# DIPLOMARBEIT

## „Folgen und Reihen – ein Vergleich von verschiedenen Schultypen (AHS, HTL, HAK) anhand einer Schulbuchanalyse“

angestrebter akademischer Grad
Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)


| | |
|---|---|
| Verfasser: | Manuel Mitterhauser |
| Matrikelnummer: | 0600768 |
| Studienrichtung: | A 190 406 299 |
| | Lehramt Mathematik Psychologie/Philosophie |


Wien, Mai 2011

**Danksagung**

Meine Dankesworte richten sich insbesondere an Herrn Professor Andreas Ulovec, der mir während des Entstehens dieser Diplomarbeit mit viel Geduld und Rat zur Seite gestanden ist.

Weiters möchte ich mich bei meiner Arbeitgeberin im „Learn 4 U! Nachhilfe OG“ bedanken, die mir von Zeit zu Zeit immer wieder Tage freigestellt hat, um an meiner Diplomarbeit voranzukommen.

Zum Schluss möchte ich auch meinen Freundinnen und Freunden, die für mich Wegbegleiter waren, und meiner Familie Dank aussprechen, weil auch sie mir zur Seite gestanden sind.

**Inhaltsverzeichnis**

Vorwort ........................................................................................................................ 4

Schulbuchanalyse und –vergleich von Büchern für Allgemeinbildende
Höhere Schulen ................................................................................................ 5

Schulbuchanalyse und –vergleich von Büchern für Höhere Technische Lehranstalten … 40

Schulbuchanalyse und –vergleich von Büchern für Handelsakademien ............................ 62

Abschließender Vergleich der Schultypen: AHS, HTL und HAK ......................................... 86

Beispielsammlung ............................................................................................................ 88

Nachwort ......................................................................................................................... 93

Literaturverzeichnis .......................................................................................................... 94

Lebenslauf ........................................................................................................................ 95

## Vorwort

Ich schreibe diese Diplomarbeit mit dem Titel „Folgen und Reihen – ein Vergleich von verschiedenen Schultypen (AHS, HTL, HAK) anhand einer Schulbuchanalyse“, weil mich diese Thematik sehr interessiert und auch ein grundlegendes Gebiet in der Mathematik darstellt.

In dieser Arbeit werde ich eine Schulbuchanalyse von mehreren verschiedenen Schulbüchern von Allgemeinbildenden Höheren Schulen, Handelsakademien und Höheren Technischen Lehranstalten durchführen und dabei wesentliche Unterschiede aufzeigen beziehungsweise Gemeinsamkeiten feststellen.

Da es sich um eine Schulbuchanalyse handelt, werde ich in weiterer Folge nur Schulbücher in meinem Literaturverzeichnis anführen. Zu Beginn eines jeden Kapitels werden die Bücher und dessen Autoren in Bezug auf den jeweiligen Schultyp genannt. Ich habe nur Beispiele oder Formulierungen aus diesen Schulbüchern verwendet. Bei eingefügten Grafiken steht meist zuvor – selten danach – aus welchem Buch diese entstammen, somit entfällt die Zitierweise in den Fußzeilen.

# 1. Schulbuchanalyse und –vergleich von Büchern für Allgemeinbildende Höhere Schulen

In diesem Abschnitt meiner Diplomarbeit untersuche ich zwei führende Schulbücher aus dem Bereich der Allgemeinbildenden Höheren Schulen:

1) „Mathematik Lehrbuch 6“ von Götz, Reichel, Müller, Hanisch (ÖBV Wien , 1. Auflage 2005)
2) „Mathematik verstehen 6“ von Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl (ÖBV Wien, 1. Auflage 2005)

Beide Bücher sind auflagenstark an österreichischen Schulen vertreten! Das Lehrbuch von Universitätsprofessor Götz findet großen Anklang im Gymnasium in Hollabrunn und im Bundesoberstufenrealgymnasium in Mistelbach, wobei nun durch die Umstellung auf die Zentralmatura das Buch von Götz gegen das Schulbuch von Malle getauscht worden ist. Malles Schulbuch wird im Aufbaugymnasium in Hollabrunn und im Gymnasium in Stockerau verwendet. Bei meinen Praktika an Wiener Schulen habe ich vorwiegend das Schulbuch von Götz entdeckt, wobei die Lehrerinnen und Lehrer auch jenes von Universitätsprofessor Malle benützen.

Zu Beginn fällt auf, dass der Aufbau der Kapitelreihenfolge nicht der gleiche ist. Das Schulbuch von Malle beinhaltet 12 Kapitel – davon 3 Kapitel zum Thema „Folgen und Reihen“. Im Gegensatz dazu gibt es nur ein Kapitel über „Folgen und Reihen“ im Schulbuch von Götz und die Gesamtkapitelanzahl liegt bei 7.

Universitätsprofessor Malle, seine Kolleginnen und sein Kollege Universitätsprofessor Ulovec haben sich bei der Kapitelreihenfolge in ihrem Buch für folgende Reihenfolge entschieden: Kapitel 3 – Reelle Funktionen; Kapitel 4 – Exponential- und Logarithmusfunktionen; Kapitel 5 – Winkelfunktionen (Diese kommen teilweise bei Götz schon im Buch der 5. Klasse AHS vor. Malles Werk bietet hierbei aber zusätzlich eine Vertiefung, die in dem Schulbuch von Götz nicht zu finden ist!); Kapitel 6 – Ergänzungen zu Funktionen. Nun kommen jene Kapitel, die für meine Diplomarbeit relevant sind: Kapitel 7 „Folgen“, Kapitel 8 „Reihen“ und Kapitel 9 „Sparen, Renten und Kredite“ – eine Vertiefung der „Folgen und Reihen“, die man so im Buch von Götz nicht findet, eher in den Büchern einer Handelsakademie – dazu jedoch im späteren Kapitel 3.

Man fragt sich nun wahrscheinlich, warum ich die Auflistung fast aller Kapitel aus dem Schulbuch von Malle gebe? Der Grund dafür ist das Kapitel 10: „Die Euler'sche Zahl; natürliche Logarithmen“. Malle verwendet zum Definieren der Euler'schen Zahl eine Folge. Das ist richtig, aber die Euler'sche Zahl sollte – zumindest für mich relevant – schon im Zuge der Exponential- und Logarithmusfunktionen erklärt werden. Hier stellt sich die Frage, ob es nicht sinnvoller wäre, Kapitel zusammenzufassen und die Reihenfolge in Malles Werk zu ändern; sprich: zuerst „Folgen und Reihen“ und erst danach die Kapitel betreffend „Funktionen“ und „Logarithmen“, ähnlich wie es im Buch von Götz der Fall ist!

In letzterem ist Kapitel 4 „das“ für meine Diplomarbeit relevante – nämlich „Folgen und Grenzprozesse“. In weiterer Folge stehen Kapitel 6 „Exponential- und Logarithmusfunktionen“ und Kapitel 7 „Reelle Funktionen“. Das sind jene Kapitel, die bei Malle schon vor „Folgen“ „gelehrt“ werden! In diesem Fall kann Götz auch die Euler'sche Zahl mithilfe von Folgen definieren und die zugehörigen Funktionen zeichnen. Diese Reihenfolge erscheint mir auch taktisch klüger gewählt, dies jedoch ist nicht relevant für meine Diplomarbeit, sondern nur eine Feststellung im Zuge meiner Analyse. Universitätsprofessor Götz und seine Kollegen haben auch mit der Wahl des Titels für das Kapitel „Folgen und Reihen“ gleich etwas Wichtiges angesprochen, das bei beiden Schulbüchern eine Rolle spielt: „Grenzprozesse“.

Nach einer kleinen Vorschau über die Approximation eines n-Eckes als Flächeninhalt des Kreises und über das HERON'sche Verfahren, sowie über unendliche Dezimalzahlen startet das Schulbuch von Professor Götz und seinen Kollegen mit „4.1. Unendliche Folgen – Explizite und rekursive Beschreibung“. In diesem Unterkapitel wollen die Autoren den Schülerinnen und Schülern ein Gefühl für Zahlenfolgen – egal welcher Art – vermitteln. Es werden einige Folgendarstellungen geboten, in denen Lernende die ersten Folgenglieder ausrechnen oder zu gegeben Folgenglieder ein Bildungsgesetz für diese Folge angeben sollten.

Auch im Schulbuch von Professor Malle beschäftigt sich das erste Kapitel „7.1. Zahlenfolgen“ mit dem Finden der ersten Folgenglieder und dem Aufstellen von möglichen Termdarstellungen! Im Grunde genommen haben beide Professoren dieselben Schwerpunkte gesetzt, nur dass es im Buch von Malle gesamt 8 Aufgaben dazu gibt, im Buch von Götz hingegen sind es über 20 Beispiele. Hier stellt sich die Frage, ob die Quantität an

Aufgaben – wie bei Götz – zielführender ist als die Qualität der Aufgaben, die aber in beiden Büchern gleich ist! Ein Merkmal ist aber auffallend: Obwohl es sich um dieselben Aufgaben handelt, werden in dem Buch von Götz Bildungsgesetze und bei Malle Termdarstellungen gesucht. Hier sollte man vielleicht einheitlich vorgehen! Es handelt sich um denselben Stoff und in der heutigen Zeit ist es für die Kinder schon oft sehr verwirrend, wenn man etwas unterschiedlich benennt, auch wenn es dasselbe ist!

Das nächste Unterkapitel „4.2. Graphische Darstellung – Monotonie und Schranken" (Götz) bietet einige Beispiele zur Untersuchung des Monotonieverhaltens, sowie Beispiele zum Finden und Prüfen von Schranken. Auch bei Malle handelt das nächste Unterkapitel „7.2. Beschränkte und monotone Folgen" von der Monotonie einer Folge, und man soll auch hier Schranken finden und diese beweisen! Jedoch ist die Anzahl der Beispiele auf ein Minimum reduziert! Zu jedem kleinen Punkt, der in diesem Unterkapitel besprochen wird, gibt es nur(?) ein Beispiel. Das „nur" muss man hier mit Fragezeichen versehen, weil es sicherlich sinnvoller und auch zielführender ist, mehrere Beispiele, bei denen die Fragestellung anders formuliert wird, zu haben, sodass dies für Schülerinnen und Schüler gleich zu einer „neuen Aufgabe" wird. Damit erleben die zu Unterrichtenden eine Vielfalt an Beispielen und lernen nicht nur diese eine Schreibweise kennen. Ein großes Problem mit dem Schülerinnen und Schülern zu kämpfen haben, und das mir durch meine Nachhilfetätigkeit erst so richtig bewusst geworden ist, ist jenes, dass sie viel zu sehr dazu tendieren, sich Beispiele genau so einlernen, wie sie den Schülerinnen und Schülern im Unterricht begegnet sind. Sie neigen dazu, lediglich die Zahlen zu ersetzen und zeigen wenig Bereitschaft dazu, mathematische Schritte logisch nachzuvollziehen zu wollen. Bei anderen Formulierungen zeigen die Lernenden sich überfordert und denkfaul.

Da sich die beiden Schulbücher jetzt in ihrer Reihenfolge unterscheiden, fahre ich nun mit dem Buch von Götz, Reichel, Müller und Hanisch fort. Kapitel „4.3. Arithmetische Folgen und Reihen" beschreibt arithmetische Folgen und deren Anwendung im Geldwesen nach der Einfachzinsformel. Danach wird noch die endliche arithmetische Reihe beschrieben und zu diesen drei Unterpunkten gibt es wieder einige Beispiele, auch aus der Geometrie. Es gibt fast 40 Beispiele zu arithmetischen Folgen und Reihen in unterschiedlichster Form, damit Lernende etwas zum Üben und Verstehen haben. Arithmetische Folgen kommen im Schulbuch von Malle erst im Kapitel „7.5 Arithmetische Folgen" mit lediglich 8

Beispielaufgaben vor, jedoch gibt es hier ein paar weiter führende Aufgaben, die Schülerinnen und Schüler zum Denken anregen sollen! Den Begriff der Arithmetischen Reihe findet man erst im Kapitel „8.1 Endliche Reihen“; hierbei werden für die arithmetische Reihe 3 Beispiele gegeben.

Im Gegensatz zu den Arithmetischen Folgen und Reihen werden bei Götz die Geometrischen Folgen und Reihen getrennt behandelt! In den Kapiteln „4.4 Geometrische Folgen“ und „4.5 Geometrischen Reihen“ werden einige Erklärungen und Anwendungen zu diesen Themen geboten! Im Kapitel der geometrischen Reihen werden sowohl die endliche – als auch die unendliche – geometrische Reihe erklärt und zum Üben und Festigen sind genügend Beispiele vorhanden! Als Abschluss dienen die Beispiele aus der Geometrie – Figurenfolgen! Diese sind für die Schülerinnen und Schüler nicht einfach, regen jedoch zum Denken an! Zur Erklärung möchte ich erwähnen, dass ich im Anhang einige gute Beispiele und Übungsaufgaben platzieren werde, weil ich zu dem jetzigen Zeitpunkt die Reihenfolge besprechen möchte! Solche Beispiele aus der Geometrie, wie das Zickzackband oder die Spirale, findet man auch bei Malle in derselben Vielfalt! Jedoch bei den anderen Beispielen zu geometrischen Folgen und Reihen sind lediglich wenige zu erkennen! Götz hat das Kapitel der geometrischen Folgen und Reihen bereits in zwei Unterkapitel aufgeteilt, bei Malle findet man dieses Kapitel gleich in drei Teilen: „7.6 Geometrische Folgen“ für geometrische Folgen – wie der Name des Kapitels sich auch benennt. Die Kapitel „8.1. Endliche Reihen“ und „8.2. Unendliche Reihen“ weisen geometrische Reihen auf. Der Inhalt ist in beiden Büchern oberflächlich betrachtet gleich, nur ist dieser anders erklärt und aufgegliedert. Der große Unterschied liegt in der Art und der Vielfalt der Beispiele.

Im nächsten Abschnitt „4.6 Konvergenz von Zahlenfolgen“ behandeln Götz et al. folgende Themen: Nullfolgen, Grenzwerte reeller Zahlenfolgen, Konvergenzkriterien. Es wird der Begriff der $\varepsilon$ – Umgebung eingeführt! Damit schließt Professor Götz auch das Kapitel der „Folgen und Reihen“ ab. Professor Malle hat bereits im Unterkapitel „7.3 Grenzwerte von Folgen“ den Limes beschrieben und bietet „nur“ 4 Beispiele zum Berechnen von Grenzwerten verschiedener Folgen.

„7.4. Sätze über konvergente Folgen“ bietet zwei Sätze samt Beweise, die für Malle erst in späteren Kapiteln von Bedeutung sind: „Jede konvergente Folge ist beschränkt“, und dass die Folge trotz Multiplikation einer reellen Zahl oder Addition mit einer reellen Zahl Folge konvergent bleibt. Diese Sätze findet man auch im Schulbuch von Götz, jedoch nicht derart betont.

Malle hat bei der Darstellung von geometrischen und arithmetischen Folgen bis dato immer nur die explizite Darstellung verwendet und erklärt in „7.7 Rekursive Darstellung von Folgen" die andere Folgendarstellung, die bei Götz anfangs schon erklärt wird, weil der rekursiven Darstellung lediglich eine „Nebenrolle" zukommt.

„7.8 Nährungsweises Lösen von Gleichungen" ist für Malle nur Erweiterungsstoff für Realgymnasiasten. Somit ist es nicht für alle Schülerinnen und Schüler gedacht.

Bei Götz kommt den „Folgen und Reihen" lediglich ein einziges Kapitel zu. Bei Malle jedoch werden die beiden Begriffe „Folge" und „Reihe" gleich in zwei aufeinanderfolgenden Kapiteln erklärt und er beschreibt dann noch ein drittes Kapitel – „9 Sparen, Renten und Kredite", in dem Malle und seine Kolleginnen und Kollegen auf die Thematik der Finanzmathematik eingehen. Bei Götz findet man so eine Weiterführung nicht, jedoch ist das nur ein Teil dessen, was von Schülerinnen und Schüler einer Handelsakademie benötigt wird.

Nach dieser einführenden Analyse über die Gliederung der Thematik „Folgen und Reihen" beginnt nun eine genauere und detailliertere Analyse, in der Erklärungen und Beispiele aus beiden Schulbüchern gegenüber gestellt, Unterschiede aufgezeigt und Gemeinsamkeiten fest gestellt werden.

Das Erste, was auffällt, ist, dass die Folgen unterschiedlich angeschrieben sind, wie man im nachstehenden Bild aus dem Lehrbuch von Götz ansehen kann. Folgen werden in eckigen Klammern geschrieben.

4.1 Unendliche Folgen – Explizite und rekursive Beschreibung **121**

Die *Reihenfolge* der Aufzählung ist besonders wichtig. Unterscheide daher zwischen einer *Folge* $\langle x_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots \rangle$ und der Menge $\{x_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ der Zahlen dieser Folge! Bei der Aufzählung der Elemente einer *Menge* kommt es bekanntlich *nicht* auf die Reihenfolge an!

$\{2; 4; 6; 8; \ldots\} = \{4; 2; 8; 6; \ldots\}$ ABER $\langle 2; 4; 6; 8; \ldots \rangle \neq \langle 4; 2; 8; 6; \ldots \rangle$

Zu einer Folge gehört also ein **Bildungsgesetz**, dh. eine Vorschrift, die angibt, *wie* die Glieder einer Folge zu berechnen sind. Ein solches Bildungsgesetz kann verbal beschrieben sein, wie wir es etwa in Beispiel A **f)** getan haben. Von größerer Bedeutung sind aber die

**Explizite (Term-)Darstellung**

Das bedeutet: Man gibt einen Term zur Berechnung des n-ten Gliedes $x_n$ aus dem Zählindex[1] n an.
ZB beschreibt

$x_n = 2n - 1$ die Folge $\langle 1; 3; 5; \ldots \rangle$
$x_n = (-1)^n$ die Folge $\langle -1; +1; -1; \ldots \rangle$

**Rekursive Darstellung**[2]

Das bedeutet: Man gibt an, wie ein Folgenglied aus dem (den) vorhergehenden Folgenglied(ern) zu bilden ist. Die Folge kann dann schrittweise berechnet und hingeschrieben werden. ZB beschreibt

$x_1 = 2, x_{n+1} = x_n^{\,2} + 2$ die Folge $\langle 2; 6; 38; 1\,446; \ldots \rangle$
$x_1 = 1; x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ die Folge $\langle 1; 2; 3; 5; 8; \ldots \rangle$

Im Gegensatz dazu erklärt Malle, dass die eckige Anschreibweise unüblich für die Mathematik sei und er schreibt daher Folgen in runden Klammern – wie man in nachfolgender Abbildung sieht. Zudem gibt es anfangs nicht so viele Unterscheidungen, außer dass bei Götz mehr erklärt und ein Beispiel vorgerechnet wird, das eine ganze Seite in Anspruch nimmt.

Besteht eine Folge aus den Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$, so nennt man diese Zahlen die **Glieder der Folge**. Enthält die Folge nur endlich viele Glieder $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, so spricht man von einer **endlichen Folge**, andernfalls von einer **unendlichen Folge**. Eine endliche Folge bezeichnen wir so:

$(a_1, a_2, a_3 \ldots a_n)$

Wenn nichts anderes dazugesagt wird, verstehen wir jedoch in diesem Kapitel unter einer Folge stets eine unendliche Folge. Eine solche bezeichnen wir so:

$(a_1, a_2, a_3 \ldots)$ oder: $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ [Lies: Folge aller $a_n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$] oder kurz: $(a_n)$

Manchmal ist es zweckmäßig, eine Folge mit dem Index 0 zu beginnen. Man schreibt dann

$(a_0, a_1, a_2 \ldots)$ oder: $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ oder kurz: $(a_n)$

In seltenen Fällen beginnt eine Folge mit einem Index, der größer als 1 ist.

**Bemerkung:** In manchen Schulbüchern werden Folgen mit spitzen Klammern angeschrieben, also $\langle a_1, a_2, a_3 \ldots \rangle$. Dies ist jedoch sonst in der Mathematik eher unüblich.

Ist das n-te Glied $a_n$ einer Folge durch einen Term gegeben, zB $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, so spricht man von einer **Termdarstellung** der Folge.

Eine Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ kann man auch als eine Funktion $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ auffassen, die jeder natürlichen Zahl n den Funktionswert $f(n) = a_n$ zuordnet.

**Beispiel:** Ist $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, so handelt es sich um die Folge $\left(1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots\right)$.

Die Beispiele im Einführungskapitel zum Ermitteln der ersten Folgenglieder oder Aufstellen eines Bildungsgesetzes bieten eigentlich keine Unterschiede, außer bei Götz: Dort gibt es mehrere Beispiele dazu – gleich 2 Seiten zusätzlich im Vergleich zu einer Seite bei Malle. Zwecks Veranschaulichung füge ich einen Ausschnitt aus dem Schulbuch von Malle für die 10. Schulstufe ein.

### Grundaufgaben

**7.01** Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$. Stelle sie auf dem Zahlenstrahl dar und zeichne den Graphen der zugehörigen Funktion.

**a)** $a_n = 2n + 1$ **c)** $a_n = 3$ **e)** $a_n = 2 - \frac{1}{n}$

**b)** $a_n = 1 - n$ **d)** $a_n = 2 \cdot (-1)^n$ **f)** $a_n = 2 \cdot (n - 4)$

**7.02** Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** $a_n = 2n + 3$ **c)** $a_n = n^2$ **e)** $a_n = \frac{2}{n}$

**b)** $a_n = 2 - 4n$ **d)** $a_n = (-1)^n$ **f)** $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

**7.03** Berechne das 1., 2., 5. und 10. Glied der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** $a_n = 3n - 4$ **c)** $a_n = n^2 - n^3 + 20$ **e)** $a_n = \frac{1}{n+1} + 3$

**b)** $a_n = -n - 3$ **d)** $a_n = 2 - (-1)^n$ **f)** $a_n = (-2)^n$

**7.04** Berechne näherungsweise die ersten vier Glieder der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** $a_n = \sin n$ **b)** $a_n = \cos n$

**7.05** Berechne die ersten sieben Glieder der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$, wenn Folgendes gilt:

**a)** $a_n = \begin{cases} 1 \text{ für n gerade} \\ -1 \text{ für n ungerade} \end{cases}$ **c)** $a_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{für n gerade} \\ 0 & \text{für n ungerade} \end{cases}$

**b)** $a_n = \begin{cases} n \text{ für n gerade} \\ -n \text{ für n ungerade} \end{cases}$ **d)** $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ für } n = 1,2,3 \\ 0 \text{ für } n \geq 4 \end{cases}$

**7.06** Es sind die ersten fünf Glieder einer Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ gegeben. Finde eine möglichst einfache Termdarstellung, die zu dieser Folge gehören könnte.

**a)** $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 5$
**b)** $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8,\ a_5 = 10$
**c)** $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ a_4 = 10,\ a_5 = 13$
**d)** $a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ a_3 = -3,\ a_4 = -5,\ a_5 = -7$

**7.07** Es sind einige Glieder einer Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ gegeben. Finde eine möglichst einfache Termdarstellung, die zu dieser Folge gehören könnte.

**a)** $a_1 = 1,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ a_6 = 11,\ a_7 = 13$
**b)** $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_5 = -1,\ a_7 = -1$
**c)** $a_1 = 8,\ a_2 = 7,\ a_4 = 5,\ a_6 = 3,\ a_7 = 2$
**d)** $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 10,\ a_5 = 26,\ a_8 = 65$

Einen Unterschied erkennt man hierbei bei dem oben angefügten Ausschnitt aus dem Schulbuch von Malle im Gegensatz zum Schulbuch von Götz: Bei Malle dient das erste Beispiel dazu, die Folge auf dem Zahlenstrahl zu zeichnen. Solche Beispiele findet man im Schulbuch der 6. Klasse AHS bei Götz et al. nicht!

Jedoch weist Götz einige Beispiele mehr in Bezug auf das Aufsuchen von Folgengliedern auf.

Das Aufstellen von Bildungsgesetzen ist im Buch von Malle mit 2 Beispielen sogar stärker vertreten als bei Götz, denn dort findet man lediglich ein Beispiel. Das mutet eigenartig an, da es sonst genügend Beispiele zwecks Übens gibt. Die Beispiele im Buch von Götz sind dem ersten solchen von Malle gleichzusetzen. Dabei werden aufeinanderfolgende Zahlenglieder genannt und man soll eine möglichst einfache Termdarstellung (bei Malle), bzw. ein Bildungsgesetz (bei Götz) finden. Auffällig ist dabei auch, dass Götz mit beliebigen Folgengliedern beginnt, wobei ein solches nicht immer das erste darstellt und lediglich 3 Folgenglieder angegeben sind. Professor Malle gibt hingegen immer die ersten fünf Folgenglieder an. Das zweite Beispiel bei Malle – wie man auf der Vorderseite ersehen kann – gibt wieder fünf Folgenglieder an, aber nicht die ersten fünf, wobei das erste Folgenglied immer angeschrieben ist!

Signifikant ist auch, dass $(-1)^n$ bei Malle gesamt nur dreimal vorkommt, bei Götz hingegen mindestens in 16 verschiedenen Beispielen.

Graphische Darstellungen findet man bei Götz erst im 2. Kapitel, zeichnen lässt er die Lernenden jedoch nie. Malle ließ schon im ersten Beispiel 7.01 die Schülerinnen und Schüler zu Geodreieck und Bleistift greifen.

In beiden Schulbücher findet man im 2. Kapitel zu „Folgen und Reihen", wie schon zu Beginn erwähnt, Monotonie und Schranken. Bei Götz gibt es dazu mehrere Beispiele. Beide Universitätsprofessoren bieten Beispiele zum Untersuchen der Monotonie, beide geben auch eine eigentlich einheitliche Definition dazu – die Schreibweise ist wieder ein wenig abweichend, aber im Grunde genommen erklären sie dasselbe. Malle nimmt für die Folge „a", Götz nimmt „x", wie auch der nächste Ausschnitt, diesmal wieder aus dem Buch von Malle, zeigt. Beide geben auch Definitionen für Schranken. Ich habe deswegen den Ausschnitt zu den Erklärungen von Malle gewählt, da diese kompakt auf einer Seite angeführt sind, allerdings „Vorführbeispiele".

## 7.2 Beschränkte und monotone Folgen

In diesem Abschnitt lernen wir zwei wichtige Eigenschaften von Folgen kennen.

Die Folge $\left(1 - \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots\right)$ hat zwei bemerkenswerte Eigenschaften:

(1) Alle Glieder der Folge liegen zwischen 0 und 1. Genauer: Es gilt $0 \leq a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Die Glieder der Folge werden immer größer. Dh. es gilt $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$.

Diese beiden Eigenschaften werden durch Begriffe erfasst, die wir im Folgenden definieren.

**Definition:** Sei $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine Folge.
(1) Eine reelle Zahl K heißt **obere Schranke** der Folge, wenn $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Eine reelle Zahl L heißt **untere Schranke** der Folge, wenn $a_n \geq L$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.
Die Folge heißt **nach oben (unten) beschränkt**, wenn sie eine obere (untere) Schranke besitzt. Sie heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Die Folge $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ ist beschränkt, da $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Die Zahl 1 ist eine obere, die Zahl 0 eine untere Schranke der Folge. Jede Zahl $K > 1$ wäre ebenfalls eine obere Schranke, jede Zahl $L < 0$ ebenfalls eine untere Schranke der Folge.

**Definition:** Eine Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ heißt
- **monoton steigend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$,
- **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$,
- **streng monoton steigend**, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$,
- **streng monoton fallend**, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Die Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton steigend oder (streng) monoton fallend ist.

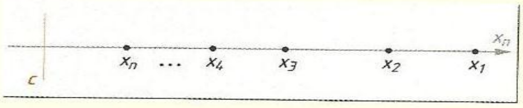
Auffällig ist aber auch, dass Malle die Wörter „Infimum" und „Supremum" dabei gar nicht anführt, sondern nur Götz! Bei Götz gibt es zu den Schranken auch eine kleine graphische Darbietung, die man wiederum bei Malle nicht mehr findet. Diesen Ausschnitt gibt es nun aus dem Buch von Götz.

*Definition:*

Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl c gibt, sodass *alle* Glieder $x_n$ größer oder gleich c sind:

$$\mathbf{c \leqslant x_n} \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

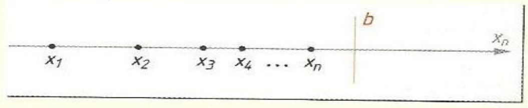
c heißt **untere Schranke.**




Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl b gibt, sodass *alle* Glieder $x_n$ kleiner oder gleich b sind:

$$\mathbf{x_n \leqslant b} \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$$

b heißt **obere Schranke.**




**Fortsetzung von Beispiel C:**

**a)** Besitzt die Folge $\langle \frac{2n-1}{n+1} \rangle$ eine untere Schranke?

**b)** Ist **(1)** 5, **(2)** 1,9 eine obere Schranke?

*Lösung:*

**a)** Die Frage können wir ohne jede Rechnung beantworten. Da der Zähler wie auch der Nenner für alle $n \in \mathbb{N}^*$ positiv ist, kann der Wert des Bruches nie negativ sein. Demgemäß muss zB 0 (oder jede beliebige negative Zahl) eine untere Schranke sein.

**b)** Die angegebene Zahl ist obere Schranke, wenn die folgende Ungleichung *für alle* $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$\frac{2n-1}{n+1} \leqslant 5$$
$$2n - 1 \leqslant 5 \cdot (n+1)$$
$$-3n \leqslant 6$$
$$n \geqslant -2$$

*Alle* Folgenglieder sind kleiner-gleich 5. Daher ist 5 eine obere Schranke.

$$\frac{2n-1}{n+1} \leqslant 1{,}9$$
$$2n - 1 \leqslant 1{,}9 \cdot (n+1)$$
$$0{,}1 \cdot n \leqslant 2{,}9$$
$$n \leqslant 29$$

Nur die Folgenglieder mit Index $n \leqslant 29$ sind kleiner als 1,9. Daher ist 1,9 keine obere Schranke für die Folge (in ihrer Gesamtheit).

Schwieriger ist die Bestimmung der **größten unteren Schranke** (**untere Grenze**, **„Infimum"**) sowie der **kleinsten oberen Schranke** (**obere Grenze**, **„Supremum"**) in der Menge der unteren bzw. oberen Schranken. Erläutere die Begriffe anhand von Fig. 4.4!

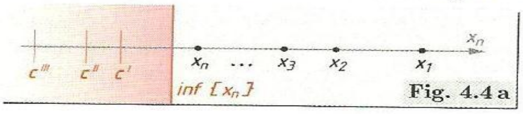



**Fig. 4.4 a**

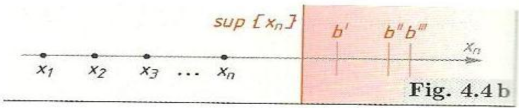



**Fig. 4.4 b**

Im Schulbuch der 6. Klasse AHS von Götz gibt es zu Beginn des Kapitels „Schranken und Monotonie" Beispiele, in denen Schülerinnen und Schüler sich Gedanken machen sollen, ob die jeweiligen Folgen monoton fallend, monoton wachsend oder nichts von beidem sind. Solche Beispiele findet man im Buch von Malle nicht!

**Monotonieuntersuchungen:**

**473** Entscheide: Die Folge ist streng monoton wachsend (in Zeichen: ↗), streng monoton fallend (in Zeichen: ↘) oder weder-noch (in Zeichen: 0). Setze bei ... das zugehörige Zeichen und erkläre, wie du gedacht hast!

a) (1) $\langle \frac{1}{2n} \rangle$ ... (2) $\langle \frac{1}{2^{n+1}} \rangle$ ... (3) $\langle -\frac{1}{2n} \rangle$ ...

(4) $\langle \frac{(-1)^n}{2n} \rangle$ ... (5) $\langle \frac{(-1)^n}{-n} \rangle$ ... (6) $\langle \frac{(-1)^{2n}}{n^2} \rangle$ ...

b) (1) $\langle \frac{2n+1}{n+1} \rangle$ ... (2) $\langle \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \rangle$ ... (3) $\langle \frac{1}{-2n+1} \rangle$ ...

(4) $\langle 2^{n-2} \rangle$ ... (5) $\langle \frac{2n}{3^{n-1}} \rangle$ ... (6) $\langle 1{,}1^n \rangle$ ...

**474** Wie Aufg. 473!

a) $\langle \frac{n+3}{7-2n} \rangle$ ... b) $\langle (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n} \rangle$ ... c) $\langle \frac{n^2}{2n+3} \rangle$ ... d) $\langle \frac{3n+1}{n^2} \rangle$ ...

Beispiele zum Begründen, ob eine Zahl eine obere/untere Schranke ist, gibt es in beiden Büchern, wobei es bei Götz mehrere Beispiele gibt, im Vergleich zu Malle nur eines! Im Anschluss nun die Beispiele zu Schranken aus dem Buch von Götz.

**Finden und Prüfen von Schranken:**

**481** Die angegebenen Folgen sind (streng) monoton wachsend. Ermittle den größten Index n, sodass **(1)** $a_n < 10$, **(2)** $a_n < 100$ gilt!

