmen die Grade $q(\Lambda^r M)$ von $\Pi_{\Lambda^r M}$ und $\sum_{H \in \mathcal{A}(G)} C(H, M)$ von Π_M genau dann überein, wenn $C(H, M) \leq e_H - 1$ für alle $H \in \mathcal{A}(G)$ gilt. □

DEFINITION 2.84. Ein G-Modul M der Dimension r heißt *mittelbar*, falls es eine komplexe Zahl $c \neq 0$ mit $\Pi_M = c\Pi_{\Lambda^r M}$ gibt.

BEISPIEL 2.85. Nach Beispiel 2.82 sind $C(H, V) = e_H - 1$ und $C(H, V^*) = 1$ für alle spiegelnden Hyperebenen H von G. Daher sind V und V^* mittelbare G-Moduln nach Korollar 2.83.

Für mittelbare G-Moduln M hat die $\mathbb{C}$-Algebra $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ eine besondere Struktur.

SATZ 2.86. *Ist M ein mittelbarer G-Modul der Dimension r, dann ist $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ eine Graßmann-Algebra über S^G, das heißt, es gibt einen Teilraum W von $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ mit $(S \otimes \Lambda M^*)^G = S^G \otimes \Lambda W$.*
Genauer gilt, falls $u_1, \ldots, u_r$ homogene Elemente in $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ mit

$$u_1 \cdots u_r = \Pi_M \otimes y_M$$

sind, wo $y_M = y_1 \wedge \cdots \wedge y_r$ für eine Basis $\{y_1, \ldots, y_r\}$ von M^* bezeichnet,

$$(S \otimes \Lambda M^*)^G = \bigoplus_{p=0}^{r} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq r} S^G u_{i_1} \cdots u_{i_p}.$$

Beweis: Seien $\mathcal{I} = \{(i_1, \ldots, i_p) \in [r]^p : 0 \leq p \leq r \text{ und } i_1 < \cdots < i_p\}$ und $\underline{i}' = (i'_1, \ldots, i'_{r-p})$ für ein $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}$ und $\{i'_1, \ldots, i'_{r-p}\} = \{1, \ldots, r\} \backslash \{i_1, \ldots, i_p\}$ mit $i'_1 < \cdots < i'_{r-p}$ das Komplement von $\underline{i}$ in $\mathcal{I}$. Außerdem seien $u_{\underline{i}} = u_{i_1} \cdots u_{i_p}$ für ein beliebiges $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{B} := \{u_{\underline{i}} : \underline{i} \in \mathcal{I}\}$ und K der Quotientenkörper von S, so gilt $|\mathcal{B}| = 2^r$. Wegen $\Lambda M^* = \bigoplus_{p=0}^{r} \Lambda^p M^*$ gibt es eine Zerlegung $K \otimes \Lambda M^* = \bigoplus_{p=0}^{r} K \otimes \Lambda^p M^*$, die invariant unter der Aktion von G ist. Die Projektion $\pi_r : K \otimes \Lambda M^* \longrightarrow K \otimes \Lambda^r M^*$ respektiert die G-Aktion und erfüllt

$$\pi_r(u_{\underline{i}} \cdot u_{\underline{j}}) = \begin{cases} c \cdot \Pi_M \otimes y_M \text{ für ein } c \neq 0, & \text{falls } \underline{j} = \underline{i}' \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $S \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^*$ eine S-Unteralgebra des K-Vektorraumes $K \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^*$, denn es ist $K \otimes_S (S \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^*) = (K \otimes_S S) \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^* \cong K \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^*$, da K der Quotientenkörper von S ist. Insbesondere ist $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ eine Unteralgebra von $(K \otimes \Lambda M^*)^G$.
Die Menge $\mathcal{B}$ ist über K linear unabhängig, denn ist $\sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}} k_{\underline{i}} u_{\underline{i}} = 0$ für gewisse $k_{\underline{i}} \in K$, dann gilt nach Multiplizieren beider Seiten mit einem festen $u_{\underline{j}}$ und Anwenden von π_r auf beiden Seiten, dass $k_{\underline{j}'} \cdot \Pi_M \otimes y_M = 0$ ist. Da aber $\Pi_M \otimes y_M \neq 0$ ist, muss nun $k_{\underline{j}'} = 0$ sein, und da $\underline{j}$ beliebig war, folgt die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$.
Da die Dimension von $K \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^*$ über K gleich $\dim_{\mathbb{C}} \Lambda M^* = 2^r = |\mathcal{B}|$ ist, und, da die Menge $\mathcal{B}$ linear unabhängig über K ist, ist $\mathcal{B}$ eine K-Basis von $K \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda M^*$. Insbesondere ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig über S^G. Es soll nun gezeigt werden, dass $\mathcal{B}$ eine S^G-Basis von $(S \otimes \Lambda(M^*))^G$ ist.
Sei $u \in (S \otimes \Lambda M^*)^G$, dann gibt es eindeutig bestimmte $k_{\underline{i}} \in K$, sodass $u = \sum_{\underline{i} \in \mathcal{I}} k_{\underline{i}} u_{\underline{i}}$

ist. Weiters gilt $|G|u = \sum\limits_{g \in G} g \cdot u = \sum\limits_{\underline{i} \in \mathcal{I}} (\sum\limits_{g \in G} g \cdot k_{\underline{i}}) u_{\underline{i}}$, das heißt, $k_{\underline{i}} = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} g \cdot k_{\underline{i}}$ ist G-invariant für jedes $\underline{i} \in \mathcal{I}$. Wähle $\underline{i} \in \mathcal{I}$ fest, so ist

$$k_{\underline{i}} \Pi_M \otimes y_M = \pi_r \Big(\sum_{\underline{j} \in \mathcal{I}} k_{\underline{j}} u_{\underline{j}} u_{\underline{i}'} \Big) = \pi_r(u u_{\underline{i}'}) \in S \otimes \Lambda^r M^*,$$

das heißt, es gibt ein $v_{\underline{i}} \in S$ mit $k_{\underline{i}} \Pi_M \otimes y_M = v_{\underline{i}} \otimes y_M$. Weil $k_{\underline{i}} = \frac{v_{\underline{i}}}{\Pi_M}$ nun G-invariant und $g \cdot \Pi_M = \det_M(g) \Pi_M$ nach Lemma 2.76(i) sind, ist $g \cdot v_{\underline{i}} = \det_M(g) v_{\underline{i}}$. Insbesondere ist $\mathbb{C} v_{\underline{i}}$ ein G-Modul. Da G auf $\Lambda^r M$ durch $g \cdot x_M = \det(g|_M) x_M$ operiert, wobei $x_M = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ für eine Basis $\{x_1, \ldots, x_r\}$ von M ist, gilt $\Lambda^r M \cong \mathbb{C} v_{\underline{i}}$ als G-Moduln. Somit gibt es nach Lemma 2.76(ii) ein $b \in S^G$ mit $v_{\underline{i}} = b \Pi_{\Lambda^r M}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $c \neq 0$ in $\mathbb{C}$ mit $\Pi_{\Lambda^r M} = c \Pi_M$ und daher gibt es ein $B = cb \in S^G$ mit $v_{\underline{i}} = B \Pi_M$. Daher gilt $k_{\underline{i}} = B \in S^G$. Da $\underline{i} \in \mathcal{I}$ beliebig war, folgt nun, dass u eine Linearkombination in den Elementen aus $\mathcal{B}$ über S^G und somit $\mathcal{B}$ eine S^G-Basis von $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ sind. □

Für einen G-Modul M der Dimension r war

$$f_M(t) = \sum_{i=0}^{N} (M, \mathcal{H}_i) t^i = t^{q_1(M)} + \cdots + t^{q_r(M)},$$

wobei N die Anzahl der Spiegelungen in G bezeichnet. Die $q_1(M), \ldots, q_r(M)$ seien außerdem so nummeriert, dass $q_i(M) \leq q_{i+1}(M)$ für alle $1 \leq i \leq r-1$ gilt.

Ist M ein mittelbarer G-Modul, so haben das Hilbert-Poincarépolynom von $(S \otimes \Lambda M^*)^G$ und $f_{\Lambda^k M}$ für alle $0 \leq k \leq r$ eine besondere Form.

KOROLLAR 2.87. *Sei M ein mittelbarer G-Modul der Dimension r, dann gelten*

(i) $P_{(S \otimes \Lambda M^*)^G}(t) = P_{S^G}(t) \prod\limits_{j=1}^{r} (1 + t^{q_j(M)})$,

(ii) $f_{\Lambda M}(t) = \prod\limits_{j=1}^{r} (1 + t^{q_j(M)})$ *und*

(iii) $f_{\Lambda^k M}(t) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} \prod\limits_{j=1}^{k} t^{q_{i_j}(M)}$.

Beweis: Sind $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von $(\mathcal{H} \otimes M^*)^G$, sodass u_i homogen vom Grad $q_i(M)$ für jedes $1 \leq i \leq r$ ist, $\{y_1, \ldots, y_r\}$ eine Basis von M^* und $A_{i,j} \in \mathcal{H}$ für alle $1 \leq i, j \leq r$ eindeutig bestimmte G-harmonische Elemente mit $u_i = \sum\limits_{j=1}^{r} A_{i,j} \otimes y_j$, so gilt

$$\begin{aligned} u_1 \cdots u_r &= \sum_{\sigma \in S_r} \prod_{j=1}^{r} A_{j,\sigma(j)} \otimes (y_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge y_{\sigma(r)}) \\ &= \Big(\sum_{\sigma \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{r} A_{j,\sigma(j)} \Big) \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_r \\ &= \det((A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}) \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_r \\ &= \Pi_M \otimes y_1 \wedge \cdots \wedge y_r. \end{aligned}$$

Bezeichnet W den graduierten Teilraum von $(S\otimes\Lambda M^*)^G$, der die Basis $\{u_1,\dots,u_r\}$ hat, so ist $(S\otimes\Lambda M^*)^G = S^G\otimes\Lambda W$ nach Satz 2.86 und es gilt

$$\begin{aligned}P_{(S\otimes\Lambda M^*)^G}(t) &= P_{S^G}(t)P_{\Lambda W}(t) \quad \text{nach Lemma 2.48}\\ &= P_{S^G}(t)\prod_{j=1}^{r}(1+t^{q_j(M)}) \quad \text{nach Beispiel 2.52.}\end{aligned}$$

Weil $P_{(S\otimes\Lambda M^*)^G}(t) = P_{S^G}(t)f_{\Lambda M}(t)$ nach Beispiel 2.53 ist, gelten schon (ii) und (iii). □

Das nächsten Resultat wurde von Peter Orlik und Louis Solomon erstmals in [**38**] formuliert und orientiert sich an einem Resultat in N. Bourbaki ([**14**, p. 136]).

Satz 2.88 (**Orlik und Solomon**). *Seien M ein mittelbarer G-Modul der Dimension r und u, t Unbekannte, dann gilt*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{\det_M(1-ug)}{\det_V(1-tg)} = \frac{\prod_{j=1}^{r}(1-ut^{q_j(M)})}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})}.$$

Beweis: Durch $S\otimes\Lambda M^* = \bigoplus_{i,k} S_i\otimes\Lambda^k M^*$ wird $S\otimes\Lambda M^*$ zu einem bigraduierten G-Modul. Sei nun $P_{(S\otimes\Lambda M^*)^G}(t,u) = \sum_{i,k\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}(S_i\otimes\Lambda^k M^*)^G t^i u^k$.
Da

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}(S_i\otimes\Lambda^k M^*)^G &= (S_i,\Lambda^k M)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Spur}(g,S_i)\overline{\mathrm{Spur}(g,\Lambda^k M)}\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Spur}(g,S_i)\mathrm{Spur}(g,\Lambda^k M^*) \quad \text{nach Lemma 2.18}\end{aligned}$$

gilt, ist einerseits

$$\begin{aligned}P_{(S\otimes\Lambda M^*)^G}(t,u) &= \frac{1}{|G|}\sum_{i,k\geq 0}\sum_{g\in G}\mathrm{Spur}(g,S_i)\mathrm{Spur}(g,\Lambda^k M^*)t^i u^k\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Big(\sum_{i\geq 0}\mathrm{Spur}(g,S_i)t^i\Big)\Big(\sum_{k\geq 0}\mathrm{Spur}(g,\Lambda^k M^*)u^k\Big)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}P_S(g,t)P_{\Lambda M^*}(g,u)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{\det_{M^*}(1+ug)}{\det_{V^*}(1-tg)} \quad \text{nach Lemma 2.54 und Lemma 2.55.}\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
P_{(S\otimes\Lambda M^*)^G}(t,u) &= \sum_{k\geq 0}(\sum_{i\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}(S_i\otimes\Lambda^k M^*)^G t^i)u^k \\
&= \sum_{k\geq 0} P_{(S\otimes\Lambda^k M^*)^G}(t)u^k \\
&= \sum_{k\geq 0} P_{S^G}(t) f_{\Lambda^k M}(t)u^k \text{ nach Beispiel 2.53} \\
&= P_{S^G}(t)\sum_{k\geq 0}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r}(\prod_{j=1}^{k} t^{q_{i_j}(M)})u^k \quad \text{nach Korollar 2.87(iii)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{r}(1+ut^{q_j(M)})}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})} \text{ nach Beispiel 2.51.}
\end{aligned}$$

Wird nun u durch $-u$ ersetzt, dann folgt die Behauptung, denn es sind $\det_M(1-ug) = \overline{\det_{M^*}(1-ug)}$ und $\det_V(1-tg) = \overline{\det_{V^*}(1-tg)}$. □

6.2. Anzahl spiegelnder Hyperebenen einer unitären Spiegelungsgruppe. Seien $\{v_1,\ldots,v_n\}$ eine Basis von V und $\{X_1,\ldots,X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*. Für $P\in S$ sei

$$dP = \sum_{i=1}^{n} D_{v_i}P\otimes X_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial X_i}\otimes X_i \in S\otimes V^*.$$

Bemerkung 2.89. (i) Bezeichnet A die Basiswechselmatrix in V bezüglich einer weiteren Basis von V, so ist die Basiswechselmatrix in V^* bezüglich der entsprechenden Dualbasis von V^* dann $(A^{-1})^t$. Da außerdem die Abbildung $v\mapsto D_v$ linear ist, ist $d: S\to S\otimes V^*$ unabhängig von der Wahl der Basis von V.

(ii) Sind $g\in G$ und $P\in S$, so ist

$$g\cdot dP = d(g\cdot P),$$

weil $g\cdot dP = \sum\limits_{i=1}^{n} D_{g(v_i)}g\cdot P\otimes g\cdot X_i$ mit Lemma 2.40, $\{g(v_1),\ldots,g(v_n)\}$ eine Basis von V mit Dualbasis $\{g\cdot X_1,\ldots,g\cdot X_n\}$ und $d: S\to S\otimes V^*$ nach (i) unabhängig von der Wahl der Basis von V sind. Insbesondere gilt für $P\in S^G$

$$g\cdot dP = dP. \tag{10}$$

Korollar 2.90. *Sind $d_1,\ldots,d_n$ die Grade von G und $\mathcal{F}=\{f_1,\ldots,f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G mit* $\deg f_i = d_i$ *für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$, dann ist $\{df_1,\ldots,df_n\}$ eine S^G-Basis von $(S\otimes V^*)^G$. Da df_i homogen vom Grad d_i-1 für jedes $1\leq i\leq n$ ist, gilt*

$$q_i(V) = d_i - 1$$

für alle $1\leq i\leq n$.

Beweis: Es ist $df_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\otimes X_j \in (S\otimes\Lambda(V^*))^G$ nach (10) für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$. Nach Satz 2.86 genügt es $df_1\cdots df_n = \Pi_V\otimes X_1\wedge\cdots\wedge X_n$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
df_1 \cdots df_n &= \prod_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \otimes X_j) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial X_{\sigma(j)}} \otimes X_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge X_{\sigma(n)} \\
&= (\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial X_{\sigma(j)}}) \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \\
&= \det((\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{1 \leq i,j \leq n}) \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \\
&= \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{e_H - 1} \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \qquad \text{nach Proposition 2.67} \\
&= \Pi_V \otimes X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \qquad \text{nach Beispiel 2.82.}
\end{aligned}$$

□

Nach Beispiel 2.85 sind sowohl V als auch V^* mittelbare G-Moduln. Das Satz von Orlik und Solomon kann also auf V^* angewandt werden.

Satz 2.91. *Seien G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V, $d_1^*, \dots, d_n^*$ die Kograde von G und $k(g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Fix}(g)$ für alle $g \in G$, so gilt*

$$\sum_{g \in G} (-1)^{n-k(g)} \det_{V^*}(g) s^{k(g)} = \prod_{i=1}^n (s + d_i^* + 1) \tag{11}$$

für eine Unbestimmte s.

Beweis: Da V^* ein mittelbarer G-Modul nach Beispiel 2.85 ist, gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{\det_{V^*}(1 - ug)}{\det_V(1 - tg)} = \prod_{i=1}^n \frac{1 - ut^{q_i(V^*)}}{1 - t^{d_i}} = \prod_{i=1}^n \frac{1 - ut^{d_i^* + 1}}{1 - t^{d_i}} \tag{$*$}$$

nach Satz 2.88. Wird $u = 1 - s(1 - t)$ auf beiden Seiten von $(*)$ substituiert, dann ergibt sich wegen

$$\begin{aligned}
1 - ut^{d_i^* + 1} &= 1 - t^{d_i^* + 1} + (1 - u) t^{d_i^* + 1} \\
&= (1 - t) \frac{1 - t^{d_i^* + 1}}{1 - t} + (1 - t) \frac{1 - u}{1 - t} t^{d_i^* + 1} \\
&= (1 - t)(1 + t + \cdots + t^{d_i^*} + st^{d_i^* + 1}),
\end{aligned}$$

für die rechte Seite von $(*)$ mit $t = 1$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n \frac{1 - ut^{d_i^* + 1}}{1 - t^{d_i}} \Big|_{t=1} &= \prod_{i=1}^n \frac{(1 - t)(1 + t + \cdots + t^{d_i^*} + st^{d_i^* + 1})}{(1 - t)(1 + t + \cdots + t^{d_i - 1})} \Big|_{t=1} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{d_i^* + 1 + s}{d_i} \\
&= \frac{1}{|G|} \prod_{i=1}^n (d_i^* + 1 + s).
\end{aligned}$$

Sind $\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g)$ die Eigenwerte eines $g \in G$, so sind die Eigenwerte der Operation von g auf V^* dann $\overline{\lambda_1(g)}, \dots, \overline{\lambda_n(g)}$. Wird nun auch $u = 1 - s(1 - t)$ auf der linken Seite von $(*)$ gesetzt, dann gilt auf Grund von

$$\det_{V^*}(1-ug) = \prod_{j=1}^{n}(1-u\overline{\lambda_j(g)}),$$
$$\det_V(1-tg) = \prod_{i=1}^{n}(1-t\lambda_i(g)) \text{ und}$$
$$1-u\overline{\lambda_j(g)} = 1-\overline{\lambda_j(g)}+s(1-t)\overline{\lambda_j(g)}$$

schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{\det_{V^*}(1-ug)}{\det_V(1-tg)}\Big|_{t=1} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\prod_{i=1}^{n}\frac{1-u\overline{\lambda_i(g)}}{1-t\lambda_i(g)})\Big|_{t=1}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\prod_{i=1}^{n}\frac{1-\overline{\lambda_i(g)}+s(1-t)\overline{\lambda_i(g)}}{1-t\lambda_i(g)})\Big|_{t=1}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\prod_{i\in[n]\setminus\mathcal{I}_g}s)(\prod_{j\in\mathcal{I}_g}\frac{1-\overline{\lambda_j(g)}}{1-\lambda_j(g)})\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\prod_{j\in\mathcal{I}_g}(-\overline{\lambda_j(g)})s^{k(g)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(-1)^{n-k(g)}\det_{V^*}(g)s^{k(g)},
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{I}_g = \{i\in[n] : \lambda_i(g)\neq 1\}$ für alle $g\in G$ ist. □

Korollar 2.92. *Die Anzahl der spiegelnden Hyperebenen einer unitären Spiegelungsgruppe G von V mit Kograden $d_1^*,\ldots,d_n^*$ ist*

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i^*+1).$$

Beweis: Seien R die Menge der unitären Spiegelungen in G und $\mathcal{A}(G)$ die Menge der spiegelnden Hyperebenen von G. Es sollen die Koeffizienten von s^{n-1} auf beiden Seiten von (11) verglichen werden. Es sind

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in R}(-1)\det_{V^*}(g) &= \sum_{H\in\mathcal{A}(G)}(-1)\sum_{i=1}^{e_H-1}\det_{V^*}(r_H^i)\\
&= \sum_{H\in\mathcal{A}(G)}(-1)(\frac{\det_{V^*}(r_H)^{e_H}-1}{\det_{V^*}(r_H)-1}-1)\\
&= \sum_{H\in\mathcal{A}(G)}1
\end{aligned}$$

der Koeffizient von s^{n-1} der linken Seite in (11) und $\sum_{i=1}^{n}(d_i^*+1)$ jener der rechten Seite in (11), wobei r_H einen Erzeuger von $G_H = \{g\in G : H\subseteq \mathrm{Fix}(g)\}$ und e_H die Ordnung von G_H für jede spiegelnde Hyperebene H bezeichnen. □

KAPITEL 3

Reguläre Elemente unitärer Spiegelungsgruppen

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{C}^n$.

1. Reguläre Elemente unitärer Spiegelungsgruppen

Seien G eine unitäre Spiegelungsgruppe und $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ die Grade von G.

Die folgenden wichtigen Begriffe gehen zurück auf T. A. Springer ([**45**]).

DEFINITION 3.1. (i) Ein Vektor $v \in V$ heißt *regulär*, falls er in keiner spiegelnden Hyperebene von G liegt.

(ii) Sind $g \in G$ und ζ eine primitive Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, so bezeichne $V(g, \zeta)$ den ζ-Eigenraum von g. Enthält $V(g, \zeta)$ einen regulären Vektor, so heißt g (bzw. $V(g, \zeta)$) ζ-*regulär* (bzw. *regulär*).

(iii) Ein $d \in \mathbb{N}$ heißt *regulär*, falls es ein $g \in G$ und eine d-te primitive Einheitswurzel ζ in $\mathbb{C}$ gibt, sodass $V(g, \zeta)$ regulär ist.

LEMMA 3.2. *Seien $g \in G$ und ζ eine primitive Einheitswurzel, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $E = V(g, \zeta)$ ist regulär.

(ii) Der punktweise Stabilisator $G_E = \{g \in G : E \subseteq \mathrm{Fix}(g)\}$ von E ist trivial.

(iii) E ist in keiner spiegelnden Hyperebene von G enthalten.

Beweis: $(i) \Rightarrow (ii)$ und $(ii) \Rightarrow (iii)$ folgen direkt aus Korollar 2.69, welches besagt, dass G_E jene unitäre Spiegelungsgruppe von V ist, die von den unitären Spiegelungen in G, deren spiegelnde Hyperebenen E enthalten, erzeugt wird.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wäre E nicht regulär, dann würde jedes $v \in E$ in einer spiegelnden Hyperebene von G liegen. Insbesondere würde dann $E = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G)} E \cap H$ endliche Vereinigung echter Teilräume sein, was über $\mathbb{C}$ ein Widerspruch ist. $\square$

BEMERKUNG 3.3. Sind $g \in G$ und ζ eine primitive Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, sodass $V(g, \zeta)$ ein regulärer ζ-Eigenraum ist, dann kann der ζ^i-Eigenraum $V(g^i, \zeta^i)$ für ein beliebiges i wegen $V(g, \zeta) \subseteq V(g^i, \zeta^i)$ in keiner spiegelnden Hyperebene von G liegen. Dies bedeutet aber, dass $V(g^i, \zeta^i)$ für jedes i regulär ist. Zusammengefasst ist d genau dann eine reguläre Zahl, falls für jede d-te Einheitswurzel ζ ein regulärer ζ-Eigenraum existiert.

Seien $d \in \mathbb{N}$, ζ eine d-te primitive Einheitswurzel, g ein ζ-reguläres Element in G, M ein endlich-dimensionaler G-Modul, $r = \dim_{\mathbb{C}} M$ und $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$ eine aus Eigenvektoren der Operation von g auf M^* bestehende Basis von M^*, so sind $\psi_1 = 1 \otimes Y_1, \ldots, \psi_r = 1 \otimes Y_r$ g-Eigenvektoren in $S \otimes M^*$ und $\{\psi_1, \ldots, \psi_r\}$ eine S-Basis von $S \otimes M^*$.
Seien nun $\eta_1, \ldots, \eta_r \in \mathbb{C}$ so, dass $g \cdot Y_i = \eta_i Y_i$ und somit

$$g \cdot \psi_i = \eta_i \psi_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq r \tag{12}$$

gelten.

Satz 3.4. *Seien M, g, $\psi_1, \dots, \psi_r$, $\eta_1, \dots, \eta_r$, d und ζ wie oben, dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S_r$, sodass $\eta_i = \zeta^{q_{\sigma(i)}(M)}$ für alle $1 \leq i \leq r$ gilt.*

Beweis: Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ eine S^G-Basis von $(S \otimes_{\mathbb{C}} M^*)^G$, wobei φ_i homogen vom Grad $q_i(M)$ für alle i ist. Dann gibt es eindeutig bestimmte homogene $h_{ij} \in S$ vom Grad $q_i(M)$, sodass $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{r} h_{ij} \otimes Y_j$ ist. Nach dem Satz von Gutkin gibt es ein $c \neq 0 \in \mathbb{C}$, sodass

$$(*) \qquad \det(h_{ij})_{1 \leq i,j \leq r} = c \prod_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{C(H,V)}$$

gilt. Außerdem gibt es eindeutig bestimmte f_{ij} in S, sodass $\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{r} f_{ij}\psi_j$ für alle $1 \leq i \leq r$ gilt. Wegen $\sum\limits_{j=1}^{r} h_{ij} \otimes Y_j = \varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{r} f_{ij}\psi_j = \sum\limits_{j=1}^{r} f_{ij} \otimes Y_j$ und der Eindeutigkeit der h_{ij} gilt dann $f_{ij} = h_{ij}$ für alle $1 \leq i,j \leq r$, insbesondere ist $\det((f_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}) = \det((h_{ij})_{1 \leq i,j \leq r})$. Aufgrund der Regularität von g gibt es ein $v \in V(g,\zeta)$, sodass $\det((f_{ij})_{1 \leq i,j \leq r})(v) \neq 0$ ist, denn $L_H(v) \neq 0$ für alle Hyperebenen H von G in $(*)$. Somit gibt es eine Permutation $\sigma \in S_r$, die $f_{\sigma(i)i}(v) \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq r$ erfüllt. Da φ_i G-invariant ist, gilt

$$\sum_{j=1}^{r} f_{ij}\psi_j = \varphi_i = g \cdot \varphi_i = g \cdot \sum_{j=1}^{r} f_{ij}\psi_j = \sum_{j=1}^{r} (g \cdot f_{ij})(g \cdot \psi_j) \overset{(12)}{=} \sum_{j=1}^{r} \eta_j (g \cdot f_{ij})\psi_j.$$

Wegen der Eindeutigkeit der f_{ij} muss $g \cdot f_{ij} = \eta_j^{-1} f_{ij}$ gelten. Aufgrund der Gleichheit von f_{ij} und h_{ij} ist f_{ij} homogen vom Grad $q_i(M)$ und deswegen ist

$$\eta_j^{-1} f_{ij}(v) = (g \cdot f_{ij})(v) = f_{ij}(g^{-1}(v)) = f_{ij}(\zeta^{-1}v) = \zeta^{-q_i(M)} f_{ij}(v).$$

Wegen $f_{\sigma(i)i}(v) \neq 0$ ist schließlich $\eta_i = \zeta^{q_{\sigma(i)}(M)}$ für alle $1 \leq i \leq r$. □

Insbesondere sind nun $\zeta^{q_1(M)}, \dots, \zeta^{q_r(M)}$ die Eigenwerte der Operation von g auf M^*. Mit Lemma 2.18 folgt nun, dass $\zeta^{-q_1(M)}, \dots, \zeta^{-q_r(M)}$ die Eigenwerte der Operation von g auf M sind.
Da $q_i(V) = d_i - 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ nach Korollar 2.90 gilt, folgt:

Korollar 3.5. *Seien $\zeta \in \mathbb{C}$ eine d-te primitive Einheitswurzel und g ein ζ-reguläres Element in G, so sind $\zeta^{1-d_1}, \dots, \zeta^{1-d_n}$ die Eigenwerte von g.*

Sei $d \in \mathbb{N}$ regulär für G und bezeichnen ζ jene primitive Einheitswurzel und g jenes Element aus G, sodass $V(g,\zeta)$ regulär ist. Ist nun $M = V^*$ in Satz 3.4, dann sind $\zeta^{q_1(V^*)} = \zeta^{d_1^*+1}, \dots, \zeta^{q_n(V^*)} = \zeta^{d_n^*+1}$ die Eigenwerte der Operation von g auf V. Somit gibt es eine Permutation $\pi \in S_n$, sodass $\zeta^{d_i^*+1} = \zeta^{1-d_{\pi(i)}}$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Da ζ eine d-te primitive Einheitswurzel ist, muss nun

$$(13) \qquad d_i^* + d_{\pi(i)} \equiv 0 \bmod d$$

für alle $1 \leq i \leq n$ gelten.

Seien ab nun die Kograde $d_1^*, \dots, d_n^*$ so nummeriert, dass $d_1^* \geq \dots \geq d_n^*$ gilt.

Korollar 3.6. *Seien M die Anzahl der spiegelnden Hyperebenen von G, N die Anzahl der Spiegelungen in G, $d \in \mathbb{N}$, ζ eine primitive d-te Einheitswurzel und $g \in G$ ζ-regulär. Gilt $M + N = nd$, so ist für alle $1 \leq i \leq n$*

$$d_i + d_i^* = d.$$

Beweis: Aus (13) folgt für V, dass es eine Permutation $\pi \in S_n$ gibt, sodass $0 < d_i + d^*_{\pi(i)} = k_i d$ für ein $k_i \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Weil

$$nd = M + N = \sum_{j=1}^{n}(d_j + d_j^*) = \sum_{i=1}^{n} k_i d$$

gilt, ist $k_i = 1$ für alle i. Die Behauptung folgt nun, da die Grade bzw. Kograde aufsteigend bzw. absteigend geordnet sind. □

Definition 3.7. Ist ζ eine primitive d-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ für ein $d \in \mathbb{N}$, so definiere

$$A(d) = \{i \in [n] : d|d_i\} \text{ und } a(d) = |A(d)|.$$

Ist ζ eine primitive Einheitswurzel, so heißt ein ζ-Eigenraum E eines Elements in G *maximal*, falls E in keinem anderen ζ-Eigenraum echt enthalten ist.

Im Folgenden werden einige Resultate aus der Algebraischen Geometrie verwendet, die in Anhang B nachzulesen sind.

Proposition 3.8 (**Springer [45]**). *Seien d eine natürliche Zahl, ζ eine primitive d-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G. Ordne nun die Basisinvarianten von G so, dass $d|d_i$ genau für alle $1 \leq i \leq a(d)$ gilt. Bezeichnen $V(f_i)$ die algebraische Menge $V(f_i) = \{v \in V : f_i(v) = 0\}$ für $1 \leq i \leq n$ und*

$$V(d) = \bigcap_{i=a(d)+1}^{n} V(f_j),$$

so sind

(i) $V(d) = \bigcup_{g \in G} V(g, \zeta)$ und

(ii) die paarweise verschiedenen maximalen ζ-Eigenräume die irreduziblen Komponenten von $V(d)$.

