universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Nichtstandard-Analysis reellwertiger Funktionen

Verfasserin

Ruth Silberbauer

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2011

Matrikelnummer:	0501614
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 482 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	UF Bewegung und Sport
	UF Mathematik
Betreuer:	a.o. Univ.-Prof. Dr. Günther Hörmann

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Einblick in die Nichtstandard-Analysis rund um Funktionen gegeben. Dabei wird immer wieder Bezug zur klassischen Analysis genommen.

Ein großer Teil der vorliegenden Diplomarbeit ist an die Darstellung in [LR] angelehnt. Gelegentlich werden Beispiele und Aspekte aus [WZ], [RB], [DL] und [TL] verwendet. Für den Standardzugang zur Analysis, die sogenannte klassische Analysis, wird das Buch [OF] als Referenz gebraucht.

Die Arbeit gliedert sich in drei Teile, nämlich einer Einleitung, dem mathematischen Teil und dem anschließenden Resumee.
Im ersten Kapitel wird ein kurzer historischer Rückblick auf die Entwicklung der Nichtstandard-Analysis gegeben und der Unterschied zwischen der reellen Analysis und der Nichtstandard-Analysis zusammengefasst. Weiters werden grundlegende einführende Begriffe bearbeitet, die ausführlicher in der Diplomarbeit [SC] nachzulesen sind.
Im Hauptteil beschäftigen wir uns vor allem mit der Nichtstandard-Version rund um reellwertige Funktionen. Es werden die Themen Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Differenzierbarkeit behandelt, wobei wir immer wieder einen Vergleich zur klassischen Analysis machen werden. Anschließend folgen zwei wichtige Prinzipien der Nichtstandard-Analysis, nämlich das Transferprinzip und das Permanenzprinzip, sowie deren Anwendung. Das vorletzte Kapitel handelt von Funktionenfolgen.
Im letzten Kapitel Rück- und Ausblick werden Vor- und Nachteile der Nichtstandard-Analysis und eine eventuelle Einbindung in das Lehrangebot für Studierende Lehramt Mathematik diskutiert.
Der Anhang über Filter und Ultrafilter ist eine Sammlung von wichtigen Begriffen und Definitionen, die die Grundlage für diese Arbeit bilden.

An Vorkenntnissen werden Grundbegriffe wie Mengen und Strukturen, Körperbegriff und die Anfänge der reellen Analysis vorausgesetzt.

Abstract

In this thesis we provide an introduction to nonstandard analysis of real functions with occasional comparison to classical analysis.

In big parts of this thesis we follow [LR]. Several examples and aspects are taken from [WZ], [RB], [DL], and also [TL] is used. For the standard approach to analysis we use [OF] as a reference.

This paper is divided into three parts, namely a historic and preparatory introduction, the main part consisting of chapters 3-7 and the subsequent résumé.
The first chapter gives a brief review of the historical development of nonstandard analysis and a summary of the difference between classical analysis and nonstandard analysis. The second chapter then deals with the basic notions of nonstandard numbers. More details can be found in the thesis of [SC].
In the main part, we mainly deal with nonstandard methods for and extensions of real-valued functions. We address the issues of continuity, uniform continuity and differentiability. We discuss it in a comparison with classical analysis. Then two important principles of nonstandard analysis, namely the transfer principle and the permanence prinziple are presented and their application is illustrated. The punultimate chapter is devoted to function sequences.
In the last chapter we review advantages and disadvantages of nonstandard analysis and its possible inclusion in the curriculum students mathematics education is discussed.
The appendix on filters and ultrafilters is a collection of important notions and definitions that form the technical basics for the constructions.

Danksagung

Während des Studiums und der Erstellung der Diplomarbeit haben mich viele unterstützt und begleitet. Dafür möchte ich mich herzlichst bedanken.

Ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern Monika und Franz, die mich finanziell, aber auch mit ihrem Interesse an meiner Arbeit und meinem Studium so gut es ging unterstützten, sowie meinen Geschwistern.

Weiters möchte ich mich bei meiner Studienkollegin und Freundin Cornelia Schubert bedanken, mit der auch die mühsamsten Prüfungsvorbereitungen Spaß machten und meinem Freund, der mir die letzten Studienjahre versüßte.

Meinen Dank möchte ich schließlich an Herrn Professor Dr. Günther Hörmann für die freundliche und geduldige Unterstützung richten. Mit seinen Verbesserungsvorschlägen stand er mir immer zur Seite.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkungen und grundlegende Begriffe

1.1. Historisches

Der folgende Text in diesem Abschnitt bezieht sich auf die Quellen [LR]; [RB], Chapter I und [DL].

Die Nichtstandard-Mathematik hat in den letzten Jahrzehnten wieder mehr Eingang in die Mathematik gefunden, obwohl sie noch immer ein Randgebiet darstellt.

Schon bei den antiken Griechen, vor allem in der Geometrie des Euklid, tauchen Ansätze zu Grenzprozessen auf. Auch Archimedes verwendete zum Beispiel das regelmäßige n-Eck, um den Kreis zu untersuchen.

Vor allem durch Leibniz und Newton haben im 17. Jahrhundert infinitesimale Größen Eingang in die Mathematik gefunden, wobei es keine sichere mathematische Grundlage gab. Bis ins 19. Jahrhundert hinein gebrauchte man infinitesimale Größen, obwohl sie streng formal nicht begründet waren und eher intuitiv verwendet wurden.

Durch die von Weierstraß im 19. Jahrhundert entwickelten ϵ-δ-Methoden zur Behandlung von Grenzprozessen und der Stetigkeit kam es zur Verdrängung der Nichtstandard-Mathematik.

Obwohl Leibniz schon die Idee hatte, ein erweitertes Zahlensystem zu schaffen, welches infinitesimale Größen enthält, lieferte erst Hahn 1907 eine geschlossene Theorie des Infinitesimalen.

Etwa 50 Jahre später entwickelten Laugwitz und Schmieden eine Theorie des Infinitesimalen und übertrugen diese auf die Analysis. Das war sozusagen der eigentliche Beginn der Nichtstandard-Mathematik.

1961 gelang es Abraham Robinson die Forderungen von Leibniz zu erfüllen. Er konstruierte einen angeordneten Zahlkörper ${}^*\mathbb{R}$, der den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfasst und infinitesimale und unendliche Elemente enthält. Diese Theorie ist für die reelle Analysis verwendbar. Das Neue war das Transferprinzip (siehe Kapitel 5). Es besagt im Grunde, dass Aussagen, die in $\mathbb{R}$ gelten, auch in ${}^*\mathbb{R}$ gelten.

Robinsons Nichtstandard-Methoden können inzwischen auf jedes mathematische Gebiet angewendet werden. So wurde aus der Nichtstandard-Analysis die Nichtstandard- Mathematik, die mehr eine Methode als ein Gebiet ist.

In den Bereichen der Topologie, Funktionalanalysis, Stochastik, Mathematischen Physik und der Mathematischen Ökonomie werden die Nichtstandard-Methoden erfolgreich eingesetzt und angwendet.

Der Unterschied zwischen der Nichtstandard-Analysis und der reellen Analysis liegt darin, dass in der Nichtstandard-Analysis infinitesimale Zahlen, also positive Zahlen, die kleiner als jede reelle Zahl sind und infinite Zahlen, also Zahlen, die größer als alle natürlichen Zahlen sind, verwendet werden. Es werden also größere Zahlenbereiche als $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ geschaffen.

Im Gegensatz zur Klassischen Analysis werden zusätzlich zu den reellen Zahlen auch hyperreelle Zahlen, bezeichnet mit ${}^*\mathbb{R}$, verwendet. Sie bilden einen geordneten Erweiterungskörper der reellen Zahlen.

Durch die Verwendung unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen in der Nichtstandard-Analysis sind Begriffe wie Differenzierbarkeit, Stetigkeit, Integral und Konvergenz ohne Betrachtung der Grenzwertbildung möglich.

1.2. Die hyperreellen Zahlen

Nach einer Einführung in die Konstruktion der hyperreellen Zahlen werden einige Grundbegriffe der Nichtstandard-Zahlen wiederholt, die in den folgenden Abschnitten von Bedeutung sein werden. (vgl. [LR] bzw. [SC])

Sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also die Menge aller Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$.

Mit ${}^*\mathbb{R}$ wird die Menge der hyperreellen Zahlen bezeichnet. Der Erweiterungskörper ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ wird mit Hilfe eines koendlichen Ultrafilters $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$ aus Klassen reeller Folgen konstruiert.

Resag (2008) schildert diese Konstruktion des Erweiterungskörpers $^*\mathbb{R}$ kurz und prägnant:

> „Als Startpunkt müssen wir uns zunächst für einen freien Ultrafilter entscheiden, den wir anschließend beibehalten werden. Damit ist dann der Größenvergleich von Zahlenfolgen festgelegt. Zahlenfolgen, die wir als „gleich" ansehen, sollen dabei dieselbe hyperreelle Zahl darstellen. Auf diese Weise kann man die Menge aller Zahlenfolgen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ in einzelne Teilmengen aufteilen, wobei die Folgen in jeder einzelnen Teilmenge untereinander gleich sein sollen. Diese Teilmengen bezeichnet man als Äquivalenzklassen. Jede Folge in einer Äquivalenzklasse modelliert dieselbe hyperreelle Zahl. Man sagt daher auch, die Äquivalenzklasse insgesamt modelliert die hyperreelle Zahl. Die Menge der hyperreellen Zahlen ist dann gleichsam die Menge dieser Äquivalenzklassen. Das hört sich geheimnisvoll an, bedeutet aber lediglich, dass wir aus einer Äquivalenzklasse irgendeine Folge auswählen dürfen, um unsere hyperreelle Zahl darzustellen. Dabei darf es keine Rolle spielen, welche Folge wir konkret nehmen. So etwas kommt in der Mathematik öfter vor: Auch bei Brüchen gibt es das, denn die Brüche 1/2 und 2/4 stellen dieselbe rationale Zahl dar." (vgl. [JR], Kapitel 4)

Die Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ wird ausführlich in [SC], Kapitel 1 behandelt. Weiters ist sie in [LR] nachzulesen. Die Begriffe Filter und Ultrafilter sind im Anhang zu finden.

Zunächst wiederholen wir die Begriffe Äquivalenzrelation ($\alpha \sim \beta$), die Sprechweise fast überall (f.ü.) und die Begriffe endlich, unendlich, infinitesimal benachbart zu bzw. infinitesimal benachbart bei ($\alpha \approx \beta$):

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, das heißt α und β sind Folgen in $\mathbb{R}$.
Dann schreiben wir $\alpha \sim \beta$, falls gilt:

$$\{n \in \mathbb{N} : \alpha(n) = \beta(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dann schreiben wir

$\alpha(i) = \beta(i)$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$, falls $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{F}$ ist;

$\alpha(i) \leq \beta(i)$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$, falls $\{i \in \mathbb{N} : \alpha(i) \leq \beta(i)\} \in \mathcal{F}$ ist,

und analog

$\alpha(i) \geq \beta(i)$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge ${}^*\mathbb{R}$ wird im Wesentlichen aus den Klassen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ gebildet, wobei statt der Klasse einer konstanten Folge $r_{\mathbb{N}} := (r)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die entsprechende reelle Zahl r genommen wird. Die Rechenoperationen auf ${}^*\mathbb{R}$ werden von den punktweisen Operationen mit Folgen abgeleitet. (vgl. [LR])

Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, dann heißt

(i) $\overline{\alpha}$ endlich bzw. finit, falls $|\overline{\alpha}| \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist,
das heißt es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $|\alpha(i)| \leq n$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

(ii) $\overline{\alpha}$ unendlich, falls $|\overline{\alpha}| \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist,
das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\alpha(i)| \geq n$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

(iii) $\overline{\alpha}$ infinitesimal, falls $|\overline{\alpha}| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist,
das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\alpha(i)| \leq \frac{1}{n}$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

(iv) $\overline{\alpha}$ unendlich nahe bei bzw. infinitesimal benachbart zu $\overline{\beta}$, in Zeichen $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$,
falls $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$ infinitesimal ist.

Bemerkung: Für Klassen $\overline{\alpha}$ in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wird in späterer Folge auch die Notation $\langle\alpha\rangle$ verwendet.

2. Fortsetzung von klassischen Funktionen

Für das weitere Vorgehen wird der Funktionsbegriff der klassischen Analysis vorausgesetzt. Insbesondere werden wir Verknüpfungen von Funktionen häufig verwenden.

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Dann ist $f \circ \alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die durch $(f \circ \alpha)(n) := f(\alpha(n))$, für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Funktion.
Hier stellen sowohl α als auch $f \circ \alpha$ reelle Folgen dar.

