universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Begabtenförderung im Unterrichtsfach Mathematik unter besonderer Berücksichtigung der Mathematikolympiade

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Claudia Grasl
Matrikel-Nummer:	0548311
Studienkennzahl (lt. Studienblatt):	A 190 406 299
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Lehramt UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie
Betreuer:	Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger

Wien, im März 2011

Danksagung

Im Vertrauen darauf, dass die Menschen, die auf die unterschiedlichsten Weisen das Entstehen dieser Diplomarbeit begleitet haben, wissen, wie sehr und wofür ich ihnen von tiefsten Herzen dankbar bin, werde ich an dieser Stelle nicht versuchen in viele Worte zu fassen, was doch nicht mit Worten ausgedrückt werden kann.

Mein besonderer Dank gilt

… meiner Familie, deren Ermutigungen wesentlich dazu beigetragen haben, dass ich dieses Studium begonnen und bis zu seinem Endpunkt, den diese Diplomarbeit darstellt, durchgezogen habe

… Christoph, Pauli und Paul, die im Laufe meines Studiums von Kollegen zu Freunden wurden

… Prof. Humenberger für seine Unterstützung und ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit

… Mag. Ballik, Mag. Henner und Mag. Gstöttner für ihre Zeit und Unterstützung bei meiner Recherche über die Mathematikolympiade

… meinem Verlobten Hermann für sein Verständnis und seine Unterstützung, seine Ermutigungen und Zusprüche, für sein Vertrauen in mich und für ∞ *viel mehr*

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Über Hochbegabung gibt es viele Vorstellungen und nicht selten sind sie sehr vorurteilsbehaftet. Brunner u. a. führen in einer Liste gängiger Vorurteile unter anderem folgende an: *Hochbegabte schreiben immer gute Schulnoten, kommen in der Schule ohne fremde Hilfe zurecht, weisen aufgrund ihrer hohen Intellektualität Defizite in ihrer sozial-emotionalen Entwicklung auf, haben Schwierigkeiten sich in und mit praktischen Dingen zurecht zu finden, sind weltfremd und wenig praktisch veranlagt, spezielle Förderung Hochbegabter benachteiligt schwächere Schülerinnen und Schüler,…*(vgl. Brunner u. a., 2005, S. 6f). In der Literatur über Hochbegabung wird immer wieder beschrieben, dass auch Lehrer nicht davor gefeit sind, dem einen oder anderen Vorurteil aufzusitzen und dass die Folgen ihres Fehlverhaltens aufgrund ihrer mangelnden Wissens- und Handlungskompetenz für den einzelnen Schüler[1] schwerwiegend sein können (vgl. z. B. Heller u. a. 2006; Ziegler, 2008; Brandenstein, 2003).

Meine Verunsicherung, die die Vorstellung, dass in einer meiner zukünftigen Mathematikklassen ein hochbegabter Schüler sitzen könnte, während meiner Studienzeit ausgelöst hat, war der Ausschlag, mich im Zuge meiner Diplomarbeit mit dem Thema Hochbegabung eingehender zu beschäftigen. Die Ursache für Verunsicherungen liegt häufig in Unwissenheit und diese Unwissenheit wurde leider im Rahmen von Lehrveranstaltungen während meines Studiums nur sehr geringfügig eingedämmt. Nachdem ich mich in den letzten Monaten eingehend in das Thema Hochbegabung vertieft habe, möchte ich an dieser Stelle festhalten, dass meiner Meinung nach eine Auseinandersetzung mit Möglichkeiten der Identifizierung und Förderung von individuellen Begabungen – die zweifelsohne jeder Schüler hat – und insbesondere mit einem kompetenten Umgang mit hochbegabten Kindern und Jugendlichen sowohl im pädagogischen als auch im fachdidaktischen Teil jedes Lehramtstudiums Pflicht sein sollte.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit mathematisch hochbegabten Kindern und Jugendlichen im Alter der Sekundarstufen I und II und fokussiert die Fragen, die in mir während meines Studiums immer lauter wurden: Wie kann ich zukünftig als Mathematiklehrer mit hochbegabten Schülern kompetent umgehen? Welche Möglichkeiten habe ich, auf ihre Bedürfnisse einzugehen? Den Schwerpunkt lege ich dabei auf die Erarbeitung von Theoriewissen, das mir als zukünftigen Lehrer für die Praxis im kompetenten Umgang mit mathematisch begabten Schülern als relevant erscheint, und auf eine detaillierte Auseinandersetzung mit der

[1] Ich möchte an dieser Stelle darauf hinweisen, dass ich in der vorliegend Arbeit bewusst aus Gründen der leichteren Lesbarkeit auf das Anführen beider geschlechtsspezifisch differenzierenden Formen von Begriffen wie z. B. Schülerinnen und Schüler, Lehrerinnen und Lehrer oder Teilnehmerinnen und Teilnehmer verzichtet habe. Sofern nicht explizit anders angegeben, sagen derartige Begriffe nichts über das biologische Geschlecht aus und stehen für männliche und weibliche Vertreter der bezeichneten Gruppe.

Mathematikolympiade als eine Möglichkeit, mathematisch hochbegabte Schüler zu fördern.

Vor der Beschäftigung mit mathematischer Hochbegabung und der Suche nach adäquaten Fördermethoden, stellt sich jedoch die Frage, was der Begriff Hochbegabung eigentlich bedeutet und wer hochbegabt ist. Daher erfolgt im ersten Teil dieser Arbeit eine theoretische Auseinandersetzung mit dem allgemeinen Begriff Hochbegabung. Es wird sein geschichtlicher Bedeutungswandel beleuchtet und einige Definitionsansätze der Wissenschaft vorgestellt, weiters wird auf zwei gängige Modelle von Hochbegabung näher eingegangen: das Drei-Ringe-Modell von Renzulli, sowie dessen Weiterentwicklung im Triadischen Interdependenzmodell von Mönks und im Komponentenmodell von Wieczerkowski und das Münchner Hochbegabungsmodell von Heller. Anschließend werden Möglichkeiten der Identifikation von Hochbegabten beschrieben und ein Einblick in die Diskussion, ob und wie Lehrer hochbegabte Schüler erkennen können, gegeben. Ein besonderes Problem bei der Diagnostik von Hochbegabten stellen sogenannte Underachiever dar. Darunter versteht man Hochbegabte, die ihr Potential nicht in entsprechende Leistung umsetzen (können). Eine adäquate Auseinandersetzung mit dem Phänomen der hochbegabten Minderleister würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, aufgrund der Bedeutung dieses Themas werden jedoch einige Punkte kurz angerissen. Den Abschluss des ersten Teils bilden die Feststellung der Notwendigkeit einer gezielten Förderung von Hochbegabten und ein kurzer Überblick über Fördermöglichkeiten in Form von Akzeleration oder Enrichment.

Der zweite Teil widmet sich der mathematischen Hochbegabung im Speziellen. Es werden unterschiedliche Ansätze, mathematische Hochbegabung zu definieren, vorgestellt und für einen guter Mathematiker erforderliche Fähigkeiten herausgearbeitet. Auf die Frage, die sich dabei unweigerlich aufdrängt, was denn Mathematik überhaupt ist, kann allerdings nur am Rande eingegangen werden. Da besonders im Zusammenhang mit mathematischer Begabung die Frage, welche Rolle das Geschlecht spielt, oft thematisiert wird, und auch unter Lehrern diesbezüglich vorurteilsbehaftete Vorstellungen zu finden sind, wird auch die Diskussion um geschlechtsspezifische Leistungsunterschiede in der Mathematik kurz angerissen. Nach Möglichkeiten der Charakterisierungen mathematischer Hochbegabung werden nun Möglichkeiten der Diagnostik diskutiert. Als Beispiele für spezifische Mathematiktests werden der *Scholastic Aptitude Test* (SAT) und der *Hamburger Test für mathematische Begabung* (HTMB) kurz vorgestellt. Schließlich werden diverse Fördermöglichkeiten in und außerhalb der Schule aufgezeigt.

Im dritten Teil dieser Arbeit wird die unverbindliche Übung Mathematikolympiade als eine Enrichmentmöglichkeit, mathematisch hochbegabte Schüler in der Schule außerhalb des Regelunterrichts zu fördern, detailliert beschrieben: Nach einem Einblick in ihre geschichtliche Entwicklung werden die Struktur und die Inhalte der Vorbereitungskurse sowie die Wettbewerbe in Österreich und auf internationaler Ebene näher beleuchtet. Es kommen (ehemalige) Teilnehmer zu Wort, um von ihren

Erfahrungen zu berichten, und abschließend werden begabtenfördernde Aspekte der Mathematikolympiade herausgearbeitet.

Erster Teil

Theoretische Auseinandersetzung mit dem Phänomen Hochbegabung

1 Historische Entwicklung des Begabungsbegriffs

Menschen mit exzellenten Fähigkeiten haben schon immer ihre Zeitgenossen fasziniert, und die Geschichten über ihre Leistungen ziehen uns noch heute in ihren Bann. Genauso wurde schon seit jeher nach Erklärungen gesucht, warum manche Menschen zu Außergewöhnlichem fähig sind. Dr. Ziegler, Professor an der Abteilung für Pädagogische Psychologie der Universität Ulm, gibt in seinem Einführungswerk *„Hochbegabung“* einen Überblick über die Geschichte der Begriffe Begabung und Talent, den ich im Folgenden kurz nachzeichnen möchte (vgl. Ziegler, 2008).

> *„Bereits der älteste erhaltene Epos der Menschheit berichtet von den außergewöhnlichen Taten des sumerischen Königs Gilgamesch, der vor mehr als 4500 Jahren die mesopotamische Stadt Uruk regierte. Zur Erklärung seiner übermenschlich anmutenden Leistungen griff man nach theologischen Deutungsmustern – und erhöhte Gilgamesch zum Halbgott.“*
>
> (Ziegler, 2008, S. 7)

Durch die gesamte Antike bis ins frühe Mittelalter ziehen sich mythologische und theologische Erklärungsversuche von Leistungsexzellenz:

> *„Konfuzius in China und Platon in Griechenland nannten Kinder, die man heute als begabt bezeichnen würde, ‚himmlische Kinder'. Göttliche Abstammung oder Gnade galten als die Quellen von Heldentum, Klugheit und seherischen Fähigkeiten.“*
>
> (Ziegler, 2008, S. 9)

Auch Paulus bezeichnet in seinen Briefen besondere Fähigkeiten als „Gnadengaben“ (vgl. Röm. 12, 6). Damit bringt das Christentum die antiken Vorstellungen von Begabung in den deutschsprachigen Raum; der deutsche Begriff „Begabung“ leitet sich von „Gabe“ ab, ein Begabter ist im ureigensten Sinn ein Beschenkter (vgl. Brandenstein, 2003, S. 13). Begabungen werden demnach verliehen und sind keine erworbenen Eigenschaften oder Teil der Persönlichkeit. Bis ins Hochmittelalter gelten Erfindungen und Neuerungen als *„Nach-Entdeckungen der Schöpfungen Gottes“* (Ziegler, 2008, S. 10) und nicht als Werk des Menschen.

Ab dem 14. Jahrhundert werden Begabungen zunehmend an die Person und ihre Individualität geknüpft. Der im 16. Jahrhundert erstarkende Protestantismus verlagert den Sinn guter Werke aus dem Jenseits ins diesseitige Leben. Durch diese neue Bewertung eigener Leistungen verstärkt er die Kopplung von Begabungen an die Person. Die Renaissance fügt dieser Kopplung den *„Gedanken der sinnvollen Nutzung von Begabungen“* (Ziegler, 2008, S. 10) hinzu.

> *„Im Jahr 1537 benutzte erstmals der Philosoph Paracelsus den Begriff ‚Talent' im Sinne einer geistigen Anlage, die Personen zur Erreichung persönlicher Ziele nutzen können.“*
>
> (Ziegler, 2008, S. 10)

Auch die Entwicklung des Urheber- und des Patentrechts zeugen davon, dass Begabungen und die daraus hervorgegangenen Leistungen zunehmend als geistiges Eigentum einer Person zugerechnet werden.

Zentrale Gedanken der Aufklärung des 17. und 18. Jahrhunderts entwickeln das Begabungsverständnis weiter. Jedem wird nun die Fähigkeit zugesprochen, kraft seiner Vernunft eigenständig zu denken und neue Erkenntnisse zu schaffen.

> *„Ein typisches Beispiel ist der Begriff des Genies, welches von Wilhelm von Humboldt zum ‚Bildungsideal' erhoben wurde.“*
>
> (Ziegler, 2008, S. 11)

Zunehmend beginnt nun eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Begabungen und herausragenden Leistungen, wenn auch noch durch den *„Geniekult der Aufklärung und Romantik“* (Ziegler, 2008, S. 11) viele irrationale Vorstellungen herrschen:

> *„Genies sind eine andere psychisch-biologische Spezies, die sich in ihren geistigen und emotionalen Eigenschaften so stark von der übrigen Menschheit unterscheidet wie diese sich vom Affen.“*
>
> (Hirsch, 1931, S. 298; zitiert aus Ziegler, 2008, S. 11)

Eine wichtige Vorreiterrolle des heutigen Begabungsbegriffs wird dem deutschen Psychologen William Stern zugesprochen (vgl. Heller, 2001, S. 22; Anderski, 2003, S. 26; Mönks, 1992, S. 17). In seinem Aufsatz *„Psychologische Begabungsforschung und Begabungsdiagnose“*, erschienen 1916 in dem von Peter Peterson herausgegebenen Werk *„Der Aufstieg der Begabten“*, schreibt Stern:

> *„Begabungen an sich sind immer nur Möglichkeiten der Leistung, unumgängliche Vorbedingungen, sie bedeuten noch nicht die Leistung selbst.“*
>
> (Stern, 1916, S. 110)

An anderer Stelle setzt Stern Begabungen mit einem *„Schatz an geistigen Rohstoffen“* oder mit *„Fähigkeiten zu wertvollen Leistungen“* gleich. Er vertritt die Auffassung, dass sich Begabungen nicht von selbst realisieren und nicht zwangsläufig zu hervorragenden Leistungen führen. Damit aus Begabung Leistung folgt, braucht es nach Stern *Interesse* und einen *guten Willen*. Beide gehen nicht zwingend mit einer Begabung einher. Aber ohne Interesse für ein Gebiet kann selbst eine starke Begabung verkümmern und ohne Willenseigenschaften wie Fleiß, Ausdauer, Pflichtbewusstsein, Selbstdisziplin, soziale Gesinnung u. ä. können aus Begabten *„verbummelte Talente“* (Stern, 1916, S. 111) oder skrupellose Größenwahnsinnige werden. Hohe Leistungen sind für Stern nicht ausschließlich Folge von Begabung, sie können auch aus einer Überkompensation einer Schwäche resultieren. Bezüglich der Arten von Begabungen unterscheidet Stern im groben zwischen *Intelligenz* und *Talent*. Unter Intelligenz versteht er eine *„geistige Allgemeinbegabung, die sich durch die Fähigkeit bekundet, auf den verschiedensten Gebieten neuartigen Anforderungen denkend gerecht zu werden“.* Talent meint hingegen eine *„Spezialbegabung, bei der die Fähigkeit zu wertvollen Leistungen auf ein mehr oder minder eng umschriebenes Gebiet beschränkt ist (z.B. sprachliches, musikalisches, zeichnerisches, technisches, mathematisches usw. Talent)“* (Stern, 1916, S. 107).

Im Gegensatz zu Sterns Konzept, dass Begabung nicht mit Leistung gleichzusetzen ist, stehen leistungsbasierte Definitionen von Begabung, für die Hochbegabung gleichbedeutend mit Hochleistung ist. Carl Götze drückt dies in seinem Aufsatz *„Schulbegabung und Lebensbegabung“* – erschienen 1916 im selben Buch wie der oben zitierte Beitrag von Stern – wie folgt aus:

> *„Nur an Leistungen kann Begabung gemessen werden.“*
>
> (Götze, 1916, S. 13)

Damit sei kurz angedeutet wie divergent der Begabungsbegriff bereits zu Beginn der Hochbegabtenforschung diskutiert wurde und auch heute noch wird. Ein guter, geschichtlicher Abriss über die letzten hundert Jahre Hochbegabtenforschung findet sich in Barbara Fegers Buch *„Hochbegabung – Chancen und Probleme“* (erschienen 1988).

2 Der Begabungsbegriff heute

2.1 Im Alltag

Die im dtv-Lexikon gegebene Erklärung entspricht meiner Meinung nach dem, was wir auch im allgemeinen, alltäglichen Sprachgebrauch unter Begabung verstehen:

> *„**Begabung**, angeborene Anlage zu bestimmten Leistungen wie Musikalität, Mathematik, Sprachen, Sport u. a.“*
>
> (dtv-Lexikon, 2006, Band 3, „Begabung“)

Als intelligent oder hochbegabt wird in der Regel jemand eingestuft, der beispielsweise gute Schulnoten hat, mehrere Sprachen spricht, sich besonders geschickt ausdrücken kann oder über einen höheren Bildungsabschluss verfügt (vgl. Fleiß, 2003, S. 13).

Das prototypische Bild eines Begabten im öffentlichen Bewusstsein wurde wiederholt in wissenschaftlichen Untersuchungen erforscht – jedoch mit widersprüchlichen Ergebnissen. Erschwert wird die genaue Identifikation dieses Bildes durch viele unbewusste Vorurteile, die kaum zu erfassen sind. Ziegler führt in Anlehnung an Sternberg fünf Kriterien an, die Hochbegabten typischerweise zugeschrieben werden (vgl. Ziegler, 2008, S. 13f):

- *Das <u>Exzellenzkriterium:</u> jemand ist leistungsmäßig den anderen mindestens auf einem Gebiet deutlich voraus*
- *Das <u>Seltenheitskriterium:</u> jemand hat eine hohe Ausprägung einer Eigenschaft, die bei anderen nur selten so hoch ausgeprägt ist (z. B. Intelligenz)*
- *Das <u>Produktivitätskriterium:</u> die Begabung befähigt die Person zur Herstellung besonderer Produkte oder zu besonderen Handlungen*
- *Das <u>Beweisbarkeitskriterium:</u> die Hochbegabung kann von der Person willentlich unter Beweis gestellt werden, sodass sie beispielsweise durch Tests gemessen werden kann*
- *Das <u>Wertekriterium:</u> die Hochbegabung einer Person zeigt sich in Bereichen, die von der Gesellschaft für wichtig erachtet und geschätzt werden*

Aber so wie bei allen modellhaften Vorstellungen gilt, dass die angeführten Eigenschaften auf konkrete, einzelne, hochbegabte Personen zutreffen können *oder auch nicht*. Natürlich haben auch Lehrer ein prototypisches Bild eines hochbegabten Schülers in sich. Ziegler (2008, S. 14) führt dazu eine Untersuchung von Ernst Hany (Professor für Psychologie an der Universität Erfurt) an, nach der Lehrkräfte *„typischerweise glauben, Begabte* [in diesem Zusammenhang im Sinne von *Hochbegabte*, Anm. CG] *seien im Vergleich zu durchschnittlich Begabten deutlich besser im logischen Denken, hätten eine schnellere Auffassungsgabe, seien wissbegieriger und erzielten gute Noten.“* Als Beispiel dafür, dass diese Eigenschaften nicht auf alle Hochbegabten zutreffen, sei nur kurz auf das Phänomen der Underachiever hingewiesen, auf das später genauer eingegangen wird. Unter Underachiever („Minderleister“) versteht man Hochbegabte, deren schulische Leistungen unter dem Niveau liegen, das man aufgrund ihrer Testergebnisse (z. B.: IQ-Test) erwarten könnte, deren Schulnoten ihre Hochbegabung also nicht widerspiegeln.

2.2 In der Wissenschaft

Wissenschaftlich war die Begabungsforschung zu Beginn der Angewandten Psychologie zugeordnet. Sie hat sich jedoch weiterentwickelt zu einem interdisziplinären Forschungsgebiet der Psychologie, der Soziologie, der Pädagogik und der Medizin (vgl. Heller, 2001, S. 5). Innerhalb der Psychologie ist sie zu einem wichtigen Thema mehrerer Teilbereiche geworden – nicht nur der Angewandten sondern auch der Pädagogischen und der Entwicklungspsychologie u. v. m.

In der wissenschaftlichen Literatur finden sich vielfältige Begabungsbegriffe. Allein durch die unterschiedlichen Arbeitsweisen und Forschungsmethoden der eher naturwissenschaftlich orientierten Psychologie und der geisteswissenschaftlichen Pädagogik ergeben sich differierende Konzepte von Begabung. Aber auch innerhalb der einzelnen wissenschaftlichen Communities gibt es sehr heterogene Zugangsweisen. Detlef Rost, Professor für Pädagogische und Entwicklungspsychologie an der Universität Marburg, bringt in einem Artikel über Hochbegabung im Magazin Gehirn & Geist die Diversität auf den Punkt:

> *„Es gibt vermutlich fast so viele unterschiedliche Auffassungen von ‚Begabung', wie es Begabungsforscher gibt."*
>
> (Rost, 2008, S. 44)

Ziegler spricht gar von einem *„babylonischen Sprachgewirr"*, das herrscht, wenn in der Wissenschaft über Begabung und Hochbegabung gesprochen wird. Bereits 1987 hat Ernst Hany über 100 verschiedene Hochbegabungsdefinitionen zusammengetragen (vgl. Ziegler, 2008, S. 14f). Manche Autoren verwenden die Begriffe *begabt*, *hochbegabt* und *besonders begabt* synonym (z. B. Ziegler, 2008), andere ziehen graduelle Unterschiede (z. B. Trautmann, 2005). Heller erklärt die Vielfalt der Begabungsbegriffe damit, dass Begabung ein *„hypothetischer Konstruktbegriff"* ist, und damit seine Definition von der jeweiligen theoretischen Bezugsbasis abhängt (vgl. Heller, 2001, S. 24).

Wie divergent die Begriffe von Begabung sein können, zeigen schon die bereits angeführten Definitionen von Stern und Götze aus dem Jahr 1916. Exemplarisch seien ein paar Beispiele aus der jüngeren Literatur angeführt:

Ziegler macht seinen Begabungsbegriff abhängig von Expertenurteilen über den wahrscheinlichen weiteren Lern- und Leistungsverlauf einer Person und unterscheidet in der so genannten *delphischen Definition* Talente, Hochbegabte und Experten:

> *„Talent* [im Sinne von *talentierte Person*, Anm. CG]*: eine Person, die* möglicherweise *einmal Leistungsexzellenz erreichen wird*
> *Hochbegabter: eine Person, die* wahrscheinlich *einmal Leistungsexzellenz erreichen wird*
> *Experte (leistungsexzellente / leistungseminente Person): eine Person, die schon* sicher *Leistungsexzellenz erreicht hat"*
>
> (Ziegler, 2008, S. 17)

Wobei er auch die Einflüsse der Umwelt auf die Leistungsentwicklung einer Person mit einbezieht (vgl. Ziegler, 2008, S. 18).