Beweis: Definiere $A = \bigcup_{g \in G} V(g, \zeta)$, dann ist $v \in A$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt, sodass $g(v) = \zeta v$ gilt. Das ist aber nach Satz 2.20 äquivalent zu $P(v) = P(\zeta v)$ für alle $P \in S^G$. Insgesamt ist $v \in A$ genau dann, wenn $f_i(v) = f_i(\zeta v)$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt. Da jedes f_i homogen vom Grad d_i ist, ist $f_i(\zeta v) = \zeta^{d_i} f_i(v)$, und somit ist $v \in A$ genau dann, wenn $v \in V(f_i)$ für alle $i \geq a(d) + 1$ ist. Damit ist (i) gezeigt.
Teilräume sind irreduzible algebraische Mengen nach Beispiel B.10, womit die Behauptung (ii) bewiesen ist. □

Proposition 3.9 (**Springer [45]**). *Ist ζ eine d-te primitive Einheitswurzel für ein $d \in \mathbb{N}$ und E ein maximaler ζ-Eigenraum,*

(i) so ist $a(d)$ die Dimension von E.

(ii) Falls E' ein weiterer maximaler ζ-Eigenraum ist, gibt es ein $g \in G$ mit $E' = gE$, und,

(iii) falls $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten ist, sodass d_i von d für alle $1 \leq i \leq a(d)$ geteilt wird, dann sind die Einschränkungen von $f_1, \dots, f_{a(d)}$ auf E algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G, sodass $d|d_i$ für alle $1 \leq i \leq a(d)$ gilt, so ist v genau dann ein Element in $\bigcap_{i=1}^{n} V(f_i)$, wenn $f_i(v) = 0 = f_i(0)$ für alle i erfüllt ist. Dies ist aber nach Satz 2.20 genau dann erfüllt, wenn es ein $g \in G$ gibt, sodass $0 = g(0) = v$ gilt. Somit ist $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V(f_i) = \{0\}$.

Ist A eine irreduzible Komponente von $\bigcap\limits_{j=i}^{n} V(f_j)$, dann muss einerseits A nach Korollar B.14 mindestens Dimension $i-1$ haben, da $\dim(V(f_j)) = n-1$ für alle $1 \leq j \leq n$ gilt. Weil $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V(f_i) = \{0\}$ ist, muss andererseit $\dim(A) \leq i-1$ nach Korollar B.14 gelten. Somit haben die irreduziblen Komponenten von $\bigcap\limits_{j=i}^{n} V(f_j)$ die Dimension $i-1$. Da die maximalen ζ-Eigenräume die irreduziblen Komponenten von $V(d) = \bigcap\limits_{i=a(d)+1}^{n} V(f_i)$ sind, haben sie Dimension $a(d)$, womit (i) gezeigt ist.

Seien $\omega_{G,\mathcal{F}} : V \to \mathbb{C}^n$, $\omega_{G,\mathcal{F}}(v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v))$ und $X_1, \ldots, X_n$ die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{C}^n$, dann sind $V(d) = \omega_{G,\mathcal{F}}^{-1}(\bigcap\limits_{i=a(d)+1}^{n} V(X_i))$ und $\omega_{G,\mathcal{F}} : V(d) \to \mathbb{C}^{a(d)}$ nach Lemma B.6 surjektiv, wobei $\bigcap\limits_{i=a(d)+1}^{n} V(X_i)$ mit $\mathbb{C}^{a(d)}$ identifiziert wird.

Bezeichnen nun $E_1, \ldots, E_s$ die maximalen ζ-Eigenräume von Elementen in G, so ist $\mathbb{C}^{a(d)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \omega_{G,\mathcal{F}}(E_i)$. Wären für jedes $i \in [n]$ die Einschränkungen von $f_1, \ldots, f_{a(d)}$ auf E_i algebraisch abhängig, dann gäbe es ein nichttriviales $P_i \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_{a(d)}]$ mit $P_i(f_1, \ldots, f_{a(d)})|_{E_i} = 0$ und daher eine algebraische Menge $C_i = V(P_i) \subsetneqq \mathbb{C}^{a(d)}$ mit $\omega_{G,\mathcal{F}}(E_i) \subseteq C_i$ für alle $i \in [n]$. Es müsste dann aber $\mathbb{C}^{a(d)} = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \omega_{G,\mathcal{F}}(E_i) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} C_i$ gelten, was ein Widerspruch zur Irreduziblität von $\mathbb{C}^{a(d)}$ ist. Somit gibt es einen maximalen ζ-Eigenraum eines Elements in G, auf dem die Einschränkungen von $f_1, \ldots, f_{a(d)}$ algebraisch unabhängig sind.

Seien $\tilde{E}$ ein maximaler ζ-Eigenraum, sodass $f_1, \ldots, f_{a(d)}$ auf $\tilde{E}$ algebraisch unabhängig sind, $I(\tilde{E}) = \{P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] : P(\tilde{e}) = 0 \text{ für alle } \tilde{e} \in \tilde{E}\}$, $\mathbb{C}[\tilde{E}]$ der Faktorring $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(\tilde{E})$ und $p \in \mathbb{C}[\tilde{E}]$. Für einen Repräsentanten P in $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ von p gelten $\prod\limits_{g \in G}(t - g \cdot P) \in \mathbb{C}[t, f_1, \ldots, f_n]$, da der Koeffizient von t^k in $\prod\limits_{g \in G}(t - g \cdot P)$ gleich $\sum\limits_{U \subseteq G \text{ mit } |U| = |G|-k} \prod\limits_{g \in U} g \cdot P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^G$ für jedes k ist, und $\prod\limits_{g \in G}(p - g \cdot P) = 0$ in $\mathbb{C}[\tilde{E}]$, das heißt, $\prod\limits_{g \in G}(p - g \cdot P) \in I(\tilde{E})$. Weil $\tilde{E}$ eine Komponente von $V(d)$ ist, gilt $\prod\limits_{g \in G}(t - g \cdot P)|_{\tilde{E}} \in \mathbb{C}[t, f_1|_{\tilde{E}}, \ldots, f_{a(d)}|_{\tilde{E}}]$. Somit ist $\mathbb{C}[\tilde{E}]$ ganz über $\mathbb{C}[f_1|_{\tilde{E}}, \ldots, f_{a(d)}|_{\tilde{E}}]$. Da $f_1|_{\tilde{E}}, \ldots, f_{a(d)}|_{\tilde{E}}$ algebraisch unabhängig sind, folgt mit Lemma B.7, dass $\omega_{G,\mathcal{F}} : \tilde{E} \longrightarrow \mathbb{C}^{a(d)}$ surjektiv ist.

Ist nun E' ein maximaler ζ-Eigenraum, dann enthält E' ein e', das in keinem anderen maximalen ζ-Eigenraum enthalten ist, da E' nicht Vereinigung endlich vieler echter Teilräume sein kann. Da $\omega_{G,\mathcal{F}} : \tilde{E} \longrightarrow \mathbb{C}^{a(d)}$ surjektiv ist, gibt es ein $e \in \tilde{E}$ mit $\omega_{G,\mathcal{F}}(e') = \omega_{G,\mathcal{F}}(e)$. Dies heißt aber nichts anderes als $P(e) = P(e')$ für alle $P \in S^G$. Wegen Satz 2.20 gibt es dann ein $g' \in G$ mit $e' = g' \cdot e$. Da $g' \cdot \tilde{E} = V(g'hg'^{-1}, \zeta)$ für $\tilde{E} = V(h, \zeta)$ aber ein maximaler ζ-Eigenraum ist und $g' \cdot \tilde{E}$ das Element e' aus E' enthält, muss $g' \cdot \tilde{E} = E'$ gelten. Analog gibt es ein $g'' \in G$ mit $E = g'' \cdot \tilde{E}$, womit $E' = g \cdot E$ für $g = g'g''^{-1}$ gilt.

Schließlich folgt aus $E = g''\tilde{E}$, dass die Einschränkungen von $f_1, \dots, f_{a(d)}$ auf E algebraisch unabhängig sind. $\square$

Proposition 3.10. *Sind $g \in G$ und ζ eine primitive Einheitswurzel, sodass $V(g,\zeta)$ regulär ist, so ist $V(g,\zeta)$ ein maximaler ζ-Eigenraum.*

Beweis: Seien $v \in V(g,\zeta)$ regulär und $V(h,\zeta)$ ein maximaler ζ-Eigenraum, der $V(g,\zeta)$ enthält, dann ist $g \cdot v = h \cdot v = \zeta v$. Insbesondere fixiert $g^{-1}h$ nun v. Da v aber regulär ist, folgt $g = h$ mit Steinbergs Fixpunktsatz (Satz 2.68). $\square$

Satz 3.11 (**Springer [45]**). *Sind $d \in \mathbb{N}$, ζ eine primitive d-te Einheitswurzel, so hat jedes ζ-reguläre Element von G die Ordnung d, und je zwei ζ-reguläre Elemente $g, h \in G$ sind zueinander konjugiert.*

Beweis: Seien g ein ζ-reguläres Element in G und $v \in V(g,\zeta)$ regulär, dann fixiert g^d dieses v und ist daher trivial. Weil kein g^k für $1 \le k \le d-1$ den ζ-Eigenvektor v fixieren kann, ist d die Ordnung von g.

Sind g und h reguläre Elemente in G, so sind $V(g,\zeta)$ und $V(h,\zeta)$ nach Proposition 3.10 maximale ζ-Eigenräume von G. Daher gibt es ein $x \in G$ mit $V(h,\zeta) = x \cdot V(g,\zeta) = V(xgx^{-1},\zeta)$ nach Proposition 3.9. Weil $V(h,\zeta)$ regulär ist, folgt schließlich $h = xgx^{-1}$. $\square$

Definition 3.12. Ist $d \in \mathbb{N}$, so definiere

$$B(d) = \{i \in [n] : d | d_i^*\} \text{ und } b(d) = |B(d)|.$$

Proposition 3.13. *Seien $d \in \mathbb{N}$, ζ eine primitive d-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, $d(g,\zeta) = \dim_{\mathbb{C}} V(g,\zeta)$ für alle $g \in G$, T eine Unbestimmte, $A(d)$, $a(d)$ wie in Definition 3.7 und $B(d)$, $b(d)$ wie in Definition 3.12. Dann gilt*

$$a(d) \le b(d)$$

und

$$(-\zeta)^n \sum_{g \in G} \det{}_V(g^{-1})(-T)^{d(g,\zeta)} = 0, \quad \textit{falls } a(d) \ne b(d) \textit{ ist, und}$$

$$(-\zeta)^n \sum_{g \in G} \det{}_V(g^{-1})(-T)^{d(g,\zeta)} = \prod_{i \in B(d)} (T + d_i^* + 1) \prod_{j \notin B(d)} (1 - \zeta^{-d_j^*}) \prod_{k \notin A(d)} \frac{d_k}{1 - \zeta^{-d_k}},$$

falls $a(d) = b(d)$ ist.

Beweis: Seien $\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g)$ die Eigenwerte von $g \in G$. Da $\Pi_{\Lambda^n V^*} = c\Pi_{V^*}$ für ein $c \ne 0$ nach Beispiel 2.85 ist, gilt nach Satz 2.88 für Unbestimmte u und t

$$(*) \qquad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - u\overline{\lambda_j(g)}}{1 - t\lambda_j(g)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(1 - ut^{d_i^*+1})}{(1 - t^{d_i})}.$$

Da $d(g,\zeta) = \dim_{\mathbb{C}} V(g,\zeta)$ gilt, sind genau $d(g,\zeta)$ Eigenwerte von g gleich ζ. Somit hat $\prod_{j=1}^{n} \frac{1-u\overline{\lambda_j(g)}}{1-t\lambda_j(g)}$ einen Pol der Ordnung $d(g,\zeta)$ in $t = \zeta^{-1}$. Wird $T = \frac{1-u\overline{\zeta}}{1-t\zeta}$ gesetzt, so ist

$$\frac{1 - u\overline{\lambda_j(g)}}{1 - t\lambda_j(g)} = \begin{cases} T & \text{, falls } \lambda_j(g) = \zeta \text{ ist,} \\ \frac{1-\overline{\lambda_j(g)}\zeta(1-T+tT\zeta)}{1-t\lambda_j(g)} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

für alle $j \in [n]$. Beide Elemente aus $\mathbb{C}(t)[T]$ haben keinen Pol in $t = \zeta^{-1}$ und insgesamt hat nach dieser Substitution die linke Seite von $(*)$ aufgefasst als Element in $\mathbb{C}(t)[T]$ keinen Pol in $t = \zeta^{-1}$ und somit nach derselben Substitution auch nicht die rechte Seite in $(*)$. Nun hat aber der Nenner der rechten Seite eine

Nullstelle in $t=\zeta^{-1}$ der Ordnung $a(d)$ und der Zähler der rechten Seite ist dann $\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i^*+1}\zeta(1-T+tT\zeta))$ und hat daher eine Nullstelle in $t=\zeta^{-1}$ der Ordnung mindestens $b(d)$. Die Ableitung von $1-t^{d_i^*+1}\zeta(1-T+tT\zeta)$ nach t hat keine Nullstelle in $t=\zeta^{-1}$, also hat der Zähler der rechten Seite eine Nullstelle in $t=\zeta^{-1}$ genau von der Ordnung $b(d)$. Weil die rechte Seite von $(*)$ keinen Pol in $t=\zeta^{-1}$ hat, muss $a(d)\leq b(d)$ gelten.

Um die zweite Behauptung zu zeigen, substituiere zunächst $T=\frac{1-u\bar\zeta}{1-t\zeta}$. Ist $\mu\in\mathbb{C}$ mit $|\mu|=1$ beliebig, dann gilt wegen $u=\zeta(1-T+Tt\zeta)$

$$\lim_{t\to\zeta^{-1}}\frac{1-u\bar\mu}{1-t\mu}=\begin{cases}T & \text{, falls } \mu=\zeta,\\ -\bar\mu\zeta & \text{, falls } \mu\neq\zeta.\end{cases}$$

Für die linke Seite in $(*)$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\zeta^{-1}}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-u\overline{\lambda}_j(g)}{1-t\lambda_j(g)}&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T^{d(g,\zeta)}(-\zeta)^{n-d(g,\zeta)}\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j(g)\neq\zeta}}^{n}\overline{\lambda_j(g)}\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T^{d(g,\zeta)}(-\zeta)^{n}(-1)^{d(g,\zeta)}\zeta^{-d(g,\zeta)}\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j(g)\neq\zeta}}^{n}\lambda_j(g^{-1})\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(-T)^{d(g,\zeta)}(-\zeta)^{n}\mathrm{det}_V(g^{-1}).\end{aligned}$$

Ist $a(d)<b(d)$, dann hat die rechte Seite von $(*)$ eine Nullstelle in $t=\zeta^{-1}$, da der Zähler der rechten Seite eine Nullstelle in $t=\zeta^{-1}$ der Ordnung $b(d)$ und der Nenner eine der Ordnung $a(d)$ hat.
Gilt schließlich $a(d)=b(d)$, so gilt für $i\in A(d)$ und $j\in B(d)$ mit de l' Hospital

$$\lim_{t\to\zeta^{-1}}\frac{1-ut^{d_j^*+1}}{1-t^{d_i}}=\lim_{t\to\zeta^{-1}}\frac{1-t^{d_j^*+1}\zeta(1-T+tT\zeta)}{1-t^{d_i}}=\frac{d_j^*+1+T}{d_i}.$$

Für die rechte Seite von $(*)$ ergibt sich hier also

$$\lim_{t\to\zeta^{-1}}\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-ut^{d_j^*+1})}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^{d_i})}=\frac{\prod_{j\in B(d)}(T+d_j^*+1)\prod_{j\notin B(d)}(1-\zeta^{-d_j^*})}{\prod_{i\in A(d)}d_i\prod_{i\notin A(d)}(1-\zeta^{-d_i})}.$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit $|G|=\prod_{i=1}^{n}d_i$, dann folgt die Behauptung für den Fall $a(d)=b(d)$. □

Werden $d=1$ und daher $\zeta=1$ in Proposition 3.13 gesetzt, so gilt

$$\sum_{g\in G}\det(g)T^{\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Fix}(g)}=\prod_{i=1}^{n}(T-d_i^*-1). \tag{14}$$

PROPOSITION 3.14. *Sind $d \in \mathbb{N}$, ζ eine primitive d-te Einheitswurzel und bezeichnet $d(g,\zeta) = \dim_{\mathbb{C}} V(g,\zeta)$ für jedes $g \in G$, dann gilt*

$$\sum_{g\in G} T^{d(g,\zeta)} = \prod_{i\in A(d)} (T + d_i - 1) \prod_{i\notin A(d)} d_i$$

Beweis: Seien $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_n(g)$ die Eigenwerte von $g \in G$. Weil es ein $c \neq 0$ in $\mathbb{C}$ mit $\Pi_{\Lambda^n(V)} = c\Pi_V$ nach Beispiel 2.85 gibt, gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - u\lambda_i(g)}{1 - t\lambda_i(g)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - ut^{d_i - 1}}{1 - t^{d_i}}$$

für Unbestimmte u, t nach Satz 2.20. Wird $T = \frac{1-u\zeta}{1-t\zeta}$ gesetzt, dann sind

$$\lim_{t\to\zeta^{-1}} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - u\lambda_i(g)}{1 - t\lambda_i(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} T^{d(g,\zeta)}$$

und

$$\lim_{t\to\zeta^{-1}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - ut^{d_i - 1}}{1 - t^{d_i}} = \prod_{i\in A(d)} (T + d_i - 1) \prod_{i\notin A(d)} d_i.$$

analog wie im Beweis von Proposition 3.13. □

Werden $d = 1$ und somit $\zeta = 1$ in Proposition 3.14 gewählt, so folgt

$$\sum_{g\in G} T^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Fix}(g)} = \prod_{i=1}^{n} (T + d_i - 1). \tag{15}$$

SATZ 3.15. *Ist $d \in \mathbb{N}$, dann ist d genau dann regulär, wenn $a(d) = b(d)$ gilt.*

Beweis: Sei ζ eine primitive d-te Einheitswurzel, dann ist nach Proposition 3.13 der Koeffizient von $T^{a(d)}$ in $(-\zeta)^n \sum_{g\in G} \det(g^{-1})(-T)^{d(g,\zeta)}$ genau dann 0, wenn $a(d) \neq b(d)$ gilt.
Es soll nun der Koeffizient von $T^{a(d)}$ berechnet werden:
Seien E ein maximaler ζ-Eigenraum, $C = \{g \in G : g \cdot e = e \text{ für alle } e \in E\}$ der punktweise Stabilisator von E und $S(E) = \{g \in G : E = V(g,\zeta)\}$. Dann ist $S(E)$ aber eine Nebenklasse in G/C und in $(-\zeta)^n \sum_{g\in S(E)} \det(g^{-1})(-T)^{d(g,\zeta)}$ ist der Koeffizient von $T^{a(d)}$ dann

$$s(E) = (-1)^{a(d)}(-\zeta)^n \det(g^{-1}) \sum_{c\in C} \det(c)$$

für einen Repräsentanten g von $S(E)$. Sind E' ein weiterer maximaler ζ-Eigenraum und C' der punktweise Stabilisator von E', dann gibt es nach Proposition 3.9(ii) ein $x \in G$ mit $E' = xE$ und daher $C' = xCx^{-1}$. Außerdem sind dann $S(E')$ eine Nebenklasse in G/C' und xgx^{-1} ein Repräsentant von $S(E')$. Insgesamt ist daher $\frac{|G|}{|C|} s(E)$ der Koeffizient von $T^{a(d)}$ in $(-\zeta)^n \sum_{g\in G} \det(g^{-1})(-T)^{d(g,\zeta)}$. Schließlich ist $\frac{|G|}{|C|} s(E) = 0$ genau dann, wenn $\sum_{c\in C} \det(c) = 0$ ist. Da aber C eine unitäre Spiegelungsgruppe ist, gilt dies genau dann, wenn C nichttrivial ist. Die Behauptung folgt nun mit Lemma 3.2. □

2. Spiegelungsfaktorgruppen

Die Idee von Spiegelungsfaktorgruppen stammt von T. A. Springer ([**45**]) und wurde von G. I. Lehrer und T. A. Springer ([**33**], [**34**]) später verallgemeinert. Hier wird als Quelle hauptsächlich eine Arbeit von G. I. Lehrer und J. Michel ([**32**]) verwendet.

Seien G eine unitäre Spiegelungsgruppe auf V, $d_1, \dots, d_n$ die Grade von G und $d_1^*, \dots, d_n^*$ die Kograde von G.

Satz 3.16. *Seien $d \in \mathbb{N}$, ζ eine d-te primitive Einheitswurzel, $g \in G$ so, dass $E = V(g, \zeta)$ ein maximaler ζ-Eigenraum ist,*

$$N = \{x \in G : xE \subseteq E\} \text{ und } C = \{x \in G : x \cdot e = e \text{ für alle } e \in E\}$$

der Stabilisator bzw. der punktweisen Stabilisator von E, dann ist C ein Normalteiler von N und die Faktorgruppe N/C operiert treu als unitäre Spiegelungsgruppe auf E. Die Faktorgruppe ist bis auf Konjugation mit einem Element aus G unabhängig von der Wahl von g.

Beweis: Dass C ein Normalteiler von N ist und, dass N/C treu auf E operiert, folgt direkt aus den Definitionen von N und C. Um zu zeigen, dass die Faktorgruppe N/C eine unitäre Spiegelungsgruppe von E ist, wird die Charakterisierung unitärer Spiegelungsgruppen aus Satz 2.60 verwendet. Ordne zunächst ein System von Basisinvarianten $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ von G so, dass d genau jene d_i mit $1 \leq i \leq a(d)$ teilt. Aus Proposition 3.9(iii) folgt, dass die Einschränkungen $F_1, \dots, F_{a(d)} \in \mathbb{C}[E]$ von $f_1, \dots, f_{a(d)}$ auf E algebraisch unabhängig sind und genau jene durch d teilbaren Grade $d_1, \dots, d_{a(d)}$ haben. Der Satz 2.60 ergibt dann $|N/C| \leq \prod_{i=1}^{a(d)} d_i$ und Gleichheit genau dann, wenn N/C eine unitäre Spiegelungsgruppe von E ist. Betrachte zunächst die aus Proposition 3.14 stammende Identität

$$(*) \qquad \sum_{h \in G} T^{d(h,\zeta)} = \prod_{i=1}^{a(d)} (T + d_i - 1) \prod_{i=a(d)+1}^{n} d_i.$$

Der Koeffizient von $T^{a(d)}$ auf der linken Seite von $(*)$ ist die Anzahl jener Elemente in G, deren ζ-Eigenraum Dimension $a(d)$ hat. Die Anzahl der ζ-Eigenräume der Dimension $a(d)$ ist das $|C|$-fache der Anzahl paarweise verschiedener, maximaler ζ-Eigenräume, siehe Beweis von Satz 3.15. Nach Proposition 3.9(ii) sind alle maximalen ζ-Teilräume von der Form gE für ein $g \in G$ und damit ist die Anzahl aller paarweiser verschiedener, maximaler ζ-Eigenräume gleich $\frac{|G|}{|N|}$. Der Koeffizient von $T^{a(d)}$ auf der linken Seite von $(*)$ ist daher $\frac{|C||G|}{|N|}$ und der von $T^{a(d)}$ auf der rechten Seite von $(*)$ ist $\prod_{i=a(d)+1}^{n} d_i$. Weil $|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i$ gilt, folgt $\prod_{i=1}^{a(d)} d_i = \frac{|N|}{|C|} = |N/C|$. Also ist N/C eine unitäre Spiegelungsgruppe von E mit Graden $d_1, \dots, d_{a(d)}$.

Ist $h \in G$, sodass $\widehat{E} := V(h, \zeta)$ ein maximaler ζ-Eigenraum ist, dann gibt es ein $x \in G$ mit $x\widehat{E} = E$ nach Proposition 3.9(ii). Schließlich gelten

$$\{s \in G : s\widehat{E} \subseteq \widehat{E}\} = xNx^{-1} \text{ und } \{s \in G : s \cdot v = v \text{ für alle } v \in \widehat{E}\} = xCx^{-1}. \qquad \square$$

Korollar 3.17. *Sind $d \in \mathbb{N}$, $g \in G$, ζ eine primitive d-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G, sodass die Grade von $f_1, \dots, f_{a(d)}$ durch d teilbar sind, dann bilden die Einschränkungen der $f_1, \dots, f_{a(d)}$ auf $E = V(g, \zeta)$ eine Menge von homogenen Basisinvarianten von N/C auf E.*

Insbesondere sind die Grade von N/C genau jene Grade von G, die durch d teilbar sind.

PROPOSITION 3.18. *Sind $d \in \mathbb{N}$, ζ_1, ζ_2 primitive d-te Einheitswurzeln und N_1/C_1 und N_2/C_2 die Faktorgruppen zu ζ_1 bzw. ζ_2 wie in Satz 3.16, dann sind N_1/C_1 und N_2/C_2 isomorphe Gruppen.*

Beweis: Ist $E = V(g_1, \zeta_1)$ ein maximaler ζ_1-Eigenraum, so ist, weil $\zeta_2 = \zeta_1^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und E maximal sind, $E = V(g_1^k, \zeta_2)$. Aus Symmetriegründen stimmen also die ζ_1-Eigenräume genau mit den ζ_2-Eigenräumen überein. Die Behauptung folgt nun aus Satz 3.16 □

Nach Proposition 3.18 ist die Faktorgruppe N/C aus Satz 3.16 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch $d \in \mathbb{N}$.

DEFINITION 3.19. Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne $G(d)$ die unitäre Spiegelungsgruppe N/C aus Satz 3.16.

Ist $d \in \mathbb{N}$ regulär, so ergibt sich folgendes Beispiel:

BEISPIEL 3.20. Sind ζ eine primitive d-te Einheitswurzel und g ein ζ-reguläres Element in G, so

(i) stimmen der Stabilisator N von $E = V(g, \zeta)$ und der Zentralisator $C_G(g)$ von g überein und
(ii) ist der Zentralisator $C_G(g)$ von g eine unitäre Spiegelungsgruppe von E, deren Grade genau jene Grade von G sind, die durch d teilbar sind.

Beweis von Beispiel 3.20:

(i): Sind $v \in E$ regulär und $x \in N$, dann ist $x(v) \in E$, das heißt, $(gx)(v) = g(x(v)) = \zeta \cdot (x(v)) = x(\zeta \cdot v) = (xg)(v)$. Aus Steinbergs Fixpunktsatz (Satz 2.68) folgt nun $gx = xg$. Ist umgekehrt $x \in C_G(g)$, so ist $xV(g, \zeta) = V(xgx^{-1}, \zeta) = V(g, \zeta)$.
(ii): Da der punktweise Stabilisator C von E trivial ist, stimmen der Zentralisator $C_G(g)$ und die Faktorgruppe N/C überein. Der Rest der Aussage folgt nun aus Satz 3.16. □

LEMMA 3.21. *Sind $x \in G$, $u, v \in V$, sodass $x(u) = \mu \cdot u$ und $x(v) = \nu \cdot v$ für $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ gelten, F ein homogenes Polynom vom Grad d in S^G und $D_u F(v) \neq 0$, so ist $\mu\nu^{d-1} = 1$.*

Beweis: Nach Lemma 2.40 gilt $x \cdot (D_u F)(v) = D_{x(u)}(x \cdot F)(v) = \mu D_u F(v)$ und außerdem gilt $x \cdot D_u F(v) = D_u F(x^{-1}(v)) = D_u F(\nu^{-1} \cdot v) = \nu^{-(d-1)} \cdot D_u F(v)$, da F homogen vom Grad d ist. Die Behauptung folgt nun sofort, da $D_u F(v) \neq 0$ ist. □

SATZ 3.22. *Wird die Notation wie in Satz 3.16 gewählt, so sind die spiegelnden Hyperebenen der unitären Spiegelungsgruppe N/C auf E genau die Schnitte der spiegelnden Hyperebenen von G, die E nicht enthalten, mit E.*

Beweis: Ein $x \in N$ ist eine unitäre Spiegelung von E genau dann, wenn die Kodimension von $\mathrm{Fix}(x) \cap E$ in E gleich 1 ist. Nun ist aber $\mathrm{Fix}(x) = \bigcap_{H \in \mathcal{A}(G) \text{ mit } \mathrm{Fix}(x) \subseteq H} H$ nach Proposition 2.72(ii). Ist also die Kodimension von $\mathrm{Fix}(x) \cap E$ in E gleich 1, so ist $\mathrm{Fix}(x) \cap E = H \cap E$ für eine spiegelnde Hyperebene H von G, die E nicht enthält.

Sei umgekehrt H eine spiegelnde Hyperebene von G, die E nicht enthält. Ist $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G, sodass für alle $1 \leq i \leq a(d)$ der Grad d_i von f_i von d geteilt wird, so sind die Einschränkungen $F_1, \ldots, F_{a(d)}$ von $f_1, \ldots, f_{a(d)}$ auf E genau die Elemente einer Menge von Basisinvarianten von

N/C nach Korollar 3.17. Da nach Proposition 3.9(i) die Dimension von $E = V(g,\zeta)$ gleich $a(d)$ ist, kann eine Basis $\{v_1,\ldots,v_n\}$ von V bestehend aus g-Eigenvektoren gewählt werden, sodass $\{v_1,\ldots,v_{a(d)}\}$ eine Basis von E ist, das heißt, $g(v_i) = \zeta v_i$ für alle $1 \leq i \leq a(d)$ und $g(v_i) = \zeta_i v_i$, $\zeta_i \neq \zeta$, für alle $a(d)+1 \leq i \leq n$. Sei $\{X_1,\ldots,X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^* und bezeichne außerdem $\Pi_E := \det((\frac{\partial F_i}{\partial X_j})_{1\leq i,j\leq a(d)})$. Nach Proposition 2.67 verschwindet Π_E genau auf der Vereinigung aller spiegelnden Hyperebenen von N/C, verschwindet also Π_E auf $E\cap H$, so muss $E\cap H$ in der Vereinigung aller spiegelnden Hyperebenen von N/C enthalten sein. Da $E\cap H$ nicht endliche Vereinigung echter Teilräume sein kann, muss $E \cap H$ eine spiegelnde Hyperebene von N/C sein. Es genügt also zu zeigen, dass Π_E auf $E\cap H$ verschwindet.

Seien $j > a(d)$, $i \leq a(d)$ und $e \in E$, so sind $g(e) = \zeta e$, $g(v_j) = \zeta_j v_j$ für ein $\zeta_j \neq \zeta$ und $\zeta_j\zeta^{d_i-1} = \zeta_j\zeta^{-1} \neq 1$. Aus Lemma 3.21 folgt nun

$$(*) \qquad D_{v_j} f_i(e) = 0.$$

Sei $u \in V$, sodass $H^\perp = \mathbb{C}u$ ist. Weil $E \nsubseteq H$ gilt, kann u nicht in $E^\perp$ liegen, das heißt, ist $u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$, so muss $\mu_{i'} \neq 0$ für ein $1 \leq i' \leq a(d)$ gelten. Außerdem sind $r_H(u) = \mu u$ für ein $\mu \neq 1$, wenn r_H eine unitäre Spiegelung von V in G maximaler Ordnung bezeichnet. Mit Lemma 3.21 gelten dann für alle $h \in H$

$$D_u f_i(h) = 0$$

und

$$(**) \qquad 0 = D_u f_i(h) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(h) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j D_{v_j} f_i(h).$$

Sei nun $v \in E\cap H$, dann ist $\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(v) = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(v) = 0$ für alle $j > a(d)$ und $i \leq a(d)$ nach $(*)$. Aus $(**)$ ergibt sich für dieses v ein lineares $a(d)\times a(d)$-Gleichungssystem in $\mu_1,\ldots,\mu_{a(d)}$, das eine nichttriviale Lösung hat, da $\mu_i \neq 0$ für ein $1 \leq i \leq a(d)$ sein muss, womit $\det((\frac{\partial F_i}{\partial X_j}(v))_{1\leq i,j\leq a(d)}) = 0$ gelten muss. Π_E verschwindet also auf $E\cap H$. □

Satz 3.23. *Wird die Notation von Satz 3.16 verwendet und ist G eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe von V, dann ist N/C eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe von E.*

Beweis: Sei $\mathcal{A}(G)$ die Menge der spiegelnden Hyperebenen von G. Angenommen, N/C ist nicht irreduzibel, das heißt, es gibt nichttriviale, N/C-invariante Teilräume E_1, E_2 von E, sodass $E = E_1 \oplus E_2$ und jede spiegelnde Hyperebene von N/C entweder E_1 oder E_2 enthält. Da nach Satz 3.22 aber die spiegelnden Hyperebenen von N/C genau die Schnitte jener spiegelnder Hyperebenen von G, die E nicht enthalten, mit E sind, müssen E_1, E_2 oder beide in jeder spiegelnden Hyperebene von G enthalten sein.