Beispiel 2.1.
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - 3$ und $\alpha(n) = n^2$. So erhalten wir durch die Verknüpfung $h := f \circ \alpha$ die Funktion (bzw. Folge) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, wobei $h(n) = f(\alpha(n)) = n^2 - 3$.

Es wird nun jeder Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ zugeordnet, die die vorgegebene Funktion f fortsetzt. Eigenschaften wie Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion f, die in späteren Kapiteln behandelt werden, können durch die Funktion ${}^*f$ ausgedrückt werden. Dabei fließen die Eigenschaften von ${}^*\mathbb{R}$, die spezielle Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ und dass ${}^*\mathbb{R}$ ein echter angeordneter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ ist, ein. (vgl. [LR] §4)

Satz 2.2 (Die Funktion ${}^*f$ als Fortsetzung der Funktion f).
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Wir setzen ${}^*f(\overline{\alpha}) := \overline{\beta}$ mit $\beta(n) := f(\alpha(n))$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es ist ${}^*f(\overline{\alpha})$ nicht von der speziellen Darstellung von $\overline{\alpha}$ abhängig, daher ist ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ eine Funktion. Weiters gilt:

(i) ${}^*f(r) = f(r), \quad \forall\, r \in \mathbb{R}.$

(ii) ${}^*f(\overline{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}, \quad \forall\, \overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}.$

Beweis von Satz 2.2.
Zunächst zeigen wir, dass ${}^*f(\overline{\alpha})$ nicht von der speziellen Darstellung von $\overline{\alpha}$ abhängig ist.

Angenommen es ist $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'}$. Nach ([LR] 3.7 (i)) folgt, dass dann $\alpha(n) = \alpha'(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Daher gilt $f(\alpha(n)) = f(\alpha'(n))$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Um (ii) beim Beweis von (i) verwenden zu können, zeigen wir zunächst **(ii)**:

(ii): Zu zeigen ist, dass ${}^*f(\overline{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}$ ist, für alle $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$.

Wir wissen, dass ${}^*f(\overline{\alpha}) = \overline{\beta}$ ist, mit $\beta(n) = f(\alpha(n)) = (f \circ \alpha)(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\overline{\beta} = \overline{f \circ \alpha}$ und daraus folgt ${}^*f(\overline{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}$.

(i): Nun zeigen wir, dass ${}^*f(r) = f(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.
Da $f \circ r_{\mathbb{N}} = (f(r))_{\mathbb{N}}$ ist, gilt (nach [LR, 3.1(ii)]):

$$ {}^*f(r) = {}^*f(\overline{r_{\mathbb{N}}}) \overset{[(ii)]}{=} \overline{f \circ r_{\mathbb{N}}} = \overline{f(r)_{\mathbb{N}}} = f(r). $$

Somit ist die Behauptung gezeigt.

□

Nun kommen wir zu den Eigenschaften, die die Funktion ${}^*f$ als Fortsetzung der Funktion f besitzt.

Satz 2.3 (**Eigenschaften von** $f \to {}^*f$).
Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt:

(i) ${}^*(f+g) = {}^*f + {}^*g$; ${}^*(f-g) = {}^*f - {}^*g$; ${}^*(f \cdot g) = {}^*f \cdot {}^*g$.

(ii) ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$.

(iii) Wenn $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann folgt:
${}^*f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot {}^*g(x)$ *für alle* $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Beweis von Satz 2.3.
(i): Zu zeigen ist, dass: ${}^*(f+g) = {}^*f + {}^*g$ ist.

Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Nach Satz 2.2(ii) ist ${}^*(f+g)(\overline{\alpha}) = \overline{(f+g) \circ \alpha} = \overline{f \circ \alpha + g \circ \alpha}$. Wendet man den Satz aus [LR] 3.3 (i) an, so ist $\overline{f \circ \alpha + g \circ \alpha} = \overline{f \circ \alpha} + \overline{g \circ \alpha}$. Nach wiederholter Anwendung von Satz 2.2(ii) erhalten wir ${}^*f(\overline{\alpha}) + {}^*g(\overline{\alpha})$. Somit gilt ${}^*(f+g) = {}^*f + {}^*g$.

Dieselbe Beweistechnik kann für die Subtraktion und die Multiplikation angewendet werden:

Sei wieder $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Wir wenden nun der Reihe nach Satz 2.2(ii), [LR] 3.2, [LR] 3.3(i) und dann Satz 2.2(ii) an:

$$^*(f-g)(\overline{\alpha}) = \overline{(f-g)\circ\alpha} = \overline{(f\circ\alpha)-(g\circ\alpha)} = {}^*f(\overline{\alpha}) - {}^*g(\overline{\alpha}).$$

Somit gilt $^*(f-g) = {}^*f - {}^*g$.

$$^*(f\cdot g)(\overline{\alpha}) \;=\; \overline{(f\cdot g)\circ\alpha} = \overline{(f\circ\alpha)\cdot(g\circ\alpha)} = {}^*f(\overline{\alpha})\cdot{}^*g(\overline{\alpha}).$$

Somit gilt $^*(f\cdot g) = {}^*f\cdot{}^*g$.

(ii): Nun kommen wir zur Verknüpfung von Funktionen und zeigen, dass $^*(f\circ g) = {}^*f\circ{}^*g$ gilt:
Sei $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Nach Anwendung von Satz 2.2(ii) ist $^*(g\circ f)(\overline{\alpha}) = \overline{(g\circ f)\circ\alpha}$.
Aus der Assoziativität der Verknüpfung von Abbildungen folgt $\overline{(g\circ f)\circ\alpha} = \overline{g\circ(f\circ\alpha)}$.
Nach zweimaliger Anwendung von Satz 2.2(ii) ergibt sich somit:

$$\overline{g\circ(f\circ\alpha)} = {}^*g\;(\overline{f\circ\alpha}) = {}^*g\;({}^*f(\overline{\alpha})) = ({}^*g\;\circ{}^*f)(\overline{\alpha}).$$

Somit gilt $({}^*f\circ g) = {}^*f\;\circ{}^*g$.

(iii): Zuletzt zeigen wir, dass folgendes gilt:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot g(x)\;\;\forall\, x\in\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad {}^*f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot{}^*g(x)\;\;\forall\, x\in{}^*\mathbb{R}.$$

Sei $x = \overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$. Dann ist $^*f(x) = {}^*f(\overline{\alpha}) \overset{[2.2(ii)]}{=} \overline{f\circ\alpha}$.
Nach Voraussetzung gilt

$$\overline{f\circ\alpha} = (\overline{f(x_0)_{\mathbb{N}} + (\alpha-(x_0)_{\mathbb{N}})\;\cdot(g\circ\alpha)}).$$

Nach Anwendung von [LR] 3.3 (i) und 3.4 erhalten wir

$$(\overline{f(x_0)_{\mathbb{N}} + (\alpha-(x_0)_{\mathbb{N}})\;g\circ\alpha}) = \overline{(f(x_0))_{\mathbb{N}}} + (\overline{\alpha} - \overline{(x_0)_{\mathbb{N}}})\cdot\overline{g\circ\alpha}).$$

Nach [LR] 3.1 (ii) ist dies gleich $f(x_0) + (x-x_0)\cdot{}^*g(x)$, woraus die Behauptung folgt.

$\square$

In den folgenden Beispielen werden nun die beiden Sätze 2.2 und 2.3 angewendet.

Beispiel 2.4.
Bemerkung: Statt mit $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ bezeichnen wir nun die Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ auch mit x und y.

a) Aus dem vorhergehenden Satz 2.2 sehen wir direkt, dass die Funktion $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ in die Funktion ${}^*f(x) = x$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ übergeht.

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^n$ für $x \in \mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ geht die Funktion $f(x) = x^n$ in die Funktion ${}^*f(x) = x^n$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ über, was mittels Induktion aus a) und Satz 2.3 folgt.

c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto e^x$. Die Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert: $\overline{\alpha} \mapsto \overline{f \circ \alpha}$ für $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$.
Das heißt ${}^*f(\overline{\alpha}) \overset{[2.2(ii)]}{=} \overline{(f(\alpha(n)))_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(e^{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}}$. Somit ist auch e^x für $x \in {}^*\mathbb{R}$ erklärt.

d) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $f(x) = x^3$ und $g(x) = |x|$.
Dann gilt nach Satz 2.3 für alle $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R}$ die Gleichung
${}^*(g \circ f)(\overline{\alpha}) = \overline{(\ |\alpha(n)^3|\ )_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(\ |\alpha(n)|^3\ )_{n\in\mathbb{N}}}$.

Bemerkung 2.5.
Im Beispiel 4.2 c) benötigen wir die Additionstheoreme und deren Folgerungen für die Erweiterungen der Winkelfunktionen. Diese folgen einfach aus den klassischen Additionstheoremen und Anwendung von Satz 2.3. Somit erhalten wir für $x, y \in {}^*\mathbb{R}$:

(i) ${}^*\cos(x + y) = {}^*\cos x \cdot {}^*\cos y \ - \ {}^*\sin x \cdot {}^*\sin y$.

(ii) ${}^*\sin(x + y) = {}^*\sin x \cdot {}^*\cos y \ + \ {}^*\cos x \cdot {}^*\sin y$.

(iii) ${}^*\sin x - {}^*\sin y = 2 \cdot {}^*\cos \frac{x+y}{2} \cdot {}^*\sin \frac{x-y}{2}$.

(iv) ${}^*\cos x - {}^*\cos y = -2 \cdot {}^*\sin \frac{x+y}{2} \cdot {}^*\sin \frac{x-y}{2}$.

3. Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen

In diesem Kapitel behandeln wir die Stetigkeit und die gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen, wobei wir im Vergleich zu den Nichtstandard-Aspekten auch die Formulierungen aus der klassischen Analysis betrachten werden. Als Quelle dienen in diesem Kapitel [LR], [OF] und [JR].

Zunächst kommen wir zur Stetigkeit von Funktionen. Resag (2008) beschreibt in knappen Worten:

> „Bei einer stetigen Funktion soll sich $f(x)$ nur ein wenig verändern, wenn man x nur ein wenig ändert. Statt ein wenig müsste man genau genommen wieder sagen: unendlich wenig. Und schon sind sie wieder da: die unendlich kleinen Objekte. “ (vgl. [JR], Kapitel 4)

Für den folgenden Satz benötigen wir den Begriff „unendlich nahe bei“ (auch „infinitesimal benachbart zu“ genannt), in Zeichen „$\approx$“. Wir wiederholen dazu die Definition im Detail:

Seien $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in {}^*\mathbb{R}$, dann heißt $\overline{\alpha}$ unendlich nahe bei bzw. infinitesimal benachbart zu $\overline{\beta}$, in Zeichen $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$, falls

$$\overline{\alpha} - \overline{\beta} \text{ infinitesimal ist, das heißt für alle } n \in \mathbb{N} : |\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \leq \frac{1}{n}.$$

Zusätzlich formulieren wir die obige Definition auch für die Sprechweise „fast überall“:

$$|\alpha(i) - \beta(i)| \leq \frac{1}{n} \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}.$$

Satz 3.1 (**Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit**).
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f *ist stetig in* x_0*.*

(ii) $\forall x \in {}^*\mathbb{R}$*:* $x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$*.*

Anschaulich gesprochen können wir sagen, eine unendlich kleine Abänderung der Variablen bewirkt höchstens eine unendlich kleine Abänderung der Funktionswerte.

Wiederholen wir nun im Vergleich zum Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit gängige Definitionen von Stetigkeit in der klassischen Analysis :

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Äquivalent dazu ist die ϵ-δ-Charakterisierung der Stetigkeit von Weierstraß:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \quad \forall x \in \mathbb{R} : \; |x - x_0| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Anschaulich gesprochen können wir sagen: f ist genau dann in x_0 stetig, wenn gilt: Falls x hinreichend nahe bei x_0 liegt, weicht der Funktionswert $f(x)$ beliebig wenig von $f(x_0)$ ab (siehe [OF] §11).

Doch trotz der einwandfrei und sauber formulierten ϵ-δ-Charakterisierung behielten einige MathematikerInnen und PhysikerInnen die anschaulichere Vorgehensweise mit den unendlich kleinen Größen, zum Beispiel dx, bei.

Nun beweisen wir, dass die beiden Aussagen von Satz 3.1 äquivalent sind.

Beweis von Satz 3.1.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Die Behauptung, die wir nun beweisen, lautet folgendermaßen:
f stetig in $x_0 \;\Rightarrow\;$ (für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt: $x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx f(x_0)$).

Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$.
Zu zeigen ist, dass ${}^*f(x) \approx f(x_0)$, das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1) \quad |{}^*f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}.$$

Sei $x = \overline{\alpha}$, dann hieße (1), dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|{}^*f(\overline{\alpha}) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$$

ist, was wiederum

$$|f(\alpha(i)) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}$$

für fast alle $i \in \mathbb{N}$ bedeutet.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest.
f ist stetig in x_0, das heißt, zu jedem $\epsilon = \frac{1}{n}$ gibt es ein $\delta_n > 0$, sodass gilt:

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad |z - x_0| < \delta_n \Rightarrow \; |f(z) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n}.$$

Wegen $x = \overline{\alpha}$ gilt $|\alpha(i) - x_0| < \delta_n$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$|f(\alpha(i)) - f(x_0)| \leq \frac{1}{n} \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}. \text{ Somit ist (1) gezeigt.}$$

Um die beiden Aussagen (i) und (ii) des Satzes als äquivalent zu erkennen, zeigen wir auch die andere Richtung:

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$ gilt ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. Wir beweisen nun indirekt, dass f stetig in x_0 ist.
Indirekt angenommen f sei nicht stetig in x_0.
Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ ein $\alpha(n) \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$(2) \quad |\alpha(n) - x_0| \leq 1/n;$$

$$(3) \quad |f(\alpha(n)) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Wir setzen $x := \overline{\alpha}$. Gemäß (2) und [LR] 3.8(i) ist $x = \overline{\alpha} \approx x_0$. Nach (ii) gilt daher

$$(4) \quad {}^*f(x) \approx f(x_0).$$

Aus (3) und [LR] 3.7(iv) folgt andererseits $|\overline{f \circ \alpha} - f(x_0)| \geq \epsilon$. Da $\overline{f \circ \alpha} = {}^*f(x)$ ist, erhalten wir $|{}^*f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Das ist aber ein Widerspruch zu (4). Damit ist gezeigt, dass f stetig in x_0 ist.

□

Um das Nichtstandard-Kriterium der Stetigkeit etwas anschaulicher zu machen, folgen einige Beispiele.

Beispiel 3.2.
a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun $\alpha \approx 0$, aber $\alpha \neq 0$. Dann ist ${}^*f(\alpha) = 0$ weil $f(\alpha(i)) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Somit gilt nicht ${}^*f(\alpha) \approx 1 = f(0)$. Daher ist f im Punkt 0 nicht stetig.
(vgl. [WZ])

Noch konkreter können wir so argumentieren:
Sei $x = \overline{\alpha}$ mit $\alpha(n) = \frac{1}{n}$. Es ist $\alpha \neq 0$ und $x = \overline{\alpha} \approx 0$, denn für ein fixes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\frac{1}{i} - 0| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } i \geq n, \text{ also für fast alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wegen $f(\frac{1}{n}) = 0$ ist aber ${}^*f(\overline{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha} = \overline{(f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}} = 0$.
Es ist aber $f(0) = 1$ (siehe Angabe). Daher ist die Funktion im Punkt 0 nicht stetig.

b) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in jedem Punkt stetig. Daraus folgt:
Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$, dann gilt: ${}^*\exp(x) \approx e^{x_0}$.

Sei insbesondere $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $\alpha(n) = \frac{1}{n}$. Dann ist ${}^*\exp(\overline{\alpha}) = \overline{e(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(e^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}} \approx 1 = \exp(0)$.

Ebenso erhalten wir aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion auch mit $\beta(n) = 1 + \frac{1}{n}$:
$^*\exp(\overline{\beta}) = \overline{e(\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(e^{1+\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}} \approx e = \exp(1)$.

Mit der oben gewonnenen Nichtstandard-Charakterisierung der Stetigkeit werden wir nun einige alternative Beweise für klassische Eigenschaften von stetigen Funktionen geben.

Korollar 3.3.
Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g$$

in x_0 stetig.

Diese Behauptung beweisen wir nun im Wesentlichen mit Hilfe der Sätze 3.1 (Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit) und 2.3 (Eigenschaften von $f \to {}^*f$).

Beweis von Korollar 3.3.
Wir zeigen, dass die Stetigkeit von Funktionen auch bei der Addition zweier Funktionen erhalten bleibt, das heißt: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig $\Rightarrow$ $f + g$ in x_0 stetig.

Angenommen es ist $x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x \approx x_0$. Nach Satz 3.1 gilt:

$${}^*f(x) \approx f(x_0)$$

und

$${}^*g(x) \approx g(x_0).$$

Nach Anwendung von Satz 2.3(i) und Satz 3.1 erhalten wir (unter Berücksichtigung elementarer Rechenregeln für infinitesimal benachbarte Zahlen)

$${}^*(f+g)(x) \overset{[2.3(i)\ \textit{und}\ (\bigstar)]}{=} {}^*f(x) + {}^*g(x) \overset{[3.1]}{\approx} f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Daher ist $f + g$ stetig in x_0 ist.

($\bigstar$) Hier wird eigentlich auch noch eine Eigenschaft aus [LR] benötigt:

$$a \approx c,\ b \approx d \ \Rightarrow\ a + b \ \approx\ c + d.$$

Die entsprechenden Behauptungen für die Subtraktion und Multiplikation werden ähnlich bewiesen. Der Vollständigkeit halber geben wir aber auch diese Beweise an.

Nun zeigen wir: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig $\Rightarrow$ $f - g$ in x_0 stetig.
Es ist $x \in {}^*\mathbb{R},\ x \approx x_0$. Dann ist ${}^*f(x) \approx f(x_0)$ und ${}^*g(x) \approx g(x_0)$. Daher erhalten wir ${}^*(f-g)(x) = {}^*f(x) - {}^*g(x) \ \approx\ f(x_0) - g(x_0) = (f-g)(x_0)$.

Zuletzt noch der Beweis für die Multiplikation: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig $\Rightarrow$ $f \cdot g$ in x_0 stetig.
Es ist $x \in {}^*\mathbb{R},\ x \approx x_0$. Dann ist ${}^*f(x) \approx f(x_0)$ und ${}^*g(x) \approx g(x_0)$. Daher erhalten wir ${}^*(f \cdot g)(x) = {}^*f(x) \cdot {}^*g(x) \ \approx\ f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$.

$\square$

Weiters bleibt die Stetigkeit auch bei der Verknüpfung von Funktionen erhalten:

Korollar 3.4.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig.
Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ stetig in x_0.

Beweis von Korollar 3.4.
Bei diesem Beweis verwenden wir wieder die beiden Sätze 2.3 und 3.1.
Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x \approx x_0$. Dann gilt nach Satz 3.1, also dem Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit, dass ${}^*f(x) \approx f(x_0)$. Weil g in $f(x_0)$ stetig ist, folgt nach Anwendung von Satz 2.3(ii) und Satz 3.1, dass

$$ {}^*(g \circ f)(x) = {}^*g({}^*f(x)) \ \approx\ g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0). $$

Nach dem Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit ist daher $g \circ f$ stetig in x_0.

$\square$

Nun kommen wir zur Definition der gleichmäßigen Stetigkeit. Sie lässt sich genauso intuitiv beschreiben wie die Stetigkeit: Es sind genau die Funktionen gleichmäßig stetig, die alle Paare unendlich benachbarter Punkte wieder in Paare unendlich benachbarter Punkte überführen.

Satz 3.5 (Nichstandard-Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit).
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist gleichmäßig stetig.

(ii) $\forall x, y \in {}^*\mathbb{R} :\ x \approx y \ \Rightarrow\ {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$.

In Worten formuliert bedeutet gleichmäßige Stetigkeit folgendes: Eine Funktion f ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn aus x unendlich nahe bei bzw. infinitesimal benachbart zu y folgt, dass $f(x)$ unendlich nahe bei bzw. infinitesimal benachbart zu $f(y)$ ist.

Anmerkung: Wenn man in Satz 3.5 statt $y \in {}^*\mathbb{R}$ nur $y \in \mathbb{R}$ zulässt, so erhält man eine Charakterisierung der Stetigkeit von f auf $\mathbb{R}$ (siehe Satz 3.1).

Zum Vergleich betrachten wir die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit aus der Klassischen Analysis:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 :\ \forall x, x' \in \mathbb{R} :\ |x - x'| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x') < \epsilon.$$

Wir beweisen nun den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit von Funktionen.

Beweis von Satz 3.5.
(i)⇒(ii): Zuerst zeigen wir
f gleichmäßig stetig $\quad\Rightarrow\quad$ ($\forall x, y \in {}^*\mathbb{R}$: $x \approx y \ \Rightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$).

Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx y$. Zu zeigen ist folgende Behauptung:

$$(1) \quad |{}^*f(x) - {}^*f(y)| \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Dann gibt es nach (i) ein $\delta_n \in \mathbb{R}$, abhängig von $n \in \mathbb{N}$ mit $\delta_n > 0$, sodass

$$(2) \quad r, s \in \mathbb{R}\ |r - s| \leq \delta \ \Rightarrow |f(r) - f(s)| \leq \frac{1}{n}.$$

Sei $x = \overline{\alpha}$ und $y = \overline{\beta}$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Da $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$ ist, gilt nach [LR] 3.11(i) $|\alpha(i) - \beta(i)| \leq \delta_n$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

nach (2) nun $|\ f(\alpha(i)) - f(\beta(i))\ | \leq 1/n$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

Nach [LR] 3.7(iii) erhalten wir $|\overline{f \circ \alpha} - \overline{f \circ \beta}| \leq 1/n$ und weiter

$$|{}^*f(x) - {}^*f(y)| = |{}^*f(\overline{\alpha}) - {}^*f(\overline{\beta})| \overset{[2.2(ii)]}{=} |\overline{f \circ \alpha} - \overline{f \circ \beta}| \leq 1/n.$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist somit (1) gezeigt.

Nun kommen wir zum zweiten Teil des Beweises, nämlich der Rückrichtung. Diese zeigen wir mittels indirekten Beweises:

(ii)⇒(i): Wir zeigen folgende Behauptung:
(für alle $x, y \in {}^*\mathbb{R}$: $x \approx y \Rightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(y)$) $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig.

Indirekt angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $\epsilon > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren Zahlen $\alpha(n), \beta(n) \in \mathbb{R}$, sodass

$$(3) \quad |\alpha(n) - \beta(n)| \leq 1/n$$

$$(4) \quad |f(\alpha(n)) - f(\beta(n))| \geq \epsilon.$$

Aus (3) und unter Verwendung von [LR] 3.8(i) folgt nun $\overline{\alpha} - \overline{\beta} = \overline{\alpha - \beta} \approx 0$, das heißt $\overline{\alpha} \approx \overline{\beta}$.
Deshalb gilt nach (ii) ${}^*f(\overline{\alpha}) \approx {}^*f(\overline{\beta})$. Aus (4) folgt dann (nach [LR] 3.7(iii))

$$|{}^*f(\overline{\alpha}) - {}^*f(\overline{\beta})| \overset{[2.2(ii)]}{=} |\overline{f \circ \alpha} - \overline{f \circ \beta}| \geq \epsilon.$$

Das ist aber ein Widerspruch zu ${}^*f(\overline{\alpha}) \approx {}^*f(\overline{\beta})$ und somit ist die Behauptung gezeigt.

□

Beim folgenden Beispiel zeigen wir, dass die Funktion $f(x) = x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Beispiel 3.6.
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Es ist dann ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x^2$ für $x \in {}^*\mathbb{R}$.
Wir zeigen nun, dass f nicht gleichmäßig stetig ist, indem wir folgende Eigenschaft zeigen:

Es gibt Paare von Punkten $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx y$ und ${}^*f(x) \not\approx {}^*f(y)$.

Sei $x = \overline{\alpha}$, $y = \overline{\beta}$ mit $\alpha(n) = n$ und $\beta(n) = n + \gamma(n)$, wobei $\gamma(n) = \frac{1}{n}$.

Es gilt

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}: \; |\overline{\alpha} - \overline{\beta}| \leq \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow\; \forall k \in \mathbb{N}: |\alpha(n) - \beta(n)| = |n - (n + \frac{1}{n})| =$$

$$|\frac{1}{n}| = |\gamma(n)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{für fast alle } n \geq k \;\Leftrightarrow\; \overline{\gamma} \approx 0.$$

Somit ist $x \approx y$ gültig. Es gilt nun

$$|{}^*f(x) - {}^*f(y)| = |f(\overline{\alpha}) - f(\overline{\beta})|.$$

Dieser Ausdruck entspricht der Folge $n \mapsto |f(n) - f(n + \gamma(n))| = |n^2 - (n + \gamma(n))^2| = |n^2 - n^2 - 2n\,\gamma(n) - \gamma(n)^2| = | - 2n \underbrace{\gamma(n)}_{=\frac{1}{n}} - \underbrace{\gamma(n)^2}_{=\frac{1}{n^2}}| = |2 + \frac{1}{n^2}| \;\geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da der Ausdruck ≥ 2 ist folgt, dass ${}^*f(x) \not\approx {}^*f(y)$ gilt.