**a)** $a_1 = 1/3,\ a_{n+1} = a_n + 1/3$ **b)** $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n$

**c)** $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 1/5$ **d)** $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n$

**482** Wie Aufg. 481!

**a)** $\langle a_n\rangle = \langle 3n-2\rangle$ **b)** $\langle a_n\rangle = \langle 5n-3\rangle$

**c)** $\langle a_n\rangle = \langle n^2-n\rangle$ **d)** $\langle a_n\rangle = \langle n^2+n\rangle$

**483** Ermittle obere und untere Schranken (Fig. 4.5)!

**a)** $\langle\frac{5n+1}{3n-2}\rangle$ **b)** $\langle\frac{4n-1}{1-2n}\rangle$

**c)** $\langle(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}\rangle$ **d)** $\langle(-1)^n \cdot \frac{n+3}{2n}\rangle$

**e)** $\langle\frac{3}{n^2}\rangle$ **f)** $\langle\frac{2}{n^3}\rangle$

**g)** $\langle\sin n\rangle$ **h)** $\langle\cos n\rangle$

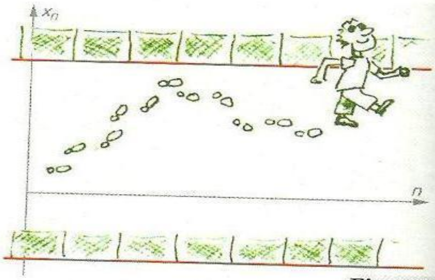



**Fig. 4.5**

**484** Zeige, dass die angegebene Folge weder nach unten noch nach oben beschränkt ist!

**a)** $\langle 10 + (-1)^{n-1} \cdot n\rangle$ **b)** $\langle 5 - (-1)^{n+1} \cdot n\rangle$

**485** Untersuche, ob die angegebenen Zahlen obere Schranken der betreffenden Folge sind!

**a)** $1, \frac{7}{4}; \langle\frac{6n-2}{4n+1}\rangle$ **b)** $2, \frac{3}{2}; \langle\frac{2n}{2n+5}\rangle$

**c)** $1, \frac{7}{8}; \langle(-1)^n \cdot \frac{2n}{2n-1}\rangle$ **d)** $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}; \langle(-1)^n \cdot \frac{3n}{2n+1}\rangle$

**486** Untersuche, ob die angegebenen Zahlen untere Schranken der betreffenden Folge sind!

**a)** $\frac{3}{2}, 1; \langle\frac{8n+1}{6n-3}\rangle$ **b)** $1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{8}, \langle\frac{3n}{3n-2}\rangle$

**c)** $-1, -\frac{9}{8}; \langle(-1)^n \cdot \frac{10-3n}{4n+1}\rangle$ **d)** $-1, -\frac{1}{2}; \langle(-1)^n \cdot \frac{5n+2}{10n+1}\rangle$

Natürlich gibt es im Buch der 6. Klasse AHS von Götz auch mehrere Beispiele zu „Monotonie beweisen“, jedoch werde ich nur die Beispiele von Malle hier anfügen, da bei Götz ähnliche sind, wobei dieser um zwei Aufgabennummern mehr hat. Man sieht in der nächsten Abbildung auch, dass es bei Malle fast in jedem Kapitel auch weiterführende Beispiele zu dem jeweiligen Thema gibt. Bei Götz findet man Weiterführungen im Anschluss an ein Kapitel. Bei dem nachstehenden Scan sieht man auch das einzige Beispiel zu den Schranken. Das sind weiters alle Beispiele zu dem Thema „Monotonie und Schranken“ – Malle et al. glänzen hier eher mit „Qualität“ statt Quantität, wobei ich mir mehr Beispiele wünschen würde! Die Qualität der Beispiele ist aber in beiden Schulbüchern gleich. Die Aufgaben sind lediglich anders formuliert.

**7.11** **a)** Ist 2 eine obere Schranke der Folge $\left(1-\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right)$? Begründe.

**b)** Ist 0 eine obere Schranke der Folge $(n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*)$? Begründe.

**c)** Ist 0 eine untere Schranke der Folge $((-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^*)$? Begründe.

**d)** Gib zwei obere Schranken und zwei untere Schranken für die Folge $\left(3+\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right)$ an.

**7.12** Zeige, dass die Folge streng monoton steigend ist.

**a)** $a_n = 2n - 1$ **b)** $a_n = n^2 - n + 1$ **c)** $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ **d)** $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$

**7.13** Zeige, dass die Folge streng monoton fallend ist.

**a)** $a_n = 10 + \frac{1}{n^2}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2n+1}$ **c)** $a_n = \frac{2n+1}{n}$ **d)** $a_n = \frac{n+6}{n^2+1}$

**7.14** Untersuche, ob die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ (streng) monoton steigend, (streng) monoton fallend oder nicht monoton ist.

**a)** $a_n = 3 - n$ **c)** $a_n = 2 \cdot 3^n$ **e)** $a_n = \frac{n}{2n+1}$ **g)** $a_n = \frac{n}{2^n}$

**b)** $a_n = 1 - n^2$ **d)** $a_n = (-1)^n$ **f)** $a_n = \frac{n+1}{n}$ **h)** $a_n = \frac{1-n}{n^2}$

**7.15** Zeige, dass die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $a_n = 4$ monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend ist. Ist sie auch monoton fallend?

**7.16** Gibt es eine Folge mit folgenden Eigenschaften? Wenn ja, gib eine solche an. Wenn nein, begründe, warum es sie nicht geben kann.

**a)** Die Folge ist monoton fallend, aber nicht streng monoton fallend.
**b)** Die Folge ist monoton steigend und nach unten beschränkt.
**c)** Die Folge ist monoton steigend und nach oben beschränkt.
**d)** Die Folge ist monoton fallend und monoton steigend.
**e)** Die Folge ist streng monoton fallend und steigend.

## Weiterführende Aufgaben

**7.17** **a)** Begründe: Wenn die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine obere Schranke hat, dann hat auch die Folge $(1 + a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine obere Schranke.

**b)** Begründe: Wenn die Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine obere Schranke hat, dann hat auch die Folge $(2a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine obere Schranke.

**7.18** Ab welchem Index n ist die Folge $\left(\frac{n^2}{2^n} \middle| n \in \mathbb{N}^*\right)$ streng monoton fallend?

**7.19** Ist es möglich, dass eine Folge vom ersten bis zum 1 000. Glied streng monoton steigend und ab dem 1 001. Glied streng monoton fallend ist? Wenn ja, gib ein Beispiel für eine solche Folge an.

Nun gehe ich in der Reihenfolge weiter nach dem Schulbuch von Götz et al. und werde die entsprechenden Passagen aus dem Buch von Malle et al. suchen und damit vergleichen.

Bei Götz, Reichel, Müller und Hanisch wird im 3. Kapitel über „Arithmetische Folgen und Reihen“ gesprochen. Zu Beginn steht die Definition.

### 1. Arithmetische Folgen

So genannte arithmetische Folgen treten überall dort auf, wo ein gewisser Anfangswert sich mehrmals schrittweise um einen pro Zeiteinheit konstanten Wert *additiv* vermehrt oder vermindert. Denke etwa an einen täglich um zB 100 Stück wachsenden (oder schrumpfenden) Lagerbestand einer Fabrik. Auch wenn hinter dieser Entwicklung miteinander wechselwirkende absolute Änderungen wie Produktion und Verkauf stehen, so beobachten wir nun eben *modellhaft* nur die ***absolute* Änderung** (= **Wachstum**) der Stückzahl von Tag zu Tag. Ist das Wachstum über mehrere Tage *konstant*, so bilden die Stückzahlen eine arithmetische Folge und man spricht von einem **arithmetischen Wachstum** (bzw. auch **linearen Wachstum** – vgl. unten).

*Definition:* Eine Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ heißt **arithmetische** (Zahlen-)**Folge**, wenn die *Differenz* je zweier aufeinander folgender Glieder *konstant* ist, dh. für jedes n gilt: $a_{n+1} - a_n = d$
Die Konstante d heißt die **Differenz** der arithmetischen Folge $\langle a_n \rangle$.
*Rekursive Darstellung:* $\mathbf{a_1, a_{n+1} = a_n + d}$ | *Explizite Darstellung:* $\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

*Beispiele:* (1) 3 7 11 15 … d = 4: +4 +4 +4 +4 (2) 3 1 −1 −3 … d = −2: −2 −2 −2 −2

Wie man in dieser Abbildung sieht, führt Götz sowohl die rekursive, als auch die explizite Darstellung einer Folge ein. Götz führt diese Begriffe ein und verwendet sie auch, damit die Kinder einen Namen für die ganze Sache haben – für manche Lernenden stellt dies eine Erleichterung dar, für andere ist es verwirrend. Aber es ist allgemeinbildend und gehört meiner Meinung nach auf jeden Fall gelehrt!

Malle verwendet beide Darstellungen, natürlich wieder mit anderen Buchstaben, benennt jedoch die Dinge nicht beim Namen. Es wird aber im Buch von Malle erwähnt, dass die Darstellung mit dem ersten Folgenglied die Rekursionsgleichung ist – wie der nachfolgende Scan zeigt. Diese wird auch zum Unterschied zu Götz „hergeleitet“:

$$a_1 = k + d \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n + k$$

Ausgehend vom **Anfangsglied** $a_1$ kann man mit Hilfe der **Rekursionsgleichung** $a_{n+1} = a_n + k$ der Reihe nach die Glieder $a_2, a_3, a_4 \ldots$ der Folge berechnen. Man erhält:

$$a_2 = a_1 + k$$
$$a_3 = a_2 + k = a_1 + 2k$$
$$a_4 = a_3 + k = a_1 + 3k$$
$$\ldots$$
$$a_n = a_{n-1} + k = a_1 + (n-1) \cdot k$$

Wir halten dieses Ergebnis fest:

**Satz:** Ist $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine arithmetische Folge, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot k$$

Wenn man sich die Beispiele in beiden Schulbüchern anschaut, dann fallen einem eigentlich bis auf die Beschriftung und die Formulierung der Beispiele keine Unterschiede auf. Wenn man dann noch genauer hinschaut, merkt man aber, dass plötzlich die Beispiele Unterschiede aufweisen. Götz bleibt dabei eher auf geometrischer Schiene und gibt Beispiele, in denen die Dreiecksseiten arithmetische Folgen bilden. Universitätsprofessor Malle gibt Aufgaben, bei denen Schülerinnen und Schüler nachdenken müssen oder Beispiele aus der Alltagswelt, wie zum Beispiel das Falten von Papier.

Der Scan aus dem Buch von Götz et al. zeigt anfangs bis zur Nummer 496 ähnliche Beispiele wie bei Malle, wobei das Beispiel 493 nicht im Schulbuch von Malle vorkommt.

**490** Bestimme für die arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$ (1) $a_5$, (2) $a_6$, (3) $a_{10}$!

a) $a_1 = 3, d = 2$ b) $a_1 = -2, d = 2$ c) $a_1 = 0, d = 0{,}5$ d) $a_1 = 2, d = -4$
e) $a_1 = -5, d = -1$ f) $a_1 = 1, d = 0{,}75$ g) $a_1 = -12, d = 5$ h) $a_1 = 4, d = -6$

**491** Beweise: Ab dem zweiten Glied ist jedes Glied einer arithmetischen Folge das *arithmetische Mittel* seiner Nachbarglieder! (Davon leitet sich der Name „arithmetische Folge“ her.)

**492** Beweise: Zwischen zwei Gliedern $a_r$ und $a_s$ $(s > r)$ einer arithmetischen Folge besteht die Beziehung $a_s = a_r + (s - r) \cdot d$. Erläutere an einem selbst gewählten Beispiel!

**493** Untersuche, ob die angegebenen Folgen arithmetische Zahlenfolgen sind!

a) $\langle -1; 1; 3 \rangle$ b) $\langle 2; 3{,}5; 5 \rangle$ c) $\langle 0; 0; 0 \rangle$
d) $\langle \frac{13}{24}; \frac{2}{3}; \frac{19}{24} \rangle$ e) $\langle \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{5}{6} \rangle$ f) $\langle \frac{7}{5}; 1; \frac{3}{5} \rangle$

**494** Untersuche, ob die angegebenen Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge angehören können!

a) $a_1 = 1{,}1; a_4 = 1{,}4; a_5 = 1{,}6$ b) $a_2 = 3; a_5 = 1; a_{11} = -3$

**495** Berechne (vgl. Aufg. 492) die Glieder $a_8$ und $a_{100}$ der arithmetischen Folge!

a) $a_5 = 22, d = -2$ b) $a_3 = 17, d = -3$

**496** Ermittle die lineare Funktion, welche die angegebene arithmetische Folge festlegt!

a) $a_3 = 7; a_7 = 3$ b) $a_1 = 1/3; a_6 = 0$ c) $a_3 = 9; a_5 = 19$ d) $a_1 = 1{,}5; a_5 = -0{,}5$
e) $a_5 = 9; a_9 = 17$ f) $a_4 = 2; a_6 = 2$ g) $a_2 = 5/6; a_4 = 1{,}5$ h) $a_2 = 0; a_5 = -1{,}5$

**497** Berechne, in welchem Verhältnis die Längen der Katheten und die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks stehen müssen, wenn sie eine arithmetische Folge bilden!

**498** In einem rechtwinkeligen Dreieck bilden die Längen der Seiten eine arithmetische Folge. Berechne den Umfang des Dreiecks, wenn **a)** die kürzere Kathete 9 cm, **b)** die längere Kathete 28 cm, **c)** die Hypotenuse 65 cm lang ist!

**499** In einem Rechteck bilden die Längen der Seiten und der Diagonale eine arithmetische Folge. Berechne Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks und den Radius des Umkreises, wenn

a) die längere Seite um 75 mm länger als die kürzere Seite ist!
b) die längere Seite um 44 mm kürzer als die Diagonale ist!
c) die kürzere Seite um 180 mm kürzer als die Diagonale ist!
d) die Diagonale um 134 mm länger als die kürzere Seite ist!
e) die Diagonale um 91 mm länger als die längere Seite ist!

Im Vergleich dazu bietet Malle noch andere Beispiele, die man in dieser Art nicht unbedingt bei Götz findet, wobei das Beispiel mit dem Papier (Beispiel 7.38) in anderer Form auch im Schulbuch von Götz et al. (Beispiel 506) vorkommt – nicht nur bei Malle et al.

Die nächsten beiden Grafiken – zuerst aus dem Buch von Malle und danach aus dem Buch von Götz – zeigen zu lösende Aufgaben im Bereich eben der Anwendung von arithmetischen Folgen. Hierbei sieht man eigentlich zum ersten Mal einen größeren Unterschied in der Wahl der Beispiele. Das Beispiel mit dem Papierfalten findet man in beiden Büchern – jedoch unterschiedlich aufbereitet. Die Beispiele mit den Seitenlängen in einem Dreieck oder in einem Rechteck findet man nur bei Götz. Universitätsprofessor Götz gibt bei den Anwendungsbeispielen auch Aufgaben mit Zinsen. Solche folgen bei Malle et al. erst später – sie sind ein eigenes Kapitel, auf welches ich hier nicht eingehen möchte. Im Gegensatz dazu gibt es im Schulbuch von Malle noch ein Beispiel mit Schuttablagerung (Beispiel 7.39).

**7.36** Gibt es eine arithmetische Folge mit folgender Eigenschaft? Wenn ja, gib eine solche Folge an. Wenn nein, begründe warum nicht.

**a)** Die Folge ist streng monoton steigend und nach oben beschränkt.
**b)** Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt.
**c)** Die Folge ist nicht monoton.
**d)** Die Folge ist nach oben beschränkt und konvergent.
**e)** Die Folge ist nach unten beschränkt und divergent.
**f)** Die Folge ist streng monoton fallend und konvergent.

**7.37** In einem Lager werden Platten auf einen Stapel gelegt. Der Stapel ist bereits 0,76 m hoch. In den folgenden Tagen werden täglich zwei Platten der Dicke 0,02 m auf den Stapel gelegt.

**1)** Es sei $h_n$ die Höhe des Stapels (in m) nach n Tagen. Gib eine Formel für $h_n$ an.
**2)** Die Raumhöhe beträgt 2,2 m. Wie lange können die Platten höchstens abgelegt werden?

**7.38** Ein Buch besteht aus Papierblättern zu je 0,05 mm Dicke und zwei Umschlagblättern der Dicke 2,5 mm. Es sei $d_n$ die Dicke eines solchen Buches mit n Seiten $\left(\text{dh. } \frac{n}{2} \text{ Blättern}\right)$. Gib eine Formel für $d_n$ an und berechne mit dieser Formel die Dicke eines solchen Buches mit **1)** 180 Seiten, **2)** 320 Seiten, **3)** 500 Seiten.

**7.39** Auf einem Müllplatz wird Schutt abgelagert. Am Montag sind 12 Tonnen Schutt vorhanden, ab Dienstag werden täglich 2 Tonnen Schutt hinzugelagert. Es sei $m_n$ die Masse des Schutts (in Tonnen) auf dem Müllplatz nach n Tagen. Gib eine Formel für $m_n$ an und zeichne den Graphen der Funktion m mit $m(n) = m_n$ für die erste Arbeitswoche (Montag bis Freitag).

Nun die Anwendungsbeispiele aus dem Buch von Götz:

**Anwendungen:**

**504** Eine Luftmenge nimmt bei 20 °C ein Volumen von 5 860 $cm^3$ ein. Berechne unter Verwendung des Gesetzes von GAY-LUSSAC, um wie viel Grad Celsius die Luftmenge erwärmt werden muss, damit sie (konstanter Druck vorausgesetzt) das nachfolgende Volumen einnimmt!
**a)** 7 260 $cm^3$ **b)** 9,06 $dm^3$ **c)** 0,007 $m^3$
„Unter konstantem Druck dehnt sich die Luft pro 1 °C Erwärmung um 1/273 des Volumens aus, das sie bei 0 °C einnimmt" (Gesetz von GAY-LUSSAC).

**505** In einem Lager werden auf einer 2 dm hohen Unterlage Pakete von je 12 cm Höhe gestapelt. Berechne, wie viele solcher Pakete bis zur Gesamthöhe (Unterlage und Pakete) **a)** von 1,88 m, **b)** von 2,36 m, **c)** von 3,20 m gestapelt werden können!

**506** Ein Buch mit 500 Seiten ist (inkl. Deckel von je 2,5 mm Dicke) 50,0 mm dick. Berechne, wie dick ein Buch (bei gleicher Papier- und Deckelstärke) **(1)** ohne, **(2)** mit Einband ist, wenn es **a)** 180 Seiten, **b)** 320 Seiten, **c)** 460 Seiten hat!

**507** Eine Bank verspricht in einem Prospekt statt Zinsen einen jährlichen festen Bonus B Euro, wenn man K Euro auf einmal einzahlt und erst nach n Jahren behebt. **(1)** Welchem Zinssatz p pro Jahr entspricht dies? **(2)** Wie hoch ist das Endkapital?
**a)** $B = 20, K = 800, n = 5$ **b)** $B = 50, K = 2000, n = 5$
**c)** $B = 40, K = 2000, n = 4$ **d)** $B = 60, K = 3000, n = 4$

**508** Ein Kapital K wird mit dem jährlichen Zinsfuß p für den Zeitraum T mit einfachen Zinsen verzinst. Berechne **(1)** den Endkapitalstand, **(2)** die Zinsen!
**a)** K = 400, p = 1,25 %, T = 3 Monate **b)** K = 400, p = 1,50 %, T = 5 Monate
**c)** K = 800, p = 2,25 %, T = 1 Jahr 2 Monate **d)** K = 800, p = 2,75 %, T = 1 Jahr 4 Monate
**e)** K = 900, p = 1,75 %, T = 40 Tage **f)** K = 900, p = 2,5 %, T = 75 Tage
**g)** K = 1200, p = 3 %, T = 1 Jahr 20 Tage **h)** K = 1200, p = 4 %, T = 2 Jahre 20 Tage

Im Schulbuch von Götz geht es nun weiter mit „Arithmetischen Reihen". Hier findet man nur eine kurze Erklärung, die Herleitung der Summenformel der endlichen arithmetischen Reihe wird nicht gegeben, sondern nur die Formel. Es ist aber vermerkt, dass die Herleitung eine Übungsaufgabe ist.

### 3. Arithmetische Reihen

Durch additive Verknüpfung der Glieder einer arithmetischen Folge entsteht eine so genannte **arithmetische Reihe:** $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
Für *endliche* arithmetische Reihen – und nur diese – existiert die Summe $s_n$ ihrer Glieder, die man wie folgt berechnen kann (Beweis in Aufg. **511**).

**@-Summenformel der endlichen arithmetischen Reihe:**
Die arithmetische Folge $\langle a_1; a_2; \dots; a_n \rangle$ hat die Summe $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$

Beachte, dass die Werte $s_1, s_2, s_3, \dots$, ihrerseits eine Folge bilden, die **Folge der Partialsummen**. Diese ist aber *keine arithmetische* Folge (Aufg. **510**).

Bei Malle findet man Erläuterndes über arithmetische Reihen erst im nächsten Kapitel. Es wird hierbei sogar eine längere Herleitung gegeben. Obwohl ich eigentlich ein Verfechter des Götz-Buches bin, muss ich gestehen, gefällt mir bei diesem Aspekt das Kapitel im Malle-Schulbuch besser!

## Die Summe einer endlichen arithmetischen Reihe

Ist die Folge $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ eine endliche arithmetische Folge, so bezeichnet man die dazugehörige Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ als endliche **arithmetische Reihe**.

Ist $a_1$ das Anfangsglied und k die Differenz der Folge, so gilt:

$$a_i = a_1 + (i-1) \cdot k \quad \text{für } i = 1, 2 \ldots n$$

Wir leiten eine Formel für die Summe S einer endlichen arithmetischen Reihe her. Dazu betrachten wir zunächst eine spezielle arithmetische Reihe, nämlich die Reihe $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$. Eine Formel für diese Summe können wir auf zwei Arten herleiten:

**1. Möglichkeit:** Wir fassen das erste und letzte, das zweite und vorletzte, das dritte und vorvorletzte Glied usw. zusammen:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1)$$

Die beiden zusammengefassten Glieder ergeben jeweils n.

Ist $n-1$ gerade, so werden $\frac{n-1}{2}$ Zusammenfassungen vorgenommen. Somit gilt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n-1}{2} \cdot n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Ist $n-1$ ungerade, so werden $\frac{n-2}{2}$ Zusammenfassungen vorgenommen und das mittlere Glied $\frac{n}{2}$ bleibt übrig. Somit gilt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n-2}{2} \cdot n + \frac{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

**2. Möglichkeit:** In Abb. 8.1 kann man erkennen, dass der Inhalt der orange unterlegten Fläche genau die Hälfte des Inhalts des gesamten Rechtecks ausmacht. Somit gilt:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Wir haben somit bewiesen:

**Satz:** **Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ mit $n \geq 2$ gilt:**

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

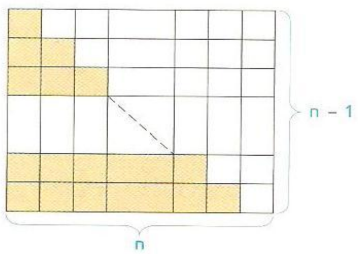


Abb. 8.1

Die Herleitung geht gleich auf der nächsten Seite weiter und im Anschluss daran sind ein paar Grundaufgaben angeführt, jedoch nur drei, danach kommen geometrische Reihen – endlich und unendlich.

Sei nun $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ eine beliebige endliche arithmetische Reihe mit $a_i = a_1 + (i-1) \cdot k$ für $i = 1, 2 \ldots n$. Wir berechnen die Summe S dieser Reihe:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + k) + (a_1 + 2k) + \ldots + (a_1 + (n-1)k) =$$
$$= n \cdot a_1 + k \cdot (1 + 2 + \ldots + (n-1)) = n \cdot a_1 + k \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{2na_1 + kn(n-1)}{2} =$$
$$= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)k) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)k) = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Wir haben somit bewiesen:

**Satz:** Ist $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ eine endliche arithmetische Reihe, so gilt für ihre Summe S:
$$S = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

**Beispiel:** $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = \frac{8}{2} \cdot (1 + 15) = 64$

## Grundaufgaben

**8.01** Berechne die Summe der folgenden Reihe.

**a)** $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 11$
**b)** $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 23$
**c)** $0{,}5 + 1 + 1{,}5 + \ldots + 20$
**d)** $2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 15$
**e)** $4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + 88$
**f)** $5 + 5{,}4 + 5{,}8 + 6{,}2 + \ldots + 9$

**8.02** Berechne die Summe der folgenden Reihe.

**a)** $1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1) + m$
**b)** $1 + 2 + 3 + \ldots + r + (r+1)$
**c)** $3 + 4 + 5 + \ldots + (s-1) + s$
**d)** $7 + 9 + 11 + \ldots + (t-2) + t$

**8.03** Schreibe die Folge in der Form $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ an und berechne die Summe ihrer Glieder.

**a)** $(2 \cdot i + 3 \mid i = 1, 2 \ldots 17)$
**b)** $(3 \cdot i - 5 \mid i = 1, 2 \ldots 505)$
**c)** $(-3 \cdot i + 2 \mid i = 1, 2 \ldots 100)$
**d)** $(k \cdot i + d \mid i = 1, 2 \ldots 1\,000)$

---

Bei Universitätsprofessor Götz kommen wieder einige Zahlenbeispiele zu arithmetischen Reihen, zu denen ich hier einen kleinen Ausblick gebe:

**516** Von einer arithmetischen Folge sind gegeben: $a_3 = 27$; $a_7 = 71$. Berechne für die zugehörige arithmetische Reihe **a)** $s_{10}$, **b)** $s_{31}$, **c)** $s_{125}$, **d)** $s_n$!

**517** Von einer arithmetischen Folge sind gegeben: $a_1 = 0{,}2$; $a_6 = 0$. Berechne für die zugehörige arithmetische Reihe **a)** $s_{12}$, **b)** $s_{37}$, **c)** $s_{208}$, **d)** $s_n$!

**518** Von einer arithmetischen Folge sind gegeben: $a_{28} = -12{,}2$; $a_{43} = -17{,}45$. Berechne für die zugehörige arithmetische Reihe **a)** $s_{19}$, **b)** $s_{28}$, **c)** $s_{133}$, **d)** $s_n$!

**519** Das vierte Glied einer arithmetischen Reihe ist 21, die Summe der ersten sechs Glieder 114. Berechne das erste und das sechste Glied!

**520** In einer arithmetischen Reihe mit sieben Gliedern ist das zweite Glied gleich dem vierten Teil des letzten Gliedes. Die Summe der drei mittleren Glieder beträgt 33. Wie lauten die Glieder der Reihe und wie groß ist ihre Summe?

**521** Berechne, wie viele aufeinander folgende ungerade Zahlen (mit 1 beginnend) **a)** die Summe 225, **b)** die Summe 361, **c)** die Summe 1 296 ergeben!

**522** Berechne die Summe aller dreiziffrigen Zahlen, die durch 3 dividiert **a)** den Rest 1, **b)** den Rest 2 haben!

**523** Die Summe dreier Zahlen, die eine arithmetische Reihe bilden, ist 24; die Summe ihrer Quadrate beträgt 480. Berechne die drei Zahlen!

**524** Vier natürliche Zahlen, die eine arithmetische Reihe bilden, haben die Summe 28; ihr Produkt beträgt 585. Berechne die vier Zahlen!

Ich möchte nochmals explizit erwähnen, dass beide Schulbücher gut aufbereitet sind, wobei mir im Buch von Götz et al. zeitweise gute Erklärungen fehlen und im Schulbuch von Malle et al. teils die Beispiele fehlen. Der Unterschied der Beispiele im Falle der arithmetischen Reihen ist eklatant – diesmal sowohl an Qualität, als auch an Mehrheit.

Weiter geht es nun mit Geometrischen Folgen. Schulbuchautor Mag. Dr. Stefan Götz et all gibt zu Beginn wieder eine Definition, ein Beispiel wird gegeben und vorgerechnet. Die Anwendungen geometrischer Folgen sind aus dem Geldwesen. Es wird die Zinseszinsformel (für theoretische Verzinsung angegeben). Zu Beginn wird erklärt, dass das geometrische Wachstum mit dem exponentiellen Wachstum zusammenhängt – jedoch kommt das Kapitel über „Exponentialfunktionen“ und „Wachstumsprozesse“ erst später. Nun ist es auch nachvollziehbar, warum Universitätsprofessor Malle zumindest die „Exponentialfunktionen“ vor dem Kapitel der „Folgen und Reihen“ erwähnt. Dadurch kann er die geometrische Folge als Spezialfall der Exponentialfunktion angeben, wie der nächststehende Scan zeigt.

## 7.6 Geometrische Folgen

In diesem Abschnitt lernen wir einen wichtigen Typ von Folgen kennen, der sich als Spezialfall von Exponentialfunktionen entpuppt.

**7.47** **a)** Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $b_n = 0{,}25 \cdot 2^n$ und stelle sie als Punkte auf einer Zahlengeraden dar.
**b)** Fasse die Folge als Funktion $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ auf und zeichne den Graphen von f für $1 \leq n \leq 5$.

**Lösung:**

**a)** $b_1 = 0{,}5$; $b_2 = 1$; $b_3 = 2$; $b_4 = 4$; $b_5 = 8$ (siehe Abb. 7.5a)
**b)** $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 0{,}25 \cdot 2^n$ (siehe Abb. 7.5b)

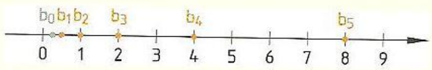


Abb. 7.5a

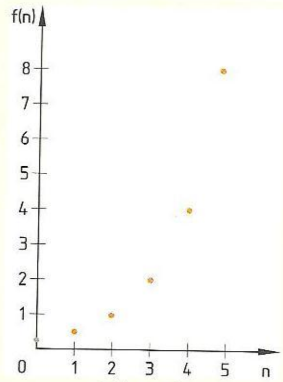


Abb. 7.5b

**7.48** **a)** Berechne die ersten fünf Glieder der Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $b_n = 8 \cdot 0{,}5^n$ und stelle sie als Punkte auf einer Zahlengeraden dar.
**b)** Fasse die Folge als Funktion $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ auf und zeichne den Graphen von f für $1 \leq n \leq 5$.

**Lösung:**

**a)** $b_1 = 4$; $b_2 = 2$; $b_3 = 1$; $b_4 = 0{,}5$; $b_5 = 0{,}25$ (siehe Abb. 7.6a)
**b)** $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = 8 \cdot 0{,}5^n$ (siehe Abb. 7.6b)

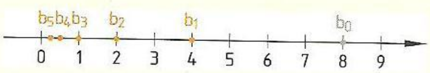


Abb. 7.6a

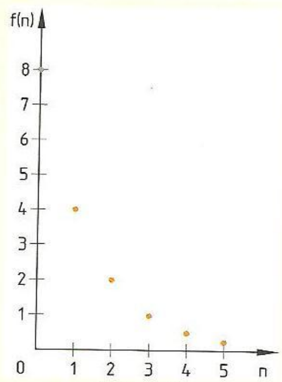


Abb. 7.6b

Es kommt auch im Anschluss an die beiden Beispiele im Schulbuch von Malle die Definition einer geometrischen Folge. Weiters wird – wie bei den arithmetischen Folgen – die Rekursionsgleichung „hergeleitet“. Ich empfinde diese Weise als schülerfreundlicher und übersichtlicher, wie der folgende Scan aufschlüsselt:

Die in den letzten beiden Aufgaben betrachteten Folgen sind vom Typ $b_n = c \cdot q^n$ (wobei c, $q \in \mathbb{R}^*$). Diese Folgen erhalten einen eigenen Namen:

**Definition:** Eine Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ mit $b_n = c \cdot q^n$ (mit c, $q \in \mathbb{R}^*$) heißt **geometrische Folge**.

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder einer solchen Folge ist konstant, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{c \cdot q^{n+1}}{c \cdot q^n} = q$. Man nennt q den **Quotienten** der geometrischen Folge.

Eine geometrische Folge mit $q \in \mathbb{R}^+$ kann aufgefasst werden als eine auf $\mathbb{N}^*$ definierte Exponentialfunktion, dh. eine Funktion $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = c \cdot q^n$.

Man kann eine geometrische Folge auch mit dem Index 0 beginnen und erhält in diesem Fall ein zusätzliches Glied $b_0$. (In Aufgabe 7.47 ist $b_0 = 0{,}25$, die entsprechenden Punkte sind in Abb. 7.5a, b grau gekennzeichnet. In Aufgabe 7.48 ist $b_0 = 8$, die entsprechenden Punkte sind in Abb. 7.6a, b grau gekennzeichnet.) In diesem Fall kann man die geometrische Folge auf folgende Weise rekursiv darstellen:

$$b_0 = c \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Diese Darstellung entspricht der rekursiven Darstellung einer auf $\mathbb{N}$ definierten Exponentialfunktion mit der Basis q (vgl. Seite 78):

$$f(0) = c \quad \text{und} \quad f(n+1) = f(n) \cdot q$$

Wir wollen allerdings im Folgenden geometrische Folgen stets mit dem Index 1 beginnen, da dies den Anwendungen besser entspricht. In diesem Fall lautet die rekursive Darstellung:

$$\boxed{b_1 = c \cdot q \quad \text{und} \quad b_{n+1} = b_n \cdot q}$$

Ausgehend vom **Anfangsglied** $b_1$ kann man mit Hilfe der **Rekursionsgleichung** $b_{n+1} = b_n \cdot q$ der Reihe nach die Glieder $b_2, b_3, b_4 \ldots$ der Folge berechnen. Man erhält:

$$b_2 = b_1 \cdot q$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$$
$$\ldots$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Wir halten dieses Ergebnis fest:

**Satz:** Ist $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ eine geometrische Folge, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$:
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Im Anschluss daran findet man im Schulbuch von Malle drei Sätze zu geometrischen Folgen in Bezug auf beschränkt, die Monotonie und auch die Konvergenz. Diese Sätze werden auch alle bewiesen. Diese Sätze sind jedoch nicht elementar für meine Analyse. Im Buch von Götz findet man solche jedoch nicht.