Ist E in jeder spiegelnden Hyperebene von G enthalten, so fixiert G den nichttrivialen Teilraum E von V. Aufgrund der Irreduziblität von G müssen dann aber $G = 1$ und V 1-dimensional sein, womit nichts mehr zu zeigen ist.

Es gebe also oBdA eine spiegelnde Hyperebene von G, die E_1 enthält, aber E_2 nicht enthält. Seien $\mathcal{A}_1(G)$ jene spiegelnden Hyperebenen von G, die E_1 enthalten, aber E_2 nicht enthalten, $\mathcal{A}_2(G) := \mathcal{A}(G)\backslash\mathcal{A}_1(G)$ und $G_1 \neq 1$ bzw. G_2 jene unitären Spiegelnungsgruppen, die von genau jenen Spiegelungen in G, die eine Hyperebene in $\mathcal{A}_1(G)$ bzw. in $\mathcal{A}_2(G)$ fixieren, erzeugt werden, so ist G_1 ein Normalteiler von G. Sind nämlich $H \in \mathcal{A}_1(G)$ und r eine unitäre Spiegelung in G, deren spiegelnde Hyperebene H ist, so gilt für jede Spiegelung s in G, dass die unitäre Spiegelung

srs^{-1} mit spiegelnder Hyperebene sH in G_1 ist. Dies gilt, da für $\mathrm{Fix}(s) \in \mathcal{A}_2(G)$, das heißt, $E_2 \subseteq \mathrm{Fix}(s)$, genau dann $E_2 \subseteq sH$ gilt, wenn $E_2 = s^{-1}(E_2) \subseteq H$ ist. Daher kann E_2 nicht in sH enthalten sein.
Es gilt $G = G_1G_2$, da G_1 ein Normalteiler von G und die rechte Seite alle unitären Spiegelungen, die G erzeugen, enthält. Die Fixpunktmenge V^{G_1} von G_1 in V wird dann aber von G stabilisiert, denn für alle $g = g_1g_2 \in G$, $v \in V^{G_1}$ und für alle $h \in G_1$ ist $h \cdot (g \cdot v) = g_2 \cdot ((g_2^{-1}hg_1g_2) \cdot v) = g_2 \cdot v = g_2 \cdot ((g_2^{-1}g_1g_2) \cdot v) = g \cdot v$. Da $E_1 \subseteq V^{G_1}$ nach Proposition 2.72(ii) gilt, ist V^{G_1} nichttrivial, und, weil $G_1 \neq 1$ ist, kann V^{G_1} nicht V sein, somit ergibt sich ein Widerspruch zur Irreduziblität von G. N/C muss also irreduzibel auf E operieren. □

Satz 3.24. *Ist $d \in \mathbb{N}$ regulär, so sind die Kograde von $G(d)$ genau jene Kograde von G, die von d geteilt werden.*

Es wird hier nur eine Beweisskizze gegeben, der vollständige Beweis kann in **[34]** nachgelesen werden.

Beweis: Seien ζ eine d-te primitive Einheitswurzel und $g \in G$, sodass $E = V(g, \zeta)$ regulär ist, dann gibt es ein Element $x \in G(d)$, das auf E via Skalarmultiplikation mit $e^{\frac{2\pi i}{d}}$ operiert, nämlich eine Potenz von g. Es ist dann E der $e^{\frac{2\pi i}{d}}$-Eigenraum von x und der punktweise Stabilisator von E in $G(d)$ muss daher nach Lemma 3.2 trivial sein, das heißt, nach Lemma 3.2 sind x regulär und daher auch d regulär für $G(d)$. Nach Satz 3.15 wird damit jeder Kograd von $G(d)$ von d geteilt.

Seien $p_E : V \to E$ die orthogonale Projektion auf E und $\theta : V^* \to E^*$, $\theta(\varphi) = \varphi|_E$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Algebrahomomorphismus $\Theta : \mathcal{S}(V^*) \to \mathcal{S}(E^*)$ mit $\Theta(1) = 1$ und $\Theta(\varphi) = \varphi|_E$ für alle $\varphi \in V^*$ nach der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra. Es bezeichne nun $\rho = \Theta \otimes p_E : \mathcal{S}(V^*) \otimes V \longrightarrow \mathcal{S}(E^*) \otimes E$. Insbesondere ist ρ dann N-äquivariant und bildet daher $(\mathcal{S}(V^*) \otimes V)^G$ auf $(\mathcal{S}(E^*) \otimes E)^N$ ab. Sei ρ_0 die Einschränkung von ρ auf $(\mathcal{S}(V^*) \otimes V)^G$. Ist d regulär, dann sind ρ_0 surjektiv (siehe [**34**, Theorem D]) und daher ist jeder Kograd von $G(d)$ auch einer von G (siehe [**34**, Proposition 4.8]).

Insgesamt sind die Kograde von $G(d)$ also Kograde von G, die durch d teilbar sind, davon gibt es aber $a(d)$ nach Satz 3.15. Somit sind die Kograde von $G(d)$ genau jene Kograde von G, die von d geteilt werden. □

G.I. Lehrer und T.A. Springer haben in **[34]** sogar noch mehr gezeigt:

Bemerkung 3.25. Sei $d \in \mathbb{N}$.

(i) Die Menge der Kograde von $G(d)$ ist eine Multimenge über der Menge der Kograde von G, die von d geteilt werden.
(ii) Die Kograde von $G(d)$ sind genau dann genau die Kograde von G, die von d geteilt werden, wenn d regulär ist.

3. Wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppen

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{C}^n$.

Definition 3.26. Eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe W von V, die von genau n unitären Spiegelungen erzeugt werden kann, heißt *wohlerzeugt*.

Die Identitäten

$$\sum_{g \in G} T^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Fix}(g)} = \prod_{i=1}^{n} (T + d_i - 1) \quad \text{(siehe (15))}$$

und

$$\sum_{g\in G} \det(g)T^{\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Fix}(g)} = \prod_{i=1}^{n}(T - d_i^* - 1) \quad \text{(siehe 14))}$$

können verwendet werden, um die Grade und Kograde einer unitären Spiegelungsgruppe G zu berechnen.

Sind die Grade und Kograde einer wohlerzeugten, irreduziblen unitären Spiegelungsgruppe bekannt, so ergibt sich die folgende Charakterisierung wohlerzeugter, irreduzibler unitärer Spiegelungsgruppen.

Satz 3.27. *Seien G eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe von V, M die Anzahl der Hyperebenen von G, N die Anzahl der unitären Spiegelungen in G, $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ die Grade von G und $d_1^* \geq \cdots \geq d_n^*$ die Kograde von G, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) G ist wohlerzeugt;
(ii) $M + N = nd_n$;
(iii) $d_i + d_i^* = d_n$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Für eine Erläuterung der Tabelle aller wohlerzeugten unitären Spiegelungsgruppen siehe Tabelle 4.

Tabelle 1. wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppen

$G(d,1,n)$, $G(e,e,n)$, $d,e,n \in \mathbb{N}$
G_4, G_5, G_6, G_8, G_9, G_{10}, G_{14}, G_{16}, G_{17}, G_{18}, G_{20}, G_{21}
G_{23}, G_{24}, G_{25}, G_{26}, G_{27}
G_{28}, G_{29}, G_{30}, G_{32}
G_{33}
G_{34}, G_{35}
G_{36}
G_{37}

Sei W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe mit Graden $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ und Kograden $d_1^* \geq \cdots \geq d_n^*$.

Satz 3.28. *Der Grad d_n ist regulär für W.*

Beweis: Nach Satz 3.27 gilt $d_i + d_i^* = d_n$ für alle $1 \leq i \leq n$ und deswegen teilt d_n genauso viele Grade wie Kograde von W. Die Regularität von d_n folgt sofort aus Satz 3.15. □

Proposition 3.29. *Seien ζ eine primitive d_n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und c ein ζ-reguläres Element in W, welches nach Bemerkung 3.3 existiert, dann ist das Zentrum $Z(W)$ von W die von $c^{\frac{d_n}{\mathrm{ggT}(d_1,\ldots,d_n)}}$ erzeugte, zyklische Untergruppe von W.*

Beweis: Die Eigenwerte von c sind $\zeta^{1-d_1}, \ldots, \zeta^{1-d_n}$ nach Korollar 3.5. Daraus folgt aber, dass $c^{\frac{d_n}{\mathrm{ggT}(d_1,\ldots,d_n)}}$ via Skalarmultiplikation auf V operiert und somit im Zentrum von W liegt. Das Zentrum von W ist nach Proposition 2.31 eine zyklische Untergruppe der Ordnung $ggT(d_1, \ldots, d_n)$, womit die Behauptung gezeigt ist, da die Ordnung von $c^{\frac{d_n}{ggT(d_1,\ldots,d_n)}}$ gleich $ggT(d_1, \ldots, d_n)$ ist. □

Proposition 3.30. *Sind ζ eine primitive d_n-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, c ein ζ-reguläres Element in W und d ein Teiler von d_n, so operiert der Zentralisator $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ von $c^{\frac{d_n}{d}}$ in W auf $V' = V(c^{\frac{d_n}{d}}, \zeta^{\frac{d_n}{d}})$ als wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe. Die Grade von $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ sind genau jene Grade von W, die von d geteilt werden, die Kograde von $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ sind genau jene Kograde von W, die von d geteilt werden, und d_n ist regulär für $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$.*

Beweis: Aus Beispiel 3.20(ii) folgt, dass $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ eine unitäre Spiegelungsgruppe von V' ist, deren Grade genau jene Grade von W sind, die von d geteilt werden. Die Irreduziblität folgt aus Satz 3.23. Da d ein Teiler von d_n ist, müssen nach Satz 3.27 dieselbe Anzahl an Graden und Kograden von W von d geteilt werden, womit d regulär für W nach Satz 3.15 ist. Somit sind nach Bemerkung 3.25(i) die Kograde von $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ genau jene Kograde von W, die von d geteilt werden. $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ ist nach Satz 3.15 wohlerzeugt. Ist schließlich v ein regulärer ζ-Eigenvektor von c, so ist v auch ein regulärer $\zeta^{\frac{d_n}{d}}$-Eigenvektor von $c^{\frac{d_n}{d}}$, das heißt, d_n ist regulär für $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$. □

KAPITEL 4

Zopfgruppen unitärer Spiegelungsgruppen

Der klassische Begriff der Zopfgruppe geht zurück auf E. Artin ([**1**]). Später wurde der Begriff einer Zopfgruppe auf reelle und dann auf unitäre Spiegelungsgruppen ausgeweitet. Im Zusammenhang mit unitären Spiegelungsgruppen leisteten D. Bessis ([**7**], [**8**], [**9**]) und M. Broué, G. Malle und R. Rouquier ([**19**]) einen großen Beitrag.

1. Zopfgruppen unitärer Spiegelungsgruppen

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Eine stetige und surjektive Abbildung $p : X \longrightarrow Y$ heißt *Überlagerung*, falls es für alle $y \in Y$ eine offene Umgebung U in Y und eine Familie $(V_i)_{i\in\mathcal{I}}$ paarweise disjunkter, offener Mengen in X gibt, sodass $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} V_i$ und $p|_{V_i} : V_i \longrightarrow U$ ein Homöomorphismus für alle $i \in \mathcal{I}$ sind.

Wird $\mathcal{I}$ zusammen mit der diskreten Topologie betrachtet, so ist $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathcal{I}$, $\varphi(x) = (x, i(x))$, ein Homöomorphismus, wobei $i(x)$ genau jenes $i(x) \in \mathcal{I}$ ist, sodass $x \in V_{i(x)}$ ist.

Der Beweis der folgenden Tatsache der algebraischen Topologie kann zum Beispiel in [**24**, Prop. 1.34] nachgelesen werden.

Proposition 4.1. *Seien $p : X \longrightarrow Y$ eine Überlagerung, $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ein zusammenhängender topologischer Raum und $f : Z \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sind $g_1 : Z \longrightarrow X$ und $g_2 : Z \longrightarrow X$ stetige Abbildungen mit $p \circ g_1 = f$ und $p \circ g_2 = f$, die in einem Punkt $z_0 \in Z$ übereinstimmen, so gilt $g_1 = g_2$.*

Für eine Überlagerung $p : X \longrightarrow Y$ sei

$$G(p) = \{g : X \to X \text{ Homöomorphismus} : p \circ g = p\}.$$

die *Gruppe der Decktransformationen.*

Es folgt nun unmittelbar aus Proposition 4.1:

Korollar 4.2. *Sind $(X, \mathcal{T}_X)$ ein zusammenhängender topologischer Raum, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum, $p : X \longrightarrow Y$ eine Überlagerung und $g_1, g_2 \in G(p)$, sodass g_1 und g_2 in einem $x \in X$ übereinstimmen, dann ist $g_1 = g_2$.*

Sind X zusammenhängend und Y lokal wegzusammenhängend, so heißt eine Überlagerung $p : X \longrightarrow Y$ eine *Galoisüberlagerung* oder *normal*, falls für alle $y \in Y$ und für alle $x, x' \in p^{-1}(y)$ eine Decktransformation existiert, die x auf x' abbildet.

Folgender Satz wird als die *Homotopieliftungseigenschaft* einer Überlagerung bezeichnet.

Satz 4.3. *Seien $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ein zusammenhängender topologischer Raum, $p : X \longrightarrow Y$ eine Überlagerung, $H : [0, 1] \times Z \to Y$ eine stetige Abbildung und $f : Z \to X$*

stetig mit $H(0,z) = p(f(z))$ *für alle* $z \in Z$. *Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung* $\tilde{H} : [0,1] \times Z \to X$ *mit* $\tilde{H}(0,z) = f(z)$ *für alle* $z \in Z$ *und* $H = p \circ \tilde{H}$.

Der Beweis von Satz 4.3 kann zum Beispiel in [**24**, Prop. 1.30] nachgelesen werden.

Ist $p : X \to Y$ eine Überlagerung, so folgt aus Satz 4.3 die sogenannte *Homotopieliftungeigenschaft für Wege*. Diese besagt, dass es für jedes $y_0 \in Y$, jedes $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ und jede Homotopieklasse eines Weges γ in Y mit Anfangspunkt y_0 eine eindeutig bestimmte Homotopieklasse eines Weges α in X mit Anfangspunkt x_0 und $[\gamma] = [p \circ \alpha]$ gibt.

Definition 4.4. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 = p(x_0) \in Y$, dann sei

$$\pi_1(p) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),$$
$$\pi_1(p)([\alpha]) = [p \circ \alpha].$$

Aufgrund der Homotopieliftungseigenschaft von Wegen folgt nun:

Lemma 4.5. *Ist* $p : X \longrightarrow Y$ *eine Überlagerung,* $x_0 \in X$ *und* $y_0 = p(x_0) \in Y$, *dann ist* $\pi_1(p) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ *injektiv.*

Sind $p : X \longrightarrow Y$ eine Überlagerung, $y \in Y$, $x \in p^{-1}(y)$, $[\gamma] \in \pi_1(Y, y)$ und γ ein Repräsentant von $[\gamma]$, so gibt es nach Proposition 4.1 und Satz 4.3 einen eindeutig bestimmten Weg γ_x in X mit $\gamma_x(0) = x$ und $p \circ \gamma_x = \gamma$. Es bezeichne

$$x \cdot [\gamma] = \gamma_x(1) \in p^{-1}(y).$$

Nach Satz 4.3 ist dieser Ausdruck wohldefiniert. Sind X zusammenhängend, Y lokalwegzusammenhängend und p normal, so gibt es für jedes $[\gamma]$ in $\pi_1(Y, y)$ eine eindeutig bestimmte Decktransformation $\pi([\gamma])$ in $G(p)$ mit $\pi([\gamma])(x) = x \cdot [\gamma]$ nach der Definition einer normalen Überlagerung und nach Korollar 4.2.

Definition 4.6. Sei

$$\pi : \pi_1(Y, y) \to G(p),$$
$$[\gamma] \mapsto \pi([\gamma]).$$

Proposition 4.7. *Seien* X *zusammenhängend,* Y *lokal wegzusammenhängend,* $y \in Y$, $p : X \longrightarrow Y$ *eine Galoisüberlagerung und* $x \in p^{-1}(y)$, *dann ist die Folge*

$$1 \longrightarrow \pi_1(X, x) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi} G(p) \longrightarrow 1$$

exakt.

Beweis: Siehe [**24**, Prop. 1.39].

Sei G eine endliche Gruppe, die zusammen mit der diskreten Topologie ein topologischer Raum sei. Eine stetige Operation $\lambda : G \times X \to X$ von G auf einem topologischen Raum X heißt *strikt diskontinuierlich*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, die

$$U \cap \lambda(g)(U) = \emptyset$$

für alle $g \neq 1$ in G erfüllt.

Lemma 4.8. *Jede stetige, freie Operation* $\lambda : G \times X \to X$ *einer endlichen Gruppe* G *auf einem Hausdorffraum* X *ist strikt diskontinuierlich.*

Beweis: Sei $x \in X$. Da G auf X frei operiert, gilt $\lambda(g)(x) \neq \lambda(h)(x)$ für alle $g \neq h$ in G. Weil X Hausdorff ist, gibt es für alle $g \neq 1$ in G eine Umgebung V_g von x und eine Umgebung W_g von $\lambda(g)(x)$ in X mit $V_g \cap W_g = \emptyset$. Aufgrund der Stetigkeit von $\lambda(g) : X \to X$ für alle $g \in G$ ist $U_g := V_g \cap \lambda(g^{-1})(W_g)$ eine Umgebung von x für alle $g \neq 1$ in G. Da G endlich ist, ist $U := \bigcap\limits_{g \neq 1} U_g$ eine Umgebung von x, die $U \cap \lambda(g)(U) = \emptyset$ erfüllt. $\square$

PROPOSITION 4.9. *Seien G eine endliche Gruppe und X ein zusammenhängender und lokalwegzusammenhängender topologischer Raum. Ist die Operation $\lambda : G \times X \to X$ von G auf X strikt diskontinuierlich, dann ist die Quotientenabbildung $p : X \to G\backslash X$, $p(x) = \lambda(G)(x)$, eine Galoisüberlagerung. Insbesondere stimmen G und die Gruppe der Decktransformationen von p überein.*

Für den Beweis von Proposition 4.9 siehe [**24**, Prop. 1.40 (b)].

Seien $V = \mathbb{C}^n$, G eine unitäre Spiegelungsgruppe auf V und $\mathcal{A}(G)$ die Menge aller spiegelnden Hyperebenen von G, so definiere

$$V^{reg} = V \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G)} H$$

die *Menge der regulären Vektoren in V*.

Es operiert G frei auf V^{reg}, denn sind $v \in V^{\text{reg}}$ und $g \neq 1$ in G, so bedeutet $g(v) = v$ dasselbe wie $v \in \text{Fix}(g) = \bigcap\limits_{\substack{H \in \mathcal{A}(G) \\ \text{Fix}(g) \subseteq H}} H$ nach Proposition 2.72(ii), was ein Widerspruch zu $v \in V^{\text{reg}}$ ist.

Seien $(.,.)$ ein G-invariantes Skalarprodukt auf V und $||v|| = \sqrt{(v,v)}$ für v in V die von $(.,.)$ induzierte Norm auf V. Zusammen mit der von $||.||$ induzierten Topologie sei V ein topologischer Raum.

DEFINITION 4.10. Wird ein Basispunkt $y_0 \in V^{reg}$ gewählt, so bezeichne x_0 das Bild von y_0 im Bahnenraum $G\backslash V^{reg}$ und definiere die *reine Zopfgruppe* von G auf V als

$$P(G) = \pi_1(V^{reg}, y_0)$$

und die *Zopfgruppe* von G auf V als

$$B(G) = \pi_1(G\backslash V^{reg}, x_0).$$

Weil V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, ist jede lineare Abbildung von V nach $\mathbb{C}$ stetig. Als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ ist also jede spiegelnde Hyperebene von G abgeschlossen in V. Als Komplement einer endlichen Vereinigung abgeschlossener Mengen ist V^{reg} dann offen und es sind V^{reg} nach Korollar B.18 und $G\backslash V^{reg}$ bezüglich der Quotiententopologie nach Lemma B.19 wegzusammenhängend. Insbesondere sind nun $\pi_1(V^{reg}, y_0)$ und $\pi_1(G\backslash V, x_0)$ in Definition 4.10 unabhängig von der Wahl der Basispunkte y_0 und x_0.

Nach Proposition 4.7 und Proposition 4.9 gilt nun:

PROPOSITION 4.11. *Die Folge*

$$1 \longrightarrow P(G) \xrightarrow{\pi_1(p)} B(G) \xrightarrow{\pi} G(p) \longrightarrow 1$$

ist exakt und G stimmt mit der Gruppe der Decktransformationen $G(p)$ überein.

2. Einfache Elemente

Seien $V = \mathbb{C}^n$, G eine unitäre Spiegelungsgruppe von V, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G, $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ die Grade von G und $d_1^* \geq \cdots \geq d_n^*$ die Kograde von G. Die Bahnenabbildung $\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}} : G\backslash V \to \mathbb{C}^n$, $\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}}(G \cdot v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v))$, ist bijektiv nach Proposition 2.62 und stetig. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sie auch abgeschlossen und damit ein Homöomorphismus ist.

Definition 4.12. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X *geht gegen unendlich*, falls jede kompakte Teilmenge von X nur endlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Sind X Hausdorff und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein lokalkompakter topologischer Raum, so heißt eine stetige Abbildung f von X nach Y eine *eigentliche* Abbildung, falls $f^{-1}(K)$ kompakt in X für alle kompakten Teilmengen K von Y ist.

Bemerkung 4.13. Es ist auch üblich, eine eigentliche Abbildung als eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen X und Y, sodass

$$f \times id_Z : X \times Z \to Y \times Z$$

eine abgeschlossene Abbildung für jeden topologischen Raum Z ist, zu definieren. Sind X Hausdorff und Y lokalkompakt, so sind diese und Definition 4.12 äquivalent, siehe zum Beispiel [**15**, Seite 104]. Wird für Z ein einpunktiger topologischer Raum gewählt, so folgt, dass f eine abgeschlossene Abbildung sein muss.

Seien nun $(X, \mathcal{T}_X)$ ein Hausdorff-Raum und $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein lokalkompakter topologischer Raum.

Lemma 4.14. *Sei X ein metrischer Raum. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist dann genau dann eigentlich, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die gegen unendlich gehen, auch die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y gegen unendlich geht.*

Beweis: Seien $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen unendlich geht. Würde $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen unendlich flüchten, dann gäbe es eine kompakte Teilmenge K von Y, die unendlich viele Folgenglieder von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Da $f^{-1}(K)$ kompakt ist, wäre das aber ein Widerspruch dazu, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich geht.
Seien umgekehrt $f : X \to Y$ eine Abbildung, sodass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y für jede gegen unendlich flüchtende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen unendlich geht, und $K \subseteq Y$ kompakt. Falls jede Folge in $L := f^{-1}(K)$ eine konvergente Teilfolge besitzt, ist L kompakt. Weil eine Folge genau dann gegen unendlich geht, wenn sie keine konvergente Teilfolge besitzt, muss jede Folge in L schon eine konvergente Teilfolge besitzen. $\square$

Lemma 4.15. *Die Bahnenabbildung $\omega_{G,\mathcal{F}} : G\backslash V \to \mathbb{C}^n$ ist eigentlich.*

Um Lemma 4.15 beweisen zu können, wird noch die folgende Überlegung benötigt.

Bemerkung 4.16. Durch Ersetzen der Skalarmultiplikation auf V durch

$$\lambda * v := \overline{\lambda} v$$

ergibt sich ein neuer $\mathbb{C}$-Vektorraum. Er wird hier mit $\overline{V}$ bezeichnet.

Ist $g = (g_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ ein Element in $GL(V)$ dargestellt bezüglich einer fest gewählten Basis von V über $\mathbb{C}$, so gilt

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{n,1} & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} g_{1,j} * v_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} g_{n,j} * v_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{g_{1,j}} v_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{g_{n,j}} v_j \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \overline{g_{1,1}} & \cdots & \overline{g_{1,n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{g_{n,1}} & \cdots & \overline{g_{n,n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrizen der Elemente in $GL(\overline{V})$ entsprechen also genau den Darstellungsmatrizen der Elementen in $GL(V)$ mit komplex konjugierten Einträgen.

Seien $[.,.]$ ein G-invariantes Skalarprodukt auf V, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V und $\{X_1, \dots, X_n\}$ die zugehörige Dualbasis von V^*. Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ auch eine Basis von $\overline{V}$. Bezeichnet $Y_i : \overline{V} \to \mathbb{C}, Y_i(v) = \overline{X_i(v)}$, für alle $1 \leq i \leq n$, so gilt $Y_i(\lambda * v) = \overline{X_i(\overline{\lambda} v)} = \lambda \overline{X_i(v)} = \lambda Y_i(v)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Somit ist $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ die zu $\{v_1, \dots, v_n\}$ gehörende Dualbasis von $\overline{V}^*$.

Es operiert nun $G \times G$ auf $V \times \overline{V}$ durch $(g,h) \cdot (v,w) = (g \cdot v, h * w)$ für $v, w \in V$ und $g, h \in G$.

Ist $f_i(X_1, \dots, X_n) = \sum\limits_{\alpha \in A_i} c_\alpha X^\alpha$ für eine Indexmenge $A_i \subseteq \mathbb{N}^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$ und $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ für alle $\alpha \in A_i$, so sei $g_i(Y_1, \dots, Y_n) = \sum\limits_{\alpha \in A_i} c_\alpha * Y^\alpha = \sum\limits_{\alpha \in A_i} \overline{c_\alpha} Y^\alpha$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die Menge $\{g_1, \dots, g_n\}$ homogener, G-invarianter Polynome in $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n]$ ist dann eine Menge von Basisinvarianten der unitären Spiegelungsgruppe G auf $\overline{V}$. Außerdem gilt

$$\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]^{G \times G} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n]$$

nach [**44**, Proposition 1.5.2]. Schließlich sei

$$\begin{gathered} \langle .,. \rangle : (V \times \overline{V}) \times (V \times \overline{V}) \to \mathbb{C}, \\ \langle (v,w), (v',w') \rangle = [v,v'] + \overline{[w,w']}, \end{gathered}$$

dann ist $\langle .,. \rangle$ ein $G \times G$-invariantes inneres Produkt auf $V \times \overline{V}$ und die Menge $\{(v_1,0), \dots, (v_n,0), (0,v_1), \dots, (0,v_n)\}$ ist eine Orthonormalbasis von $V \times \overline{V}$ bezüglich $\langle .,. \rangle$.

Beweis von Lemma 4.15: Es wird hier die Notation wie in Bemerkung 4.16 gewählt. Sei $R : V \to \mathbb{R}$, $R(v) = \langle (v,v), (v,v) \rangle = 2[v,v] = 2||v||^2$. Dann gilt

$$R(v) = 2 \sum_{i=1}^{n} X_i(v) \overline{X_i(v)} = 2 \sum_{i=1}^{n} X_i(v) Y_i(v).$$

Es ist also $R \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]^{G \times G}$.

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V, die gegen unendlich geht, so muss die Folge $(R(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen unendlich gehen. Weil R ein $G \times G$-invariantes Polynom in $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ ist, gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_{2n}]$ mit $R = P(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$. Somit muss auch die Folge

$$(P(f_1(x_k), \dots, f_n(x_k), g_1(x_k), \dots, g_n(x_k)))_{k \in \mathbb{N}}$$

in $\mathbb{R}$ gegen unendlich gehen und daher die Folge

$$((f_1(x_k),\dots,f_n(x_k),g_1(x_k),\dots,g_n(x_k)))_{k\in\mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}^{2n}$ gegen unendlich gehen, weil P ein Polynom ist. Da $g_i(v)=\overline{f_i(v)}$ für alle $1\le i\le n$ und für alle $v\in V$ nach Definition gilt, muss auch die Folge $(f_1(x_k),\dots,f_n(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}^n$ gegen unendlich gehen. Nach Lemma 4.14 ist $\omega_{G,\mathcal{F}}$ also eigentlich. □

LEMMA 4.17. *Die Bahnenabbildung*

$$\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}}:G\backslash V\to\mathbb{C}^n,\ \overline{\omega_{G,\mathcal{F}}}(G\cdot v)=(f_1(v),\dots,f_n(v)),$$

ist abgeschlossen.

Beweis: Nach Lemma 4.15 und Bemerkung 4.13 ist $\omega_{G,\mathcal{F}}:V\to\mathbb{C}^m$ abgeschlossen. Somit ist auch $\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}}:G\backslash V\to\mathbb{C}^m$ abgeschlossen. □

Die Bahnenabbildung $\overline{\omega_{G,\mathcal{F}}}$ ist also ein Homöomorphismus von $G\backslash V$ nach $\mathbb{C}^n$. Daher sind $\pi_1(G\backslash V,G\cdot v)$ und $\pi_1(\mathbb{C}^n,\omega_{G,\mathcal{F}}(v))$ isomorph. Ab jetzt werden $G\backslash V$ und $\mathbb{C}^n$ als topologische Räume identifiziert.

Seien $p:V\longrightarrow G\backslash V,\ p(v)=G\cdot v$, die kanonische Projektion und

$$\mathscr{H}=p\Big(\bigcup_{H\in\mathcal{A}(G)}H\Big)$$

die *Diskriminantenhyperebene von* G.

Sind $L_H\in V^*$ eine Linearform mit Kern H, $G_H=\{g\in G: H\subseteq\mathrm{Fix}(g)\}$ und $e_H=|G_H|$ für alle $H\in\mathcal{A}(G)$, so sind $\Delta_V=\prod_{H\in\mathcal{A}(G)}L_H^{e_H}\in S^G$ und somit $\mathscr{H}$ Nullstellenmenge von $\prod_{H\in\mathcal{A}(G)}L_H^{e_H}$ in $G\backslash V$. Weiters ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{F}}:\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]&\to\mathbb{C}[f_1,\dots,f_n]=S^G,\\ X_i&\mapsto f_i.\end{aligned}$$

ein Algebraisomorphismus für die Koordinatenfunktionen $X_1,\dots,X_n$ von $\mathbb{C}^n$. Definiere nun

$$\Delta_{\mathcal{F}}:=\Psi_{\mathcal{F}}^{-1}\Big(\prod_{H\in\mathcal{A}(G)}L_H^{e_H}\Big).$$

Bezeichnen N die Anzahl der Spiegelungen in G und M die der spiegelnden Hyperebenen von G, so ist $\Delta_{\mathcal{F}}$ gewichtet homogen vom Grad $N+M$ mit Gewichten $d_1,\dots,d_n$, d. h., $\Delta_{\mathcal{F}}(t^{d_1}y_1,\dots,t^{d_n}y_n)=t^{N+M}\Delta_{\mathcal{F}}(y_1,\dots,y_n)$ für alle $(y_1,\dots,y_n)$ in $\mathbb{C}^n$, denn

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{F}}(t^{d_1}f_1(\overline{v}),\dots,t^{d_n}f_n(\overline{v}))&=\Delta_{\mathcal{F}}(f_1(t\overline{v}),\dots,f_n(t\overline{v}))\\&=\prod_{H\in\mathcal{A}(G)}L_H(t\overline{v})^{e_H}\\&=\prod_{H\in\mathcal{A}(G)}t^{e_H}L_H(\overline{v})^{e_H}\\&=t^{N+M}\Delta_{\mathcal{F}}(f_1(\overline{v}),\dots,f_n(\overline{v}))\end{aligned}$$

für alle $\overline{v}$, da $\sum_{H\in\mathcal{A}(G)}e_H=\sum_{H\in\mathcal{A}(G)}(e_H-1)+\sum_{H\in\mathcal{A}(G)}1=N+M$ gilt.