Einen in der Literatur öfter zu findenden Begabungsbegriff spiegelt die so genannte *Marland-Definition* wider (siehe Feger u. a., 1998; Oswald, 2000 und 2002; Richter, 2003):

> *„Hochbegabte und talentierte Kinder sind jene, von berufsmäßig qualifizierten Personen identifizierten Kinder, die aufgrund außergewöhnlicher Fähigkeiten hohe Leistungen zu erbringen vermögen. […] Kinder, die zu hohen Leistungen fähig sind, schließen solche mit gezeigten Leistungen und/oder mit potentiellen Fähigkeiten in irgendeinem der folgenden Bereiche mit ein:*
>
> 1. *allgemeine intellektuelle Fähigkeit*
> 2. *spezifische akademische (schulische) Eignung*
> 3. *Kreativität und produktives Denken*
> 4. *Führungsfähigkeiten*
> 5. *bildnerische und darstellende Künste*
> 6. *psychomotorische Fähigkeiten*

(Marland, 1972, S. 4; zitiert nach Feger u. a., 1998, S. 34)

Eine gängige Weise, Hochbegabung zu bestimmen, ist die über den Intelligenzquotienten – so auch Rost, Leiter der Marburger Hochbegabtenstudie:

> *„In der Regel gilt als hochbegabt, wer einen IQ von über 130 hat und damit zu den klügsten zwei Prozent der Bezugsgruppe gehört. […] Man könnte demnach an Stelle von ‚hochbegabt' auch von ‚hochintelligent' sprechen. Für Hochleistungen in nicht intellektuellen Bereichen wie Sport oder Musik benutzen Psychologen hingegen den Begriff ‚Talent'."*

(Rost, 2008, S. 44)

In der Marburger Hochbegabtenstudie stellt eine hohe Intelligenz (IQ über 130) das ausschließliche Kriterium für Hochbegabung dar. Andere betonen, dass der Intelligenzquotient nur ein Aspekt, ein Zahlenwert ist, der allein noch keine Hochbegabung ausmacht (vgl. Oswald, 2002, S. 33). Oswald, Hanisch und Hager nehmen in ihrer Studie über die Auswirkungen der Teilnahme an Wettbewerben auf die Identifikation von Begabungen und auf die Selbstentdeckung persönlicher Fähigkeiten Abstand zu psychologischen Begabungskonzepten. Sie definieren Begabung nicht als Eigenschaft sondern – in einem pädagogischen Verständnis der Begabung – als Prozess der Begabungsentfaltung. Über den Begabungsbegriff in ihrer Studie schreiben sie:

> *„Begabung wird in dieser Studie in pädagogischem Verständnis als Prozess des Begabens definiert. ‚Begaben' bedeutet: sich so zu verhalten, dass man das Kind (den Jugendlichen, den Partner…) seine besten Eigenschaften und Fähigkeiten – selbst – zu entdecken veranlasst."*

(Oswald, u. a., 2005, S. A)

Um eine Übersicht über die zahlreichen Definitionen von Hochbegabung zu erhalten, führen viele Autoren das Schema von Lucito an (siehe Alvarez, 2007; Feger, 1988 und 1998; Fleiß, 2003 und Trautmann, 2005) – wobei es durchaus auch andere Einteilungsversuche gibt. Lucito unterscheidet sechs Klassen von Definitionen:

1. <u>Ex-post-facto-Definitionen:</u> Dazu zählen Definitionen, die Personen, nachdem sie eine hervorragende Leistung erbracht haben, als hochbegabt einstufen. Diese finden sich vor allem in der frühen Literatur (vgl. Feger, 1988).

2. <u>IQ-Definitionen:</u> Besonders in der Zeit der ersten Intelligenztests wurde Hochbegabung über einen bestimmten IQ-Wert definiert. Aber auch heute gibt es Forscher, die die Definition über den IQ als den anderen Definitionen für *„deutlich überlegen"* halten (vgl. Alvarez, 2007, S. 32). Terman verwendete für seine Hochbegabtenstudie 1921 einen Grenzwert von 140. Heute üblicher ist, ein IQ-Grenzwert von 130 (vgl. Rost, 2008).

3. <u>soziale Definitionen:</u> Zu dieser Klasse zählen Definitionen, die Sonderbegabungen in vielen Bereichen (z. B. künstlerischen) mit einbeziehen.

4. <u>Prozentsatzdefinitionen:</u> Sie definieren einen bestimmten Prozentsatz der Bevölkerung als hochbegabt. Kriterien können dabei Schulnoten, Leistungstests aber auch Intelligenztests bilden. Ein Beispiel könnte sein: Als hochbegabt gelten die 10% eines Jahrgangs mit den besten Schulleistungen.

5. <u>Kreativitätsdefinitionen:</u> Dazu zählen Definitionen, die eine reine Festlegung nach dem Intelligenzquotienten ablehnen und die Kreativität in den Vordergrund stellen. Die Fähigkeit zu originellen, schöpferischen, produktiven Leistungen gilt dabei als Zeichen von Hochbegabung. Als Kriterien für Kreativität gelten üblicherweise Neuheit und Nützlichkeit (Problemangemessenheit) (vgl. Feger, 1988, S. 66). Ein weiterer Aspekt von Kreativität ist divergentes Denken, die Fähigkeit, ungewöhnliche aber angemessene Lösungen für Probleme zu finden (vgl. Zimbardo, 2004, S. 429).

6. <u>Lucitos eigene Definition:</u>

> *„Hochbegabt sind jene Schüler, deren potentielle intellektuelle Fähigkeiten sowohl im produktiven als auch im kritisch bewertenden Denken ein derartig hohes Niveau haben, daß begründet zu vermuten ist, daß sie diejenigen sind, die in der Zukunft Probleme lösen, Innovationen einführen und die Kultur kritisch bewerten, wenn sie adäquate Bedingungen der Erziehung erhalten."*
>
> (Lucito, 1964, S. 184; zitiert nach Feger, 1998, S. 31)

Feger bemerkt zu der vorgestellten Klassifikation, dass Definitionen, die zu den ersten fünf Klassen gehören, zwar noch anzutreffen sind, aber meist als veraltet (weil zu eng gefasst) gelten oder kaum Anhaltspunkte für die Diagnostik bieten.

Lucitos mehrfaktorieller Ansatz, der auch die Förderung betont, spiegelt wichtige Aspekte der heutigen Begabungsdiskussion wider (vgl. Feger, 1998, S. 31).

Eine genauere Auseinandersetzung mit dem Konstrukt Intelligenz wäre an dieser Stelle sicher interessant und spannend. Da es aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, wird darauf verzichtet und werden in Folge nur kurz einige Aspekte angerissen:

Auch wenn breit diskutiert wird, welche Rolle Intelligenztestwerten zukommt, unbestritten ist, dass sie eine wichtige Rolle in der Hochbegabtendiagnostik spielen und die Hochbegabtenforschung mit der Intelligenzforschung von Beginn an verknüpft war. Doch was versteht man unter Intelligenz? Für sie gibt es vermutlich mindestens genauso viele Definitionen und Modelle wie für Begabung. Eine Gruppe von 52 Forschern hat sich auf folgende Definition geeinigt:

> *„Intelligenz ist eine sehr allgemeine geistige Fähigkeit, die unter anderem die Fähigkeiten zum schlussfolgernden Denken, zum Planen, zum Problemlösen, zum abstrakten Denken, zum Verstehen komplexer Ideen, zum raschen Auffassen und zum Lernen aus Erfahrung einschließt."*

(Gottfredson, 1997a, S. 13; zitiert nach Zimbardo, 2004, S. 405)

Die allgemein bekannte Definition von Boring (1923) – Intelligenz sei das, was Intelligenztests messen – bringt auf den Punkt, dass Intelligenz letztlich ein konstruiertes, theoretisches Konzept ist, ein *„von Experten festgelegter Begriff zur Beschreibung kognitiver Fähigkeiten"* (vgl. Rustemeyer, 2007, S. 53), und dass hinter jedem Test eine eigene Definition, ein eigenes Verständnis von Intelligenz steht (vgl. Brandenstein, 2003, S. 27). Auf die Messung von Intelligenz wird im Kapitel über Hochbegabungsdiagnostik genauer eingegangen.

Die Begriffe „Intelligenz" und „Begabung" voneinander abzugrenzen, ist nicht leicht. Häufig werden sie in der Literatur synonym gebraucht. Teilweise wird *Intelligenz* als umfassender Begriff für einen eher unbestimmten Fähigkeitskomplex verwendet und *Begabung* für spezifische Fähigkeiten wie z.B. mathematische Begabung. Teilweise wird jedoch *Intelligenz* mit der intellektuellen Begabung gleichgesetzt und meint damit einen enger gefassten Fähigkeitsbereich – einen Teilbereich von möglichen Begabungen – und *Begabung* stellt den weiteren Begriff dar (vgl. Feger, 1988, S. 61).

Eine viel beachtete neuere Theorie über Intelligenz entwickelte Howard Gardner, Psychologe an der Harvard-Universität, Ende des 20. Jahrhunderts. Er definierte in seinem Buch *„Abschied vom IQ – Die Rahmen-Theorie der vielfachen Intelligenzen"* Intelligenz als *„die Fähigkeit, Probleme zu lösen oder Produkte zu schaffen, die im Rahmen einer oder mehrerer Kulturen gefragt sind"* (Gardner, 1991, S. 9). Er geht davon aus, dass wir Menschen auf mindestens sieben verschiedene, voneinander unabhängigen Arten in der Lage sind, die Welt zu erfahren und in diesen Bereichen

Kompetenzen zu entwickeln. Die Anzahl der Begabungsbereiche ist nicht ein für allemal fixiert, Gardner selbst erweiterte sie 1996 auf neun und erhebt selbst keinen Anspruch, dass seine Liste nun vollständig ist. Er postuliert folgende Intelligenztypen: die logisch-mathematische, die sprachliche, die musikalische, die räumliche, die körperlich-kinästhetische, die interpersonale, die intrapersonale, die naturalistische und die existenzialistische Intelligenz und erweitert den Intelligenzbegriff damit auf Bereiche, die traditionell nicht der Intelligenz sondern Talenten oder Spezialbegabungen zugeschrieben wurden.

Richter charakterisiert Gardners einzelne Intelligenztypen folgendermaßen:

- *Logisch-mathematisch: denkt gerne über Ursache-Wirkung-Zusammenhänge nach und versteht deren Verknüpfung, kann gut rechnen, logisch argumentieren und Probleme lösen. Arbeitet am besten, indem er kategorisiert, und mit abstrakten Mustern und Verbindungen. Am häufigsten stark ausgeprägt bei Mathematikern.*
- *Sprachlich: denkt in Worten und versteht es, Sprache gut einzusetzen. Lernt am besten, indem er etwas sagt, hört oder Worte sieht. Gute Leser, Schriftsteller und Sprecher.*
- *Musikalisch: singt gerne, hört gerne Musik und/oder spielt ein Instrument. Kann ein Musikstück nach dem Gehör nachspielen, erkennt, wenn etwas falsch klingt, und hat gutes Taktgefühl.*
- *Räumlich: denkt in Bildern und korrekten dreidimensionalen Proportionen. Neigt zum Tagträumen und ist sehr fantasievoll. Arbeitet gut mit Objekten. Gute Künstler und Architekten.*
- *Körperlich-kinästhetisch: verwendet Körpersprache und zeigt gute körperliche Koordinationsfähigkeit. Bewegt sich gerne und ist gut im Sport, Tanz oder in anderen Aktivitäten, die Gleichgewichtsgefühl erfordern. Gute Fähigkeiten auch in der Feinmotorik und daher gute Handwerker.*
- *Interpersonal: kann sich gut in andere Menschen einfühlen. Große Empfindsamkeit für die Stimmungen und Motive anderer. Gut beim Teilen und bei Kooperationen. Hohe Führungsqualitäten.*
- *Intrapersonal: eher introvertiert, versteht es, die eigenen Gefühle, Stimmungen und das eigene Verhalten zu erfassen und zu kontrollieren. Bevorzugt es, alleine zu arbeiten. Meist sehr originell.*
- *Naturalistisch: zeigt besondere Fähigkeiten bei Interaktionen mit der Natur, im Klassifizieren von Arten, im Umgang mit Tieren und Pflanzen.*
- *Existenzialistisch: fähig, das eigene Umfeld zu erfassen und den Platz der Dinge im großen System zu verstehen.*

(Richter, 2003, S. 33f)

Für die Entwicklung der einzelnen Typen analysierte Gardner Biographien von Menschen mit hervorragenden Begabungen. Für Gardner findet sich in jedem Menschen eine individuelle Komposition der unterschiedlichen Intelligenzen.

Diagnostische Verfahren zur Messung der Ausprägungen der einzelnen Intelligenzen in einer Person hat Gardner allerdings nicht entwickelt.

3 Modelle der Hochbegabung

Kurze verbale Definitionen können kaum dem komplexen Phänomen der Hochbegabung gerecht werden. In der Forschung wurden daher zahlreiche Modelle entwickelt, die Hochbegabung zu erklären versuchen. Sie gehen unter anderem den Fragen nach Ursachen, Entwicklungsbedingungen (Persönlichkeitsmerkmale und Umweltfaktoren), Einflussfaktoren und Arten von Hochbegabungen nach.

Wie auch bei den Definitionen von Hochbegabung gibt es aufgrund ihrer Vielzahl auch bei den Modellen verschiedene Versuche einer systematischen Einteilung. Ziegler unterscheidet die Erklärungsansätze von Hochbegabung in monokausale und multifaktorielle Modelle. An sein Konzept ist die folgende Vorstellung einiger Modelle angelehnt (vgl. Ziegler, 2008, S. 45-58).

Monokausale Modelle führen Hochbegabung auf eine einzige Ursache – beispielsweise hohe Intelligenz – zurück. Dabei handelt es sich vorwiegend um ältere Modelle, die heute als überholt gelten. Auf die unbefriedigende Situation, dass einfaktorielle Erklärungen dem Phänomen der Hochbegabung nicht gerecht wurden, folgten in der Hochbegabungsforschung zwei Reaktionen: Die einen gaben das Konstrukt Hochbegabung auf (siehe Etikettierungsansatz). Die anderen – zu der die Mehrheit der Forscher zählte – antworteten mit einer Erhöhung der Komplexität der Hochbegabungsmodelle (multifaktorielle Modelle).

3.1 Der Etikettierungsansatz

Nach Ansicht einiger Wissenschaftler – wie z. B. Margolin, Borland oder Gould (vgl. Ziegler, 2008, S. 46) – saß man am Beginn der Erforschung des Begabungsgedankens einem Mythos auf. Der Irrtum bestand darin, zu versuchen, Hochbegabung zu erklären und zu beschreiben, bevor geklärt wurde, ob es so etwas wie Hochbegabung überhaupt gibt. Zu einem überwiegenden Teil stammen Begabte aus sozial privilegierten Schichten, womit sich für Vertreter dieses Ansatzes der Zweifel ergibt, ob Intelligenztests die Intelligenz wirklich valide messen, oder die Ergebnisse von der sozialen Herkunft beeinflusst werden. Auch wird hinterfragt, warum es eine intellektuelle Zweiklassengesellschaft geben soll, wenn die Grenzen offenbar beliebig festgelegt werden und sich wissenschaftlich nicht rechtfertigen lassen.

> *„Nach dem Etikettierungsansatz handelt es sich bei Hochbegabungen um Fiktionen, die sozial konstruiert sind und bestimmten Individuen zugeschrieben werden."*
>
> (Ziegler, 2008, S. 46)

Die Kritik der Etikettierungstheoretiker an der Hochbegabungsforschung fasst Ziegler in zwei zentralen Punkten zusammen:

> *„Erstens werfen sie den Hochbegabungsforschern ein* pseudowissenschaftliches Arbeiten *vor. Es wäre ihnen nicht gelungen, sich auf ihre zentralen Begriffe zu einigen, und darüber hinaus hätten sie fundamentale handwerkliche Fehler begangen. […] Zweitens diene die wissenschaftliche Legitimierung des Begabungsbegriffs dem* sozialen Machterhalt *bestimmter Gruppen."*
>
> (Ziegler, 2008, S.47)

Dieser Ansatz hat viel Widerspruch hervorgerufen. Ihm wurde entgegnet, dass es kaum möglich sei, dass *„ein ganzes Wissenschaftlerheer so lange einer Chimäre aufsitzen könnte und nicht sehr schnell den Hochbegabungsmythos entlarvt hätte"* (Ziegler, 2008, S.47).

3.2 Multifaktorielle Hochbegabungsmodelle

Nachfolgend werden exemplarisch zwei multifaktorielle Ansätze vorgestellt, die in der Literatur oft beschrieben werden:

Zum einen das von Renzulli entwickelte Drei-Ringe-Modell. Seine Grundüberlegungen wurden in Folge wiederholt aufgegriffen und erweitert. Als Beispiele dafür seien das Triadische Interdependenzmodell von Mönks und das Komponenten-Modell von Wieczerkowski und Wagner angeführt.

Zum anderen wird das Münchner Hochbegabungsmodell skizziert, das im Zuge der Münchner Hochbegabtenstudie von einer Forschergruppe um Kurt Heller entwickelt wurde.

3.2.1 Das Drei-Ringe-Modell von Renzulli und seine Weiterentwicklungen

Eine der unzähligen Auswirkungen des Sputnikschocks war es, dass sich der US-amerikanische Psychologe Renzulli mit dem Zustandekommen außergewöhnlicher Leistungen beschäftigte und sein Modell von Hochbegabung entwickelte: „The Three-Ring-Conception of Giftedness" – in der deutschsprachigen Literatur meist als „Drei-Ringe-Modell", „Drei-Kreise-Konzept" oder einfach Renzulli-Modell beschrieben. Er erweitert den damals vorherrschenden Begabungsbegriff, der Hochbegabung mit hoher allgemeiner Intelligenz gleichsetzt, indem er Hochbegabung (giftedness) als die Schnittmenge dreier Bereiche – überdurchschnittliche Fähigkeiten (above average ability), Kreativität (creativity) und Aufgabenverpflichtung (task commitment) – festlegt (siehe Abbildung 1). Im Vordergrund steht für Renzulli, das Zustandekommen von Hochleistungen zu erklären. Damit geht es ihm nicht um prinzipielle Leistungsfähigkeit, sondern um die tatsächliche Leistungserbringung – allerdings nicht ausschließlich in intellektuellen

Bereichen, sondern gleich auf welchem Gebiet. Hochbegabung – hier also verstanden als Hochleistung – kommt durch eine starke Ausprägung aller drei Komponenten zustande. Die von ihm postulierten drei Einzelbereiche stehen gleichberechtigt nebeneinander.

Trautmann erklärt Renzullis drei Faktoren folgendermaßen:

> *„Überdurchschnittliche Fähigkeiten umfassen sowohl die allgemeine Intelligenz (z. B. ein hohes Niveau abstrakten Denkens, die Automatisierung der Informationsverarbeitung) als auch spezifische Fähigkeiten (u. a. die Anwendung allgemeiner Fähigkeiten auf spezielle Wissensgebiete).*
> *Kreativität ist bei Renzulli ein originelles, produktives, flexibles und individuell-selbstständiges Vorgehen im Lösen von Aufgaben […].*
> *Aufgabenverpflichtung bezeichnet in diesem Kontext die Fähigkeit, sich intensiv und über einen längeren Zeitraum einer Aufgabe zu widmen. Sie besteht sowohl aus einer kognitiven, einer emotionalen als auch einer motivational-volitiven Komponente (etwa der gedanklichen Auseinandersetzung).“*

(Trautmann, 2005, S. 14)

Als sehr positiv an Renzullis Modell wird hervorgehoben, dass sein Begabungsbegriff sich nicht auf intellektuelle Leistungen beschränkt. Es betont, dass Menschen auf den verschiedensten Gebieten hochbegabt sein können. Damit umfassen die von Renzulli entwickelten Fördervorschläge für Hochbegabte bewusst sehr viele Kinder. Als Kritikpunkt wird allerdings häufig angeführt, dass nur als hochbegabt gilt – und somit gefördert wird –, wer *augenblicklich* besondere Leistungen zeigt. Dementsprechend wird Hochbegabung nicht als feste Eigenschaft einer Person verstanden, sondern definiert sich dynamisch über das aktuell beobachtbare Verhalten – begabt ist, wer gerade begabtes Verhalten zeigt. Lassen die Leistungen nach, endet auch die Zuschreibung „hochbegabt“ – und damit nach Renzulli die Förderung. Dadurch würden die in der Literatur viel beschriebenen „Underachiever“ (hochbegabte Minderleister) nicht als hochbegabt gelten und auch nicht die Förderung erhalten, durch die sie zu Hochleistungen fähig werden würden. Weiters gilt als Schwäche dieses Konzepts, dass es soziale Einflussfaktoren nicht berücksichtigt und keine messbaren Identifikationskriterien nennt. Intelligenztests oder Schulleistungstests lehnt Renzulli als zu einseitige Auswahlverfahren ab, aber Kreativität und Aufgabenverpflichtung lassen sich schwer messen. Auch fehlt eine Quantifizierung, ab wann eine hohe Ausprägung der drei Bestimmungsfaktoren und damit eine Hochbegabung vorliegen (vgl. Alvarez, 2007; Oswald, 2002 und Trautmann, 2005).

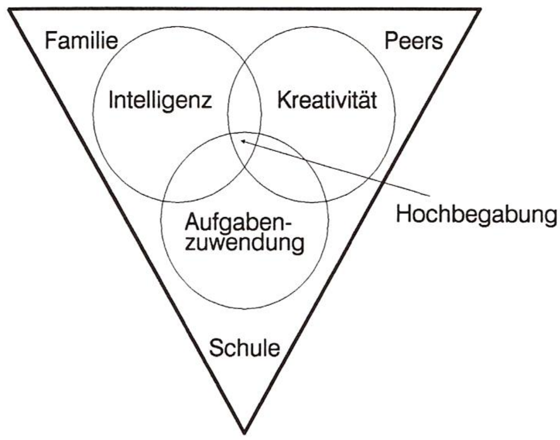

Abb. 1: Das Drei-Ringe-Modell von Renzulli (aus: Alvarez, 2007, S. 33)

Abb. 2: Das Triadische Interdependenzmodell von Mönks (aus: Mönks, 1992, S. 20)

Der niederländische Psychologe Franz Mönks erweitert Renzullis Modell um die sozialen Komponenten Familie, Schule und Peers. In seinem *Triadischen Interdependenzmodell der Hochbegabung* geht Mönks davon aus, dass für die gesunde Entwicklung jedes Kindes eine *„befriedigende Interaktion“* und ein *„fruchtbarer Umgang“* (Mönks, 1992, S. 19) mit seiner Umwelt von Bedeutung sind. Die drei wichtigsten Sozialbereiche bilden dabei Familie, Schule und Freundeskreis bzw. Peers im Sinne von „Entwicklungsgleichen“. Die Triade der für Hochbegabung nötigen personeninternen Faktoren entspricht bei Mönks’ Modell den von Renzulli angeführten Merkmalen überdurchschnittliche Fähigkeiten, Kreativität und Aufgabenverpflichtung. Allerdings sind überdurchschnittliche Fähigkeiten bei Mönks gleichbedeutend mit hoher Intelligenz. Unter ihr versteht er einen Intelligenzquotienten von über 130.