Die Einführung im Schulbuch von Götz et al. ist nicht so anschaulich wie im Buch von Malle, aber die grundlegenden Elemente führen beide Universitätsprofessoren an. Zum Vergleich stelle ich hier nun einen Scan aus dem Schulbuch von Götz et al. vor, damit man sich ein Bild machen kann. Die Beschriftung ist, wie man sieht, anfangs unterschiedlich, jedoch die Formel für die explizite Darstellung ist dieselbe – sogar mit den gleichen Buchstaben.

So genannte geometrische Folgen treten überall dort auf, wo ein gewisser Anfangswert sich mehrmals schrittweise mit einem pro Zeiteinheit konstanten Faktor *multiplikativ* vermehrt oder vermindert. Denke etwa an eine jährlich um zB 2 % wachsende (oder schrumpfende) Einwohnerzahl eines Landes. Auch wenn hinter der Entwicklung miteinander wechselwirkende *absolute* Änderungen wie Geburten, Todesfälle, Zu- und Abwanderung stehen, so beobachten wir nun eben *modellhaft* nur die ***relative*** **Änderung** (= **Wachstumsrate**) der Einwohnerzahl von Jahr zu Jahr. Ist diese Wachstumsrate über mehrere Jahre hinweg *konstant*, so bilden die Einwohnerzahlen eine geometrische Folge und man spricht von einem **geometrischen Wachstum** (bzw. auch **exponentiellen Wachstum** – vgl. unten und Kap. 6).

*Definition:* Eine Zahlenfolge $\langle b_n \rangle$ heißt **geometrische** (Zahlen-)**Folge**, wenn der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder *konstant* ist, dh. für jedes n gilt: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$

Die Konstante q heißt der **Quotient** der geometrischen Folge $\langle b_n \rangle$.

*Rekursive Darstellung:* $\mathbf{b_1, b_{n+1} = b_n \cdot q}$ | *Explizite Darstellung:* $\mathbf{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

*Beispiele:* (1) $3 \xrightarrow{\cdot 4} 12 \xrightarrow{\cdot 4} 48 \xrightarrow{\cdot 4} 192 \xrightarrow{\cdot 4} \ldots$ $q = 4$

(2) $3 \xrightarrow{\cdot(-2)} -6 \xrightarrow{\cdot(-2)} 12 \xrightarrow{\cdot(-2)} -24 \xrightarrow{\cdot(-2)} \ldots$ $q = -2$

**Beispiel F:** In einem Labor wird durch „Beimpfen" mit Bakterien eine Bakterienkultur angelegt. Dank günstiger Lebensbedingungen verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien (eine Zeit lang) alle 20 Minuten. Nach der 1. Teilung (1. Beobachtung) werden 6 Bakterien gezählt. **a)** Wie viele Bakterien sind es nach zwei Stunden? **b)** Nach zwei Stunden verlangsamt sich das Wachstum, weil – unter anderem wegen der großen Anzahl – nun die Lebensbedingungen ungünstiger geworden sind. Der „Vermehrungsfaktor" während der 20-minütigen Messperioden fällt auf 1,5. Wie viele Bakterien umfasst die Kultur (rund) nach weiteren zwei Stunden, **c)** nach insgesamt 8 Stunden?

*Lösung:*

**a)**

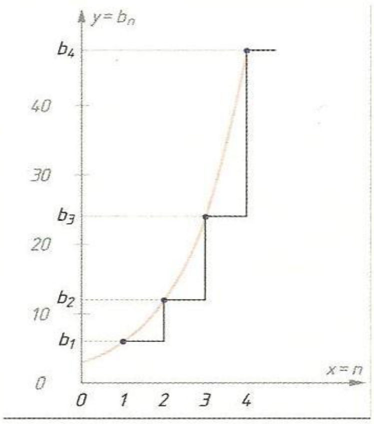
| Zeit (min) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teilungen[1] n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Bakterienanzahl $b_n$ | ? | 6 | 12 | 24 | 48 | 96 | 192 |
| | | $\cdot 2$ | $\cdot 2$ | $\cdot 2$ | $\cdot 2$ | $\cdot 2$ | $\cdot 2$ |

Es liegt also eine geometrische Folge mit $b_1 = 6$ und $q = 2$ vor (Figur). Daher gilt: $b_6 = b_1 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192$.

**b)** Wieder bilden die Bakterienanzahlen $b_n$ zu den einzelnen (Zeit-)Messpunkten eine geometrische Folge $\langle c_n \rangle$ mit $c_1 = 192$ und $q = 1{,}5$. Nach weiteren zwei Stunden beträgt die Bakterienanzahl daher:

$c_7 = c_1 \cdot q^6 = 192 \cdot 1{,}5^6 \approx 192 \cdot 11{,}4 \approx 2\,200$

**c)** $c_{19} = c_1 \cdot 1{,}5^{18} \approx 192 \cdot 1\,478 \approx 3 \cdot 10^5$




Die Beispiele sind unterschiedlich aufgebaut. Bei Götz findet man welche zum Berechnen von ersten oder fehlenden Folgengliedern. Es kommen auch Beispiele zum Beweisen. Die Anwendungsbeispiele im Schulbuch von Götz haben wieder mit dem Falten von Papier zu tun oder mit dem Geldwesen – es gab sogar eine einführende Seite zu Anwendungsbeispielen aus dem Geldwesen.

Die Beispiele zu geometrischen Folgen aus dem Buch von Malle et al. sind auch zum Berechnen von Folgengliedern oder zum Bestimmen des Quotienten q. Es kommen auch Beispiele mit dem Falten von Papier. Zu Beginn steht ein Beispiel, bei denen Schülerinnen und Schüler wieder den Verlauf der Folge zeichnen sollen – so eines findet man im Schulbuch von Götz nicht! Es sind natürlich wieder mehr Beispiele im Schulbuch von Götz. Trotzdem möchte ich den nachstehenden Scan aus dem Buch von Malle verwenden:

**7.50** Ermittle die ersten 5 Glieder und das 20. Glied der geometrischen Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** $b_n = 2^n$ **c)** $b_n = 2 \cdot 3^n$ **e)** $b_n = 0{,}5 \cdot 2^n$ **g)** $b_n = 0{,}1 \cdot 0{,}2^n$
**b)** $b_n = 3^n$ **d)** $b_n = 3 \cdot 2^n$ **f)** $b_n = 0{,}5 \cdot (-3)^n$ **h)** $b_n = 0{,}5 \cdot 0{,}1^n$

**7.51** Ermittle das Anfangsglied $b_1$ sowie den Quotienten q der Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** $b_n = 3 \cdot 2^n$ **b)** $b_n = 5 \cdot 3^n$ **c)** $b_n = 1{,}5 \cdot (-0{,}5)^n$ **d)** $b_n = -2 \cdot 1{,}2^n$

**7.52** Von einer geometrischen Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ kennt man das Anfangsglied $b_1$ und den Quotienten q. Gib eine Formel für $b_n$ an und berechne die ersten fünf Glieder der Folge.

**a)** $b_1 = 1; q = 2$ **b)** $b_1 = 3; q = 3$ **c)** $b_1 = 6; q = 0{,}5$ **d)** $b_1 = 0{,}5; q = 0{,}1$

**7.53** Von einer geometrischen Folge $(b_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ kennt man ein Glied und den Quotienten q. Berechne das Anfangsglied $b_1$ und gib eine Formel für $b_n$ an.

**a)** $b_2 = 12; q = 2$ **b)** $b_3 = 81; q = 3$ **c)** $b_4 = 512; q = 4$ **d)** $b_5 = 0{,}0625; q = 0{,}5$

**7.54** Gibt es eine geometrische Folge mit positiven Gliedern und folgender Eigenschaft? Wenn ja, gib eine solche Folge an. Wenn nein, begründe warum nicht.

**a)** Die Folge ist streng monoton steigend und nach oben beschränkt.
**b)** Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt.
**c)** Die Folge ist nicht monoton.
**d)** Die Folge ist nach oben beschränkt und konvergent.
**e)** Die Folge ist nach unten beschränkt und divergent.
**f)** Die Folge ist streng monoton fallend und konvergent.

**7.55** Ein sehr großes Papierblatt der Dicke 0,01 mm wird fortlaufend in der Mitte gefaltet und zusammengelegt. Es sei $d_n$ die Dicke des nach n-maligem Falten entstehenden Papierstapels.

**1)** Gib eine Formel für $d_n$ an.
**2)** Wie oft muss das Papierblatt gefaltet werden, damit $d_n$ mindestens 2,5 mm beträgt?

**7.56** Die DIN-A-Formate für Papierblätter werden mit DIN A0, DIN A1, DIN A2 usw. bezeichnet. Diese Formate gehen schrittweise durch Halbieren auseinander hervor und sind einander ähnlich. Ein Blatt vom DIN A0-Format nimmt eine Fläche von 1 000 000 $mm^2$ ein.

**1)** In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen eines DIN-A-Papiers?
**2)** Es sei $A_n$ der Flächeninhalt eines DIN An-Papiers. Gib eine Formel für $A_n$ an und berechne damit die Flächeninhalte der Formate DIN A0 bis DIN A8.
**3)** Zeichne den Graphen der Funktion A mit $A(n) = A_n$ für $n = 1, 2 \ldots 8$.

Im Schulbuch von Götz folgt nach dem Kapitel über „Geometrische Folgen“ das Kapitel „Geometrische Reihen“. Bei Malle ist – wie schon erwähnt – die Abfolge etwas anders. Trotz dieser unterschiedlichen Abfolge der Kapitel findet man in beiden Schulbüchern das Kapitel „Geometrische Reihen“. Beide Autoren führen dieselbe Herleitung der Summe einer endlichen geometrischen Reihe. Beide beginnen mit einer speziellen Folge, die mit 1 beginnt, beide Autoren geben danach ein Beispiel mit einem anderen Startwert und kommen abschließend zur selben Summenformel – die Beschriftung ist aber wieder nicht ganz dieselbe. Beide Autoren erwähnen auch die unterschiedliche Anordnung des Quotienten q, wie hier im Scan aus dem Buch von Götz et al. zu sehen ist.

**Summenformel der endlichen geometrischen Reihe:**
Gegeben sei eine geometrische Reihe $b + b \cdot q + b \cdot q^2 + \ldots$ mit $q \neq 1$. Die Summe $s_n$ der ersten n Glieder, also $s_n = b + b \cdot q + \ldots + b \cdot q^{n-1}$, berechnet sich gemäß

$$s_n = b \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \left(\text{gleichwertig ist } s_n = b \cdot \frac{q^n-1}{q-1}\right)$$

In den beiden nachfolgenden Scans findet man die Herleitung der Summenformel aus dem Schulbuch von Malle et al. Ich habe hier das Malle – Buch gewählt, da es übersichtlicher ist. Ich gebe nur die 1. Möglichkeit der Herleitung auf die Summenformel aus dem Schulbuch von Malle an, da dieser „Beweis“ in beiden Schulbüchern zu finden ist.

## Die Summe einer endlichen geometrischen Reihe

Ist die Folge $(b_1, b_2 \ldots b_n)$ eine endliche geometrische Folge, so bezeichnet man die dazugehörige Reihe $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ als endliche **geometrische Reihe**.

Ist $b_1$ das Anfangsglied und q der Quotient der Folge, so gilt:

$$b_i = b_1 \cdot q^{i-1} \quad \text{für } i = 1, 2 \ldots n$$

Wir leiten im Folgenden eine Formel für die Summe einer endlichen geometrischen Reihe her. Auch hier betrachten wir zunächst eine spezielle endliche geometrische Reihe, nämlich die Reihe $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ mit $q \neq 1$. Eine Formel für die Summe S dieser Reihe können wir auf zweifache Weise herleiten:

**1. Möglichkeit:** Wir setzen $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} = S$ und gehen so vor:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} \phantom{{}+q^n} &= S \quad | \cdot q \\ q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n &= S \cdot q \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die erste Gleichung von der zweiten, ergibt sich:

$$q^n - 1 = S \cdot (q-1)$$
$$S = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

**Beispiele:**

**(1)** $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^8=\frac{2^9-1}{2-1}=511$

**(2)** $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{62}{32}=\frac{31}{16}$

Sei nun $b_1+b_2+\ldots+b_n$ eine beliebige endliche geometrische Reihe mit $b_i=b_1\cdot q^{i-1}$ für $i=1, 2\ldots n$ und $q\neq 1$. Wir berechnen die Summe S dieser Reihe:

$S=b_1+b_2+\ldots+b_n=b_1+b_1\cdot q+b_1\cdot q^2+\ldots+b_1\cdot q^{n-1}=b_1\cdot(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

Wir haben somit bewiesen:

**Satz:** **Ist $b_1+b_2+\ldots+b_n$ eine endliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $q\neq 1$, so gilt für ihre Summe S:**

$$S=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

**Nützliche Merkregeln:**

- Die Hochzahl im Zähler des Bruches ist gleich der Anzahl der Glieder der Reihe.
- Falls $|q|<1$ ist, ist es besser, den Bruch in der Form $\frac{1-q^n}{1-q}$ anzuschreiben.

**Beispiel:** $3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+3\cdot 2^8=3\cdot\frac{2^9-1}{2-1}=1533$

## Grundaufgaben

**8.04** Berechne die Summe der folgenden Reihe.

**a)** $1+2+4+8+\ldots+1024$
**b)** $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{10}$
**c)** $1+0{,}2+0{,}2^2+\ldots+0{,}2^5$
**d)** $1+4+4^2+4^3+\ldots+4^7$
**e)** $4+4\cdot 5+4\cdot 5^2+\ldots+4\cdot 5^{10}$
**f)** $10+10\cdot 1{,}1+10\cdot 1{,}1^2+\ldots+10\cdot 1{,}1^5$
**g)** $0{,}4+0{,}4\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}2^2+0{,}4\cdot 0{,}2^3$
**h)** $1{,}3+1{,}3\cdot 0{,}4+1{,}3\cdot 0{,}4^2+1{,}3\cdot 0{,}4^3+1{,}3\cdot 0{,}4^4$

Jetzt sieht man auch die unterschiedliche Schreibweise der Summenformel, die sich nur durch s und $s_n$ und b und $b_1$ unterscheidet. Ich habe in den vorherigen Scans auch schon eine der drei Grundaufgaben für endliche geometrische Reihen gegeben. Diese Aufgaben sind sehr einfach. Dazu findet man im Schulbuch von Götz Beispiele, die die Schülerinnen und Schüler etwas mehr fordern als einfach die Summe einer Folge auszurechnen – wie der nachfolgende Scan zeigt.

**552** Von einer geometrischen Reihe kennt man $b_4 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ und $b_8 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$. Berechne **a)** $s_7$, **b)** $s_{11}$, **c)** $s_{15}$, **d)** $s_n$!

**553** Von einer geometrischen Reihe positiver reeller Zahlen ist das zweite Glied 14, das vierte Glied 56. Berechne $s_4$!

**554** Es sind die ersten fünf Glieder einer geometrischen Reihe anzugeben, deren Bildungsgesetz lautet:
a) $b_n = 2^{n-1}$ b) $b_n = 0{,}5 \cdot 3^{n-1}$ c) $b_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ d) $b_n = 6 \cdot (-3)^{n-1}$

**555** Berechne für die geometrische Reihe $s_{10}$, $s_{20}$ und $s_{30}$! Rate jeweils vorher!
a) $2 + 2{,}4 + 2{,}88 + 3{,}456 + \ldots$ b) $1 + 1{,}5 + 2{,}25 + 3{,}375 + \ldots$
c) $1 - 1{,}5 + 2{,}25 - 3{,}375 + \ldots$ d) $-2{,}25 + 3{,}375 - 5{,}0625 + \ldots$

**@-556** Gegeben sei die geometrische Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ Bestimme (durch Probieren am Taschenrechner) das kleinste n, sodass gilt: **(1)** $s_n > 100$, **(2)** $s_n > 1\,022$, **(3)** $s_n > 52\,000$, **(4)** $s_n > 500$ Milliarden!

**557** Auf das erste Feld eines Schachspieles werde ein Weizenkorn gelegt, auf das zweite zwei, auf das dritte vier, usw. **a)** Angenommen, man könnte dieses „Verdopplungsspiel" bis zum Ende aller Felder eines Schachspieles fortsetzen, wie viele Weizenkörner würde man benötigen? **b)** Wie viel t Weizen ergäbe dieses „Spiel", wenn ein Weizenkorn durchschnittlich 2 cg wiegt? **c)** Wie viel Weizen etwa käme auf eine Person, wenn die Weltbevölkerung mit rund (vgl. S. 196) **(1)** 6,15, **(2)** 7,4 Milliarden angenommen wird?

**558** Drei Zahlen sind aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Reihe. Ihr Produkt ist 1 728, die Summe aus dem zweiten und dritten Glied ist 28. Wie groß ist die Summe der Reihe?

Bei der Einleitung von „Geometrischen Reihen" geben Götz et al. ein signifikantes Beispiel zum Erklären von Teilsummen, definieren danach die Konvergenz von unendlich geometrischen Reihen. Nach diesem Einstieg kommen die endlichen geometrischen Reihen – wie gerade zuvor erwähnt – und danach die unendlichen geometrischen Reihen. Die Reihenfolge passt hier im Schulbuch von Götz in der Einführung des Kapitels „Geometrische Reihen" nicht ganz, dieses signifikante Beispiel gehört aufgrund der Definition erst nach den „Endlichen geometrischen Reihen". Ein sehr ähnliches Beispiel gibt auch Malle zur Erläuterung im Kapitel „Unendliche Reihen" an, in der von Teilsummen und Konvergenz geschrieben wird. Bis auf die Reihenfolge gefällt mir dieser Ansatz in beiden Schulbüchern sehr gut, ich gebe aber die Grafik aus dem Buch von Malle wieder, da diese anfangs übersichtlicher ist.

## 8.2 Unendliche Reihen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, ob man auch unendlichen Folgen eine Summe ihrer Glieder zuordnen kann.

Einer endlichen Folge $(a_1, a_2 \dots a_n)$ kann man eine Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ zuordnen. Kann man auch einer unendlichen Folge $(a_1, a_2, a_3 \dots)$ eine Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ zuordnen? In manchen Fällen ergibt dies offensichtlich keinen Sinn. Zum Beispiel wächst die unendliche Reihe

$$1 + 2 + 3 + \dots$$

über alle Schranken und besitzt sicher keine endliche Summe. Hingegen kann man der Abb. 8.2 entnehmen, dass anscheinend gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

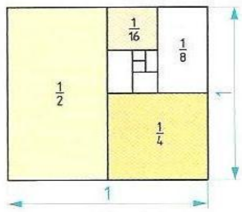


Abb. 8.2

Wie kann man die unendlichen Reihen $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ beschreiben, die eine endliche Summe besitzen?

Wir betrachten dazu die so genannten **Teilsummen** der Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Strebt die Folge $(S_n)$ der Teilsummen gegen einen Grenzwert S, so ist es nahe liegend, diesen als **Summe der Reihe** zu bezeichnen.

**Definition:** Sei $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ eine unendliche Reihe. Ist die Folge $(S_n)$ ihrer Teilsummen konvergent (divergent), so nennt man auch die Reihe **konvergent (divergent)**. Ist $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, so nennt man S die **Summe der Reihe** und schreibt:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S$$

Der folgende Satz wird gelegentlich gebraucht. Er besagt im Wesentlichen, dass man auch aus unendlich vielen Gliedern eine gemeinsame multiplikative Konstante herausheben darf.

**Satz:** Ist die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergent und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch die Reihe $c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \dots$ konvergent und es gilt:
$c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \dots = c \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$

In beiden Schulbüchern werden Konvergenzsätze geboten, wobei diesmal Götz et al. die für mich passendere Erläuterung sowie Merksätze geben. Malle gibt – wie man in dem nächsten Scan sieht – einen Satz über multiplikative Konstanten. Götz hingegen gibt zwei Konvergenzsätze für geometrische Folgen, in denen er definiert, für welche Fälle eine geometrische Folge divergent und für welche konvergent ist. Malle gibt zwar dieselbe Definition der unendlichen geometrischen Reihe, jedoch verwendet er mit keinem Wort „konvergent“ oder „divergent“. Der übernächste Scan zeigt die Konvergenzsätze aus dem Schulbuch von Götz et al. und dessen Summenformel für die unendliche geometrische Reihe.

**Konvergenzsatz für geometrische Folgen:**[1]
Die geometrische Folge b; bq; $bq^2$; $bq^3$; ...; $bq^n$; ... ist
– für $|q| < 1$ *konvergent*; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
– für $|q| > 1$ *divergent*; $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = \infty$.

Eine Folgerung aus der Summenformel für endliche geometrische Reihen ist der

**@-Konvergenzsatz für unendliche geometrische Reihen und Summenformel:**
Die unendliche geometrische Reihe $b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots + bq^n + \ldots$ ist
– für $|q| < 1$ *konvergent*; ihre *Summe* $s = \frac{b}{1-q}$.
– für $|q| > 1$ *divergent*, dh. sie besitzt keine (endliche) Summe.

Was hier auffällig ist, ist das der Begriff „Konvergenz" noch gar nicht erklärt wurde. Dieser Begriff wird bei Universitätsprofessor Götz erst im nächsten Kapitel „Konvergenz von Zahlenfolgen" erläutert, hingegen hat Schulbuchautor Malle die Begriffe der „Konvergenz" und des „Limes" schon zuvor eingeführt. Doch dazu später, zuvor möchte ich gerne das Kapitel der unendlichen geometrischen Reihe abschließen. Im Anschluss sind einige Beispiele aus dem Buch von Malle et al. Er gibt zu Beginn ein Beispiel, in dem die Frage nach der Konvergenz vorliegt und im Falle dieser, soll die Summe angegeben werden. Es sind lediglich Zahlenbeispiele. Im Schulbuch von Götz kommen auch Beispiele mit Buchstaben vor – für diese müssen auch geeignete Bedingungen aufgestellt werden.

**8.08** Ist die folgende geometrische Reihe konvergent? Falls ja, gib die Summe an.

**a)** $1 + 2 + 2^2 + \ldots$

**b)** $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots$

**c)** $1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots$

**d)** $1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots$

**e)** $3 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots$

**f)** $5 - 5 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}1^2 - 5 \cdot 0{,}1^3 + \ldots$

**8.09** Ein Gummiball fällt aus 1 m Höhe, steigt dann 0,8 m wieder auf, steigt nach dem nächsten Hinunterfallen 0,64 m auf, usw. Die Höhen bilden dabei eine geometrische Folge. Welchen Weg legt der Ball insgesamt zurück?

**8.10** Eine Spirale entsteht durch fortlaufendes, endloses Aneinanderfügen von Halbkreisen wie in Abb. 8.4, wobei ab dem zweiten Durchmesser jeder Durchmesser $\frac{4}{5}$ des vorhergehenden Durchmessers beträgt. Der erste Durchmesser betrage 10 cm.

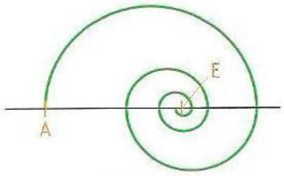


Abb. 8.4

**1)** Wie lang ist die Spirale?
**2)** Die Spirale nähert sich unbegrenzt dem Punkt E. Wie weit ist E von A entfernt?

**8.11** Die nebenstehend abgebildete „Schlangenlinie" entsteht durch fortlaufendes, endloses Aneinanderfügen von Halbquadraten wie in Abb. 8.5, wobei die Seitenlänge der Quadrate bei jedem Schritt um 40 % abnimmt. Die Seitenlänge des ersten Quadrates betrage 5 cm.

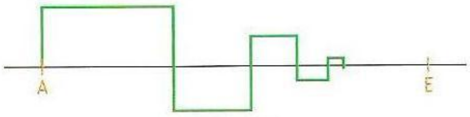


Abb. 8.5

**1)** Wie lang ist diese Linie?
**2)** Die Linie nähert sich unbegrenzt dem Punkt E. Wie weit ist E von A entfernt?

**8.12** Die nebenstehend abgebildete „Spirale" entsteht durch fortlaufendes, endloses Aneinanderfügen von Halbquadraten, wobei die Seitenlängen der Quadrate bei jedem Schritt auf die Hälfte sinken. Die Seitenlänge des ersten Quadrates betrage 5 cm.

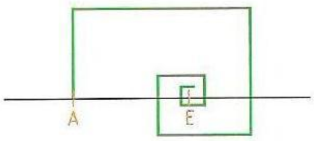


Abb. 8.6

**1)** Wie lang ist diese Linie?
**2)** Die Linie nähert sich unbegrenzt dem Punkt E. Wie weit ist E von A entfernt?

Wie man hierbei sieht, liegt das Augenmerk bei unendlichen geometrischen Reihen auf Figurenfolgen, die auch mir wichtig sind. Da Malle und Götz sehr ähnliche Figurenfolgenbeispiele haben, werde ich die nächsten Aufgaben auch aus dem Buch von Malle herausscannen, da diese dort übersichtlicher sind. Eine Kleinigkeit, die noch zu erwähnen ist, ist, dass im Schulbuch von Götz et al. die Beispiele eher theoretischer Natur sind und keine Endergebnisse liefern, da keine Zahlenwerte zum Einsetzen vorhanden sind. Das ist bei Malle anders, wie man anhand des nachfolgenden Scans erkennt.

**8.14** Sechs durch einen Punkt Q laufende Geraden schließen miteinander gleiche Winkel ein (siehe Abb. 8.8). Der Punkt P liegt auf einer dieser Geraden und seine Entfernung von Q beträgt 6 cm. Von P aus wird durch fortlaufendes, endloses Fällen des Lotes auf die jeweils nächste Gerade ein spiralförmiger Linienzug erzeugt. Wie lang ist dieser Linienzug?

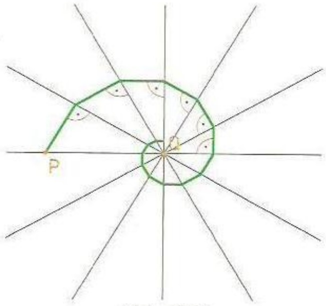


Abb. 8.8

**8.15** Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Grundlinie 10 cm und der Höhe 6 cm wird ein Quadrat eingeschrieben, das auf der Grundlinie steht. Dem über dem Quadrat entstehenden (dem ursprünglichen ähnlichen) Dreieck wird wieder ein Quadrat auf die gleiche Weise eingeschrieben usw. – ohne Ende. Berechne

**a)** die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate,
**b)** die Summe der Umfänge aller Quadrate.

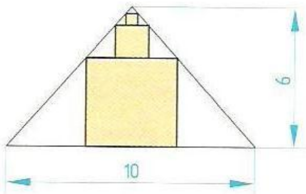


Abb. 8.9

**8.16** Einem Kreis vom Radius $r = 10$ cm wird ein Quadrat eingeschrieben, diesem wieder ein Kreis, diesem wieder ein Quadrat usw. – ohne Ende (siehe Abb. 8.10). Berechne die Summe

**a)** der Flächeninhalte aller Kreise,
**b)** der Flächeninhalte aller Quadrate,
**c)** der Umfänge aller Kreise,
**d)** der Umfänge aller Quadrate.

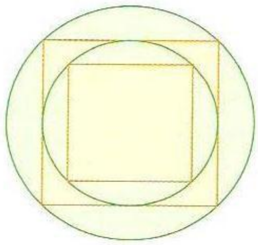


Abb. 8.10

**8.17** Berechne die Länge der in Abb. 8.11 dargestellten, aus unendlich vielen Strecken bestehenden Zickzacklinie, wenn

**a)** $a = 5$ ist,
**b)** a eine beliebige, feste Zahl ist.

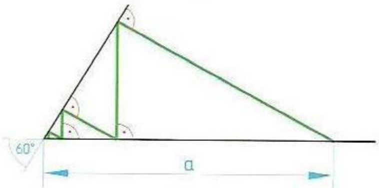


Abb. 8.11

**8.18** Einem Winkel mit dem Maß 30° werden fortlaufend ohne Ende Halbkreise wie in Abb. 8.12 eingeschrieben. Der Mittelpunkt $M_1$ des ersten Kreises ist vom Scheitel S des Winkels 10 cm entfernt. Berechne

**a)** die Gesamtlänge aller Halbkreise,
**b)** die Summe der Flächeninhalte aller Halbkreise.

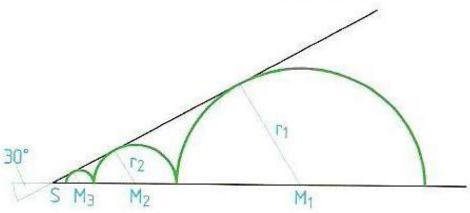


Abb. 8.12

Das Autorenteam rund um Malle hat gleich im Anschluss an diese Beispiele zu unendlichen geometrischen Reihen das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte angeführt. Dieses Paradoxon findet man bei Götz auch, nur nicht gleich im Anschluss, sondern in der Weiterführung am Ende des Kapitels. Ich möchte aber hier auch dieses Paradoxon einfügen – aus dem Buch von Malle, da es dort übersichtlicher ist. Die Grafik von Achilles und der Schildkröte (Abb. 8.14) ist auch bei Götz zu finden.

### Achilles und die Schildkröte

Die Tatsache, dass eine unendliche Reihe eine endliche Summe haben kann, hat schon den alten Griechen Kopfzerbrechen bereitet. Der griechische Philosoph ZENON von ELEA (ca. 495 v. Chr. bis ca. 430 v. Chr.) argumentierte so: Achilles und eine Schildkröte machen ein Wettrennen, wobei Achilles der Schildkröte fairerweise einen gewissen Vorsprung gewährt (siehe Abb. 8.15). Bis Achilles (A) im ersten Schritt die Position der Schildkröte (S) erreicht hat, ist die Schildkröte schon ein Stück weiter. Bis Achilles dann im zweiten Schritt diese Position der Schildkröte erreicht hat, ist die Schildkröte abermals ein Stück weiter. Und so kann man das bis in alle Ewigkeit fortsetzen. Achilles kann also die Schildkröte nie einholen.

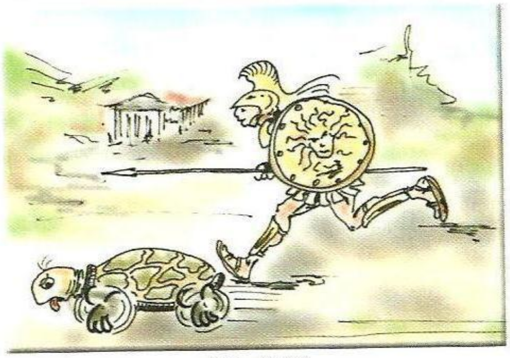


Abb. 8.14

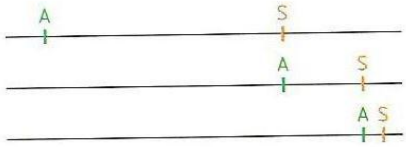



Abb. 8.15

Wie lässt sich dieses Paradoxon auflösen?

Man darf nicht übersehen, dass die Zeitintervalle der einzelnen Schritte immer kleiner werden. Addiert man diese Zeitintervalle, so bilden sie eine unendliche Reihe. Diese konvergiert und hat eine endliche Summe, sodass Achilles die Schildkröte in einer endlichen Zeit einholt.

Nun zu dem schon vorher angesprochenen Kapitel der Konvergenz. Im Schulbuch von Götz kommt nach dem Kapitel über geometrische Folgen und Reihen das Kapitel zu „Konvergenz von Zahlenfolgen (Begriffsbestimmung und Arbeiten mit Grenzwerten)“. Bei Malle werden diese Begriffe schon vorher vorgestellt. Malle startet mit intuitiver Ermittlung von Grenzwerten – siehe nachstehende Scan.

**7.20** Ermittle den Grenzwert der Folge $\left(\frac{n^2+1}{3n^2+2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right)$.

**Lösung:** Wir berechnen zuerst einige Glieder der Folge:

$$\left(\frac{n^2+1}{3n^2+2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{5}{14}, \frac{10}{29}, \frac{17}{50}, \frac{26}{77} \ldots\right)$$

Daraus können wir jedoch nicht entnehmen, ob sich die Folge einer bestimmten Zahl unbegrenzt nähert. Wir kommen aber weiter, wenn wir Zähler und Nenner durch $n^2$ dividieren:

$$\left(\frac{n^2+1}{3n^2+2}\right) = \left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n^2}}\right)$$

Da mit wachsendem n sich sowohl $\frac{1}{n^2}$ als auch $\frac{2}{n^2}$ unbegrenzt der Zahl 0 nähert, nähert sich der Zähler unbegrenzt der Zahl 1 und der Nenner unbegrenzt der Zahl 3. Somit gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2+1}{3n^2+2} = \frac{1}{3}$$

**Grundaufgaben**

**7.21** Ermittle den Grenzwert der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$.

**a)** $a_n = \frac{2}{n}$ **c)** $a_n = 3 + \frac{1}{2n}$ **e)** $a_n = 4 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ **g)** $a_n = \frac{1}{n^2}$

**b)** $a_n = 1 - \frac{1}{5n}$ **d)** $a_n = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ **f)** $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1$ **h)** $a_n = \frac{1}{n^2+1}$

**7.22** Ermittle den Grenzwert der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$

**a)** $a_n = \frac{n^2+2}{4n^2+3}$ **c)** $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+5}$ **e)** $a_n = \frac{n+2}{4n^2-1}$ **g)** $a_n = 3 + \frac{2n^2-1}{n^2+4}$

**b)** $a_n = \frac{1}{n+1}$ **d)** $a_n = \frac{2}{n^2+3}$ **f)** $a_n = \frac{n^2+2}{3n^3-5}$ **h)** $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n^2-2}{2n^2+6}$

Im Anschluss daran folgen zwei vorgerechnete Beispiele mit einer ε – Umgebung, jedoch wird diese nicht so genannt. Zum Schluss folgen die Definition des Grenzwerts und danach ein paar Beispiele, um einen Grenzwert auszurechnen, aber Beispiele zu einer ε – Umgebung fehlen und die Begriffe „ε – Umgebung“ und „Nullfolge“ fehlen auch – wie auch der nachfolgende Scan zeigt:

**7.23** Berechne für die Folge $\left(1-\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right)$, ab welchem Index der Abstand des Gliedes $a_n$ von 1 kleiner ist als **a)** $\frac{1}{10}$, **b)** $\frac{1}{100}$, **c)** $\frac{1}{1000}$.