Das Polynom $\Delta_{\mathcal{F}}$ besitzt noch weitere wichtige Eigenschaften. Zum Beispiel ist es reduziert, das heißt, $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]/\Delta_{\mathcal{F}}$ enthält keine nichttrivialen nilpotenten Elemente. Um dies zu zeigen, werden die folgenden zwei Lemmata benötigt:

LEMMA 4.18. *Seien $r \in G$ eine unitäre Spiegelung, $H = \mathrm{Fix}(r)$ und $\varepsilon_H = \det(r)$.*

(i): Ist $L \neq 0 \in V^*$ mit $r \cdot L = aL$ für ein $a \neq 0 \in \mathbb{C}$, so sind entweder L ein Vielfaches von L_H und $a = \varepsilon_H^{-1}$ oder $r \cdot L = L$.

(ii): Seien $L_1,\dots,L_m \in V^*$ ungleich 0 und $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{C}$, sodass $r \cdot L_i = a_i L_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq m-1$ und $r \cdot L_m = a_m L_1$ sind. Ist kein L_i ein Vielfaches von L_H, so ist $r \cdot (L_1 \cdots L_m) = L_1 \cdots L_m$.

Beweis: Nach Lemma 2.17 gibt es ein $b \in \mathbb{C}$, sodass $r \cdot L = L + bL_H$ ist. Falls $r \cdot L = aL$ für ein $a \neq 0$ ist, gilt $(a-1)L = bL_H$, woraus (i) folgt. Sind $L_1,\dots,L_m \neq 0 \in V^*$ wie in (ii), so gelten $r^m \cdot L_1 = a_1 \cdots a_m L_1$ und $r \cdot (L_1 \cdots L_m) = a_1 \cdots a_m L_1 \cdots L_m$. Ist $r^m = 1$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $r^m \neq 1$, dann sind nach (i), falls kein L_i ein Vielfaches von L_H ist, $a_1 \cdots a_m = 1$ und daher $r \cdot (L_1 \cdots L_m) = L_1 \cdots L_m$. □

Nach Bemerkung 2.9 operiert G auf $\mathcal{A}(G)$.

LEMMA 4.19. *Sind $\mathcal{O}$ eine Bahn von G in $\mathcal{A}(G)$ und r eine unitäre Spiegelung in G, dann gilt*

$$r \cdot \prod_{H \in \mathcal{O}} L_H = \begin{cases} \det(r)^{-1} \prod\limits_{H \in \mathcal{O}} L_H & \text{, falls } \mathrm{Fix}(r) \in \mathcal{O}, \\ \prod\limits_{H \in \mathcal{O}} L_H & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Für jede spiegelnde Hyperebene $H \in \mathcal{O}$ gibt es eine spiegelnde Hyperebene $\widehat{H} \in \mathcal{O}$ mit $H = r\widehat{H}$. Somit ist $\mathcal{O}$ Vereinigung einiger Bahnen der Operation der von r erzeugten, zyklischen Gruppe auf $\mathcal{A}(G)$. Ist $\mathrm{Fix}(r) \in \mathcal{O}$, dann ist die Menge $\{\mathrm{Fix}(r)\}$ eine solche Bahn und es gilt $r \cdot L_{\mathrm{Fix}(r)} = \det(r)^{-1} L_{\mathrm{Fix}(r)}$. Für eine Bahn $\{H_1,\dots,H_m\} \subseteq \mathcal{O}$ der von r erzeugten, zyklischen Untergruppe von G, die $\mathrm{Fix}(r)$ nicht enthält und deren Elemente so nummeriert sind, dass $r \cdot H_i = H_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq m-1$ und $r \cdot H_m = H_1$ gelten, gibt es für alle $1 \leq i \leq m-1$ ein $c_i \in \mathbb{C}$ mit $r \cdot L_{H_i} = c_i L_{H_{i+1}}$ und ein c_m mit $r \cdot L_{H_m} = c_m L_{H_1}$. Weil $\{H_1,\dots,H_m\}$ und $\{\mathrm{Fix}(r)\}$ disjunkt sind, ist kein L_{H_i} ein Vielfaches von L_H. Nach Lemma 4.18 ist daher $r \cdot (\prod_{i=1}^{m} L_{H_i}) = \prod_{i=1}^{m} L_{H_i}$. □

Somit kann die folgende Eigenschaft von $\Delta_{\mathcal{F}}$ bewiesen werden.

LEMMA 4.20. *Das Polynom $\Delta_{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ ist reduziert, das heißt, $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]/\Delta_{\mathcal{F}}$ enthält keine nichttrivialen nilpotenten Elemente.*

Beweis: Für jede Bahn $\mathcal{O}$ der Operation von G auf $\mathcal{A}(G)$ ist $\prod_{H \in \mathcal{O}} L_H^{e_H} = (\prod_{H \in \mathcal{O}} L_H)^{e_{\mathcal{O}}}$ G-invariant nach Lemma 4.19, da $e_H =: e_{\mathcal{O}}$ für alle $H \in \mathcal{O}$ konstant ist. Weil $L_H \in S$ für jede spiegelnde Hyperebene H ein lineares Polynom ist, ist L_H irreduzibel. Sind also $P, Q \in S^G$ mit $PQ = (\prod_{H \in \mathcal{O}} L_H)^{e_{\mathcal{O}}}$, so muss nach Lemma 4.19 entweder $P \in \mathbb{C}^*$ oder $Q \in \mathbb{C}^*$ sein. Insbesondere ist $(\Psi_{\mathcal{F}})^{-1}(\prod_{H \in \mathcal{O}} L_H^{e_H}) \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ ein irreduzibles Polynom. Somit ist $\Delta_{\mathcal{F}}$ Produkt paarweise verschiedener irreduzibler Polynome und daher reduziert. □

Sei $1 \leq i \leq n$ so, dass X_i in $\Delta_{\mathcal{F}}$ vorkommt. Weil $\Delta_{\mathcal{F}}$ reduziert ist, ist auch $\Delta_{\mathcal{F}}$ aufgefasst als Polynom $\Delta_{\mathcal{F},X_i}$ in X_i über $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n]$ reduziert. Somit ist die Diskriminante $\mathrm{Disk}(\Delta_{\mathcal{F},X_i})$ von $\Delta_{\mathcal{F},X_i}$ nicht 0.

Lemma 4.21. *Sind $\mathcal{F} = \{f_1,\ldots,f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von G, d in $\mathbb{N}$, $A(d) = \{i \in [n] : d \mid d_i\}$ und $\mathcal{J}$ das von $\{X_i : i \in [n]\backslash A(d)\}$ erzeugte Ideal in $\mathbb{C}[X_1,\ldots.X_n]$, dann ist d genau dann regulär, wenn $\Delta_{\mathcal{F}} \notin \mathcal{J}$ ist.*

Beweis: Sei ζ eine primitive d-te Einheitswurzel. Ein $g \in G$ ist genau dann ζ-regulär, wenn $V(g,\zeta) \cap V^{reg} \neq \emptyset$ ist, und d ist nach Bemerkung 3.3 genau dann regulär, wenn $\bigcup_{g\in G} V(g,\zeta) \cap V^{reg} \neq \emptyset$ gilt. Aus Proposition 3.8 folgt aber

$$\bigcup_{g\in G} V(g,\zeta) = \bigcap_{i\in[n]\backslash A(d)} V(f_i) = V\Big(\sum_{i\in[n]\backslash A(d)} (f_i)\Big),$$

wo (f_i) das von f_i erzeugte Hauptideal bezeichnet. Weil

$$\bigcup_{g\in G} V(g,\zeta) \cap V^{reg} = V\Big(\sum_{i\in[n]\backslash A(d)} (f_i)\Big)\backslash V\Big(\sum_{i\in[n]\backslash A(d)} (f_i) + \prod_{H\in\mathcal{A}(G)} L_H^{e_H}\Big)$$

ist, ist somit d genau dann regulär, wenn $\prod_{H\in\mathcal{A}(G)} L_H^{e_H} \notin \sum_{i\in[n]\backslash A(d)} (f_i)$ ist. Da $\prod_{H\in\mathcal{A}(G)} L_H^{e_H}$ in S^G ist, ist das äquivalent zu $\prod_{H\in\mathcal{A}(G)} L_H^{e_H} \notin \sum_{i\in[n]\backslash A(d)} (f_i)_{S^G}$. Insgesamt ist d genau dann regulär, wenn $\Delta_{\mathcal{F}} \notin \mathcal{J}$ ist. □

Lemma 4.22. *Sei d_j ein Grad von G, $j \in [n]$. Falls d_j regulär ist und für alle $i \in [n]$ aus $d_j|d_i$ folgt, dass $i = j$ ist, so ist $\Delta_{\mathcal{F}}$ monisch in X_j für alle Mengen von Basisinvarianten $\mathcal{F}$ von G. Der Grad von $\Delta_{\mathcal{F}}$ in X_j ist dann $\frac{N+M}{d_j}$.*

Beweis: Seien $A(d_j) = \{i \in [n] : d_j|d_i\}$, $\mathcal{J}$ das von $\{X_i : i \in [n]\backslash A(d_j)\} = \{X_1,\ldots,X_n\}\backslash\{X_j\}$ erzeugte Ideal in $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ und $\mathcal{F}$ eine Menge von Basisinvarianten von G. Da d_j regulär ist, ist nach Lemma 4.21 $\Delta_{\mathcal{F}} \notin \mathcal{J}$. Wird nun das Bild $\overline{\Delta}_{\mathcal{F}}$ von $\Delta_{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]/\mathcal{J} \cong \mathbb{C}[X_j]$ betrachtet, dann ist $\overline{\Delta}_{\mathcal{F}} \neq \overline{0}$ gewichtet homogen vom Grad $N+M$ mit Gewicht d_j. Deswegen sind $\overline{\Delta}_{\mathcal{F}} = cX_j^{\frac{N+M}{d_j}}$ für ein $c \neq 0 \in \mathbb{C}$ und schließlich, weil $\Delta_{\mathcal{F}}$ gewichtet homogen vom Grad $N+M$ mit Gewichten $d_1,\ldots,d_n$ ist, $\Delta_{\mathcal{F}}$ monisch in X_j vom Grad $\frac{N+M}{d_j}$. □

Seien W eine wohlerzeugte Spiegelungsgruppe, $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ die Grade von W und $d_1^* \geq \cdots \geq d_n^* \geq 0$ die Kograde von W. Weil W irreduzibel ist, muss $d_n^* = 0$ und $d_i^* > 0$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ gelten. Außerdem ist d_n regulär nach Satz 3.28. Somit ist für jede Menge $\mathcal{F}$ von Basisinvarianten von G die Diskriminante $\Delta_{\mathcal{F}}$ monisch in X_n vom Grad n nach Lemma 4.22, da $N+M = nd_n$ nach Satz 3.27 gilt.

Lemma 4.23. *Seien $\mathcal{F} = \{f_1,\ldots,f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von W und Q_V die Diskriminantenmatrix von V wie in Definition 2.74, dann gibt es eine S^W-Basis ξ von $(S\otimes V)^W$, sodass*

$$Q_\xi := \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}(Q_V) = Q_1X_n + Q_0$$

ist, wobei Q_1 eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen in $\mathbb{C}$ ungleich 0 und Q_0 eine Matrix in $M_n(\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_{n-1}])$ sind.

Beweis: Seien $\{v_1,\ldots,v_n\}$ eine Basis von V und $\{X_1,\ldots,X_n\}$ die Dualbasis von V^*, dann ist $\mathcal{B} = \{df_1,\ldots,df_n\}$ eine S^W-Basis von $(S\otimes V^*)^W$ nach Korollar 2.90, wobei

$$df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \otimes X_j$$

für alle $i \in [n]$ ist. Wähle eine S^W-Basis $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ von $(S \otimes V)^W$, sodass ξ_i homogen vom Grad $d_i^* + 1$ für alle i ist. Nach Proposition 2.45 gibt es eine solche. Für alle $i \in [n]$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $A_{i,j} \in \mathcal{H} \subseteq S^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$, sodass

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \otimes v_j$$

ist, wobei die $A_{i,j}$ homogen vom Grad $d_i^* + 1$ für alle $i, j \in [n]$ sind. Der (i,j)-te Eintrag der Diskriminantenmatrix Q_V von V ist dann gleich $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{i,k} \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \in S^W$ und somit homogen vom Grad $d_i^* + d_j$. Definiere nun

$$q_{i,j} = \Psi_{\mathcal{F}}^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \Big)$$

für alle $i, j \in [n]$. Weil W wohlerzeugt ist, gilt $d_i^* + d_j \leq d_1^* + d_n = 2d_n - d_1 < 2d_n$ für alle $i, j \in [n]$ nach Satz 3.27, da $d_1 > 0$ ist. Somit ist der Grad von $q_{i,j}$ in X_n höchstens 1 und es ergibt sich eine Darstellung $Q_\xi = Q_1 X_n + Q_0$ mit Matrizen $Q_1, Q_0 \in M_n(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}])$.

Falls $i > j$ und $d_i > d_j$ sind, so müssen $d_i^* + d_j < d_i^* + d_i = d_n$ und damit der (i,j)-te Eintrag von Q_1 gleich 0 sein.
Sind $i > j$ und $d_j = d_{j+1} = \cdots = d_{i-1} = d_i$, dann sind $d_k^* + d_l = d_n$ und daher der (k,l)-te Eintrag von Q_1 aus $\mathbb{C}$ für alle $j \leq k, l \leq i$. Deswegen kann der entsprechende Block in Q_1 mittels Gaußelimination in eine obere Dreiecksgestalt gebracht werden.

Es gibt also eine Basis ξ von $(S \otimes V)^W$, sodass Q_1 eine obere Dreiecksmatrix ist. Ist $i = j$, dann gilt $d_i + d_i^* = d_n$. Daher muss der (i,i)-te Eintrag von Q_1 aus $\mathbb{C}$ sein. Weil nach Beispiel 2.82 die Determinante von Q_V gleich $\prod\limits_{H \in \mathcal{A}(G)} L_H^{e_H}$ ist, ist $\Delta_{\mathcal{F}}$ die Determinante von Q_ξ. Da $\Delta_{\mathcal{F}}$ monisch in X_n vom Grad n ist, müssen die Diagonaleinträge in Q_1 ungleich 0 sein. $\square$

Korollar 4.24. *Ist $\mathcal{F}$ eine Menge von Basisinvarianten von W, so gibt eine S^W-Basis ξ von $(S \otimes V)^W$, sodass*

$$Q_\xi = X_n I_n + Q_0$$

für eine Matrix $Q_0 \in M_n(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}])$ ist.

Beweis: Nach Lemma 4.23 gibt es eine S^W-Basis ξ von $(S \otimes V)^W$, sodass $Q_\xi = Q_1 X_n + Q_0$ für eine obere Dreiecksmatrix Q_1 mit Diagonaleinträgen in $\mathbb{C}$ ungleich 0 und eine Matrix Q_0 in $M_n(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}])$ ist. Nun ist aber Q_1 invertierbar in $M_n(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}])$. Ist $i < j$, so muss wegen $d_i^* + d_j = d_n + (d_j - d_i)$ der (i,j)-te Eintrag in Q_1 und in Q_1^{-1} entweder 0 oder homogen vom Grad $d_j - d_i$ sein. Durch Q_1^{-1} ist also eine Basiswechselmatrix für $(S \otimes V)^W$ gegeben, sodass für die so erhaltene Basis $\xi' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ gilt, dass ξ_i' homogen vom Grad $d_i^* + 1$ für alle i ist. Schließlich ist $Q_{\xi'} = Q_1^{-1} Q_\xi = X_n I_n + Q_1^{-1} Q_0$. $\square$

KOROLLAR 4.25. *Es gibt eine Menge von Basisinvarianten $\mathcal{F}$ von W, sodass*

$$\Delta_{\mathcal{F}}(X_1, \dots, X_n) = X_n^n + \alpha_2(X_1, \dots, X_{n-1})X_n^{n-2} + \dots + \alpha_n(X_1, \dots, X_{n-1}) \tag{16}$$

für Polynome $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ gilt.

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von W. Die Spur von Q_V ist ein homogenes Element in S^W vom Grad d_n. Wird f_n durch die Spur von Q_V in $\mathcal{F}$ ersetzt, so ist die neue Menge $\mathcal{F}'$ eine Menge von Basisinvarianten von W und es gibt nach Korollar 4.24 eine S^W-Basis ξ von $(S \otimes V)^W$, sodass $Q_\xi = (\overline{\omega_{W,\mathcal{F}'}}^*)^{-1}(Q_V) = X_n I_n + Q_0$ für eine Matrix $Q_0 \in M_n(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n])$ mit $\mathrm{Spur}(Q_0) = 0$ gilt. Die Behauptung folgt dann wegen $\Delta_{\mathcal{F}'} = \det(X_n I_n + Q_0) = X_n^n + \mathrm{Spur}(Q_0)X_n^{n-1} + \dots + \det(Q_0)$. □

Weil $\Delta_{\mathcal{F}}$ für jede Menge von Basisinvarianten $\mathcal{F}$ gewichtet homogen vom Grad nd_n mit Gewichten $d_1, \dots, d_n$ ist, muss jedes α_i in (16) gewichtet homogen vom Grad id_n mit Gewichten $d_1, \dots, d_{n-1}$ sein.

Seien $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ nun eine Menge von Basisinvarianten von W, sodass (16) gilt, und $W \backslash V$ und $Y \times \mathbb{C}$ als topologische Räume durch den Homöomorphismus $\overline{\omega_{W,\mathcal{F}}} : W \backslash V \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\overline{\omega_{W,\mathcal{F}}}(\overline{v}) = (f_1(\overline{v}), \dots, f_n(\overline{v}))$ identifiziert, wo $Y = \mathbb{C}^{n-1}$ bezeichnet. Außerdem seien $\mathrm{proj}_1 : \mathbb{C}^n = Y \times \mathbb{C} \longrightarrow Y$ die Projektion auf Y und $L_y = \mathrm{proj}_1^{-1}(y)$ die Faser von $y \in Y$.

DEFINITION 4.26. Die Menge $\mathcal{K} = \mathrm{proj}_1(V(\mathrm{Disk}_{X_n}(\Delta_{\mathcal{F}}))) \subseteq Y$ heißt der *Gabelungsort* von $\Delta_{\mathcal{F}}$ und ein $y \in Y \backslash \mathcal{K}$ heißt *generisch.*

Weil $\mathrm{Disk}_{X_n}(\Delta_{\mathcal{F}})$ nicht Null ist, da $\Delta_{\mathcal{F}}$ reduziert ist, ist die Menge der generischen Punkte dicht in Y. Für ein festes $y \in Y$ ist $\Delta_{\mathcal{F}}(y, X_n)$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{C}[X_n]$ vom Grad n und besitzt daher genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$, wobei diese entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden. Sind $x_1, \dots, x_n$ die Nullstellen von $\Delta_{\mathcal{F}}$ für ein festes $y \in Y$, so gilt

$$\Delta_{\mathcal{F}}(y, X_n) = \prod_{i=1}^{n}(X_n - x_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma_{n-i}(x_1, \dots, x_n)X_n^i. \tag{17}$$

Hier bezeichnet $\sigma_k(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} x_{j_1} \cdots x_{j_k}$ die k-te elementarsymmetrische Funktion für alle $0 \le k \le n$, wobei $\sigma_0(x_1, \dots, x_n) = 1$ ist. Somit muss $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ gelten, da 0 der Koeffizient von X_n^{n-1} in $\Delta_{\mathcal{F}}$ sein muss nach Korollar 4.25.

Es wirkt S_n auf $\mathbb{C}^n$ durch Permutieren der Koordinaten. Der Bahnenraum $S_n \backslash \mathbb{C}^n$ sei zusammen mit der Quotiententopologie bezüglich der kanonischen Projektion von $\mathbb{C}^n$ nach $S_n \backslash \mathbb{C}^n$ ein topologischer Raum. Da die Elemente von $S_n \backslash \mathbb{C}^n$ genau den n-elementigen Multimengen mit Elementen in $\mathbb{C}$ entsprechen, wird jede Bahn eines $(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathbb{C}^n$ mit $\boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}}$ bezeichnet. Sind $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ nach möglicher Umnummerierung die paarweise verschiedenen Elemente in $\boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}}$ mit $x_1 < \dots < x_k$, dann heißt $(x_1, \dots, x_k)$ der *geordnete Träger* von $\boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}}$.

Sei nun E_n die Menge aller Bahnen $\boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}}$ in $S_n \backslash \mathbb{C}^n$, sodass $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0$ gilt. Es gelten dann $\mathbb{C}[S_n \backslash \mathbb{C}^n] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{S_n} = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ aufgefasst als Koordinatenring der algebraischer Varietäten $S_n \backslash \mathbb{C}^n$ nach [**22**, S. 338-346] und daher $\mathbb{C}[E_n] = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]/\sigma_1 = \mathbb{C}[\sigma_2, \dots, \sigma_n]$ ebenfalls aufgefasst als Koordinatenring der affinen algebraischen Varietät E_n. Der durch $\sigma_i \mapsto \alpha_i$ für alle $1 \le i \le n-1$ eindeutig bestimmte Homomorphismus von $\mathbb{C}[E_n]$ nach $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ für $\alpha_2, \dots, \alpha_n$

aus (16) ergibt mit (17) einen Morphismus affiner algebraischer Varietäten

$$LL : Y \longrightarrow E_n,$$
$$LL(y) = \boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}},$$

wobei $\boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}}$ die Multimenge der Nullstellen von $\Delta_{\mathcal{F}}(y, X_n)$ für gegebenes $y \in Y$ aufgefasst als Element in E_n ist. Siehe zum Beispiel [**27**, S. 26-27]. Die Menge der Nullstellen von $\Delta_{\mathcal{F}}$ in $Y \times \mathbb{C}$ entspricht genau dem Bild der Menge $\bigcup_{H \in \mathcal{A}(W)} H$ unter der kanonischen Projektion in $W \backslash V$. Dieser Morphismus heißt der *Lyashko-Looijenga-Morphismus.*

Ein $y \in Y$ ist also genau dann generisch, wenn $LL(y)$ aus paarweise verschiedenen Punkten besteht. Bezeichnet E_n^{reg} die Menge aller n-elementigen Mengen mit Elementen in $\mathbb{C}$, so ist die Einschränkung des Lyashko-Looijenga-Morphismus' auf die Menge der generischen Punkte

$$LL : Y \backslash \mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n^{reg}$$

nach [**9**, Theorem 5.3] eine Überlagerung.

Definition 4.27. Für $y \in Y$ sei

$$U_y = \{(y, z) \in Y \times \mathbb{C} : \text{Für } LL(y) = \boldsymbol{\{}x_1, \dots, x_n\boldsymbol{\}}, \text{ folgt für alle } i \text{ in } [n] \text{ aus} \\ \mathrm{Re}(x_i) = \mathrm{Re}(z) \text{ stets } \mathrm{Im}(x_i) < \mathrm{Im}(z).\}$$

und sei

$$\mathcal{U} = \bigcup_{y \in Y} U_y.$$

Lemma 4.28. *Die Menge $\mathcal{U}$ ist kontrahierbar.*

Beweis: Seien $\beta : Y \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\beta(y) = \max\{\mathrm{Im}(x_i) : LL(y) = \{x_1, \dots, x_n\}\} + 1,$$

und $\Phi_t : Y \times \mathbb{C} \longrightarrow Y \times \mathbb{C}$ für $t \in [0, 1]$,

$$\Phi_t(y, z) = \begin{cases} (y, z) & \text{, falls } \mathrm{Im}(z) \geq \beta(y), \\ (y, \mathrm{Re}(z) + i(\mathrm{Im}(z) + t(\beta(y) - \mathrm{Im}(z)))) & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann sind β stetig und, falls $(y, z) \in \mathcal{U}$, so auch $\Phi_t((y, z)) \in \mathcal{U}$ für alle $t \in [0, 1]$. Somit ist $\Phi : [0, 1] \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U},\ \Phi(t, (y, z)) = \Phi_t((y, z))$, eine Homotopie, sodass

$$\Phi|_{[0,1] \times \bigcup_{y \in Y} \{(y,z) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Im}(z) \geq \beta(y)\}} = id|_{[0,1] \times \bigcup_{y \in Y} \{(y,z) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Im}(z) \geq \beta(y)\}},$$
$$\Phi(0, (y, z)) = (y, z) \text{ und}$$
$$\mathrm{Im}(\Phi(1, (y, z))) \geq \beta(y) \text{ für alle } (y, z) \in W \backslash V$$

gelten. Daher ist Φ ein Retrakt von $\mathcal{U}$ auf $\bigcup_{y \in Y} \{(y, z) : \mathrm{Im}(z) \geq \beta(y)\}$. Weil $\bigcup_{y \in Y} \{(y, z) : \mathrm{Im}(z) \geq \beta(y)\}$ ein Faserbündel über dem kontrahierbaren Raum Y mit kontrahierbaren Fasern ist, muss $\bigcup_{y \in Y} \{(y, z) : \mathrm{Im}(x) \geq \beta(y)\}$ nach [**39**, Proposition 3.5] kontrahierbar sein. Somit ist $\mathcal{U}$ kontrahierbar. $\square$

Weil $\mathcal{U}$ kontrahierbar ist, ist $\mathcal{U}$ einfach zusammenhängend, das heißt, es sind alle Wege in $\mathcal{U}$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten homotop und $\mathcal{U}$ wegzusammenhängend.

Sind u und u' in $\mathcal{U}$, dann gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen in $\mathcal{U}$ mit Anfangspunkt u und Endpunkt u'. Ist γ ein Repräsentant dieser Homotopieklasse, so ist $\phi_u^{u'} : \pi_1(W\backslash V^{reg}, u) \to \pi_1(W\backslash V^{reg}, u')$, $\phi_u^{u'}([\alpha]) = [\gamma^-] \cdot [\alpha] \cdot [\gamma]$, ein Isomorphismus. γ^- bezeichnet hier die rückwärts durchlaufene Kurve γ. Außerdem gelten für alle $u, u', u'' \in \mathcal{U}$

(i) $\phi_u^u = id_{\pi_1(W\backslash V^{reg},u)}$ und
(ii) $\phi_{u'}^{u''} \circ \phi_u^{u'} = \phi_u^{u''}$,

$\{\phi_u^{u'}\}_{u,u'\in\mathcal{U}}$ ist also ein sogenanntes *transitives System* von Gruppen. Durch ein transitives System von Gruppen ergibt sich eine neue Gruppe, der sogenannte *transitive Limes*, der hier mit $\pi_1(W\backslash V^{reg},\mathcal{U})$ bezeichnet wird. Die Elemente von $\pi_1(W\backslash V^{reg},\mathcal{U})$ sind Abbildungen $g : \mathcal{U} \to \prod_{u\in\mathcal{U}} \pi_1(W\backslash V^{reg}, u)$, sodass $g(u) \in \pi_1(W\backslash V^{reg}, u)$ und $g(u') = \phi_{u'}^{u}(g(u))$ für alle $u, u' \in \mathcal{U}$ gelten. Sind g und g' in $\pi_1(W\backslash V^{reg},\mathcal{U})$ und $u \in \mathcal{U}$, so ist $\pi_1(W\backslash V^{reg},\mathcal{U})$ zusammen mit $(g \cdot g')(u) = g(u)\cdot g'(u)$ eine Gruppe. Ist $u \in \mathcal{U}$, so sind durch die Wahl von $g(u) \in \pi_1(W\backslash V^{reg}, u)$ schon alle weiteren Funktionswerte von g festgelegt. Somit ist die Projektion der Abbildungen in $\pi_1(W\backslash V^{reg},\mathcal{U})$ auf $\pi_1(W\backslash V^{reg}, u)$ ein Isomorphismus von Gruppen.

Sei ab nun

$$B(W) = \pi_1(W\backslash V^{\mathrm{reg}},\mathcal{U}).$$

Seien $u \in \mathcal{U}$ und $v \in L_u$. Ist u' ein weiteres Element aus $\mathcal{U}$, so gibt es einen Weg γ in $\mathcal{U}$ mit Anfangspunkt u und Endpunkt u'. Nach Satz 4.3 gibt es einen eindeutig bestimmten Weg α in V^{reg} mit Anfangspunkt v, sodass $p \circ \alpha = \gamma$ ist. Da $\mathcal{U}$ kontrahierbar ist, ist die Homotopieklasse von α mit festem Anfangs- und Endpunkt unabhängig von der Wahl von γ nach Satz 4.3. Bezeichnet $s_v(u')$ den eindeutig bestimmten Endpunkt von α, so sind $(p \circ s_v)(u') = u'$ und $s_v : \mathcal{U} \to V^{reg}$ stetig, das heißt, s_v ist ein Schnitt von $\mathcal{U}$. Wird $\mathcal{U}' = s_v(\mathcal{U})$ gesetzt, so sind $\mathcal{U}'$ einfach zusammenhängend,

$$P(W) = \pi_1(V^{reg},\mathcal{U}')$$

und $1 \longrightarrow P(W) \xrightarrow{\pi_1(p)} B(W) \xrightarrow{\pi} W \longrightarrow 1$ eine kurze exakte Folge.

DEFINITION 4.29. Sei $T = (y, z, L) \in Y \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $(y, z) \in \mathcal{U}$, $(y, z + tL) \in W\backslash V^{reg}$ für alle $t \in [0, 1]$ und $(y, z + L) \in \mathcal{U}$ sind, dann heißt T ein *Tunnel.* Ist T ein Tunnel, so definiere

$$b_T : [0, 1] \longrightarrow W\backslash V^{reg} \text{ durch } b_T(t) = (y, z + tL).$$

Ein Element $[b] \in B(W) = \pi_1(W\backslash V^{\mathrm{reg}},\mathcal{U})$ heißt *einfach*, falls es einen Tunnel T gibt, sodass $[b] = [b_T]$ ist. Mit $S(W)$ wird die Menge aller einfachen Elemente in $B(W)$ bezeichnet.

Es gelte nun $z < z'$ für alle $z, z' \in \mathbb{C}$, falls entweder $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Re}(z')$ oder $\mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(z')$ im Fall $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ gilt. Dadurch ist eine Ordnung auf $\mathbb{C}$ gegeben.

Seien $y \in Y$ und $(x_1, \ldots, x_k)$ der geordnete Träger von $LL(y)$. Ein x_j heißt *tief*, falls entweder $j = 1$ oder $j > 1$ und $\mathrm{Re}(x_{j-1}) < \mathrm{Re}(x_j)$ gilt. Sind $x_{j_1} < \cdots < x_{j_l}$ die tiefen Punkte von $(x_1, \ldots, x_k)$, so heißt $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l})$ das *tiefe Label von $LL(y)$*.