Somit haben wir gezeigt, dass die Funktion $f(x) = x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist.

4. Differenzierbarkeit von Funktionen

Nun kommen wir zur Differenzierbarkeit. Dieses Kriterium zeigt besonders gut die Vorteile einer Nichtstandard-Formulierung. Zunächst in Worten nach Landers, Rogge (1994):

> „Die Ableitung einer Funktion f in x_0 ergibt sich (bis auf einen infinitesimalen Fehler) als Quotient zweier infinitesimaler Größen, nämlich des Zuwachses ${}^*f(x_0+dx)-f(x_0)$ und der infinitesimalen Veränderung dx." (vgl. [LR], Seite 32)

Satz 4.1 (Nichstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit).
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0\in\mathbb{R}$ und $c\in\mathbb{R}$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f *ist in* x_0 *differenzierbar mit der Ableitung* $f'(x_0)=c$;

(ii) $\frac{{}^*f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} \approx c \qquad \forall\ dx\in{}^*\mathbb{R},\ dx\neq 0,\ dx\approx 0.$

In der klassischen Analysis wird die Differenzierbarkeit folgendermaßen definiert:

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. f heißt in $x\in\mathbb{R}$ differenzierbar, falls

$$f'(x) := \lim_{\xi\to x\ \xi\neq 0}\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} = \lim_{h\to 0\ h\neq 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existiert.

f heißt in $\mathbb{R}$ differenzierbar, falls f in jedem $x\in\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Nun interpretieren wir den Differentialquotienten.

Sei f differenzierbar in x_0. Aus der klassischen Analysis wissen wir, dass der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0,f(x_0))$ und $(x_0+h,f(x_0+h))$ angibt.

Wenn dx unendlich nahe bei 0 ist, ist der Ausdruck gemäß Satz 4.1 $\frac{{}^*f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ unendlich nahe bei bzw. infinitesimal benachbart zu $f'(x_0)$.

Geometrisch (aus der klassischen Analysis) bedeutet das, dass im Limes $h \to 0$ die Sekante in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ übergeht. Der Differentialquotient ist also die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und der Ausdruck $\frac{{}^*f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx}$ ist unendlich nahe dieser Steigung.

Nun beweisen wir den Satz über das Nichtstandard-Kriterium für die Differenzierbarkeit.

Beweis von Satz 4.1.
Die Behauptung von Satz 4.1 führen wir auf die Stetigkeit einer geeigneten Hilfsfunktion h zurück. Zuächst setzen wir

$$h(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq x_0,\ h(x_0) := c.$$

Es gilt :
f ist in x_0 differnzierbar $\Leftrightarrow$ h ist stetig in x_0 $\overset{[Satz\ 3.1]}{\Leftrightarrow}$ ${}^*h(x) \approx h(x) := c$
für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ mit $x \approx x_0$.

Außerdem gilt

$$\frac{{}^*f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \approx c \qquad \forall\ 0 \neq dx \approx 0.$$

genau dann, wenn

$$\frac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx h(x_0) = c \qquad \forall x \in {}^*\mathbb{R},\ x \approx x_0,\ x \neq x_0.$$

Also sind die beiden Aussagen (i) und (ii) äquivalent, falls gilt:

$$(1) \quad {}^*h(x) = \frac{{}^*f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \forall x \in {}^*\mathbb{R},\ x \neq x_0.$$

Da $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, folgt nun aus Satz 2.3(iii), dass ${}^*f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ {}^*h(x)$ für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ gilt.
Daher gilt nach einfacher Umformung (1), weil ${}^*\mathbb{R}$ ein Körper ist. (vgl. [LR] 3.4)

Somit ist die Behauptung gezeigt.

□

Es folgen einige Beispiele zur Differenzierbarkeit von Funktionen.

Beispiel 4.2.
a) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ gegeben. Wir zeigen, dass die Funktion f differenzierbar ist und berechnen die Ableitung (vgl. [WZ]).

Sei $0 \neq dx \approx 0$, dann gilt:

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^2-x^2}{dx} = \frac{x^2+2xdx+dx^2-x^2}{dx} = \frac{2xdx+dx^2}{dx} = 2x+dx \approx 2x,$$

daher ist $f'(x) = 2x$.

b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.
Sei $0 \neq dx \approx 0$, dann gilt:

$$f'(x) \approx \frac{1}{dx}\,(\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}) = \frac{1}{dx}\,(\frac{x-(x+dx)}{x\;(x+dx)}) = \frac{1}{dx}\,(\frac{-dx}{x\;(x+dx)}) = -\frac{1}{x(x+dx)} \approx -\frac{1}{x^2}$$

für $x \neq 0$.

c) Gegeben sei die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\sin'(x) \approx \frac{{}^*\sin(x+dx) - {}^*\sin(x)}{dx} \overset{[nach\ 2.5(iii)]}{=} \frac{2\cdot\ {}^*\cos(\frac{(x+dx)+x}{2})\cdot{}^*\sin(\frac{(x+dx)-x}{2})}{dx} =$$

$$= \frac{2\cdot\ {}^*\cos(x+\frac{dx}{2})\cdot{}^*\sin(\frac{dx}{2})}{dx} = {}^*\cos(x+\frac{dx}{2})\cdot\frac{{}^*\sin(\frac{dx}{2})}{\frac{dx}{2}}\ .$$

Da cos stetig,

$${}^*\cos(x+\frac{dx}{2}) \approx \cos x$$

und

$$\frac{{}^*\sin(\frac{dx}{2})}{\frac{dx}{2}} \approx 1$$

(Bemerkung: Der zweite Ausdruck gilt, da $\lim_{0\neq x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \to 1$. (vgl. [OF], §14))

gilt, folgt:

$$\sin'(x) \approx \cos(x), \text{ also } \sin'(x) = \cos(x),$$

weil beide Werte klassische reelle Zahlen sind.

5. Transfer- und Permanenzprinzip

In diesem Kapitel werden [LR], [RB], [DL] und [TL] verwendet.

Zunächst definieren wir interne Mengen, die wir später für das Permanenzprinzip benötigen. Anschließend kommen wir zur Formulierung des Permanenzprinzips und des Transferprinzips (vgl. [LR] und in den beiden englischsprachigen Büchern [RB] und [TL]). Im letzten Abschnitt werden die beiden Prinzipien angewendet (vgl. [LR] und [RB]).

5.1. Interne Mengen und das Permanenzprinzip

Einer der ersten Schritte, die man macht, wenn man eine neue mathematische Struktur einführt, ist die Suche nach „netten“ Untermengen und Funktionen. In der Nichtstandard-Analysis werden diese „netten“ Mengen und Funktionen intern genannt.
Wir werden interne Mengen auch später benötigen, um das Permanenzprinzip formulieren zu können. Die Definition interner Mengen finden wir zum Beispiel in [TL], Chapter I.

Definition 5.1 (Interne Mengen).
Sei $^*\mathbb{R}$ *der Erweiterungskörper von* $\mathbb{R}$. $B \subseteq {^*\mathbb{R}}$ *heißt intern, wenn gilt:*
Es gibt eine Folge von Teilmengen $A_n \subseteq \mathbb{R}$ *für* $n \in \mathbb{N}$*, sodass*

$$B = \{\overline{\alpha} \in {^*\mathbb{R}} \mid \{\alpha(n) \in A_n\} \in \mathcal{F}\}.$$

Bemerkung: Wir schreiben auch $B = \langle A_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Teilmenge $B \subseteq {^*\mathbb{R}}$*, die nicht intern ist, wird extern genannt.*

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ *heiße* $^*A$ *die Nichtstandard-Version von* A*, wobei*

$$^*A := \{\overline{\alpha} \in {^*\mathbb{R}} \mid \{\alpha(n) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Bemerkung: $^*A \subseteq {^*\mathbb{R}}$ *ist eine interne Menge, speziell mit* $A_n = A$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Externe Teilmengen von $^*\mathbb{R}$ *sind unter anderem* A, $^*A\backslash A$ *und* $^*\mathbb{R}\backslash A$ *für alle unendlichen Mengen* $A \subset \mathbb{R}$. *(vgl. [LR] §9)*

Nun kommen wir zum Permanenzprinzip, das aus [LR], §9 und [RB], Chapter 15 entnommen wurde.

Das Permanenzprinzip ist ein häufiges Beweisprinzip.

Alle drei Behauptungen im folgenden Satz sind sogenannte Permanenzbehauptungen, wobei (i) auch das „Overflow Principle“ und (ii) das „Underflow Principle“ genannt wird.

Im Grunde besagen die folgenden Aussagen, dass eine interne Aussage ($^*\varphi$), die für alle Elemente einer gewissen externen Menge gilt (zum Beispiel in (i) für $\mathbb{N}$ oder in (ii) für $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$) auch auf einer größeren (internen) Menge erhalten bleibt. Das heißt, dass sich in $^*\mathbb{R}$ bei den Familien der internen Mengen und Funktionen die wesentlichen Eigenschaften der Begriffe der reellen Analysis wiederfinden.

Zunächst definieren wir die interne Aussage $^*\varphi$ zu einer gegebenen „klassischen“ Aussage φ.

Definition 5.2.
Sei φ eine Aussage, in der

reelle Zahlen, die Menge $\mathbb{R}$, die Funktionen $f_1, ..., f_m$, die Operationen $+, -, \cdot, \leq, |\ |$, die Junktoren $=, \in, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ und die Quantoren $\forall x, \exists x$ vorkommen, wobei x eine Variable ist.

Dann entsteht $^*\varphi$ aus φ, indem $f_1, ..., f_m$ durch $^*f_1, ..., ^*f_m$ und $\mathbb{R}$ durch $^*\mathbb{R}$ ersetzt werden.

Satz 5.3 (**Permanenz-Prinzip für interne Formeln**).
Es sei $^*\varphi$ eine Aussage wie in Definition 5.2. Dann gilt:

(i) Gilt $^*\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $h \in {^*\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}$, sodass $^*\varphi(n)$ für alle $n \in {^*\mathbb{N}}$ mit $n \leq h$ gilt. (Overflow)

(ii) Gilt $^*\varphi(h)$ für alle $h \in {^*\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N}$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $^*\varphi(n)$ für alle $n \in {^*\mathbb{N}}$ mit $n \geq m$ gilt. (Underflow)

(iii) Gilt $^*\varphi(\epsilon)$ für alle $\epsilon \approx 0$, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}_+$, sodass $^*\varphi(b)$ für alle $b \in {^*\mathbb{R}}$ mit $|b| \leq c$ gilt.

Ein **Beweis des Satzes 5.3** ist in [LR] §9 zu finden.

Wenn wir nun speziell Aussagen über Teilmengen $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ betrachten, so können wir das sogenannte „Overflow-Principle“ und „Underflow-Principle“ etwas „griffiger“ formulieren.

Korollar 5.4 (**Overflow und Underflow**).
Sei $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ eine interne Menge.

(i) Overflow: Wenn A beliebig große endliche Elemente enthält, dann enthält A unendliche Elemente.

(ii) Underflow: Wenn A beliebig kleine positive unendliche Elemente enthält, dann enthält A endliche Elemente.

(vgl. [TL], Chapter I)

Weiters definieren wir den Begriff der internen Funktion (vgl. [TL], Chapter I), den wir im Beispiel weiter unten benötigen.

Definition 5.5.
Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert eine Funktion $\langle f_n \rangle : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ mit

$$\langle f_n \rangle(\langle x_n \rangle) = \langle f_n(x_n) \rangle.$$

Jede Funktion ${}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$, die auf diese Weise erhalten werden kann, wird interne Funktion genannt.

Beispiel 5.6.
a) Betrachte die Menge ${}^*\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Sei $\alpha = (1, 3, \pi, 7, 9, ..., 2k + 1, ...)$, das heißt die Folge

$$\alpha(i) = \begin{cases} 2i + 1, & i \neq 2; \\ \pi, & k = 2. \end{cases} \quad .$$

Dann ist $\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{N}$.