**Lösung zu a):** Wir erinnern uns, dass der Abstand der Zahlen $a_n$ und 1 gleich $|a_n - 1|$ ist (siehe Mathematik verstehen 5, Seite 41). Es gilt:

$$|a_n - 1| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{10} < a_n < 1 + \frac{1}{10} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{10} < 1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{10} < -\frac{1}{n} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{10} > \frac{1}{n} > -\frac{1}{10} \Leftrightarrow n > 10$$

Ab dem 11. Glied ist der Abstand jedes Gliedes $a_n$ von 1 kleiner als $\frac{1}{10}$.

Der Abstand der Glieder der Folge $\left(1-\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right)$ von 1 wird aber nicht nur kleiner als $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ usw., sondern kleiner als jede beliebig vorgegebene (noch so kleine) positive Zahl $\varepsilon$.

**7.24** Zeige für die Folge $\left(1-\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right)$: Zu jeder noch so kleinen positiven Zahl $\varepsilon$ gibt es einen Index $n_0$, sodass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ (siehe Abb. 7.3).


Abb. 7.3

**Lösung:** Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben.

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|-\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Wählt man also einen Index $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, dann ist $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Die letzte Aufgabe führt uns zu einer exakteren Grenzwertdefinition:

**Definition:** **Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$, geschrieben $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$ gibt, sodass**

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ für alle } n \geq n_0.$$

**Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.**

In „Mathematik Lehrbuch 6“ von Götz et al. wird zu Beginn der Begriff der Nullfolge eingeführt und bereits jener einer Umgebung – wie der nachstehende Scan zeigt:

*Definition:* Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt **Nullfolge** (dh. sie konvergiert (strebt) gegen null), wenn es zu jedem (auch noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0$ gibt, sodass für alle späteren (größeren) Indizes $n > n_0$ gilt: $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$.

Versuche, diese Definition mit anderen Worten auszusprechen!

*Beispiele:*

„…, wenn ab einem gewissen $n_0$ alle weiteren Folgenglieder $x_n$ die Ungleichung $|x_n| < \varepsilon$ erfüllen.“

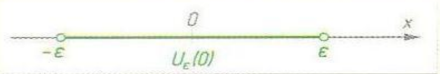
oder

„…, wenn **fast alle** – dh. alle bis auf höchstens *endlich* viele – $x_n$ die Ungleichung $|x_n| < \varepsilon$ erfüllen.“

Durch Einführung eines neuen, in der Mathematik weithin üblichen Begriffes, des **Umgebungsbegriffes**, gelangt man zu einer besonders bündigen Formulierung:

*Definition:* Das Intervall $]-\varepsilon; \varepsilon[$ heißt eine **$\varepsilon$-Umgebung von 0**. Wir schreiben:

$$]-\varepsilon; \varepsilon[ = \{x \mid -\varepsilon < x < \varepsilon\} = \{x \mid |x| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(0)$$



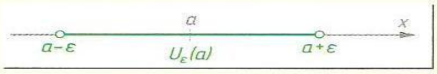
Die Definition des Grenzwertes fällt im Buch von Götz auch anders aus als im Buch von Malle, dabei wird – ebenso wie bei Malle – „konvergent“ und „divergent“ eingeführt. Aus dem Buch von Götz:

*Definition:* Wenn es zu einer Zahlenfolge $\langle x_n \rangle$ eine reelle Zahl a gibt, sodass $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - a| = 0$, so sagen wir: die Folge $\langle x_n \rangle$ **strebt (konvergiert) gegen a**. Ebenso kann man sagen: Die Folge $\langle x_n \rangle$ besitzt den **Grenzwert a**. Wir schreiben dafür: $\mathbf{\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a}$
Folgen, die einen Grenzwert besitzen, heißen **konvergente** Folgen;
Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, heißen **divergente** Folgen.

Im Anschluss gibt Götz auch eine Definition von „ε – Umgebung“ und erklärt den Begriff „fast alle“ – dieser Begriff ist nicht in allen Schulen geläufig, wird aber bei Götz abgedruckt – bei Malle nicht!

Unter Verwendung der

*Definition:* Das Intervall $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ heißt eine **ε-Umgebung von a**. Wir schreiben:
$$]a - \varepsilon; a + \varepsilon[ = \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = \{x \mid |x - a| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(a)$$




ergibt sich die bündigere Beschreibung:

„Eine Folge $\langle x_n \rangle$ konvergiert gegen a (bei $n \to \infty$), wenn in *jeder* (auch noch so kleinen) ε-Umgebung von a **fast alle** (dh. *alle* bis auf *endlich* viele) Glieder der Folge liegen.“

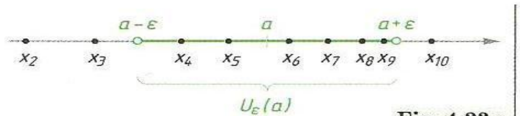



**Fig. 4.23 a**

$U_\varepsilon(a)$ enthält (nur) endlich viele $x_n$

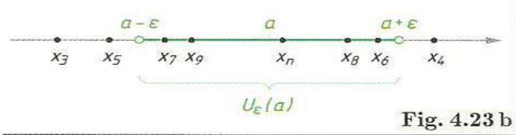



**Fig. 4.23 b**

$U_\varepsilon(a)$ enthält fast alle $x_n$

Es kommen danach Beispiele zu Nullfolgen und deren Grenzwerten – sowie auch bei Malle ersehbar (siehe intuitiver Grenzwert zuvor). Danach stehen im Buch von Götz Aufgaben, die mir sehr wichtig sind, wie man auch später im Kapitel 5 meiner Diplomarbeit unter „Beispielsammlung“ sehen wird. Es geht um Beispiele mit der ε – Umgebung, wie der nachfolgende Scan zeigen wird. Solche Beispiele und Grenzwertberechnungen sollten Schülerinnen und Schüler einfach beherrschen.

**614** Wie Aufg. 613!

a) $\langle\frac{2n}{n+1}\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$

b) $\langle\frac{2n-1}{n}\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$

c) $\langle\frac{5-n}{3n-2}\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

d) $\langle\frac{6n-2}{4n+1}\rangle$, $\varepsilon = \frac{7}{100}$

e) $\langle\frac{n^2}{n^2+1}\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{145}$

f) $\langle\frac{8n^2-12n}{4n^2-9}\rangle$, $\varepsilon = 0{,}01$

g) $\langle\frac{n^2}{n+n^3}\rangle$, $\varepsilon = 0{,}1$

h) $\langle\frac{n^2-n}{n^3}\rangle$, $\varepsilon = 0{,}1$

**615** Berechne!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n-8}{5-6n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2}{n^2+3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{2n^4-3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7n}{2n-1} - \frac{4n^2-1}{5-3n^2}\right)$

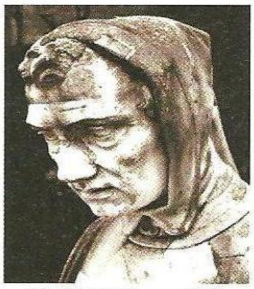
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-1}{n^2+1} - \frac{2n+1}{3n}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(2+\frac{3}{n}\right) \cdot \frac{4n^2}{2n^2-1}\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{2n-1} : \frac{2n^2-1}{n^2+2}\right)$

Eine weitere Gemeinsamkeit beider Schulbücher sind die Fibonacci-Zahlen. Im Schulbuch von Malle et al. geht es nach den „Geometrischen Folgen“ weiter mit dem Kapitel „Rekursive Darstellung von Folgen“. Darin werden die Fibonacci-Zahlen vorgestellt. Diese Zahlenfolge findet man auch im Buch von Götz et al., wobei diese schon im ersten Kapitel „Unendliche Folgen – Explizite und rekursive Darstellung“ zu entdecken sind. Wie die untere Abbildung aus dem Schulbuch von Malle zeigt, wird etwas über Fibonacci erklärt und seine Folge erläutert. Es wird wie bei Götz zum Schluss die Formel mit $\sqrt{5}$ dargeboten und in beiden Schulbüchern verlangt, diese zu überprüfen.

LEONARDO von PISA (genannt FIBONACCI, 1170–1250?) hat in seinem Werk *Liber abaci* allgemein gefragt, wie man die Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten berechnen kann. Wir bezeichnen die Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten mit $a_n$. Am Ende des n-ten Monats sind einerseits die $a_{n-1}$ Kaninchenpaare vom Ende des $(n-1)$-ten Monats vorhanden sowie andererseits die $a_{n-2}$ Nachwuchspaare der Kaninchenpaare vom Ende des $(n-2)$-ten Monats. Somit gilt $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Dies gilt auch, wenn wir noch das Glied $a_0 = 0$ hinzunehmen. Wir erhalten so insgesamt eine Folge $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ mit folgender rekursiven Darstellung:



LEONARDO von PISA (FIBONACCI, 1170–1250?)

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{für} \quad n = 2, 3, 4\ldots$$

Ausgehend von den beiden ersten Gliedern kann man die weiteren Glieder somit einfach berechnen, indem man jeweils die beiden vorangehenden Glieder addiert. Man erhält die Folge (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...). Man bezeichnet diese Folge als **Fibonacci-Folge** und ihre Glieder als **Fibonacci-Zahlen**.

Die Fibonacci-Folge ist aus zwei Gründen ziemlich berühmt geworden. Erstens besitzt sie eine Fülle von interessanten Eigenschaften und kommt in vielen Gebieten der Mathematik vor, oft sogar ganz überraschend. Zweitens treten die ersten Glieder dieser Folge in der Natur häufig auf. So sind zB Rosengewächse oder Tannenzapfen aus aufeinander folgenden Schichten aufgebaut, wobei die Blätteranzahlen in den Schichten den Anfang einer Fibonacci-Folge bilden (siehe Abb. 7.7 und 7.8). Die Folge hat so viele interessante Eigenschaften und Anwendungen, dass es sogar eine eigene Zeitschrift gibt, das Fibonacci-Quarterly, in der ausschließlich Beiträge publiziert werden, die mit der Fibonacci-Folge zusammenhängen.

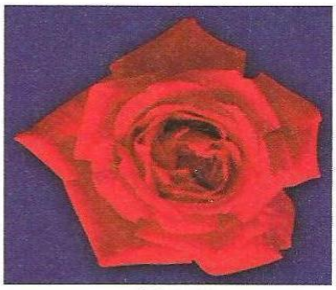


Abb. 7.7

Abb. 7.8

Aus der rekursiven Darstellung der Fibonacci-Folge kann man auch eine Termdarstellung dieser Folge herleiten. Da die Herleitung ziemlich kompliziert ist, geben wir nur das Ergebnis an:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Das Überraschende an dieser Termdarstellung ist, dass sie trotz des Vorhandenseins von Wurzeln für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $a_n$ liefert. Prüfe dies für einige Werte von n nach.

## Grundaufgaben

**7.63** Rechne nach, dass die ersten fünf Zahlen, die sich aus der Termdarstellung der Fibonacci-Folge ergeben, auch tatsächlich der rekursiven Darstellung genügen.

Es kommen danach noch drei weitere Grundaufgaben bei Malle zum Berechnen von Gliedern mit anderen Zahlenfolgen, die aber ähnlich der Fibonacci-Folge sind.

## 2. Schulbuchanalyse und –vergleich von Büchern für Höhere Technische Lehranstalten

In diesem Abschnitt meiner Diplomarbeit untersuche ich zwei führende Schulbücher aus dem Bereich für Höhere Technische Lehranstalten:

1) „Ingenieur-Mathematik 3“ von Timischl, Kaiser (E. Dorner, 4. Auflage 2005)
2) „Mathematik 3“ von Schalk, Steiner (Reniets Verlag, 3. Auflage 2000)

Beide Mathematikbücher sind noch im Gebrauch, zum Beispiel an der HTL Hollabrunn oder an der HTL in Mistelbach, wobei ich das Buch von Timischl von einer Kollegin aus Hollabrunn ausgeborgt habe und das Schulbuch von Schalk von einer Kollegin aus Laa, deren Freund in Mistelbach in die HTL ging.

Bei beiden Schulbüchern steht am Beginn das Kapitel „Folgen und Reihen“. Das Ausmaß ist ungefähr gleich. Laut Inhaltsverzeichnis wird in beiden Exemplaren eine Einführung gegeben, danach werden arithmetische und geometrische Folgen, sowie der Grenzwert und unendliche Reihen erläutert.

Im Buch von Timischl samt Kollegen gibt es ein Kapitel über wirtschaftsmathematische Anwendungen sprich Zinseszins und Rentenrechnung, das für meine Diplomarbeit jedoch weniger relevant ist.

Im Buch von Schalk und Steiner hingegen bilden den Abschluss Differenzengleichungen und Problemstellungen aus der Physik und Technik. Auch diese Kapitel sind nicht wirklich von Relevanz für meine Diplomarbeit.

Diese Tatsache der unterschiedlichen Schwerpunktsetzung lässt darauf schließen, dass die Bücher für verschiedene Abteilungszweige der Höheren Technischen Lehranstalten geschrieben sind! Aber man merkt schon beim Lesen des Inhaltsverzeichnisses, dass der Großteil des Kapitels „Folgen und Reihen“ in HTL- und AHS-Büchern übereinstimmend ist.

Timischl und Kaiser geben zu Beginn ein Einführungskapitel, wobei jedes Kapitel aus einem oder mehreren großen vorgerechneten Beispielen und Definitionen samt Bemerkungen besteht. Danach kommen ein paar Beispiele! Im Einführungskapitel „1.1 Einführung“ wird das HERON'sche Näherungsverfahren beschrieben. Folgende Begriffe werden aber in der

Einführung schon geklärt: Bildungsgesetz, Zahlenfolge, rekursive Darstellung einer Folge, Monotonie und Schranken. Die Beispiele sind aber nur zum Berechnen von Folgengliedern und zur Auffindung einer Termdarstellung/ eines Bildungsgesetzes vorgesehen.

Im Vergleich dazu wird im Buch von Schalk und Steiner immer zuerst erklärt und es werden Definitionen gegeben. Erst im Anhang sind die Beispiele zum Üben, wobei es immer genügend sind! Das Einführungskapitel bei Schalk und Steiner erklärt die Begriffe Zahlenfolge, Bildungsgesetz und (un)endliche Folge. Im Anschluss daran werden im 2. Unterkapitel die arithmetischen Folgen und im 3. Abschnitt die geometrischen Folgen erklärt! Es sind hier die Formeln für die Summe der Folgen – also der Reihe – auch gegeben sowie Beispiele!

Im Schulbuch von Timischl kommt als nächstes Kapitel „1.2 Arithmetische Folgen und Reihen“ samt der Definitionen und wieder vorgerechneten Beispielen. „1.3 Geometrische Folgen und Reihen“ steht gleich im Anschluss. Von den Beispielen her sind große Unterschiede zu den Übungsaufgaben aus den Schulbüchern für Allgemeinbildenden Höheren Schulen, dies gilt auch für die beiden HTL-Bücher. Bei Schalk sind mehr Zahlenbeispiele und Beispiele aus dem Finanzwesen zu ersehen, bei Timischl kommen nach den Zahlenbeispielen vermischte Aufgaben mit Widerständen, Druck in der Atmosphäre und Rohstoffverbrauch.

Im HTL-Schulbuch von Schalk und Steiner werden in Kapitel 4 „Monotonie und beschränkte Folgen“, im Kapitel 5 „Grenzwert und Konvergenz“ und im Kapitel 6 „Grenzwertsätze, Grenzwertberechnung“ auch die für mich wichtigen Abschnitte der „Folgen und Reihen“ gebracht, die in den AHS-Büchern viel Platz finden! Auch den Begriff der „ε – Umgebung“ findet man bei Schalk und Steiner. Im Kapitel „1.5 Konvergenz unendlicher Folgen und Reihen“ werden bei Timischl noch die Begriffe des Grenzwertes, der Konvergenz sowie die Summe von unendlichen Folgen erklärt. Man findet hier auch Beispiele aus der Geometrie. Der Begriff der „ε – Umgebung“ bleibt jedoch aus! Kapitel 4 bei Timischl behandelt wirtschaftsmathematische Anwendungen, ähnliche Beispiele wie man sie an Handelsakademien anwendet. Solche Beispiele findet man bei Schalk und Steiner nicht, jedoch viele Beispiele aus der Physik, die im Abschnitt 9 von 9 besprochen werden! Im Abschnitt „7. Unendliche Reihen“ kommen auch hier wieder die gewohnten Beispiele aus der Geometrie vor! Allerdings intensiver als bei jedem anderen bis jetzt besprochenen

Schulbuch. Man merkt bei Schalk und Steiner, dass man hierauf besonderen Wert gelegt hat. Das sieht man auch bei den folgenden Kapiteln: „Differenzengleichungen“ und „Problemstellungen der Physik und Technik“.

Bei genauerer Betrachtung und einem Versuch Unterschiede zu finden, hat man keine Probleme. Das HTL-Schulbuch von Timischl legt besonderen Wert auf wirtschaftsmathematische Anwendungen – ist nachvollziehbar, weil das Buch für Ingenieure geschrieben ist, wie schon der Buchtitel verrät. Im Gegensatz dazu stellen im Schulbuch von Schalk „Differenzengleichungen“ und „Problemstellungen der Physik und Technik“ die großen Schwerpunkte! Ich werde auf die Schwerpunktsetzung der beiden Schulbücher nicht wirklich eingehen, sondern das Wesentliche für meine Diplomarbeit – Folgen, Reihen, unendliche Folgen, Grenzwert – versuchen zu analysieren und trotz der verschiedenen Schwerpunktsetzung auf Gemeinsamkeiten verweisen.

Es liegt schon ein gewaltiger Unterschied in der Einführung vor. Bei Schalk und Steiner in „Mathematik 3“ werden die wichtigsten Begriffe wie „Bildungsgesetz“, „Zahlenfolge“, „arithmetische Folge“, „geometrische Folge“ sofort geklärt – wie der nachfolgende Scan zeigt.

# 2 4 8 ?

Welche Zahl folgt als nächste? Dieses Rätsel ist gar nicht so einfach! Denn ein „logisches“ Argument, welche Zahl für das rote Fragezeichen zu setzen ist, gibt es nicht.

Bei den üblichen Zahlenrätseln kann man im Allgemeinen folgende Begründung geben: Die Reihenfolge der Zahlen gehorcht einer bestimmten Funktionsgleichung, in das die natürlichen Zahlen — meistens mit 1 beginnend — eingesetzt werden.

So liefert z. B. die Gleichung $y = 2x + 1$ die Zahlen

$$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9\ldots \qquad \text{für } x \in \mathbb{N}^*.$$

Oder für $y = x^2$ erhalten wir

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16\ldots \qquad \text{für } x \in \mathbb{N}.$$

Es gilt also — durch Probieren oder Intuition — eine Funktionsgleichung, ein **Bildungsgesetz** zu finden.

Für unser eingangs gebrachtes Problem gibt es unter diesem Gesichtspunkt beliebig viele Lösungen:

$$16 \ldots\ldots \text{ für das Bildungsgesetz } y = 2^x,\ x \in \mathbb{N}^*$$

$$14 \ldots\ldots \text{ für das Bildungsgesetz } y = x^2 - x + 2,\ x \in \mathbb{N}^*$$

Nach dem Ausflug in die Rätselecke wollen wir uns mit dem für die Mathematik Wesentlichen befassen. Bei unserem Rätsel 2 4 8 ? wurden Zahlenwerte in einer bestimmten Reihenfolge aneinander gesetzt.

In der Mathematik spricht man von einer **„Zahlenfolge“** und schreibt die Glieder der Folge in Winkelklammern.

Z. B.: $\langle 2, 4, 8, 16, 32, 64\rangle$, $\langle 3, 15, 2, 10, 1\rangle$, $\langle 1, 2, 3\rangle$ usw.
allgemein: $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\rangle$

Man bezeichnet $a_1$ als **Anfangsglied** und $a_n$ als **n-tes Glied** der Folge.

Zahlenfolgen finden sich bereits auf den babylonischen Tontafeln, die vor vier Jahrtausenden entstanden sind. Das folgende Foto zeigt eine solche Tafel mit mathematischem Keilschrift-Text aus dem 14. Jahrhundert v. Chr., der am Hof des Assur-Tempels gefunden wurde. Auf ihm sind die Quadratzahlen von 1 bis 18 noch erhalten. Die Tafelgröße lässt vermuten, dass die Zahlenfolge ursprünglich bis $30^2$ gereicht hat.
1 4 9 16 … 289 324 …


Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Elemente einer **Zahlenmenge** angeschrieben werden, z. B.: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$ usw.
Wenn man aber die Elemente in einer bestimmten Reihenfolge anordnet, spricht man von einer **Folge**.

Dieses war die erste Seite der Einführung, die zweite Seite folgt im Anschluss, in der die Definitionen der oben wichtigen Begriffe gegeben werden. In HTL-Büchern ist es ja üblich, zuerst die Fakten zu drucken und danach kommen Beispielsammlungen. Dieses Schema werde ich hier nun auch vollziehen.

**Definition:**

Eine **unendliche (endliche) Folge** ist darstellbar durch eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}^*$ (die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$) ist.

Betrachten wir die nachstehenden Zahlenfolgen:

(1) $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
$\langle 2, 4, 6, 8, 10 \rangle$
$\langle 2, 0, -2, -4, -6 \rangle$

(2) $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32 \rangle$
$\langle 8, 4, 2, 1, 0{,}5, 0{,}25 \rangle$
$\langle 1, -2, 4, -8, 16, -32 \rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in **(1)** und den in **(2)** angeführten Folgen?

Offensichtlich bestehen gewisse Abhängigkeiten zwischen den Folgengliedern:

— In **(1)** liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Addition einer konstanten Größe entsteht. (**Arithmetische Folgen!**)

— In **(2)** liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entsteht. (**Geometrische Folgen!**)

**Definition:**

Eine **arithmetische Folge (AF)** ist eine Folge, bei der die **Differenz** zweier Nachbarglieder konstant ist.

Warum spricht man von einer „arithmetischen" Folge? Nun: Jedes „innere" Glied einer arithmetischen Folge ist das **arithmetische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Arithmetische Folge: $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d}$

Geometrische Folge: $b_1 \xrightarrow{\cdot q} b_2 \xrightarrow{\cdot q} b_3 \xrightarrow{\cdot q} b_4 \xrightarrow{\cdot q} b_5 \xrightarrow{\cdot q}$

**Definition:**

Eine **geometrische Folge (GF)** ist eine Folge, bei der der **Quotient** zweier Nachbarglieder konstant ist.

Der Betrag von jedem „inneren" Glied einer geometrischen Folge ist das **geometrische Mittel** der Beträge seiner beiden Nachbarglieder:

$$\boxed{|b_n| = \sqrt{|b_{n-1}| \cdot |b_{n+1}|}}$$

Die Glieder einer endlichen Folge können zu einer (nicht ausgerechneten) Summe zusammengefasst werden. Man spricht dann von einer **Reihe**.

Anders formuliert: Ein Term der Gestalt $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ heißt **endliche Reihe** mit k Gliedern,

z. B.: (1) $2+4+8+16+32+64$ (2) $2-2+2-2+2-2$
(3) $1+0{,}5+0{,}25+0{,}125$ (4) $1+2+3+4$

Es gibt auch **unendliche Reihen** (z. B.: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$). Man überlegt sich leicht, dass diese unendliche Reihe sogar eine Summe hat, nämlich 1. Man denke sich ein Blatt Papier zerschnitten in die Hälfte, geviertelt usw. und addiere alle Teile.


## 2. Arithmetische Folgen

Die Folge $\langle 2, 5, 8, 11 \rangle$ ist eine arithmetische Folge. Die Differenz d der Folge ist 3. Es gilt:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_1 + 2d = 2 + 6 = 8$$
$$a_4 = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11$$

Allgemein: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

**Beispiel:**
Gegeben: arithmetische Folge $a_1 = 4$, $d = 2$
Gesucht: $a_6$

**Lösung:**
$a_6 = a_1 + 5d = 4 + 10 = 14$ $\qquad a_6 = 14$

Man sieht hier auch gleich, dass als nächstes Kapitel die „Arithmetischen Folgen" folgen. Es kommen auch immer ein paar kleine vorgerechnete Beispiele. Man sieht hier auch schön, dass die explizite Darstellung gegeben wird. Es wird dann auf der nächsten Seite die

Summenformel angegeben. Diese wird sogar „hergeleitet“ – wie man im folgenden Scan sehen kann:

$$s_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + (a_n-2d) + (a_n-d) + a_n$$

$$\begin{array}{lll}
a_1 + a_n & = & = a_1 + a_n \\
a_2 + a_{n-1} & = (a_1+d)+(a_n-d) & = a_1 + a_n \\
a_3 + a_{n-2} & = (a_1+2d)+(a_n-2d) & = a_1 + a_n \\
\cdots & & \\
a_{n-1} + a_2 & = (a_n-d)+(a_1+d) & = a_1 + a_n \\
a_n \quad + a_1 & & = a_1 + a_n \\
\hline
s_n \quad + s_n & = 2s_n & = (a_1+a_n)\cdot n
\end{array}$$

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)}$$

Summe einer arithmetischen Folge:

$$\boxed{s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} \text{ bzw. } s_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]}$$

Die Summe einer arithmetischen Folge mit n Gliedern ist gleich dem n-fachen arithmetischen Mittel aus dem ersten und letzten Glied der Folge.

**Beispiel:**
Man berechne $s_{11}$ einer arithmetischen Folge, wenn $a_1=9$ und $d=5$ ist.

**Lösung:**
$s_{11} = \frac{11}{2}(a_1+a_{11}) = \frac{11}{2}(a_1+a_1+10d) = \frac{11}{2}(2\cdot 9+10\cdot 5) = 374$ $\qquad s_{11} = 374$

Auffallend bei den Beispielen ist, dass Tabellen ausgefüllt werden können – wie der nächste Scan beweisen wird. Es kommen auch Beispiele mit Zahlenfolgen vor:

**AUFGABEN**

**1.** Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen:

| | $a_1$ | d | n | $a_n$ | $s_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | 4 | 5 | 6 | | |
| **b)** | 3 | 2 | | 19 | |
| **c)** | −30 | 5 | | | −75 |
| **d)** | $\frac{1}{5}$ | | 12 | 5,7 | |
| **e)** | $\frac{1}{4}$ | | 16 | | 44 |
| **f)** | 4 | | | −7,8 | −114 |
| **g)** | | −3 | 4 | −9 | |
| **h)** | | −2 | 24 | | 72 |

**2.** Man berechne $a_1$, d und $s_n$: **a)** $a_{12}=42$, $a_8=66$, $n=4$ **b)** $a_8=-16$, $s_5=-30$, $n=8$ **c)** $a_6=15$, $s_3=-9$, $n=6$ **d)** $s_4=\frac{1}{3}$, $s_7=-\frac{7}{6}$, $n=3$

Die bisherigen Scans entstammen alle aus dem Schulbuch von Schalk.

In Timischls „Ingenieurmathematik“ zum Vergleich ist die Einführung ein wenig länger – nämlich 7 Seiten. Zu Beginn steht die Quadratwurzel einer Zahl – Herons Verfahren wird hier näher beschrieben, wie die nächste Grafik zeigen wird. Im Anschluss daran folgt die Definition einer „Reellen Zahlenfolge“ mit Anmerkungen zu dem Definitionsbereich und es wird darauf hingewiesen, dass die Reihenfolge einer Zahlenfolge wichtig ist. Danach wird das Bildungsgesetz und die rekursive Darstellung erklärt. Wie Timischl Beispiele vorrechnet, sieht man gleich anhand des Heron’schen Näherungsverfahren.

**Beispiel 1.1 : Quadratwurzel einer Zahl** ✓

Von HERON (1. Jh. n. Chr.) stammt ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel von 2. Man geht von einem Näherungswert $a_0$ von $\sqrt{2}$ aus, etwa $a_0 = 1{,}4$ oder auch $a_0 = 1$. Mit diesem berechnet man $\frac{2}{a_0}$ und bildet dann von $a_0$ und $\frac{2}{a_0}$ das arithmetische Mittel $a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(a_0 + \frac{2}{a_0}\right)$. Aus $a_1$ und $\frac{2}{a_1}$ bildet man wieder das arithmetische Mittel $a_2$. Diesen Vorgang wiederholt man immer wieder. Nach HERON entstehen dabei immer bessere Näherungswerte für $\sqrt{2}$.

**a)** Gib die Folge dieser Näherungswerte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ an!

**b)** Gib das Bildungsgesetz der Näherungswerte an!

**Lösung**

Zu **a)** $a_1 = 1{,}4$ ist ein Näherungswert von $\sqrt{2}$.

$a_1$ ist kleiner als $\sqrt{2}$, da $1{,}4^2 = 1{,}96$ ist. Multipliziert man 1,4 statt mit 1,4 mit $\frac{2}{1,4}$, so erhält man genau 2. 1,4 ist kleiner, $\frac{2}{1,4}$ ist größer als $\sqrt{2}$. Es ist daher naheliegend, ihr arithmetisches Mittel als besseren Näherungswert $a_1$ zu wählen!

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1,4 + \frac{2}{1,4}\right) = 1{,}41428571428\ldots; \qquad a_2^2 = 2{,}0002040816\ldots;$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(1,4142857... + \frac{2}{1,4142857...}\right) = 1{,}41421356421\ldots; \qquad a_3^2 = 2{,}0000000052\ldots;$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(1,4142135... + \frac{2}{1,4142135...}\right) = 1{,}41421356237\ldots; \qquad a_4^2 = 2{,}0000000000\ldots.$$

Die weiteren Näherungswerte $a_5, a_6, \ldots$ unterscheiden sich in den angegebenen Dezimalstellen nicht mehr von $a_4$; wir brechen die Berechnung von Näherungswerten hier ab.

Zu **b)** Das Bildungsgesetz besteht hier in der Berechnungsvorschrift, wie man von einem Näherungswert $a_n$ zum nächsten Näherungswert $a_{n+1}$ kommt: $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$.

Ersetzt man übrigens in dieser Formel die Zahl 2 in der Klammer durch p, so erhält man Näherungswerte für $\sqrt{p}$ (Anfangswert beliebig $\neq 0$).

**Reelle Zahlenfolge**

Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ mit einem Bildungsgesetz heißt eine **reelle Zahlenfolge**, kurz **Folge**. Üblicherweise schreibt man eine Folge zwischen spitzen Klammern: $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\rangle$ oder kürzer $\langle a_n\rangle$.

Die einzelnen Zahlen werden **Glieder** der Folge genannt. $a_1$ heißt erstes Glied, $a_2$ zweites Glied, ..., $a_n$ n-tes Glied oder auch **allgemeines** Glied der Folge. Der Index gibt an, das wievielte Glied der Folge gemeint ist.

Ist die Anzahl der Glieder endlich, so heißt die Folge **endlich**, andernfalls **unendlich**.

*Anmerkungen:*

(1) Eine Folge kann auch als Funktion $y = f(n)$ aufgefasst werden mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ im Falle einer unendlichen Folge oder $D = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ im Falle einer endlichen Folge mit m Gliedern.

Man spricht auch von einer *diskreten* Funktion, weil die Definitionsmenge aus einzelnen, durch endliche Intervalle voneinander getrennten Zahlenwerten besteht. Der Gegensatz zu diskret ist kontinuierlich.

(2) Bei Anwendungsaufgaben beginnt der Zählindex n öfters bereits mit 0, sodass es also auch ein nulltes Glied $a_0$ gibt. Dies ist dann ausdrücklich angegeben.

(3) Beachte, dass bei einer Aufzählung der Folge die *Reihenfolge* wesentlich ist. Die Folge $\langle a_n\rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \ldots\rangle$ und die Folge $\langle b_n\rangle = \langle 1, 2, 4, 3, \ldots\rangle$ sind verschiedene Folgen!

Wesentlich für eine Folge ist ihr **Bildungsgesetz.** Dieses kann in Worten ausgedrückt sein (beispielsweise die Folge der Ziffern von $\pi$, also die Folge $\langle 3, 1, 4, 1, 5, \ldots\rangle$). Praktisch sind besonders zwei Arten eines Bildungsgesetzes von Bedeutung:

**a)** **Termdarstellung** einer Folge: Angabe eines Terms (einer "Formel"), wie das allgemeine Glied $a_n$ aus dem Index n berechnet werden kann.

**b)** **Rekursive Darstellung** einer Folge (rekursiv = zurücklaufend): Angabe, wie ein Folgeglied aus dem *vorhergehenden* Folgeglied oder aus mehreren *vorhergehenden* Folgegliedern berechnet werden kann.