Das für Hochbegabung entscheidende Zusammenwirken von sozialer und personeninterner Triade beschreibt Mönks folgendermaßen:

> *„Im Triadischen Interdependenzmodell der Hochbegabung nehmen* Familie, Schule *und* Freundeskreis *einen zentralen Platz ein: in diesen Sozialumgebungen kann jedes Kind und vor allem das hochbegabte Kind entscheidend gefördert oder gehemmt werden. Daher sprechen wir erst dann von Hochbegabung, wenn die genannten Faktoren, d. h. beide Dreiergruppen, so ineinandergreifen, daß sich eine harmonische Entwicklung vollziehen kann.“*
>
> (Mönks, 1992, S. 20f)

Wie sich die einzelnen Faktoren beeinflussen, konkretisiert Mönks nicht weiter. Abbildung 2 zeigt eine grafische Veranschaulichung des Triadischen

Interdependenzmodells, zu der Mönks selbst bemerkt, dass eine dreidimensionale Darstellung die wechselseitigen Einflüsse besser verdeutlichen würde.

Auch Mönks reduziert – wie Renzulli – Begabung nicht auf den intellektuellen Bereich. Für ihn kann jemand auch auf einem motorischen, sozialen oder künstlerischen Gebiet hochbegabt sein. Allen Begabungen gemeinsam ist, dass sie – egal wie hervorragend sie sein mögen – Begleitung und Förderung erfordern, damit sie sich entwickeln können (vgl. Mönks, 1992).

Angriffsflächen für Kritik bietet Mönks' Konzept durch die fehlenden Ausführungen über die Zusammenwirkung und die Art der Verflechtung der sechs postulierten Bestimmungsfaktoren. Auch werden keine Messverfahren vorgeschlagen und angegeben, ab welchen Ausprägungen der Bestimmungsfaktoren von Hochbegabung zu sprechen ist (vgl. Ziegler, 2008; Brunner u. a., 2005; Trautmann, 2005).

Eine andere Weiterentwicklung von Renzullis Drei-Ringe-Modell stellt das *Komponenten-Modell* von Wieczerkowski und Wagner dar (siehe Abbildung 3).

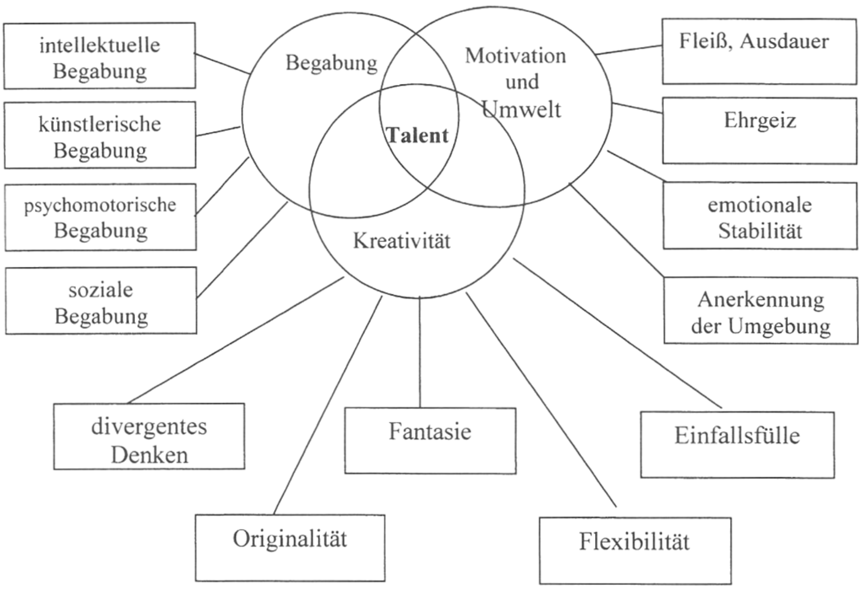

Abb. 3: Das Komponenten-Modell von Wieczerkowski und Wagner
(aus: Oswald, 2002, S. 37)

Auch hier ergibt sich Begabung durch ein Zusammentreffen von drei Faktoren. Wieczerkowski und Wagner ersetzen Begabung – als Bezeichnung für die Schnittmenge – durch den Begriff „Talent". Sie meinen damit aber eigentlich „Leistung" und bleiben damit ganz in der Tradition von Renzulli und Mönks, die unter

Hochbegabung Hochleistung verstehen. Die drei ausschlaggebenden Komponenten für Hochbegabung von Renzulli werden in diesem Modell durch zusätzliche Angaben näher bestimmt (siehe Abbildung 3). So wird verdeutlicht, dass Begabungen auf intellektuellem, künstlerischem, psychomotorischem oder sozialem Gebiet gegeben sein können. Der Faktor „Aufgabenverpflichtung“ von Renzulli wird von Wieczerkowski und Wagner auf „Umwelt und Motivation“ erweitert, womit Mönks Betonung der Umwelteinflüsse berücksichtigt wurde. Er umfasst Fleiß, Ausdauer, Ehrgeiz, emotionale Stabilität und Anerkennung der Umgebung. Der Faktor „Kreativität“ setzt sich zusammen aus divergentem Denken, Originalität, Fantasie, Flexibilität und Einfallsfülle (vgl. Oswald, 2000 und 2002; Waldner-Gstrein, 2004).

3.2.2 Das Münchner Hochbegabungsmodell

Das Begriffsverständnis von Begabung, das der Münchner Hochbegabtenstudie zugrunde liegt, beschreibt Kurt Heller so:

> *„Begabung [lässt sich] als das Insgesamt personaler (kognitiver, motivationaler) Lern- und Leistungsvoraussetzungen definieren, wobei die Begabung*sentwicklung *als Interaktion (person-)interner Anlagefaktoren und externer Sozialisationsfaktoren zu verstehen ist. Entwicklungspsychologisch stellt sich somit Begabung als jener Zustand dar, der sich zu einem bestimmten Zeitpunkt der Ontogenese im Blick auf den Prozeß der individuellen Fähigkeits- und Interessenentwicklung darbietet, d.h. als eine Merkmalskonfiguration, die aus der Wechselwirkung von Lernbedingungen auf seiten der Person (des Individuums) sowie der (sozialen) Umwelt resultiert.“*
>
> (Heller, 2001, S. 23)

Das Münchner Hochbegabungsmodell – laut Ziegler *„eines der weltweit bedeutsamsten multifaktoriellen Begabungsmodelle“* (Ziegler, 2008, S. 50) – setzt Hochbegabung nicht mit Hochleistung gleich. Es geht davon aus, dass neben Begabungsfaktoren auch andere – „nichtkognitive“ – Persönlichkeitsmerkmale und Umweltmerkmale mit bedingen, ob und welche Leistung jemand erbringt, und dass diese Einflussfaktoren selbst in Wechselbeziehung stehen. Das Interesse gilt dabei nicht ausschließlich dem Zustandekommen von intellektuellen Hochleistungen. Als mögliche Leistungsexzellenzbereiche werden Mathematik, Naturwissenschaften, Technik, Informatik und Schach, Kunst (Musik, Malen), Sprachen, Sport und soziale Beziehungen unterschieden. Ebenso können Begabungspotentiale auf verschiedenen Gebieten vorliegen (intellektuelle, kreative, künstlerische oder praktische Fähigkeiten, soziale Kompetenz, Musikalität, Psychomotorik). Gegenstand der Münchener Hochbegabtenstudie sind unter anderem *„Bedingungsanalysen über den Zusammenhang von Begabungspotential und Leistungsprodukt“* (Heller, 2001, S. 28). Dabei wird beispielsweise der Frage nachgegangen, in welchen Persönlichkeits- und in welchen Umweltmerkmalen sich hochleistende Schüler von jenen unterscheiden, die durchschnittliche Leistungen erbringen. In Abbildung 4 sind die postulierten Faktoren dargestellt, von denen abhängt, ob ein Begabungspotential auch in Leistung umgesetzt wird.

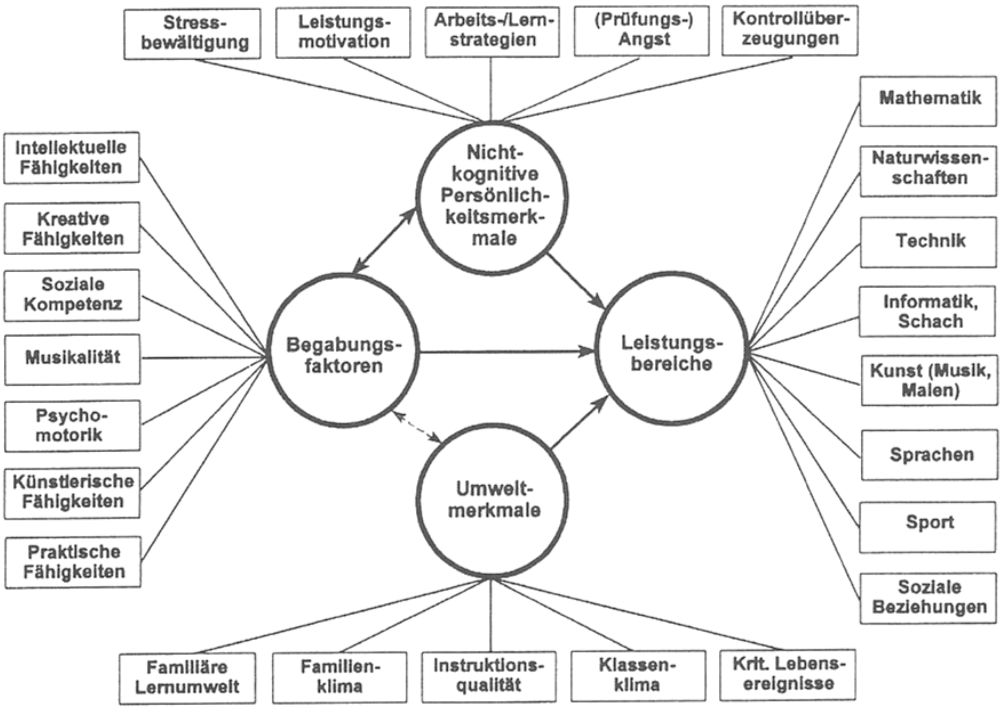

Abb. 4: Das Münchner Hochbegabungsmodell von Heller
(aus: Heller, 2001, S. 24)

In dem Bereich der nichtkognitiven Persönlichkeitsmerkmale gelten gute Stressbewältigung, hohe Leistungsmotivation, effiziente Arbeits- und Lernstrategien, geringe Prüfungsangst (allgemeiner das Fehlen der Angst vor Versagen, Misserfolg u. ä.) sowie Kontrollüberzeugungen, die den Selbstwert steigern, als entscheidend für Hochleistungen. Von Seiten der Umwelt beeinflussen eine unterstützende familiäre Lernumwelt, ein gutes Familienklima, qualitativ gute Instruktionen im Unterricht und ein Klassenklima, in dem Hochbegabte akzeptiert und integriert sind, die Leistungsrealisierung. Kritische Lebensereignisse können durch ihre Herausforderungen Hochleistungen hervorrufen. Sind sie jedoch zu belastend und können sie nicht bewältigt werden, wirken sie sich negativ aus (vgl. Heller, 2001; Brunner u. a., 2005; Oswald, 2002; Ziegler, 2008).

Durch seine Unterscheidung zwischen Begabungspotential und der erbrachten Leistung (Performanz) zählt das Münchner Hochbegabungsmodell zu den so genannten *„Potential-Performanz-Konzeptionen für Begabung“* (vgl. Oswald, 2002,

S. 38ff). Das Gemeinsame dieser Art von Begabungsmodellen sind die explizite Unterscheidung von *Fähigkeit* und *Leistung* sowie die entscheidende Rolle, die Umweltfaktoren zugeschrieben wird. Der Begriff *Fähigkeit* umfasst dabei die *„in einem Menschen vorhandenen Dispositionen“* (Oswald, 2002, S. 38), aus denen möglicherweise Begabungen entwickelt werden. *Leistung* meint die *„manifest gewordene – erkannte und erwiesene – Begabung“* (Oswald, 2002, S. 39). Begabung wird dabei nicht als statische Eigenschaft verstanden, sondern als ein Prozess, als die Entwicklung von Potentialen in Performanz. Ob nun vorhandene Dispositionen in ihnen entsprechende Leistungen umgesetzt werden, hängt entscheidend von der Umwelt ab: Wirkt die Umwelt fördernd, werden Fähigkeiten in Leistung realisiert. Wirkt die Umwelt hemmend, kann es passieren, dass keine adäquaten Leistungen entwickelt werden und die Fähigkeiten verkümmern. Bei *Potential-Performanz-Konzeptionen* handelt es sich primär um allgemeine Modelle der Leistungsentwicklung. Sie versuchen das Zustandekommen von Leistung als Prozess mit mehreren Bedingungsfaktoren zu erklären. Ihre Bedeutung für die Hochbegabungsforschung liegt in der Analyse der Faktoren, die die Leistungsentwicklung beeinflussen, da diese Variablen auch eine entscheidende Rolle dabei spielen, ob und wie Hochbegabung in Hochleistung umgesetzt wird bzw. werden kann. Weiß man, wie die Einflussvariablen beschaffen sein müssen, damit die Zielvariable Leistungsexzellenz entsteht, kann daraus beispielsweise abgeleitet werden, wie Hochbegabte in ihrer Entwicklung gut gefördert werden können, wie es zu Underachievement kommen kann und wie dieser ungünstigen Entwicklung entgegengesteuert werden kann. *Potential-Performanz-Konzeptionen* bieten somit wichtige Anknüpfungspunkte für pädagogische und didaktische Möglichkeiten der Begabungsförderung (vgl. Oswald, 2002, S. 38ff).

Brunner u. a. (2005, S. 24f) kritisieren allerdings die *„ausschließliche Orientierung an der Leistungsentwicklung“*, womit sich zwar Leistungsschwierigkeiten interpretieren lassen, nicht jedoch *„Schulschwierigkeiten in einem umfassenden Sinne“.* Weiters merken sie an, dass zwar der Einfluss sozialer Faktoren betont wird, eine tiefer gehende Analyse allerdings fehlt. So bleibt beispielsweise bei Heller unklar, wodurch genau sich ein „förderliches Klassenklima“ auszeichnet. Alvarez (2007, S. 41f) sieht die Stärke dieser Konzeptionen darin, dass sie demonstrieren, dass die Umsetzung von Begabungen in Hochleistung von vielen Faktoren beeinflusst wird. Sie fügt aber ähnlich wie Brunner u. a. hinzu:

> *„Sie sind jedoch eher als beschreibend einzustufen und in der Hochbegabtensuche und –förderung praktisch nicht einsetzbar, da sie durch eine Vielzahl an Komponenten sehr unspezifisch sind und die Autoren nicht definieren, wie die einzelnen Komponenten zusammenwirken sollen.“*
>
> (Alvarez, 2007, S. 42)

4 Identifikation von Hochbegabung

Der Frage, wie man feststellen kann, ob ein Kind hochbegabt ist, geht immer die Frage voraus, was man unter Hochbegabung versteht. Brunner u. a. verdeutlichen diesen Zusammenhang an dem anschaulichen Beispiel der Diagnose Herzinfarkt:

> *„Einer Diagnose liegen immer bestimmte Definitionen zugrunde. Wenn ein Arzt beispielsweise einen Herzinfarkt diagnostiziert, muss klar definiert sein, was ein Herzinfarkt ist."*
>
> (Brunner u. a., 2005, S. 37)

Aus den vorangegangenen Kapiteln geht deutlich hervor, dass Hochbegabung ein alles andere als klar und eindeutig definierter Begriff ist. Genau das erschwert die Identifikation von hochbegabten Kindern und relativiert eine erfolgte Diagnose, da immer dazugesagt werden muss, auf Basis welchen Begabungsbegriffs die Zuschreibung „hochbegabt" erfolgt. Die angesprochenen Schwierigkeiten bieten Anlass zu der Frage, ob die Diagnostik von Hochbegabungen überhaupt notwendig oder sinnvoll ist. Bei jenen Hochbegabten, die ihr Potential in Hochleistungen umsetzen können, hat eine gezielte Diagnose meist keine Relevanz. Durch ihre außerordentlichen Leistungen ist ihre Hochbegabung *sichtbar* und für jeden *nachvollziehbar* (vgl. Brunner u. a., 2005, S. 37). Brunner u. a. führen zwei Gruppen von Kindern und Jugendlichen an, bei denen die Feststellung ihrer Hochbegabung von Bedeutung ist: Hochbegabte, die ihr Potential nur teilweise oder gar nicht umsetzen können und solche, bei denen ein Zusammenhang zwischen ihrem hohen Begabungspotential und bestimmten Lebenserschwerungen vermutet wird (vgl. Brunner u. a., 2005, S. 37). Heller (2001) betont die Wichtigkeit einer Früherkennung von so genannten Underachievern – also Hochbegabten, die keine ihrem Potential entsprechenden Leistungen zeigen. Er beschränkt die Bedeutung der Diagnostik aber nicht auf Risikogruppen, sondern sieht sie generell als notwendige Voraussetzung für eine individuelle Förderung:

> *„Diagnostisch abgesicherte Informationen über die Situation des Einzelfalles bilden eine unverzichtbare Ausgangsbasis für präventive Maßnahmen oder auch für die interventive Entwicklungsförderung und psychologische Beratung im Konfliktfall."*
>
> (Heller, 2001, S. 30)

Sowohl Brunner u. a. (2005, S. 38 und 40) als auch Heller (2001, S. 31) unterstreichen, dass die Identifikation einer Hochbegabung nur ein Teilaspekt einer umfassenderen Diagnostik – im Sinne einer ganzheitlichen Betrachtung des Menschen – sein kann und eine solche Diagnostik sich auch nicht auf ein Verfahren beschränken darf, sondern alle möglichen Informationsquellen ausschöpfen sollte. Auch sollte die Durchführung von Tests kein Selbstzweck sein, sondern im Rahmen einer konkreten Fragestellung erfolgen. Primär sollte es nicht darum gehen Kindern oder Jugendlichen die Eigenschaft hochbegabt zuzuschreiben, sondern eine Basis zu schaffen, auf der fundierte Entscheidungen für mögliche Fördermaßnahmen und die weitere Begleitung getroffen werden können.

Die Durchführung von Testverfahren zur Feststellung von Hochbegabungen obliegt schulpsychologischem oder sonderpädagogischem Fachpersonal. Daher soll in Folge nur ein kurzer Überblick über mögliche Tests gegeben werden. Lehrpersonen sind meistens nicht dafür ausgebildet, eine gesicherte Diagnose abzugeben. Oft sind sie aber diejenigen, die eine Abklärung anregen und diagnostische Prozesse einleiten. Daher widmet sich Kapitel 4.2 der Frage, wie Lehrpersonen die Begabungen ihrer Schüler einschätzen können.

4.1 Identifikation durch Testverfahren

Auch wenn – wie bereits erwähnt – die Festlegung von Hochbegabung über bestimmte Intelligenzwerte umstritten ist, spielen Intelligenztests in der Hochbegabtendiagnostik nach wie vor eine wichtige Rolle. So ist beispielsweise für die Aufnahme in Hochbegabtenvereine meist ein bestimmter Intelligenzquotient Voraussetzung (z. B.: Mensa in Deutschland e.V. verlangt von Mitgliedern einen IQ über 130, Intertel in den USA sogar einen IQ über 145). Auch die Sir Karl Popper Schule – ein Oberstufengymnasium für hochbegabte Jugendliche in Wien – sieht einen Intelligenztest in ihrem Aufnahmeverfahren vor. Alvarez bezeichnet Intelligenztests sogar als *„die beste Methode [um] zu überprüfen, ob ein Kind sehr begabt ist“* (Alvarez, 2007, S. 47). Als Gründe führt sie die Objektivität, Zuverlässigkeit und Gültigkeit der Tests an. Weiters nennt sie folgende Vorteile von Intelligenztests:

> *„Der Intelligenztest ist anderen Methoden, Hochbegabte auszuwählen, deutlich überlegen. Er ist fairer, genauer und zuverlässiger.“*
>
> (Alvarez, 2007, S. 49)

Andere geben zu bedenken, dass Intelligenztests darauf ausgelegt sind, besonders im mittleren Leistungsbereich zu differenzieren, und dass die Messungenauigkeit in den Extrembereichen stark zunimmt. Besonders leistungsfähige Personen können an die Grenzen des Tests gelangen, wo keine weitere Differenzierung mehr möglich ist (vgl. Wagner, 1986, S. 128).

Die ersten Intelligenztests wurden von Alfred Binet am Anfang des 20. Jahrhunderts in Frankreich entwickelt. Den Begriff des Intelligenzquotienten prägte der deutsche Psychologe William Stern, der das in Tests ermittelte Intelligenzalter zum tatsächlichen Lebensalter ins Verhältnis setzte. Er berechnete den Intelligenzquotienten durch Division des Intelligenzalters durch das Lebensalter und anschließende Multiplikation mit 100. Heute gilt die Intelligenz innerhalb einer hinreichend großen Bevölkerungsgruppe als normalverteilt. Der Intelligenzquotient gibt das intellektuelle Leistungsvermögen einer Person im Verhältnis zu einer

Bezugsgruppe (z. B.: Gleichaltrige) an. Dabei wird von einem Mittelwert von 100 und einer Standardabweichung von 15 IQ-Punkten ausgegangen:

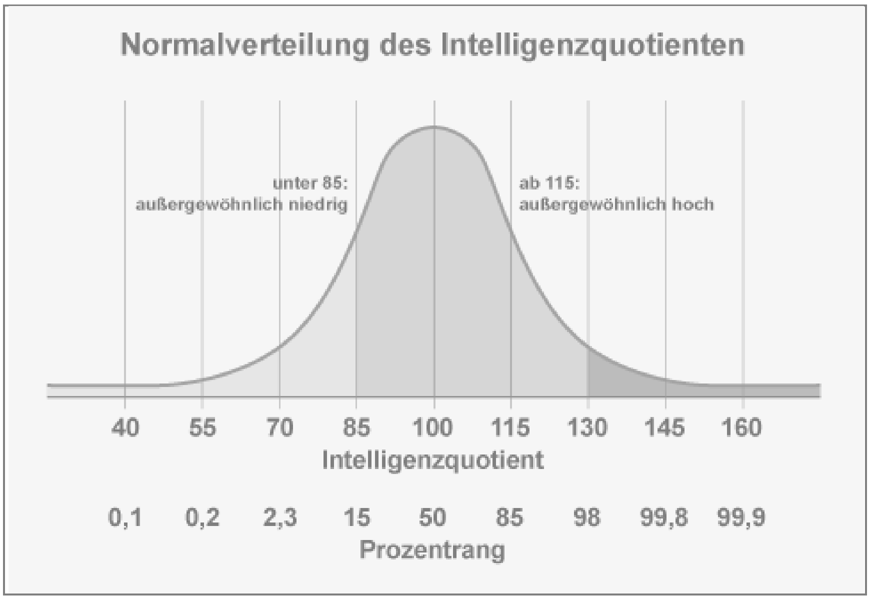

Abb 5: Verteilung der IQ-Werte einer hinreichend großen Bevölkerungsgruppe
(aus: www.hochbegabten-homepage.de/intelligenztest_fuer_kinder.html)

Es steht heute eine Vielzahl von Intelligenztests zur Verfügung, die laufend weiter entwickelt und neu geeicht werden. Dabei handelt es sich um standardisierte Verfahren, die verschiedene Intelligenzfaktoren – wie Merkfähigkeit, Fähigkeit zum logischen Denken, Sprachkompetenz, räumliches Vorstellungsvermögen u. v. a. – messen (vgl. Oswald, 2002, S. 31-33; Zimbardo, 2004, S. 405-410).