Allgemeiner: Wenn eine Folge nur an endlich vielen Stellen ungleich einer natürlichen Zahl ist, dann gehört ihre Klasse zu ${}^*\mathbb{N}$.

b) Seien $a = \overline{(a(n))_{n\in\mathbb{N}}}$ und $b = \overline{(b(n))_{n\in\mathbb{N}}}$ zwei Elemente aus ${}^*\mathbb{R}$. Dann ist das Intervall

$$[a,b] = \{x \in {}^*\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

intern, weil gilt:

$$[a,b] = \{\overline{\alpha} \in {}^*\mathbb{R} \mid \alpha(n) \in \underbrace{[a(n), b(n)]}_{A_n} \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

c) Betrachte die Funktion $f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ mit $f(x) := {}^*\sin(cx)$, wobei $c = \overline{c(n)_{n\in\mathbb{N}}} \in {}^*\mathbb{R}$ ist.
Wir können schreiben

$$\sin(cx) = \langle \sin \rangle (\langle c_n x_n \rangle).$$

Nach Definition 5.5 ist

$$\langle \sin \rangle (\langle c_n x_n \rangle) = \langle \sin(c_n x_n) \rangle.$$

Somit ist f eine interne Funktion.

Bemerkung 5.7.
Zwei interne Mengen $\langle A_n \rangle$ und $\langle B_n \rangle$ sind genau dann gleich, wenn gilt:

$$A_n = B_n \quad \text{\textit{für fast alle} } n \in \mathbb{N}.$$

5.2. Das Transferprinzip

Dieser Abschnitt wurde mit Hilfe der Bücher [LR], [DL],[RB] und [TL] zusammengestellt.

Alle wesentlichen Aussagen der ersten drei Kapitel können auch viel kürzer mit Hilfe des Transferprinzips bewiesen werden. Es ist also ein wichtiges Beweisprinzip. Das bedeutet im Wesentlichen, dass alle „Aussagen“, die in $\mathbb{R}$ gelten, auch über ${}^*\mathbb{R}$ gültig sind.
Bisher wurden Definitionen und Sätze von der reellen Analysis in die Nichtstandard-Analysis übertragen, indem gewisse Indexmengen auf ihre Zugehörigkeit zu einem Filter

untersucht wurden. Diese Methode ist umständlicher und aufwendiger als das Transferprinzip, denn nun können wir mühelos Aussagen von den hyperreellen Zahlen über die reellen Zahlen und umgekehrt gewinnen.

Wir formulieren nun ein eingeschränktes Transferprinzip, in dem nur elementare Aussagen betrachtet werden.

Satz 5.8 (**Eingeschränktes Transfer-Prinzip**).
Es sei $^*\varphi$ *entstanden aus* φ *wie in Definition 5.2 .*

Die Aussage φ *ist genau dann gültig, wenn die Aussage* $^*\varphi$ *gültig ist.*

Für einen **Beweis von Satz 5.8** siehe [LR] Teil II §§7-8 oder [TL], Kapitel IV.

Es folgen nun einige Beispiele zum Transferprinzip. (vgl. [RB], Chapter 4)

Beispiel 5.9.
a) $^*\mathbb{N}$ und $^*\mathbb{R}$ sind interne Mengen. Es gilt zunächst in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists m \in \mathbb{N} : x < m.$$

Diese Aussage würde nicht gelten, wenn $x \in {}^*\mathbb{R}$ wäre (zum Beispiel: für $x = [(1, 2, 3, ...)]$.
Aber wenn $\mathbb{N}$ durch $^*\mathbb{N}$ ersetzt wird, dann gilt:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \ \ \exists m \in {}^*\mathbb{N} : x < m.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass es im Hinblick auf die Bedeutung des Satzes wichtig ist, zu erklären, welche Werte die Variable annehmen kann.

b) Dichtheit von rationalen Zahlen.

$^*\mathbb{R}$ und $^*\mathbb{Q}$ sind zwei interne Mengen. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y.$$

Nun wenden wird das Transferprinzip an und erhalten folgende Aussage:

$$\forall x, y \in {}^*\mathbb{R} : \ x < y \quad \Rightarrow \quad \exists q \in {}^*\mathbb{Q} : x < q < y.$$

c) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, dann sind ${}^*A, {}^*B$ interne Mengen.

Es gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; x \in A \textit{ oder } x \in B.$$

Nach Anwendung der *-Transformation gilt:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} : x \in {}^*(A \cup B) \;\Leftrightarrow\; x \in {}^*A \textit{ oder } x \in {}^*B.$$

Insbesondere folgt daraus, dass ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$ gilt.

d) Das Transferprinzip ermöglicht zu zeigen, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, da $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist.

Wir zeigen zum Beispiel, dass die Kommutativität der Addition in $\mathbb{R}$ nach Anwendung des Transferprinzips auch in ${}^*\mathbb{R}$ gilt.
Die Gültigkeit der Aussage

$$\varphi \equiv x + y = y + x \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

geht über in die Gültigkeit der Aussage

$${}^*\varphi \equiv x + y = y + x \qquad \forall x, y \in {}^*\mathbb{R}.$$

Das heißt die Kommutativität der Addition in $\mathbb{R}$ geht über in die Kommutativität der Addition in ${}^*\mathbb{R}$.

Analog lassen sich alle anderen Axiome eines angeordneten Körpers mit dem Transferprinzip von $\mathbb{R}$ nach ${}^*\mathbb{R}$ übertragen.

e) Gemäß Satz 2.2 kann jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu einer Funktion ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Das heißt es existieren zum Beispiel ${}^*\sin, {}^*\cos, {}^*\exp$, die Fortsetzungen der Funktionen $\sin, \cos, \exp$ sind. Aufgrund des Transferprinzips gelten die gleichen Rechenregeln wie bei den Ausgangsfunktionen, zum Beispiel:
In $\mathbb{R}$ gilt folgende Aussage

$$\varphi \equiv \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips gilt folgende Aussage:

$${}^*\varphi \equiv {}^*\exp(x + y) = {}^*\exp(x) \cdot {}^*\exp(y) \qquad \forall x, y \in {}^*\mathbb{R}.$$

f) Diskretheit von $\mathbb{N}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\forall x \in \mathbb{N} : n \leq x \leq n+1 \Rightarrow x = n \text{ oder } x = n+1.$$

Nach der *-Transformation gilt:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{N} : {}^*n \leq x \leq {}^*(n+1) \Rightarrow x = {}^*n \text{ oder } x = {}^*(n+1).$$

Weil $n = {}^*n$ und $n+1 = {}^*(n+1)$ gilt, ist $\mathbb{N}$ diskret. Dies zeigt, dass es keine Nichtstandard-Zahlen in ${}^*\mathbb{N}$ gibt, die zwischen den natürlichen Zahlen vorkommen. Es gibt auch keine Zahlen in ${}^*\mathbb{N}$, die kleiner als 1 sind. Das heißt:

$$\forall x \in {}^*\mathbb{N} : x \geq 1.$$

Es muss also jede Zahl aus ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ größer sein als alle Zahlen aus $\mathbb{N}$, das heißt unendlich groß.

5.3. Anwendungen des Transfer- und des Permanenzprinzips

Nun kommen wir zur Anwendung der beiden Prinzipien. Hierfür werden wir den Satz über den Grenzwert einer Funktion, den Satz über die Existenz von Maximum und Minimum und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beweisen. Die Sätze und Beweise sind aus [LR] §11 und [TL], Chapter I eingearbeitet. Weiters wurde auch [DL] verwendet.

Satz 5.10 (Grenzwert einer Funktion).
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $c, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $lim_{x \to x_0} f(x) = c$.

(ii) $\forall x \in {}^*\mathbb{R} : \quad x \approx x_0 \quad \Rightarrow \quad {}^*f(x) \approx c.$

Beweis von Satz 5.10.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen die Funktion f konvergiert gegen den Punkt $c \in \mathbb{R}$ für $x \to x_0$.
Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ unendlich nahe bei x_0. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und setze $\epsilon = \frac{1}{n}$.

Wir wählen $\delta \in \mathbb{R}_+$ so, dass $\forall y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|y - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - c| \leq \epsilon = \frac{1}{n}.$$

Nach dem Transferprinzip (siehe Satz 5.8) gilt daher für alle $y \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|y - x_0| \leq \delta$, dass $|{}^*f(y) - c| \leq \epsilon$ ist.
Es ist daher $x \in {}^*\mathbb{R}$ und $x \approx x_0$, so folgt:

$$|{}^*f(x) - c| \leq \frac{1}{n}.$$

Weil n beliebig war, ist ${}^*f(x) \approx c$ und somit ist (ii) gezeigt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach (ii) gilt $\forall n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ die Aussage

$${}^*\varphi(n) \;\equiv\; \forall x \in {}^*\mathbb{R} : |x - x_0| \leq \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; |{}^*f(x) - c| \leq \epsilon.$$

Ausführlicher können wir sagen:

$\forall n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ gilt:

$n > m$ (siehe Ende Beispiel 5.9 g), daher ist $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$.

Somit gilt: Aus $|x - x_0| < \frac{1}{n}$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ folgt $|x - x_0| \approx 0$ und daher ist $x \approx x_0$.

Nach dem Permanenzprinzip (siehe Satz 5.3 (ii)) gilt die Aussage auch für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
Sei $\delta := \frac{1}{n_0}$, dann gilt:

$${}^*\varphi(n_0) \;\equiv\; \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| \leq \epsilon.$$

Das heißt es gilt (i) und somit ist die Behauptung gezeigt.

$\square$

Einer der wichtigsten Sätze der Analysis ist der Extremwertsatz.

Satz 5.11.
(Existenz von Maximum und Minimum für stetige Funktionen auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall.)

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ und sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es gibt $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, sodass gilt:

(i) $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(\xi_1)$,
das heißt f besitzt an der Stelle ξ_1 ein Maximum auf dem Intervall $[a, b]$.

(ii) $\forall x \in [a, b] : f(x) \geq f(\xi_2)$,
das heißt f besitzt an der Stelle ξ_2 ein Minimum auf dem Intervall $[a, b]$.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir die Begriffe „Menge der finiten Elemente von ${}^*\mathbb{R}$“ *fin*$({}^*\mathbb{R})$ und den „Standardteil“ *st*(y). (vgl. [LR], §9)

Bemerkung 5.12. *(Menge der finiten Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ und Standardteil)*

(i) Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. Dann bezeichne fin$({}^*\mathbb{R}) := \{x \in {}^*\mathbb{R} : x \text{ ist finit}\}$ die Menge der finiten Elemente von ${}^*\mathbb{R}$.
(Den Begriff finit bzw. endlich haben wir schon im Kapitel Einleitung, Grundlegende Begriffe und Notation eingeführt.)

(ii) Es ist $y \in$ fin$({}^*\mathbb{R})$. Dann gibt es ein eindeutiges $r \in \mathbb{R}$ mit $y \approx r$, welches mit st(y), Standardteil von y, bezeichnet wird. Das heißt st(y) ist also die eindeutige infinitesimal benachbarte reelle Zahl.

(vgl. [DL], Abschnitt I, Kapitel 3).

Jede endliche nicht-reelle hyperreelle Zahl x liegt unendlich nahe an einer eindeutigen reellen Zahl r. Sie entsteht also aus einer bestimmten reellen Zahl durch Hinzuaddieren einer infinitesimalen Zahl. Die reelle Zahl nennt man auch Standardteil oder Schatten von x und schreibt *st*(x). (vgl. Bemerkung 5.12)

Jede endliche hyperreelle Zahl liegt „sehr nahe“ an einer reellen Zahl. Ist x so eine endliche hyperreelle Zahl, dann gibt es genau eine reelle Zahl $st(y)$, sodass die Differenz $x - st(y)$ infinitesimal ist. Diese Differenz nennt man dann den Nichtstandardteil von x.
(vgl. [WP])

Manchmal bezeichnet man die infinitesimale Umgebung einer reellen Zahl r auch als „Halo [1] von r“. Das sind dann alle hyperreellen Zahlen, deren Standardteil r ist. Man sagt auch, alle hyperreellen Zahlen im Halo von r sind fast gleich oder auch infinitesimal benachbart zu r.

(vgl. [JR], Kapitel 4)

Beweis von Satz 5.11.
Wir beweisen nur die Existenz eines Maximums.

Die Beweisidee:

Wir wählen eine unendlich feine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit
$a = t_0 < t_1 < ... < t_h = b$ und bestimmen eine Stelle $t_{i_0} \in [a, b]$, an der $^*f(t_i)$ für $i \in H$ ein Maximum annimmt. Der dazugehörige Standardteil der Stelle t_{i_0} liefert einen Punkt, an dem die Funktion f ein Maximum annimmt.