Für $j \in [k]$ sei

$$I_j = \begin{cases} (x_j - i\infty, x_j) & \text{, falls } x_j \text{ tief ist,} \\ (x_{j-1}, x_j) & \text{, sonst,} \end{cases}$$

wobei $(x_j - i\infty, x_j) = \{z \in U_y : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x_j) \text{ und } \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(x_j)\}$ und $(x_{j-1}, x_j) = \{z \in U_y : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(x_j) \text{ und } \mathrm{Im}(x_{j-1}) < \mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(x_j)\}$ sind.

Ist T_i ein Tunnel in U_y, der I_i und kein I_j, $j \neq i$, schneidet, so heißt $s_i = [b_{T_i}] \in B(W)$ ein *Elementartunnel*. Sind nun $s_1, \ldots, s_k$ Elementartunnel, so wird $lbl(y) = (s_1, \ldots, s_k)$ geschrieben.

Nach (16) ist (0) der geordnete Träger von $LL(0)$. Es bezeichne δ jenes einfache Element in $B(W)$, sodass

$$lbl(0) = (\delta) \tag{18}$$

gilt. Sei nun $v \in V^{reg}$ so, dass $\overline{\omega_{W,\mathcal{F}}}(\overline{v}) \in L_0$ ist, wo $L_0 = \{0\} \times \mathbb{C}$ die Faser von $0 \in Y$ bezeichnet. Weil δ einen beliebigen Kreis um 0 in L_0 als Repräsentanten haben kann, sei

$$t \mapsto (0, \ldots, 0, e^{2\pi i t} f_n(\overline{v}))$$

ein Repräsentant von δ. Weil $e^{2\pi i t} f_n(\overline{v}) = f_n(e^{\frac{2\pi i t}{d_n}} \overline{v})$ gilt, ist dieser Kreis das Bild der Kurve $t \mapsto e^{\frac{2\pi i t}{d_n}} \overline{v}$ in $W \backslash V^{reg}$ unter der bijektiven Abbildung $\overline{\omega_{W,\mathcal{F}}}$. Nach Satz 4.3 gibt es einen eindeutig bestimmten Weg τ in V^{reg} mit Anfangspunkt v, der $(p \circ \tau)(t) = e^{\frac{2\pi i t}{d_n}} \overline{v}$ erfüllt. Weil $p(e^{\frac{2\pi i t}{d_n}} v) = e^{\frac{2\pi i t}{d_n}} \overline{v}$ für alle $t \in [0,1]$ gilt, muss $\tau(t) = e^{\frac{2\pi i t}{d_n}} v$ sein.

Lemma 4.30. *Das Bild von δ unter π in W ist $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-regulär.*

Beweis: Ist $v \in V^{reg}$ wie oben, so ist $\pi(\delta)(v) = e^{\frac{2\pi i}{d_n}} v$. Das heißt aber nichts anderes als $v \in V(\pi(\delta), e^{\frac{2\pi i}{d_n}}) \cap V^{reg}$. Somit ist $\pi(\delta)$ ein $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-reguläres Element in W. □

Definition 4.31. Sind $y \in Y$ und $T = (y, z, L)$ ein Tunnel, so ist eine *T-Umgebung* von y eine wegzusammenhängende Umgebung Ω von y in Y, sodass für alle $y' \in \Omega$ das Tripel (y', z, L) ein Tunnel ist.

Bemerkung 4.32. Sind $y \in Y$, $LL(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $T = (y, z, L)$ ein Tunnel, so gibt es eine offene Umgebung U von $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in E_n, sodass das Tripel (y', z, L) für alle $y' \in LL^{-1}(U)$ ein Tunnel ist. Nun ist aber $LL^{-1}(U)$ offen in Y und, da Y lokal wegzusammenhängend ist, sind $LL^{-1}(U)$ lokal wegzusammenhängend und die Wegzusammenhangskomponenten von $LL^{-1}(U)$ offen. Sei Ω jene Wegzusammenhangskomponente von $LL^{-1}(U)$, die y enthält, dann ist Ω eine T-Umgebung von y.

Lemma 4.33 (**Hurwitz-Regel**). *Sind $T = (y, z, L)$ ein Tunnel, $s = [b_T]$ und Ω eine T-Umgebung von y, dann ist $s = [b_{T'}]$ für alle $T' = (y', z, L)$ mit $y' \in \Omega$.*

Beweis: Sei $y' \in \Omega$. Weil Ω wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg γ in Ω mit Anfangspunkt y und Endpunkt y'. Definiere nun $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow W \backslash V^{reg}$ durch $H(t,s) = (\gamma(s), z + tL)$. Für jedes s ist $(\gamma(s), z, L)$ nach Definition von Ω ein Tunnel. Somit ist $[s] = [b_{T'}]$. □

Lemma 4.34. *Ist $s \in \pi_1(W \backslash V^{reg}, \mathcal{U})$ ein einfaches Element, so gibt es ein $y \in Y$ mit $LL(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und ein $m \in \mathbb{N}$, sodass nach möglicher Umnummerierung $Re(x_i) < Re(x_{i+1})$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ und $s = s_1 \cdots s_m$ für $lbl(y) = (s_1, \cdots, s_n)$ sind.*

Beweis: Seien $T' = (y', z, L)$ ein Tunnel, sodass $s = [b'_T]$ ist, und Ω eine T'-Umgebung von y'. Weil für die Diskriminante $Disk_{X_n}\Delta_{\mathcal{F}} \neq 0$ gilt, liegen die generischen Punkte dicht in Y. Es gibt also ein generisches y'' in Ω. Nach der Hurwitz-Regel gilt daher $s = [b_{T''}]$ für $T'' = (y'', z, L)$. Da die Einschränkung des Lyashko-Looijenga-Morphismus auf die Menge der generischen Punkte eine Überlagerung ist, gibt es eine Umgebung U von $LL(y'')$ in E_n^{reg}, sodass $LL^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} V_i$ und $LL|_{V_i} : V_i \to U$ ein Homöomorphismus für paarweise disjunkte, offene Mengen in $Y \backslash \mathcal{K}$ sind. Seien nun i' jenes Element der Indexmenge $\mathcal{I}$, das $y'' \in V_{i'}$ erfüllt, und $LL(y'') = \{x'_1, \dots, x'_n\}$. Es kann eine genügend kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ gewählt werden, sodass $\{x'_1 + t\frac{\varepsilon}{n-1}, \dots, x'_{n-1} + t\frac{\varepsilon}{n-1}, x'_n - t\varepsilon\} \in U$ und das Tripel $(LL|_{V_{i'}}^{-1}(\{x'_1 + t\frac{\varepsilon}{n-1}, \dots, x'_{n-1} + t\frac{\varepsilon}{n-1}, x'_n - t\varepsilon\}), z, L)$ ein Tunnel für alle $t \in [0,1]$ sind. Seien $0 < \epsilon \leq \varepsilon$, $x''_1 = x'_1 + \frac{\epsilon}{n-1}, \dots, x''_{n-1} = x'_{n-1} + \frac{\epsilon}{n-1}, x''_n = x'_n - \epsilon$ und $y''' = LL|_{V_{i'}}^{-1}(\{x''_1, \dots, x''_n\})$ so, dass $\mathrm{Re}(x''_i) < \mathrm{Re}(x''_{i+1})$ für alle $1 \leq i \leq n-1$ gilt. Da die Abbildung $t \mapsto LL|_{V_{i'}^{-1}}(\{x'_1 + t\epsilon, \dots, x'_n + t\epsilon\})$ ein Weg von y'' nach y''' in $V_{i'}$ ist, liegen y'' und y''' in derselben Wegzusammenhangskomponente von $V_{i'}$. Somit sind y''' in einer T''-Umgebung von y'' enthalten und $s = [b_{T'''}]$ für $T''' = (y''', z, L)$ nach der Hurwitz-Regel.

Wird $\{x''_1, \dots, x''_n\}$ entlange eines Weges in E_n^{reg} wie zum Beispiel in Abbildung 1

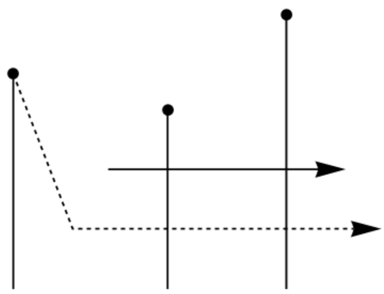

ABBILDUNG 1. Beispiel für das Verändern von $\{x''_1, \dots, x''_n\}$

verändert, so gibt es eine endliche Überlagerung offener Mengen $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ dieses Weges und T''-Umgebungen $V_1, \dots, V_k$ in Y, sodass $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, $LL|_{V_i} : V_i \to U_i$ ein Homöomorphismus für alle $1 \leq i \leq k-1$ und $y''' \in V_1$ sind. Das Urbild dieses Weges in der T''-Umgebung $\bigcup_i = 1^k V_i$ von y''' ist ein Weg, der y''' mit dem gewünschten y verbindet. Nach der Hurwitz-Regel gilt daher $s = [b_T]$ für den Tunnel $T = (y, z, L)$ und es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $s = s_1 \cdots s_m$ für $lbl(y) = (s_1, \dots, s_n)$. $\square$

LEMMA 4.35. *Sind $y \in Y$ und $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ das tiefe Label von y, so ist $\delta = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$.*

Beweis: Ein Tunnel T, der $\mathcal{I}_{i_1}, \dots, \mathcal{I}_{i_k}$ schneidet, repräsentiert $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$. Außerdem sei $T = (y, z, L)$ so gewählt, dass $\mathrm{Im}(z) < 0$ gilt. Dann gibt es T-Umgebungen Ω von y und Ω' von 0, die generische Punkte enthalten. Die Einschränkung des Lyashko-Looijenga-Morphismus auf die Menge der generischen Punkte ist eine Überlagerung. Weil ein generischer Punkt in Ω und ein generischer Punkt in Ω' so durch einen Weg verbunden werden können, dass dieser in einer T-Umgebung von y enthalten ist, befindet sich 0 in einer T-Umgebung von y. Somit gilt $\delta = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ nach der Hurwitz-Regel. $\square$

Sei $H \in \mathcal{A}(W)$. Wähle ein $x_0 \in H$ und ein $r > 0$, sodass die offene Kugel $B_r(x_0)$ mit Radius r um x_0 keine weitere spiegelnde Hyperebene von W schneidet. Weiters sei nun $x_H \in B_r(x_0) \cap V^{reg}$.

Für ein $t \in [0,1]$ und eine unitäre Spiegelung r_H mit $H = \mathrm{Fix}(r_H)$ und $\varepsilon_H = \det(r_H)$ eine e_H-te primitive Einheitswurzel definiere

$$\sigma_{H,x_H}(t) = \varepsilon_H^t \mathrm{pr}_H^\perp(x_H) + \mathrm{pr}_H(x_H),$$

dann sind $\sigma_{H,x_H}(0) = x_H$, $\sigma_{H,x_H}(1) = r_H(x_H)$ und $\sigma_{H,x_H}(t) \in B_r(x_0) \cap V^{reg}$. Sei nun $v \in V^{reg}$, sodass $\overline{v} \in \mathcal{U}$ ist. Weil jedes Element in V^{reg} von keinem Element ungleich der Identität aus W fixiert wird, ist $r_H(v) \in V^{reg}$. Da V^{reg} wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow V^{reg}$ mit Anfangspunkt v und Endpunkt $r_H(v)$, womit der Weg

$$\sigma_{H,\gamma} = (r_H \circ \gamma^{-1}) \circ \sigma_{H,x_H} \circ \gamma$$

in V^{reg} mit Anfangspunkt v und Endpunkt $r_H(v)$ definiert werden kann. Insbesondere sind der Anfangs- und Endpunkt von $\sigma_{H,\gamma}$ in derselben W-Bahn in V^{reg}. Das Bild von $\sigma_{H,\gamma}$ in $W \backslash V^{reg}$ ist also ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt in $\mathcal{U}$. Die Homotopieklasse

$$r_{H,\gamma} = [p \circ \sigma_{H,\gamma}] = \pi_1(p)(\sigma_{H,\gamma}) \in \pi_1(W \backslash V^{reg}, \mathcal{U})$$

von $\sigma_{H,\gamma}$ heißt *Zopfspiegelung* und es gilt $\pi(r_{H,\gamma})(v) = r_H(v)$. Weil kein Element in V^{reg} von einem Element ungleich der Identität fixiert werden kann, muss

$$\pi(r_{H,\gamma}) = r_H$$

sein.

Lemma 4.36. *Ist $y \in Y$, sodass $LL(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $Re(x_i) < Re(x_{i+1})$ für alle i gilt, so ist $lbl(y) = (s_1, \dots, s_n)$ ein n-Tupel von Zopfspiegelungen.*

Beweis: Ein Elementartunnel b_{T_i} hat einen kleinen Kreis um x_i als Repräsentanten. Weil $Re(x_i) < Re(x_{i+1})$ für alle i gilt, sind $x_1, \dots, x_n$ generische Punkte. Insbesondere liegt jedes x_i genau in einer Bahn einer spiegelnden Hyperebene. Somit ist jedes $s_i = b_{T_i}$ eine Zopfspiegelung. □

Lemma 4.37. *Es gibt unitäre Spiegelungen $r_1, \dots, r_n$ in W, sodass $\pi(\delta) = r_1 \cdots r_n$ ist.*

Beweis: Ist $y \in Y$, sodass $LL(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ mit $Re(x_i) < Re(x_{i+1})$ für alle i ist, dann ist $lbl(y) = (s_1, \dots, s_n)$ das tiefe Label von y und nach Lemma 4.35 ist $\delta = s_1 \cdots s_n$. Aus Lemma 4.36 folgt nun, dass $lbl(y)$ ein n-Tupel von Zopfspiegelungen ist. Insgesamt ist also $\pi(\delta)$ das Produkt von n Spiegelungen. □

KAPITEL 5

Das Phänomen des zyklischen Siebens für nichtkreuzende Partitionen

1. Nichtkreuzende Partitionen

Der Begriff nichtkreuzend wurde erstmals von G. Kreweras in *Sur les partitions non croisées d'un cycle* ([**29**]) erwähnt. Die Idee nichtkreuzender Partitionen tauchte auch schon davor zum Beispiel bei H.W. Becker ([**5**], [**6**]) und T. Motzkin ([**37**]) auf.

Definition 5.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}$ eine Partition von $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Zwei disjunkte Blöcke P und Q von $\mathcal{P}$ *kreuzen* sich, wenn es natürliche Zahlen $1 \leq a < b < c < d \leq n$ mit $\{a, c\} \subseteq P$ und $\{b, d\} \subseteq Q$ gibt. Kreuzen sich keine disjunkten Blöcke von $\mathcal{P}$, so heißt $\mathcal{P}$ eine *nichtkreuzende Partition* (*vom Typ A*) von $[n]$, sonst *kreuzende Partition* von $[n]$. Die Menge aller nichtkreuzender Partitionen von $[n]$ wird mit $\mathrm{NC}(n)$ bezeichnet.

Werden auf einem Kreis n Punkte eingezeichnet und im Uhrzeigersinn von 1 bis n nummeriert, so ist die Bedingung, dass sich zwei disjunkte Blöcke P und Q einer Partition $\mathcal{P}$ von $[n]$ kreuzen, äquivalent dazu, dass sich die konvexen Hüllen von P und Q schneiden.

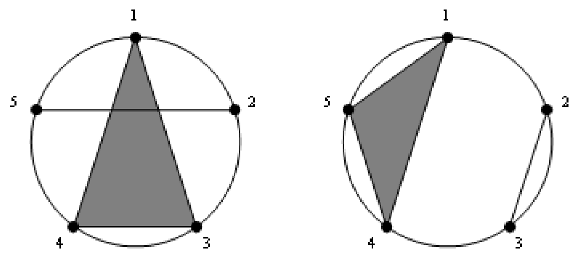

Abbildung 1. Eine kreuzende und eine nichtkreuzende Partition von [5].

Satz 5.2 (**Germain Kreweras** ([**29**])). *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$|\mathrm{NC}(n)| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Sind $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ zwei nichtkreuzende Partitionen von $[n]$, so sei $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$ genau dann, wenn für jeden Block P von $\mathcal{P}$ ein Block Q von $\mathcal{Q}$ existiert, sodass $P \subset Q$ gilt. Dadurch ist dann auf $NC(n)$ eine Halbordnung gegeben.

David Bessis und Thomas Brady definierten um 2000 eine algebraische Verallgemeinerung nichtkreuzender Partitionen in [**8**], [**17**] und [**16**]:

Seien $n \in \mathbb{N}$, $V = \mathbb{C}^n$ und W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe von V. Bezeichnen $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ die Grade von W, so ist d_n regulär nach Satz 3.28. Insbesondere gibt es dann ein $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-reguläres Element c in W. Nach Satz 3.11 sind alle $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-regulären Elemente in W zueinander konjugiert. Die Elemente dieser Konjugationsklasse werden als *Coxeterelemente* von W bezeichnet.

DEFINITION 5.3. Seien c ein Coxeterelement in W, R die Menge der unitären Spiegelungen in W und

$$\ell_R : W \longrightarrow \mathbb{N}, \ell_R(w) = \min\{m \in \mathbb{N} : \; w = r_1 \cdots r_m \text{ für } r_1, \ldots, r_m \in R\},$$

eine Längenfunktion auf W. Die Menge

$$NC(W) = \{w \in W : \; \ell_R(w) + \ell_R(w^{-1}c) = n\}$$

heißt die Menge der *W-nichtkreuzenden Partitionen.*

Seien R die Menge der unitären Spiegelungen in W, $w_1, w_2 \in NC(W)$ und $w_1 \leq_R w_2$ genau dann, wenn $\ell_R(w_1)+\ell_R(w_1^{-1}w_2) = \ell_R(w_2)$ gilt. Dann ist $(NC(W), \leq_R$ $)$ eine Halbordnung.

BEMERKUNG 5.4. Da je zwei Coxeterelemente in W zueinander konjugiert sind (siehe Satz 3.11) und die Längenfunktion ℓ_R in Definition 5.3 invariant unter Konjugation mit Elementen aus W ist (siehe Lemma 2.8), ist die Halbordnung $(NC(W), \leq_R)$ bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Coxeterelements.

P. Biane bewies erstmals ([**12**]), dass W-nichtkreuzende Partitionen eine Verallgemeinerung nichtkreuzender Partitionen von $[n]$ sind:

SATZ 5.5. *Ist σ eine Permutation von $[n]$ und bezeichnet $\{\sigma\}$ die Partition von $[n]$, die aus den Trägern der Zykel von σ besteht, dann ist die Abbildung $\sigma \mapsto \{\sigma\}$, $NC(A_{n-1}) \longrightarrow NC(n)$, wo A_{n-1} die Coxetergruppe vom Typ A_{n-1} ist (siehe Beispiel 2.15) ein Isomorphismus von Halbordnungen.*

Um Satz 5.5 zu beweisen, werden noch folgende Lemmata benötigt:

LEMMA 5.6. *Seien $t = (ij)$ eine Transposition und σ eine Permutation in A_{n-1}.*

(i) Befinden sich i, j im selben Zykel von σ, dann werden aus diesem Zykel in $t\sigma$ und σt zwei Zykel, von denen einer i und der andere j beinhaltet.
(ii) Befinden sich i und j in unterschiedlichen Zykeln von σ, so wird in σt und $t\sigma$ aus diesen beiden Zykeln einer.

Beweis: Ist $\tilde{\sigma} = (i_1 \cdots i_{k-1} \; i \; i_{k+1} \cdots i_{l-1} \; j \; i_{l+1} \cdots i_s)$ ein Zykel von σ, der i und j enthält, so sind

$$t\tilde{\sigma} = (i_1 \cdots i_{k-1} \; j \; i_{l+1} \cdots i_s)(i \; i_{k+1} \cdots i_{l-1}) \text{ und}$$
$$\tilde{\sigma}t = (i_1 \cdots i_{k-1} \; i \; i_{l+1} \cdots i_s)(j \; i_{k+1} \cdots i_{l-1}).$$

Befinden sich nun i ein einem Zykel $\sigma_1 = (i \; i_2 \cdots i_k)$ und j in einem anderen Zykel $\sigma_2 = (j \; j_2 \cdots j_l)$ von σ, so sind $t\sigma_1\sigma_2 = (i \; i_2 \cdots i_k \; j \; j_2 \cdots j_l)$ und $\sigma_1\sigma_2 t = (j \; i_2 \cdots i_k \; i \; j_2 \cdots j_l)$. □

Das nächste Lemma folgt aus Lemma 5.6.

LEMMA 5.7. *Sind $T = \{(ij) : 1 \leq i < j \leq n\}$ die Menge der Transpositionen in A_{n-1}, $c = (1 \; 2 \cdots n) \in A_{n-1}$ und $\ell_T : A_{n-1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ die Wortlänge bezüglich der Erzeugendenmenge T von A_{n-1}, so gilt für eine Permutation $\sigma \in A_{n-1}$*

$$\ell_T(\sigma) = n - \textit{Anzahl der Zykel in } \sigma.$$

Beweis: Mittels Induktion nach m soll gezeigt werden, dass $\ell_T(\sigma) = m - 1$ für einen Zykel σ mit einem m-elementigen Träger gilt. Ist $m = 1$, so ist $\sigma = \mathrm{id}_{[n]}$ und hat somit Länge $0 = 1 - 1$. Seien $m > 1$ und $\sigma = (i_1 \cdots i_m)$. Dann gilt $(i_{m-1} i_m)\sigma = (i_1 \cdots i_{m-1})$ nach Lemma 5.7. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Länge von $(i_1 \cdots i_{m-1})$ aber $m - 2$ und somit $\ell_T(\sigma) = m - 1$. Sind nun σ eine beliebige Permutation in A_{n-1} und $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ die Zerlegung von σ in paarweise disjunkte Zykel, so gilt $\ell_T(\sigma) = \sum\limits_{i=1}^{k} \ell_T(\sigma_i) = n - k$. □

Beweis von Satz 5.5: Es ist A_{n-1} irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe von $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\}$. Sie ist sogar wohlerzeugt, da A_{n-1} von $\{(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)\}$ erzeugt wird und $n - 1$ die Dimension von U ist. Die Menge T entspricht genau den unitären Spiegelungen in A_{n-1}. Weil die elementarsymmetrischen Polynome $\sigma_2, \dots, \sigma_n$ eine Menge von Basisinvarianten von A_{n-1} sind, sind $2, \dots, n$ die Grade von A_{n-1}. Somit ist c ein Coxeterelement von A_{n-1}, da n der größte Grad ist und $(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}) \in U$ für eine primitive n-te Einheitswurzel ζ ein ζ-Eigenvektor von c ist, der von keiner Transposition in A_{n-1} fixiert wird.

Dass $\sigma \in NC(A_{n-1})$ ist, gilt nach Lemma 5.7 genau dann, wenn

$$\text{Anzahl der Zykel in } \sigma + \text{ Anzahl der Zykel in } \sigma^{-1}c = n - 1.$$

Da zwei Permutationen genau dann zueinander konjugiert sind, wenn sie dieselbe Zykelstruktur haben, ist $\sigma^{-1}c \in NC(A_{n-1})$ für jedes Element σ in $NC(A_{n-1})$. Außerdem gibt es für jedes Element σ in $NC(A_{n-1})$ ein Element τ in $NC(A_{n-1})$ mit $\sigma = \tau^{-1}c$. Besteht nun ein Element $\sigma \in A_{n-1}$ aus s Zykeln und ist $\sigma = t_1 \cdots t_{n-s}$ für Transpositionen $t_1, \dots, t_{n-s} \in A_{n-1}$, dann ist σ in $NC(A_{n-1})$ genau dann, wenn $\sigma^{-1}c = t_{n-s} \cdots t_1 c$ aus $n - s + 1$ Zykel besteht. Dies ist aber genau dann erfüllt, wenn für alle $i = 2, \dots, n - s$ gilt, dass t_i einen Zykel in $t_{i-1} \cdots t_1 c$ wie in Lemma 5.6(i) in zwei Zykel mit Länge mindestens 1 teilt. Insgesamt hat also jedes Element in $NC(A_{n-1})$ die Form $t_1 \cdots t_m c$, wo $t_1, \dots, t_m$ Transpositionen sind, sodass t_{i-1} einen Zykel von $t_i \cdots t_m c$ wie in Lemma 5.6(i) teilt.

Der Träger von c ist $[n]$, also insbesondere eine nichtkreuzende Partition von $[n]$. Ist $t = (ij)$ eine Transposition in A_{n-1}, so kreuzen sich die Träger nach Lemma 5.6(i) von tc nicht. Die Träger von tc bilden also eine nichtkreuzende Partition von $[n]$. Ist nun σ eine Permutation in A_{n-1}, sodass die Träger der Zykel von σ eine nichtkreuzende Partition von $[n]$ bilden, so bilden die Träger der Zykel von tc nach Lemma 5.6(i) wieder eine nichtkreuzende Partition von $[n]$. Somit ist $\{\sigma\} \in NC(n)$ für alle σ in $NC(A_{n-1})$. Da jede nichtkreuzende Partition von $[n]$ auf diese Weise gewonnen werden kann, ist die Abbildung $\sigma \mapsto \{\sigma\}$, $NC(A_{n-1}) \longrightarrow NC(n)$, surjektiv.

Ist (ij) eine Transposition in A_{n-1} mit $i < j$, so ist

$$(ij)c = (1\ 2 \cdots i-1\ j\ j+1 \cdots n)(i\ i+1 \cdots j-1).$$

Sind nun $\sigma \in A_{n-1}$, sodass σ jedes Element aus dem Träger jedes Zykels in σ auf das nächstgrößere Element des Trägers oder, falls es ein solches nicht gibt, auf das kleinste Element des Trägers abbildet, und t eine Transposition (kl), sodass k und l im Träger eines Zykels von σ liegen, dann bildet auch $t\sigma$ nach Lemma 5.6 jedes Element aus dem Träger jedes Zykels in $t\sigma$ auf das nächstgrößere Element des Trägers oder, falls es ein solches nicht gibt, auf das kleinste Element des Trägers ab. Somit ist die Abbildung $\sigma \mapsto \{\sigma\}$, $NC(A_{n-1}) \longrightarrow NC(n)$, injektiv.

Die Abbildung $\sigma \mapsto \{\sigma\}$ ist also bijektiv. Außerdem erhält sie die Halbordnungen. $\square$

Es werde im Folgenden $[\pm n] = \{-n, -n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, n-1, n\}$ mit $[2n]$ durch $i \mapsto i$ für alle $i \in [n]$ und $i \mapsto n - i$ für alle $-n \leq i \leq -1$ identifiziert.

Definition 5.8. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine nichtkreuzende Partition $\mathcal{P}$ von $[\pm n]$ heißt *nichtkreuzende Partition vom Typ B* von $[n]$, falls

(i) für jeden Block B von $\mathcal{P}$ auch $-B$ ein Block von $\mathcal{P}$ ist und
(ii) es höchstens einen Block B in $\mathcal{P}$ gibt, der $B = -B$ erfüllt.

Gibt es einen Block B in $\mathcal{P}$, der $B = -B$ erfüllt, so heißt dieser *Nullblock* von $\mathcal{P}$.

Anschaulich bedeutet dies, dass eine nichtkreuzende Partition vom Typ B eine nichtkreuzende Partition von $[\pm n]$ ist, die invariant unter der Drehung um π ist.

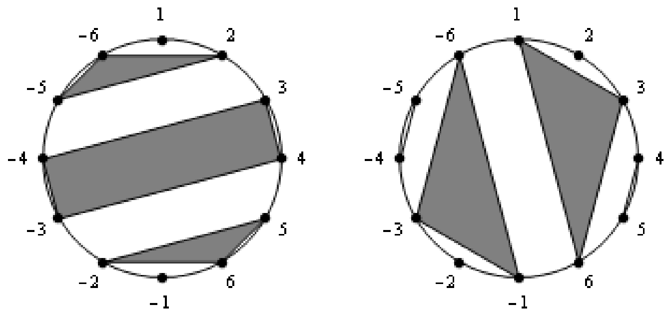

Abbildung 2. Nichtkreuzende Partitionen vom Typ B von $[6]$.

Die Idee der nichtkreuzenden Partitionen vom Typ B geht zurück auf Victor Reiner ([**40**]). Biane, Goodman und Nica ([**13**]), Bessis ([**8**]) und Watt ([**17**]) bewiesen unabhängig voneinander, dass die Abbildung $\sigma \mapsto \{\sigma\}$ ein Isomorphismus der Halbordnungen $NC(B_n)$ und jener der nichtkreuzenden Partitionen vom Typ B von $[n]$ ist. Hier bezeichnet B_n die Coxetergruppe vom Typ B_n aus Beispiel 2.12(iv).

Schließlich bewiesen C.A. Athanasiadis und V. Reiner ([**3**]) eine kombinatorische Übersetzung der nichtkreuzenden Partitionen der Coxetergruppen vom Typ D_n (siehe Beispiel 2.12(v)):

Definition 5.9. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}$ von $[\pm n]$. Falls für jeden Block B von $\mathcal{P}$ auch $-B$ ein Block von $\mathcal{P}$ ist, es höchstens einen Block B in $\mathcal{P}$ mit $B = -B$ gibt, den sogenannten *Nullblock* von $\mathcal{P}$, und, falls dieser existiert, er nicht die Form $\{i, -i\}$ für ein $i \in [n]$ hat, dann heißt $\mathcal{P}$ eine *Partition vom Typ D* von $[n]$.
Sei $\mathcal{P}$ eine Partition vom Typ D von $[n]$. Es werden nun auf einem Kreis $2n - 2$ Punkte mit $1, \ldots, n-1, -1, \ldots, -n+1$ im Uhrzeigersinn nummeriert und der Mittelpunkt mit $\pm n$ bezeichnet. Zwei disjunkte Blöcke P und Q von $\mathcal{P}$ kreuzen sich, falls die konvexe Hülle eines der Blöcke einen relativ inneren Punkt besitzt, der auch in der konvexen Hülle des anderen Blocks enthalten ist, und die konvexen Hüllen der beiden Blöcke nicht übereinstimmen. Kreuzen sich keine Blöcke von $\mathcal{P}$, so heißt $\mathcal{P}$ *nichtkreuzende Partition vom Typ D* von $[n]$.

Bemerkung 5.10. Für $n \in \mathbb{N}$ würden sich die Blöcke $\{n\}$ und $\{-n\}$ nicht kreuzen, da deren konvexe Hüllen übereinstimmen.

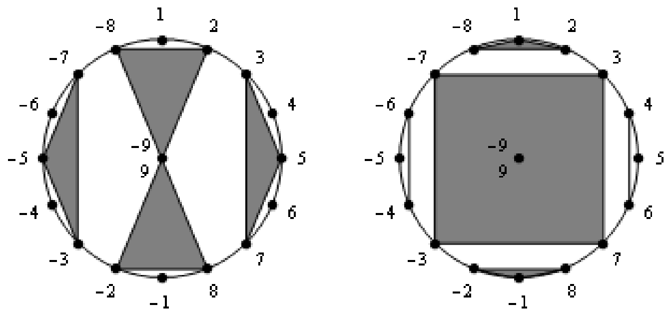

ABBILDUNG 3. Nichtkreuzende Partitionen vom Typ D von [9].

C. A. Athanasiadis und V. Reiner zeigten schließlich in [**3**], dass die Halbordnung der nichtkreuzenden Partitionen vom Typ D von $[n]$ und $NC(D_n)$ isomorph sind.

2. Zyklisches Sieben für W-nichtkreuzende Partitionen

Seien $V = \mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe auf V und $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ die Grade von W.

Bezeichnet $[V, g] = \mathrm{Im}(1 - g)$ für ein $g \in U(V)$, so gilt $[V, g]^\perp = \mathrm{Fix}(g)$ nach Lemma 2.4.