Will man Hochbegabung nicht ausschließlich auf IQ-Werte reduzieren, sondern auch bestimmte Persönlichkeits- oder Umweltmerkmale einbeziehen, stehen in der psychologischen Diagnostik Persönlichkeitstests, standardisierte Interviews, Beobachtungs- und Fragebogenverfahren sowie Checklisten zur Erfassung der gefragten Merkmale zur Verfügung (vgl. Reichle, 2004, S. 25).

Eines der formulierten Untersuchungsziele der Münchner Hochbegabtenstudie von Heller war *„die Entwicklung und Erprobung eines differenziellen Diagnoseinstrumentariums zur Identifizierung hochbegabter Kinder und Jugendlicher unter Berücksichtigung verschiedener Begabungsformen“* (Heller, 2001, S. 28). Das Resultat war das so genannte Münchner Hochbegabungstestsystem (MHBT). Dieses berücksichtigt die Untersuchungsdimensionen intellektueller Bereich, kreativer Bereich, soziale Kompetenz, Psychomotorik, Kunst (Musik), nichtkognitive Persönlichkeitsmerkmale und Umweltmerkmale durch die Anwendung verschiedener Messverfahren (Tests, Fragebögen, Lehrerchecklisten,…; vgl. Heller, 2001).

Am Ende einer psychologischen Testung – unabhängig davon welche Methode angewendet wurde – wird meist ein mehrseitiges Gutachten erstellt, dass die erfassten Parameter und ihre Ausprägungen beschreibt. Wie bereits hingewiesen, sollte ein solches Ergebnis nicht Endpunkt, sondern Ausgangspunkt für eine gezielte Beratung und Förderung sein.

4.2 Identifikation durch Lehrpersonen

Ist eine Hochbegabung nicht bereits vor Schuleintritt erkannt worden, spielen Lehrpersonen oft eine wichtige Rolle bei der Identifikation. Bei der Frage, ob sie dafür geeignet sind, gehen die Meinungen seit Beginn der Begabungsforschung auseinander. So warnt Stern in einem Aufsatz aus dem Jahr 1916 ausdrücklich vor Lehrerurteilen über Hochbegabungen:

> *„Allein man verkenne nicht die Grenzen dieses Lehrerurteils. Auch die Lehrer sind sehr verschiedene Individualitäten, sehr verschieden begabt in der natürlichen Verständnisfähigkeit für Menschenseelen, […]; sie stützen ihr Urteil häufig auf Zufallsbeobachtungen, lassen es durch individuelle Zuneigung und Abneigung beeinflußt werden, sind nicht selten geneigt, die spezifisch schulischen Leistungen besonders stark zu bewerten und die anderen Seiten zu übersehen. Sie sind ferner gewöhnt, die Leistungen mehr nach ihrem äußeren Erfolg einzuschätzen, vielleicht auch nicht in der Lage, sich von den einzelnen Fähigkeiten, die bei ihrem Zustandekommen mitgewirkt haben, Rechenschaft zu geben. Und vor allem: durch die großen Klassenfrequenzen sind sie rein physisch verhindert, jedem einzelnen Zögling dasjenige Maß der Beachtung zu widmen, das zur Gewinnung eines sicheren Urteils nötig wäre; daher denn oft genug die Nummern in den Notizbüchern und die Fehlerzahlen der schriftlichen Arbeiten das Hauptmaterial des Lehrerurteils bilden müssen.“*
>
> (Stern, 1916, S. 114f)

Hingegen meint Peterson – Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums Hamburg – in seinem im selben Buch erschienenen Aufsatz:

> *„Die allgemeine Beurteilung der Schülerbegabungen durch die Klassenlehrer ist bedeutend genauer, als man bisweilen anzunehmen geneigt ist. So haben auch experimentelle Untersuchungen von Schulkindern eine wesentliche Übereinstimmung mit dem Lehrerurteil ergeben. Und das ist eigentlich selbstverständlich. Der Lehrer besitzt in den treu aufgezeichneten mündlichen und schriftlichen Leistungen wertvolle Hilfen. Er beobachtet den Schüler in seinem Zusammenleben in der Klasse, auf Wanderungen, beim Spiel; er sieht, wie sich der Schüler in den Schulorganismus einfügt, wodurch*

wichtige soziale Eigenschaften erkannt werden. Wiederholter Austausch der Beobachtungen aller in derselben Klasse unterrichtenden Lehrer, Gespräche mit den Eltern erweitern das selbstentworfene Bild von der Schülerindividualität und ihrer Befähigung.“

(Peterson, 1916, S. 81f)

Untersuchungsergebnisse der jüngeren Forschung relativieren Petersons Einschätzung der Lehrerurteile. Demnach erkennen Lehrpersonen hochbegabte Schüler, wenn sie sehr gute Schulleistungen erbringen. Können Hochbegabte jedoch ihr Potential nicht in eine entsprechende Performanz umsetzen, werden sie von Lehrern kaum als hochbegabt wahrgenommen (vgl. Rustemeyer, 2007, S. 59). Auch Alvarez betont, dass es sich bei den von Lehrpersonen nominierten Hochbegabten meist um die Klassenbesten handelt. Weiters weist sie darauf hin, dass eher *„sehr gut leistende Gutbegabte“* als *„hochbegabte Minderleister“* unter den Lehrernominierungen zu finden sind (vgl. Alvarez, 2007, S. 46). Der Begabungsbegriff der meisten Lehrer ist demzufolge ein leistungsorientierter.

Im Zuge einer Studie über den Kenntnisstand von Grundschullehrern über das Erkennen und Fördern von hochbegabten Kindern merkt Heller an, *„daß die Hochbegabtenidentifikation durch Lehrkräfte im Vergleich zur Identifikation mit Hilfe psychometrischer Tests im allgemeinen eine akzeptable Effektivität, jedoch eine weniger zufriedenstellende Effizienz aufweist“* (Heller, 2006, S. 19). Das bedeutet, dass Lehrpersonen einerseits anfällig für so genannte Betafehler sind – sie *„übersehen“* 40-50%, die laut Testergebnissen ebenfalls als hochbegabt identifiziert wurden (Heller, 2006, S. 78). Bei den nicht erkannten Hochbegabten dürfte es sich überwiegend um Underachiever handeln. Anderseits beurteilen Lehrkräfte aber auch viele Schüler fälschlicherweise als hochbegabt (Alphafehler).

Aber auch wenn die Kompetenz der Lehrpersonen bezüglich der Hochbegabtenidentifikation kontrovers diskutiert wird: Im Allgemeinen wird von ihnen erwartet, dass sie hochbegabte Schüler erkennen und adäquat fördern. Somit stellt sich die Frage, welche Hilfestellungen ihnen zur Verfügung stehen. In der Literatur stößt man wiederholt auf so genannte Checklisten. Dabei handelt es sich um Sammlungen von Merkmalen, die hochbegabte Kinder und Jugendliche typischerweise aufweisen. Im Anhang findet sich zur Veranschaulichung ein Beispiel einer solchen Checkliste zur Vorauswahl potentiell hochbegabter Schulkinder von Reichle und Hermann (aus: Reichle, 2004).

Auch das deutsche Bundesministerium für Bildung und Forschung veröffentlichte 2001 eine Checkliste zur vorläufigen Identifikation hochbegabter Kinder. Gegliedert in *Merkmale des Lernens und Denken, Arbeitshaltung und Interessen* und *Merkmale des sozialen Verhaltens* führt sie folgende für hochbegabte Kinder typische Eigenschaften an:

Merkmale des Lernens und Denkens • *hohes Detailwissen in einzelnen Bereichen* • *für das Alter ungewöhnlicher Wortschatz* • *ausdrucksvolle Sprache, ausgearbeitet und flüssig* • *schnelles Faktenmerken* • *schnelles Durchschauen von Ursache-Wirkung-Beziehungen* • *Suche nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden* • *Erkennen von zugrunde liegenden Prinzipien bei schweren Aufgaben* • *außergewöhnliche Beobachtungsgabe* • *eigeninitiiertes Lesen, oft Bücher, die über die Altersgruppe hinausgehen* • *kritisches, unabhängiges, wertendes Denken*
Arbeitshaltung und Interessen • *völliges Aufgehen in Problemen bei motivierten Hochbegabten* • *Bemühen, Aufgaben stets vollständig zu lösen* • *leichte Langeweile bei Routineaufgaben* • *Streben nach Perfektion* • *Selbstkritik* • *mit Arbeitstempo und Ergebnis nicht schnell zufrieden* • *gerne unabhängiges Arbeiten* • *selbst gesetzte hohe Leistungsziele, Minimum an Anleitung und Hilfe durch Erwachsene* • *Interesse für „Erwachsenenthemen“*
Merkmale des sozialen Verhaltens • *Beschäftigung mit Begriffen wie „Recht und Unrecht“, „Gut und Böse“* • *gehen nicht um jeden Preis mit der Mehrheit mit* • *individualistisch* • *ohne kritische Prüfung keine Akzeptanz von Meinungen von Autoritäten* • *können gut Verantwortung übernehmen, zuverlässig in Planung und Organisation* • *Freunde bevorzugt unter Gleichbefähigten, häufig Älteren* • *gutes Einfühlungsvermögen in andere, daher aufgeschlossen gegenüber politischen und sozialen Problemen*

(www.lernende-region-trier.de)

Im Unterschied zu der Liste von Reichle und Hermann wird hier auf eine Bewertung der Häufigkeit und eine vorgegebene Auswertung verzichtet. In beiden Begleittexten wird ausdrücklich betont, dass die Checklisten nur eine Orientierungshilfe bieten können und keine fundierte Diagnose ersetzen, sie können jedoch der Sensibilisierung dienen. Bei hochbegabten Kindern handelt es sich aber um eine sehr heterogene Gruppe. Die angeführten Verhaltensweisen können auf ein bestimmtes hochbegabtes Kind zutreffen und auf ein anderes nicht, genauso wie einzelne gelistete Merkmale auch auf ein durchschnittlich begabtes Kind zutreffen können.

Der Einsatz von Lehrerchecklisten wird vielfach sehr kritisch gesehen. Alvarez warnt vor einer Überbewertung der durch Checklisten erfolgten Beurteilungen. Die angegebenen Merkmale sind meist unpräzise formuliert und die Einschätzung, ob ein Kind nun eine Eigenschaft aufweist oder nicht, ist meist sehr subjektiv. Dass Checklisten die Zahl richtiger Identifikationen von hochbegabten Schülern durch Lehrkräfte erhöhen können, bestreitet Alvarez. Sie können höchstens einen Hinweis geben, eine Intelligenztestung durchführen zu lassen (vgl. Alvarez, 2007, S. 45).

Ernst Hany, Professor für Psychologie an der Universität Erfurt, versucht in seinem Plädoyer für den Einsatz von Lehrerchecklisten *„Gebt den Lehrern eine Chance"* eine *Lanze für das oft geschmähte Lehrerurteil zu brechen* (Hany, 2007, S. 21). Er hebt hervor, dass es entscheidend vom Begabungsbegriff abhängt, wie brauchbar Lehrereinschätzungen sind. Geht man beispielsweise von einer intelligenzbasierten Begabungsdefinition aus, werden Intelligenztestergebnisse immer von Lehrerurteilen differieren. Anders verhält es sich allerdings, wenn man von einem komplexeren, messtechnisch schwieriger zu erfassenden, pädagogischen Begabungsbegriff ausgeht. Die Identifikation von hochbegabten Schülern durch Lehrer ist besonders in Begabungsbereichen wie beispielsweise dem sozialen, dem kreativen, dem künstlerischem Bereich, in denen keine befriedigenden psychometrischen Messverfahren zur Verfügung stehen, von Bedeutung.

> *„Kritik am Lehrerurteil wird am häufigsten von solchen Leuten geäußert, die ein sehr eng intelligenzbezogenes und eindimensionales Verständnis von Hochbegabung zeigen. […] Es ist demnach gar nicht Aufgabe der Lehrer/innen, Intelligenz zu diagnostizieren. Ihnen obliegt es vielmehr, Einschätzungen zu denjenigen lern- und leistungsrelevanten Verhaltensdispositionen vorzulegen, die für die Einschätzung der individuellen Leistungsfähigkeit und die Planung der Förderung entscheidend wären. […]*
> *Einschätzungsbogen für die Hand von Lehrkräften dürfen also nicht nur nach ihrem psychodiagnostischen Wert in Bezug auf enge und unzureichende Begabungsdefinitionen beurteilt werden; sie erfüllen auch eine wichtige Funktion in der ‚forschenden Praxis' als Grundlage der Professionalisierung von Lehrkräften (Kiper, 2000) und damit zur Gestaltung der Begabtenförderung als selbst gesetztes Entwicklungsziel im Konzept der ‚eigenverantwortlichen Schule' (z. B. Buchen, Horster & Rolff, 2005)."*

(Hany, 2007, S. 22)

Auf seiner Webseite www.schlauseite.de stellt Hany eine Checkliste zur Verfügung, die Lehrern eine Hilfestellung in ihrer Einschätzung bieten soll.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass für Lehrpersonen, die ihre Kompetenzen in der Erkennung und Förderung von hochbegabten Schülern erweitern wollen, eine Möglichkeit der Erwerb eines ECHA-Diploms darstellt. ECHA steht für European Council for High Ability, ein europaweites Netzwerk für alle Belange rund um Hochbegabung. ECHA-Österreich bietet einen eigenen Ausbildungslehrgang für Lehrkräfte zum *Specialist in Gifted Education.*

Abschließend sei angeführt, an wen sich Lehrer (und Eltern) in Österreich wenden können, wenn sie glauben, ein hochbegabtes Kind zu haben. Im Bericht des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur über Begabtenförderung und Begabungsforschung in Österreich von 1996 bis 2006 steht:

> *„Eltern und Lehrer/innen wenden sich – am besten nach Rücksprache mit der Direktion der Schule – also zunächst an die Bundesländer-Koordinationsstellen beim jeweiligen LSR. Dort werden sie beraten und über alle zur Verfügung stehenden Möglichkeiten informiert. Außerdem wird auf Verlangen eine Austestung der Schüler/innen vermittelt. Sind die Möglichkeiten, dem Kind zu helfen, an dieser Stelle erschöpft, kommt das özbf* [Österreichisches Zentrum für Begabtenförderung und Begabungsforschung, Anm. CG] *zum Zug. Handelt es sich um Probleme, die es selbst nicht mehr lösen kann, gelangt die Anfrage hingegen ans Ministerium."*

(www.bmukk.gv.at/medienpool/15239/begabten_neu.pdf , S. 9)

5 Underachievement

Wie bereits festgestellt, ist es von entscheidender Bedeutung, dass Hochbegabungen von Schülern erkannt werden, damit sie optimal gefördert werden können. Besonders oft unerkannt bleiben Hochbegabungen, die nicht in entsprechend gute Leistungen umgesetzt werden. Es sind weit verbreitete Vorurteile, dass hochbegabte Schüler immer gute Schulnoten haben, ihren Lernstoff absolut selbstständig bearbeiten und bravourös ihre Schulkarriere meistern (vgl. Brunner u. a., 2005, S. 7f). Aber es ist eben ein Vorurteil, dass Hochbegabung automatisch Schulerfolg bedeutet. Zwar haben viele Hochbegabte keine Probleme in der Schule, jedoch gibt es andere – und die bilden laut Expertenmeinung keine kleine Gruppe –, die ihre Stärken nicht optimal entfalten können. Sie werden als Underachiever oder hochbegabte Minderleister bezeichnet. Heller erklärt den Begriff *Underachiever* folgendermaßen:

> *„Darunter werden jene Schüler/innen subsumiert, die im Hinblick auf ihre intellektuellen Fähigkeiten in den (Schul-)Leistungen deutlich zurückbleiben, also erwartungswidrig schlechter abschneiden; deren*

psychische und/oder soziale Situation erlaubt es offenbar nicht, ihr Begabungspotential in adäquate Verhaltensleistungen umzusetzen. Experten schätzen, daß bis zu 50% der hochbegabten Schüler/innen als Underachiever unerkannt bleiben, somit also keine individuell angemessene Förderung erfahren.“

(Heller, 2001, S. 31)

Angesichts der hohen Zahl der Betroffenen, drängt sich die Frage auf, warum so viele unter dem für sie prinzipiell möglichen Leistungsniveau bleiben. Holling, Vock und Wittmann stellen fest, dass Underachiever typischerweise einen Mangel an Lern- und Arbeitstechniken aufweisen:

> *„Sie* [Underachiever, Anm. CG] *haben z. B. die Fähigkeit, ihre Arbeit zu strukturieren, d.h. nicht erst auf den letzten Drücker mit einer Aufgabe zu beginnen, sondern sich die Zeit angemessen einzuteilen, nur unzureichend entwickelt. Fähigkeiten wie diese sind jedoch für den Erfolg in höheren Schulklassen, in Ausbildung, Studium und Beruf notwendig.“*

(Holling, Vock u. Wittmann, 2001, S. 18)

Als weitere, mögliche Ursachen für Schulversagen von Hochbegabten nennt Fleiß (2003, S. 19) Anpassungsschwierigkeiten, Unterforderung im Unterricht, Ausgrenzung und Stigmatisierung. So kann ständige Unterforderung in der Schule beispielsweise dazu führen, dass *„jemand seine Leistung verweigert und das Interesse am Engagement völlig verliert“* (Fleiß, 2003, S. 22f). Hochbegabte haben auf kognitiver, affektiver und sozialer Ebene besondere Bedürfnisse, die in der Schule oft zu wenig berücksichtigt werden. So beschreibt Brandenstein (2003, S. 42), dass Kinder, die selbstständig Lösungen erkennen, oft Schwierigkeiten haben, sich an vorgegebene Lösungswege zu halten. Vorgeschriebene Zwischenschritte, die sie nicht brauchen, können für sie zum Problem werden.

Aber abgesehen vom Leistungsversagen, weisen Underachiever oft noch weitere Besonderheiten auf: Als charakteristisches Verhaltensmuster beschreiben Holling, Vock und Wittmann, dass Underachiever *„einerseits ungewöhnliche Fragen stellen und kluge Kommentare geben, es jedoch anderseits immer wieder nicht schaffen, konkrete Anforderungen zu bewältigen“* (ebd. S. 18). Reichle führt folgende Eigenschaften an, die oft bei Underachievern anzutreffen sind:

> *„Sie zeigen öfter Auffälligkeiten in ihrer Persönlichkeit und ihrem Sozialverhalten, sind schüchterner, impulsiver, emotional erregbarer, verfügen über weniger Willenskontrolle, sind weniger glücklich und beliebt.“*

(Reichle, 2004, S. 30)

Eine erfolgte Entwicklung zum Underachiever zu korrigieren, erfordert meist eine intensive Zusammenarbeit von Betroffenen, Eltern, Lehrern und Psychologen. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze und Behandlungsprogramme. Schwerpunkte stellen meist eine Verbesserung von Arbeitsverhalten und Selbstwert dar.

Als eine wichtige Präventivmaßnahme, um die Fehlentwicklung zum Underachiever zu verhindern, wird in der Literatur wiederholt eine individuelle, in Tempo und Anforderung angemessene Förderung betont.

6 Förderung von Hochbegabten

In der Diskussion um Hochbegabtenförderung wird von Kritikern immer wieder ihre Notwendigkeit und Rechtfertigbarkeit in Frage gestellt. Heller bezeichnet die Meinung, dass hochbegabte Kinder und Jugendliche keiner besonderen Unterstützung oder Beratungshilfe bedürfen, als *„scheinbar unausrottbares Vorurteil"*, das *„inzwischen zu den wissenschaftlich am besten widerlegten Annahmen gehört"* (Heller, 2001, S. 31). Als Argumente gegen eine Förderung Hochbegabter werden die dadurch anfallenden Kosten und die *„Chancenminderung für nicht hochbegabte Kinder (denen durch die Hochbegabtenförderung Lerngelegenheiten entzogen würden)"*, sowie die mögliche Entstehung eines *„falschen Elitebewußtseins"* (Hochbegabte würden zu *„arroganten Außenseitern erzogen"*) ins Rennen geführt. Auch wird befürchtet, dass *„Fördermaßnahmen das ‚Fachidiotentum' begünstigen"* und *„insgesamt zu einer ungünstigen Persönlichkeitsentwicklung führen könnten"* (Heller, 2001, S. 35). Nach Heller ist keines dieser Argumente empirisch belegt, wenngleich er einräumt, dass sie in einzelnen Fällen zutreffen können. Befunde aus der Münchner Hochbegabtenstudie und anderen Untersuchungen zeugen davon, dass *„die Versäumnisse durch Nichtförderung hochbegabter Kinder und Jugendlicher weitaus gravierendere Folgen haben, indem sie etwa zu Entwicklungsbeeinträchtigungen und erheblichen Erziehungsproblemen führen können"* (Heller, 2001, S. 35). Eine mögliche Fehlentwicklung, die aus nicht adäquater Förderung resultieren kann, – die zum Underachiever – wurde bereits im vorigen Kapitel beschrieben.

Als Argument für Sonderprogramme für Hochbegabte werden neben der Vermeidung von negativen Folgen für die Betroffenen auch gesellschaftspolitische Überlegungen angeführt. So schreibt Gallagher:

> *„Aus der Unterstützung hochbegabter Kinder bei der Entwicklung ihres Potentials resultiert gleichzeitig ein Nutzen für die Gesellschaft als Ganzes."*
>
> (Gallagher, 1986, S. 18)

Somit zählen auch die Wichtigkeit gesellschaftlicher Produktivität, die Erzeugung neuer Ideen, neuartiger Gegenstände, verbesserter Dienstleistungen usw. zu Gründen für eine Förderung Hochbegabter (vgl. Gallagher, 1986, S. 18). Auch Reichle führt an, dass eine Nichtförderung Hochbegabter eine *„Verschwendung von Ressourcen"* bedeutet:

> *„So mancher Jugendlicher könnte schon zwei Jahre früher mit dem Studium beginnen, wenn seine Begabung nur entdeckt würde und es*

einen Weg gäbe, ihm die Schule zu verkürzen. Diese zwei Jahre kosten nicht nur das Geld der Eltern […], sie gehen auch einer Rentenkasse und einem Arbeitgeber verloren, der diesen jungen Menschen erst zwei Jahre später in Lohn und Brot nehmen kann."

(Reichle, 2004, S. 16)

Der im Lehrplan verankerte Auftrag, jeden Schüler nach Möglichkeit zu den seinen Anlagen entsprechenden besten Leistungen zu führen, zeugt von einem Bekenntnis der österreichischen Schulpolitik nicht nur zur Förderung Leistungsschwacher sondern auch Hochbegabter.