Man sieht nun, dass die beiden HTL-Bücher schon eine Gemeinsamkeit haben: beide Schulbücher erklären das Bildungsgesetz – Beispiele dazu gibt es aber nur im Buch von Timischl. Es folgen im Buch von Timischl in der Einführung die Fibonacci – Zahlen, die Hantierung mit dem Taschenrechner „Voyage 200“, die graphische Darstellung einer Folge und auch schon Definitionen von Schranken. Zum Schluss des Einleitungskapitels steht eine Zusammenfassung der wichtigsten Punkte, die ich nun hier anfüge.

**Im Überblick: Einführung**

Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\rangle$, kurz $\langle a_n\rangle$, heißt reelle Zahlenfolge, kurz **Folge**. $a_n$ heißt n-tes Glied oder **allgemeines** Glied der Folge. Ist die Anzahl der Glieder endlich, so heißt die Folge **endlich**, andernfalls **unendlich**.

**Termdarstellung** einer Folge: Angabe eines Terms, wie $a_n$ aus n berechnet werden kann.
**Rekursive Darstellung** einer Folge: Angabe, wie ein Folgeglied aus dem *vorhergehenden* Folgeglied oder aus mehreren *vorhergehenden* Folgegliedern berechnet werden kann.

**Graphische Darstellung** einer Folge als Punkte auf der Zahlengeraden oder in einem rechtwinkligen Koordinatensystem:
n liegt auf der Abszisse ("x-Koordinate"), $a_n$ auf der Ordinate ("y-Koordinate").

$\langle a_n\rangle$ heißt **streng monoton wachsend**, wenn jedes Folgeglied $a_{n+1}$ **größer** als sein Vorgänger ist.
$\langle a_n\rangle$ heißt **streng monoton fallend**, wenn jedes Folgeglied $a_{n+1}$ **kleiner** als sein Vorgänger ist.

$\langle a_n\rangle$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl A gibt, sodass *alle* Glieder kleiner oder gleich A sind: $a_n \leqslant A, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ .
$\langle a_n\rangle$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl B gibt, sodass *alle* Glieder größer oder gleich B sind: $a_n \geqslant B, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ .

Man sieht jetzt schon sehr deutlich, dass die Bücher unterschiedlich vorgehen. Gemeinsamkeiten zu finden, ist wirklich sehr schwer. Aber nun haben wir bereits die Definitionen von monoton und Schranken, oder zumindest die Zusammenfassung bei Timischl. Da gebe ich nun im Anschluss dieselben Definitionen aus dem Buch von Schalke und Steiner – diese findet man aber nicht im Einführungskapitel, sondern als eigenes Kapitel, das erst später folgt. Es ist zumindest die Beschriftung für die Folge dieselbe.

Betrachten wir die Folge

| | |
|---|---|
| $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ | $\left\langle 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots \right\rangle$ |

so erkennen wir:

| | |
|---|---|
| Jedes Glied ist **größer** als das unmittelbar vorhergehende. So ist z. B. $2 > 1$, $3 > 2$ usw. | Jedes Glied ist **kleiner** als das unmittelbar vorhergehende. So ist z. B. $\frac{1}{10} < 1$, $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$ usw. |

Wegen dieser Eigenschaft spricht man von einer

| | |
|---|---|
| (streng) **monoton wachsenden Folge**. | (streng) **monoton fallenden Folge**. |
| **Definition:** Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton wachsend**, wenn jedes ihrer Glieder **größer** als das unmittelbar vorhergehende oder diesem gleich ist, d. h. wenn für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$ [2]. | **Definition:** Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton fallend**, wenn jedes ihrer Glieder **kleiner** als das unmittelbar vorhergehende oder diesem gleich ist, d. h. wenn für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \leq a_n$ [2]. |

Weitere Beispiele für

| | |
|---|---|
| monoton wachsende (steigende) Folgen: | monoton fallende Folgen: |
| $\langle a_n \rangle = \langle 1+2n \rangle = \langle 3, 5, 7, 9, \ldots \rangle$ | $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \right\rangle$ |
| $\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$ | $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27}, \ldots \right\rangle$ |

0 wird als **untere Schranke**, 1 als **obere Schranke** bezeichnet. Jede Zahl, die größer als eine obere Schranke B ist, ist gleichfalls eine obere Schranke. Entsprechendes gilt für untere Schranken.

Eine sogenannte **„beschränkte" Folge** (vgl. Definition in der Außenspalte) besitzt unendlich viele obere und untere Schranken.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **unbeschränkt**, wenn sie keine obere oder untere Schranken besitzt.

Beispiele für Folgen und deren obere bzw. untere Schranken:

(1) $\langle 5-3n \rangle = \langle 2, -1, -4, -7, -10, \ldots \rangle$, z.B. $B = 3$

(2) $\langle 2+3n \rangle =$ ..........................., z.B. $b = 4$

(3) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle =$ ..........................., z.B. $b = 0$, $B = 1$

**Definition:**

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **beschränkt**, wenn es zwei reelle Zahlen b und B gibt, so dass die Ungleichung $b \leq a_n \leq B$ für jedes Glied $\langle a_n \rangle$ der Folge erfüllt ist. b wird als **untere Schranke**, B als **obere Schranke** der Folge bezeichnet.

Die größte untere Schranke heißt **Infimum**.

Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum**.

Man sieht hier einen Unterschied: Infimum und Supremum werden nur bei Schalke erwähnt. Ansonsten sind die Definitionen ungefähr gleich. Es werden teilweise andere Beschriftungen verwendet. Bei Timischl sind keine Beispiele dazu zu finden, im Buch von Schalke schon.

Timischl hat anfangs nur Beispiele zum Bestimmen von Folgengliedern und ein Beispiel zum Aufstellen eines Bildungsgesetzes. Solche Beispiele gibt es im Schulbuch von Schalke und

Steiner nicht. Dafür dienen diese Beispiele zum Überprüfen von Schranken oder Monotonie, wie die nachstehende Abbildung zeigt. Es stehen – wie man hier sieht – auch Anleitungen, damit die Schülerinnen und Schüler sich auch selbst Gedanken machen können, falls es beispielsweise ein Lehrkörper nicht richtig an die Jugendlichen vermitteln kann. Das ist aber nicht bei jedem Beispiel so. Es ist eher Zufall, dass meine gewählten Beispiele nun alle eine Anleitung haben.

**34.** Infimum und Supremum der Folgen $\langle a_n \rangle$ sind zu ermitteln.

**a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+1}{3n-1} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n-3}{n+1} \right\rangle$ **d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{9n+5}{3n-2} \right\rangle$

**Anleitung:** Man berechne zunächst einige Glieder der Folge und weise ein Monotonieverhalten nach. Unter Beachtung des nachstehenden Satzes ist der gesuchte Wert zu ermitteln:

> Bei einer monoton wachsenden (fallenden) Folge ist das erste Glied zugleich die größte untere (kleinste obere) Schranke.

**35.** Es ist zu zeigen, dass es für die nachstehenden Folgen keine obere Schranke gibt.

**a)** $\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n+1}{2} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{3} \right\rangle$

**d)** $\langle a_n \rangle = \langle \sqrt{n} \rangle$ **e)** $\langle a_n \rangle = \langle 2^n \rangle$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle 1+\frac{n}{2} \right\rangle$

**Anleitung:** Man zeige, dass es für jede noch so große obere Schranke B jeweils eine Gliednummer $n \in \mathbb{N}^*$ gibt, sodass die Ungleichung $a_n > B$ gilt.

**36.** Man zeige, dass es für die nachstehenden Folgen keine untere Schranken gibt.

**a)** $\langle a_n \rangle = \langle -n^2 \rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1-n}{2} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1-3n}{3} \right\rangle$

**d)** $\langle a_n \rangle = \langle -\sqrt{n} \rangle$ **e)** $\langle a_n \rangle = \left\langle 1-\frac{n}{2} \right\rangle$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2-n}{3} \right\rangle$

**Anleitung:** Man zeige, dass es für jede noch so kleine untere Schranke b jeweils eine Gliednummer $n \in \mathbb{N}^*$ gibt, sodass die Ungleichung $a_n < b$ gilt.

Nun habe ich die Einführungen, die Monotonie und die Schranken abgeschlossen, es fehlt lediglich der Beitrag zu „Arithmetischen Folgen und Reihen“ aus dem Buch von Timischl und Kaiser. Es werden in diesem Schulbuch mehrere Beispiele vorgerechnet; und zwar sehr ausführlich. Das ist ein Pluspunkt für dieses Schulbuch, jedoch ist auch sehr viel Text vorhanden, was eher wieder ein Minuspunkt ist. Das aber nur nebenbei. Die arithmetische Folge wird gleich wie bei Schalke definiert und explizit ausgedrückt: $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Es gelingt trotz ausführlicherem Text aber eine übersichtlichere Darstellung der arithmetischen Reihe – diese wird auch bei Timischl „hergeleitet“, sogar auf demselben Weg, wie man im nachstehenden Scan sehen kann – nur dass Timischl mehr Text verwendet.

**Zahlenreihe**

Ist $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ eine Folge von n Gliedern, so nennt man die *Summe* $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ eine **endliche Reihe**.

Liegt einer Reihe eine *arithmetische* Folge zugrunde, so spricht man von einer **arithmetischen Reihe**.

Wir fragen nun nach dem Wert der Summe $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ einer arithmetischen Reihe von n Gliedern:

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ oder in umgekehrter Reihenfolge geschrieben:

$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$

Addition ergibt:

$2 \cdot s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1);$

Wir berechnen nun den Wert der geklammerten Summen:

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$

$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2\,d + a_n - 2\,d = a_1 + a_n$

usw.

Diese Summen, die n mal auftreten, sind stets gleich $a_1 + a_n$! Daher:

$2\,s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$ oder $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Berücksichtigt man noch die Formel für $a_n$, so erhält man zusammenfassend:

**Summe einer arithmetischen Reihe von n Gliedern:**

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ oder $s_n = \frac{n}{2} \cdot [2\,a_1 + (n-1)\,d]$

Man sieht hier auch, dass dieselben Formeln dafür in gleicher Schreibweise stehen. Es gibt auch hier im Anschluss gleich ein Tabellenausfüllbeispiel. Es folgen aber auch andere anwendungsorientierte Beispiele oder Aufgaben zum Beweisen, wie der folgende Scan aus dem Schulbuch von Timischl zeigt.

**1.15** Zeige, dass bei drei aufeinander folgenden Gliedern einer arithmetischen Folge die mittlere Zahl das arithmetische Mittel ihres Vorgängers und Nachfolgers ist.

**1.16** Zeige, dass $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ist.

**1.17** Eine Uhr schlägt die ganzen Stunden. Wie viele Schläge macht sie in 12 Stunden?

**1.18** Zwischen die Zahlen 12 und 68 sollen 6 Zahlen eingeschaltet werden, sodass eine arithmetische Folge entsteht. Wie lauten ihre Glieder und wie groß ist die Summe aller 8 Glieder?

**1.19** 30 Rundstäbe liegen parallel dicht nebeneinander. Darauf liegen, wie in Abb. 1.6 angedeutet, in Lücke 10 Lagen weiterer Stäbe. Wie viele Rundstäbe sind insgesamt gestapelt?

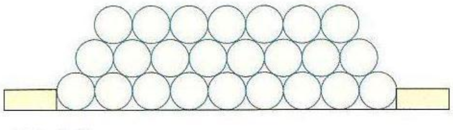
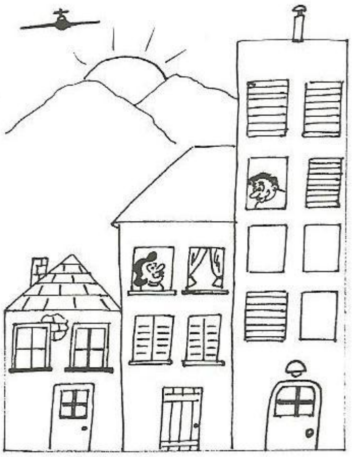


Abb. 1.6

„Geometrische Folgen und Reihen“ sind nun Thema in beiden Büchern. Jeder Autor gibt ein allgemeines Glied an und im Anschluss folgt die Summenformel einer geometrischen Folge. Diese wird in beiden Büchern gleich bewiesen. Im Buch von Timischl sind aber noch einige

Beispiele dazwischen vorgerechnet und nimmt deswegen mehr Platz in dem Buch ein. Das Schulbuch von Timischl finde ich zwar übersichtlicher, aber ich füge nun die Herleitung aus dem Buch von Schalke ein, da es hier einfach freundlicher für mich ist, etwas herauszuscannen, da nicht so viel Raum hier in der Arbeit eingenommen wird.



## 3. Geometrische Folgen

Die Folge $\langle 3, -6, 12, -24 \rangle$ ist eine geometrische Folge. Der Quotient q der Folge ist $-2$. Es gilt:

$$b_1 = 3$$
$$b_2 = b_1 q = 3(-2) = -6$$
$$b_3 = b_1 q^2 = 3(-2)^2 = 12$$
$$b_4 = b_1 q^3 = 3(-2)^3 = -24$$

Allgemein: $\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$

**Beispiel:**
Gegeben: geometrische Folge, $b_1 = 2$, $b_5 = 162$
Gesucht: q

**Lösung:**
$b_5 = b_1 q^4 \Leftrightarrow q = \pm\sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm\sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad q = \pm 3$

Ähnlich wie bei der arithmetischen Folge gibt es auch bei der geometrischen Folge eine allgemeine Summenformel:

$$\boxed{s_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

**Beweis:**
$s_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$
Wir multiplizieren diese Gleichung mit q und erhalten
$s_n q = b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n.$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich:
$s_n - s_n q = b_1 - q^n \Leftrightarrow s_n(1-q) = b_1(1-q^n) \Leftrightarrow s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Summe einer geometrischen Folge:

$$\boxed{s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Es ist günstig, die erste Formel für $q < 1$, die zweite Formel für $q > 1$ anzuwenden.

Für $q = 1$ sind die obigen Formeln nicht definiert, in diesem Fall gilt:

$$\boxed{s_n = n \cdot b_1}$$

Ein Unterschied ist doch zu finden im Vergleich zu Timischl. Timischl verwendet wie bei den arithmetischen Folgen statt „b“ den Buchstaben a für das Folgenglied.

Die Beispiele in beiden Büchern beginnen wieder mit Tabellen zum Ausfüllen wie vorher bei den Arithmetischen Folgen. Bei Timischl kommen dann einige Beispiele aus dem Finanzwesen oder Beispiele aus der Physik (Widerstände) hinzu. Im Schulbuch von Schalke und Steiner findet man Beispiele zu Zahlenfolgen, auch wenige aus dem Bereich des Geldwesens.

Im Anschluss nun kommt ein Scan aus dem Buch von Timischl, in dem ein Überblick über die Geometrischen Folgen zu finden ist, somit sieht man auch „a“ statt „b“ und im Anschluss die Tabelle zum Ausfüllen. Der übernächste Scan stammt aus dem Buch von Schalke und zeigt Zahlenfolgenbeispiele, welche im Buch von Timischl nicht zu finden sind.

### Im Überblick: Geometrische Folgen und Reihen

**Geometrische Folge $\langle a_n \rangle$:** $a_{n+1} = a_n \cdot q$ mit konstanter Zahl q; q heißt Quotient der geometrischen Folge.
Termdarstellung: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

**Summe einer geometrischen Reihe von n Gliedern** (Reihenglieder $a_1, a_2, \ldots$ bilden eine geometrische Folge):
$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ bzw. $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

**Normzahlen** sind näherungsweise Glieder geometrischer Folgen mit dem Anfangsglied 1 und dem Endglied 10. Es gibt vier sogenannte Grundreihen: R5, R10, R20 und R40 mit den "Stufensprüngen" q gleich: $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[20]{10}$ bzw. $\sqrt[40]{10}$; diese Folgen enthalten also 6, 11, 21 bzw. 41 Glieder.

**Aufgaben**

**1.25** Gib das allgemeine Glied $a_n$ folgender geometrischen Folge an:

**a)** $\langle 2, 6, 18, 54, \ldots \rangle$ **b)** $\langle 10;\ 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ \ldots \rangle$

**c)** $\langle \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots \rangle$ **d)** $\langle 4, \frac{4}{5}, \frac{4}{25}, \frac{4}{125}, \ldots \rangle$

**1.26** In der folgenden Tabelle sind Größen einer geometrischen Folge angegeben. Vervollständige die Tabelle!

| | $a_1$ | $a_n$ | q | n | $s_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | 0,5 | | 3 | 7 | |
| **b)** | | 25,6 | 2 | 8 | |
| **c)** | 40 | 0,3125 | | 8 | |
| **d)** | 100 | 0,78125 | 0,5 | | |
| **e)** | 0,1 | −204,8 | | 12 | |
| **f)** | 0,5 | | 2 | | 127,5 |

**17.** Die Summe der drei Glieder einer geometrischen Folge ist 63. Die Summe der ersten zwei Glieder verhält sich zur Summe der letzten zwei wie 1 : 4. Wie lautet die Folge?

**18.** Die Summe der drei Glieder einer geometrischen Folge ist 39. Die Summe ihrer Quadrate ist 741. Wie lautet die Folge?

**19.** Die Summe der drei Glieder einer geometrischen Folge ist 19, ihr Produkt ist 216. Wie lautet die Folge?

**20.** Die Zahl 111 soll so in drei Teile geteilt werden, dass die Teile eine geometrische Folge bilden und ihr Produkt 46656 beträgt. Wie lauten die drei Zahlen?

**21.** Drei Zahlen bilden eine arithmetische Folge mit der Summe 60. Vermindert man das zweite Glied um 8, so erhält man eine geometrische Folge. Wie lauten die drei Zahlen?

**22.** Drei Zahlen bilden eine geometrische Folge. Vermindert man das letzte Glied um 4, so erhält man eine arithmetische Folge. Vergrößert man in dieser Folge das erste Glied um 2, so entsteht eine geometrische Folge. Wie lautet die ursprüngliche geometrische Folge?

**23.** Ein Kapital ergibt in 8 Jahren bei einem Jahreszinssatz von 5 % samt Zinseszinsen den Betrag von 12468,— Euro. Wie groß war das Kapital am Beginn der 8 Jahre?

Es folgt nun in beiden Büchern das Kapitel „Konvergenz“. Auffallend ist, dass dieses Kapitel in beiden Büchern schon mal verschiedene Überschriften hat. Im Schulbuch von Timischl heißt es „Konvergenz unendlicher Folgen“, in dem zu Beginn der Begriff des Grenzwertes anhand eines Beispiels eingeführt wird. Danach kommt ein grün umrandeter Kasten, wie man im nachfolgenden Scan sieht, in dem die wichtigen Begriffe wie Limes, konvergent, Nullfolge und divergent eingeführt werden. Zuvor wird noch das Beispiel 1.20 beschrieben, das Folgen, die keinen Grenzwert besitzen, zeigt.

## Beispiel 1.20 : Folgen, die keinen Grenzwert besitzen

Untersuche, ob die Folge einen Grenzwert besitzt:

**a)** $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \right\rangle$ **b)** $\langle 2n - 1 \rangle$

**Lösung**

Zu **a)** $\left\langle 0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ -\frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ -\frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \dots,\ \frac{99}{100},\ -\frac{100}{101},\ \frac{101}{102},\ -\frac{102}{103},\ \dots \right\rangle$

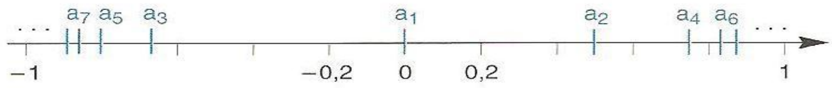



Abb. 1.17 Beispiel einer Folge, die keinen Grenzwert besitzt

Alle Glieder mit geradem Zählindex nähern sich beliebig der Zahl 1, die Glieder mit ungeradem Index beliebig der Zahl −1 (Abb.1.17). Es gibt aber keine Zahl, der schließlich *alle* Folgeglieder beliebig nahe kommen, daher hat diese Folge auch keinen Grenzwert.

Zu **b)** $\langle 2n - 1 \rangle = \langle 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \dots \rangle$.

Mit wachsendem n übersteigen die Folgeglieder jede noch so große Zahl. Damit gibt es auch hier keine Zahl, der schließlich alle Folgeglieder beliebig nahe kommen. Trotzdem schreibt man in diesem Fall symbolisch $\lim\limits_{n \to \infty} (2n - 1) = \infty$.

Eine Zahl g heißt **Grenzwert** oder **Limes** einer unendlichen Folge $\langle a_n \rangle$, wenn sich ihre Glieder unbegrenzt dieser Zahl nähern. Das bedeutet, dass fast alle ( = alle bis auf endlich viele) Folgeglieder der Zahl g so nahe kommen, wie man es nur wünscht.
Man sagt, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ gegen g **konvergiert** [5] und schreibt:

$\mathbf{a_n \to g}$ **für** $\mathbf{n \to \infty}$ oder $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{a_n = g}$.

Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, heißt **konvergent**, andernfalls heißt sie **divergent** [6].
Besitzt eine konvergente Folge den Grenzwert 0, so heißt sie **Nullfolge**.

Übersteigen fast alle Folgeglieder jede noch so große Zahl bzw. unterschreiten sie jede noch so kleine (negative) Zahl, so heißt die Folge $\langle a_n \rangle$ **bestimmt divergent**. Man schreibt:

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

Daher ist die Folge $\left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$ konvergent, während die Folgen $\left\langle (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} \right\rangle$ und $\langle 2n - 1 \rangle$ divergent sind, letztere ist bestimmt divergent.

Im Buch von Timischl geht es nun weiter mit vorgerechneten Aufgaben zu konvergenten und divergenten Folgen. Danach folgen die Grenzwertsätze für Folgen, die im Schulbuch von Schalk und Steiner, erst im nächsten Kapitel (6) zu finden sind. Die Autoren Schalk und Steiner geben zu Beginn ihres Konvergenz – Kapitels die Begriffe Nullfolgen, konvergent und Grenzwert, sowie die Begriffe „fast alle“ und „ε – Umgebung“. Die Einführung ist aber komplett unterschiedlich zum Schulbuch von Timischl, wie die nachfolgende Scans beweisen. Jedoch muss ich gestehen, dass diese Scans aus dem Schulbuch von Schalk und Steiner eher unübersichtlich sind. Ich finde die nachfolgenden Buchseiten zur Einführung in das Kapitel „Konvergenz“ für Schülerinnen und Schüler eher verwirrend, da zum Beispiel der Begriff des

Grenzwertes vor der „ε – Umgebung“ geklärt werden sollte, weil die Umgebung auf den Limes aufbaut.

Folgen wie (1) $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$, (2) $\left\langle \frac{1}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$ oder (3) $\left\langle \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\rangle = \left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$ heißen **Nullfolgen**, da sich die Glieder der angeführten Folgen mit wachsender Gliednummer immer mehr der Zahl Null nähern, ohne sie allerdings jemals zu erreichen.

Man sagt: Die Folgen **„konvergieren“** gegen Null bzw. die Folgen haben den **„Grenzwert“** Null.

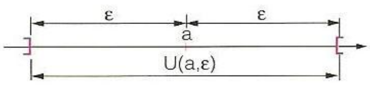
Wir wollen uns nicht mit einer nur vagen Umschreibung von für den Aufbau der Mathematik maßgeblichen Begriffen begnügen. Um kurz und anschaulich definieren zu können, muss zunächst der **„Umgebungsbegriff“** eingeführt werden:

**Definition:**
Unter der **ε-Umgebung**[1] der reellen Zahl a (abgekürzt: U (a,ε)) verstehen wir das offene Intervall $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$:

$$\boxed{U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}}$$

(1) $U\left(2, \frac{1}{2}\right) = \left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$ ist eine $\frac{1}{2}$-Umgebung von $a = 2$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

(2) $U\left(0, \frac{1}{100}\right) = \left]-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right[$ ist eine $\frac{1}{100}$-Umgebung von $a = 0$ mit $\varepsilon = \frac{1}{100}$.

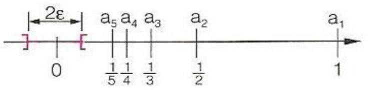



Nebenstehende Figur lässt uns eine zu

$$U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$

gleichwertige Umgebungsdefinition erkennen: $U(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}$

**Beispiel:**
Man berechne, wie viele Glieder der Folge mit dem Bildungsgesetz $\left\langle \frac{1}{n+1} \right\rangle$ außerhalb der Umgebung $U\left(0, \frac{1}{10}\right)$ liegen.




**Lösung:**
$\left\langle \frac{1}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\rangle$

Je größer die Gliednummer n ist, desto kleiner wird der Abstand zwischen 0 und einem Glied $a_n$, obwohl kein Glied der Folge den Wert 0 annimmt!

Aus $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| < \frac{1}{10}$ ergibt sich durch Äquivalenzumformung (Bitte selbstständig durchführen!) $n > 9$, d. h. die ersten neun Glieder liegen außerhalb, ab dem zehnten Glied liegen alle nachfolgenden Glieder innerhalb der Umgebung $U\left(0, \frac{1}{10}\right)$.

**Definition:**
Eine Aussage über **fast alle** Glieder einer unendlichen Folge ist eine Aussage, die nur für endlich viele Glieder dieser Folge **nicht** gilt.

Im obigen Beispiel gibt es außerhalb der ε-Umgebung nur **endlich** viele Elementwerte der Folge, nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_9$. Liegen in einem Intervall $I = ]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ unendlich viele Glieder einer Folge, außerhalb von I aber nur endlich viele, so sagt man in I liegen **fast alle** Glieder der Folge. In I liegen daher alle Glieder mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

Wählen wir im obigen Beispiel einen beliebig kleinen Wert für ε, etwa $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$, so liegen dennoch **fast alle** Glieder im Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[ = \left]-\frac{1}{1000000}, \frac{1}{1000000}\right[$.

Der Begriff der „ε – Umgebung“ kommt gar nicht im Schulbuch von Timischl vor. Es kommen auch keine Beispiele dazu vor, allerdings bei den Autoren Schalk und Steiner schon, wie der übernächste Scan zeigt. Ich finde aber sehr positiv, dass der Begriff „fast alle“ abgedruckt wird, wie man im obigen Scan sieht. Erst nun kommt endlich die Definition zu „Grenzwert“, wie man in folgender Abbildung sieht, obwohl diese schon für die Umgebung benötigt wird – wie zuvor erwähnt. Danach folgen die Beispiele zur Grenzwertberechnung und „ε – Umgebung“. Es werden anschließend die Grenzwertsätze eingeführt und danach folgen weitere Beispiele dazu, wie eben der übernächste Scan zeigt.

**Beispiel:**
Es ist zu zeigen, dass die Folge mit dem Bildungsgesetz $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ eine Nullfolge ist.

**Lösung:**

Eine Folge mit dem Grenzwert (vgl. nebenstehende Definition) $\alpha = 0$ nennt man **Nullfolge**.

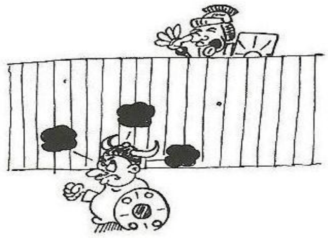
Wir müssen zeigen, dass in jeder $\varepsilon$-Umgebung fast alle Glieder der Folge liegen, d. h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Gliednummer N gibt, von der an alle Glieder im Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[$ liegen:

$|a_n - \alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, also N = erste ganze — und wegen $\varepsilon > 0$ auch natürliche — Zahl, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Für $\varepsilon = \frac{3}{500}$ wäre N somit gleich 167.

Für jede Zahl $\varepsilon > 0$, **und sei $\varepsilon$ noch so klein**, gibt es daher eine Platznummer N, ab der gilt: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, sofern $n \geq N$. Die Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ ist daher eine Nullfolge.

**Definition:**
Die Zahl $\alpha$ heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder $\varepsilon$-Umgebung von $\alpha$ fast alle Glieder der Folge liegen:
$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.



Betrachten wir nachstehende unendliche Folgen:

(1) $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\rangle$ (2) $\langle 2, 4, 8, 16, \dots \rangle$

$\langle 1{,}1,\ 1{,}01,\ 1{,}001, \dots \rangle$ $\langle 10, 100, 1000, 10\,000, \dots \rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in (1) und (2) angeführten Folgen?

Nun: Bei (1) handelt es sich um **konvergente Folgen**, bei (2) um **divergente Folgen** — vgl. die Definition in der Außenspalte.

Für den **Grenzwert einer konvergenten Folge** $\langle a_n \rangle$ verwendet man das Zeichen $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}$.

Will man z. B. ausdrücken, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\rangle$ den Grenzwert 0 hat, so schreibt man kurz: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0}$ (gesprochen: **Limes**[3] $\frac{1}{n}$ für n gegen unendlich gleich 0).

Folgendes ist wichtig: Da unter den Gliednummern einer Folge $\langle a_n \rangle$ kein größter Index $n^*$ auftreten kann, gibt es auch kein letztes Glied $a_n$ der Folge. Schließlich bedeutet die Schreibweise $n \to \infty$ ja nicht, dass die Folge den Index $\infty$ erreicht und dann abbricht.
Der Grenzwert $\alpha$ wird nie erreicht, er gehört im Allgemeinen selbst nicht zur Folge[4].

**Definition:**
Eine **unendliche Folge**, die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**[1].
Eine **unendliche Folge**, die keinen Grenzwert hat, heißt **divergent**[2].

Wie lässt sich die Konvergenz einer Folge bestimmen? Gefühlsentscheidungen sind in der Mathematik gefährlich. Nun gibt es den **„Hauptsatz über monotone Folgen“**, der in vielen Fällen hilfreich ist und durch nüchterne Klarheit besticht:

**Eine monoton wachsende (fallende) Folge in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent in $\mathbb{R}$, wenn sie nach oben (unten) beschränkt ist.**

Das bedeutet: Um die Konvergenz einer Folge zu zeigen genügt es, ihre Monotonie und ihre Beschränktheit nachzuweisen.

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert $\alpha$ der Folgen $\langle a_n \rangle$ zu ermitteln und anzugeben, ab welcher Gliednummer N alle Glieder der Folge in der Umgebung $U(\alpha, \varepsilon)$ liegen.

**43.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n+3} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{100}$

**44.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{1000}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{n+2} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{50}$

**45.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle 3 - \frac{1}{n+2} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{20}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{7n-1}{2n-2} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{100}$

**46.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-7}{3n-5} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{4}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n^2+3} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{10}$

**47.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{5n+30}{n^2-7} \right\rangle,\ \varepsilon = 1$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+1} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{100}$

**48.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+5n}{n^3+2n^2} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2^n}{3^n} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{1000}$

**49.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^2+(-1)^n \cdot 10n}{n^3} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{50}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right\rangle,\ \varepsilon = \frac{1}{3}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert der Folgen mit Hilfe der Grenzwertsätze zu berechnen, falls er existiert.

**50.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+1}{n^2} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+4n-8}{3n+5} \right\rangle$

**51.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2-1}{2n^2} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^3-3n^2+2n-1}{n^3+1} \right\rangle$

**52.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+3n-1}{n^3-2n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+5n-7}{5n^2-n+2} \right\rangle$

**53.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^2+2n+5}{n^3+n-7} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{-4n+3}{n^3+1} \right\rangle$

**54.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^3+2n^2-n+9}{4n^3+5n+13} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^4+7n^2}{n^5+3n^3+1} \right\rangle$

Solche Beispiele, wie hier aus dem Schulbuch von Schalk und Steiner, findet man bei Timischl et all nicht. Da wird eher Wert darauf gelegt, dass man Grenzwerte von Folgen mit Cosinus oder Wurzeln berechnen kann, wie der nächststehende Scan zeigt.

**1.75** Untersuche, ob die Folge konvergent ist:

**a)** $\langle \sqrt{n} \rangle$ **b)** $\langle \sin(n\pi) \rangle$ **c)** $\langle \cos(n\pi) \rangle$ **d)** $\langle \tan(n\pi) \rangle$

**e)** $\langle \cos^2(n\pi) \rangle$ **f)** $\langle 3 + 2(-1)^n \rangle$ **g)** $\left\langle \frac{1}{(-2)^n} \right\rangle$ **h)** $\langle n \bmod 2 \rangle$

**1.76** Bestimme, falls möglich, den Grenzwert der Folge:

**a)** $\left\langle \frac{2n-1}{n+1} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{2n-1}{n^2+1} \right\rangle$ **c)** $\left\langle \frac{n^3+n^2-1}{n^2+1} \right\rangle$ **d)** $\left\langle \frac{-n^4+2n^2+3}{2n^4+1} \right\rangle$

**e)** $\left\langle \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \right\rangle$ **f)** $\left\langle \frac{\sqrt{n}}{1+n} \right\rangle$ **g)** $\left\langle \frac{n}{1+\sqrt{n}} \right\rangle$ **h)** $\left\langle \frac{n}{1+n\sqrt{n}} \right\rangle$

**1.77** Bestimme, falls möglich, den Grenzwert der Folge:

**a)** $\left\langle \frac{n^2}{n-1} - n \right\rangle$ **b)** $\left\langle \frac{n^2}{n-1} + 2n \right\rangle$ **c)** $\left\langle \frac{n^2}{n-1} + \frac{n+1}{n} \right\rangle$ **d)** $\left\langle \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{n+1}{2n} \right\rangle$

**e)** $\left\langle \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right\rangle$ **f)** $\left\langle \frac{2}{n} + \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \right\rangle$ **g)** $\left\langle \frac{2-n}{n} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1} \cdot \frac{n}{n+2} \right\rangle$

Die Grenzwertsätze sind in beiden Schulbüchern gleich, sogar dieselbe Beschriftung ist zu erkennen. Ich stelle den Scan aus dem Schulbuch der Autoren Schalk und Steiner nun herein, weil mir dieser hier besser gefällt. Der einzige Unterschied liegt darin, dass es bei Schalk et al. 4 Sätze sind, bei Timischl nur drei. Schulbuchautor Timischl hat die Sätze über die Addition und die Subtraktion der Grenzwerte zusammengefasst mit dem Symbol ±. Im

Anschluss stehen eben die Beispiele bei Schalk, die oben gelb unterlegt sind. Bei Timischl et al. folgen dazu eigentlich keine Beispiele.