LEMMA 5.11. *Sind $g, h \in U(V)$, so ist* $\dim_\mathbb{C}[V, gh] \leq \dim_\mathbb{C}[V, g] + \dim_\mathbb{C}[V, h]$.

Beweis: Weil $\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h) \subseteq \mathrm{Fix}(gh)$ gilt, folgt aus der Dimensionsformel

$$\begin{aligned}\dim_\mathbb{C}\mathrm{Fix}(g) + \dim_\mathbb{C}\mathrm{Fix}(h) &= \dim_\mathbb{C}(\mathrm{Fix}(g) \cap \mathrm{Fix}(h)) + \dim_\mathbb{C}(\mathrm{Fix}(g) + \mathrm{Fix}(h)) \\ &\leq n + \dim_\mathbb{C}\mathrm{Fix}(gh).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus $\dim_\mathbb{C}[V, w] + \dim_\mathbb{C}\mathrm{Fix}(w) = n$ für alle $w \in U(V)$. □

LEMMA 5.12. *Sind W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe und c ein Coxeterelement in W, so ist* $\dim_\mathbb{C}[V, c] = n$.

Beweis: Die Eigenwerte von c sind $e^{\frac{(1-d_1)2\pi i}{d_n}}, \ldots, e^{\frac{(1-d_n)2\pi i}{d_n}}$ nach Korollar 3.5. Wäre nun ein Grad von W gleich 1, so würde es eine W-invariante Linearform $P \in V^* \subseteq \mathcal{S}(V^*)$ geben, deren Kern in V ein W-invarianter Teilraum von V wäre, was ein Widerspruch zur Irreduziblität von W ist. Kein Grad von W kann also 1 sein und deswegen sind alle Eigenwerte von c ungleich 1. □

Folgende äquivalente Definition der Längenfunktion ℓ_R aus Definition 5.3 geht zurück auf T. Brady und C. Watt ([**18**]).

PROPOSITION 5.13. *Sind W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe, R die Menge der unitären Spiegelungen in W und $w \in NC(W)$, so gilt*

$$\ell_R(w) = \dim_\mathbb{C}[V, w].$$

Beweis: Ist $\ell_R(w) = k$, so gibt es unitäre Spiegelungen $R_1, \ldots, R_k$ in W mit $w = R_1 \cdots R_k$. Aus Lemma 5.11 folgt $\dim_\mathbb{C}[V, w] \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \dim_\mathbb{C}[V, R_i] = k$. Weil $\ell_R(c) = n$

nach Lemma 4.37 und $\ell_R(w)+\ell_R(w^{-1}c) = \ell_R(c)$ gelten, sind $\mathrm{Fix}(w)\cap\mathrm{Fix}(w^{-1}c) = \{0\}$ und $V = \mathrm{Fix}(w) \oplus \mathrm{Fix}(w^{-1}c)$ nach Lemma 5.11 , woraus $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Fix}(w) = n - k$ folgt. □

KOROLLAR 5.14. *Sind W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe, R die Menge der unitären Spiegelungen in W und $x, y \in NC(W)$, dann gilt $x \leq_R y$ genau dann, wenn*

$$\mathrm{Fix}(x) + \mathrm{Fix}(x^{-1}y) = V \text{ und } \mathrm{Fix}(x) \cap \mathrm{Fix}(x^{-1}y) = \mathrm{Fix}(y)$$

gelten.

LEMMA 5.15. *Sind d ein Teiler von d_n, W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe und $c \in W$ ein Coxeterelement, so gilt*

$$NC(W) \cap C_W(c^{\frac{d_n}{d}}) \subseteq NC(C_W(c^{\frac{d_n}{d}})).$$

Beweis: Weil c ein Coxeterelement in W ist, ist c insbesondere $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-regulär. Aus Proposition 3.30 folgt nun, dass $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ auf $V' := V(c^{\frac{d_n}{d}}, e^{\frac{2\pi i}{d}})$ als wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe mit größtem Grad d_n und Coxeterelement c operiert. Sei nun $x \in NC(W) \cap C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$. Weil $x \leq_R c$ gilt, muss nach Korollar 5.14

$$\mathrm{Fix}(x) + \mathrm{Fix}(x^{-1}c) = V \text{ und } \mathrm{Fix}(x) \cap \mathrm{Fix}(x^{-1}c) = \mathrm{Fix}(c)$$

gelten. Aus Lemma 5.12 folgt, dass $\mathrm{Fix}(c) = \{0\}$ und daher $V = \mathrm{Fix}(x)\oplus\mathrm{Fix}(x^{-1}c)$ sind. Da $c, x \in C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ sind, sind auch $x^{-1}c \in C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ und $(x|_{V'})(x^{-1}c|_{V'}) = c|_{V'}$. Schließlich muss $\mathrm{Fix}(x|_{V'}) \oplus \mathrm{Fix}(x^{-1}c|_{V'}) = V'$ und damit $x|_{V'} \leq_{R'} c|_{V'}$, wobei R' die Menge der Spiegelungen in $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ ist, gelten. □

Ist W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe, so ist jedes Element in $B(W) = \pi_1(W\backslash V^{reg}, \mathcal{U})$ Produkt von Zopfspiegelungen nach [**19**, Theorem 2.17(i)]. Definiere eine Längenfunktion

$$\ell : B(W) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

durch $\ell(s) = \min\{i \in \mathbb{Z} : s = s_1 \cdots s_i \text{ für Zopfspiegelungen } s_1, \ldots, s_i\}$.

LEMMA 5.16. *Sind W eine wohlerzeugte Spiegelungsgruppe und ist y in $\mathbb{C}^{n-1}$, sodass $LL(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $Re(x_i) < Re(x_{i+1})$ für alle i ist, dann ist*

$$\ell_R(\pi(s_1 \cdots s_i)) = i$$

für $lbl(y) = (s_1, \ldots, s_n)$ für alle i.

Beweis: Aufgrund von Lemma 4.36 ist $lbl(y)$ ein n-Tupel von Zopfspiegelungen, sodass $\pi(s_i)$ eine unitäre Spiegelung in W für alle i ist. Somit sind $\ell_R(\pi(s_1 \cdots s_i)) \leq i$ und $\ell_R(\pi(s_{i+1} \cdots s_n)) \leq n - i$. Weil $\ell_R(c) = n$ nach Proposition 5.13 und $\pi(s_1 \cdots s_n)$ nach Lemma 4.35 ein Coxeterelement in W ist, müssen $\ell_R(\pi(s_1 \cdots s_n)) = n$ und daher $\ell_R(\pi(s_1 \cdots s_i)) = i$ gelten. □

Für einfache Elemente $b_T, b_{T'} \in B(W)$ mit $T = (y, z, L)$ und $T' = (y, z, L')$ gelte $b_T \preceq b_{T'}$ genau dann, wenn $L \leq L'$ gilt. Dann ist $(S(W), \preceq)$ eine Halbordnung.

Für einfache Elemente s und s' in $S(W)$ gelten $\ell_R(\pi(s)) = \ell(s)$ nach Lemma 5.16 und $s \preceq s'$ nach [**9**, Proposition 8.7] genau dann, wenn $\pi(s) \leq_R \pi(s')$.

PROPOSITION 5.17. *Die Abbildung π lässt sich zu einem Isomorphismus von Halbordnungen*

$$(S(W), \preceq) \xrightarrow{\cong} (NC(W), \leq_R)$$

einschränken.

Beweis: Nach Lemma 4.37 ist $s \preceq \delta$ für alle $s \in S(W)$. Weil $c := \pi(\delta)$ ein Coxeterelement in W ist, ist $\pi(S(W)) \subseteq [1, c]$. Die Injektivität folgt aus [**19**, Lemma 7.7], die Surjektivität aus [**19**, Proposition 8.9] und gehen auf eine Tatsache, die bis jetzt nur für jede Klasse von wohlerzeugten Spiegelungsgruppen einzeln beweisen wurde, siehe [**19**, Proposition 7.5]. □

SATZ 5.18. *Es ist $NC(W)$ ein Verband und es gilt*

$$|NC(W)| = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_n + d_i}{d_i}.$$

Beweis: Die beiden Behauptungen wurden für Klassen von wohlerzeugten Spiegelungsgruppen separat bewiesen oder mit dem Computer nachgerechnet. Für die erste Behauptung siehe [**8**] und [**10**] und für die zweite siehe [**2**], [**8**] und [**20**]. □

LEMMA 5.19. *Sind d ein Teiler von d_n, W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe und $c \in W$ ein Coxeterelement, so gilt*

$$NC(W) \cap C_W(c^{\frac{d_n}{d}}) = NC(C_W(c^{\frac{d_n}{d}})).$$

Beweis: Es ist noch $NC(C_W(c^{\frac{d_n}{d}})) \subseteq NC(W) \cap C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ zu zeigen.
Seien $W' := C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$, $V' = V(c^{\frac{d_n}{d}}, e^{\frac{2\pi i}{d}})$ und $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine Menge von Basisinvarianten von W. Dann ist W' eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe von V'. Die Basisinvarianten von W' sind dann genau die Einschränkungen jener Basisinvarianten von W auf V', deren Grade von d geteilt werden, nach Korollar 3.17. Insbesondere ist auch d_n ein Grad von W'. Bezeichnet $\mathcal{F}'$ jene Menge von Basisinvarianten von W', so werde $W' \backslash V'$ via der Bahnenabbildung $\overline{\omega_{W',\mathcal{F}}}$ mit $\mathbb{C}^{a(d)}$ identifiziert. Somit kann $W' \backslash V'$ in $W \backslash V$ eingebettet werden als der durch die Gleichungen $\{f_i = 0\}_{i \in [n] \backslash A(d)}$ definierter Teilraum von $W \backslash V$. Die Menge der spiegelnden Hyperebenen von W' ist $\mathcal{A}(W') = \{H \cap V' : H$ spiegelnde Hyperebene von W mit $V' \nsubseteq H\}$. Daher sind $\mathscr{H}' := (W' \backslash V') \cap \mathscr{H}$ und $W' \backslash (V')^{reg}$ in $W \backslash V^{reg}$ enthalten. Weil die Einschränkung von f_n auf V' auch eine Basisinvariante von W' ist, sind jeder Tunnel in $W' \backslash V'$ auch ein Tunnel in $W \backslash V$ und $\mathcal{U}' = (W' \backslash V') \cap \mathcal{U}$. Insgesamt ergibt sich mit der natürlichen Abbildung von $B' := B(W' \backslash (V')^{reg}, \mathcal{U}')$ nach $B := B(W \backslash V^{reg}, \mathcal{U})$ das kommutierende Diagramm

(19)
$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"'] & B \arrow[d, "\pi"] \\ W' \arrow[r, hook] & W \end{tikzcd}$$

Sei nun $w' \in NC(W')$, dann ist insbesondere $w' \in W$. Nach Proposition 5.17 gibt es ein einfaches Element s' in $B(W')$ mit $w' = \pi(s')$. Sei T' ein Tunnel mit $s' = b_{T'}$, dann ist T' auch ein Tunnel in $W \backslash V$ und definiert daher ein einfaches Element $s = b_T \in B(W)$, das Bild von s' in $B(W)$ unter der natürlichen Abbildung. Mit dem Diagramm (19) folgt schließlich $w' = \pi'(s') = \pi(s) \in NC(W)$. □

Seien W eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe und $c \in W$ ein Coxeterelement. Weil die Längenfunktion ℓ_R invariant unter Konjugation mit Elementen aus W ist, operiert die zyklische Gruppe $C = \langle c \rangle$ via Konjugation auf $NC(W)$.

Satz 5.20. *Das Tripel* $(NC(W), Cat(W,q), C)$ *mit*

$$Cat(W,q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[d_n + d_i]_q}{[d_i]_q}$$

erfüllt das Phänomen des zyklischen Siebens, das heißt, für jedes Element $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$|\{w \in NC(w) : c^k(w) = w\}| = Cat(W, e^{\frac{2\pi k i}{d_n}}).$$

Beweis: Seien $k \in \mathbb{N}$ und d die Ordnung von c^k, so ist zu zeigen, dass

$$(*) \qquad Cat(W, e^{\frac{2\pi k i}{d_n}}) = |\{w \in NC(W) : c^k w c^{-k} = w\}|$$

gilt. Da c^k und $c^{\frac{d_n}{d}}$ dieselbe Ordnung haben und damit dieselbe zyklische Untergruppe von C erzeugen, gilt $C_W(c^{\frac{d_n}{d}}) = C_W(c^k)$. Sei hier $W' = C_W(c^k)$. Weil d_n von d geteilt wird, gelten $d_n + d_i \equiv d_i \mod d$ und daher

$$\lim_{q \to e^{\frac{2\pi k i}{d_n}}} \frac{[d_n + d_i]_q}{[d_i]_q} = \begin{cases} \frac{d_n + d_i}{d_i}, & \text{falls } d_i \equiv 0 \mod d \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ist $Cat(W, e^{\frac{2\pi k i}{d_n}}) = \prod_{i \in A(d)} \frac{d_n + d_i}{d_i} = |NC(W')|$ mit $A(d) = \{i \in [n] : d | d_i\}$ nach Satz 5.18. Die rechte Seite in $(*)$ ist aber $|NC(W) \cap W'|$. Aus Lemma 5.19 folgt schließlich

$$|NC(W')| = |NC(W) \cap W'|,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Beispiel 5.21. Sei W die Coxetergruppe vom Typ A_4, das heißt, seien $W = S_5$ und $V = \{(x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{C}^5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$. Dann sind 2, 3, 4 und 5 die Grade von W und W ist eine wohlerzeugte unitäre Spiegelungsgruppe. Das Element $c = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ in W ist ein Coxeterelement. Außerdem gelten

$$\begin{aligned} \mathrm{Cat}(A_4, q) = {} & q^{20} + q^{18} + q^{17} + 2q^{16} + 2q^{15} + 3q^{14} + 2q^{13} + 4q^{12} + 3q^{11} \\ & + 4q^{10} + 3q^9 + 4q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 2q^5 + 2q^4 + q^3 + q^2 + 1. \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Cat}(A_4, q) \equiv 8q^4 + 8q^3 + 8q^2 + 8q + 10 \mod (q^5 - 1).$$

Insgesamt gibt es also 10 Bahnen der Operation von $C = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \rangle$ auf $NC(A_4)$, auf 8 Bahnen operiert C frei.

$$c \cdot i = i + 1 \mod 5$$

Beispiel 5.22. Nach Proposition A.6 sind $2, 4, 6$ die Grade von B_3. Auußerdem ist B_3 wohlerzeugt und $(1,2,3)(-1,-2,-3)$ ein Coxeterelement in B_3. Daher gelten

$$\mathrm{Cat}(B_3, q) = q^{18} + q^{16} + 2q^{14} + 3q^{12} + 3q^{10} + 3q^8 + 3q^6 + 2q^4 + q^2 + 1$$

und

$$\mathrm{Cat}(B_3, q) \equiv 6q^2 + 6q + 8 \text{ mod } (q^3 - 1).$$

Insgesamt gibt es daher 8 Bahnen der Operation von $C = \langle (1,2,3)(-1,-2,-3) \rangle$ auf der Menge der nichtkreuzenden Partitionen vom Typ D auf [3]. Auf 6 dieser Bahnen operiert C frei und 2 haben Stabilisatorgruppe C.

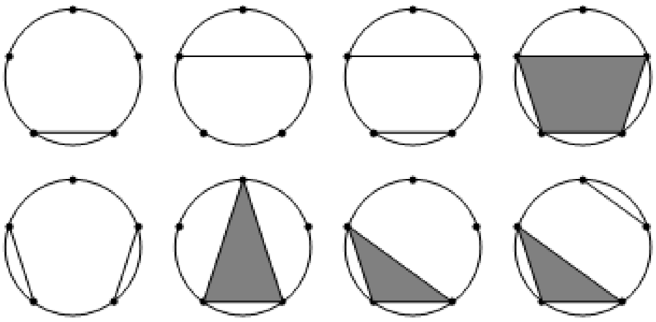

Abbildung 4. Die freien Bahnen der Operation von C auf $NC(A_4)$.

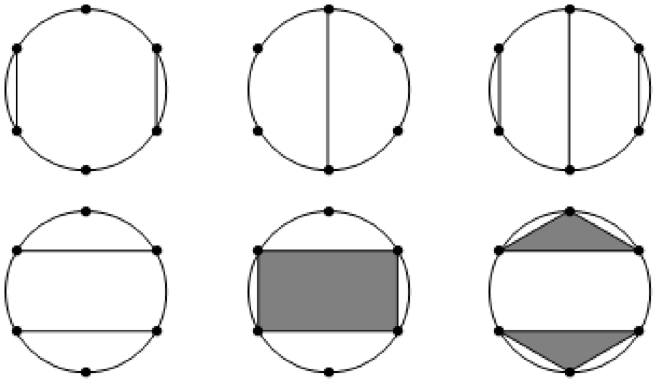

Abbildung 5. Die freien Bahnen der Operation von C auf $NC(B_3)$.

ANHANG A

Klassifikation unitärer Spiegelungsgruppen

Da char $\mathbb{C} = 0$ ist, ist nach dem Satz von Maschke jede unitäre Spiegelungsgruppe direkte Summe irreduzibler unitärer Spiegelungsgruppen. Es genügt daher irreduzible unitäre Spiegelungsgruppen zu betrachten.

Die Klassifikation irreduzibler unitärer Spiegelungen geht zurück auf G. C. Shephard und J. A. Todd [**43**], als Quelle für dieses Kapitel wurde aber [**35**] verwendet. Insgesamt ergeben sich 37 Fälle für irreduzible unitäre Spiegelungsgruppen, wobei diese aus drei unendlichen Familien $G_1 := \{\mathcal{C}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : m \in \mathbb{N}\}$, $G_2 := \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $G_3 := \{G(m,n,p) : m,n,p \in \mathbb{N}, p|m\}$ und 34 Ausnahmefällen bestehen, welche von 4 bis 37 nummeriert sind. Die Nummerierung wurde von G. C. Shephard und J. A. Todd eingeführt und wird hier übernommen.

Im Eindimensionalen können nur unitäre Spiegelungsgruppen der Familie G_1 auftreten. Bei der Klassifikation irreduzibler unitärer Spiegelungsgruppen auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen höherer Dimension spielt der folgende Begriff eine wichtige Rolle:

Definition A.1. Ein G-Modul V heißt *imprimitiv*, falls V für ein $m > 1$ direkte Summe $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ nichttrivialer Teilräume V_i, $1 \leq i \leq m$, ist, sodass die Operation von G auf V diese permutiert, anderenfalls heißt er *primitiv*. Ist V ein imprimitiver G-Modul, so heißt die Menge $\{V_i : 1 \leq i \leq m\}$ Imprimitivitätssystem von V.
Gibt es einen primitiven G-Modul V, sodass die Operation von G auf V treu ist, so heißt G primitiv.

1. Irreduzible imprimitive unitäre Spiegelungsgruppen

Definition A.2. Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$, sodass $p|m$ gilt. Nun definiere

$A(m,p,n) := \{(\theta_1, \ldots, \theta_n) : \theta_i^m = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $\prod_{i=1}^{n} \theta_i^{\frac{m}{p}} = 1\}$ und

$G(m,p,n) := A(m,p,n) \ltimes S_n$ mit Multiplikation

$$((\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \tau) \cdot ((\theta_1, \ldots, \theta_n), \sigma) = ((\zeta_1\theta_{\tau(1)}, \ldots, \zeta_n\theta_{\tau(n)}), \tau\sigma).$$

$G(m,p,n)$, $m, n, p \in \mathbb{N}$ mit $p|m$, operiert treu auf $\mathbb{C}^n$ durch

$$((\theta_1, \ldots, \theta_n), \sigma) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \theta_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \theta_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $[(\theta_1, \ldots, \theta_n)|\sigma]$ für eine Permutation $\sigma \in S_n$ und $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{C}$ jene $n \times n$ Matrix, deren $(i, \sigma(i))$-ten Einträge θ_i für alle $i \in [n]$ und deren restliche Einträge 0 sind, dann gilt

$$G(m,n,p) = \{[(\theta_1,\dots,\theta_n)|\sigma] : \sigma \in S_n, \theta_i \in \mathbb{C} \text{ mit } \theta_i^m = 1 \text{ für alle } i \in [n]$$
$$\text{und } (\prod_{i=1}^{n} \theta_i)^{\frac{m}{p}}\}.$$

Nach Konstruktion ist $\mathbb{C}^n$ mit dieser Operation ein imprimitiver $G(m,p,n)$-Modul mit Imprimitivitätssystem $\{\mathbb{C}e_i : 1 \leq i \leq n\}$. $G(m,p,n)$ ist also eine imprimitive Gruppe für $m,n,p \in \mathbb{N}$ mit $p|m$. Außerdem ist $G(m,p,n)$ eine Untergruppe von $U_n(\mathbb{C})$ und $|G(m,n,p)| = \frac{m^n n!}{p}$.

Proposition A.3. *Sei $m > 1$, so ist $G(m,p,n)$ eine imprimitive unitäre Spiegelungsgruppe und irreduzibel, falls $(m,p,n) \neq (2,2,2)$ ist.*

Beispiel A.4. (i): $G(m,p,1)$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung $\frac{m}{p}$.

(ii): $G(1,1,n)$ ist die symmetrische Gruppe S_n. Für $n \geq 5$ ist der S_n-invariante Teilraum $W = \{(x_1,\dots,x_n)^t : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ ein primitiver S_n-Modul, d.h., die Coxetergruppe vom Typ A_{n-1} ist für $n \geq 5$ eine primitive Gruppe.

(iii): $G(m,m,2) \cong \mathcal{C}_m \ltimes \mathcal{C}_2$ ist die Diedergruppe der Ordnung $2m$. Insbesondere sind $G(3,3,2) \cong D_6 \cong S_3$ und $G(4,4,2) \cong V_4 \ltimes S_3 \cong S_4$, wo V_4 die Kleinsche Vierergruppe bezeichnet.

(iv): Die Gruppen $G(2,1,n)$ bzw. $G(2,2,n)$ sind die Coxetergruppen vom Typ B_n bzw. vom Typ D_n.

Siehe [**35**, Theorem 2.14] für folgendes wichtiges Resultat:

Satz A.5. *Sind V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und G eine irreduzible imprimitive unitäre Spiegelungsgruppe auf V, dann sind $n > 1$ und G zu einer Gruppe $G(m,p,n)$ für ein $m > 1$ und einen Teiler p von m konjugiert.*

Schließlich sollen noch algebraisch unabhängige, $G(m,p,n)$-invariante Polynome, die $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ erzeugen, angegeben werden. Ein Element $((\theta_1,\dots,\theta_n),\sigma) \in G(m,p,n)$ operiert auf $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ durch

$$(((\theta_1,\dots,\theta_n),\sigma)\cdot P)(X_1,\dots,X_n) = P(\theta_{\sigma(1)}^{-1}X_{\sigma(1)},\dots,\theta_{\sigma(n)}^{-1}X_{\sigma(n)}),$$

$P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$. Ist $g \cdot P = P$ für alle $g \in G(m,p,n)$, so heißt $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ $G(m,p,n)$-invariant. Es bezeichne nun

$$e_r(X_1,\dots,X_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_r}$$

das r-te elementarsymmetrische Polynom für $1 \leq r \leq n$.
Folgende Polynome sind $G(m,p,n)$-invariant:

$$\sigma_r := e_r(X_1^m,\dots,X_n^m) \qquad (1 \leq r < n)$$
$$\sigma_n := e_n(X_1,\dots,X_n)^{\frac{m}{p}}$$

$\sigma_1,\dots,\sigma_n$ sind algebraisch unabhängig und erzeugen daher $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ (Satz 2.28).

Proposition A.6. *Die Grade von $G(m,p,n)$ sind also $m, 2m, \dots, (n-1)m, \frac{mn}{p}$.*

2. Irreduzible primitive unitäre Spiegelungsgruppen der Dimension 2

Es sollen zunächst alle unitären Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$ bestimmt werden. Bevor begonnen werden kann, wird noch ein neuer Begriff benötigt, nämlich jener des zentralen Produkts zweier Gruppen:

DEFINITION A.7. Eine Gruppe G heißt das *zentrale Produkt* $H \circ K$ zweier Normalteiler $H \lhd G$ und $K \lhd G$, falls $G = HK$ und $H \cap K \subseteq Z(G)$ gelten. Sind umgekehrt H, K zwei Gruppen, so definiere $N := \{(h,k) : h, k \in H \cap K \text{ mit } h \cdot k = 1\} \lhd H \times K$. Die Faktorgruppe $H \circ K := H \times K/N$ ist dann das *zentrale Produkt* von $H \times 1$ und $1 \times K$.

Nach [**35**, Prop. 5.10 und Prop. 5.11] ist $U_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} : \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |\zeta| = 1 \right\} \circ SU_2(\mathbb{C})$. Insbesondere kann jeder endlichen Untergruppe G von $U_2(\mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe $\widehat{G} = \{\pm \begin{pmatrix} \lambda_g^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_g^{-1} \end{pmatrix} g : g \in G\}$ von $SU_2(\mathbb{C})$, wobei $\lambda_g^2 = \det(g)$ für alle $g \in G$ gesetzt wird, zugeordnet werden. Die endlichen Untergruppen von $SU_2(\mathbb{C})$ können aber gut klassifiziert werden ([**35**, Theorem 5.14]):

SATZ A.8. *Sei G eine endliche Untergruppe von $SU_2(\mathbb{C})$, dann ist sie in $SU_2(\mathbb{C})$ zu einer der folgenden Untergruppen von $SU_2(\mathbb{C})$ konjugiert:*

(i): der zyklischen Gruppe $\mathcal{C}_m := \left\langle \begin{pmatrix} e^{\frac{2\Pi i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\Pi i}{m}} \end{pmatrix} \right\rangle$ *der Ordnung m;*

(ii): der binären Diedergruppe $\mathcal{D}_{2m} := \left\langle \begin{pmatrix} e^{\frac{2\Pi i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\Pi i}{m}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ *der Ordnung $4m$;*

(iii): der binären Tetraedergruppe $\mathcal{T} := \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle$ *der Ordnung 24;*

(iv): der binären Oktaedergruppe $\mathcal{O} := \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1-i & 1-i \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \right\rangle$ *der Ordnung 48;*

(v) der binären Ikosaedergruppe $\mathcal{I} := \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} - \tau i & 1 \\ -1 & \tau^{-1} + \tau i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\rangle$, *wobei $\tau := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ ist, der Ordnung 120.*

Folgende Bemerkung soll erklären, woher die Gruppen $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ und $\mathcal{I}$ ihren Namen haben.

BEMERKUNG A.9. Die Quaternionen der Norm 1 sind zu $SU_2(\mathbb{C})$ isomorph via der Abbildung $\alpha + \beta j \mapsto \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Nun kann aber jede Quaternion q der Norm 1 geschrieben werden als $q = cos\psi + v \cdot sin\psi$, wobei $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, eine reine Quaternion der Norm 1 ist. Ist nun $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, x_1, x_2, x_3, eine reine Quaternion, dann ergibt Konjugation mit q wieder eine reine Quaternion $y = y_1 i + y_2 j + y_3 k$ mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = D(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, 2\psi) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, wobei $D(w, \varphi)$ die Matrix der Drehung um die Achse w im Winkel φ in $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, ist. Wird die Menge der reinen Quaternionen mit $\mathbb{R}^3$ identifiziert, so entspricht die Konjugation mit der Quaternion $q = cos\psi + p \cdot sin\psi$ genau der Drehung um die Achse v im Winkel 2ψ in $\mathbb{R}^3$. Die Gruppen $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ und $\mathcal{I}$ entsprechen dann genau den Drehgruppen des Tetraeders, Oktaeders bzw. Ikosaeders in $\mathbb{R}^3$.

Die Gruppen $\mathcal{C}_m$, $\mathcal{D}_{2m}$ sind für alle $m \in \mathbb{N}$ imprimitiv, die Gruppen $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{I}$ sind primitiv. Ist G eine primitive endliche Untergruppe von $U_2(\mathbb{C})$, so ist auch $\widehat{G}$ primitiv, muss also zu einer der Gruppen $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{I}$ konjugiert sein. G heißt dann vom Typ $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{I}$.

Ist G eine beliebige endliche Untergruppe von $U_2(\mathbb{C})$ und bezeichnet m den Exponenten von $\widehat{G}$, so gilt außerdem

$$G \subseteq \mathcal{C}_m \circ \widehat{G}.$$

Insbesondere sind ([**35**, Theorem 6.1]) alle primitiven unitären Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$ Normalteiler von $\mathcal{C}_{12} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{C}_{24} \circ \mathcal{O}$ oder $\mathcal{C}_{60} \circ \mathcal{I}$ je nachdem, ob sie vom Typ $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{I}$ sind. Um nun alle Möglichkeiten für primitive unitäre Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$ zu erhalten, genügt es, die Normalteiler von $\mathcal{C}_{12} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{C}_{24} \circ \mathcal{O}$ und $\mathcal{C}_{60} \circ \mathcal{I}$, die von Spiegelungen erzeugt werden, zu finden. Dazu verwende, dass jede unitäre Spiegelung in $\mathcal{C}_{12} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{C}_{24} \circ \mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{C}_{60} \circ \mathcal{I}$ die Form $\lambda^{-1}g$ für ein g aus $\mathcal{C}_{12} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{C}_{24} \circ \mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{C}_{60} \circ \mathcal{I}$ und einen Eigenwert λ von g hat, und, dass diese unitäre Spiegelung dieselbe ist, wenn g durch gz für ein z im Zentrum von $\mathcal{C}_{12} \circ \mathcal{T}$, $\mathcal{C}_{24} \circ \mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{C}_{60} \circ \mathcal{I}$ ersetzt wird.

Auf diese Weise ergeben sich 19 irreduzible, primitive unitäre Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$:

- 4 vom Typ $\mathcal{T}$:

Tabelle 1. Primitive unitäre Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$ vom Typ $\mathcal{T}$

G	Struktur	$\|G\|$	Grade	Kograde
G_4	$SL_2(\mathbb{F}_3)$	24	4, 6	0, 2
G_5	$\mathcal{C}_3 \times \mathcal{T}$	72	6, 12	0, 6
G_6	$\mathcal{C}_4 \circ G_4$	48	4, 12	0, 8
G_7	$\mathcal{C}_3 \times (\mathcal{C}_4 \circ \mathcal{T})$	144	12, 12	0, 12

- 8 vom Typ $\mathcal{O}$:

Tabelle 2. Primitive unitäre Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$ vom Typ $\mathcal{O}$

G	Struktur	$\|G\|$	Grade	Kograde
G_8	$\mathcal{T}\mathcal{C}_4$	96	8, 12	0, 4
G_9	$\mathcal{C}_8 \circ \mathcal{O}$	192	8, 24	0, 16
G_{10}	$\mathcal{C}_3 \times \mathcal{T}\mathcal{C}_4$	288	12, 24	0, 12
G_{11}	$\mathcal{C}_3 \times (\mathcal{C}_8 \circ \mathcal{O})$	576	24, 24	0, 24
G_{12}	$GL_2(\mathbb{F}_3)$	48	6, 8	0, 10
G_{13}	$\mathcal{C}_4 \circ \mathcal{O}$	96	8, 12	0, 16
G_{14}	$\mathcal{C}_3 \times G_{12}$	144	6, 24	0, 18
G_{15}	$\mathcal{C}_3 \times (\mathcal{C}_4) \circ \mathcal{O}$	288	12,24	0,24

- 7 vom Typ $\mathcal{I}$:

TABELLE 3. Primitive unitäre Spiegelungsgruppen in $U_2(\mathbb{C})$ vom Typ $\mathcal{I}$

G	Struktur	$\lvert G\rvert$	Grade	Kograde
G_{16}	$\mathcal{C}_5 \times \mathcal{I}$	600	20, 30	0, 10
G_{17}	$\mathcal{C}_5 \times (\mathcal{C}_4 \circ \mathcal{I})$	1200	20, 60	0, 40
G_{18}	$\mathcal{C}_{15} \times \mathcal{I}$	1800	30, 60	0, 30
G_{19}	$\mathcal{C}_{15} \times (\mathcal{C}_4 \circ \mathcal{I})$	3600	60, 60	0, 60
G_{20}	$\mathcal{C}_3 \times \mathcal{I}$	360	12, 30	0, 18
G_{21}	$\mathcal{C}_3 \times (\mathcal{C}_4 \circ \mathcal{I})$	720	12, 60	0, 48
G_{22}	$\mathcal{C}_4 \circ \mathcal{I}$	240	12, 20	0, 28

3. Irreduzible primitive unitäre Spiegelungsgruppen der Dimension ≥ 3

Für den Beweis des folgenden Satzes siehe zum Beispiel [**35**, Theorem 8.1].