Aber was brauchen Hochbegabte? Wie schon erwähnt, handelt es sich bei hochbegabten Kindern und Jugendlichen, um eine sehr heterogene Gruppe mit teils recht unterschiedlichen Bedürfnissen. Damit kann es nicht <u>ein</u> Programm geben, das alle angemessen fördert. In seiner Zusammenfassung der wichtigsten Aussagen der 6. Weltkonferenz über hochbegabte und talentierte Kinder schreibt Wieczerkowski:

„Einig waren sich alle Teilnehmer, daß der Vielfalt von Hochbegabung eine Vielfalt von Fördermaßnahmen den individuellen Bedürfnissen des Kindes entsprechen muß."

(Wieczerkowski, 1986, S. 10)

Eine gezielte Förderung setzt demzufolge – wie bereits im Kapitel über die Identifikation von Hochbegabungen angesprochen – eine genaue Diagnostik voraus, in der die individuellen Bedürfnisse und die spezifischen Merkmale des hochbegabten Kindes erfasst werden. Bei der Auswahl von Fördermaßnahmen sollte das betroffene Kind nicht auf seine Leistungsfähigkeit reduziert, sondern die Entwicklung seiner Gesamtpersönlichkeit einbezogen werden, denn Leistungsexzellenz kann nicht langfristig erbracht werden, wenn z. B. die emotionale und soziale Entwicklung vernachlässigt werden (vgl. Lehmann u. Jüling, 2004, S. 35).

6.1 Fördermöglichkeiten

An dieser Stelle soll nur einer kurzer Überblick über mögliche Fördermaßnahmen gegeben werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird dann auf spezifische Möglichkeiten im Rahmen des Mathematikunterrichts genauer eingegangen.

In der Literatur werden vorwiegend zwei Kategorien von Fördermaßnahmen unterschieden: *Akzeleration* und *Enrichment*. Des Weiteren gibt es die Möglichkeit diese beiden Formen zu kombinieren. Akzeleration bedeutet eine Beschleunigung der Schullaufbahn, ein schnelleres (als regulär vorgesehenes) Durchlaufen des Bildungsweges. Dazu zählen beispielsweise Maßnahmen wie eine vorzeitige Einschulung, das Überspringen von Klassen, ein rascherer Fortschritt in einzelnen Fächern (z. B. durch Teilnahme am Unterricht in höheren Klassen) oder ein schnelleres Fortschreiten im gesamten Lehrplan (z. B. in eigenen Hochbegabtenklassen).

Laut Richter liegen einem Einsatz von Akzelerationsmaßnahmen folgende Annahmen zugrunde:

1. *Hochbegabte Schüler unterscheiden sich von ihren Alterskollegen im wesentlichen in der Geschwindigkeit, mit der sie neues Wissen erwerben können.*
2. *Eine raschere Abfolge der Lehrschritte oder das Überspringen von Klassen befriedigt viele Bedürfnisse von hochbegabten Schülern.*
3. *Der Inhalt der Lehrpläne auf allen Stufen der Schule entspricht im allgemeinen den Bedürfnissen der hochbegabten Schüler und stellt auch für sie eine Herausforderung dar. Es wird ihnen lediglich durch künstliche und inadäquate Alters- und Klassenbarrieren der Zugang verwehrt.*

(Richter, 2003, S. 70)

Unter Enrichment versteht man ein Anreichern des Lehrangebots. Dies kann sowohl eine Verbreiterung der Lehrinhalte durch zusätzliche Themen als auch eine Vertiefung von Gebieten des regulären Lehrplans bedeuten. Zu Enrichmentmaßnahmen gehören unter anderem das Belegen zusätzlicher Fächer, die Teilnahme an Zusatzangeboten wie Leistungskursen, Wettbewerben, Sommerakademien oder Internetkursen, aber auch das Anbieten von vertiefenden Lernmaterialien im Regelunterricht.

Für eine Entscheidung zu Enrichmentmaßnahmen sprechen nach Richter folgende Annahmen:

1. *Der reguläre Lehrplan ist zu eingeschränkt und für hochbegabte Schüler langweilig.*
2. *Unabhängig vom Lehrinhalt muss die Unterrichtsmethode für die Bedürfnisse der hochbegabten Schüler modifiziert werden.*
3. *Das Wohlbefinden der Schüler sollte der zentrale Punkt von Modifikationen des Lehrplans sein.*

(Richter, 2003, S. 71)

Mischformen stellen zum Beispiel Spezialschulen für Hochbegabte (wie die Sir-Karl-Popper-Schule in Wien) oder die vorzeitige Zulassung zum Studium dar.

Eine Zusammenfassung der rechtlichen Regelungen rund um Fördermaßnahmen wie z. B. frühzeitiges Einschulen oder das Überspringen von Klassen[2] in Österreich findet sich im Bericht des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur über Begabtenförderung und Begabungsforschung von 1996 bis 2006 (online verfügbar

---

[2] Zum Überspringen von Klassen siehe auch den Artikel „*Das Überspringen von Jahrgangsklassen - Begabtenförderung im Schulsystem*“ von Oswald, verfügbar unter: www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/uberspringen_oswald_01

unter: www.bmukk.gv.at/medienpool/15239/begabten_neu.pdf). Des Weiteren sind dort auch die Tätigkeiten und Aufgaben der drei Ebenen der Begabtenförderung in Österreich – das Bundesministerium, das Österreichische Zentrum für Begabtenförderung und Begabungsforschung (ÖZBF) in Salzburg und die Bundesländer-Koordinationsstellen für Begabtenförderung bei den Landesschulräten – beschrieben.

Zweiter Teil

Mathematische Hochbegabung

7 Versuche einer Definition

Wie bereits im ersten Teil dieser Arbeit ausgeführt wurde, ist Begabung alles andere als ein eindeutig verwendeter Begriff. So verwundert es wenig, dass auch mathematische Hochbegabung unterschiedlich definiert wird. Wie divergent die Auseinandersetzungen mit mathematischer Begabung verlaufen, lässt sich unter anderem daran erkennen, dass es nicht nur unterschiedliche Modelle bezüglich der Komponenten von mathematischer Begabung gibt, sonder auch über die Existenz einer mathematikspezifischen Hochbegabung Uneinigkeit herrscht. So vertreten manche die Auffassung, dass eine mathematische Hochbegabung Zeichen einer hohen allgemeinen Begabung ist, für andere stellt sie eine eigene Form einer Spezialbegabung dar. König beschreibt 1986 diese Grundsatzdiskussion folgendermaßen:

> *„Einige sind der Meinung, daß eine Person für eine größere Breite von Gebieten potentiell begabt ist, und daß das Gebiet, auf dem die Begabung am stärksten realisiert wird, letztlich sekundär sei. Ein erfolgreicher Mathematiker hätte, unter Zugrundelegung dieser Hypothese, ebenso ein erfolgreicher Arzt, Ingenieur oder Dolmetscher werden können. Daß er Mathematiker wurde und seine Fähigkeiten gerade auf diesem Gebiet zu einem hohen Niveau entwickelt hat, wird von vielen einzelnen Faktoren abhängig gewesen sein, angefangen bei Bedingungen im Elternhaus, in der Schule, bei der Entwicklung seiner Interessen bis zu evtl. frühen Erfolgen im Unterricht und guten Lehrern […]. Andererseits gibt es in der neueren Zeit Untersuchungen, die die Annahme einer speziellen Begabungsstruktur erhärten lassen […]. Diese Ergebnisse stützen die Forschungshypothese, wonach es spezielle Begabungen gibt.“*
>
> (König, 1986, S. 86f)

König führt Untersuchungen und Beobachtungen aus der Praxis an, die die Annahme spezieller Begabungen stützen und die These einer allgemeinen Begabungsstruktur verwerfen, zitiert aber auch Forscher, die die Existenz einer speziellen mathematischen Begabung verneinen (vgl. König, 1986, S. 88).

Selbst 20 Jahr später scheint diese Frage noch nicht gelöst. Denn auch Bardy misst in seiner Auseinandersetzung mit mathematischer Begabung 2007 der Frage, ob *„mathematische Begabung Ausdruck einer spezifischen kognitiven Charakteristik oder – zumindest in einem beträchtlichen Ausmaß – das Resultat hoher allgemeiner Intelligenz [ist]"* (Bardy, 2007, S. 39), besonderes Interesse bei. Er zitiert drei Hypothesen von Heilmann und führt für alle drei Belege aus Untersuchungen und einleuchtende Argumente an.

> *„Für Heilmann (1999, S. 37) sind bezogen auf das Verhältnis von allgemeiner Intelligenz und mathematischer Begabung folgende drei Hypothesen nahe liegend: Außergewöhnliche mathematische Leistungen könnten zurückgeführt werden auf*
> 1. *die hohe Ausprägung spezifischer mathematischer Fähigkeiten,*
> 2. *die hohe Ausprägung allgemeiner intellektueller Fähigkeiten in Kombination mit spezifischen mathematischen Fähigkeiten,*
> 3. *die hohe Ausprägung allgemeiner intellektueller Fähigkeiten, ohne dass spezielle mathematische Fähigkeiten angenommen werden."*
>
> (Bardy, 2007, S. 39f)

Entsprechend der drei Hypothesen werden nun verschiedene Theorieansätze vorgestellt. Die Einteilung ist dabei an die von Käpnick in seiner Habilitationsschrift *„Mathematisch begabte Kinder"* getroffenen angelehnt (vgl. Käpnick, 1998). Zuerst werden Standpunkte angeführt, die die dritte Hypothese – dass allgemeine Hochbegabung mathematische Begabung inkludiert – stützen. Dann werden Theorien vorgestellt, die von der Existenz isolierter mathematischer Begabung (erste Hypothese) ausgehen, um schließlich Ansätze zu beschreiben, die mathematische Begabung als das Produkt verschiedener Komponenten charakterisieren (zweite Hypothese).

7.1 Mathematische Begabung als Teil einer hohen allgemeinen Intelligenz

Wie bereits im Kapitel 2.2 angerissen wurde, spielt der Begriff der Intelligenz noch heute in vielen Begabungskonzepten eine zentrale Rolle. Es wurde darauf hingewiesen, dass es zwar viele divergierende Auffassungen über Intelligenz gibt, sich aber eine Gruppe von Forschern auf eine Definition geeinigt hat, nach der Intelligenz eine sehr allgemeine geistige Fähigkeit ist, die unter anderem die Fähigkeiten zum schlussfolgernden Denken, zum Planen, zum Problemlösen, zum abstrakten Denken, zum Verstehen komplexer Ideen, zum raschen Auffassen und zum Lernen aus Erfahrung einschließt. Auch viele heute verwendete Intelligenztests basieren auf der Annahme, dass Intelligenz als *bereichsunspezifische* Fähigkeit mathematisches Leistungsvermögen einschließt (vgl. Käpnick, 1998, S. 66). Zu den in der Literatur oft genannten Intelligenztheorien zählen das

Intelligenzstrukturkonzept von Guilford, die Generalfaktorenanalyse von Spearman und die Zweifaktorentheorie von Cattel. Diese drei so genannten Faktorentheorien sehen die Struktur der menschlichen Intelligenz als ein zusammenhängendes System von einem bzw. mehreren Generalfaktoren und einer bestimmten Anzahl spezieller Faktoren (vgl. Käpnick, 1998, S. 66). Als Generalfaktoren werden auch wichtige mathematische Fähigkeiten wie beispielsweise *„räumliches Vorstellungsvermögen“*, *„schlussfolgerndes Denken“* oder *„Rechenfähigkeiten“* postuliert. Unter Begabung wird in den Faktorentheorien eine hohe bereichsunspezifische Intelligenz verstanden, als deren Bestandteil die mathematische Begabung gesehen wird. In der Begabungsdiagnostik haben die Faktorentheorien durch die auf ihnen basierenden Intelligenztests nach wie vor eine große Bedeutung (vgl. Käpnick, 1998, S. 69f).

7.2 Mathematische Begabung als bereichsspezifische Intelligenz

Als Beispiel einer Theorie, die mathematische Begabung nicht als Bestandteil einer hohen, allgemeinen Intelligenz sieht, sei Gardners Theorie der multiplen Intelligenzen angeführt, in der er – wie bereits in Kapitel 2.2 dargestellt wurde – neben acht anderen Intelligenzen die *logisch-mathematische Intelligenz* als eigenständiges, bereichsspezifisches Fähigkeitspotenzial postuliert.

Zur Herausarbeitung einer Charakteristik der logisch-mathematischen Intelligenz analysierte Gardner biografisches Material bekannter Mathematiker und fragte sich, was die Arbeit eines Mathematikers auszeichnet und welche Fähigkeiten sie erfordert. Einige Zitate sollen einen kleinen Einblick in seine Feststellungen geben:

> *„Der Mathematiker muß absolut genau und immer skeptisch sein; kein Faktum darf akzeptiert werden, bis es durch Schritte, die von allgemein anerkannten Grundprinzipien abgeleitet sind, exakt bewiesen wurde. […]*
> *Die wohl wichtigste und unverzichtbarste Begabung des Mathematikers ist sein Geschick im Umgang mit langen Beweisketten.“*

(Gardner, 1991, S. 133)

> *„Heutige Mathematiker bestehen darauf, daß John von Neumann ihr größter Fachkollege der vorigen Generation war. Zu den Bewertungskriterien gehören die Fähigkeiten, einen Arbeitsbereich abzustecken und zu entscheiden, ob er interessante Probleme birgt, der Mut, schwierige und anscheinend unlösbare Probleme aufzugreifen, und die Fähigkeit, außerordentlich schnell zu denken.“*

(Gardner, 1991, S. 135)

> *„Offenbar beinhaltet mathematisches Talent die Fähigkeit, brauchbare Ideen zu haben und ihre Implikationen zu ermitteln. […]*
> *Das wichtigste an der mathematischen Meisterschaft ist die Fähigkeit,*

> *wichtige Probleme zu erkennen und zu lösen. Was das Erkennen vielversprechender Probleme ermöglicht, scheint den Mathematikern selbst unklar zu sein.“*
>
> (Gardner, 1991, S. 137)

> *„[Die] Fähigkeit, rasch zu rechnen, [ist] für Mathematiker bestenfalls ein ephemerer Vorteil; Verallgemeinerungs- und Abstraktionsvermögen ist auf alle Fälle wichtiger.“*
>
> (Gardner, 1991, S. 147)

> *„Natürlich gibt es Muster oder Ordnungen, wohin man schaut; banale und bedeutsame; und es ist die besondere Begabung der Logiker und Mathematiker, diese Muster zu entdecken.“*
>
> (Gardner, 1991, S. 159)

Käpnick fasst die wesentlichen Merkmale mathematischer Begabung nach Gardners Konzept zusammen als:

> - *„Fähigkeiten im flexiblen Umgang mit Regeln der Logik*
> - *Fähigkeiten im Erfassen und Speichern mathematischer Sachverhalte*
> - *Fähigkeiten im Erkennen von Mustern und*
> - *Fähigkeiten im Finden und Lösen von Problemen“*
>
> (Käpnick, 1998, S. 72)

Nach Gardner bestehen zwischen den einzelnen, bereichsspezifischen Intelligenzen Querverbindungen; in Bezug auf die *logisch-mathematische Intelligenz* spricht er von *produktiven Interaktionen* zwischen ihr und der *räumlichen Intelligenz*, hält aber seine Trennung der beiden für berechtigt (Gardner, 1991, S. 158). Für Käpnick stellt sich allerdings die Frage, warum Gardner gerade diese beiden von einander scharf abgrenzt:

> *„[Mir ist] unklar, warum Gardner prinzipiell räumliche von logisch-mathematischen Intelligenzen trennt. Geometrie gehört traditionell zu den Hauptinhalten der Mathematik, und viele Probleme der Analysis, der Algebra oder der Kombinatorik sind untrennbar mit geometrischen Fragestellungen verknüpft, was sich nicht zuletzt darin zeigt, daß geometrische Veranschaulichungen bzw. Lösungsmethoden für das Bearbeiten arithmetischer Themenkreise nützlich sind. Psychodiagnostiker haben dementsprechend wiederholt Korrelationen zwischen dem räumlichen Wahrnehmungs- und Vorstellungsvermögen und visuellen Denkfähigkeiten auf der einen Seite und einer hohen mathematischen Leistungsfähigkeit von Schülern auf der anderen Seite identifiziert.“*
>
> (Käpnick, 1998, S. 72)

7.3 Mathematische Begabung als Produkt verschiedener Komponenten

Wie bereits im ersten Abschnitt beschrieben, ist der traditionelle Begabungsbegriff, der Begabung mit hoher Intelligenz gleichsetzt, manchen Forschern zu eng. Auch herrscht Uneinigkeit darüber, inwieweit ein hoher Intelligenzquotient mit einer besonderen mathematischen Begabung korreliert (vgl. Beerman, Heller u. Menacher, 1992, S. 15). Einige Wissenschaftler entfernen sich daher von der einseitigen Orientierung an der Intelligenz, forschen nach weiteren Komponenten, die eine mathematische Begabung beeinflussen können, und arbeiten an einer prozessorientierten Charakteristik mathematischer Fähigkeiten.

Eines der ersten multifaktoriellen Begabungsmodelle stellte Renzulli vor. In seinem Drei-Ringe-Modell erklärt er Hochbegabung (giftedness) als das Zusammenkommen der drei Faktoren *überdurchschnittliche Fähigkeiten* (above average ability), *Kreativität* (creativity) und *Aufgabenverpflichtung* (task commitment) (siehe Kap. 3.2.1). Renzulli geht in seiner Theorie nicht auf die Besonderheiten der mathematischen Begabung ein, dennoch scheint die Integration der Kreativität als Einflussfaktor auch für Leistungen im mathematischen Bereich von Bedeutung:

> *„Die Erweiterung des Begriffs der Begabung um die Kreativität erscheint für die Kennzeichnung der Spezifik mathematischer Begabungen bedeutungsvoll, da produktives mathematisches Tätigsein nicht unwesentlich durch die Qualität von Ideen (Phantasie, Einfallsreichtum, Originalität) bestimmt wird."*

(Käpnick, 1998, S. 75)

Das Lösen komplexer Probleme zählt zweifelsohne zu einer wichtigen Tätigkeit in der Mathematik, daher sind für die Frage nach der Charakteristik mathematischer Hochbegabung einige Ergebnisse der Kognitionspsychologie interessant. Im Unterschied zu den produktorientierten Modellen traditioneller Intelligenzforscher, die sich großteils auf statistische Auswertungen standardisierter Testverfahren stützen, filtern Kognitionspsychologen durch die Analyse von Denkprozessen qualitative Unterschiede zwischen Normal- und Hochbegabten heraus, auf deren Basis sie prozessorientierte Begabungsmodelle entwickeln:

> *„Zu den bekanntesten dieser Konstrukte zählt das Modell von Sternberg, der folgende sechs Komponenten ermittelte, in denen sich hoch- von durchschnittlich begabten Schülern beim Lösen schwieriger Probleme unterscheiden:*
>
> *a) Entscheidung darüber, welche Probleme gelöst werden müssen bzw. worin eigentlich das Problem besteht,*
> *b) Planung zweckmäßiger Lösungsschritte*
> *c) Auswahl geeigneter Handlungsschritte*
> *d) Wahl der Repräsentationsebene (sprachlich, symbolisch, bildhaft),*
> *e) Aufmerksamkeitszuwendung,*

> f) *Kontrolle sämtlicher Problemlöseaktivitäten“*
>
> (Käpnick, 1998, S. 75)

Auch andere Untersuchungen belegen, dass Hochbegabte besonders in der Qualität der Informationsverarbeitung überlegen sind.

Um die Besonderheiten einer mathematischen Begabung herauszuarbeiten hat die Kognitionspsychologin Elke Van der Meer eine vergleichende Analyse der Problemlöseleistungen von Mathematikspezialschülern und Psychologiestudenten durchgeführt. Ihre Ergebnisse fasst Bardy wie folgt zusammen:

> *„Als Spezifika einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Begabung stellte sie* [Van der Meer, Anm. CG] *vor allem folgende heraus:*
>
> - *Bedingt durch ein spezifisches Vorwissen nehmen mathematisch-naturwissenschaftlich hoch begabte Schüler Informationen schon in einer anderen Qualität auf als weniger begabte, die dieses Wissen erst erwerben müssen.*
> - *Mathematisch-naturwissenschaftlich hoch begabte Schüler reduzieren in der Phase der Problembearbeitung die Komplexität gegebener Sachverhalte, so dass das Ausgangsproblem vereinfacht und für den Problemlöser überschaubar wird.*
> - *Beim Problemlösen bevorzugen mathematisch-naturwissenschaftlich hoch begabte Schüler eine Strategie zur Analogieerkennung, die sich durch einen minimalen Vergleichsaufwand und ein minimales Zwischenspeichern von Resultaten im Gedächtnis auszeichnet.*
> - *Mathematisch-naturwissenschaftlich Hochbegabte unterscheiden sich von anderen in der Art der Verknüpfung elementarer Operationen und in deren Anteil am Gesamtprozess. Die höhere Qualität von Denkleistungen bei Hochbegabten besteht gerade in der größeren Einfachheit und Effektivität der Lösungsfindung.“*
>
> (Bardy, 2007, S. 48)

Zu ähnlichen Ergebnissen kommen auch Span und Overtoom-Corsmit in ihrer Untersuchung der Informationsverarbeitung von hoch- und durchschnittlich begabten Schülern der 2. Klasse in der Sekundarstufe I. Sie machen folgende Beobachtungen:

> - *„Die hochbegabten Schüler orientierten sich gründlicher über die Aufgabenstellung und nahmen sich dafür mehr Zeit. Sie überlegten sich vorher, was in der Aufgabe verlangt wird, und planten ihr weiteres Vorgehen genauer. Die durchschnittlich begabten Schüler hingegen begannen sofort mit Lösungsversuchen, selbst wenn sie sich über die genauen Anforderungen der Aufgabe noch nicht im Klaren waren.*
> - *Nach der gründlichen Orientierung führten die befähigteren*

Schüler ihren Handlungsplan systematisch durch, während die Schüler der Kontrollgruppe eher einer Versuch-und-Irrtum-Strategie folgten.

- *Die hochbegabten Schüler überprüften ihre gefundenen Ergebnisse ohne Aufforderung, während die anderen nicht einmal die Möglichkeit einer Lösungsbewertung in Betracht zogen.*
- *Die hochbegabten Schüler wenden ihre mathematischen Vorkenntnisse häufiger und geschickter an und sind in der Lage, ähnliche Aufgabenstellungen selbst zu formulieren.*
- *Die befähigteren Schüler sind in der Lage, den von ihnen gewählten Lösungsansatz zu erläutern und die Vorteile eines bestimmten Lösungswegs zu nennen."*

(Span und Overtoom-Corsmit, 1986, S. 258)

Eine sehr umfangreiche, viel zitierte Untersuchung über die Natur und Struktur mathematischer Fähigkeiten bei Schulkindern hat der sowjetische Psychologe Krutetskii von 1955 bis 1966 durchgeführt[3]. Sie bestand zum einen aus einer Aufarbeitung der bis damals veröffentlichen Publikationen über (mathematische) Begabung und zum anderen aus experimentellen Studien, bei denen unter anderem Schüler, während sie Aufgaben lösten, beim „lauten Denken" beobachtet wurden. Anhand dieser Beobachtungen entwickelte er folgenden Entwurf: Die Lösung mathematischer Probleme erfolgt in drei Stufen: Sammeln mathematischer Information, Verarbeiten mathematischer Information und Behalten mathematischer Information. Bei der Bewältigung dieser Stufen zeigen mathematisch begabte Schulkinder folgende Fähigkeiten:

„We present a general outline of the structure of mathematical abilities during school age as follows (we shall regard it […] as proceeding from the basic stages in problem-solving):

1. *Obtaining mathematical information*
   A. *The ability for formalized perception of mathematical material, for grasping the formal structure of a problem.*
2. *Processing mathematical information*
   A. *The ability for logical thought in the sphere of quantitative and spatial relationships, number and letter symbols; the ability to think in mathematical symbols.*
   B. *The ability for rapid and broad generalization of mathematical objects, relations, and operations.*
   C. *The ability to curtail the process of mathematical*

[3] Zimmermann bezeichnet sie als die bislang gründlichste Untersuchung mathematischer Fähigkeiten (Zimmermann, 1986, S. 101). König nennt Krutetskiis Forschungsbericht sogar **das** Standardwerk zum Thema mathematische Begabung (König, 1986, S. 89).

reasoning and the system of corresponding operations; the ability to think in curtailed structures.