Zur Erleichterung der Berechnung von Grenzwerten bringen wir (ohne Beweise) die wichtigsten Regeln, die sogenannten **Grenzwertsätze**, die in Zeichen Folgendermaßen lauten:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$)

Zum Abschluss dieses für mich relevanten Kapitels kommen nun unendliche Reihen. Bei Schalk et al. kommen „Unendliche Reihen“ als 7. Kapitel, bei Timischl et al. sind diese Bestandteil des „Konvergenz“ – Kapitels.

Es wird in beiden Schulbüchern das Kapitel mit dem Beispiel $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ gestartet, um somit den Begriff der unendlichen Folge zu klären. Anschließend wird bei beiden die Summe berechnet. Timischl und auch Schalk verwenden dabei den Begriff der Partialsummen. Beide Schulbücher bringen eine „Herleitung“ für die Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe, beschreiben diese auch gleich – mit einem Unterschied: Der Startwert wird bei Timischl mit a gekennzeichnet, bei Schalk – wie der nachstehende Scan zeigt – mit $b_1$.

Die unendliche arithmetische Reihe ist divergent[1] und somit für unsere weiteren Betrachtungen bedeutungslos. Ähnlich verhält es sich mit der unendlichen geometrischen Reihe, wenn der Quotient $|q| \geq 1$ ist.

Was aber ist, wenn $|q| < 1$?

Wir formen $s_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ um.

$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q}$,

weil für $q < 1$ die Folge $q^n = q, q^2, q^3, \ldots$ eine Nullfolge ist.

> Die unendliche geometrische Reihe $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist ihre Summe $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Die Beispiele dazu werden ganz allgemein und leicht gehalten mit Aufgaben wie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots$ oder anderen Zahlenfolgen. Im Buch von Schalk und Steiner sind auch wieder eine Tabelle zum Ausfüllen und andere Beispiele zu unendlichen geometrischen Reihen zu finden.

**68.** Die nachstehende Tabelle ist zu vervollständigen:

| | $b_1$ | q | S | | $b_1$ | q | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | 1 | $\frac{2}{3}$ | | **b)** | $-5$ | 0,9 | |
| **c)** | 9 | $-\frac{1}{4}$ | | **d)** | $-6$ | $-\frac{2}{3}$ | |
| **e)** | | $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{2}$ | **f)** | | $\frac{1}{3}$ | 3 |
| **g)** | 24 | | 30 | **h)** | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{7}$ |

**69.** Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 10, ihr zweites Glied ist $\frac{5}{2}$. Reihe?

**70.** Die Summe der ersten zwei Glieder einer unendlichen geometrischen Reihe ist drei, die Summe der zwei folgenden Glieder $\frac{4}{3}$. Reihe und ihre Summe?

**71.** Das Produkt des 2. und 4. Glieds einer unendlichen geometrischen Reihe ist $\frac{81}{4}$, die Summe des 3. und 5. Glieds ist $-\frac{225}{32}$. Reihe und ihre Summe?

**72.** Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{3}{4}$ ist um 48 größer als ihr erstes Glied. Reihe und ihre Summe?

**73.** Die Summe einer mit $\frac{1}{2}$ beginnenden unendlichen geometrischen Reihe ist um $\frac{5}{12}$ größer als ihr Quotient. Reihe und ihre Summe?

**74.** In welcher unendlichen geometrischen Reihe mit der Summe $\frac{10}{9}$ ist jedes Glied 9-mal so groß wie die Summe aller folgenden Glieder?

**75.** Welchen Wert muss der Quotient einer unendlichen geometrischen Reihe haben, damit jedes Glied k-mal ($k \in \mathbb{N}^*$) so groß ist wie die Summe aller nachfolgenden Glieder?

**76.** Die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe ist 32, die Summe der Quadrate der Glieder $\frac{1024}{3}$. Wie lautet die Reihe?

**77.** Die folgenden periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche zu verwandeln!

**a)** $0{,}\dot{3}$ **b)** $0{,}\dot{7}$ **c)** $0{,}\dot{4}\dot{2}$ **d)** $0{,}\dot{7}\dot{6}$
**e)** $0{,}1\dot{2}$ **f)** $0{,}\dot{3}2\dot{4}$ **g)** $0{,}\dot{8}1\dot{3}$ **h)** $0{,}7\dot{1}3\dot{4}$

Bei den folgenden Aufgaben ist anzugeben, unter welchen Voraussetzungen die unendliche geometrische Reihe konvergiert. Man berechne ihre Summe.

**78. a)** $1 + x + x^2 + \ldots$ **b)** $(x+2) + x + \frac{x^2}{x+2} + \ldots$

**79. a)** $\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} + \ldots$ **b)** $x^2 - y + \frac{y^2}{x^2} - \ldots$

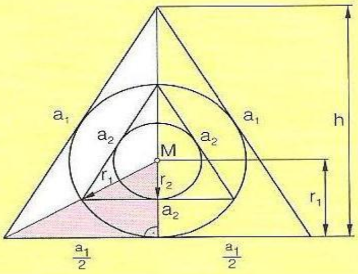
**80. a)** $(1-x) + \frac{1-x}{x} + \frac{1-x}{x^2} + \ldots$ **b)** $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \ldots$

**81. a)** $\lg x - \lg \sqrt{x} + \ldots$ **b)** $\lg \sqrt[5]{x^2} + \lg \sqrt[25]{x^4} + \ldots$

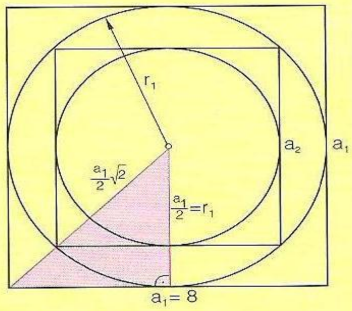
Danach folgen die mir so „wichtigen“ Beispiele zu Figurenfolgen. Im Schulbuch von Timischl sind dabei nicht sehr viele zu finden, unter anderem aber das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte oder die Aufgabe „Schlangenlinie“. Im Buch von Schalk und Steiner sind hier mehrere Aufgaben zu finden, auch dreidimensional, wie die nachfolgen Scans zeigen.

**90.** Aus den Höhen eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 5\,\text{cm}$ bildet man ein weiteres gleichseitiges Dreieck, aus dessen Höhen wieder eines usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 5 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Dreiecksflächeninhalte.

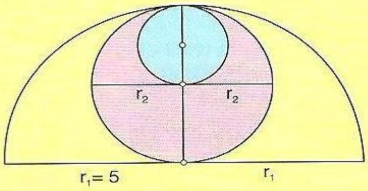
**91.** Einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben, diesem ein gleichseitiges Dreieck, diesem wieder ein Kreis usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 6 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Kreisumfänge (3) Dreiecksflächeninhalte (4) Kreisflächeninhalte.



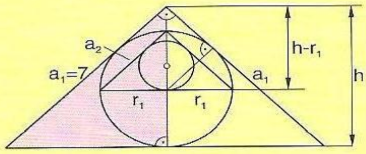

**92.** Einem Quadrat mit der Seitenlänge $a_1 = 8\,\text{cm}$, wird ein Kreis eingeschrieben, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Quadratumfänge (2) Kreisumfänge (3) Quadratflächeninhalte (4) Kreisflächeninhalte.




**93.** Einem Halbkreis mit dem Radius $r_1 = 5\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben, der Hälfte dieses Kreises wiederum ein Kreis usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 5 **b)** aller (1) Halbkreisumfänge (2) Halbkreisflächeninhalte.

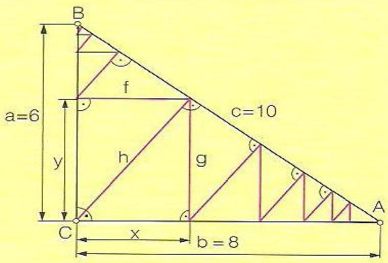



**94.** Einem gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreieck mit der Kathete $a_1 = 7\,\text{cm}$ wird ein Kreis eingeschrieben. Der Hälfte des Kreises wird wieder ein gleichschenkelig-rechtwinkeliges Dreieck eingeschrieben, diesem wieder ein Kreis usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Dreiecksumfänge (2) Kreisumfänge (3) Dreiecksflächeninhalte (4) Kreisflächeninhalte.
Anleitung: $h = \frac{7}{\sqrt{2}}$, $a_1 : h = (h - r_1) : r_1$, $a_2 = r_1\sqrt{2}$

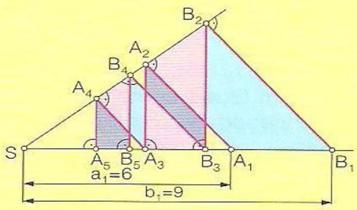



Es kommt zwar nicht das Beispiel „Schlangenlinie“, dafür Beispiele zum „Zickzackband“ – gleich in verschiedener Ausführung.

**96.** In einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$ fällt man vom Fußpunkt der Höhe auf c je ein Lot auf die beiden Katheten. Von den Fußpunkten dieser Lote fällt man wiederum jeweils ein Lot auf die Hypotenuse usw.
Man ermittle die Längen der dabei entstehenden Zickzacklinien, die beide beim Scheitel C des rechten Winkels beginnen und aus **a)** je 10 **b)** unendlich vielen Strecken bestehen sollen.

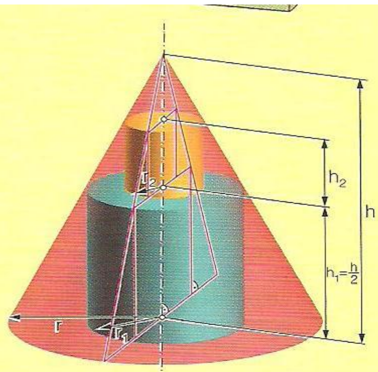



**97.** Die Punkte $A_1$ und $B_1$ liegen auf dem einen Schenkel des Winkels $\alpha = 40°$ und sind vom Scheitel S $a_1 = 6\,\text{cm}$ bzw. $b_1 = 9\,\text{cm}$ entfernt. Durch die beiden Punkte $A_1$ und $B_1$ errichtet man Lote auf dem zweiten Schenkel. Die Fußpunkte $A_2$ und $B_2$ dieser Lote sind vom Scheitel $a_2$ bzw. $b_2$ entfernt. Durch diese Punkte $A_2$ und $B_2$ werden auf dem ersten Schenkel wiederum Lote errichtet usw.
Man berechne die Summe der **a)** Längen der Strecken $A_iB_i$, $i \in \mathbb{N}^*$ und $i \leq 10$ **b)** Längen aller Strecken $A_iB_i$, $i \in \mathbb{N}^*$ **c)** Flächeninhalte (1) der ersten 10 (2) aller Trapeze, die von zwei zusammengehörigen Loten und den Winkelschenkeln gebildet werden.

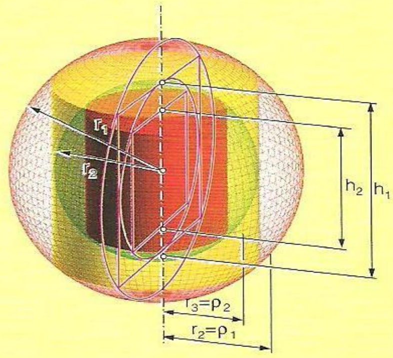


Zum Abschluss, obwohl es noch mehr Beispiele zu den Figurenfolgen geben würde, noch ein paar Beispiele aus dem dreidimensionalen Raum.

**105.** Einem Drehkegel mit dem Radius $r = 5\,\text{cm}$ und der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ wird ein nur halb so hoher gerader Kreiszylinder eingeschrieben. Dem Kegel über diesem Zylinder wird ein weiterer Zylinder eingeschrieben, der nur halb so hoch ist wie der erste usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Zylinderoberflächen (2) Zylindervolumina.

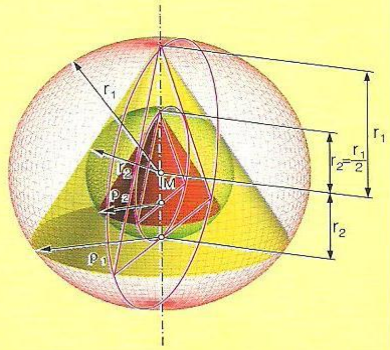



**106.** Einer Kugel mit dem Radius $r_1 = 4\,\text{cm}$ wird ein gleichseitiger Zylinder eingeschrieben, diesem wieder eine Kugel usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 6 **b)** aller (1) Kugeloberflächen (2) Kugelvolumina (3) Zylinderoberflächen (4) Zylindervolumina.




**107.** Einer Kugel mit dem Radius $r_1 = 4\,\text{cm}$ wird ein gleichseitiger Kegel eingeschrieben, diesem wieder eine Kugel usw.
Man berechne die Summe **a)** der ersten 4 **b)** aller (1) Kugeloberflächen (2) Kugelvolumina (3) Kegeloberflächen (4) Kegelvolumina.

**Anleitung:** Gleichseitiges Dreieck, $r_2 : r_1 = 1 : 2 \ldots$




Zum Abschluss bleibt mir zu sagen, dass beide Schulbücher ihre guten und weniger guten Seiten zu bieten haben, aber im Falle einer Entscheidung, würde meine Wahl auf das Schulbuch von Schalk und Steiner fallen. Der Grund liegt darin, dass – trotz der manchmal eher unübersichtlichen Einführung – mir die Beispiele einfach besser gefallen und die Schülerinnen und Schüler mehr gefordert werden. Ein weiterer Grund ist, weil Schalk und Steiner in ihrem Buch die „ε – Umgebung“ eingeführt haben und einfach mehr Aufgaben zu Figurenfolgen und Grenzwertberechnungen zur Verfügung stellen.

## 3. Schulbuchanalyse und –vergleich von Büchern für Handelsakademien

In diesem Abschnitt meiner Diplomarbeit untersuche ich zwei Schulbücher aus dem Bereich für Handelsakademien:

1) „Mathe mit Gewinn ² “ von Hinkelmann, Böhm, Hofbauer, Metzger-Schuhäker (ÖBV, 1. Auflage 2006)
2) „Mathematik für Handelsakademien neu 2. Teil“ von Brunner, Gleißner, Kunesch, Reichel (Österreichischer Gewerbeverlag, Auflage 1990)

Beide Bücher habe ich gewählt, weil diese in der Bibliothek der Fakultät für Mathematik aufgelegen sind. Ob diese beiden Schulbücher noch irgendwo im Einsatz sind, kann ich leider nicht sagen, würde mich aber interessieren.

In beiden Büchern nimmt das Kapitel der „Finanzmathematik“, die auf dem Kapitel der „Folgen und Reihen“ beruht einen sehr großen Platz ein. Im neuen HAK-Schulbuch von Hinkelmann behandelt das 4. von insgesamt 6 Kapiteln das Thema „Finanzmathematik“. Dieses Kapitel hat einige Unterpunkte wie „Einfacher Zins“, „Verzinsungsdauer“, „Zinseszinsrechnung“ und viele weitere kaufmännische Grundlagen. Erst später findet man noch im selben Kapitel einen Unterpunkt mit dem Titel „Folgen und Reihen“. Das wird aber sehr kurz gehalten und die kaufmännischen Begriffe gewinnen wieder die Oberhand.

In der alten Version eines HAK-Buches von Brunner gibt es ein eigenes, aber umfassenderes Kapitel über „Folgen und Reihen“, gefolgt von den Kapiteln „Zinseszinsrechnung“, „Rentenrechnung“, „Schuldtilgung“ und „Investitionsrechnung“.

Ein weiteres Merkmal, das mir ins Auge stach, ist, dass im Schulbuch von Brunner das Kapitel „Die Exponentialfunktion“ zu Beginn steht. Die Euler’sche Zahl wird auch über die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definiert ohne jemals etwas über den Begriff „Folge“ gehört zu haben.

Man merkt, dass in einer HAK nicht viel Wert auf Grenzwertberechnung oder Monotonie von Folgen gelegt wird, weil das nie erwähnt wird!

Bei genauerem Betrachten des älteren Schulbuches von Brunner et al. wird bei jedem Unterkapitel aus dem 6. Kapitel „Folgen und Reihen“ zuerst genau und auch mit Beispielen erklärt und im Anschluss gibt es Übungsbeispiele, jedoch nicht so massenhaft wie in anderen Büchern, beispielsweise Götz oder Schalk! Es stehen auch meistens die Lösungen dabei.

Das erste Unterkapitel im Buch von Brunner trägt den Titel „6.1. Begriff der Folge“, auch hier werden – wie in anderen Büchern – erste Folgenglieder ausgerechnet oder es werden Termdarstellungen von Folgen gesucht, jedoch heißt die Aufgabenstellung hier: „Ermitteln Sie die Abbildungsgleichungen für die Folgen“.

Das 2. Unterkapitel „6.2. Arithmetische Folgen und Reihen“ wird noch mal unterteilt in „6.2.1. Arithmetische Folgen“ und „6.2.2. Arithmetische Reihen“. Man führt auf die Begriffe hin und rechnet bei beiden Unterpunkten dann einige Beispiele zum besseren Verständnis, im Anschluss die Übungsbeispiele und die Lösungen dazu! Auch Textbeispiele von Zahlenfolgen, die eine arithmetische Folge bilden, sind zu finden. Man merkt deutlich, dass sich eigentlich nicht viel geändert hat in den 20 Jahren im Vergleich zu den AHS – oder HTL – Schulbücher. Man wird aber gleich einen drastischen Unterschied zum anderen von mir gewählten HAK – Schulbuch merken, aber dazu später!

Wie die Arithmetischen Folgen und Reihen ist auch das Kapitel „6.3. Geometrische Folgen und Reihen“ aufgebaut! Brunner und seine Kollegen blieben hier ihrer Linie treu. Es werden nur endliche geometrische Reihen erklärt und Beispiele dazu angeführt. Die unendlichen geometrischen Reihen scheinen in dieser alten Ausgabe nicht auf. Genauso wenig scheinen die Begriffe „ε-Umgebung“ oder „Monotonie“ von Folgen auf!

Es gibt aber ein weiteres Unterkapitel „6.4. Struktogramme von Folgen und Reihen“, welche auf einer Seite erklärt werden, aber dessen Sinn ich nicht ganz verstehe. Es werden drei Tafeln gezeigt und danach ist das Kapitel ohne Beispiele vorbei! Danach kommen die Kapitel über die Zinseszinsrechnung!

Im Vergleich dazu im Schulbuch von Hinkelmann und Böhm werden „Folgen und Reihen“ nur als Unterkapitel geboten. Im 4. Kapitel „Finanzmathematik findet man beim Unterpunkt „4.3 Rentenrechnung“ einen weiteren Unterpunkt „4.3.1 Folgen und Reihen“, deren Ausführung auf eine Seite begrenzt wird. Man erklärt die Begriffe der Folge, der arithmetischen Folge, der Reihe und der geometrischen Folge. Hinkelmann und Böhm geben auch die Summenformeln für arithmetische und endliche geometrische Folgen an. Gesamt sind 8 Beispiele dazu zu finden.

Auch in diesem neuen Schulbuch wird kein Wort über den Grenzwert, die Monotonie oder die „ε – Umgebung“ verloren. Für mich sind solche Begriffe aber grundlegend und allgemeinbildend, aber anscheinend nicht in einer HAK! Ich werde deswegen noch ein drittes Schulbuch untersuchen, damit ich wirklich sehe, ob diese Begriffe für die Handelsakademie komplett irrelevant sind!

3) „Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2“ von Steiner, Weilharter (Reniets Verlag, 4. Auflage, 2006)
4) „Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3“ von Steiner, Weilharter (Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, 4. Auflage, Nachdruck 2010)

Diese beiden Bücher habe ich mir noch ausgewählt, weil im Buch von Brunner zu wenig zu „Folgen und Reihen“ beschrieben war, damit ich eine ordentliche Abhandlung schreiben kann. Diese Bücher werden zum Beispiel an der Handelsakademie in Mistelbach verwendet! Aber warum erwähne ich beide Bücher?

Im Buch für die 2. Klassen einer Handelsakademie werden eine Einführung in das Kapitel „Folgen und Reihen“ gegeben und die Begriffe „Arithmetische Folge“ und „Geometrische Folge“ erläutert. Im Anschluss an dieses Kapitels werden „Wachstumsprozesse“ geliefert, obwohl die Exponentialfunktion wieder vor dem Kapitel der „Folgen und Reihen“ eingeführt wird! Danach kommt ein Kapitel zu „Finanzmathematik“, in dem „Zinsen und Zinseszinsen“, „Unterjährige Zinsen“, „Regelmäßige Zahlungen (Renten)“ und „Schuldtilgung“ besprochen werden!

Im Buch der 3. Klassen steht gleich zu Beginn ein Kapitel, das mir sehr am Herzen liegt: „Zahlenfolgen – Grenzwert – Stetigkeit“. Es wird dabei über Konvergenz, Monotonie, Grenzwert und auch über die „ε – Umgebung“ gesprochen. Im Anschluss an dieses Kapitel findet man die Kapitel „Differenzialrechnung“, „Integralrechnung“, „Kosten- und Preistheorie“ und „Finanzmathematik“. Also auch hier wird wieder besonderer Wert auf das Thema „Finanzmathematik“ gelegt, das für eine Handelsakademie einen zentralen Bereich in der Mathematik darstellt, aber auf „Folgen und Reihen“ aufbaut!

Nun zur genaueren Betrachtung. In beiden HAK – Schulbüchern wird zuerst erklärt und es werden wichtige Begriffe beschrieben und einige Beispiele zum Festigen des Lernstoffes gegeben! Zu Beginn wird – wie auch bei anderen Schulbüchern – in der Einführung ein „Bildungsgesetz“ für verschiedene Folgen erklärt, jedoch Beispiele gibt es hierzu keine. Weiters werden im Einführungskapitel auch die Begriffe „explizite und rekursive Darstellung“ und „unendliche Folge“ erklärt. Danach wird im 2. Abschnitt die „Arithmetische Folge“ beschrieben, samt Summenformel und 8 Rechenaufgaben. Davor sind 2 Beispiele durchgerechnet worden, damit Schülerinnen und Schüler besser verstehen können. Selbiges gilt auch für das 3. Kapitel „Geometrische Folgen“ – kurz Theorie, Summenformel, 3 durchgerechnete Aufgaben und 5 Beispiele zum Selbstlösen.

Im Schulbuch für die 3. HAK wird beim Fortsetzungskapitel für „Folgen und Reihen“ mit dem Titel „Zahlenfolgen – Grenzwert – Stetigkeit“ im Unterpunkt „1. Allgemeines über Zahlenfolgen“ fast genau dasselbe geliefert, das schon im 2. Buch erläutert war. Im Punkt 2 „Monotone und beschränkte Folgen“ werden die Begriffe „monoton fallend“, „monoton wachsend“, „beschränkt“, „untere Schranke“ und „obere Schranke“ erklärt und durch Übungsbeispiele vertieft.

Abschnitt 3 „Grenzwert – Konvergenz – Divergenz“ beinhaltet Erklärungen und Definitionen zu den Begriffen „Nullfolge“, „ε – Umgebung“, „fast alle“, „Grenzwert“, „konvergent“ und „divergent“. Es folgen nur wenige Beispiele dazu, weil im Kapitel 4 „Grenzwertsätze“ einige Grenzwertberechnungsregeln angegeben werden. Danach werden einige Beispiele zu Monotonie und „ε – Umgebung“ gegeben.

In Kapitel 5 „Unendliche Reihen“ wird der Begriff „unendliche Reihe“ erklärt, sprich in welchen Fällen die Summe einer solchen Reihe divergiert und in welchen konvergiert. Es wird auch erwähnt, dass eine unendliche arithmetische Reihe divergiert und dass eine unendliche geometrische Reihe nur konvergiert, wenn der Betrag von q kleiner als 1 ist! Es kommen wieder 3 vorgerechnete Beispiele zu unendlichen Reihen, in denen gezeigt wird, ob die Summe der Reihe konvergent oder divergent ist. Im Anschluss daran findet man das Beispiel der Schlangenlinie – vorgerechnet! Danach kommen 23 Beispiele zu unendlichen Reihen, aber keine weitere Aufgabe zu Figuren wie etwa der Schlangenlinie.

Im Buch 3 von Steiner und Weilharter geht es mit dem Kapitel „6. Grenzwert reeller Funktionen – Stetigkeit“ weiter. Das Kapitel handelt über Stetigkeit, Definitionslücken und Polstellen. Es wird auch der Begriff der Asymptoten erklärt! Dies ist aber schon eine Vorbereitung auf das nächste große Kapitel der Differentialrechnung, in dem die Begriffe der Stetigkeit und auch Polstellen, bzw. Asymptoten für die Kurvendiskussionen benötigt werden, aber keine Relevanz für meine Diplomarbeit haben.

Bei der genaueren Analyse dieser vier Schulbücher werde ich das Buch „Mathe mit Gewinn²“ von Hinkelmann et all vernachlässigen, weil die für mich wichtigen Kapitel über „Umgebungen“ und „unendliche Folgen“ nicht vor kommen. In diesem Schulbuch wird nur in nicht einmal zwei Seiten über „Folgen und Reihen“ gesprochen. Es werden die Definitionen zu arithmetischer und geometrischer Folge gegeben und danach die Summenformeln „hergeleitet“, wie die nachstehenden Scans zeigen.

### 4.3.1 Folgen und Reihen

Um die typischen Aufgabenstellungen der Rentenrechnung mathematisch möglichst einfach darstellen zu können, müssen wir uns zuvor noch mit Folgen und Reihen befassen.

Vielleicht kennst du „Folgen" bereits aus Rätselheften, in denen oft mehrer Zahlen vorgegeben sind, zu denen die nahe liegende Fortsetzung zu finden ist. Dazu benötigst du das so genannte Bildungsgesetz der Folge: Du musst dir also überlegen, wie du von einer Zahl der Folge (auch Folgenglied genannt) zum nächsten Glied der Folge kommst.

> Eine geordnete Anordnung von Zahlen, die bestimmte Eigenschaften gemeinsam haben, nennt man **Folge**.

Wir wollen uns hier nur mit zwei ganz einfachen Bildungsgesetzen beschäftigen:

Gegeben sei eine Zahlenfolge 1, 3, 5, 7, ... Wie sieht das Bildungsgesetz dieser Folge aus?

Offenbar unterscheiden sich die Glieder der Folge immer um denselben Wert (nämlich 2), man gelangt also zum nächsten Glied, indem man zum vorherigen Folgenglied 2 addiert. Bezeichnet man die einzelnen Glieder der Folge mit $a_i$ (also $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ usw.), so kann man allgemein sagen: $a_{i+1} = a_i + 2$ ($i \in \mathbb{N}^*$).

> Folgen – meist geschrieben als $<a_i>$ – bei denen die Differenz zweier benachbarter Glieder konstant ist, nennt man **arithmetische Folgen**.
>
> Sie gehorchen dem Bildungsgesetz $a_{i+1} = a_i + d$ ($i \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{R}$).

**4.98** Überlege dir, warum für arithmetische Folgen jedes beliebige Glied $a_n$ mit der Formel $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ berechnet werden kann.

**4.99** Erkläre mit eigenen Worten folgenden Zusammenhang zwischen Folgengliedern einer arithmetischen Folge und begründe, warum dieser Zusammenhang richtig ist:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Die wohl einfachste arithmetische Folge lautet 1, 2, 3, 4, ... bzw. allgemein $a_n = a_{n-1} + 1$ mit $a_1 = 1$.

Carl Friedrich Gauß hatte als kleiner Junge die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er musste also die ersten 100 Glieder dieser Folge zusammenzählen.

> Unter einer **Reihe** von Zahlen versteht man die Folge $<s_n>$ der Teilsummen $s_n$ der Folge $<a_i>$,
>
> wobei $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ bzw. in verkürzter Schreibweise: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Gauß sollte also das 100. Glied der arithmetischen Reihe zur Folge $<a_n> = 1 + n$ berechnen. Er berechnete die Summe der Zahlen von 1 bis 100 im Kopf und „erfand" dabei folgende Formel:

Allgemeine **Summenformel für arithmetische Reihen**

$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$ bzw. $s_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d)$

**4.100** Berechne mithilfe dieser Formeln das Ergebnis der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 und überprüfe das Ergebnis mittels elektronischer Hilfsmittel.

**4.101** Suche im Internet die Geschichte von Gauß und seiner arithmetischen Reihenformel und auch den dazugehörigen Beweis. Versuche anschließend den Beweis selbstständig durchzuführen.

Folgen, bei denen man von einem Glied zum nächsten durch Multiplikation derselben Zahl gelangt, nennt man **geometrische Folgen.**
Sie gehorchen dem Bildungsgesetz $b_{i+1} = b_i \cdot q$ ($i \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{R}$)

**4.102** Überlege, warum für geometrische Folgen jedes beliebige Glied $b_n$ mit der Formel $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ berechnet werden kann.

**4.103** Erkläre mit eigenen Worten folgenden Zusammenhang zwischen Folgengliedern einer geometrischen Folge und begründe, warum dieser Zusammenhang richtig ist: $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$.

**4.104** Gegeben ist die geometrische Folge mit $b_1 = 500$ und $q = 1{,}031\,25$. Schreib die ersten 20 Glieder dieser Folge auf. Denk dabei an die exponentiellen Wachstums- und Abnahmeprozesse zurück und erinnere dich an deren rekursive Darstellungsform. Deine technischen Hilfsmittel werden dir bei der Lösung der Aufgabe helfen.

In Anlehnung an die arithmetische Reihe versteht man unter der geometrischen Reihe die Folge der Teilsummen $<s_n>$ einer geometrischen Folge $<b_i>$. Ein kleiner Trick wird uns helfen, eine Formel für $s_n$ (das ist die Summe der ersten $n$ Glieder von $<b_i>$) zu entwickeln:

Für $s_n$ gilt: $s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1}$

Nun der Trick: Man multipliziert diese Gleichung mit $q$ und zieht vom Ergebnis die obige Zeile ab:

$s_n \cdot q = q \cdot (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1}) = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^n$

$s_n \cdot q - s_n = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \ldots + b_1 \cdot q^n - (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \ldots + b_1 \cdot q^{n-1}) = b_1 \cdot q^n - b_1$ (Warum?)

Jetzt müssen wir nur noch $s_n$ und $b_1$ herausheben und nach $s_n$ auflösen und schon sind wir am Ziel. Aus $s_n \cdot (q-1) = b_1 \cdot (q^n - 1)$ folgt:

Allgemeine **Summenformel für geometrische Reihen**: $s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \neq 1)$

**4.105** Bestimme den Wert von $s_{20}$ aus Aufgabe 4.104.

Mehr steht zu Folgen und Reihen nicht im Schulbuch von Hinkelmann et all. Es werden auch ganz kurze Beispiele dazu gegeben, aber sonst findet man in diesem Buch nichts zu „Folgen und Reihen", das für meine Diplomarbeit relevant wäre. Finanzmathematik ist nämlich nicht mein Thema und das hat bei Hinkelmann et al. die Hauptgewichtung. Das ist für eine Handelsakademie auch wertvoll und wichtig, aber dann wundert es mich, warum die anderen HAK-Schulbücher und sogar das alte Buch aus dem Jahr 1990 ein eigenes Kapitel zu „Folgen und Reihen" haben. Wie man aber gleich sehen wird, werden nur der Begriff der Folge, die arithmetische Folge, geometrische Folge und ihre Reihen eingeführt. Von „ε – Umgebungen" oder Grenzwerten findet man auch in der Alt-Ausgabe von Brunner et all nichts.

Die Einführung der Folgen im Schulbuch von Brunner ist eher kurz und nicht ganz einleuchtend – Folgen werden über die natürlichen Zahlen eingeführt. Zum Schluss steht dann eine allgemeine Form einer Folge und die Folge $a_k$ wird beschrieben durch eine Abbildungsgleichung. Wie man im nachfolgenden Scan erkennen kann, sind auch die Übungsbeispiele dazu nicht allzu schwer.

In der Folge $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right\rangle$ ist die Abbildungsvorschrift leicht zu erkennen: Den natürlichen Zahlen werden die reziproken Werte zugeordnet (siehe Abb. auf Seite 125 unten).

Wir können daher schreiben: $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle_5$

Eine Folge ist allgemein gegeben durch:

$\langle a_k \rangle_n = \langle f(k) \rangle_n \quad (k \in N_n)$

Dabei bedeutet $n$ die Anzahl der Glieder und $a_k = f(k)$ die Abbildungsgleichung. In unserem Beispiel ist $f(k) = 1/k$ und $n = 5$.