SATZ A.10 (Blichfeldt). *Seien $n \in \mathbb{N}$ und G eine endliche primitive Untergruppe von $U_n(\mathbb{C})$. Besitzt $s \in G$ einen Eigenwert λ, sodass $|\lambda - \mu| \leq 1$ für alle Eigenwerte μ von s gilt, dann muss $s \in Z(G)$ gelten.*

Ist nun $s \in U_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ von endlicher Ordnung, so sind die Eigenwerte von s Einheitswurzeln. Die Bedingung, dass s einen Eigenwert λ hat, sodass $|\lambda - \mu| \leq 1$ für alle Eigenwerte μ gilt, ist äquivalent dazu, dass s einen Eigenwert $\lambda = e^{i\varphi}$ hat, sodass $|\varphi - \mu| \leq \frac{\pi}{3}$ für alle Eigenwerte $\mu = e^{i\theta}$ gilt.

SATZ A.11. *Sind $n > 1$ und G eine endliche, primitive Untergruppe von $U_n(\mathbb{C})$, so hat jede Spiegelung in G Ordnung $2, 3, 4$ oder 5.*

Beweis: Eine unitäre Spiegelung $t \in U_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, der Ordnung m hat Eigenwert 1 der Vielfachheit $n-1$ und Eigenwert ζ, ζ ist eine primitive m-te Einheitwurzel, der Vielfachheit 1. Da mit t auch t^k für alle $k \in \mathbb{N}$ in G liegt, kann oBdA $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ gewählt werden. Weil aber t nicht im Zentrum von G liegt, muss nach dem Satz von Blichfeldt gelten, dass $\frac{2\pi}{m} > \frac{\pi}{3}$ ist. $\square$

SATZ A.12. [**35**, Theorem 8.4] *Ist $n \geq 3$, so sind die Spiegelungen in einer endlichen, primitiven Untergruppe von $U_n(\mathbb{C})$ entweder der Ordnung 2 oder der Ordnung 3.*

Es werden nun zwei Fälle unterschieden, nämlich, ob eine primitive unitäre Spiegelungsgruppe der Dimension ≥ 3 unitäre Spiegelungen der Ordnung 3 enthält oder nicht.

Zunächst werden aber noch einige neue Begriffe benötigt.

DEFINITION A.13. Ein *Geradensystem* $\mathfrak{L}$ ist eine Familie von Geraden in $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, die durch den Ursprung gehen.

Ist l eine Gerade, sodass $l = \langle a \rangle_{\mathbb{C}}$ für ein $a \in \mathbb{C}^n$ mit $\langle a, a \rangle = 2$, wobei $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ bezeichnet, gilt, so gibt es eine eindeutig bestimmte unitäre Spiegelung r_l auf $\mathbb{C}^n$ der Ordnung 2, die $l^\perp$ fixiert, nämlich $r_l(x) := r_{a,-1}(x) = x - \langle x, a \rangle a$. Es wird üblicherweise r_a anstelle von r_l geschrieben.

DEFINITION A.14. Ein Geradensystem $\mathfrak{L}$ heißt *sternförmig*, falls $r_l(m) \in \mathfrak{L}$ für alle $l, m \in \mathfrak{L}$ gilt. Ist $\mathfrak{L}$ ein endliches sternförmiges Geradensystem, so heißt $\mathfrak{L}$ ein *Stern*, falls alle Elemente aus $\mathfrak{L}$ in derselben Ebene liegen.
Ein Geradensystem $\mathfrak{L}$ heißt *k-System*, $k \in \mathbb{N}$, wenn

(i) $\mathfrak{L}$ sternförmig ist,

(ii) die Ordnung von $r_l r_m$ für alle $l, m \in \mathfrak{L}$ höchstens k ist und
(iii) es $l, m \in \mathfrak{L}$ gibt, sodass die Ordnung von $r_l r_m$ gleich k ist.

SATZ A.15. [**35**, Theorem 7.9] *Ist $\mathfrak{L}$ ein k-System, $k \in \mathbb{N}$, so ist die Gruppe*

$$W(\mathfrak{L}) := \langle r_l : l \in \mathfrak{L} \rangle$$

eine endliche unitäre Spiegelungsgruppe auf $\mathbb{C}^n$. Umgekehrt, sind G eine (endliche) unitäre Spiegelungsgruppe auf $\mathbb{C}^n$, die von Spiegelungen der Ordnung 2 erzeugt wird, und $k \in \mathbb{N}$ das Maximum der Ordnungen von Produkten von Spiegelungen in G, so ist $G = W(\mathfrak{L})$ für ein k-System $\mathfrak{L}$.

BEISPIEL A.16. (i): Die symmetrische Gruppe S_n hat Geradensystem

$$\mathscr{A}_{n-1} := \{\langle e_i - e_j \rangle : 1 \leq i < j \leq n\},$$

das heißt, $S_n = W(\mathscr{A}_{n-1})$.
(ii): Die Gruppen $G(m, m, n)$ haben Geradensystem

$$\mathscr{D}_n^{(m)} := \{\langle e_i - \zeta e_j \rangle : 1 \leq i < j \leq n \text{ und } \zeta \text{ m-te Einheitswurzel } \}.$$

DEFINITION A.17. Ein Geradensystem $\mathfrak{L}$ heißt *zerlegbar*, falls es eine Partition von $\mathfrak{L}$ in nichtleere Mengen A und B gibt, sodass jede Gerade in A orthogonal zu jeder Gerade in B ist. Existiert diese nicht, so heißt $\mathfrak{L}$ *unzerlegbar*.

Ist nun G eine irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe, die von Spiegelungen der Ordnung 2 erzeugt wird, so ist das Geradensystem $\mathfrak{L}$, für das $G = W(\mathfrak{L})$ gilt, unzerlegbar.

Es werden zunächst jene irreduziblen, primitiven unitären Spiegelungsgruppen der Dimension ≥ 3, die nur Spiegelungen der Ordnung 2 enthalten, betrachtet.

PROPOSITION A.18. *Ist G eine primitive unitäre Spiegelungsgruppe der Dimension ≥ 3, die nur unitäre Spiegelungen der Ordnung 2 enthält, so ist jenes Geradensystem $\mathfrak{L}$, dass $G = W(\mathfrak{L})$ erfüllt, ein m-System für ein $m \leq 5$.*

Unzerlegbare 3-Systeme:
Es sollen hier alle unzerlegbaren 3-Systeme angegeben werden. Näheres kann zum Beispiel im Kapitel 6.1 in [**35**] nachgelesen werden.

Geradensystem $\mathscr{E}_8$: Ist $\{e_1, \dots, e_8\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^8$, so definiere die Menge $X := \{\frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm \cdots \pm e_8) :$ Anzahl positiver Koeffizienten ist gerade$\}$. Das Geradensystem $\mathscr{E}_8$ sei dann die Vereinigung aller Geraden, die von Elementen aus X aufgespannt werden, und $\mathscr{D}_8^{(2)}$. Es ist sternförmig und unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{E}_7$: Definiere $z := \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_8) \in X$, so bezeichne $\mathscr{E}_7$ jenes Teilgeradensystem von $\mathscr{E}_8$, das orthogonal zu z ist. Es ist unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{E}_6$: $\mathscr{E}_6$ bezeichne jenes Teilsystem von $\mathscr{E}_8$, das orthogonal auf den Stern, der von $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3$ und $e_2 - e_3$ erzeugt wird, ist. Es ist unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{K}_6$: Definiere $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\theta = \omega - \omega^2 = i\sqrt{3}$ und

$$Y = \{\theta^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{k_2} \\ \vdots \\ \omega^{k_6} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 : k_2, \dots, k_6 \in \{1, 2, 3\} \text{ mit } \prod_{i=2}^{6} \omega^{k_i} = 1\},$$

dann bezeichne das Geradensystem $\mathscr{K}_6$ die Vereinigung der Geraden, die von Elementen aus Y erzeugt werden, und $\mathscr{D}_6^{(3)}$. Es ist unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{K}_5$: Das Teilsystem von $\mathscr{K}_6$, das aus jenen Geraden besteht, die orthogonal zu $\theta^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in \mathscr{K}_6$ sind. Es ist unzerlegbar.

Unzerlegbare 4-Systeme

Es sollen hier alle unzerlegbaren 4-Systeme angegeben werden. Näheres kann zum Beispiel im Kapitel 6.2 in **[35]** nachgelesen werden.

Geradensystem $\mathscr{J}_3^{(4)}$: Definiere $\lambda := -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{7})$,

$$X = \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^2\\ \pm\lambda^2\\ 0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^2\\ 0\\ \pm\lambda^2\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ \lambda^2\\ \pm\lambda^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ \lambda\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \lambda\end{pmatrix}\} \text{ und}$$

$$Y = \{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pm\lambda\\ \pm\lambda\\ 2\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pm\lambda\\ 2\\ \pm\lambda\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\ \pm\lambda\\ \pm\lambda\end{pmatrix}\}.$$

Das Geradensystem $\mathscr{J}_3^{(4)}$ sei nun die Menge aller Geraden, die von $X \cup Y$ erzeugt werden. Es ist unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{F}_4$: Das Geradensystem, das aus jenen Geraden besteht, die von den 12 Vektoren $e_i \pm e_j$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ und den 4 Vektoren $\sqrt{2}e_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ erzeugt werden, bezeichne mit $\mathscr{F}_4$. Es ist unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{N}_4$: Jene Geraden, die von den Vektoren $e_j \pm e_k$ und $e_j \pm ie_k$ $(1 \leq j < k \leq 4)$ erzeugt werden, bilden das Geradensystem $\mathscr{N}_4$. Es ist unzerlegbar.

Geradensystem $\mathscr{O}_4$: Das Geradensystem $\mathscr{O}_4$ ist die Vereinigung von $\mathscr{D}_4^{(4)}$ und jenen Geraden, die von $(1+i)e_j$ $(1 \leq j \leq 4)$ werden.

Unzerlegbare 5-Systeme

Es sollen hier alle unzerlegbaren 5-Systeme angegeben werden. Näheres kann zum Beispiel im Kapitel 6.3 in **[35]** nachgelesen werden.

Geradensystem $\mathscr{H}_3$: Bezeichnet $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, so bilden die Geraden, die von den Vektoren

$$e_1, e_2, e_3, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \pm\tau\\ \pm\tau^{-1}\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pm\tau^{-1}\\ 1\\ \pm\tau\end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\pm\tau\\ \pm\tau^{-1}\\ 1\end{pmatrix}$$

erzeugt werden, das Geradensystem $\mathscr{H}_3$. Es sind genau jene Geraden, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten eines regelmäßigen Dodekaeders gehen.

Geradensystem $\mathscr{H}_4$: Das Kranzprodukt $\mathcal{C}_2 \wr A_4$ operiert auf $\mathbb{C}^4$ durch ungerade Permutationen der Koordinaten und Vorzeichenwechsel. Das Bild der Operation von $\mathcal{C}_2 \wr A_4$ auf $\{(1,0,0,0)^t, \frac{1}{2}(1,\tau,\tau^{-1},0)^t, (1,1,1,1)^t\}$ sind jene Vektoren, die die Geraden durch den Ursprung aufspannen, die die Elemente von $\mathscr{H}_4$ bilden.

Geradensystem $\mathscr{I}_3^{(5)}$: Das Geradensystem $\mathscr{H}_4$ ist die Vereinigung von $\mathscr{H}_3$ und jenen Geraden durch den Ursprung, die von den Vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm(\tau+\omega) \\ \pm(\tau^{-1}\omega-1) \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm\tau\omega \\ \pm1 \\ \pm\tau^{-1}\omega^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pm\omega^2 \\ \pm1 \\ \pm(\tau\omega+1) \end{pmatrix}$$

und jenen Vektoren, die durch zirkuläres Verschieben der Koordinaten dieser Vektoren entstehen.

Satz A.19. *Sei G eine irreduzible, primitive unitäre Spiegelungsgruppe der Dimension $n \geq 3$, die nur Spiegelungen der Ordnung 2 enthält, so ist G eine der folgenden Gruppen:*

(i): $n = 3$ und G ist $W(\mathscr{H}_3)$, $W(\mathscr{I}_3^{(4)})$ oder $W(\mathscr{I}_3^{(5)})$;
(ii): $n = 4$ und G ist $W(\mathscr{F}_4)$, $W(\mathscr{H}_4)$, $W(\mathscr{N}_4)$ oder $W(\mathscr{O}_4)$;
(iii): $n = 5$ und G ist $W(\mathscr{K}_5)$;
(iv): $n = 6$ und G ist $W(\mathscr{E}_6)$ oder $W(\mathscr{K}_6)$;
(v): $n = 7$ und G ist $W(\mathscr{E}_7)$;
(vi): $n = 8$ und G ist $W(\mathscr{E}_8)$;
(vii): $n \geq 4$ und G ist $W(\mathscr{A}n) \cong S_{n+1}$.

Schließlich werden irreduzible, primitive unitäre Spiegelungsgruppen G der Dimension $n \geq 3$, die Spiegelungen der Ordnung 3 enthalten, betrachtet.

Ist $a \in \mathbb{C}^n$ mit $(a, a) = 3$, so ist die unitäre Spiegelung t_a der Ordnung 3 definiert als

$$t_a(v) := v - \frac{1}{3}(1-\omega)(v, a)a = v + \theta^{-1}\omega^2(v, a)a,$$

wo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ und $\theta := \omega - \omega^2 = i\sqrt{3}$ sind. Da $t_a = t_b$ genau dann gilt, wenn a und b dieselbe Gerade durch den Ursprung aufspannen, kann $t_l := t_a$ für die Gerade l, die von a erzeugt wird, gesetzt werden. Ein Geradensystem $\mathscr{L}$ heißt *ternäres k-System*, falls

(i) $t_l(\mathscr{L}) \subseteq \mathscr{L}$ für alle Geraden $l \in \mathscr{L}$ gilt,
(ii) für alle Geraden $l, m \in \mathscr{L}$ die Ordnung von $t_l t_m$ höchstens k ist, und
(iii) es Geraden $l, m \in \mathscr{L}$ gibt, sodass die Ordnung von $t_l t_m$ gleich k ist.

Sind $\mathscr{K}$ ein k-System und $\mathscr{M}$ ein ternäres h-System, das disjunkt zu $\mathscr{K}$ ist, sodass $r_l(\mathscr{M}) \subseteq \mathscr{M}$ für alle $l \in \mathscr{K}$ und $t_m(\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{K}$ für alle $m \in \mathscr{M}$ gelten, dann heißt das Paar $\mathscr{L} = (\mathscr{K}, \mathscr{M})$ ein *gemischtes (k,h)-System*. Die Menge der Geraden von $\mathcal{L}$ ist definiert als die Vereinigung $\mathscr{K} \cup \mathscr{M}$ und $W(\mathcal{L}) := W(\mathcal{K})W(\mathcal{M})$ als die *Weylgruppe von $\mathcal{L}$*. Die Untergruppen $W(\mathcal{K})$ und $W(\mathcal{M})$ sind Normalteiler von $W(\mathcal{L})$.

Geradensystem $\mathscr{L}_3$: Das Geradensystem $\mathscr{L}_3$ sind jene Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^3$, die von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega^2 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 \\ 1 \\ \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, e_1, e_2 \text{ und } e_3$$

erzeugt werden.

Geradensystem $\mathscr{L}_4$: Das Geradensystem $\mathscr{L}_3$ kann via $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, 0)$ in $\mathbb{C}^4$ eingebettet werden und damit kann $W(\mathscr{L}_3)$ als Untergruppe von $U_4(\mathbb{C})$ aufgefasst werden. Außerdem bezeichne Γ die Menge der Geraden durch den Ursprung, die von den Elementen der $W(\mathscr{L}_3)$-Bahn von $\langle(0, 1, -1, -1)\rangle$ aufgespannt werden.

Γ enthält dann 27 Geraden. Das Geradensystem $\mathscr{L}_4$ besteht aus Γ und $\mathscr{L}_3$ und ist ein ternäres 3-System.

Geradensystem $\mathscr{M}_3$: Das Geradensystem $\mathscr{M}_3$ ist das gemischte $(3,6)$-System $(\mathscr{D}_3^{(3)}, \mathscr{L}_3)$.

SATZ A.20. *Sei G eine irreduzible, primitive unitäre Spiegelungsgruppe der Dimension $n \geq 3$.*

(i) Wird G nur von Spiegelungen der Ordnung 3 erzeugt, so ist G entweder zu $W(\mathscr{L}_3)$ oder zu $W(\mathscr{L}_4)$ konjugiert.
(ii) Wird G von Spiegelungen der Ordnung 2 und 3 erzeugt, dann ist G zu $W(\mathscr{M}_3)$ konjugiert.

4. Satz von Shephard und Todd

SATZ A.21 (**Shephard und Todd**). *Sei G eine (endliche) irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe der Dimension n, dann gehört G bis auf Konjugation in $U_n(\mathbb{C})$ zu einer der folgenden Klassen:*

(i) $n = 1$ und G ist eine zyklische Gruppe;
(ii) $n \geq 2$ und G ist die imprimitive Gruppe $G(m, p, n)$ für ein $m > 1$ und einen Teiler p von m;
(iii) $n = 2$ und G ist eine der 19 irreduziblen, primitiven unitären Spiegelungsgruppen vom Typ $\mathcal{T}$, $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{I}$, siehe die Tabellen 1, 2 und 3;
(iv) $n = 3$ und G ist eine der Gruppen $W(\mathscr{H}_3)$, $W(\mathscr{J}_3^{(4)})$, $W(\mathscr{J}_3^{(5)})$, $W(\mathscr{L}_3)$ oder $W(\mathscr{M}_3)$;
(v) $n = 4$ und G ist eine der Gruppen $W(\mathscr{F}_4)$, $W(\mathscr{H}_4)$, $W(\mathscr{L}_4)$, $W(\mathscr{N}_4)$ oder $W(\mathscr{O}_4)$;
(vi) $n = 5$ und G ist die Gruppe $W(\mathscr{K}_5)$;
(vii) $n = 6$ und G ist entweder $W(\mathscr{E}_6)$ oder $W(\mathscr{K}_6)$;
(viii) $n = 7$ und G ist $W(\mathscr{E}_7)$;
(ix) $n = 8$ und G ist $W(\mathscr{E}_8)$;
(x) $n \geq 4$ und G ist $W(\mathscr{A}_n) \cong S_{n+1}$.

Shephard und Todd nummerierten die irreduziblen unitären Spiegelungsgruppen: G_1, G_2, G_3 bezeichnen die imprimitiven und $G_4, \ldots, G_{37}$ die primitiven irreduziblen unitären Spiegelungsgruppen. Die Nummerierung heißt die *Shephard-Todd-Nummerierung.*

TABELLE 4. Irreduzible unitäre Spiegelungsgruppen

G	Gruppe	$\lvert G\rvert$	Dim.	Grade	Kograde
G_1	A_{n-1}	$n!$	$n-1$	$2,3,\ldots,n$	$0,1,\ldots,n-2$
G_2	$G(m,p,n)$, $m>1$, $n>1$, $p\mid m$	$\frac{m^n n!}{p}$	n	$m,2m,\ldots,(n-1)m,\ \frac{mn}{p}$	$0,m,\ldots,(n-1)m$, wenn $p\neq m$; $0,m,\ldots,(n-2)m,(n-1)m-n$, wenn $p=m$
G_3	$\mathcal{C}_m$	m	1	m	0
G_4	$SL_2(\mathbb{F}_3)$	24	2	$4,6$	$0,2$
G_5	$\mathcal{C}_3\times\mathcal{T}$	72	2	$6,12$	$0,6$
G_6	$\mathcal{C}_4\circ G_4$	48	2	4, 12	0, 8
G_7	$\mathcal{C}_3\times(\mathcal{C}_4\circ\mathcal{T})$	144	2	12, 12	0, 12
G_8	$\mathcal{T}\mathcal{C}_4$	96	2	8, 12	0, 4
G_9	$\mathcal{C}_8\circ\mathcal{O}$	192	2	8, 24	0, 16
G_{10}	$\mathcal{C}_3\times\mathcal{T}\mathcal{C}_4$	288	2	12, 24	0, 12
G_{11}	$\mathcal{C}_3\times(\mathcal{C}_8\circ\mathcal{O})$	576	2	24, 24	0, 24
G_{12}	$GL_2(\mathbb{F}_3)$	48	2	6, 8	0, 10
G_{13}	$\mathcal{C}_4\circ\mathcal{O}$	96	2	8, 12	0, 16
G_{14}	$\mathcal{C}_3\times G_{12}$	144	2	6, 24	0, 18
G_{15}	$\mathcal{C}_3\times(\mathcal{C}_4)\circ\mathcal{O}$	288	2	12,24	0,24
G_{16}	$\mathcal{C}_5\times\mathcal{I}$	600	2	20, 30	0, 10
G_{17}	$\mathcal{C}_5\times(\mathcal{C}_4\circ\mathcal{I})$	1200	2	20, 60	0, 40
G_{18}	$\mathcal{C}_{15}\times\mathcal{I}$	1800	2	30, 60	0, 30
G_{19}	$\mathcal{C}_{15}\times(\mathcal{C}_4\circ\mathcal{I})$	3600	2	60, 60	0, 60
G_{20}	$\mathcal{C}_3\times\mathcal{I}$	360	2	12, 30	0, 18
G_{21}	$\mathcal{C}_3\times(\mathcal{C}_4\circ\mathcal{I})$	720	2	12, 60	0, 48
G_{22}	$\mathcal{C}_4\circ\mathcal{I}$	240	2	12, 20	0, 28
G_{23}	$W(\mathscr{H}_3)$	120	3	2, 6, 10	0, 4, 8
G_{24}	$W(\mathscr{I}_3^{(4)})$	336	3	4, 6, 14	0, 8, 10
G_{25}	$W(\mathscr{L}_3)$	648	3	6, 9, 12	0, 3, 6
G_{26}	$W(\mathscr{M}_3)$	1296	3	6, 12, 18	0, 6, 12
G_{27}	$W(\mathscr{I}_3^{(5)})$	2160	3	6, 12, 30	0, 18, 24
G_{28}	$W(\mathscr{F}_4)$	1152	4	2, 6, 8, 12	0, 4, 6, 10
G_{29}	$W(\mathscr{N}_4)$	7680	4	4, 8, 12, 20	0, 8, 12, 16
G_{30}	$W(\mathscr{H}_4)$	14400	4	2, 12, 20, 30	0, 10, 18, 28
G_{31}	$W(\mathscr{O}_4)$	46080	4	8, 12, 20, 24	0, 12, 16, 28
G_{32}	$W(\mathscr{L}_4)$	155520	4	12, 18, 24, 30	0, 6, 12, 18
G_{33}	$W(\mathscr{K}_5)$	51840	5	4, 6, 10, 12, 18	0, 6, 8, 12, 14
G_{34}	$W(\mathscr{K}_6)$	39191040	6	6, 12, 18, 24, 30, 42	0, 12, 18, 24, 30, 36
G_{35}	$W(\mathscr{E}_6)$	51840	6	2, 5, 6, 8, 9, 12	0, 3, 4, 6, 7, 10
G_{36}	$W(\mathscr{E}_7)$	2903040	7	2, 6, 8, 10, 12, 14, 18	0, 4, 6, 8, 10, 12, 16
G_{37}	$W(\mathscr{E}_8)$	696729600	8	2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30	0, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28

ANHANG B

Ergänzendes

1. Kommutative Algebra

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

LEMMA B.1. *Ist R ein Integritätsbereich, dann ist jede endliche Untergruppe der Einheitengruppe $R^\times$ zyklisch.*

Beweis: Sei G eine endliche Untergruppe von $R^\times$. Ist $|G| = p^k q$ für eine Primzahl p und für ein q mit $ggT(p,q) = 1$, dann besitzt F genau eine p-Sylowuntergruppe der Ordnung p, denn die Gleichung $X^p - 1$ hat höchstens p Lösungen in R. Es muss also $|F| = p_1 \cdots p_m$ und $F \cong \mathbb{Z}/p_1 \cdots p_m\mathbb{Z}$ für paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ gelten. Insbesondere ist F zyklisch. □

LEMMA B.2. *Ist G eine endliche Untergruppe von $Aut(R)$, dann ist R^G ganz über R.*

Beweis: Für ein $r \in R$ ist $\prod\limits_{g \in G} (x - g(r))$ ein normiertes Polynom, das eine Nullstelle in r hat. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind symmetrische Funktionen in $\{g(r) : g \in G\}$ und daher G-invariant. □

LEMMA B.3. *Seien M ein endlich erzeugter R-Modul, $\mathcal{I}$ ein Ideal in R und $\varphi : M \longrightarrow M$ ein R-Modulmorphismus, sodass $\varphi(M) \subseteq \mathcal{I}M$, dann gibt es $a_1, \ldots, a_s \in \mathcal{I}$ mit*

$$\varphi^s + a_1\varphi^{s-1} + \cdots + a_{s-1}\varphi + a_s = 0.$$

Beweis: Wähle Erzeuger $t_1, \ldots, t_s$ von M über R, dann gibt es nach Voraussetzung $a_{ij} \in \mathcal{I}$ mit $\varphi(t_i) = \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij}t_j$ für alle i. Bezeichnet $p_{ij} = \delta_{ij}\varphi - a_{ij} \in \mathcal{I}[\varphi]$, so ist $\sum\limits_{j=1}^{s} p_{ij}t_j = 0$ für alle i. Wenn also $P = (p_{ij})$ die Matrix mit Einträgen p_{ij} bezeichnet, so ist $0 = \mathrm{adj}(P)P \cdot t = \det(P) \cdot t$, daraus folgt aber, dass $\det P \cdot id_M$ die Nullabbildung ist, womit die Behauptung bewiesen ist. □

KOROLLAR B.4. *Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, der $M = \mathcal{I}M$ für ein Ideal $\mathcal{I}$ von R erfüllt, dann gibt es ein Element $u = 1 + a \in R$ mit $a \in \mathcal{I}$, sodass $uM = 0$ ist.*

LEMMA B.5. *Seien B ein Integritätsbereich, A ein Teilring, sodass die Erweiterung $A \subseteq B$ endlich ist. Ist nun $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ in B, sodass $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$ ist.*

Beweis: B ist nach Vorraussetzung ein endlich erzeugter A-Modul. Wäre $B = \mathfrak{m}B$, dann würde es nach Korollar B.4 ein $a \in \mathfrak{m}$ mit $(1+a)B = 0$ geben. Da $1 \notin \mathfrak{m}$ gilt, ist dies ein Widerspruch dazu, dass B ein Integritätsbereich ist. Es muss also $B \neq \mathfrak{m}B$ gelten und daher kann ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$ gewählt werden, das $\mathfrak{m}B$ enthält. Inbesondere gilt $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$. □

LEMMA B.6. *Seien G eine endliche Gruppe, die auf $V = \mathbb{C}^n$ operiert, und $S = \mathcal{S}(V^*)$. Ist $\{F_1, \dots, F_n\}$ eine Menge von algebraisch unabhängigen Elementen aus S^G, sodass S^G ganz über $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$ ist, dann ist die Abbildung $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{C}^n, v \mapsto (F_1(v), \dots, F_n(v))^t$, surjektiv.*

Beweis: Da $F_1, \dots, F_n$ algebraisch unabhängig sind, ist der Homomorphismus $\varphi^* : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow S, \varphi^*(X_i) = F_i$, injektiv. Deswegen kann nun $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ mit $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$ identifiziert werden. Nach Lemma B.2 ist S ganz über S^G und nach Voraussetzung ist S^G ganz über $S' := \mathbb{C}[F_1, \dots, F_n]$, weswegen insgesamt S ganz über S' ist. Weil S als Algebra endlich erzeugt ist, ist die Erweiterung $S' \subseteq S$ endlich.
Der Punkt $v \in V$ entspricht dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_v := \{P \in S : P(v) = 0\}$ von S. Nun entspricht $\varphi(v)$ dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_{\varphi(v)}$ von S und wegen der Identifikation von S' mit $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ entspricht $\varphi(v)$ dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_{\varphi(v)} = \varphi^{*-1}(\mathfrak{m}_v) = \mathfrak{m}_v \cap S'$ von S'. Da aber nach Lemma B.5 jedes maximale Ideal in S' die Form $\mathfrak{m} \cap S'$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von S hat, ist φ surjektiv. $\square$

LEMMA B.7. *Sind $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ und $\psi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ die Abbildung $\psi(x) := (g_1(x), \dots, g_m(x))$, sodass es kein nichttriviales Polynom $P \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ mit $P \circ \psi = 0$ gibt, dann ist, falls $\psi^* : \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ die Abbildung $f \mapsto f \circ \psi$ und $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ein endlich erzeugter $\psi^*(\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m])$-Modul sind, $\psi(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^m$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist ψ^* injektiv und $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ kann in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ eingebettet werden. Da die Punkte in $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$ genau den maximalen Idealen in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ bzw. $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ entsprechen, kann ψ interpretiert werden als $M \mapsto M \cap \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$, wo M ein maximales Ideal in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ist. Da aber jedes maximale Ideal in $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ nach Lemma B.5 die Form $M \cap \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ für ein maximales Ideal M in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ hat, ist $\psi(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]) = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$. $\square$

DEFINITION B.8. Eine Teilmenge A von $\mathbb{C}^n$ heißt *algebraisch*, falls

$$A = V(\mathcal{I}) := \{v \in \mathbb{C}^n : P(v) = 0 \text{ für alle } P \in \mathcal{I}\}$$

für ein Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ist. Der Koordinatenring $\mathbb{C}[A]$ von A ist die Menge aller $P|_A : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ und, wenn $\mathcal{I}_A$ der Kern der Abbildung $Res_A^{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{C}[A]$ ist, so ist $\mathbb{C}[A] \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}_A$.
Eine algebraische Menge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt reduzibel, falls A endliche Vereinigung echter algebraischer Teilmengen von A ist, sonst heißt A irreduzibel.
Eine irreduzible Komponente von A ist eine irreduzible algebraische Teilmenge von A, in der keine irreduziblen algebraischen Teilmengen echt enthalten sind.

PROPOSITION B.9. *Eine algebraische Menge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathcal{I}_A$ ein Primideal ist.*

Beweis: Siehe [**35**, Prop.11.6(i)]. $\square$

BEISPIEL B.10. Sind W ein Teilraum von $\mathbb{C}^n$, $\{X_1, \dots, X_s\}$ eine Basis von $\{L \in V^* : L|_W = 0\}$ und $\{X_1, \dots, X_n\}$ eine Basis von V^*, dann wird das Ideal $\mathcal{I}_W$ von $\{X_1, \dots, X_s\}$ erzeugt und $\mathbb{C}[W] = \mathbb{C}[X_{s+1}, \dots, X_n]$ ist ein Integritätsbereich. Daher ist $\mathcal{I}_W$ ein Primideal, was äquivalent dazu ist, dass W eine irreduzible algebraische Menge ist.