- D. *Flexibility of mental processes in mathematical activity.*
- E. *Striving for clarity, simplicity, economy, and rationality of solutions.*
- F. *The ability for rapid and free reconstruction of the direction of a mental process, switching from a direct to a reverse train of thought (reversibility of the mental process in mathematical reasoning)*

3. *Retaining mathematical information*
   - A. *Mathematical memory (generalized memory for mathematical relationships, type characteristics, schemes of arguments and proofs, methods of problem-solving, and principles of approach).*

(Krutetskii, 1976, S. 350)

König zitiert folgende deutsche Übersetzung von Krutetskiis Analyse:

1. *Sammeln mathematischer Information*
   - A. *Die Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischen Materials zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems.*
2. *Verarbeiten mathematischer Information*
   - A. *Die Fähigkeit zum logischen Denken im Bereich von quantitativen und räumlichen Beziehungen; die Fähigkeit zum Denken in mathematischen Symbolen.*
   - B. *Die Fähigkeit zu einer schnellen und breiten Generalisierung von mathematischen Objekten, Relationen und Operationen*
   - C. *Die Fähigkeit zur Verkürzung des Prozesses mathematischer Schlußfolgerungen; die Fähigkeit, in verkürzten Strukturen zu denken.*
   - D. *Beweglichkeit bei geistigen Prozessen im mathematischen Handeln*
   - E. *Streben*
   - F. *Reversibilität*
3. *Behalten mathematischer Information*
   - A. *Mathematisches Gedächtnis, d. h. ein generalisiertes Erinnerungsvermögen für mathematische Beziehungen, typische Charakteristika, Schemen von Argumentationen und Beweisen, Methoden des Problemlösens und grundsätzlichen Zugängen.*

(König, 1986, S. 89)

Diese einzelnen Komponenten sind nach Krutetskii eng miteinander verbunden, beeinflussen einander und bilden in ihrer Summe ein unverwechselbares System, einen einzigartigen Komplex mathematischer Fähigkeiten. So entsteht eine große Vielfalt an individuellen Ausprägungen und Erscheinungsformen mathematischer Begabungen.

Die oben genannten Fähigkeiten können in unterschiedlichen Graden ausgeprägt sein, Krutetskii unterscheidet kompetente (capable), durchschnittliche (average) und inkompetente (incapable) Schüler. Mathematisch besonders kompetente Schüler weisen eine hohe Ausprägung der oben genannten Fähigkeiten auf – und das zumeist sogleich und ohne viel zu üben:

> *„These abilities are expressed in varying degrees in capable, average, and incapable pupils. In some conditions these associations are formed ‚on the spot' in capable pupils, with a minimal number of exercises. In incapable pupils, however they are formed with extreme difficulty. For average pupils, a necessary condition for the gradual formation of these associations is a system of specially organized exercises and training."*
>
> (Krutetskii, 1976, S. 352)

Weiters führt Krutetskii Fähigkeiten an, die für eine hohe mathematische Leistungsfähigkeit nicht zwingend nötig sind (aber nützlich sein können), die er somit in Hinblick auf mathematische Begabung als neutral bewertet:

1. *„The swiftness of mental processes as a temporary characteristic. The individual tempo of the work does not have a decisive value. The mathematician can reflect deliberately, even slowly, but very thoroughly and profoundly.*
2. *Computational abilities (abilities for rapid and precise calculations, often in the head). We know that there are persons capable of doing complex mathematical calculations in their heads (almost instantaneously squaring and cubing three-place numbers or extracting the cube root of six-place numbers), but unable to solve any complex problem. We also know that there are and have been phenomenal "calculators" who do not contribute anything to mathematics, and the prominent French mathematician Poincaré wrote of himseif that he could not even do addition without a mistake.*
3. *A memory for Symbols, numbers, and formulas. As Kolmogorov has indicated, many eminent mathematicians have had no outstanding memory of this sort.*
4. *An ability for spatial concepts.*
5. *An ability to visualize abstract mathematical relationships and dependencies."*

(Krutetskii, 1976, S. 351)

Das bedeutet, nach seinen Studien kommt der Geschwindigkeit der Denkprozesse, Rechenfertigkeiten, der Merkfähigkeit, räumlichem Vorstellungsvermögen und dem

Vorstellungsvermögen von abstrakten, mathematischen Beziehungen und Abhängigkeiten keine entscheidende Rolle für das Erbringen mathematischer Hochleistungen zu.

Bereits in seinen Erläuterungen über Ansatz, Ablauf und Zielen seiner Untersuchung hob Krutetskii hervor, dass in Bezug auf mathematische Fähigkeiten zwei Ebenen zu unterscheiden sind – Schulmathematik und wissenschaftliche Mathematik:

> *„[…] we must note that mathematical ability can find expression at quite different levels of activity. […]*
>
> 1. *As creative (scientific) ability – ability in scientific mathematical activity, which yields new results or achievements that are significant for humanity, a product that is valuable in social terms.*
> 2. *As school ability – ability in the study (learning, mastery) of mathematics (in this case, the school mathematics course), in the rapid and successful mastery of appropriate information and skills.“*
>
> (Krutetskii, 1976, S. 67f)

Krutetskii betont, dass seine Charakteristik auf der Beobachtung von Schulkindern beruht und dass daraus keine gültigen Schlüsse über die Struktur mathematischer Fähigkeiten bei erwachsenen Mathematikern gezogen werden können:

> *„It should be stressed that our outline of the structure of mathematical abilities concerns the mathematical abilities of a schoolchild. We cannot say in advance, before special study, to what extent it can be regarded as a general outline of the structure of mathematical abilities – to what extent it can be attributed to the fully developed, gifted mathematician.“*
>
> (Krutetskii, 1976, S. 351)

In Fachkreisen unter Mathematikdidaktikern und Psychologen findet Krutetskiis Modell aufgrund seiner fundierten Forschungsmethodik große Akzeptanz. Auch wurden seine Ergebnisse wiederholt in nachfolgenden Untersuchungen bestätigt (vgl. Käpnick, 1998, S. 80).

Käpnick selbst definiert für seine Studien mathematische Begabung als *„begabt sein für mathematische Tätigkeiten“*, als *„eine vorhandene hohe Leistungspotenz für mathematisches Tätigsein“* bzw. besonders im Hinblick auf seine Auseinandersetzung mit mathematischer Begabung im Grundschulalter als *„ein individuell unterschiedlich geprägtes spezielles Potential für eine mit großer Wahrscheinlichkeit zu einem späteren Zeitpunkt erreichte überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit“* (Käpnick, 1998, S. 53, 46 bzw. 95).

Man erkennt besonders an Käpnicks Definition von mathematischer Begabung als Begabung für Mathematik wie eng die Frage nach einer Charakteristik einer solchen Spezialbegabung mit der Frage „Was ist Mathematik?“ verbunden ist. Versucht man dieser Frage nachzugehen, merkt man bald, dass eindeutige, exakte Definitionen zwar ein wichtiges Werkzeug in der Mathematik darstellen, nur für die Mathematik selbst gibt es keine allgemein anerkannte Definition. Dies mag unter anderem daran liegen, dass sich zum einen die Inhalte und Probleme mit denen sich Mathematiker auseinandersetzen im Laufe der Geschichte stark gewandelt haben – von der Lehre von den Zahlen im alten Ägypten und der schwerpunktmäßigen Auseinandersetzung mit der Geometrie im alten Griechenland über die Entwicklung der Differenzialrechnung Mitte des 17. Jahrhunderts zu der modernen Mathematik und ihrer zunehmenden Ausdifferenzierung heute (vgl. Devlin, 2006, S. 20ff) – und zum anderen daran, dass die Mathematik heute eine sehr komplexe Wissenschaft mit 60 bis 70 Teilgebieten (vgl. Devlin, 2006, S. 22) ist, und diese breite Palette an mathematischen Arbeitsbereichen eine große Vielfalt an Zugängen zur Mathematik zulässt – wenn nicht sogar erfordert. Käpnick unterscheidet in seiner Analyse zur Spezifik mathematischen Tätigseins vier „Typen von Mathematikern“:

- *Mathematiker, die den Strukturcharakter mathematischer Tätigkeit betonen*
- *Mathematiker, die bevorzugt Mathematik konstruktiv und intuitiv betreiben*
- *Mathematiker, deren Schaffen durch enge Wechselbeziehungen zwischen mathematischen und naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen gekennzeichnet ist*
- *Mathematiker, die sich bevorzugt mit mathematischen Anwendungen beschäftigen*

(vgl. Käpnick, 1998, S. 64f)

Für diese Typisierung erhebt Käpnick keinen Anspruch auf Vollständigkeit, vielmehr ist sie eine grobe Einteilung, die die Vielfalt der Mathematiker und ihrer Zugänge zur Mathematik zeigen soll. Wie subjektiv Charakterisierungen der Mathematik vielfach sind, bringt Freudenthal auf den Punkt:

> *„Die Definition der Mathematik wechselt. Jede Generation und jeder scharfsinnige Mathematiker innerhalb einer Generation formuliert eine Definition, die seinen Fähigkeiten und Einsichten entspricht.“*

(zitiert nach Käpnick, 1998, S. 53)

Mögliche Antworten auf die Frage „Was ist Mathematik?“ könnten Bücher füllen und auf eine detaillierte Auseinandersetzung mit ihnen muss hier verzichtet werden. Exemplarisch soll nur eine mögliche Antwort, die nach Devlin am häufigsten von heutigen Mathematikern gegeben wird, angeführt werden:

> *„Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern.“*

(Devlin, 2006, S. 23)

Der Begriff Muster wird dabei sehr allgemein verstanden, als *jede Art von Regelmäßigkeit, die der Geist erkennen kann* (vgl. Devlin, 2006, S. 95f). Devlin veranschaulicht den Begriff Muster wie folgt:

> *„Die abstrakten Muster der Mathematiker kann man sich als eine Art ‚Skelett' aller Dinge und Erscheinungen unserer Welt vorstellen. Die Mathematiker betrachten einen bestimmten Aspekt unserer Welt, etwa eine Blume oder eine Partie Skat, nehmen sich eine besondere Eigenschaft dieses Untersuchungsobjekts vor und lassen dann alle spezifischen Besonderheiten beiseite – sie untersuchen das rein abstrakte Skelett. Bei der Blume könnte das abstrakte Skelett in der Symmetrie des Blütenaufbaus bestehen. Beim Skatspiel könnte es sich um die Blattverteilung oder um bestimmte Muster des Hochreizens handeln."*

(Devlin, 2006, S. 101)

Um die *„Lehre von den Mustern"* betreiben zu können, spielen viele Fähigkeiten eine Rolle, als die wichtigsten führt Devlin an: Zahlensinn, numerische Kompetenz, algorithmische Fähigkeiten, die Fähigkeit zu abstrahieren, einen Sinn für Ursache und Wirkung, die Fähigkeit, eine längere Kausalkette von Tatsachen oder Ereignissen zu konstruieren und zu verfolgen, die Fähigkeit zum logischen Denken, die Fähigkeit, Bezüge herzustellen und räumliches Vorstellungsvermögen (vgl. Devlin, 2006, S. 26ff).

Das Augsburger Modell für mathematische Begabung

Abschließend stelle ich ein multifaktorielles Modell mathematischer Begabung vor, das sich an das Münchner Hochbegabungsmodell von Kurt Heller anlehnt, welches im Kapitel 3.2.2 skizziert wurde. Das Augsburger Modell für mathematische Begabung dient an der Universität Augsburg als theoretische Grundlage für mehrere Projekte für begabte Schüler (vgl. Ulm, 2009). Es geht davon aus, dass sich mathematische Intelligenz in mathematischem Denken offenbart und gliedert mathematisches Denken in zehn Komponenten, welche in Abbildung 6 dargestellt sind:

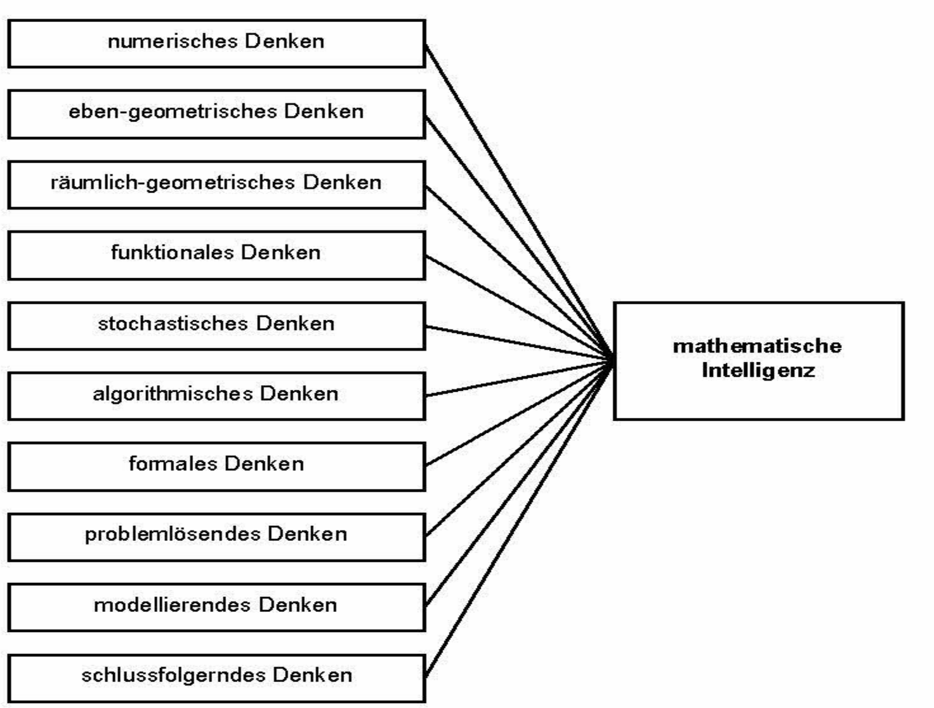

Abb. 6: Facetten mathematischer Intelligenz nach dem Augsburger Modell für mathematische Begabung (aus: Ulm, 2009, S. 4)

Unter dem Begriff *„Denken"* werden hierbei *„alle kognitiven Prozesse der Wahrnehmung, der Verarbeitung, Speicherung und des Abrufs mathematikbezogener Information"* (Ulm, 2009, S. 3) subsumiert. Diese einzelnen Komponenten werden nicht isoliert gesehen, sie sind eng miteinander verbunden. Als Beispiele dafür, wie numerisches und geometrisches Denken zusammenhängen, führt Ulm die Veranschaulichungen von Zahlen als Punkte am Zahlenstrahl, als Streckenlängen oder Vektoren an.

Für eine umfassende Begabung im Fach Mathematik sind auch sprachliche Fähigkeiten und eine fachunabhängige Kreativität wichtig. Entsprechend Hellers Konzeption unterscheidet das Augsburger Modell *Begabung* und *Leistung* und postuliert eine Vielfalt von *nichtkognitiven Persönlichkeitsmerkmalen* und *Umweltmerkmalen*, die in einem komplexen Wirkungsgefüge beeinflussen, ob und wie Begabung in Leistung umgesetzt wird (siehe Abb. 7).

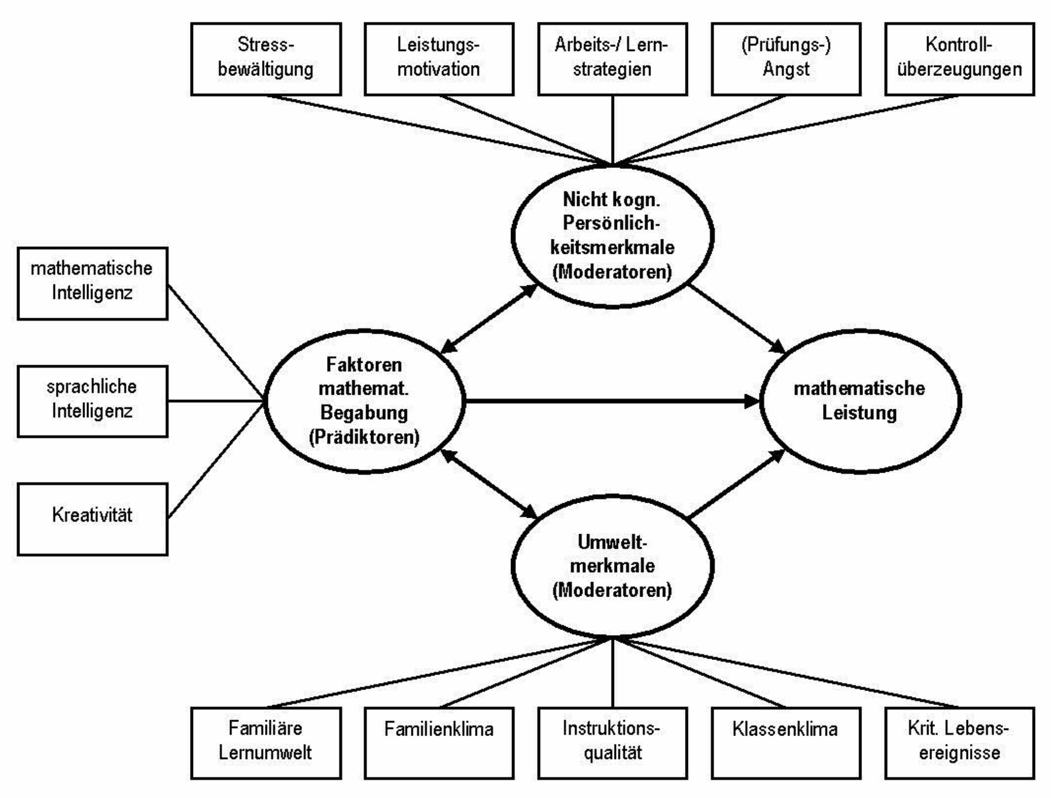

Abb. 7: Der Weg von Begabung zu Leistung (aus: Ulm, 2009, S. 4)

Zusammenfassend lässt sich sagen: Die in der Schule sichtbare mathematische Leistung hängt gemäß dem Augsburger Modell einerseits von mathematischer Begabung und anderseits von zehn Moderatoren, die teils Merkmale der Person selbst und teils Faktoren ihrer Umwelt sind, ab. Mathematische Begabung umfasst dabei neben mathematischer Intelligenz – die sich aus zehn Komponenten zusammensetzt – auch sprachliche Intelligenz und Kreativität.

Die vorgestellten Theorien über mathematische Begabung stellen nur einen kleinen Auszug aus der kaum zu überblickenden Menge an Ansätzen in der Forschung dar. Mathematische Hochbegabung ist ein interdisziplinäres Forschungsfeld, mit dem sich neben Mathematikdidaktikern, Psychologen und Pädagogen auch Soziologen, Biologen, Neurowissenschaftler u. v. m. auseinandersetzen. Auf die Beleuchtung soziologischer Aspekte – wie beispielsweise der sozialen Entwicklung von mathematisch Hochbegabten im Vergleich zu Gleichaltrigen – wurde in der vorliegenden Arbeit verzichtet.

Biologische Forschungen setzen sich mit physiologischen Ursachen für mathematische Begabungen (wie beispielsweise besondere Funktionszuweisungen im menschlichen Gehirn) auseinander. Einen viel diskutierten Aspekt stellen dabei geschlechtsspezifische Begabungsunterschiede dar. Welche Rolle das Geschlecht beim Erbringen mathematischer Leistung spielt, wird im folgenden Kapitel kurz andiskutiert.

8 Mathematische Begabung und Geschlecht

Es ist eine Tatsache, dass Mädchen in mathematischen und technischen Studiengängen sowie Frauen in mathematischen und technischen Berufen nach wie vor unterrepräsentiert sind (vgl. Beerman, Heller u. Menacher, 1992, S. 37). Auch bei Angeboten zur Begabtenförderung in Mathematik ist der Mädchenanteil verhältnismäßig gering (vgl. Benölken, 2008, S. 84). Bei den internationalen Mathematikolympiaden der letzten Jahre kommt der Anteil weiblicher Teilnehmer nicht über 10 Prozent hinaus (vgl. Tabelle 1 in Kapitel 11). Theorien, warum das so ist, füllen Bücher und können hier nur kurz angerissen werden. Da aber gerade bezüglich mathematischer Begabung die Frage nach der Rolle, die das Geschlecht spielt, oft thematisiert wird, soll sie nicht stillschweigend übergangen werden.

Das deutsche Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft hat 1988 das Institut für Pädagogische Psychologie und psychologische Diagnostik unter der Leitung von Prof. Dr. Kurt Heller beauftragt eine Literaturrecherche zum Thema *„Technik, Mathematik und Naturwissenschaften: Erweiterungen der Berufsperspektiven für begabte und interessierte Mädchen?“* zu erstellen. Die Ergebnisse wurden 1992 von Beerman, Heller und Menacher in dem Buch *Mathe nichts für Mädchen? Begabung und Geschlecht am Beispiel von Mathematik, Naturwissenschaft und Technik* publiziert, in dem sie zusammenfassend erklären:

> *„Zusammenfassend ist festzuhalten, daß zwar Leistungsunterschiede bezüglich mathematischer Fähigkeiten zwischen Jungen und Mädchen öfters beobachtet wurden, die Untersuchungsergebnisse der letzten zwanzig Jahre jedoch keineswegs einheitlich und vor allem Meßmethoden bzw. Tests häufiger umstritten sind. Auch durch neue Befragungsstudien im Kontext sozialwissenschaftlicher und bildungspolitischer Erhebungen konnte das geringe Interesse der Mädchen und jungen Frauen für naturwissenschaftliche und technische Ausbildungen und Berufe bisher nicht zufriedenstellend erklären.“*
>
> (Beerman, Heller u. Menacher, 1992, S. 35)

Sie weisen darauf hin, dass der geringe Frauenanteil in den Naturwissenschaften und in der Mathematik nicht durch ein geringeres intellektuelles Leistungsvermögen von Frauen erklärt werden kann. Außerdem stellten sie fest, dass sich *„das alte Thema Anlage und Umwelt“* wieder in den Vordergrund drängt. Das bedeutet, es wird wieder stärker diskutiert, ob die Unterschiede zwischen den Geschlechtern Folge von Erziehung und Kultur oder doch angeboren sind. Beerman, Heller und Menacher betonen, dass *„eine biologische Bedingtheit von besonderer mathematischer Befähigung bisher nicht nachgewiesen werden konnte“* (Beerman, Heller u. Menacher, 1992, S. 42). Bardy stellt hingegen 15 Jahre später fest, dass *„Fortschritte in der Hirnforschung und in der Biologie zeigen, dass die Unterschiede zwischen den Geschlechtern weniger kulturell bedingt sind, als dies noch vor einigen Jahren angenommen wurde“* (Bardy, 2007, S. 56). Neuere Forschungen belegen Unterschiede zwischen Frauen und Männern in der Benutzung ihrer Gehirnhälften beim Lösen mathematischer Probleme. Bardy zitiert den Biologen David Page, der 2000 erklärte:

> *„Die genetischen Unterschiede zwischen Männern und Frauen stellen alle anderen Unterschiede im menschlichen Genom in den Schatten.“*
>
> (zitiert nach Bardy, 2007, S. 56)

Käpnick stellt in seiner Analyse vieler Untersuchungen zur Geschlechtsspezifik mathematischer Leistungsfähigkeit fest, dass zwar Leistungsunterschiede zwischen Jungen und Mädchen in Mathematik zu beobachten sind, die Ergebnisse zahlreicher Studien aber keinesfalls einheitlich sind (Käpnick, 1998, S. 87).