Sei $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ein unendliches Element und betrachte die „äquidistante“ Zerlegung $t_i = a + i\ \frac{b-a}{h}$ (für $i \in H$) des Intervalls $^*[a, b]$ in h Teile,
wobei $H := \{i \in {}^*\mathbb{N}_0 : i \leq h\}$ ist.

Zunächst zeigen wir folgende Aussage:

(1) Es gibt ein $i_0 \in H$ mit $^*f(t_{i_0}) = \max_{i \in H} {}^*f(t_i)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Menge $\{f(a + i\frac{(b-a)}{n}) : 0 \leq i \leq n\}$ ein Maximum. Daher gilt folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists i \in \mathbb{N}_0 \quad i \leq n \text{ und } \forall j \in \mathbb{N}_0 \; j \leq n \quad \Rightarrow \quad f(a + j\frac{(b-a)}{n}) \leq f(a + i\frac{(b-a)}{n}).$$

Nach dem Transferprinzip (siehe Satz 5.8) gibt es ein $i_0 \in {}^*\mathbb{N}_0$ mit $i_0 \leq h$, sodass gilt:

$$\forall j \in {}^*\mathbb{N}_0 \text{ mit } j \leq h : \;\; {}^*f(t_j) \leq {}^*f(t_{i_0}).$$

Somit ist (1) gezeigt.

Nun zeigen wir noch, dass folgende Aussage gilt:

[1] griechisch: „Lichthof“; Hof um Sonne oder Mond, hervorgerufen durch Lichtbrechung

(2) $f(x_0) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ für $x_0 := st(t_{i_0})$; insbesondere gilt $x_0 \approx t_{i_0}$.

Sei x aus dem Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $i \in {}^*\mathbb{N}$ mit $i \leq h$ und $t_{i-1} \leq x \leq t_i$. Da $t_{i-1} \approx t_i$ ist, folgt $t_i \approx x$. Weiters ist $t_{i_0} \approx x_0$, da $x_0 := st(t_{i_0})$. Weil f stetig ist, folgt aus dem Nichtstandard-Kriterium für die Stetigkeit (siehe Satz 3.1) und (1)

$$f(x) \approx {}^*f(t_i) \leq {}^*f(t_{i_0}) \approx f(x_0).$$

Daraus folgt, dass $f(x) \leq f(x_0)$. Somit ist auch (2) gezeigt.

$\square$

Eine weitere Anwendung des Transferprinzips findet sich im Beweis des Satzes über die stetige Differenzierbarkeit. Der folgende Satz und Beweis sind aus [LR], §11 entnommen.

Satz 5.13. Stetige Differenzierbarkeit.
Sei die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist stetig differenzierbar auf $[a, b]$.

(ii) Für jedes $x_0 \in [a, b]$ gilt:
Für alle $x, y \in {}^*[a, b]$ mit $x \neq y$, $x, y \approx x_0$ ist

$$\frac{{}^*f(x) - {}^*f(y)}{x - y} \approx f'(x_0).$$

In Worten: Wenn für x und y unendlich nahe bei x_0 der Quotient $\frac{{}^*f(x) - {}^*f(y)}{x-y}$ stets unendlich nahe bei $f'(x_0)$ ist, also bei der Ableitung von f an der Stelle x_0 liegt, so ist die Funktion stetig differenzierbar.

Beweis von Satz 5.13.
(i)⇒(ii): Seien $x, y \in {}^*[a, b]$ mit $x \neq y$ und $x, y \approx x_0$, das heißt x, y sind infinitesimal benachbart zu x_0.

Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{{}^*f(x) - {}^*f(y)}{x - y} \approx f'(x_0) \text{ gilt.}$$

Da f' stetig ist, gilt nach Satz 3.1:

$$^*(f')(z) \approx f'(x_0) \quad \forall z \in {}^*[a,b] \text{ mit } z \approx x_0.$$

Es sei o.B.d.A. [2] $x < y$. Nun zeigen wir, dass es ein $z \in {}^*\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$(1) \qquad \frac{^*f(x) - {}^*f(y)}{x-y} = {}^*(f')(z) \quad \text{mit } x \leq y \leq z.$$

Wir beweisen (1) durch Transfer des Mittelwertsatzes aus der Analysis. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (vgl. [OF], §16) gilt:

Sei die Funktion f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in $]a,b[$, dann gilt:

$$\forall x', y' \in [a,b] \text{ mit } x' < y' \quad \exists z' \in \mathbb{R}: \quad \frac{f(x') - f(y')}{x'-y'} = f'(z') \text{ mit } x' \leq z' \leq y',$$

wobei z' die Rolle von z übernimmt.

Da $x, y \in {}^*[a,b]$ und $x < y$ sind, gilt nach Anwendung des Transferprinzips (vgl. Satz 5.8) die Aussage (1) und somit ist der erste Teil des Beweises erledigt.

Im zweiten Schritt beweisen wir die Rückrichtung.

(ii)⇒(i): Es sei $x_0 \in [a,b]$ beliebig. Aus (ii) und dem Nichtstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit (vgl. 4.1) folgt, dass f in x_0 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0)$, wobei $y = x_0$ gewählt wird.

Daher bleibt noch zu zeigen, dass die Ableitung f' im Punkt x_0 stetig ist. Wir wählen ein $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ und werden zeigen, dass es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass gilt:

$$(2) \quad \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y} - f'(x_0)\right| \leq \epsilon \qquad \forall x, y \in [a,b] \text{ mit } x \neq y \text{ und } x_0 - \delta < x, y < x_0 + \delta.$$

Sobald (2) gezeigt ist, sind wir fertig, denn durch den Grenzübergang $x \to y$ folgt aus (2)

$$|f'(y) - f'(x_0)| \leq \epsilon \qquad \forall y \in [a,b] \text{ mit } |y - x_0| < \delta.$$

Es bleibt also noch (2) zu zeigen.

[2] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Wir behaupten, dass aus (ii) folgende Aussage ${}^*\varphi$ folgt:

$\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}_+ \ \forall x, y \in [a,b]$: mit $x_0 - \delta < x,\ y < x_0 + \delta$ und $x \neq y$, sodass

$$|\frac{{}^*f(x) - {}^*f(y)}{x-y} - f'(x_0)| \leq \epsilon.$$

Um die Gültigkeit von ${}^*\varphi$ nachzuweisen, wähle $\delta > 0$ infinitesimal, das heißt $|\delta| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Das Transferprinzip liefert dann die Gültigkeit der entsprechenden Aussage φ in $\mathbb{R}$.
Somit gilt (2), das heißt die Stetigkeit der Ableitung f' in x_0 ist nachgewiesen.

□

Der nächste Satz ist eine „technische“ Vorbereitung auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir Keislers Infinite Sum Theorem.

Satz 5.14. Keislers Infinite Sum Theorem.

Es sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar,*

$$A : \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u < v \leq 1\} \to \mathbb{R}$$

und es seien folgende Aussagen erfüllt:

(i) $A(0,v) = A(0,u) + A(u,v)$ *mit* $0 < u < v \leq 1$.

(ii) $\frac{{}^*A(x,x+dx)}{dx} \approx {}^*f(x)$ *für* $x, x+dx \in {}^*[0,1]$ *und* $0 < dx \approx 0$.

Dann gilt

$$A(0,1) = \int_0^1 f(t)dt.$$

In Worten beschrieben können wir uns das folgendermaßen vorstellen:

ad (i): Die Abbildungen kann man sich als Werte von A an Punkten im $\mathbb{R}^2$ angeheftet vorstellen. Zum Beispiel liegt der Wert $A(0,v)$ auf der y-Achse und der Wert $A(0,u)$ ebenfalls auf der y-Achse, aber etwas unterhalb des Wertes $A(0,v)$, da $0 \leq u < v \leq 1$ ist.

Der Wert $A(u,v)$ würde etwas rechts in der selben Höhe des Wertes $A(0,v)$ liegen. Es ist außerdem $A(0,v) - A(0,u) = A(u,v)$.

ad (ii): Der Quotient $\frac{^*A(x,x+dx)}{dx}$ liegt unendlich nahe bei $^*f(x)$.
Gelten die Aussagen (i) und (ii), so ist der Wert $A(0,1)$ gleich der Fläche unter der Funktion f in den Grenzen von 0 bis 1.

Der **Beweis des Satzes 5.14** (Keislers Infinite Sum Theorem) ist in [LR], §11 nachzulesen.

Nun kommen wir zum Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung.

Satz 5.15. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Es sei $F : [0,1] \to \mathbb{R}$. F besitze eine stetige Ableitung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\int_0^1 f(t)\ dt = F(1) - F(0).$$

(vgl.[LR], §11 und [RB], Chapter 9)

Beweis von Satz 5.15.
Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf elegante Art zeigen zu können, verwenden wir nun Keislers Infinite Sum Theorem (vgl. Satz 5.14). Hierfür müssen wir zeigen, dass die Ausssagen (i) und (ii) dieses Satzes gelten.

Wir definieren zunächst die Abbildung

$$A(u,v) := F(v) - F(u) \text{ für } 0 \leq u < v \leq 1.$$

Zuerst wird 5.14 (i) gezeigt:

$A(0,u) + A(u,v) = F(u) - F(0) + F(v) - F(u) = F(v) - F(0) = A(0,v)$ für $0 \leq u < v \leq 1$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass 5.14 (ii) erfüllt ist. Dafür wenden wir die stetige Differenzierbarkeit (vgl. Satz 5.13) an, wobei wir F statt f und $st(x)$ an Stelle von x_0 setzen. Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von F, dem Satz 5.13 und der Berechnung von $^*A$ erhalten wir

$$(1) \qquad \frac{^*A(x,x+dx)}{dx} = \frac{^*F(x+dx) - {}^*F(x)}{dx} \approx\ F'(st(x)) = f(st(x)),$$

falls $0 < dx \approx 0$ und $x, x + dx \in {}^*[0,1]$.

Aufgrund der Stetigkeit von f (vgl. Satz 3.1) und da $st(x) \approx x$ (vgl. Bemerkung 5.12(ii)) ist, folgt

$$f(st(x)) \approx {}^*f(x).$$

Wegen (1) gilt daher

$$\frac{{}^*A(x, x + dx)}{dx} \approx {}^*f(x).$$

Somit ist auch 5.14 (ii) erfüllt. Daher gilt laut Satz 5.14

$$A(0,1) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Es ist ja $\int_0^1 f(t)\ dt = A(0,1) = F(1) - F(0)$ und somit der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung bewiesen.

□

6. Funktionenfolgen

In diesem Kapitel wird nach der Einführung von Funktionenfolgen der Satz über das Nichtstandard-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz und Charakterisierung eines Häufungspunktes von Funktionenfolgen bewiesen. Dabei halten wir uns an [LR] und [RB].

In der klassischen Analysis betrachten wir Folgen von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir auffassen als Abbildung

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (n, x) \mapsto f_n(x)$$

mit $F(n, x) = f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$.

Transferieren wir nun die Abbildung F, so erhalten wir

$$^*F : {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R},$$

das heißt

$$^*f_n(x) := {}^*F(n, x) \quad \text{für alle } n \in {}^*\mathbb{N} \text{ und für alle } x \in {}^*\mathbb{R}.$$

Somit ist $({}^*f_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ eine Nichtstandardfolge von Funktionen. (vgl. [RB], Chapter 7)

Nun kommen wir zum Satz und Beweis vom gleichmäßigen Grenzwert und Häufungspunkt von Funktionenfolgen. (vgl. [LR], §12)

Satz 6.1 (Gleichmäßiger Grenzwert und Häufungspunkt von Funktionenfolgen). *Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt:*

(i) f ist gleichmäßiger Grenzwert der Folge (f_n) genau dann, wenn

$$^*f_h(x) \approx {}^*f(x) \quad \textit{für alle } h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \textit{ und } \forall x \in {}^*\mathbb{R};$$

(ii) f ist gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge der Folge (f_n) genau dann, wenn

$$^*f_h(x) \approx {}^*f(x) \quad \textit{für ein } h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \textit{ und } \forall x \in {}^*\mathbb{R}.$$

Bemerkung:

In [RB], Chapter 7 wird die gleichmäßige Konvergenz folgendermaßen formuliert: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \;\; \forall n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad {}^*f_n(x) \approx f(x).$$

Im Vergleich zur Nichtstandard-Version der gleichmäßigen Konvergenz (Satz 6.1 (i)) sehen wir uns die Definition in der klassischen Analysis an:

Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n \geq n_0 : \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

das heißt n_0 hängt hier nur von ϵ ab. (vgl. [OF], §21)

***Beweis von Satz 6.1*.**
Zunächst zeigen wir **(i)**. Da eine Äquivalenz behauptet wird, beweisen wir beide Richtungen.