SATZ B.11 (Krullscher Hauptidealsatz). *Seien R ein noetherscher Ring und $f \in R$, sodass $f \neq 0$ und f keine Einheit sind. Außerdem sei P ein Primideal in R, das minimal in der Eigenschaft $(f) \subseteq P$ ist. P ist dann ein minimales Primideal von R.*

Beweis: Siehe [**4**, Korollar 11.17]. □

DEFINITION B.12. Die *Dimension* eines kommutativen Rings R ist das Supremum der Längen r von Ketten von Primidealen $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_r$ aus R.

KOROLLAR B.13. *Seien R ein Integritätsbereich und P wie im Krull' schen Hauptidealsatz, dann ist* $\dim R/P = \dim R - 1$.

KOROLLAR B.14. *Seien $A \subseteq \mathbb{C}^n$ eine irreduzible algebraische Menge, $f \neq 0$ aus $\mathbb{C}[A]$, dann hat jede irreduzible Komponente von $A \cap V(f)$ Dimension* $\dim(A) - 1$.

2. Lineare Algebra

LEMMA B.15. *Sind K ein unendlicher Körper und V ein K-Vektorraum, dann kann V nicht Vereinigung endlich vieler echter Teilräume sein.*

Beweis: Indirekt, angenommen es gibt echte Teilräume $V_1, \ldots, V_k$ von V, sodass $V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ ist, so wähle k minimal, das heißt, $V_j \nsubseteq \bigcup\limits_{i \neq j} V_i$ für alle $1 \leq j \leq k$. Wähle nun ein $u \notin V_k$ und ein $v \in V_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} V_i$ und definiere $L = \{v+tu : t \in K\}$. Weil $u \notin V_k$ und insbesondere $u \neq 0$, ist, enthält L unendlich viele Elemente. Da $L \subseteq V = \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ ist, muss mindestens ein V_i, $1 \leq i \leq k$, unendlich viele Elemente aus L enthalten. Würde V_k außer v noch ein weiteres Element $v+tu$, $t \neq 0$, aus L enthalten, so wäre $u = \frac{1}{t} tu = \frac{1}{t}((v+tu)-v) \in V_k$, was ein Widerspruch ist. Es muss also mindestens ein V_i für ein $1 \leq i \leq k-1$ unendlich viele Elemente aus L enthalten. Würde nun ein V_i mit $1 \leq i \leq k-1$ zwei verschiedene Elemente $v+t_1u$ und $v+t_2u$, das heißt, $t_1 \neq t_2$, aus L enthalten, dann wäre $v = \frac{1}{t_2-t_1}(t_2-t_1)v = \frac{1}{t_2-t_1}(t_2(v+t_1u)-t_1(v+t_2u)) \in V_i$, was ein Widerspruch ist. Insgesamt kann also kein V_i, $i = 1, \ldots, k$, unendlich viele Elemente aus L enthalten. □

SATZ B.16. *Sind K ein unendlicher Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K V \geq 2$, $W_1, \ldots, W_k$ Teilräume von V der Codimension > 1 und $v_0 \in V \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} W_i$, so gibt es einen 2-dimensionalen Teilraum V_0 von V mit $v_0 \in V_0$ und $V_0 \cap W_i = \{0\}$ für alle $1 \leq i \leq k$.*

Beweis: Induktion über $n = \dim_K V$:
Ist $n = 2$, dann können $W_1, \ldots, W_k$ nur $\{0\}$ sein. Die Behauptung folgt nun mit $V_0 = V$.
Sei $n > 2$.
Seien oBdA $W_1, \ldots, W_k$ ungleich $\{0\}$. Ist $\ell : V \longrightarrow K$ eine lineare Abbildung ungleich der Nullabbildung, dann ist

$$\dim_K \mathrm{Ker}(\ell) = \dim_K V - \dim_K \mathrm{Im}(\ell) = n - 1.$$

Sind außerdem $\ell \in V^*$ und W ein Teilraum von V mit $W \subseteq Ker(\ell)$, so sind durch $\overline{\ell} : V/W \longrightarrow K, \overline{\ell}(v+W) = \ell(v)$, eine lineare Abbildung mit $W \subseteq Ker(\overline{\ell})$ und durch $\ell \mapsto \overline{\ell}$ ein K-linearer Isomorphismus von dem Annihilator $W^0 = \{\ell \in V^* : \ell|_W \equiv 0\}$ von W nach $(V/W)^*$ gegeben. Insbesondere ist

$$\dim_K W_i^0 = \dim_K V/W_i = n - \dim_K W_i < n$$

für alle $1 \leq i \leq k$, das heißt, W_i^0 ist für alle $1 \leq i \leq k$ ein echter Teilraum von V^* der Codimension $\dim_K W_i$.
Sei $U = (Kv_0)^0$ ein echter Teilraum von V^* der Codimension 1. Da $v_0 \notin W_i$ für alle $1 \leq i \leq k$ gilt, sind $Kv_0 \nsubseteq W_i$ und daher $W_i^0 \nsubseteq U$ für alle $1 \leq i \leq k$. Bezeichnen

nun $U_i = U \cap W_i^0$ für alle $1 \leq i \leq k$, so ist U_i ein echter Teilraum von U, da sonst wegen $U \subseteq W_i^0 \subsetneqq V^*$ und, da U Codimension 1 hat, $U = W_i^0$ gelten müsste, was ein Widerspruch ist. Somit kann U nach Lemma B.15 nicht die Vereinigung von $U_1, \ldots, U_k$ sein, das heißt, es gibt eine lineare Abbildung $\ell : V \longrightarrow K$ mit $\ell(v_0) = 0$, das heißt, $v_0 \in \mathrm{Ker}(\ell)$, und $W_i \nsubseteq \mathrm{Ker}(\ell)$ für alle $i = 1, \ldots, k$.
Sei H eine Hyperebene in V, sodass $v_0 \in H$ und $W_i \nsubseteq H$ für alle $1 \leq i \leq k$ gilt. Weil die Abbildung $W_i \longrightarrow V/H$, $w \mapsto w + H$, für jedes $i = 1, \ldots, k$ surjektiv ist, gelten $V = H + W_i$ und mit der Dimensionsformel

$$\begin{aligned}\dim_K H \cap W_i &= \dim_K H + \dim_K W_i - \dim_K(H + W_i) = \dim_K H + \dim_K W_i - \dim_K V \\ &= \dim_K H - \dim_K V/W_i.\end{aligned}$$

Insbesondere ist dann $\dim_K H/(W_i \cap H) = \dim_K H - \dim_K(W_i \cap H) = \dim_K V/W_i$, das heißt, die Codimension von $W_i \cap H$ in H ist dieselbe wie die von W_i in V und damit größer als 1 für alle $1 \leq i \leq k$. Da $\dim_K H = n - 1$ ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen 2-dimensionalen Teilraum V_0 von H mit $v_0 \in V_0$ und $V_0 \cap W_i = V_0 \cap (H \cap W_i) = \{0\}$ für alle $1 \leq i \leq k$. $\square$

Satz B.17. *Sind $(V, \|\ \|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $W_1, \ldots, W_k$ abgeschlossene Teilräume von V mit Codimension in V größer 1, dann ist $V \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i$ wegzusammenhängend.*

Beweis: Ist $\dim_{\mathbb{R}} V \leq 1$, so ist die Behauptung trivial. Falls $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ ist, ist $\{0\}$ der einzige Teilraum von V der Codimension größer 1 und somit handelt es sich bei $V \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i$ um das Komplement endlich vieler Punkte in V, das wegzusammenhängend ist.
Seien $\dim_{\mathbb{R}} V > 2$ und $x, y \in V \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i$.
Wird mit $z = y - x$ gezeigt, dass es einen Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow V \setminus \bigcup_{i=1}^k (-x + W_i)$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = z$ gibt, dann existiert ein Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow V \setminus \bigcup_{i=1}^k W_i$ mit $\tilde{\gamma}(0) = x$ und $\tilde{\gamma}(1) = y$, nämlich $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t) + x$.
Sei also $z = y - x$. Weil die Translation stetig und ihre Umkehrabbildung wieder eine Translation ist, sind $\bigcup_{i=1}^k (-x + W_i)$ als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen und somit $V \setminus \bigcup_{i=1}^k (-x + W_i)$ offen. Insbesondere gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass die offene Kugel $B_\varepsilon(z) = \{v \in V : \|v - z\| < \varepsilon\}$ mit Radius ε um z in $V \setminus \bigcup_{i=1}^k (-x + W_i)$ und in $V \setminus \bigcup_{i \in \{j : z \notin W_j\}} W_i$ enthalten ist.
Würde nun $B_\varepsilon(z) = \bigcup_{i \in \{j : z \in W_j\}} W_i \cap B_\varepsilon(z)$ gelten, so wäre, da jeder Vektor in V ein skalares Vielfache eines Elements aus $B_\varepsilon(z)$ ist, $V = \bigcup_{i \in \{j : z \in W_j\}} W_i$, was nach Lemma B.15 ein Widerspruch ist. Es gibt somit ein Element $z' \in B_\varepsilon(z)$, das in keinem der Teilräume $W_1, \ldots, W_k$ liegt.
Wäre bewiesen, dass ein $v \in V$, das weder in $\bigcup_{i=1}^k W_i$ noch in $\bigcup_{i=1}^k (v_i + W_i)$ für $v_1, \ldots, v_k \in V$ liegt, mit 0 durch einen Weg in $V \setminus \bigcup_{i=1}^k (v_i + W_i)$ verbunden werden kann, so würde folgen, dass sowohl z und z' als auch 0 und z', also insgesamt 0 und

z, durch einen Weg in $V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (-x + W_i)$ verbunden werden können.

Sei daher $v \in V$, sodass v weder in $\bigcup_{i=1}^{k} W_i$ noch in $\bigcup_{i=1}^{k} (v_i + W_i)$ für $v_1, \ldots, v_k \in V$ liegt, dann gibt es nach Satz B.16 einen 2-dimensionalen Teilraum V_0 von V, der $v \in V_0$ und $V_0 \cap W_i = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, k$ erfüllt. Schließlich ist

$$V_0 \cap (V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (v_i + W_i)) = V_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (V_0 \cap (v_i + W_i))$$

als Komplement endlich vieler Punkte in dem 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V_0, da $V_0 \cap (v_i + W_i)$ entweder die leere Menge oder eine einpunktige Menge ist, wegzusammenhängend. $\square$

Korollar B.18. *Sind* $(V, \| \ \|)$ *ein normierter* $\mathbb{C}$*-Vektorraum und* $W_1, \ldots, W_k$ *echte abgeschlossene Teilräume von* V*, so ist* $V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ *wegzusammenhängend.*

Sind Y eine Menge und $f : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung von Mengen, so sind die offenen Mengen der *durch* f *induzierten Quotiententopologie* auf Y genau jene Teilmengen U von Y, deren Urbild $f^{-1}(U)$ in X offen ist, das heißt, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. Insbesondere ist f dann bezüglich der durch f induzierten Quotiententopologie auf Y stetig. Sind nun $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\Pi : X \longrightarrow X/_\sim$ die kanonische Abbildung, dann heißt die durch Π induzierte Quotiententopologie auf der Menge der Äquivalenzklassen $X/_\sim$ auch nur Quotiententopologie auf $X/_\sim$.

Lemma B.19. *Sind* $(X, \mathcal{T})$ *ein wegzusammenhängender topologischer Raum,* Y *eine Menge und* $f : X \longrightarrow Y$ *eine surjektive Abbildung von Mengen, so ist* Y *bezüglich der von* f *induzierten Quotiententopologie wegzusammenhängend.*

Beweis: Sind y_1 und y_2 in Y, so gibt es x_1 und x_2 in X mit $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$. Die Abbildung $f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow Y$ ist dann stetig mit $(f \circ \gamma)(0) = y_1$ und $(f \circ \gamma)(1) = y_2$. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] E. Artin. Theory of braids. *Annals of Mathematics*, 48(1):101–126, 1947.

[2] C. A. Athanasiadis and V. Reiner. Non-crossing partitions for the group d_n. *SIAM J. Discrete Math.*, 18:397–417, 2004.

[3] C. A. Athanasiadis and V. Reiner. Noncrossing partitions for the group d_n. *SIAM J. Discrete Mathematics*, 18:397–417, 2004.

[4] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

[5] H. W. Becker. Rooks and rhymes. *Mathematics Magazine*, 22(1):23–26, 1948.

[6] H. W. Becker. Planar rhyme shemes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 58(1):39, 1952.

[7] D. Bessis. Zariski theorems and diagrams for braid groups. *Inventiones Mathematicae*, 145(3):487–507, 2001.

[8] D. Bessis. The dual braid monoid. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 36:647–683, 2003.

[9] D. Bessis. Finite complex reflection arrangements are k(π,1). *arXiv preprint*, math.GT/0610777v3, 2007.

[10] D. Bessis and R. Corran. Non-crossing partitions of type (e,e,r). *Advances Math.*, 202:1–49, 2006.

[11] D. Bessis and V. Reiner. Cyclic sieving of noncrossing partitions for complex reflection groups. *Annals of Combinatorics*, 15(2):197–222, 2011.

[12] P. Biane. Some properties of crossings and partitions. *Discrete Mathematics*, 175:41–53, 1997.

[13] P. Biane, F. Goodman, and A. Nica. Non-crossing cumulants of type b. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355:2263–2303, 2003.

[14] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6*. Paris: Hermann, 1968.

[15] N. Bourbaki. *Elements of mathematics. General Topology. Chapters 1-4*. Springer, 1989.

[16] T. Brady. A partial order on the symmetric group and new k(π,1)'s for the braid groups. *Advances in Mathematic*, 161:20–40, 2002.

[17] T. Brady and C. Watt. K(π,1)'s for artin groups of finite type. *Geom. Dedicata*, 94:225–250, 2002.

[18] T. Brady and C. Watt. A partial order on the orthogonal group. *Communications in Algebra*, 30(8):3749–3754, 2002.

[19] M. Broué, G. Malle, and R. Rouquier. Complex reflection groups, braid groups, hecke algebras. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 500:127–190, 1998.

[20] F. Chapoton. Enumerative properties of generalized associahedra. *Sém. Lothar. Combin.*, 51, 2004.

[21] C. Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. *American Journal of Mathematics*, 77(4):778–782, 1955.

[22] D. Cox, J. Little, and D. O' Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer, 2007.

[23] E. A. Gutkin. Matrices connected with groups generated by mappings. *Functional Analysis and its Applications*, 7(2):153–154, 1973.

[24] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[25] D. Hilbert. Über die theorie der algebraischen formen. *Mathematische Annalen*, 36:473–534, 1890.

[26] B. Huppert and W. Willems. *Lineare Algebra*. Vieweg + Teubner Verlag, 2010.

[27] L. Kahanpää, P. Kekäläinen, K. Smith, and W. Travers. *An invitation to algebraic geometry*. Springer, 2000.

[28] A. W. Knapp. *Basic Algebra*. Birkhäuser Boston, 2006.

[29] G. Kreweras. Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Mathematics*, 1(4):333–350, 1972.

[30] S. Lang. *Algebra*. Springer, 2002.

[31] G. I. Lehrer. A new proof of steinberg's fixed-point theorem. *Int. Math. Research Notes*, 28:1407–1411, 2004.

[32] G. I. Lehrer and J. Michel. Invariant theory and eigenspaces for unitary reflection groups. *Comptes Rendus. Mathématique. Académie des Sciences, Paris.*, 336(10):795–800, 2003.
[33] G. I. Lehrer and T. A. Springer. Intersection multiplicities and reflection subquotients of unitary reflection groups. *Geometric Group Theory Down Under*, pages 181–193, 1996.
[34] G. I. Lehrer and T. A. Springer. Reflection subquotients of unitary reflection groups. *Canad. J. Math.*, 51(6):1175–1193, 1999.
[35] G. I. Lehrer and D. E. Taylor. *Unitary Reflection Group.* Cambridge University Press, 2009.
[36] T. Molien. Über die invarianten der linearen substitutionsgruppe. *Sitzungsber. König. Preuss. Akad. Wiss.*, pages 1152–1156, 1897.
[37] T. Motzkin. Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for nonassociative products. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(4):352–360, 1948.
[38] P. Orlik and L. Solomon. Unitary reflection groups and cohomology. *Inventiones mathematicae*, 59:77–94, 1980.
[39] H. Osborn. *Foundations and Stiefel-Whitney Classes*, volume 1 of *Vector Bundles.* Academic Press, Inc., 1982.
[40] V. Reiner. Non-crossing partitions for classical reflection groups. *Discrete Mathematics*, 177:195–222, 1997.
[41] V. Reiner, D. Stanton, and D. White. The cyclic sieving phenomenon.
[42] J. P. Serre. Groupes finis d'automorphismes d'anneaux locaux réguliers. *Colloque d'Algèbre EN-SJF*, 8:1–11, 1967.
[43] G. C. Shephard and J. A. Todd. Finite unitary reflection groups. *Canad. J. Math.*, 5:364–383, 1953.
[44] L. Smith. *Polynomial Invariants of Finite Groups.* A K Peters, Ltd., 1995.
[45] T. A. Springer. Regular elements of finite reflection groups. *Inventiones mathematicae*, 25:159–198, 1974.
[46] R. Steinberg. Differential equations invariant under finite reflection groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 112:392–400, 1964.
[47] J. R. Stembridge. On minuscule representations, plane partitions and involutions in complex lie groups. *Duke Math. J.*, 73:469–490, 1994.
[48] J. R. Stembridge. Some hidden relations involving the ten symmetry classes of plane partitions. *Journal Combin. Theory Ser. A*, 68:372–409, 1994.

Zusammenfassung

In Kapitel 1 wird das Phänomen des zyklischen Siebens eingeführt. Es handelt sich dabei um die Eigenschaft eines Tripels $(X, X(q), C)$ bestehend aus einer endlichen Menge X, einer endlichen, zyklischen Gruppe C der Ordnung n, die auf X operiert, und einer erzeugenden Funktion $X(q)$ von X, das heißt, die Koeffizienten von $X(q)$ sind in $\mathbb{N}_0$ und $X(1) = |X|$. Bezeichnen $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ die eindeutig bestimmten Koeffizienten in

$$X(q) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i q^i \bmod (q^n - 1),$$

dann erfüllt das Tripel $(X, X(q), C)$ das *Phänomen des zyklischen Siebens*, wenn α_i die Anzahl der Bahnen von C in X, deren Stabilisatorordnung i teilt, ist. Wird eine Einbettung $\omega : C \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ gewählt, so ist dies äquivalent zu

$$X(\omega(c)) = |\{x \in X : c \cdot x = x\}| \text{ für alle } c \in C.$$

Um den Begriff nichtkreuzender Partitionen wohlerzeugter, irreduzibler unitärer Spiegelungsgruppen zu formulieren, werden zunächst einige Grundlagen über unitäre Spiegelungsgruppen benötigt, welche in Kapitel 2 und Kapitel 3 zu finden sind.

Eine *unitäre Spiegelung* oder *Pseudo-Spiegelung* auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist ein $r \in GL(V)$ endlicher Ordnung, das $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(1 - r) = \dim_{\mathbb{C}}V - 1$ erfüllt. Die Hyperebene $\mathrm{Im}(1 - r)$ in V heißt dann *spiegelnde Hyperebene* von r und eine Untergruppe G von $GL(V)$, die von Spiegelungen erzeugt wird, heißt *unitäre Spiegelungsgruppe* auf V. Die natürliche Darstellung von G auf V induziert eine Darstellung von G auf V^*, welche eindeutig auf die symmetrische Algebra $\mathcal{S}(V^*)$ fortgesetzt werden kann. Wird ein Element $P \in \mathcal{S}(V^*)$ von allen Elementen in G punktweise fixiert, dann wird P als *G-invariant* bezeichnet. Die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{S}(V^*)^G$ der G-invarianten Elemente in $\mathcal{S}(V^*)$, die *Invariantenalgebra* von G, kann von $n := \dim_{\mathbb{C}}V$ homogenen, algebraisch unabhängigen Elementen erzeugt werden, deren Grade $d_1, \ldots, d_n$ nur von G abhängen und als *Grade* von G bezeichnet werden. Die Ordnung von G ist dann $\prod_{i=1}^{n} d_i$ und G enthält $\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ unitäre Spiegelungen. Weitere wichtige Größen einer unitären Spiegelungsgruppe G sind die *Kograde* $d_n^* \leq \cdots \leq d_1^*$ von G, welche durch $\sum_{g \in G} \det(g) X^{\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Fix}(g)} = \prod_{i=1}^{n}(X - d_i^* - 1)$ eindeutig festgelegt sind. Die Anzahl der spiegelnden Hyperebenen von G ist dann $\sum_{i=1}^{n}(d_i^* + 1)$. Abschließend sei noch ein wichtiger Satz erwähnt, der sogenannte *Fixpunktsatz* von Steinberg: Ist U eine Teilmenge von V, dann ist der punktweise Stabilisator $G_U = \{g \in G : g \cdot u = u \text{ für alle } u \in U\}$ von U genau jene unitäre Spiegelungsgruppe auf V, die von jenen Spiegelungen in G erzeugt wird, die U punktweise fixieren.

Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ heißt *regulär*, falls er in keiner spiegelnden Hyperebene von G liegt, ein $g \in G$ heißt ζ-*regulär*, falls der ζ-Eigenraum von g einen regulären Vektor enthält, und ein $d \in \mathbb{N}$ heißt *regulär*, falls es eine primitive d-te Einheitswurzel ζ und ein $g \in G$ gibt, sodass g ζ-regulär ist. Insbesondere ist ein $d \in \mathbb{N}$ genau dann regulär, wenn genausoviele Grade wie Kograde von G von d geteilt werden. Springer hat außerdem gezeigt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ und für jede d-te primitive Einheitswurzel ζ in $\mathbb{C}$, alle ζ-regulären die Ordnung d haben und je zwei ζ-reguläre Elemente zueinander konjugiert sind.

Eine unitäre Spiegelungsgruppe W von $\mathbb{C}^n$ heißt *wohlerzeugt*, falls sie von n unitären Spiegelungen erzeugt werden kann. Ist W irreduzibel, dann ist W genau dann wohlerzeugt, wenn $d_i + d_i^* = d_n$ für alle Grade $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ und Kograde $d_n^* \leq \cdots \leq d_1^*$ von W gilt. Insbesondere ist der Grad d_n dann regulär. Sind ζ eine primitive d_n-te Einheitswurzel, c ein ζ-reguläres Element und d ein Teiler von d_n, dann ist der Zentralisator $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ eine wohlerzeugte, irreduzible unitäre Spiegelunggruppe auf dem $\zeta^{\frac{d_n}{d}}$-Eigenraum E von $c^{\frac{d_n}{d}}$, deren Grade bzw. Kograde genau die Grade bzw. Kograde von W, die von d geteilt werden, sind. Insbesondere ist d_n ein und daher der größte Grad von $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ und regulär.

Da d_n regulär für eine wohlerzeugte, irreduzible unitäre Spiegelungsgruppe W ist, gibt es insbesondere ein $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-reguläres Element in W. Ein solches Element wird als *Coxeterelement* von W bezeichnet und ist bis auf Konjugation eindeutig bestimmt. Wird die Länge eines Elements $w \in W$ definiert als

$$\ell(w) := \min\{m \in \mathbb{N} : w = r_1 \cdots r_m \text{ für unitäre Spiegelungen } r_1, \ldots, r_m \in W\},$$

dann heißt die Menge

$$\mathrm{NC}(W) = \{w \in W : \ell(w) + \ell(w^{-1}c) = n\}$$

die Menge der *W-nichtkreuzenden Partitionen* und ist unabhängig von der Wahl des Coxeterelements. In Kapitel 5 wird gezeigt, dass $\mathrm{NC}(W)$ eine Verallgemeinerung der Menge nichtkreuzender Partitionen von $[n]$ ist. Die zyklische Gruppe C, die von c erzeugt wird, operiert durch Konjugation auf $\mathrm{NC}(W)$ und

$$\mathrm{Cat}(W, q) := \prod_{i=1}^{n} \frac{[d_n + d_i]_q}{[d_i]_q}$$

ist eine erzeugende Funktion von $\mathrm{NC}(W)$.

Satz. Das Tripel

$$(\mathrm{NC}(W), \mathrm{Cat}(W, q), C)$$

erfüllt das Phänomen des zyklischen Siebens.

In Kapitel 5 wird gezeigt, dass für alle Teiler d von d_n

$$\mathrm{NC}(W) \cap C_W(c^{\frac{d_n}{d}}) = \mathrm{NC}(C_W(c^{\frac{d_n}{d}})) \tag{$*$}$$

gilt, woraus

$$\begin{aligned}\mathrm{Cat}(W, e^{\frac{2\pi k i}{d_n}}) = \prod_{\substack{i=1 \\ \mathrm{ord}\, c^k | d_i}}^{n} \frac{d_n + d_i}{d_i} &= |\mathrm{NC}(C_W(c^k))| = |\mathrm{NC}(W) \cap C_W(c^k)| \\ &= |\{w \in \mathrm{NC}(W) : c^k w c^{-k} = w\}|\end{aligned}$$

für alle $1 \leq k \leq d_n$ und damit obiger Satz folgt. Ein wichtiges Werkzeug um $(*)$ zu beweisen sind die sog. *Zopfgruppen* und besondere Elemente der Zopfgruppen, die sog. *einfachen* Elemente, welche in Kapitel 4 behandelt werden.

Abstract

In chapter 1 the cyclic sieving phenomenon is introduced. It's the property of a triple $(X, X(q), C)$ consisting of a finite set X, a finite, cyclic group C acting on X of order n and a generating function $X(q)$ for X, that is a polynomial having nonnegative integer coefficients with the property that $X(1) = |X|$. If $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ denote the uniquely defined coefficients by the expansion

$$X(q) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i q^i \bmod (q^n - 1),$$

the triple $(X, X(q), C)$ exhibits the *cyclic sieving phenomenon* if and only if α_i counts the number of C-orbits on X for which the stabilizer-order divides i for all i. An equivalent condition is

$$X(\omega(c)) = |\{x \in X : c \cdot x = x\}$$

for all $c \in C$ and for a fixed embedding $\omega : C \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$.

To define noncrossing partitions for unitary reflection groups some basic facts about unitary reflection groups are needed, which can be found in chapters 2 and 3.

Given a finite-dimensional vector space V of dimension n over the complex field $\mathbb{C}$, a linear transformation r is an *unitary reflection* or a *pseudo-reflection*, if the order of r is finite and $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(1 - r) = n - 1$. The hyperplane $\mathrm{Im}(1 - r)$ is then called *reflecting hyperplane.* A group, which is generated by reflections, is called a *unitary reflection group.* The natural representation of G on V induces a representation on V^*, which can be uniquely extended to a representation of G on the symmetric algebra $\mathcal{S}(V^*)$. An element P of $\mathcal{S}(V^*)$ is G-invariant if P is pointwise fixed by every element of G. The algebra of G-invariant elements of $\mathcal{S}(V^*)$ is called the *algebra of invariants* and refered to as S^G. It can be generated by n algebraic independent homogeneous elements of S^G whose degrees $d_1, \ldots, d_n$ are uniquely defined and therefore are called *degrees* of G. For example the order of G is given by $\prod_{i=1}^{n} d_i$ and G contains $\sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)$ unitary reflections. Further important constants of an unitary reflection group are the *codegrees* $d_1^*, \ldots, d_n^*$ which are uniquely determined by the equation $\sum_{g \in G} \det(g) X^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Fix}(g)} = \prod_{i=1}^{n} (X - d_i^* - 1)$. For example the number of reflecting hyperplanes of G is $\sum_{i=1}^{n} (d_i^* + 1)$.

A vector $v \in \mathbb{C}^n$ is *regular*, if v is not contained in any reflecting hyperplane of G, an element $g \in G$ is ζ*-regular*, if the ζ-eigenspace of g contains a regular vector and a nonnegative integer $d \in \mathbb{N}$ is *regular*, if there is a d^{th} primitive root of unity ζ and an element $g \in G$ such that g is ζ-regular. In particular is d regular if and only if d divides as many degrees as it divides codegrees. Springer also proved that

for every $d \in \mathbb{N}$ and for every d^{th} primitive root of unity ζ every ζ-regular element in G is of order d and every two ζ-regular elements are conjugate.

A unitary reflection group W is *well-generated*, if it can be generated by n reflections. Whether W is an irreducible unitary reflection group, W is well-generated if and only if $d_i + d_i^* = d_n$ holds for all degrees $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ and codegrees $d_n^* \leq \cdots \leq d_1^*$. In particular d_n is regular. If ζ denotes a d_n^{th} root of unity, c a ζ-regular element and d a divisor of d_n, then the centralizer $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ is a wellgenerated, irreducible unitary reflection group acting on the $\zeta^{\frac{d_n}{d}}$-eigenspace of $c^{\frac{d_n}{d}}$, whose degrees respectively codegrees are the degrees resp. codegrees of W, which are divided by d. In particular d_n is a degree of $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$ and therefore regular for $C_W(c^{\frac{d_n}{d}})$.

Because d_n is regular for a well-generated irreducible unitary reflection group W there exists a $e^{\frac{2\pi i}{d_n}}$-regular element in W. Such an element is called a *Coxeterelement* of W and is uniquely determined up to conjugacy. If the length of an element w of W is defined as

$$\ell(w) := \min\{m \in \mathbb{N} : w = r_1 \cdots r_m \text{ for unitary reflections } r_1, \ldots, r_m \in W\},$$

then the set

$$\mathrm{NC}(W) = \{w \in W : \ell(w) + \ell(w^{-1}c) = n\}$$

is the set of *noncrossing partitions* of W and is independent of the choice of c. In chapter 5 is proven that $\mathrm{NC}(W)$ is a generalisation of the set of noncrossing partitions of $[n]$. The cyclic group C generated by c acts by conjugation on $\mathrm{NC}(W)$ and

$$\mathrm{Cat}(W, q) := \prod_{i=1}^{n} \frac{[d_n + d_i]_q}{[d_i]_q}$$

is a generating function of $\mathrm{NC}(W)$.

Theorem. The triple

$$(\mathrm{NC}(W), \mathrm{Cat}(W, q), C)$$

exhibits the cyclic sieving phenomenon.

In chapter 5 is shown that for all divisors d of d_n

$$(*) \qquad \mathrm{NC}(W) \cap C_W(c^{\frac{d_n}{d}}) = \mathrm{NC}(C_W(c^{\frac{d_n}{d}}))$$

and thus

$$\begin{aligned}\mathrm{Cat}(W, e^{\frac{2\pi k i}{d_n}}) = \prod_{\substack{i=1 \\ \mathrm{ord}\, c^k | d_i}}^{n} \frac{d_n + d_i}{d_i} &= |\mathrm{NC}(C_W(c^k))| = |\mathrm{NC}(W) \cap C_W(c^k)| \\ &= |\{w \in \mathrm{NC}(W) : c^k w c^{-k} = w\}|\end{aligned}$$

for all $1 \leq k \leq d_n$ hold. The theorem then follows immediately. An important tool to prove $(*)$ are the so-called *braid-groups* and particular elements of the braid-groups, the so-called *simple* elements, which are discussed in chapter 4.

Lebenslauf des Autors

Sabine Beil	
Geburtsdatum:	19.01.1986
Staatsbürgerschaft:	Österreich
E-Mail:	beil.s@gmx.at
Bildungsweg	
seit 03/ 2005	Diplomstudium Mathematik an der Universität Wien
10/2004 - 02/2005	Diplomstudium Psychologie an der Universität Wien
09/2000 - 06/2004	Bundesoberstufenrealgymnasium Mistelbach a. d. Zaya
09/1996 - 06/2000	Hauptschule II Wolkersdorf im Weinviertel