Rustemeyer (vgl. 2007, S. 67ff) weist ebenfalls darauf hin, dass nicht nur ein geschlechtsspezifischer Interessens- sondern auch Leistungsunterschied besteht, und dass mehrere Studien belegen, dass Jungen tatsächlich die besseren Leistungen in Mathematik bringen:

> So führt eine Forschergruppe um Benbow – die die Auffassung vertritt, dass eine biologische Basis für Unterschiede in den mathematischen Fähigkeiten existiert – eine Längsschnittstudie mit ca. 5000 Schülerinnen und Schülern, die als 13-Jährige nach dem Scholastic Aptitude Test (SAT, siehe Kapitel 9) zu den besten 1 Prozent gehören, durch. In dieser Studie erreichen Jungen konstant bessere Leistungen als Mädchen.
>
> Hyde, Fennema und Lemon (1990) erforschen Geschlechtsunterschiede in der Gesamtbevölkerung und nicht ausschließlich in einer Gruppe Hochbegabter wie Benbow. Sie stellen Unterschiede zwischen den Geschlechtern ab einem Alter von etwa 14 Jahren fest und bestätigen Benbows Ergebnisse für Hochbegabte:
>
> > *„Jungen schneiden bei Problemlöseaufgaben (Umgang mit mathematischen Konzepten und Problemen) besser ab, Mädchen hingegen bei arithmetischen Aufgaben. Allerdings erweisen sich für die gefundenen Unterschiede Alter, Selektivität der Stichprobe und kognitives Aufgabenniveau als bedeutsame Moderatorvariablen. Leistungsunterschiede fanden sich erst innerhalb höherer Schulstufen und am stärksten bei mathematisch Hochbegabten, also der Gruppe, die Benbow et al. untersucht haben.“*
> >
> > (Rustemeyer, 2007, S. 67)
>
> Auch in den bekannten Studien TIMSS (Third International Mathematical and Science Study) und PISA (Programme for International Student Assessment) zeigen Mädchen schlechtere Leistungen in Mathematik und Physik (vgl.

Rustemeyer, 2007, S. 67f). Bei PISA erreichten Jungen außerdem höhere Werte bei motivationsrelevanten Variablen wie Selbstkonzept und Interesse.

Welchen Einfluss das Selbstkonzept[4] auf das Erbringen von mathematischen Leistungen hat, betont auch das pfadanalytische Modell zur Erklärung mathematischer Leistungen in Abbildung 8. Die Einflussstärke der einzelnen Faktoren wird darin durch den Pfadkoeffizienten β angegeben. In diesem Modell kann β wie ein (linearer) Korrelationskoeffizient interpretiert werden (vgl. Büchter, 2010, S. 43). Das bedeutet β kann Werte von -1 bis +1 annehmen, wobei β=-1 bzw. β=1 besagt, dass zwei Merkmale vollständig negativ bzw. positiv korrelieren und β=0 ausdrückt, dass die Ausprägungen zweier Merkmale nicht zusammenhängen. Beispielsweise korreliert das Selbstkonzept positiv mit dem Erbringen mathematischer Leistungen mit einem Faktor von β=0,14. Der enge Zusammenhang zwischen Lesekompetenz und Mathematikleistung ist an dem hohen Pfadkoeffizienten β=0,55 ablesbar.

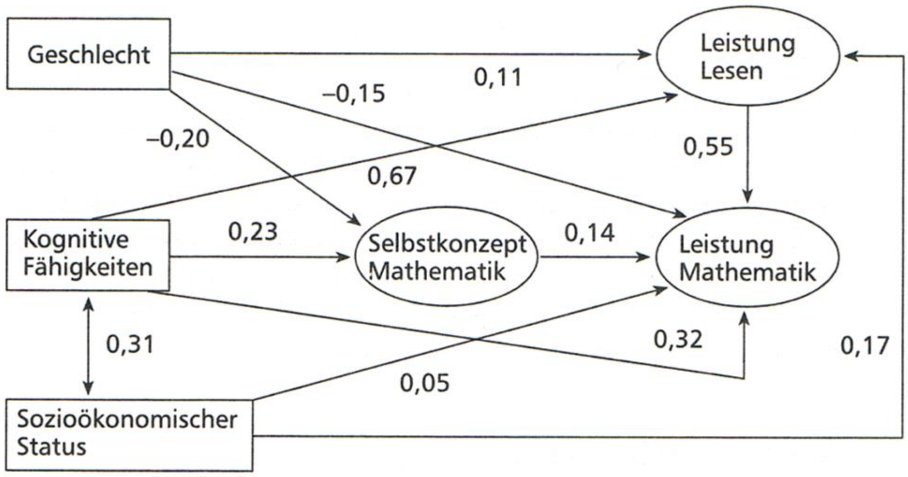

Abb. 8: Pfadmodell zur Erklärung mathematischer Leistungen
(aus: Rustemeyer, 2007, S. 68)

Zu den Pfadkoeffizienten, die von der Variable Geschlecht ausgehen, muss angemerkt werden, dass ihr Vorzeichen aus Sicht der Mädchen zu interpretieren ist: Positive Werte bedeuten einen Zusammenhang zugunsten der Mädchen und negative Werte einen zugunsten der Jungen (vgl. Büchter, 2010, S. 43).

Den Zusammenhang zwischen Geschlecht und Leistungen in Mathematik beschreibt Rustemeyer folgendermaßen:

„Betrachtet man den Einfluss des Geschlechts, dann wird anhand des Modells deutlich, dass sich die Geschlechtszugehörigkeit und die

[4] Darunter wird in der Psychologie das mentale Modell einer Person über ihre eigenen Fähigkeiten und Eigenschaften verstanden (vgl. Zimbardo, 2004, S. 633).

kognitiven Fähigkeiten auf das mathematikspezifische Selbstkonzept auswirken. Mädchen haben ein niedrigeres Selbstkonzept als Jungen. Das Selbstkonzept der mathematischen Begabung (β=0,14) wiederum wirkt sich auf die mathematische Leistung aus. Nach diesem Modell wirkt somit das Geschlecht dreifach auf die mathematische Leistung:

1. *Bei ansonsten unveränderten Bedingungen haben Mädchen geringere Mathematikleistungen als Jungen. Das zeigt der direkte Pfad (β = – 0,15) von Geschlecht auf Leistung.*
2. *Weiter gibt es einen indirekten Effekt, der über das Selbstkonzept vermittelt wird. Er besagt, dass sich auch das geringer ausgeprägte mathematische Selbstkonzept der Mädchen auf ihre Leistungen auswirkt.*
3. *Und es gibt einen weiteren indirekten Effekt, der über die Leseleistung vermittelt wird: Mädchen können besser lesen als Jungen, und dies wirkt sich positiv auf ihre mathematische Grundbildung aus.*

Während die ersten beiden Effekte zugunsten der Jungen wirken, wirkt der dritte Effekt zugunsten der Mädchen. Insgesamt ergibt sich ein Leistungsvorsprung der Jungen, ihre mathematischen Leistungen sind besser und sie haben ein höheres mathematisches Selbstkonzept, was sich zusätzlich indirekt auf die Leistung auswirkt. Die Mädchen andererseits besitzen eine höhere Lesekompetenz, und diese wirkt sich positiv auf die Mathematikleistung aus. Die Überlegenheit der Jungen im Bereich Mathematik wird dadurch jedoch nicht in Frage gestellt.“

(Rustemeyer, 2007, S. 68f)

Aus den Erkenntnissen dieser Zusammenhänge ergibt sich als ein wichtiger Ansatzpunkt für Begabtenförderung die Verbesserung des mathematischen Selbstkonzepts der Mädchen. Mädchen neigen eher zu ungünstigen Attributionsmustern, das bedeutet, sie schreiben gute Leistungen eher äußeren Faktoren wie Glück oder leichten Prüfungsaufgaben zu, und sehen die Ursachen für schlechte Leistungen tendenziell in ihnen selbst, in ihrer Unfähigkeit. Es gilt daher ihr Selbstvertrauen und ihre Leistungszuversicht zu stärken (vgl. Tanzberger, 2005, S. 6). Eine Möglichkeit, dies zu erreichen, stellt die Beeinflussung ihrer Erklärungsmuster für Erfolg und Misserfolg durch Reattributionstrainings dar. Dabei werden sie unterstützt, die Ursachen ihrer Leistungen realistisch und motivationsfördernd einzuschätzen (vgl. Finsterwald, 2005).

9 Identifikation von mathematischer Hochbegabung

Wie bereits im Kapitel 3 über die Identifizierung allgemein hochbegabter Kinder hervorgehoben wurde, ist auch die Diagnose mathematischer Hochbegabung abhängig von der Definition mathematischer Hochbegabung, die man ihr zugrunde legt. Für verschiedene Fähigkeitskomponenten, denen Einfluss auf eine mathematische Begabung zugeschrieben wird, stehen unterschiedliche psychodiagnostische Testverfahren zur Verfügung. Wie bereits beschrieben berücksichtigen allgemeine Intelligenztests auch mathematische Intelligenzfaktoren und es gibt zahlreiche Messverfahren zur Kreativität.

Einige Test für mathematikspezifische Fähigkeiten wurden auf Grundlage von Krutetskiis Grundkomponenten mathematischer Begabung entwickelt, einige entstanden im Zuge von Förderungsprojekten. Als Beispiele für spezifische Mathematiktests werden der bereits erwähnte *Scholastic Aptitude Test* (SAT) und der *Hamburger Test für mathematische Begabung* (HTMB) kurz vorgestellt.

Der *Scholastic Aptitude Test* wurde zur Ermittlung der Studierfähigkeit von Highschoolabgängern als Ausleseverfahren für die Zulassung zu den besten Hochschulen in den USA entwickelt und umfasst zwei sprachliche und zwei mathematische Teile sowie einen *Test of Standard Written English*. Die Mathematikteile (SAT-M) werden auch im Projekt *„Study of Mathematically Precocious Youth“*, das seit 1971 an der Johns Hopkins University in Baltimore läuft, eingesetzt. In diesem Projekt wird versucht, mathematisch hochbegabte Schüler möglichst früh zu identifizieren, und ihnen ein schnelleres Durchlaufen ihrer Schulzeit und ihres Hochschulstudiums zu ermöglichen. Teilnehmen dürfen die Zwölfjährigen, die mit ihrem mathematischen Denkvermögen zu dem obersten einen Prozent ihrer Altersgruppe gehören. Ihre Auswahl erfolgt in zwei Stufen. Zuerst werden mit altersadäquaten Leistungstests die besten 2 bis 5 Prozent der Altersgruppe ermittelt. Diese nehmen dann an dem SAT teil (vgl. Wagner, 1986, S. 128). Über seine Erfahrungen mit dem Scholastic Aptitude Test schreibt Stanley, der Leiter des Projekts:

> *„Die Testaufgaben behandeln relativ elementare mathematische Inhalte, erfordern jedoch ein hohes Maß an mathematisch-logischem Denken. Nach umfangreichen Vorversuchen kamen wir zu dem Ergebnis, daß die fähigsten drei Prozent unter den Zwölfjährigen im SAT-M nach kurzer Einübung zumindest recht ordentliche Ergebnisse erzielen konnten. Bei der Talentsuche in dieser Altersstufe erreichte etwa ein Fünftel der Jungen und ein Zehntel der Mädchen Testwerte von 500 und mehr Punkten. Diese Schülerinnen und Schüler sind hinsichtlich ihres mathematisch-logischen Denkvermögens als die besten ein Prozent ihres Jahrgangs anzusehen.*

Zum Vergleich: Der Durchschnittswert der männlichen Collegebewerber in den High-School-Abschlußklassen liegt bei 495 auf einer Skala von 200 bis 800 Punkten."

(Stanley, 1986, S. 229)

Der Scholastic Aptitude Test ist ein Multiple-Choice-Test, seine mathematischen Teile enthalten 25 bzw. 35 Aufgaben, die in 60 Minuten zu bearbeiten sind. Wagner beschreibt den SAT als *ökonomisches*, *verlässliches* und *valides* Verfahren zur Identifikation von mathematisch außergewöhnlich begabten Zwölfjährigen (vgl. Wagner, 1986, S. 129). Der SAT-M[5] genießt (vor allem in den USA) eine hohe Akzeptanz, Untersuchungen zeigten, dass seine Ergebnisse eine sehr zuverlässige Vorhersage über zukünftig erfolgreiches Arbeiten im naturwissenschaftlich-mathematischen Bereich erlauben. Es wird an ihm aber auch – vorwiegend wegen seiner Multiple-Choice-Form – Kritik geübt (vgl. Zimmermann, 1986, S. 101).

Angeregt durch das Projekt *„Study of Mathematically Precocious Youth"* (SMPY) in Baltimore, wurde 1982 an der Universität Hamburg ein Förderprogramm für mathematisch begabte Schüler der 6. Schulstufe initiiert. Da eine enge Kooperation mit dem SMPY-Projekt geplant war, richtet sich das Hamburger Projekt ebenfalls an Zwölfjährige, und ist eine deutschsprachige Version des SAT-M (GSAT) Teil des Auswahlverfahrens. Da jedoch nicht nur die Förderung von mathematisch begabten Kindern sondern auch die Entwicklung von Kriterien und Strategien zu deren Identifizierung als Ziel des Projekts definiert wurde, wurde zusätzlich zum GSAT ein neuer Test, der *Hamburger Test für mathematische Begabung* (HTMB) entwickelt. Er sollte die Nachteile des Multiple-Choice-Tests und seine fragwürdige Eignung zur Überprüfung komplexer Denkleistungen vermeiden, größere Validität aufweisen und sich mehr am Lösungsprozess als am Lösungsprodukt orientieren (vgl. Zimmermann, 1986). Als Grundlage des HTMB wurde eine Definition von mathematischer Hochbegabung entwickelt, die Krutetskiis Erkenntnisse berücksichtigt:

„Mathematische Begabung wird definiert als eine (abtestbare) Menge von Fähigkeiten eines Individuums. Hohe Testergebnisse sollten mit einer hohen Wahrscheinlichkeit für eine kreative Tätigkeit innerhalb der Mathematik oder in Nachbargebieten verbunden sein. Diese Fähigkeiten werden durch eine deutschsprachige Version (GSAT) der mathematischen Teile des amerikanischen Scholastic Aptitude Test (SAT) und durch den neu entwickelten Hamburger Test für mathematische Begabung (HTMB) erfaßt, der die folgenden komplexen mathematischen Tätigkeiten überprüfen soll:

(1) Organisieren von Material;
(2) Sehen von Mustern und Gesetzen;
(3) Wechsel der Repräsentationsebene und Muster und Regeln in diesem neu konstruierten Bereich erkennen;

[5] Vorbereitungstests für den SAT-M sind unter www.syvum.com/sat/index.htm verfügbar.

(4) Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten;
(5) Prozesse umkehren;
(6) Finden und Konstruieren von Anschlußproblemen."

(Wagner u.a., 1986, S. 241)

Der Hamburger Test für mathematische Begabung umfasst sieben Testaufgaben[6], für die zwei Stunden zur Verfügung stehen. Über die Testaufgaben und ihre Auswertung schreiben Mitarbeiter des Hamburger Projekts:

> *„Durch die sieben Testaufgaben des HTMB sollte mindestens jeweils eine der genannten sechs Kategorien zentral berührt werden. Natürlich war zum Lösen jeder dieser Aufgaben mehr als eine dieser Denkleistungen erforderlich. Unsere Auswertung des HTMB mußte konsequenterweise mehr ganzheitlich und weniger standardisiert als etwa die des SAT sein. Aber unserer Auffassung nach hat sich das Testdesign den allgemeinen Zielen und inhaltlichen Vorstellungen vom Wesen kreativer mathematischer Tätigkeit unterzuordnen und nicht umgekehrt. So wurden also nicht nur Punkte für die korrekte Lösung einer Aufgabe gegeben, sondern vor allem für einen vernünftigen Gebrauch der oben erwähnten Kategorien* [siehe voriges Zitat, Anm. CG]*. Zusätzliche Punkte wurden bei angemessener Verwendung von Vorkenntnissen zuerkannt."*

(Wagner u.a., 1986, S. 241)

Die Zwölfjährigen, die bei dem Auswahlverfahren am besten abgeschnitten haben, dürfen am Förderprogramm des Hamburger Projekts teilnehmen. Im Unterschied zu dem Projekt in Baltimore wird in Hamburg nicht ein schnelleres Durchlaufen der Schulzeit angestrebt, sondern es werden wöchentliche, außerschulische Treffen angeboten, bei denen anspruchsvolle Themen, die über den Schulstoff hinausgehen, bearbeitet werden.

Als Hilfestellung für Mathematiklehrer, eine mathematische Hochbegabung bei ihren Schülern im Unterricht zu erkennen, können die verschiedenen in Kapitel 7 vorgestellten „Listen" von Fähigkeiten, die als für mathematische Hochbegabung charakteristisch gelten, dienen. König merkt dazu an, dass Hochbegabung am effektivsten identifiziert werden kann, *„wenn Kinder in Situationen versetzt werden, die hochbegabtes Verhalten erfordern"*. Demnach sind Lehrer gefordert, herausfordernde Unterrichtssituationen zu schaffen, die solche Verhaltensweisen hervorzurufen und mögliche Fähigkeiten enthüllen (vgl. König, 1986, S. 88). Solche Situationen können beispielsweise durch die Bearbeitung von Problemaufgaben, die komplexe, mathematische Fähigkeiten erfordern, (z. B. Aufgaben der Mathematikolympiade) geschaffen werden.

[6] In einem Artikel, der unter www.hirnwindungen.de/begabung/kiesswetter.pdf verfügbar ist, gibt Kiesswetter eine Aufgabe an, die einer der sieben Testaufgaben sehr ähnlich ist.

Sofern es die Kapazitäten von Förderprogrammen zulassen, kann auch das Interesse der Schüler als einziges Kriterium für eine Teilnahme genommen werden (vgl. Zimmermann, 1986, S. 102). Auch Walther präferiert als Kriterium für die Teilnahme an Förderkursen das Interesse, da Tests Fähigkeiten als einen ein- für allemal festzuschreibenden Zustand auffassen und den Prozessaspekt der Fähigkeitsentwicklung vernachlässigen (vgl. Walther, 1986, S. 116).

Abschließend möchte ich auch hier – wie bereits in Kapitel 4 – betonen, dass eine Diagnose nie Selbstzweck sein sollte, sondern primär das Ziel hat, eine Grundlage für gezielte Fördermaßnahmen zu liefern.

10 Förderung mathematisch begabter Schüler

Allgemeine Überlegungen zur Förderung begabter Schüler wurden bereits in Kapitel 6 dargelegt. Hier werden nun exemplarisch einige Fördermöglichkeiten für mathematisch begabte Schüler der Sekundarstufe 1 und 2 skizziert. Die angeführte Auswahl erhebt dabei keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, sondern versteht sich als kleiner Einblick in die Fülle an bestehenden Möglichkeiten.

Im dritten Teil dieser Diplomarbeit wird schließlich speziell die Mathematikolympiade als eine Möglichkeit der Förderung mathematisch begabter (Oberstufen-)Schüler detailliert beschrieben.

10.1 Fördermöglichkeiten in der Schule

Die gesetzliche Anordnung zur individuellen Förderung jedes Schülers – und damit auch der Hochbegabten – ist in § 17 (1) des Schulunterrichtsgesetzes festgehalten:

> *„Der Lehrer hat in eigenständiger und verantwortlicher Unterrichts- und Erziehungsarbeit die Aufgabe der österreichischen Schule (§ 2 des Schulorganisationsgesetzes[7]) zu erfüllen. In diesem Sinne und entsprechend dem Lehrplan der betreffenden Schulart hat er unter Berücksichtigung der Entwicklung der Schüler […], jeden Schüler*

[7] § 2. Aufgabe der österreichischen Schule

(1) Die österreichische Schule hat die Aufgabe, an der Entwicklung der Anlagen der Jugend nach den sittlichen, religiösen und sozialen Werten sowie nach den Werten des Wahren, Guten und Schönen durch einen ihrer Entwicklungsstufe und ihrem Bildungsweg entsprechenden Unterricht mitzuwirken. Sie hat die Jugend mit dem für das Leben und den künftigen Beruf erforderlichen Wissen und Können auszustatten und zum selbsttätigen Bildungserwerb zu erziehen. Die jungen Menschen sollen zu gesunden, arbeitstüchtigen, pflichttreuen und verantwortungsbewussten Gliedern der Gesellschaft und Bürgern der demokratischen und bundesstaatlichen Republik Österreich herangebildet werden. Sie sollen zu selbständigem Urteil und sozialem Verständnis geführt, dem politischen und weltanschaulichen Denken anderer aufgeschlossen sowie befähigt werden, am Wirtschafts- und Kulturleben Österreichs, Europas und der Welt Anteil zu nehmen und in Freiheits- und Friedensliebe an den gemeinsamen Aufgaben der Menschheit mitzuwirken.

(www.bmukk.gv.at/schulen/recht/gvo/schog_01.xml#02) *nach Möglichkeit zu den seinen Anlagen entsprechenden besten Leistungen zu führen, […].“*

(www.bmukk.gv.at/schulen/recht/gvo/schug_teil1.xml)

Der Auftrag zur Förderung individueller Begabungen in der Schule ist auch in den allgemeinen didaktischen Grundsätzen des AHS-Lehrplans unter Punkt *4. Förderung durch Differenzierung und Individualisierung* verankert:

> *„Die Schülerinnen und Schüler haben vielfältige und unterschiedliche Fähigkeiten, die je nach deren Entwicklungsstand sowie nach Themenstellung und Herangehensweise im Unterricht in unterschiedlicher Weise zum Ausdruck kommen. Aufgabe der Schule ist es, die Schülerinnen und Schüler zur bestmöglichen Entfaltung ihrer individuellen Leistungspotenziale zu führen. Leistungsfähigkeit und besondere Begabungen sind dabei kontinuierlich zu fördern.“*

(www.oepu-noe.at/recht/lp/)

Welche schulischen Möglichkeiten bestehen, um Schüler zur *bestmöglichen Entfaltung ihrer individuellen Leistungspotenziale zu führen,* und ihre *besonderen Begabungen kontinuierlich zu fördern*? Zum einen besteht die Möglichkeit Hochbegabte in separaten Klassen oder Schulen zu unterrichten. So können beispielsweise hochbegabte Schüler nach der Volksschule am BG und BRG Mödling Keimgasse seit dem Schuljahr 2008/2009 im Rahmen des Schulversuchs *„Modellklassen für Begabten- und Begabungsförderung in der Sekundarstufe I“* die Unterstufe in nur 3 Jahren absolvieren (vgl. www.bgmoedling-keim.ac.at/index_standard.php). Oberstufenklassen speziell für Hochbegabte bietet die Sir-Karl-Popper-Schule am Wiedner Gymnasium in Wien (vgl. www.popperschule.at) an.