**Weitere Beispiele:**

$$\left\langle \frac{k+1}{k} \right\rangle_4 = \left\langle 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \right\rangle, \left\langle \frac{3^k}{k+3} \right\rangle_5 = \left\langle \frac{3}{4}, \frac{9}{5}, \frac{9}{2}, \frac{81}{7}, \frac{243}{8} \right\rangle$$

Zur Folge $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10} \right\rangle$ soll die Abbildungsgleichung gefunden werden! In den Nennern der einzelnen Glieder der Folge stehen die geraden Zahlen. Wir schreiben daher für die Nenner $2k$. Die Zähler der Brüche sind jeweils um 1 kleiner als die Nenner, daher: $2k - 1$. Somit erhalten wir:

$$\left\langle \frac{2k-1}{2k} \right\rangle_5$$

**Übungsbeispiele:**

6.1.1. Schreiben Sie die Folgen vollständig an:

a) $\left\langle \frac{k}{k+1} \right\rangle_4$ c) $\langle k^2 \rangle_8$ e) $\left\langle \frac{3k-1}{k^2} \right\rangle_5$ g) $\left\langle \sqrt[k]{k} \right\rangle_4$

b) $\left\langle \frac{k+2}{2k} \right\rangle_6$ d) $\left\langle \frac{x^2}{k+2} \right\rangle_3$ f) $\langle 3 \rangle_3$ h) $\left\langle \frac{2^{k-1}}{k} \right\rangle_5$

6.1.2. Ermitteln Sie die Abbildungsgleichungen für die Folgen

a) $\langle 1, 4, 7, 10 \rangle$

b) $\langle 2, 6, 10, 14, 18 \rangle$

c) $\left\langle 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3} \right\rangle$

Anleitung: $\left\langle \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6} \right\rangle$

d) $\left\langle \frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25} \right\rangle$

e) $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{8}{5}, \frac{8}{3} \right\rangle$

f) $\langle 0, 4, 18, 48, 100 \rangle$

Anleitung: $\langle 0 \cdot 1, 1 \cdot 4, 2 \cdot 9, \ldots \rangle$

Im Vergleich dazu ist die Einführung im Schulbuch „Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2“ von Steiner und Walharter übersichtlicher. Hier wird ein Bildungsgesetz gesucht, dieses wird mit einem Zahlenrätsel eingeführt und es werden die wichtigsten Definitionen zu „Folge“, „arithmetische Folge“ und „geometrische Folge“ gegeben. Gleich nach der Einführung beginnt das Kapitel über „Arithmetische Folgen“. Um in meinem 4. Kapitel eine vernünftige Gegenüberstellung aller Schultypen geben zu können, folgen nun die Scans aus dem Schulbuch von Steiner und Weilharter, in denen man auch sieht, dass die Summenformel für die arithmetische Reihe hergeleitet wird.

Aus einer Rätselzeitschrift:

**2 4 8 ?**

Welche Zahl folgt als nächste? Dieses Rätsel ist gar nicht so einfach! Denn ein „logisches“ Argument, welche Zahl für das rote Fragezeichen zu setzen ist, gibt es nicht.

Bei den üblichen Zahlenrätseln kann man im Allgemeinen folgende Begründung geben: Die Reihenfolge der Zahlen gehorcht einer bestimmten Funktionsgleichung, in das die natürlichen Zahlen — meistens mit 1 beginnend — eingesetzt werden.

So liefert z. B. die Gleichung $y = 2x + 1$ die Zahlen

$$3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \ \dots \quad \text{für } x \in \mathbb{N}^*.$$

Oder für $y = x^2$ erhalten wir

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \ \dots \quad \text{für } x \in \mathbb{N}^*.$$

Es gilt also — durch Probieren oder Intuition — eine Funktionsgleichung, ein **Bildungsgesetz** zu finden.

Für unser eingangs gebrachtes Problem gibt es unter diesem Gesichtspunkt beliebig viele Lösungen:

$$16 \ \dots\dots \ \text{für das Bildungsgesetz } y = 2^x,\ x \in \mathbb{N}^*$$

$$14 \ \dots\dots \ \text{für das Bildungsgesetz } y = x^2 - x + 2,\ x \in \mathbb{N}^*$$

Nach dem Ausflug in die Rätselecke wollen wir uns mit dem für die Mathematik Wesentlichen befassen. Bei unserem Rätsel 2 4 8 ? wurden Zahlenwerte in einer bestimmten Reihenfolge aneinander gesetzt.

In der Mathematik spricht man von einer **„Zahlenfolge“** und schreibt die Glieder der Folge in Winkelklammern.

Z. B.: $\langle 2, 4, 8, 16, 32, 64\rangle$, $\langle 3, 15, 2, 10, 1\rangle$, $\langle 1, 2, 3\rangle$ usw.

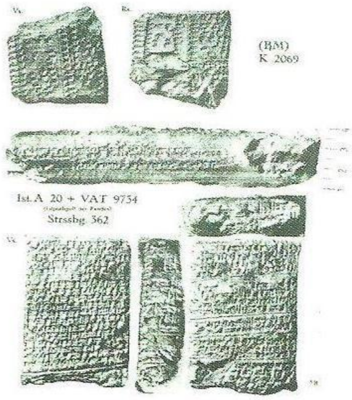
allgemein: $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\rangle$

Man bezeichnet $a_1$ als **Anfangsglied** und $a_n$ als **n-tes Glied** der Folge.

Die Darstellung einer Folge durch einen Funktionsterm wird **explizite Darstellung** genannt.

Beschreibt man jedoch eine Folge durch die Abhängigkeit zwischen den Folgengliedern, spricht man von einer **rekursiven Darstellung**.

Zahlenfolgen finden sich bereits auf den babylonischen Tontafeln, die vor vier Jahrtausenden entstanden sind. Das folgende Foto zeigt eine solche Tafel mit mathematischem Keilschrift-Text aus dem 14. Jahrhundert v. Chr., der am Hof des Assur-Tempels gefunden wurde. Auf ihm sind die Quadratzahlen von 1 bis 18 noch erhalten. Die Tafelgröße lässt vermuten, dass die Zahlenfolge ursprünglich bis $30^2$ gereicht hat.
1 4 9 16 … 289 324 …




Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Elemente einer **Zahlenmenge** angeschrieben werden, z. B.: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$ usw.
Wenn man aber die Elemente in einer bestimmten Reihenfolge anordnet, spricht man von einer **Folge**.

**Definition:**

Eine **unendliche (endliche) Folge** ist darstellbar durch eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}^*$ (die Menge $\{1, 2, 3, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$) ist.

**Definition:**

Eine **arithmetische Folge (AF)** ist eine Folge, bei der die Differenz zweier Nachbarglieder konstant ist.

Warum spricht man von einer „arithmetischen" Folge? Nun: Jedes „innere" Glied einer arithmetischen Folge ist das **arithmetische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

**Definition:**

Eine **geometrische Folge (GF)** ist eine Folge, bei der der Quotient zweier Nachbarglieder konstant ist.

Der Betrag von jedem „inneren" Glied einer geometrischen Folge ist das **geometrische Mittel** der Beträge seiner beiden Nachbarglieder:

$$\boxed{|b_n| = \sqrt{|b_{n-1}| \cdot |b_{n+1}|}}$$

Betrachten wir die nachstehenden Zahlenfolgen:

(1) $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$
$\langle 2, 4, 6, 8, 10\rangle$
$\langle 2, 0, -2, -4, -6\rangle$

(2) $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32\rangle$
$\langle 8, 4, 2, 1, 0{,}5, 0{,}25\rangle$
$\langle 1, -2, 4, -8, 16, -32\rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in (1) und den in (2) angeführten Folgen?

Offensichtlich bestehen gewisse Abhängigkeiten zwischen den Folgengliedern:

— In (1) liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Addition einer konstanten Größe entsteht. (Arithmetische Folgen!)

— In (2) liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entsteht. (Geometrische Folgen!)

Arithmetische Folge: $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d}$

Geometrische Folge: $b_1 \xrightarrow{\cdot q} b_2 \xrightarrow{\cdot q} b_3 \xrightarrow{\cdot q} b_4 \xrightarrow{\cdot q} b_5 \xrightarrow{\cdot q}$

Die Glieder einer endlichen Folge können zu einer (nicht ausgerechneten) Summe zusammengefasst werden. Man spricht dann von einer **Reihe**.

Anders formuliert: Ein Term der Gestalt $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ heißt **endliche Reihe** mit k Gliedern,

z. B.: (1) $2+4+8+16+32+64$ (2) $2-2+2-2+2-2$
(3) $1+0{,}5+0{,}25+0{,}125$ (4) $1+2+3+4$

Es gibt auch **unendliche Reihen** (z. B.: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$ ). Man überlegt sich leicht, dass diese unendliche Reihe sogar eine Summe hat, nämlich 1. Man denke sich ein Blatt Papier zerschnitten in die Hälfte, geviertelt usw. und addiere alle Teile.

## 2. Arithmetische Folgen

Die Folge $\langle 2, 5, 8, 11\rangle$ ist eine arithmetische Folge. Die Differenz d der Folge ist 3. Es gilt:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = 2 + 6 = 8$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11$$

Allgemein: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d}$ (explizite Darstellung)

Die **rekursive Darstellung** einer arithmetischen Folge lautet allgemein:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$$

**Beispiel:**
Gegeben: arithmetische Folge $a_1 = 4$, $d = 2$
Gesucht: $a_6$

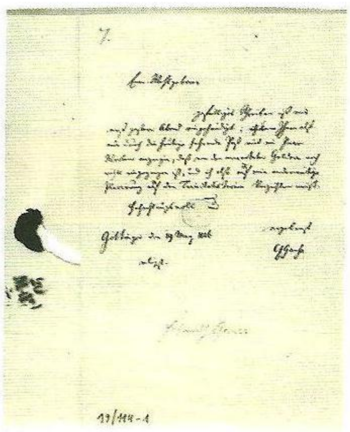
**Lösung:**
$a_6 = a_1 + 5d = 4 + 10 = 14$ $a_6 = 14$

Im Anschluss daran folgt bei Steiner und Weilharter die Herleitung der Summenformel der arithmetischen Reihe, wie der nächste Scan zeigt.

Eine oft wiederholte Anekdote berichtet, dass dem neunjährigen **Carl Friedrich GAUSS** in der Grundschule die Aufgabe gestellt wurde, alle ganzen Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Innerhalb sehr kurzer Zeit hatte GAUSS das richtige Ergebnis 5050 durch folgende Überlegung herausgefunden:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +2 \\ +3 \\ +4 \\ \vdots \\ +97 \\ +98 \\ +99 \\ +100 \\ \hline 5050 \end{array} = 50 \cdot 101 \qquad \underbrace{101+101+101+101+\cdots}_{\text{50 Summanden}}$$

Carl Friedrich GAUSS (1777—1855)



Dieser Gedankengang findet auch Anwendung bei der Ableitung der **Summenformel** für eine endliche arithmetische Folge (AF).

Bezeichnet man mit $s_n$ die Summe der ersten n Summanden einer arithmetischen Folge, so gilt:

$$\begin{array}{l} s_{100} = 1+2+\cdots+100 \\ \quad 1+100 = 101 \\ \quad 2+99 = 101 \\ \quad 3+98 = 101 \\ \quad \cdots\cdots \\ \quad 99+2 = 101 \\ \quad 100+1 = 101 \\ \hline s_{100}+s_{100} = 2s_{100} = 101 \cdot 100 \\ \quad s_{100} = \frac{100}{2} \cdot 101 = 5050 \end{array}$$

Allgemeine Herleitung:

$$\left.\begin{array}{l} s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \\ s_n = a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \end{array}\right\} +$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n) = n \cdot (a_1+a_n)$$

$$2s_n = n \cdot (a_1+a_n)$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1+a_n)$$

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1+a_n)}$$

Summe einer arithmetischen Folge:

$$\boxed{\begin{array}{l} s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1+a_n) \text{ bzw.} \\ s_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d] \end{array}}$$

Die Summe einer arithmetischen Folge mit n Gliedern ist gleich dem n-fachen arithmetischen Mittel aus dem ersten und dem letzten Glied der Folge.

Im Anschluss daran folgen vorgerechnete Beispiele. Für mich interessanter ist jedoch der Vergleich zum älteren Schulbuch von Brunner et al.: Die arithmetische Folge wird gleich wie bei Steiner und Weilharter eingeführt – nur ohne Zahlenbeispiel. Auch die Schreibweise ist dieselbe, wie der nachstehende Scan aus dem Buch von Brunner zeigen wird.

Es ist leicht zu beweisen, daß die erste Differenzfolge einer arithmetischen Folge immer konstant ist, denn man erhält:

$a_{k+1} - a_k = [d \cdot (k+1) + e - (d \cdot k + e)] = d$

Man nennt **d** die **Differenz** der arithmetischen Folge.

Aus $a_{k+1} = a_k + d$ erhalten wir für

| | |
|---|---|
| $k = 1$ | $a_2 = a_1 + d$ |
| $k = 2$ | $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ |
| $k = 3$ | $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ |
| $k = n - 1$ | $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \qquad n \in N_n}$ |

Die Beispiele dazu sind im Buch von Brunner et al. ganz normal. Man soll Folgenglieder ausrechnen oder Bildungsgesetze aufstellen, auch wenn diese hier nicht so heißen, wie der folgende Scan zeigt.

6.2.1.12. $a_{15} = 32$, $d = 3$. Wie groß ist $a_{21}$?

6.2.1.13. Bestimmen Sie die arithmetischen Folgen für folgende Funktionen:

a) $y = 5 - 3x,\ x \in N_3$

b) $y = 4x + 1,\ x \in N_3$

c) $y = \frac{x}{2} - 3,\ x \in N_4$

d) $y = \frac{3}{4}x + 1,\ x \in N_5$

6.2.1.14. Bestimmen Sie die linearen Funktionen, die durch folgende arithmetische Folgen festgelegt sind:

a) $\langle -3, 1, 5, 9 \rangle$

b) $\langle 1, 5, 9, 13 \}$

c) $\langle 4{,}2;\ 4{,}8;\ 5{,}4;\ 6{,}0 \rangle$

d) $\langle 19, 14, 9, 4, -1 \rangle$

Es folgen hier noch weitere Beispiele zum Beweisen oder zum Aufsuchen von Folgengliedern, aber ich denke dieser kurze Auszug veranschaulicht genügend. Im Anschluss an die Beispiele gibt es ein Feld, in dem sich die Endergebnisse zu den einzelnen Aufgaben befinden.

Im Schulbuch von Brunner et al. wird als nächstes die arithmetische Reihe erläutert. Diese wird auch hier hergeleitet – sogar genauso wie der Beweis bei Steiner et al. Jedoch ist der Beweis in der älteren Ausgabe übersichtlicher gestaltet, wie man hier sehen kann:

Wir werden jetzt die Summe einer arithmetischen Reihe berechnen.

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

bzw.

$s_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$

In der ersten Gleichung drücken wir alle Glieder durch $a_1$ und $d$ aus, in der zweiten Gleichung durch $a_n$ und $d$.

$s_n = a_1 + [a_1 + d] + \ldots + [a_1 + (n-2) \cdot d] + [a_1 + (n-1) \cdot d]$
$s_n = a_n + [a_n - d] + \ldots + [a_n - (n-2) \cdot d] + [a_n - (n-1) \cdot d]$

Die Gleichungen werden addiert.

$2\,s_n = [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n] + \ldots + [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n]$
$2\,s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)}$$

Setzen wir für $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, dann wird die Summe

$$\boxed{s_n = \frac{n}{2} \cdot [2\,a_1 + (n-1) \cdot d]}\ .$$

In beiden Schulbüchern der Handelsakademien findet man Tabellen zum Ausfüllen. Ich werde die Tabelle zum Vervollständigen der fehlenden Werte aus dem Schulbuch von Steiner und Weilharter entnehmen. In beiden Büchern sind auch Beispiele zu Zahlenfolgen zu finden, in denen beispielsweise die Summe der ersten 6 Glieder und das Produkt der ersten 3 Glieder gegeben sind. Man soll die Folgenglieder berechnen etc. Diese Beispiele werden hier aus dem Buch von Brunner et al. entnommen und eingefügt.

**217.** Die folgende Tabelle ist zu vervollständigen:

| | $a_1$ | $d$ | $n$ | $a_n$ | $s_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | 4 | 5 | 6 | | |
| b) | 3 | 2 | | 19 | |
| ~~c)~~ | −30 | 5 | | | −75 |
| d) | $\frac{1}{5}$ | | 12 | 5,7 | |
| e) | $\frac{1}{4}$ | | 16 | | 44 |
| ~~f)~~ | 4 | | | −7,8 | −114 |
| g) | | −3 | 4 | −9 | |
| h) | | −2 | 24 | | 72 |

6.2.2.26. Die Summe der ersten 15 Glieder einer arithmetischen Reihe ist 15, das sechste Glied ist 3. Berechnen Sie die Differenz der Folge und deren 15. Glied. Das wievielte Glied der Folge ist $-3$?

6.2.2.27. In einer arithmetischen Folge ist die Summe aus dem zweiten und achten Glied 42. Das Quadrat des sechsten Gliedes ist 676. Wie groß ist die Summe der ersten 15 Glieder dieser Folge?

6.2.2.28. Die Zahl 30 ist so in drei Teile zu teilen, daß die Teile eine arithmetische Folge bilden. Das Quadrat des ersten Gliedes ist um 64 größer als das Produkt der beiden anderen Glieder.

6.2.2.29. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Folge; die Summe dieser Zahlen ist 66, die Summe ihrer Quadrate ist 1494. Wie heißen die vier Zahlen?

6.2.2.30. Vier Zahlen bilden eine arithmetische Folge; die Summe dieser Zahlen ist 34, die Summer ihrer Quadrate ist 414. Wie heißen die vier Zahlen?

6.2.2.31. Berechnen Sie die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, die eine arithmetische Folge bilden, wenn die Fläche $96\,\text{cm}^2$ groß ist.

6.2.2.32. Berechnen Sie die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, die eine arithmetische Folge bilden, wenn die Höhe $h = 12\,\text{cm}$ beträgt.

6.2.2.33. In einem Dreieck bilden die drei Seiten eine arithmetische Folge mit der Differenz 7 cm. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $294\,\text{cm}^2$. Wie groß ist sein Umfang?

6.2.2.34. In einem Dreieck bilden die drei Seiten eine arithmetische Folge mit der Differenz 11 cm. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $210\,\text{cm}^2$. Wie groß ist sein Umfang?

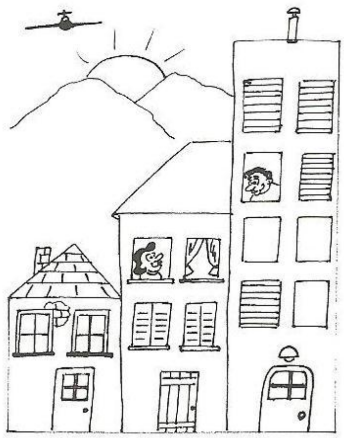
In beiden Schulbüchern folgt nun die „Geometrische Folge". Bei beiden wird die explizite Darstellung dieser Folge gegeben, auch gleich beschrieben. Im Anschluss folgt nun ein Scan aus dem Schulbuch von Brunner et al., damit man diese Darstellung einmal sieht. Die Einführung einer Folge geschieht immer mit einer Zeichnung, diese ist für mich aber nicht so wichtig.

Wollen wir von einer geometrischen Reihe nur das $n$-te Glied berechnen, dann lesen wir aus der Abbildungsgleichung ab:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Zum Beispiel: $b_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$
Ist, wie in diesem Beispiel, $q > 1$, dann entsteht eine **steigende** Folge.

Zum Vergleich dazu wird im Schulbuch von Steiner und Weilharter die geometrische Folge geboten – anhand eines Beispiels und gleich im Anschluss folgt der Beweis der Summenformel einer geometrischen Folge. Es werden in diesem Schulbuch immer vorgerechnete Beispiele gegeben, auf die ich hier verzichte. Die Begründung dafür findet man auch im nächsten Kapitel meiner Diplomarbeit. Im Anschluss an den Scan über die geometrische Folge aus dem Schulbuch von Steiner findet man die „Herleitung" der geometrischen Reihe aus dem Schulbuch von Brunner. Wie man sieht, ist die Beweisführung dieselbe, auch wenn man es auf den ersten Blick nicht glaubt, weil man mehr Text im Schulbuch von Brunner et al. findet.



## 3. Geometrische Folgen

Die Folge $\langle 3, -6, 12, -24\rangle$ ist eine geometrische Folge. Der Quotient q der Folge ist – 2. Es gilt:

$$b_1 = 3$$
$$b_2 = b_1 \cdot q = 3 \cdot (-2) = -6$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2 = 3 \cdot (-2)^2 = 12$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot (-2)^3 = -24$$

Allgemein: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ (explizite Darstellung)

Die **rekursive Darstellung** einer geometrischen Folge lautet allgemein:

$$\boxed{b_n = b_{n-1} \cdot q}$$

**Beispiel:**
Gegeben: geometrische Folge, $b_1 = 2$, $b_5 = 162$
Gesucht: q

**Lösung:**
$b_5 = b_1 \cdot q^4 \Leftrightarrow q = \pm\sqrt[4]{\frac{b_5}{b_1}} = \pm\sqrt[4]{\frac{162}{2}} = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad q = \pm 3$

Summe einer geometrischen Folge:

$$\boxed{s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}}$$

Es ist günstig, die erste Formel für $q < 1$, die zweite Formel für $q > 1$ anzuwenden.

Für $q = 1$ sind die obigen Formeln nicht definiert, in diesem Fall gilt:

$$\boxed{s_n = n \cdot b_1}$$

Ähnlich wie bei der arithmetischen Folge gibt es auch bei der geometrischen Folge eine allgemeine Summenformel:

$$\boxed{s_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}} \quad (q \neq 1)$$

**Beweis:**

$s_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1}$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit q und erhalten

$s_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^n$.

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich:

$s_n - s_n \cdot q = b_1 - b_1 \cdot q^n \Leftrightarrow s_n \cdot (1-q) = b_1 \cdot (1-q^n) \Leftrightarrow s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$

Die Summe der Glieder einer geometrischen Folge $\langle b_k \rangle_n$ bezeichnen wir als geometrische Reihe $b_1 + b_2 + \dots + b_n$.
Die ausgerechnete Summe dieser Reihe nennen wir
$s_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
Diese Summe läßt sich folgendermaßen berechnen:
$s_n = b_1 + b_1 \cdot q + \dots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1}$
Die Gleichung wird mit $q$ multipliziert
$s_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n$
und schließlich wird davon die ursprüngliche Gleichung subtrahiert:
$s_n \cdot q - s_n = -b_1 + b_1 \cdot q^n$
$s_n \cdot (q-1) = b_1 \cdot (q^n - 1)$

$$\boxed{s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Das erste Beispiel zu den geometrischen Folgen und Reihen ist in beiden Büchern wie bei den arithmetischen Folgen und Reihen eine Tabelle zum Ausfüllen von fehlenden Werten. Danach folgen wieder Beispiele mit Zahlenfolgen – auch wie bei den arithmetischen Reihen.

Deswegen folgen nun keine Scans mit Beispielen dazu, weil diese sehr ähnlich sind, nur dass es nun geometrische anstatt arithmetischen Folgen sind.

In beiden Schulbüchern folgt nun ein Kapitel, das aber keine Bedeutung für meine Diplomarbeit hat, deswegen kann ich diese beiden Schulbücher nun aus der Hand legen.

Bei Steiner und Weilharter kommt aber noch ein Kapitel, das für meine Diplomarbeit wichtig ist. Diesen Abschnitt findet man jedoch erst im 3. Schulbuch für die Handelsakademie „Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3“. Dieser lautet „Zahlenfolgen – Grenzwert – Stetigkeit“. Dieses Kapitel beginnt mit derselben Einführung wie auch schon im 2. HAK – Schulbuch von Steiner und Weilharter, nur noch weiter zusammengeblockt, wie man im nachfolgenden Scan sieht.

# ZAHLENFOLGEN – GRENZWERT – STETIGKEIT

## 1. Allgemeines über Zahlenfolgen

Aus einer Rätselzeitschrift:

**2 4 8 ?**

Welche Zahl folgt als nächste? Dieses Rätsel ist gar nicht so einfach! Denn ein „logisches“ Argument, welche Zahl für das rote Fragezeichen zu setzen ist, gibt es nicht.
Bei den üblichen Zahlenrätseln kann man im Allgemeinen folgende Begründung geben: Die Reihenfolge der Zahlen gehorcht einer bestimmten Funktionsgleichung, in das die natürlichen Zahlen — meistens mit 1 beginnend — eingesetzt werden.
So liefert z. B. die Gleichung $y = 2x + 1$ die Zahlen
3 5 7 9 … für $x \in \mathbb{N}^*$.

Oder für $y = x^2$ erhalten wir
0 1 4 9 16 … für $x \in \mathbb{N}$.

Es gilt also — durch Probieren oder Intuition — eine Funktionsgleichung, ein **Bildungsgesetz** zu finden.
Für unser eingangs gebrachtes Problem gibt es unter diesem Gesichtspunkt beliebig viele Lösungen:
16 ….. für das Bildungsgesetz $y = 2^x$, $x \in \mathbb{N}^*$
14 ….. für das Bildungsgesetz $y = x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{N}^*$

Nach dem Ausflug in die Rätselecke wollen wir uns mit dem für die Mathematik Wesentlichen befassen. Bei unserem Rätsel 2 4 8 ? wurden Zahlenwerte in einer bestimmten Reihenfolge aneinander gesetzt.
In der Mathematik spricht man von einer **„Zahlenfolge“** und schreibt die Glieder der Folge in Winkelklammern.
Z. B.: $\langle 2, 4, 8, 16, 32, 64\rangle$, $\langle 3, 15, 2, 10, 1\rangle$, $\langle 1, 2, 3\rangle$ usw.
allgemein: $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\rangle$
Man bezeichnet $a_1$ als **Anfangsglied** und $a_n$ als **n-tes Glied** der Folge.
Betrachten wir die nachstehenden Zahlenfolgen:

(1) $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$
$\langle 2, 4, 6, 8, 10\rangle$
$\langle 2, 0, -2, -4, -6\rangle$

(2) $\langle 1, 2, 4, 8, 16, 32\rangle$
$\langle 8, 4, 2, 1, 0{,}5, 0{,}25\rangle$
$\langle 1, -2, 4, -8, 16, -32\rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in (1) und den in (2) angeführten Folgen?
Offensichtlich bestehen gewisse Abhängigkeiten zwischen den Folgengliedern:
— In (1) liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Addition einer konstanten Größe entsteht. (**Arithmetische Folgen!**)
— In (2) liegen Folgen vor, bei denen das nächste Glied aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor entsteht. (**Geometrische Folgen!**)

Arithmetische Folge: $a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d}$

Geometrische Folge: $b_1 \xrightarrow{\cdot q} b_2 \xrightarrow{\cdot q} b_3 \xrightarrow{\cdot q} b_4 \xrightarrow{\cdot q} b_5 \xrightarrow{\cdot q}$

Summe einer (endlichen) arithmetischen Folge:
$$\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \text{ bzw. } s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]}$$

Summe einer (endlichen) geometrischen Folge:
$$\boxed{s_n = b_1\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Elemente einer **Zahlenmenge** angeschrieben werden, z. B.: $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}$ usw.
Wenn man aber die Elemente in einer bestimmten Reihenfolge anordnet, spricht man von einer **Folge**.

**Definition:**
Eine **unendliche (endliche) Folge** ist darstellbar durch eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge $\mathbb{N}^*$ (die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$) ist.

**Definition:**
Eine **arithmetische Folge (AF)** ist eine Folge, bei der die **Differenz** zweier Nachbarglieder konstant ist.
Warum spricht man von einer „arithmetischen“ Folge? Nun: Jedes „innere“ Glied einer arithmetischen Folge ist das **arithmetische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder:
$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

**Definition:**
Eine **geometrische Folge (GF)** ist eine Folge, bei der der **Quotient** zweier Nachbarglieder konstant ist.
Der Betrag von jedem „inneren“ Glied einer geometrischen Folge ist das **geometrische Mittel** seiner beiden Nachbarglieder:
$$\boxed{|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}}$$

Ich muss an dieser Stelle erwähnen, dass diese Seiten aus dem Schulbuch der 3. HAK für mich kopiert wurden, da ich dieses Buch mir nicht ausborgen konnte. Darum sind die folgenden Scans etwas schiefer. Aber das soll meiner Diplomarbeit nicht im Weg stehen.

Da ich leider kein anderes Schulbuch mehr gefunden habe, werde ich nun nur noch aus dem Schulbuch von Steiner und Weilharter scannen und dies analysieren. Es folgt in diesem Buch das Kapitel „Monotone und beschränkte Folgen“. Diese werden definiert und es folgen Beispiele. Man findet bei Beschränkungen auch wieder die Begriffe „Infimum“ und „Supremum“.

Betrachten wir die Folge

| | |
|---|---|
| $\langle 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$ | $\langle 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots \rangle$ |

so erkennen wir:

| | |
|---|---|
| Jedes Glied ist **größer** als das unmittelbar vorhergehende. So ist z. B. $2 > 1$, $3 > 2$ usw. | Jedes Glied ist **kleiner** als das unmittelbar vorhergehende. So ist z. B. $\frac{1}{10} < 1$, $\frac{1}{100} < \frac{1}{10}$ usw. |

Wegen dieser Eigenschaft spricht man von einer

| | |
|---|---|
| **streng monoton wachsenden Folge.** | **streng monoton fallenden Folge.** |
| **Definition:** | **Definition:** |
| Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton wachsend**, wenn jedes ihrer Glieder **größer** als das unmittelbar vorhergehende oder diesem gleich ist, d. h. wenn für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a_{n+1} \geqslant a_n$ [2]. | Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **monoton fallend**, wenn jedes ihrer Glieder **kleiner** als das unmittelbar vorhergehende oder diesem gleich ist, d. h. wenn für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt: $a_{n+1} \leqslant a_n$ [2]. |

Weitere Beispiele für

| | |
|---|---|
| monoton wachsende (steigende) Folgen: | monoton fallende Folgen: |
| $\langle a_n \rangle = \langle 1+2n \rangle = \langle 3, 5, 7, 9, \ldots \rangle$ | $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots \right\rangle$ |
| $\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, 16, \ldots \rangle$ | $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{2}{9}, \frac{5}{27}, \ldots \right\rangle$ |

Auch andere Arten (Sonderformen) der Monotonie sind möglich. Denken wir an konstante Folgen wie z. B. $\langle 4, 4, 4, 4, 4, 4, \ldots \rangle$: Diese Folge ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend. Strenge Monotonie liegt allerdings nicht vor.

Die Glieder der monoton fallenden Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$ liegen sicher im Intervall $[0,1]$. Es besteht also die Beziehung $0 \leq a_n \leq 1$.

0 wird als **untere Schranke**, 1 als **obere Schranke** bezeichnet. Jede Zahl, die größer als eine obere Schranke B ist, ist gleichfalls eine obere Schranke. Entsprechendes gilt für untere Schranken.

Eine sogenannte **„beschränkte" Folge** (vgl. Definition in der Außenspalte) besitzt unendlich viele obere und untere Schranken.

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **unbeschränkt**, wenn sie keine obere oder untere Schranken besitzt.

Beispiele für Folgen und deren obere bzw. untere Schranken:

(1) $\langle 5 - 3n \rangle = \langle 2, -1, -4, -7, -10, \ldots \rangle$, z. B. $B = 3$

(2) $\langle 2 + 3n \rangle =$ ...................... , z. B. $b = 4$

(3) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle =$ ...................... , z. B. $b = 0$, $B = 1$

(4) $\left\langle \frac{(-1)^n}{n}(n+1) \right\rangle =$ .................. , z. B. $b = -3$, $B = 2$

**Definition:**

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **beschränkt**, wenn es zwei reelle Zahlen b und B gibt, so dass die Ungleichung $b \leq a_n \leq B$ für jedes Glied $\langle a_n \rangle$ der Folge erfüllt ist. b wird als **untere Schranke**, B als **obere Schranke** der Folge bezeichnet.

Die größte untere Schranke heißt **Infimum**.

Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum**.

**Beispiel:**

Gegeben ist die monoton steigende Folge $\left\langle \frac{3n+1}{n+1} \right\rangle$. Es ist zu ermitteln, ob **a)** 2,5 **b)** 4 eine obere Schranke dieser Folge ist.

**Lösung:**

**a)**

$a_n \leq B$

$\frac{3n+1}{n+1} \leq 2{,}5 \quad | \cdot 2(n+1)$

$6n + 2 \leq 5n + 5$

$n \leq 3$

$L = \{1, 2, 3\} \quad (\neq \mathbb{N}^*)$

2,5 ist keine obere Schranke.

**b)**

$a_n \leq B$

$\frac{3n+1}{n+1} \leq 4 \quad | \cdot (n+1)$ Der Nenner ist für alle $n \in \mathbb{N}^*$ positiv.

$3n + 1 \leq 4n + 4$

$0 \leq n + 3$

$L = \mathbb{N}^*$

4 ist eine obere Schranke. (Es ist zu vermuten, dass es noch weitere obere Schranken gibt, die kleiner als 4 sind.)

Es folgen nun Beispiele zu beschränkten und monotonen Folgen. Dabei soll man die Monotonie der Folgen untersuchen oder Schranken ermitteln, bzw. überprüfen. Der nachfolgende Scan ist aber nur eine Auswahl von Beispielen. Es gibt natürlich mehrere.

**2.** Welche Art von Monotonie liegt bei den nachstehenden Folgen vor?

**a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \langle 3-2n \rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n}{2n+1} \right\rangle$

**d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{n^2+2} \right\rangle$ **e)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2}{2n+3} \right\rangle$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+1}{n} \right\rangle$

**3.** Man untersuche die Monotonie der

**a)** arithmetischen Folge $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ für die Fälle $d < 0$, $d \leqslant 0$, $d = 0$, $d \geqslant 0$ und $d > 0$.

**b)** geometrischen Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ mit $b_1 > 0$ für die Fälle $q < 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ und $q > 1$.