„⇒“: Es sei $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Da f gleichmäßiger Grenzwert der Folge (f_n) ist, also $f_n(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$x \in \mathbb{R} \;\; n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Nach Anwendung des Transferprinzips (vgl. Satz 5.8) folgt

$$|{}^*f_n(x) - {}^*f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in {}^*\mathbb{R} \;\; \forall n \in {}^*\mathbb{N} \text{ mit } \; n \geq n_0.$$

Wählen wir nun $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, so gilt:

$$|{}^*f_h(x) - {}^*f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in {}^*\mathbb{R}.$$

Da $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ beliebig war, folgt für $x \in {}^*\mathbb{R}$ und $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$

$${}^*f_h(x) \approx {}^*f(x).$$

Somit haben wir eine Richtung gezeigt.

Nun zeigen wir die Rückrichtung.
„$\Leftarrow$“: Sei wieder $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Nach Voraussetzung gilt für alle $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ die Aussage

$$^*\varphi(n) \equiv \ \forall x \in {}^*\mathbb{R} \quad |^*f_n(x) - {}^*f(x)| \leq \epsilon.$$

Wir wenden nun das Permanenzprinzip (siehe Satz 5.3(ii)) an. Daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass die Aussage $\varphi(n)$ für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gegeben. Aus der Gültigkeit der Aussage $^*\varphi(n)$ und nach Anwendung des Transferprinzips (siehe Satz 5.8) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Also gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } n \geq n_0,$$

das heißt f ist gleichmäßiger Grenzwert der Folge f_n und somit ist auch die Rückrichtung gezeigt.

Nun kommen wir zum zweiten Teil des Beweises. Auch hier müssen wir beide Richtungen zeigen, da die Äquivalenz der beiden Aussagen behauptet wird.

(ii) „$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung ist f gleichmäßiger Grenzwert einer Teilfolge der Folge (f_n), das heißt es gibt eine Teilfolge

$$\tilde{f}_n = f_{k_n} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},$$

die gleichmäßig gegen f konvergiert.
Sei $n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. In (i) haben wir schon bewiesen, dass für alle $x \in {}^*\mathbb{R}$

$$^*\tilde{f}_n(x) \approx {}^*f(x)$$

gilt.

Wir müssen also noch zeigen, dass

$$^*\tilde{f}_n = {}^*f_h \text{ für ein } h \geq n$$

gilt. Dieses h erhalten wir, indem wir das Transferprinzip (vgl. Satz 5.8) anwenden:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists h \in \mathbb{N} \ \text{ mit } h \geq n \text{ und } \tilde{f}_n = f_h.$$

Diese Aussage gilt, da $k_n \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.
Wir haben also gezeigt, dass $^*\tilde{f}_n = {}^*f_h$ für ein $h \geq n$ ist und daher gilt $^*f_h(x) \approx {}^*f(x)$

für ein $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und alle $x \in {}^*\mathbb{R}$.

Im letzten Schritt zeigen wir auch hier die Rückrichtung.

„$\Leftarrow$“: Diese Aussage beweisen wir, indem wir induktiv eine gegen f eine gleichmäßig konvergente Teilfolge konstruieren.

Für den Indunktionsanfang setzen wir $k_0 := 0$, $n \in \mathbb{N}$. Induktiv werden wir dann $k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_{n-1} < k_n$ erhalten, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f_{k_n}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n},$$

das heißt die Teilfolge f_{k_n} der Folge f_n konvergiert gleichmäßig gegen f und der Beweis ist also beendet, sobald obige Folge (k_n) konstruiert wurde.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Da nach Voraussetzung ${}^*f_h(x) \approx {}^*f(x)$ für ein $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ und alle $x \in {}^*\mathbb{R}$ ist, gilt

$$\exists h \in {}^*\mathbb{N} \;\; h > k_{n-1} \;\text{ und }\; \forall x \in {}^*\mathbb{R} \;\; |{}^*f_h(x) - {}^*f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Wir wenden nun wieder das Transferprinzip (vgl. Satz 5.8) an. Durch den Transfer erhalten wir die Existenz eines $h \in \mathbb{N}$ mit $h > k_{n-1}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|f_h(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

Nun setzen wir $k_n = h$, womit der Induktionsschritt erledigt ist.

$\square$

Bemerkung 6.2 (Punktweise Konvergenz).
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertiger Funktionen konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad {}^*f_n(x) \approx f(x).$$

(vgl. [RB], Chapter 7)

Im Vergleich zur Nichtstandard-Formulierung der puntweisen Konvergenz sehen wir uns die Formulierung in der klassischen Analysis an. (vgl. [OF], §21)

Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, falls für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge (f_n) gegen f konvergiert, das heißt wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 : \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

das heißt n_0 hängt hier von x und von ϵ ab.

Konvergiert eine Funktionenfolge gleichmäßig, so konvergiert sie auch punktweise. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. (vgl. [OF], §21)

Die Unterschiede punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz werden gut durch das Verhalten der Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ veranschaulicht. (vgl. [RB], Chapter 7)

Beispiel 6.3.
(a) Im Beispiel (b) benötigen wir folgende Aussage aus der klassischen Analysis:

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0 \;\; \text{für } 0 < c < 1, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

Wenn $0 \leq c < 1$ ist, so ist die Folge $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend, nach unten beschränkt und konvergiert daher gegen eine reelle Zahl L. Wählen wir ein $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, dann gilt:

$$c^N \approx L \text{ und } c^{N+1} \approx L.$$

Es ist $L \approx c^{N+1} = c \cdot c^N$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $c \cdot c^{n+1} = c \cdot c^n$. Daher ist nach dem Transferprinzip $c^{n+1} = c \cdot c^n$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$, also gilt:

Für $c \in \mathbb{R}$: $c \cdot c^N \approx c \cdot L$.

Wenden wir nun die Transitivität der Äquivalenzrelation $\approx$ an (vgl. [SC], Kapitel 1), so ist $L \approx c \cdot L$. Da $0 < c < 1$ folgt $c \neq 1$ und daraus folgt wiederum $L = 0$.

Wir haben also gezeigt, dass $c^N \approx 0$ ist.

(vgl. [RB], Chapter 6)

(b) Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ im Intervall $[0, 1]$. Wir zeigen, dass f_n im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ punktweise gegen die Funktion f konvergiert, wobei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Genauer zeigen wir: Die Folge (f_n) konvergiert im abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion f.

Intuitiv lässt sich die Situation so beschreiben:
Für $0 \leq x < 1$ konvergiert die Folge $f_n(x) = x^n$ gegen 0. Für $x = 1$ erhalten wir die konstante Folge $(f_n(1)) = (1)$. Somit konvergiert f_n punktweise gegen f. Wenn sich x Richtung 1 „bewegt", so „verlangsamt" sich das „Tempo" der Konvergenz. Das heißt also, wenn wir bei gegebenem $\epsilon > 0 \quad x$ sehr nahe bei 1 betrachten, müssen wir weiter und weiter entlang der Folge der Potenzen x^n wandern, bis wir ein n erreichen, wo die Bedingung erfüllt ist, dass x^n kleiner als ϵ ist. Wenn also letztlich x unendlich nahe an 1 herankommt (aber auf jeden Fall kleiner als 1 ist), so dauert es „unendlich lange", bis x^n unendlich nahe bei 0 ist.

Nun zeigen wir unter der Verwendung des Satzes über den gleichmäßigen Grenzwert und das Permanenzprinzip, dass folgende Behauptung gilt:

(f_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.

indirekt: Angenommen f_n konvergiert gleichmäßig gegen f, dann gilt nach
Satz 6.1(i):

$$\text{(G)} \quad \forall h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \quad \forall x \in {}^*[0,1] : {}^*f_h(x) \approx {}^*f(x).$$

Sei $x \approx 1$, aber $x < 1$, $\;n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n \approx 1$. (1)

Nach dem Permanenzprinzip (Overflow) Satz 5.3(i) können wir folgern:

$$\exists h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} : x^n \approx 1 \ \forall n \in {}^*\mathbb{N},\ n \leq h.$$

Insbesondere ist $x^h \approx 1$, also $x^h \not\approx 0$. (2)

Wegen ${}^*f(x) = 0$ ist (2) im Widerspruch zur gleichmäßigen Konvergenz, denn nach (G) gilt für h:

$$\underbrace{{}^*f_h(x)}_{x^h} \approx \underbrace{{}^*f(x)}_{=0}.$$

Also haben wir gezeigt, dass (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

7. Rück-und Ausblick

Die Nichtstandard-Analysis hat Anlass zu vielen Diskussionen gegeben. Hauptsächlich ging es dabei um die Frage, inwieweit diese moderne Theorie dazu geeignet ist, das Vorgehen von Leibniz und seiner Anhänger zu rechtfertigen.

Abraham Robinson schrieb 1966 in seinem Lehrbuch (vgl. [AR]):

> „..... Seit mehr als einem Jahrhundert beruhen die Darstellungen der Geschichte der Differential- und Integralrechnung auf der Annahme, dass, obwohl die Idee eines Zahlensystems mit unendlichkleinen und unendlichgroßen Elementen möglicherweise konsistent ist, diese für die Entwicklung der mathematischen Analysis nutzlos sei. Als Folge hiervon gibt es in den Werken dieser Periode einen bemerkenswerten Kontrast zwischen der Strenge, mit der die Vorstellungen von Leibniz und seinen Anhängern behandelt werden, und der Nachsicht, mit der die Fehler der frühen Anhänger der Grenzwertauffassung behandelt werden. ...“
> (Zitat nach [VK], Kapitel 3)

Wir sehen also, dass es auch schon damals Befürworter und Gegner der Nichtstandard-Analysis gab. Die gespaltene Meinung darüber gibt es auch heute noch.

Doch welche Vorteile beziehungsweise Nachteile hat die Nichtstandard-Analysis?

In [LR] werden folgende Vorzüge angesprochen:

Mit der Nichtstandard-Mathematik können bekannte Ergebnisse durchsichtiger und natürlicher bewiesen werden. Weiters können dadurch neue mathematische Einsichten gewonnen werden und möglicherweise offene Probleme der Mathematik mit Hilfe dieser Methode gelöst werden.

Die mathematische Ausdrucksweise wird nicht nur reichhaltiger, sie befähigt uns auch, manche Sachverhalte anschaulicher zu formulieren.

In der Ausbildung der LehramtsstudentInnen an der Universität Wien wird die klassische Analysis gelehrt. Die Nichtstandard-Analysis ist im Lehrangebot nicht enthalten. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob die Nichtstandard-Analysis in den Unterricht integriert werden sollte.

[WZ] nennt folgende Vorteile aus ihren Erfahrungen in der Praxis:

◇ Leichteres Erlernen der grundlegenden Konzepte.
◇ Beweise sind leichter zu erklären und liegen näher an der Intuition.
◇ Die Nichtstandard-Analysis benötigt den Grenzwertbegriff nicht explizit.
◇ Im Unterricht können durch neue Beiträge und Inhalte Verbesserungen der Vermittlung erreicht werden.

Als Nachteile erwähnt [WZ] folgendes:

◇ Die Einführung des hyperreellen Zahlensystems beinhaltet einen hohen Grad an Abstraktion.

Ich selber sehe auch einen großen Nachteil darin, dass man vor der Anwendung der Nichtstandard-Analysis viel Vorarbeit leisten muss. Es sind viele verschiedene Begriffe wie Filter, Ultrafilter, Äquivalenzklassen, infinitesimal benachbart zu, usw. zu erklären und zu verstehen, bevor man zum „Eigentlichen“ übergehen kann, nämlich der Anwendung, sei es bei Folgen und Reihen, der Differentiation oder Integration. Weiters müssen die StudentInnen schon Vorkenntnisse haben, um die Nichtstandard-Analysis verstehen zu können.

Doch sie hat auch einige Vorteile, wie sie schon [WZ] anspricht. Wenn die Vorarbeit geleistet wurde, so sind danach Definitionen, Sätze und deren Beweise aus meiner Sicht in vielen Fällen verständlicher und einfacher nachzuvollziehen. Die Beweisführung ist meiner Meinung nach größtenteils intuitiv leichter als die mit Verwendung von Grenzwerten.