**c)** geometrischen Folge $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ mit $b_1 < 0$ für die Fälle $q < 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ und $q > 1$.

**4.** Es ist festzustellen, ob die Werte b bzw. B untere bzw. obere Schranken der Folgen $\langle a_n \rangle$ sind.

**a)** $b = 1$, $B = \frac{3}{2}$, $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n}{2n+1} \right\rangle$ **b)** $b = -\frac{5}{2}$, $B = -2$, $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n-1}{1-2n} \right\rangle$

**c)** $b = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{2}$, $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n+1} \right\rangle$ **d)** $b = \frac{5}{4}$, $B = \frac{3}{2}$, $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1+2^n}{2^n} \right\rangle$

**e)** $b = -2$, $B = 1$, $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+2}{4n-1}(-1)^n \right\rangle$ **f)** $b = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{2}{3}$, $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{3n+1}(-1)^n \right\rangle$

Anleitung: Man unterscheide in e) und f) die Fälle $n \in \mathbb{N}_g \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_u$.

**5.** Es ist für die Folgen $\langle a_n \rangle$ je eine untere und eine obere Schranke zu ermitteln:

**a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1-3n}{2n-1} \right\rangle$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2+1} \right\rangle$

**d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+2}{3n^2} \right\rangle$ **e)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n-1}{n+1} \right\rangle$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n+1} \right\rangle$

**6.** Man berechne das Glied der Folge $\langle a_n \rangle$ mit dem kleinsten Index, welches die daneben angeführte Beziehung erfüllt.

**a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+2}{1-2n} \right\rangle$, $a_n > -2$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1-3n}{2n-1} \right\rangle$, $a_n > -\frac{17}{11}$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+1}{n} \right\rangle$, $a_n < \frac{7}{2}$

**d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2}{2n+3} \right\rangle$, $a_n > 1000$ **e)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{n^2+2} \right\rangle$, $a_n < \frac{1}{100}$ **f)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n+1}{n^2} \right\rangle$, $a_n < \frac{1}{10}$

**7.** Es ist zu zeigen, dass die angegebenen Werte b bzw. B Infimum bzw. Supremum der nachstehenden Folgen sind.

**a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$, $b = 0$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n-1}{2n+3} \right\rangle$, $B = \frac{3}{2}$ **c)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{5n+1}{2n-1} \right\rangle$, $b = \frac{5}{2}$

**d)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{7n-4}{3n+2} \right\rangle$, $B = \frac{7}{3}$ **e)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2^n} \right\rangle$, $b = 0$ **f)** $\langle a_n \rangle = \langle \sqrt[n]{2} \rangle$, $b = 1$

... eine untere bzw. B eine obere Schranke ist. Dann nehme man

Im 3. Kapitel „Grenzwert – Konvergenz – Divergenz“ werden die Begriffe „Nullfolge“, „konvergieren“ und „Umgebung“ eingeführt und definiert. Auch der Begriff „fast alle“ erhält einen Platz im Buch. Im Anschluss folgen die Begriffe der Konvergenz und des Grenzwertes – wie der nachfolgende Scan zeigt. Es folgen danach wenige Beispiele dazu. Weiters folgen die Grenzwertsätze und mehrere Übungsaufgaben zu dem gesamten Kapitel. Auch Beispiele bezüglich der „ε – Umgebung“ werden gegeben.

**Beispiel:**
Es ist zu zeigen, dass die Folge mit dem Bildungsgesetz $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ eine Nullfolge ist.

**Lösung:**
Eine Folge mit dem Grenzwert (vgl. nebenstehende Definition) $\alpha = 0$ nennt man **Nullfolge**.

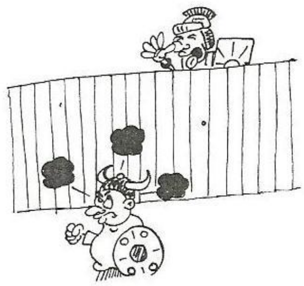
Wir müssen zeigen, dass in jeder ε-Umgebung von $\alpha = 0$ fast alle Glieder der Folge liegen, d. h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Gliednummer N gibt, von der an alle Glieder im Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[$ liegen:
$|a_n - \alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, also N = erste ganze — und wegen $\varepsilon > 0$ auch natürliche — Zahl, die größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Für $\varepsilon = \frac{3}{500}$ wäre N somit gleich 167.

Für jede Zahl $\varepsilon > 0$, **und sei ε noch so klein**, gibt es daher eine Platznummer N, ab der gilt: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, sofern $n \geqslant N$. Die Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ ist daher eine Nullfolge.

**Bemerkung:** Wir bezeichnen die Gliednummer mit N. $a_N$ ist das N-te Glied der Folge $\langle a_n \rangle$.

**Definition:**
Die Zahl α heißt **Grenzwert der Folge** $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder ε-Umgebung von α fast alle Glieder der Folge liegen:
$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ gilt für fast alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$.



Betrachten wir nachstehende unendliche Folgen:

(1) $\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$ $\langle 1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001, \ldots \rangle$

(2) $\langle 2, 4, 8, 16, \ldots \rangle$ $\langle 10, 100, 1000, 10000, \ldots \rangle$

Welcher Unterschied besteht zwischen den in (1) und (2) angeführten Folgen?

Nun: Bei (1) handelt es sich um **konvergente Folgen**, bei (2) um **divergente Folgen** — vgl. die Definition in der Außenspalte.

Für den **Grenzwert einer konvergenten Folge** $\langle a_n \rangle$ verwendet man das Zeichen $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}$.

Will man z. B. ausdrücken, dass die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \right\rangle$ den Grenzwert 0 hat, so schreibt man kurz: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0}$ (gesprochen: **Limes**[3] $\frac{1}{n}$ für n gegen unendlich gleich 0).

Folgendes ist wichtig: Da unter den Gliednummern einer Folge $\langle a_n \rangle$ kein größter Index n* auftreten kann, gibt es auch kein letztes Glied $a_n$ der Folge. Schließlich bedeutet die Schreibweise $n \to \infty$ ja nicht, dass die Folge den Index ∞ erreicht und dann abbricht.

Der Grenzwert α wird nie erreicht, er gehört im Allgemeinen selbst nicht zur Folge[4].

**Definition:**
Eine **unendliche Folge**, die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**[1].
Eine **unendliche Folge**, die keinen Grenzwert hat, heißt **divergent**[2].

Wie lässt sich die Konvergenz einer Folge bestimmen?
Gefühlsentscheidungen sind in der Mathematik gefährlich. Nun gibt es den **„Hauptsatz über monotone Folgen“**, der in vielen Fällen hilfreich ist und durch nüchterne Klarheit besticht:

> Eine monoton wachsende (fallende) Folge in ℝ ist genau dann konvergent in ℝ, wenn sie nach oben (unten) beschränkt ist.

Das bedeutet: Um die Konvergenz einer monotonen Folge zu zeigen genügt es, ihre Beschränktheit nachzuweisen.

Es folgen die Scans zu den Grenzwertsätzen und den Beispielen zu diesem Kapitel.

## 4. Grenzwertsätze, Grenzwertberechnung

Zur Erleichterung der Berechnung von Grenzwerten bringen wir (ohne Beweise) die wichtigsten Regeln, die sogenannten **Grenzwertsätze**, die in Zeichen Folgendermaßen lauten:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, $(\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0,\ b_n \neq 0)$

Konvergieren die Folgen $\langle a_n\rangle$ und $\langle b_n\rangle$ gegen die Grenzwerte $\alpha$ bzw. $\beta$, so gilt:

1. Die Summenfolge $\langle a_n+b_n\rangle$ konvergiert gegen die Summe der Grenzwerte $\alpha+\beta$.
2. Die Differenzfolge $\langle a_n-b_n\rangle$ konvergiert gegen die Differenz der Grenzwerte $\alpha-\beta$.
3. Die Produktfolge $\langle a_n b_n\rangle$ konvergiert gegen das Produkt der Grenzwerte $\alpha\cdot\beta$.
4. Die — nur für $b_n \neq 0$ definierte — Quotientenfolge $\left\langle\frac{a_n}{b_n}\right\rangle$ konvergiert, sofern $\beta \neq 0$ gilt, gegen den Quotienten der Grenzwerte $\frac{\alpha}{\beta}$.

**Beispiel:**

Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$!

**Lösung:**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 3-0=3$$

AUFGABEN

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert $\alpha$ der Folgen $\langle a_n \rangle$ zu ermitteln und anzugeben, ab welcher Gliednummer N alle Glieder der Folge in der Umgebung $U(\alpha, \varepsilon)$ liegen.

**17.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2n} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n+3} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

**18.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n-1}{n} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ~~**b)**~~ $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n}{n+2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$

**19.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle 3 - \frac{1}{n+2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{20}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{7n-1}{2n-2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

**20.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-7}{3n-5} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n-1}{n^2+3} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$

**21.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{5n+30}{n^2-7} \right\rangle$, $\varepsilon = 1$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n}{n^2+1} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$

**22.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+5n}{n^3+2n^2} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2^n}{3^n} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$

**23.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^2 + (-1)^n \cdot 10n}{n^3} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{50}$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right\rangle$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$

Bei den folgenden Aufgaben ist der Grenzwert $\alpha$ der Folgen $\langle a_n \rangle$ mit Hilfe der Grenzwertsätze zu berechnen, falls $\alpha$ existiert.

**24.** ~~**a)**~~ $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+1}{n^2} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+4n-8}{3n+5} \right\rangle$

**25.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2-1}{2n^2} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^3-3n^2+2n-1}{n^3+1} \right\rangle$

**26.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^2+3n-1}{n^3-2n+1} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+5n-7}{5n^2-n+2} \right\rangle$

**27.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{4n^2+2n+5}{n^3+n-7} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{-4n+3}{n^3+1} \right\rangle$

**28.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^3+2n^2-n+9}{4n^3+5n+13} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{n^4+7n^2}{n^5+3n^3+1} \right\rangle$

**29.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^4-3n^2+n-2}{5n^4+6n^3-n+7} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3n^2+(-1)^n}{2n^3} \right\rangle$

**30.** **a)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n+(-1)^n \cdot 3}{n} \right\rangle$ **b)** $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3-n(-1)^n}{10^n} \right\rangle$

**31** Das Konvergenzverhalten der F...

Das abschließende Kapitel, das für meine Diplomarbeit Relevanz hat, betrifft das Thema „unendliche Reihen“. Wie schon in anderen Schulbüchern wird auch hier von Teilsummen gesprochen, die Konvergenz von unendlichen Reihen besprochen und zum Abschluss die Definition der unendlichen geometrische Reihe gegeben.


## 5. Unendliche Reihen

Was verstehen wir unter einer „unendlichen Reihe"? Rein formal ist eine **unendliche Reihe** ein Ausdruck der Form $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$, wobei die Punkte andeuten sollen, dass der Ausdruck niemals abbricht. Was fangen wir damit an? Wir fragen nach dem Summenwert S, d. h.

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ?$$

Sicher ist, dass man nicht unendlich viele Zahlen addieren kann. Auch wird man mit formal gebildeten unendlichen Summen nicht wie mit gewöhnlichen Summen rechnen können. Denn betrachten wir etwa die unendliche Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ so wären — wenn man mit dieser Reihe wie mit einer gewöhnlichen Summe rechnet — folgende zwei Möglichkeiten der Klammersetzung denkbar:

$$(1) \quad 1-1+1-1+1-\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+0+\ldots \Rightarrow S = 0$$

$$(2) \quad 1-1+1-1+1-\ldots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\ldots = 1-0-0-0-\ldots \Rightarrow S = 1 \quad ???$$

Bevor wir also versuchen, eine Summenformel herzuleiten, müssen wir klären, ob die „Summe" einer unendlichen Reihe überhaupt einen eindeutigen Wert hat. Dazu bilden wir aus den Gliedern $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ der Reihe, die Folge $\langle s_n \rangle$ ihrer **Teilsummen** oder **Partialsummen**.

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

**Definition:**

Eine **unendliche Reihe** $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$ heißt genau dann **konvergent**, wenn ihre Partialsummenfolge konvergiert.

Den Grenzwert S der Partialsummenfolge bezeichnet man als **Summe der Reihe**: $\boxed{S = \lim_{n\to\infty} s_n}$.

Divergiert dagegen die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen der gegebenen Reihe, so heißt diese **divergent**, sie hat keine Summe.

Wenn die Folge $\langle s_n \rangle$ der Partialsummen konvergiert, d. h. einen Grenzwert S hat, sagt man: Die Reihe konvergiert und hat die Summe S. Der Grenzwert S wird also dieser Reihe als Summenwert zugeschrieben. Durch diese Vorgangsweise können wir alle für Folgen bewiesenen Sätze übernehmen. Schließlich haben wir ja die Konvergenz von Reihen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt. (Neue Probleme auf bereits gelöste zurückzuführen, ist ein bewährtes Erfolgsrezept in der Mathematik!) Zum besseren Verständnis die folgende Gegenüberstellung:

Die unendliche arithmetische Reihe ist divergent[1)] und somit für unsere weiteren Betrachtungen bedeutungslos. Ähnlich verhält es sich mit der unendlichen geometrischen Reihe, wenn der Quotient $|q| \geq 1$ ist.

Was aber ist, wenn $|q| < 1$?

Wir formen $s_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ um.

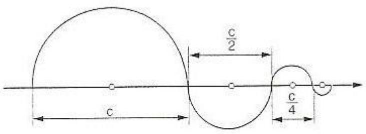
$$s_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q} \right) = \frac{b_1}{1-q},$$

weil für $|q| < 1$ die Folge $\langle q^n \rangle = \langle q, q^2, q^3, \ldots \rangle$ eine Nullfolge ist.

Die unendliche geometrische Reihe $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$. In diesem Fall ist ihre Summe $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Im Buch folgt nun die Schlangenkurve. Dieses Beispiel ist vorgerechnet. Danach kommen einfache Zahlenfolgenbeispiele, bei denen die unendliche geometrische Reihe zu berechnen ist, falls diese existiert. Danach folgt eine Tabelle zum Vervollständigen für unendliche geometrische Reihen und Beispiele mit Variablen, in denen man die Konvergenzbereiche für die Unbekannten angegeben soll.




Bilden die Längen ähnlicher Figuren bzw. Körper eine geometrische Folge mit dem Quotienten q, so nehmen die Flächeninhalte mit dem Faktor $q_A = q^2$, die Rauminhalte mit dem Faktor $q_V = q^3$ ab (oder zu).

**Beispiel:**

Auf einer Geraden wird eine Strecke mit der Länge c ($c \in \mathbb{R}^+$) aufgetragen, anschließend an ihrem rechten Endpunkt nach rechts eine Strecke mit der Länge $\frac{c}{2}$, anschließend eine Strecke mit der Länge $\frac{c}{4}$ usw. Über allen Strecken werden abwechselnd Halbkreise gezeichnet — vgl. Figur in der Außenspalte.

**a)** Wie groß ist die Gesamtlänge $\ell$ der so entstehenden Schlangenlinie?

**b)** Welcher Flächeninhalt A wird von der Geraden und der Schlangenlinie eingeschlossen?

**Lösung:**

**a)** Der erste Halbkreisbogen hat die Länge $\frac{\pi c}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{\pi c}{2}$.

Der zweite Halbkreisbogen hat die Länge $\frac{\pi c}{4} \Rightarrow b_2 = \frac{\pi c}{4}$. Jede Halbkreisbogenlänge wird gegenüber der vorangehenden mit dem selben Faktor $\frac{b_2}{b_1} = q = \frac{\frac{\pi c}{4}}{\frac{\pi c}{2}} = \frac{1}{2}$ verkleinert.

Es liegt eine konvergente unendliche geometrische Reihe vor.

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{\pi c}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \pi c \qquad \ell = \pi c$$

**b)** $A_1 = \frac{\pi c^2}{8}$, $A_2 = \frac{\pi c^2}{32}$, $\frac{A_2}{A_1} = q_A = \frac{\frac{\pi c^2}{32}}{\frac{\pi c^2}{8}} = \frac{1}{4}$, $A = \frac{\frac{\pi c^2}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi c^2}{6}$

Die Berechnung von $q_A$ hätte wesentlich einfacher erfolgen können. Alle Kreise sind einander ähnlich. Der Faktor, nach dem die Flächeninhalte kleiner werden, ist das Quadrat des Faktors entsprechender Längen.

Also $q_A = q^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $A = \frac{A_1}{1-q_A} = \frac{\frac{\pi c^2}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi c^2}{6}$, $\qquad A = \frac{\pi c^2}{6}$

Bei den folgenden Aufgaben ist anzugeben, unter welchen Voraussetzungen die unendliche geometrische Reihe konvergiert. Man berechne ihre Summe.

**52. a)** $1 + x + x^2 + \ldots$ **b)** $(x+2) + x + \frac{x^2}{x+2} + \ldots$

**53. a)** $\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} + \ldots$ **b)** $x^2 - y + \frac{y^2}{x^2} - \ldots$

**54. a)** $(1-x) + \frac{1-x}{x} + \frac{1-x}{x^2} + \ldots$ **b)** $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \ldots$

**55. a)** $\lg x - \lg\sqrt{x} + \ldots$ **b)** $\lg\sqrt[5]{x^2} + \lg\sqrt[25]{x^4} + \ldots$

**56. a)** $1 + \sin x + \sin^2 x + \ldots,\ x \in [0, 2\pi[$ **b)** $1 - \tan x + \tan^2 x - \ldots,\ x \in [0, 2\pi[$

Beispiele zu Figurenfolgen bleiben leider aus. Das abschließende Kapitel beschäftigt sich mit Stetigkeit – in Hinblick auf die Vorbereitung für Kurvendiskussionen.

Abschließend bleibt hier zu sagen, dass die Schulbücher von Steiner und Weilharter das Gesamtkapitel „Folgen und Reihen“ sehr gut beschreiben und ausführen, auch wenn es zeitweise unübersichtlich ist. Es fehlen mir leider die Figurenfolgen.

## 4. Abschließender Vergleich der Schultypen: AHS, HTL und HAK

Wie schon erwähnt, sieht man auf den ersten Blick, dass Begriffe wie „Grenzwert", „Monotonie" und „Schranken" in einer Handelsakademie nur geringfügig vorkommen, dafür aber eine Gewichtung vor allen in den Schulbüchern der Allgemeinbildenden Höheren Schulen und auch in den Höheren Lehranstalten haben. Solche grundlegenden Begriffe sollte man auch in einer Handelsakademie einführen, weil der „Grenzwert" auch eine Bedeutung für andere Gebiete, wie etwa in der „Differentialrechnung" hat und der Begriff „Monotonie" auch bei „Funktionen" und bei „Kurvendiskussionen" geläufig sein sollte – in den beiden zusätzlichen Schulbüchern von Steiner und Weilharter werden auch für die HAK diese Begriffe eingeführt.

Eines ist mir aber bei der Analyse diesen HAK-Schulbüchern sofort aufgefallen: Zuerst dachte ich, dass Steiner vom HTL-Schulbuch nicht derselbe Autor ist wie von den HAK-Schulbüchern, doch es muss derselbe sein, weil die Einführung und auch die Kapitel genau gleich aufgebaut und sogar gleich formuliert sind. Der einzige Unterschied ist hier, dass im HTL-Buch auch Figurenfolgen einen Platz finden.

Im Großen und Ganzen kann man aber bei allen Schulbüchern die arithmetische und geometrische Folge und ihre Summenformeln der Reihen entdecken. Diese wurden auch überall hergeleitet. Die Schreibweise war auch in fast allen Büchern gleich – bis auf kleine Abweichungen.

Die unendlichen geometrischen Reihen hielten in jedem Schulbuch Einzug außer in der älteren HAK-Ausgabe. Die Figurenfolgen fand man in allen Büchern außer in denen einer Handelsakademie. Wobei bei diesem Schultyp zu sagen ist, dass Figurenfolgen nicht relevant für die spätere Ausbildung sind, jedoch die Finanzmathematik und die nimmt genug Platz in den HAK-Schulbüchern ein.

Die Finanzmathematik bekommt in anderen Schultypen auch Aufmerksamkeit, stellt aber nur einen Bruchteil im Vergleich zu jener einer HAK dar. Da ist eigentlich nur Malle bei den AHS-Schulbüchern zu erwähnen, der hier mehr Zeit dafür in Anspruch nimmt. Für die HTL kommt es auf den jeweils gewählten Zweig an, ob die Finanzmathematik wichtig ist oder nicht.

Die Grenzwertberechnung findet man in jedem Schulbuch – Ausnahme ist hier nur die alte HAK-Ausgabe. Die Grenzwertsätze sind dabei auch überall zu finden. Es gibt eine Ausnahme neben dieser alten HAK-Ausgabe von Brunner et al., die die „ε – Umgebung“ nicht gründlich behandeln: „Ingenieur-Mathematik 3“ von Timischl und Kaiser und das AHS-Buch „Mathematik verstehen 6“ von Malle et al. Der Begriff „fast alle“, der im Zuge der Umgebung zu erklären ist, kommt auch fast überall vor – bis auf eben diese zwei Ausnahmen. Wobei bei Malle kommt der Begriff „ε – Umgebung“ nicht vor und auch keine Beispiele, aber zumindest „ε“ wird erwähnt.

## 5. Beispielsammlung

In diesem Abschnitt meiner Diplomarbeit präsentiere ich einige Beispiele, von denen ich denke, dass diese für alle drei Schultypen (AHS, HTL, HAK) elementar und wichtig sind. Die nun angeführten Beispiele haben Maturaniveau und werden natürlich von mir im Unterricht zur Maturavorbereitung verwendet! Diese Beispiele sind für mich grundlegende Rechenverfahren und –anwendungen, die eine jede Maturantin oder ein jeder Maturant einfach beherrschen sollte!

Es werden Beispiele zu Grenzwertberechnung, ε – Umgebung und Monotonieberechnung dabei sein, genauso wie Figuren zur unendlichen geometrischen Reihe und Textbeispiele zu Folgen. Natürlich sollen auch alle drei Schultypen ein Bildungsgesetz aufstellen können.

Diese Beispiele stammen zum Teil aus meinen Unterlagen, die ich jetzt schon jahrelang in der Nachhilfe zur Maturavorbereitung anwende. Es sind auch Beispiele dabei, die ich mir im Zuge des Schreibens der Diplomarbeit selbst ausgedacht habe.

Der Lehrplanbezug für meine Beispiele ist in folgenden Punkten zu finden:

- Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert
- Verwenden von Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen

1. Gegeben ist eine Folge $\langle a_n \rangle$, $a_n = \frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10}$
    a) Berechne die ersten fünf Folgenglieder!
    b) Wie ist das Monotonieverhalten? Beweise es!
    c) Berechne den Grenzwert für $n \to \infty$!
    d) Berechne Supremum und Infimum!
    e) Berechne, ab welchem Index $n_0$ alle Folgenglieder in der $\frac{1}{100}$- Umgebung des Grenzwerts liegen!

2. Gegeben ist die Folge $\langle \frac{2}{4}, \frac{6}{7}, \frac{10}{10}, \frac{14}{13}, \ldots \rangle$
   a) Stelle das Bildungsgesetz der Folge auf, wobei Zähler und Nenner Linearterme sind!
   b) Wie ist das Monotonieverhalten? Beweise es!
   c) Berechne den Grenzwert a für n→ ∞ !
   d) Berechne das Infimum und beweise! Berechne auch das Supremum!
   e) Welche Folgenglieder liegen in U(a; $\varepsilon = \frac{1}{10000}$) des Grenzwerts a, welche liegen außerhalb?

3. Gegeben ist die Folge $\langle -\frac{3}{1}, -\frac{9}{3}, -\frac{27}{5}, \ldots \rangle$
   a) Stelle das Bildungsgesetz dieser Folge auf, wobei Zähler ein Exponentialterm und der Nenner ein Linearterm ist!
   b) Beweise das Monotonieverhalten!
   c) Berechne den Grenzwert a für n→ ∞ ! Erkläre die Begriffe Konvergenz und Divergenz!
   d) Berechne Supremum und Infimum!

4. Neben einem Dorf mit 300 Einwohnern soll ein Stadion gebaut werden. In der ersten Reihe soll es dreimal so viele Plätze wie Einwohner geben! In jeder folgenden Reihe sollen 21 Plätze mehr als in der vorhergehenden sein.
   a) Wie viele Plätze befinden sich in der 10. Reihe?
   b) Wie viele Plätze stehen in 12 Reihen insgesamt zur Verfügung?
   c) Wie viele Sitzreihen sind zu bauen, wenn mindestens 18000 Personen auf der Tribüne Platz finden sollen?

5. Drei aufeinander folgende Zahlen bilden eine arithmetische Folge. Die Summe der drei Zahlen beträgt 36, die Summe ihrer Quadrate ist 450. Berechne die 3 Zahlen.

6. In einem Drehkegel bilden der Radius, die Höhe und die Seitenkante eine geometrische Folge. Berechne die drei Größen, wenn die Höhe 12cm lang ist!

7. Eine Gemeinde will einen Bohrversuch durchführen lassen und sieht dafür 20000€ vor. Es liegen 2 Angebote vor:

   Firma A: Der 1. Meter kostet 70€, jeder weitere Meter um 4€ mehr als der vorhergehende.

   Firma B: Der 1. Meter kostet 40€, jeder weiter Meter um 3% mehr als der vorhergehende.

   Welche Firma erreicht für das zur Verfügung stehende Geld die größere Tiefe?

Es folgen nun auch Beispiele, die mit anderen Kapiteln verwoben sind, wie zum Beispiel mit der Trigonometrie oder Geometrie! Die Schülerinnen und Schüler sollten auch die Fähigkeiten besitzen, aus mehreren verschiedenen Kapiteln zusammengestellte Beispiele zu lösen oder sich Figurenfolgen vorstellen können!

8. Eine Schlangenkurve soll entstehen, wenn man an einen Halbkreis vom Radius r = 6cm einen Halbkreis mit dem $\frac{5}{6}$ - fachen Radius in umgekehrter Orientierung ansetzt.
   a) Berechne die Kurvenlänge der ersten 6 Halbkreise!
   b) Berechne die Kurvenlänge der gesamten Schlangenlinie
   c) Berechne die Summe aller Flächen unter den Halbkreisen!

9. Ein Pendel schwingt in einer Flüssigkeit. Dies bewirkt, dass die Weite eines Ausschlages immer nur $\frac{3}{5}$ der Weite des vorhergehenden Ausschlages beträgt. Die Weite des 5. Ausschlages beträgt 20cm.
   a) Wie groß war der erste Ausschlag?
   b) Der wievielte Ausschlag wir kleiner als 1cm sein?
   c) Wie lang ist der gesamte Weg, der von der Pendelspitze zurückgelegt wird?

10. Ein Gummiball hüpft entlang einer 10m langen Strecke. Der Ball bewegt sich dabei nach Halbkreisen vor. Das erste Mal setzt der Gummiball nach 4m auf, das nächste Mal nach weiteren 3m, usw.
    a) Wie viele Halbkreise schafft der Gummiball auf dieser 10m langen Strecke?
    b) Wie viele Meter könnte der Ball gesamt zurücklegen?

11. Einem Drehzylinder von der Höhe 18m und einem Durchmesser von 12m wird ein Drehkegel eingeschrieben. Dem Drehkegel wird wieder ein Drehzylinder eingeschrieben, sodass die Höhe des Kegels zum eingeschriebenen Drehzylinder 5:3 ist. Dem Zylinder wird wieder ein Kegel eingeschrieben, usw.
Berechne die Summe der
    a) Volumina der ersten 7 Drehzylinder
    b) Volumina aller Drehkegeln
    c) Flächeninhalte aller der aus der Seitenansicht entstehenden gleichschenkeligen Dreiecke.

12. In eine Kugel mit einem Radius $r_1$ = 10 cm wird ein Würfel eingeschrieben. In den Würfel wird wieder eine zur ersten Kugel konzentrische Kugel eingeschrieben, usw.
Berechne die Summe der
    a) Volumina der (1) ersten 6 Würfel, (2) aller Würfel
    b) Volumina der (1) ersten 9 Kugeln, (2) aller Kugeln.

13. Von der Spitze eines 20m hohen Turmes sieht man unter einem Tiefenwinkel von 28° den Fußpunkt einer Säule und unter einem Höhenwinkel von 36° die Spitze der Säule! Wie groß ist die Säule? Runde auf 2 Nachkommastellen! Verwende dann dieses Ergebnis!
Rechts von dieser Säule stehen noch viele weitere Säulen. Diese bilden eine geometrische Reihe! Die 4. Säule hat eine Größe von 42,56m. Berechne die Gesamtlänge der ersten 13 Säulen!

14. Gegeben sind 2 Punkte: A(6,4/3), B(4,8/4). Durch diese Punkte soll eine Ellipse in erster Hauptlage gelegt werden. In die Ellipse wird ein Rechteck so eingeschrieben, dass die Breitseiten des Rechtecks durch die Brennpunkte der Ellipse gehen. In das Rechteck wird wieder eine Ellipse eingeschrieben und so weiter. Berechne die Summe der Flächeninhalte (1) der ersten 4 Rechtecke, (2) aller Rechtecke!

15. Zu einer Zimmerwand wird eine Platte mit einem Neigungswinkel $\mu = 60°$ zum Fußboden angelehnt. Es wird von der Zimmerecke aus normal an die Platte ein Seil gespannt. Von dem Punkt aus auf der Platte wird das Seil normal auf den Fußboden gespannt, usw. Die Platte hat eine Länge von 12m.
    a) Berechne die Länge s des gesamten Zickzackbandes!
    b) Wie viel Meter Seil wurde für die ersten 8 Teilstücke gebraucht?
    c) Wie oft wurde das Seil gespannt, sodass mindestens 8m Seil gebraucht wurden?
    d) Welches Teilstück ist erstmals kleiner als 3 cm?
    e) Wie viele Teilstücke müssen addiert werden, damit $s_n$ sich von der Gesamtlänge s um weniger als 1 cm unterscheidet?

## Nachwort und Abschlussresumee

Das Schreiben dieser Diplomarbeit begann sehr schleppend. Ich wollte eigentlich viel früher fertig werden, aber die Motivation hat mir einfach gefehlt. Als ich dann endlich mit meiner Diplomarbeit begonnen hatte – aller Anfang ist bekanntlich schwer – kam ich dann rasch in einen Schreibfluss und ich muss sagen, dass ich mir die Diplomarbeit so vorgestellt habe.

Bezogen auf die Schulbücher möchte ich erwähnen, dass mir die Schulbücher einer Allgemeinbildenden Höheren Schule von der Gliederung, vom Aufbau und auch der Art der Beschreibung am besten gefallen. Hier will ich aber auch keinen Autor bevorzugen. Ich finde, dass eine Mischung aus Malle und Götz sicherlich das beste Schulbuch wäre, wobei ich nicht glaube, dass hier jemals eine Zusammenarbeit stattfinden wird. Die Figurenfolgenbeispiele von Steiner aus dem HTL-Schulbuch sollten noch ergänzt werden und dann wäre ich sehr zufrieden mit diesem neu kreierten Kapitel zu „Folgen und Reihen“.

**Literaturverzeichnis:**


- „Mathematik Lehrbuch 6“ von Götz, Reichel, Müller, Hanisch (ÖBV Wien, 1. Auflage 2005)
- „Mathematik verstehen 6“ von Malle, Ramharter, Ulovec, Kandl (ÖBV Wien, 1. Auflage 2005)
- „Ingenieur-Mathematik 3“ von Timischl, Kaiser (E. Dorner Verlag Wien, 4. Auflage 2005)
- „Mathematik 3“ von Schalk, Steiner (Reniets Verlag Wien, 3. Auflage 2000)
- „Mathe mit Gewinn ² “ von Hinkelmann, Böhm, Hofbauer, Metzger-Schuhäker (ÖBV Wien, 1. Auflage 2006)
- „Mathematik für Handelsakademien neu 2. Teil“ von Brunner, Gleißner, Kunesch, Reichel (Österreichischer Gewerbeverlag Wien, Auflage 1990)
- „Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 2“ von Steiner, Weilharter (Reniets Verlag Wien, 4. Auflage, 2006)
- „Mathematik und ihre Anwendungen in der Wirtschaft 3“ von Steiner, Weilharter (Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH Wien, 4. Auflage, Nachdruck 2010)

# Lebenslauf

**Persönliche Daten**


| | |
|---|---|
| Name: | Manuel Mitterhauser |
| Geburtsdatum, -ort: | 6. Juni 1988, Horn |
| Staatsbürgerschaft: | Österreich |
| Adresse: | 2002 Füllersdorf 16 |
| | manuel.mitterhauser@aon.at |
| | Tel.: 0680/3125699 |


**Schulbildung**

| | |
|---|---|
| 09/1998 – 06/2006 | Bundesgymnasium Hollabrunn |
| 09/1994 – 06/1998 | Volksschule Großmugl |

**Weitere Berufsausbildung**

| | |
|---|---|
| 10/2008 – 06/2011 | Universität Wien – Lehramt Mathematik, Psychologie und Philosophie |
| 10/2006 – 06/2008 | Universität Wien – Lehramt Mathematik, Physik |

**Berufspraxis**

| | |
|---|---|
| 05/2010 – | Mathematiknachhilfelehrkraft im Learn 4U! Mistelbach |
| 08/2008 – 04/2010 | Mathematiknachhilfelehrkraft im Lernquadrat Mistelbach |
| 01/2008 – 11/2009 | Mathematiknachhilfelehrkraft im Lernquadrat Hollabrunn |

**Besondere Fähigkeiten**

Teamfähigkeit, Flexibilität, Einsatzbereitschaft, Empathie

Füllersdorf, im Mai 2011