Nehmen wir das Beispiel Stetigkeit von Funktionen her. Die Definition der Nichtstandard-Analysis lautet in Worten, dass eine unendlich kleine Abänderung der Variablen höchstens eine unendlich kleine Abänderung der Funktionswerte bewirkt (vgl. Kapitel 3, Satz 3.1). Unendlich klein wurde vorher definiert, nämlich dass der Betrag der Differenz von zwei Folgen kleiner gleich als 1/n ist (für jedes $n \in \mathbb{N}$). Auch im Beweis wird mit diesen genauestens definierten Begriffen hantiert.
In der klassischen Analysis hingegen wird die Stetigkeit von Funktionen über den Grenzwert bzw. über die ϵ-δ-Charakterisierung (vgl. [OF], §11) definiert. Diese Art der Definition der Stetigkeit ist für mich intuitiv schwerer zu verstehen, da die ϵ bzw. δ Umgebung nicht genau fassbar ist. Der Beweis erfolgt ebenfalls durch die Verwendung des Grenzwertprozesses und der positiven reellen Zahlen ϵ und δ.
Meiner Meinung nach ist der Beweis der Nichtstandard-Analysis eleganter. Außerdem kann ich mir unter „unendlich nahe bei“ mehr vorstellen als unter dem Grenzwertbegriff. Beim Beweis der gleichmäßigen Stetigkeit in der klassischen Analysis benötigt man sogar den Satz von Bolzano Weierstraß, arbeitet also mit konvergenten Teilfolgen. In

der Nichtstandard-Analyis wird der Beweis wieder mit dem Begriff „unendlich nahe bei“ geführt.
Vor allem das Transfer-und Permanenzprinzip, also dass man viele Sätze, die in $\mathbb{R}$ gelten auf $^*\mathbb{R}$ übertragen kann, ist eine sehr hilfreiche Methode, um Beweise elegant zu führen.

Zusammenfassend bin ich folgender Meinung:

In der Analysis-Vorlesung am Beginn des Studiums halte ich es für nicht sinnvoll, die Nichtstandard-Analysis zu lehren. Aus eigener Erfahrung und denen meiner StudienkollegInnen weiß ich, dass es eine gewisse Herausforderung bedeutet, von der Schulmathematik auf die Hochschulmathematik umzustellen und sich mit neuen Begriffen auseinanderzusetzen.
Da die Nichtstandard-Analysis sehr umfassend ist, bräuchte man beinahe eine eigene Vorlesung, nur um die vielen Begriffe und die Konstruktion des Erweiterungskörpers $^*\mathbb{R}$, die die Grundlage für die Nichtstandard-Analysis bilden, einzuführen. Weiters bedarf es einiger mathematischer Vorkenntnisse, wie zum Beispiel der Begriffe Äquivalenzrelation, Körper, etc., um die einführenden Begriffe verstehen zu können. Mathematisches Denken im Sinne von „abstrakt denken können“ ist ein weiterer Aspekt, der bei der Einführung der Begriffe eine nicht zu unterschätzende Rolle spielt.
Trotz der oben genannten Herausforderungen, die die Nichtstandard-Analysis mit sich bringt, würde ich es begrüßen, wenn es das Angebot gäbe, Nichtstandard-Analysis während der Ausbildung schnuppern zu können. Ich könnte mir vorstellen, dass Nichtstandard-Analysis als Wahlfach, oder im 2.Abschnitt als Vertiefung in die Analysis angeboten wird.

Eine mögliche Alternative wäre ein rein axiomatische Zugang zur Nichtstandard-Analysis. Hier werden grundlegende Begriffe wie Filter, Ultrafilter, das Entstehen des Erweiterungskörpers, usw. nicht behandelt, sondern die wesentlichen Eigenschaften von $^*\mathbb{R}$ usw. einfach als Ausgangspunkt genommen. Diese zweite Zugangsmöglichkeit würde Zeit sparen und man könnte direkt, ohne langwieriger Beschäftigung mit den grundlegenden Begriffen, in die Nichtstandard-Analysis einsteigen.

Wobei ich der Meinung bin, dass die „Werkzeuge“, mit denen man hantiert, auch verstanden und nicht einfach nur verwendet werden sollten.

A. Filter und Ultrafilter

Der folgende Abschnitt ist an [LR] angelehnt und wurde gemeinsam mit Cornelia Schubert (vgl. [SC]) verfasst. Er beinhaltet grundlegende Definitionen und Sätze der Nichtstandard-Analysis, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

Definition A.1 (Filter).
Es sei I eine fest vorgegebene nicht-leere Menge. Die Potenzmenge von I, das heißt die Menge aller Teilmengen von I, ist definiert als $\mathcal{P}(I) := \{A : A \subseteq I\}$.
Ein System $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt ***Filter*** *über I, falls gilt:*

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *und* $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F},\ A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

Satz und Definition A.2 (Der Filter der koendlichen Mengen).
Sei I eine unendliche Menge. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{A \subseteq I : I \setminus A \text{ endlich}\}$$

ein Filter über I.

$\mathcal{F}$ heißt der ***Filter der koendlichen Teilmengen*** *von I.*

Definition A.3 (Ultrafilter).
Ein Filter $\mathcal{F}$, zu dem es keinen echten Oberfilter gibt, heißt ***Ultrafilter****. In anderen Worten:*

$$\text{Seien } \mathcal{F} \text{ und } \mathcal{G} \text{ Filter, mit } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}.$$

Satz A.4 (Ultrafilter).
Sei $i_0 \in I$ fest und $\mathcal{F} := \{A \subseteq I : i_0 \in A\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter.

Beweis von Satz A.2 und A.4.
Zuerst zeigen wir den Satz A.2, indem wir die Filtereigenschaften prüfen.

(i) $\mathcal{F}$ ist nicht die leere Menge, weil sie jedenfalls I enthält. Die leere Menge ist nicht Element von $\mathcal{F}$, weil jede Teilmenge A $\in \mathcal{F}$ zumindest i_0 enthält.

(ii) ist schnell zu sehen: Seien A,B $\in \mathcal{F}$. Da i_0 sowohl in A als auch in B liegt, ist auch der Durchschnitt A $\cap$ B in $\mathcal{F}$.

Auch Forderung (iii) ist erfüllt, da für A $\subseteq B \subseteq I$ mit A $\in \mathcal{F}$ gilt: $i_0 \in A$ folgt $i_0 \in B$. Somit ist auch die dritte Filtereigenschaft gezeigt und der erste Satz bewiesen.

Nun beweisen wir Satz A.4.

Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, das heißt für die Filter $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
Sei nun indirekt $\mathcal{F}$ kein Ultrafilter. Für einen Filter $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$ folgt, dass es ein A gibt, das in $\mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ liegt. Da nun A $\in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ liegt, folgt A $\notin \mathcal{F}$, daher ist $i_0 \notin$ A. Das heißt, es ist A $\cap \{i_0\} = \emptyset$.
Wegen A $\in \mathcal{G}, \{i_0\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ und da $\mathcal{G}$ ein Filter ist, folgt $A \cap \{i_0\} \in \mathcal{G}$. Weil A $\cap \{i_0\} = \emptyset$ folgt $\emptyset \in \mathcal{G}$, was ein Widerspruch zur Filtereigenschaft von $\mathcal{G}$ ist.

$\square$

Definition A.5 (partiell geordnete Menge, total geordnete Menge, partielle bzw. totale Ordnung über X)**.**

(1) Eine ***partiell geordnete Menge*** *ist ein Paar $\langle X, \leq \rangle$, wobei X eine nicht-leere Menge und $\leq$ eine Relation über X ist, die für $x, y, z \in X$ die folgenden drei Eigenschaften besitzt:*
(a) Reflexivität: $x \leq x$
(b) Antisymmetrie: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
(c) Transitivität: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

(2) K heißt ***total geordnet****, falls $\forall$ x,y $\in$ K gilt:*
$x \leq y \vee y \leq x$.

(3) Ist $\langle X, \leq \rangle$ eine partiell bzw. total geordnete Menge, so heißt $\leq$ eine ***partielle*** *bzw.* ***totale Ordnung*** *über X.*

Definition A.6 (obere Schranke, maximales Element)**.**
(1) $y \in X$ heißt ***obere Schranke*** *von K, falls gilt:*

$$x \leq y, \ \forall x \in K.$$

*(2) $m \in X$ heißt ein **maximales Element**, falls $\forall x \in X$ gilt:*

$$m \leq x \Rightarrow m = x.$$

Um die Existenz von Ultrafiltern begründen zu können, wird das Zornsche Lemma benötigt:

Satz A.7 (**Zornsches Lemma**).
Sei $\langle X, \leq \rangle$ eine partiell geordnete Menge, so dass jede nicht-leere total geordnete Menge $K \subseteq X$ eine obere Schranke hat. Dann besitzt X ein maximales Element.

Satz A.8 (Existenz von Ultrafiltern).
Zu jedem Filter über I existiert ein, diesen Filter umfassender Ultrafilter über I.

Satz A.9 (Charakterisierung von Ultrafiltern).
Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I. Dann sind die beiden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter.

(ii) Für alle $A \subseteq I$ ist $A \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus A \in \mathcal{F}$.

Satz A.10 (Eigenschaften von Filtern und Ultrafiltern).
(i) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I. Dann gilt für $A \subseteq I$:
$A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *und* $A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

(ii) Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über I. Dann gilt für $A_1, ..., A_n \subseteq I$:
$A_1 \cup ... \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_k \in \mathcal{F}$ *für ein* $k \in \{1, ..., n\}$.

Beweis von Satz A.10.
(i): Da $\mathcal{F}$ ein Filter mit $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ ist, folgt $A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{F}$ laut Definition eines Filters. Ebenso folgt aus der Definition Filter wegen
$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq A$, dass auch A $\in \mathcal{F}$ ist.

(ii): Indirekt angenommen $A_k \notin \mathcal{F}$ für k = 1,...,n. Da $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist und $A_k \notin \mathcal{F}$, folgt $I \setminus A_k \in \mathcal{F}$ für k=1,...,n (nach Satz 1.9).
Nun verwenden wir die Filtereigenschaft von $\mathcal{F}$ und erhalten
I $\setminus \cup_{k=1}^n A_k = \cap_{k=1}^n (I \setminus A_k) \in \mathcal{F}$. Da laut Voraussetzung $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$ ist, folgt $\emptyset = \cup_{k=1}^n A_k \cap (I \setminus \cup_{k=1}^n A_k) \in \mathcal{F}$. Das ist ein Widerspruch zu $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[OF] Forster, O. (9. Aufl. 2008) *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Vieweg. Braunschweig.

[RB] Goldblatt, R. (1998) *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis.* Springer-Verlag. New York.

[LR] Landers, D. & Rogge, L. (1994) *Nichtstandard Analysis.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.

[DL] Laugwitz, D. (1987) *Kontinuum und Zahlen. Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis.* Bibliographisches Institut AG. Zürich.

[TL] Lindstrøm, T. (1988) *An Invitation to Nonstandard Analysis.* In: Nonstandard Analysis and its Applications, edited by Cutland, N. (1988). Cambridge University. Cambridge.

[JR] Resag, J. (2008) *Die Grenzen der Berechenbarkeit. Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik.* Zugriff am 16. April 2011 unter http://www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/start3.htm.

[AR] Robinson, A.(1966) *Non-standard-analysis.* North-Holland. Amsterdam.

[SC] Schubert, C. (2011) Diplomarbeit. *Nichtstandard-Analysis: hyperreelle Zahlen und Folgen.* Fakultät für Mathematik, Universität Wien.

[VK] Volkert, K.(1987) *Geschichte der Analysis.* BI-Wiss.-Verlag. Mannheim, Wien.

[WZ] Wieczorek, B. (2010) *Nichtstandard Analysis und deren Anwendung im Mathemtikunterricht.* Friedrich Schiller Universität Jena.

[WP] Zugriff am 6. Mai 2011 unter *http://de.wikipedia.org/wiki/Hyperreelle_Zahl.*

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Ruth Silberbauer
Geburtsdatum:	17. März 1987
Geburtsort:	Horn
Religion:	Evangelisch H.B.
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Eltern:	Monika und Franz Silberbauer
Geschwister:	Esther, Hannes und Andreas Silberbauer

Ausbildung

1993-1997	Volksschule Gars am Kamp
1997-2001	Hauptschule Gars am Kamp
2001-2005	BORG Krems an der Donau
2005	Matura am BORG Krems mit ausgezeichnetem Erfolg bestanden
2005-2011	Studium an der Universität Wien
2005-2006	Lehramt UF Mathematik, UF Geographie und Wirtschaftskunde
2005-2006	Lehramt UF Mathematik, UF Bewegung und Sport
22.08.2008	Erste Diplomprüfung bestanden

Sonstige Tätigkeiten

2003-2007	Führerin Renaissanceschloss Rosenburg
2007- heute	Trainerin Kletterpark Rosenburg
2011- heute	Assistentin Uniqua Vital Truck