Wenn hochbegabte Kinder keine spezielle Schule oder keinen eignen Klassenzug für Hochbegabte besuchen, verbringen sie den Hauptteil ihrer Zeit nicht in speziellen Förderprogrammen sondern im regulären Unterricht. Das macht den Regelunterricht zu einem wichtigen (wenn nicht sogar dem wichtigsten) Ort der Begabtenförderung. Außerhalb des Regelunterrichts haben Schulen die Möglichkeit begabungsfördernde Schwerpunkte anzubieten: in Form von unverbindlichen Übungen, Freigegenständen, Wahlpflichtgegenständen, Olympiadekursen, Projekten, u. v. m.

10.1.1 Fördermöglichkeiten im Regelunterricht

Wie bereits festgestellt, ist es Aufgabe aller Lehrer die individuellen Stärken und Schwächen jedes Schülers zu fördern. Da in der Regel in einer Klasse das mathematische Leistungspotential der einzelnen Schüler sehr differiert, stellt sich die Frage, wie ein Mathematiklehrer der Anforderung entsprechen kann, in einer Klasse, in der das breite Spektrum vom rechenschwachen bis zum mathematisch begabten Schüler anzutreffen ist, sich jedem Schüler gleichermaßen zuzuwenden.

Die Schlagworte, wie dies gelingen kann, lauten Individualisierung und Differenzierung. Im *Grundsatzerlass zur Begabtenförderung* des Unterrichtsministeriums (Rundschreiben 16/2009) steht dazu:

> *„Im differenzierenden bzw. individualisierenden Unterricht stehen die Lernenden als Individuen mit ihren vielfältigen Lern-, Entwicklungs- und Sozialisationsvoraussetzungen im Mittelpunkt der Unterrichtsplanung (und nicht eine fiktive Durchschnittsklasse). Differenzierung und Individualisierung gelingen umso besser, je mehr die unterschiedlichen Erfahrungen, Zugangsweisen und Problemlösungen der Schüler/innen als Ressourcen erkannt werden (z. B. für Teamarbeit, Projektarbeit, bei der Reflexion des Lernprozesses).*
> *Differenzierung betrifft im Bildungsbereich alle organisatorischen, didaktischen und methodischen Maßnahmen, durch welche unterschiedliche Lernsituationen für einzelne Schüler/innen oder Gruppen geschaffen werden, z. B. flexible Gruppierung oder verschiedene inhaltliche und methodische Zugänge (Contracting[8], Curriculum Compacting[9], Jahresarbeiten, e-Learning, begabungsadäquate Materialien, unterschiedliche Aufgabenstellungen oder Zeitvorgaben etc.). […]*
> *(Hoch) begabte Schüler/innen bevorzugen oft abstrakte, interdisziplinäre, multiperspektivische Zugänge und besitzen die Fähigkeit zum Denken auf sehr hohem Niveau. Sie brauchen vermehrt Selbstlernarchitekturen und Know-how über Wissensmanagement, damit autonomes Lernen gelingen kann. Wichtige Voraussetzungen für selbstorganisiertes, kooperatives, forschendes, entdeckendes Lernen sind auch eine lernfördernde Fehlerkultur (z. B. ziel- und ressourcenorientiertes Feedback) und adäquate, situationsangepasste Kausalattributionen[10]. Die Lehrperson übernimmt in individualisierten Wissenserwerbsprozessen verstärkt eine Rolle als Lernberater/in, Coach bzw. Mentor/in.“*

(www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/grundsatzerlass_bf_2009/grundsatzerlass_bf_09.pdf , S. 6f)

Des Weiteren steht in den didaktischen Grundsätzen des Unterstufenlehrplans für Mathematik:

> *„Durch Differenzierungsmaßnahmen sollen die Schülerinnen und*

---

[8] *Contracting: eine (inoffizielle) Vereinbarung zwischen Lehrperson und Schülerinnen/Schülern zum individuellen Lernprozess*

[9] *Curriculum Compacting: ein Modifizieren oder beschleunigtes Durchnehmen des Lehrstoffes zu Gunsten zusätzlicher Lernangebote*

[10] *Kausalattributionen: Begründung von Erfolg bzw. Misserfolg durch Glück/Zufall, eigene Anstrengung, eigene Fähigkeiten, Schwierigkeitsgrad der Aufgaben, etc.*

Schüler entsprechend ihren individuellen Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnissen und Interessen bestmöglich gefördert werden.“

(www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf

Die Gestaltung eines begabtenfördernden Mathematikunterrichts wirft laut Ulm zwei zentrale didaktische Fragen auf: die nach einer geeigneten Unterrichtsmethodik und die nach geeigneten Aufgaben (vgl. Ulm, 2009, S. 5). Im Bezug auf die methodische Gestaltung führt Ulm folgende Forderungen an:

> *„Die Schüler sollen eigenverantwortlich, selbstorganisiert, individuell, kooperativ, experimentell, forschend und entdeckend lernen.*
> *Die Grundidee ist dabei ganz einfach: In einer regulären Schulklasse sind Schüler mit sehr unterschiedlichen Begabungen und Leistungspotenzialen zusammen (auch in gegliederten Schulsystemen). Offene, binnendifferenzierende Unterrichtsformen ermöglichen allen Schülern, auf ihrem jeweiligen Fähigkeitsniveau Mathematik zu betreiben. So kommt der Unterricht passgenau allen Schülern zu Gute – nicht nur den besonders Begabten, aber insbesondere auch diesen.“*

(Ulm, 2009, S. 5)

Eine Möglichkeit – sie sei exemplarisch aus der großen Menge binnendifferenzierender Unterrichtsmethoden herausgegriffen – Unterricht offen zu gestalten, stellt das *Ich-Du-Wir-Prinzip* von Gallin und Ruf dar (vgl. Ulm, 2009, S. 5f): Dabei macht sich in der „Ich-Phase“ zunächst jeder Schüler selbstständig mit einem mathematischen Problem vertraut. Er kann eigenständig Ideen und Strategien zur Lösung entwickeln und sein Arbeitstempo individuell wählen. In der „Du-Phase“ tauschen sich die Schüler in Kleingruppen über ihre Ideen aus. Im Zentrum stehen dabei das Nachvollziehen der Gedanken der anderen, die gegenseitige Unterstützung und der Aufbau sozialer Kompetenzen. Außerdem lernen die Schüler über Mathematik zu sprechen. In der abschließenden Wir-Phase präsentieren die Kleingruppen ihre Ergebnisse im Klassenplenum, und unter der Leitung der Lehrperson wird ein Gesamtergebnis gefunden.

Die zweite angeführte zentrale didaktische Frage stellt die Frage nach passenden Aufgaben dar. Nach Ulm eignen sich für eine differenzierende Unterrichtsgestaltung offene Aufgaben, die Erfolgserlebnisse für Leistungsschwächere zulassen und Leistungsstärkeren die Möglichkeit bieten, Mathematik entsprechend ihren Fähigkeiten zu betreiben, Aufgaben, die eine mathematikhaltige Situation nur umreißen und zum Erkunden von Mathematik einladen (vgl. Ulm, 2009, S. 6).

Als Beispiel einer offenen Aufgabe für die Oberstufe gibt Ulm folgende an:

> *„Aus einem Kreissektor wird ein Kegel hergestellt. Untersuche, wie*

die Maße des Kegels (z. B. Höhe, Oberfläche, Volumen) von den Maßen des Sektors abhängen!"

(Ulm, 2009, S. 7)

Dabei können sich leistungsschwächere Schüler darauf konzentrieren, aus gegebener Bogenlänge und Radius des Kreissektors, Formeln für den Radius, die Höhe, die Oberfläche und das Volumen des Kegels herzuleiten. Sie können untersuchen, welche Größen wie voneinander abhängen. So sind beispielsweise die Bogenlänge des Kreissektors und der Radius des Kegels zueinander direkt proportional, hingegen sind der Radius des Kreissektors und der Radius des Kegels voneinander unabhängig.

Herausfordernder wird es, wenn Schüler die Aufgabe mit der Frage beginnen, durch welche möglichen Größen ein Kreissektor eindeutig bestimmt ist. Dabei können nun zusätzlich zu der Bogenlänge und dem Radius der Mittelpunktswinkel, der Umfang und die Fläche des Kreissektors in die Betrachtung einbezogen werden. Es kann der Frage nachgegangen werden, wie viele Angaben für eine eindeutige Bestimmung notwendig sind und wie aus ihnen verschiedene Maße des Kegels (auch Winkel) hergeleitet werden können. Wieder können Zusammenhänge zwischen den einzelnen Maßen herausgearbeitet werden.

Als mögliche Herausforderung, der sich leistungsstarke Schüler stellen können, beschreibt Ulm:

„Das Extremwertproblem, für welchen Mittelpunktswinkel des Sektors (bei konstantem Radius) das zugehörige Pyramidenvolumen maximal ist, führt auf eine Funktion der Form $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ *. Diese Funktion umfassend zu diskutieren, erfordert zwar nur Standardverfahren der Oberstufenanalysis, allerdings benötigt man für die praktische Ausführung der Berechnungen doch allerlei mathematisches Verständnis. Durch Spiegeln des Graphen an den Koordinatenachsen gelangt man zur algebraischen Kurve mit der Gleichung* $y^2 = x^4(1-x^2)$*. Sie besitzt eine Fülle von Querverbindungen zu Kegelschnitten oder zu algebraischen Kurven wie der Lemniskate oder der Tschirnhaus-Kubik."*

(Ulm, 2009, S. 7)

Förster und Grohmann regen an, zur Gestaltung offener Aufgabensequenzen bestehende Schulbuchaufgaben zu verwenden, und diese durch Änderung der Fragestellungen zu öffnen, oder Knobelaufgaben aufzubereiten, sodass es nicht zwingend notwendig ist, neue Aufgaben zu erfinden (vgl. Förster u. Grohmann, 2008).

Eine weitere Möglichkeit, Schüler im Regelunterricht individuell zu fördern und dadurch auch das Potential hochbegabter Schüler herauszufordern, bietet projektorientiertes Lernen. Näheres dazu findet sich beispielsweise in Westphal (2008).

Eine Sammlung an Unterrichtsmaterialien ist u. a. im Lehrmittelpool der Homepage des Österreichischen Zentrums für Begabtenförderung und Begabungsforschung unter www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?lehrmittel zu finden. Weitere Ideen bietet die Plattform Lehrer-Online unter www.lehrer-online.de/jahr-der-mathematik.php.

Allgemeine, praxisorientierte Anregungen, wie man Unterricht begabungsfördernd gestalten kann, gibt Richter in ihrer Informationsschrift über Hochbegabung für Lehrer (Richter, 2003, S. 56-74). Sie geht allerdings nicht speziell auf mathematische Hochbegabung ein, setzt sich jedoch auch mit dem Einsatz von Hochbegabten als Tutoren für schwächere Mitschüler auseinander.

Abschließend sei das so genannte „Drehtürmodell" erwähnt, das auf einem Konzept von Renzulli beruht und in Form von Akzeleration oder Enrichment angeboten werden kann. Dabei wird Schülern, die in einem Fach sehr gute Leistungen zeigen, ermöglicht, in diesem Fach den Unterricht für einen vereinbarten Zeitraum zu verlassen, um den der nächsthöheren Klasse zu besuchen (Akzeleration), oder um eigenständig an einem selbstgewählten, in einem Lernvertrag festgelegten Projekt zu arbeiten (Enrichment).

10.1.2 Fördermöglichkeiten außerhalb des Regelunterrichts

Außerhalb des Regelunterrichts haben Schulen in Österreich die Möglichkeit Enrichmentprogramme in Form von Freigegenständen oder unverbindlichen Übungen anzubieten. Dazu steht im Schulorganisationsgesetz §6 Absatz (4):

> *„(4) […] Darüber hinaus können in den Lehrplänen auch weitere Unterrichtsgegenstände als Freigegenstände (auch Freigegenstände für besonders begabte und interessierte Schüler mit entsprechenden Anforderungen) und unverbindliche Übungen sowie ein Förderunterricht vorgesehen werden.[…]"*
>
> (www.bmukk.gv.at/schulen/recht/gvo/schog_01.xml#02)

Die unverbindliche Übung Mathematikolympiade wird im nächsten Abschnitt dieser Diplomarbeit im Detail vorgestellt, weiters kann in der Oberstufe das Wahlpflichtfach Mathematik gewählt werden. Zu diesen Möglichkeiten muss allerdings gesagt werden, dass sie davon abhängen, ob es an einer Schule einen engagierten Mathematiklehrer gibt, der sie anbietet, ob es genügend Schüler gibt, die sich dafür anmelden und ob das Stundenbudget einer Schule dafür ausreicht.

Außerdem gibt es in Mathematik eine Fülle an Schülerwettbewerben (z. B.: Känguru der Mathematik, Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb, Mathematik-Miniolympiade, Turnier der Städte, …), an denen einzelne interessierte Schüler oder ganze Schulklassen teilnehmen können.

10.2 Fördermöglichkeiten außerhalb der Schule

Auch außerhalb der Schule werden in Österreich diverse Förderprogramme angeboten. Einen Zusammenstellung der zahlreichen Projekte findet sich im Bericht des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur über Begabtenförderung und Begabungsforschung von 1996 bis 2006 (online verfügbar unter: www.bmukk.gv.at/medienpool/15239/begabten_neu.pdf). Des Weiteren sind viele Initiativen mit der Homepage des Österreichischen Zentrums für Begabtenförderung und Begabungsforschung (www.begabtenzentrum.at) verlinkt, einige davon seien nachfolgend kurz vorgestellt:

Jedes Jahr in den Ferien werden österreichweit so genannte Sommerakademien veranstaltet, in denen für unterschiedliche Altersgruppen (von Volksschülern bis Maturanten) Kurse zu verschiedenen Themen (nicht ausschließlich mathematische, aber auch solche) angeboten werden. So findet zum Beispiel im Rahmen der Sommerakademien 2011 in St. Florian (Oberösterreich) für begabte Schüler der 7. und 8. Schulstufe der Kurs *„Mathematik – Das Unendliche, der Zufall und die Richtung der Zeit“* statt (www.talente-ooe.at/fileadmin/user_upload/verschiedenes/soak_2011/Sommerakademie_St._Florian_2011_5.-8._Schulstufe.pdf).

Auch an österreichischen Universitäten werden Projekte für begabte Kinder organisiert, die Angebote der Wiener Unis (für 7-12Jährige) beispielsweise sind unter http://kinderuni.at/ zu finden. An der Fakultät für Mathematik der Universität Wien werden unter der Leitung von Univ.-Prof. Dr. Humenberger im Rahmen des Projekts „Mathe-Fans an die Uni“ Vorlesungen für mathematisch begabte Schüler der AHS-Unterstufe angeboten. Dabei werden 14-tägig (im Wintersemester für Schüler der 2. bzw. 4. Klassen und im Sommersemester für Schüler der 1. bzw. 3. Klassen) in Form von Mathematik-Werkstätten interessante Themen altersgemäß bearbeitet. Die Kinderuni in Steyr bietet Vorlesungen und Seminare für verschiedene Altersgruppen zwischen 5 und 99 Jahren (www.kinderunisteyr.at) und unter Mitarbeit der Linzer Johannes Kepler Universität findet seit einigen Jahren im Februar die „Projektwoche Angewandte Mathematik“ für begabte Schüler der Oberstufe (siehe www.projektwoche.jku.at) statt. Schließlich wird es im Rahmen des Projekts „Schüler/innen an die Unis“ hochbegabten Schülern ermöglicht, bereits während der Schulzeit Lehrveranstaltungen an der Universität zu besuchen. Mehr dazu siehe www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?id=240,0,0,1,0,0.

Viele Initiativen gehen von diversen Vereinen aus, wie dem Österreichischen Verein für hochbegabte Kinder, dem Verein begabt.ok, dem Verein zur Förderung besonderer leistungsfähiger und leistungswilliger Schüler in Niederösterreich, dem Verein zur Förderung hochbegabter Kinder und Jugendlicher in Tirol (Tiroler Talente), Stiftung Talente in Oberösterreich, ECHA Protalent in der Steiermark, dem Verein zur Förderung hochbegabter Schüler in Salzburg, dem Verein INIZIA in Kärnten oder der Initiative Begabung in Vorarlberg. Eine Übersicht über die einzelnen Koordinationsstellen in den Bundesländern bietet die Homepage des

Österreichischen Zentrums für Begabtenförderung und Begabungsforschung unter www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?koop_blks.

Schließlich sei noch das Internet erwähnt, das eine reichhaltige Quelle an Materialen zum Selbststudium bietet. Als Beispiele seien angeführt: www.zahlenjagd.at , www.matheraetsel.de , www.mathe-zirkel.de , www.vwv.de

Als eine potentielle Fundgrube weiterer Methoden und Materialien zur Begabtenförderung für Lehrer aber auch zum Selbststudium für Schüler kann (unter vielen anderen) die Homepage des deutschen *„Netzwerk Hochbegabung“* dienen: www.logios.de/hochbegabung/methoden_materialien_medien.htm

Dritter Teil

Die Mathematikolympiade

In diesem Abschnitt wird die Mathematikolympiade als eine Möglichkeit, mathematisch begabte Schüler zu fördern, genauer dargestellt. Nach einem Einblick in ihre geschichtliche Entwicklung werden die Struktur und die Inhalte der Vorbereitungskurse sowie die Wettbewerbe in Österreich und auf internationaler Ebene näher beleuchtet. Es kommen (ehemalige) Teilnehmer zu Wort, um von ihren Erfahrungen zu berichten, und abschließend werden begabtenfördernde Aspekte der Mathematikolympiade herausgearbeitet.

Für diesen Abschnitt war eine elektronischen Projektplattform des Unterrichtsministeriums, über die alle an der österreichischen Mathematikolympiade Mitwirkenden (Kursleiter, Koordinatoren, Vortragende, Organisatoren,…) kommunizieren, eine hilfreiche Fundgrube. Es finden sich auf dieser Plattform – passwortgeschützt – sämtliche Erlässe des BMUKK betreffend die österreichische Mathematikolympiade, organisatorische Informationen, Skripten, Wettbewerbsaufgabe, Termine,...). Weitere Informationen stammen aus den von mir geführten Interviews mit Mag. Ballik (Landeskoordinator Wien) am 16.6.2010, mit Mag. Henner (ehem. Landeskoordinator Wien u. langjähriger Kursleiter, bereits in Ruhestand) am 13.7.2010 und mit Mag. Gstöttner (Bundeskoordinator der ÖMO) am 26.11.2010.

11 Die geschichtliche Entwicklung

Allgemein betrachtet können Wettbewerbe in der Mathematik auf eine lange geschichtliche Tradition zurückblicken. Beispielsweise waren in der Renaissance öffentliche Disputationen und Problemlösungswettbewerbe unter Gelehrten sehr beliebt und trugen wesentlich zur Weiterentwicklung der Mathematik bei. Mathematische Wettkämpfe waren der Grund, dass damals – anders als heute – neue Erkenntnisse nicht so früh wie möglich veröffentlicht wurden. Prof. Baron erklärt die damalige Praxis folgendermaßen:

> *„Die Anstellungen an den Universitäten waren solche auf Zeit. Die Verlängerung der Anstellung wurde daher oft von den Ergebnissen, die der Bewerber in den mathematischen Wettbewerben erzielte, abhängig gemacht. Außerdem ging es bei diesen Wettbewerben auch um ansehnliche Summen Geldes. Daher waren*

geheimgehaltene Lösungsmethoden sehr gewinnbringend."

(Baron, 1991, S. 18)

Die Abhaltung von Olympiaden hat in der Mathematik hingegen eine kürzere Tradition, auch stellen nicht Wissenschaftler, sondern Schüler die Zielgruppe dieser Wettbewerbe dar. Den Beginn der Olympiaden sieht Baron Ende des 19. Jahrhunderts:

> *„Die modernen mathematischen Wettbewerbe, die seit dem Ende des vorigen Jahrhunderts als Herausforderung für Studenten und Schüler veranstaltet werden und deren Prototyp der seit 1894 durchgeführte ungarische Eötvös-Wettbewerb ist sowie die seit den Achtzigerjahren des vorigen Jahrhunderts in Rumänien veranstalteten Schülerwettbewerbe sind, werden alle im wesentlichen in derselben Art durchgeführt. Es handelt sich um schriftliche Klausurarbeiten mit dem Niveau der Teilnehmer angepaßten Schwierigkeitsgraden der Aufgaben."*

(Baron, 1991, S. 19)

Auf nationaler Ebene fand die erste Olympiade in der Sowjetunion 1934 statt, gefolgt von Polen 1949. Die erste internationale Mathematikolympiade (kurz IMO) wurde 1959 in Rumänien abgehalten. Damals nahmen 52 Schüler aus sieben Ländern (ausschließlich ehemalige „Ostblockländer": Bulgarien, DDR, Ungarn, Polen, Rumänien, Tschechoslowakei, UdSSR) teil. Es wurden jedoch bereits nach wenigen Jahren auch „westliche" Nationen eingeladen und die Zahl der teilnehmenden Länder wuchs schnell. Die erste IMO in einem nicht kommunistischen Land wurde im Jahr 1976 von Österreich ausgetragen. Seit 1959 wurde mit Ausnahme von 1980 jedes Jahr eine IMO veranstaltet. Tabelle 1 liefert einen Überblick über die Austragungsorte und Teilnehmerzahlen der bereits stattgefundenen internationalen Olympiaden, auch sind die bereits feststehenden Austragungsländer für 2011 und 2012 angeführt. Die Daten der Tabelle stammen von der offiziellen Homepage der internationalen Mathematikolympiade (www.imo-official.org). In der Originaltabelle werden die Teilnehmerzahlen in den Kategorien „alle", „männlich" und „weiblich" angegeben, allerdings weist der Webmaster darauf hin, dass ihm die Informationen über das Geschlecht der Teilnehmer nur unvollständig vorliegen, daher entspricht die Summe der Schülerinnen und der Schüler nur selten der Gesamtteilnehmerzahl. In Tabelle 1 wurde nur in jenen Jahren der Anteil der weiblichen Teilnehmer angegeben, in denen die Aufschlüsselungen in „männlich" und „weiblich" der Originaltabelle in Summe die Gesamtteilnehmerzahl ergibt.

		Austragung		**Teilnehmer**		**Anteil**
Nr.	**Jahr**	**Land**	**Stadt**	**Länder**	**SchülerInnen**	**Schülerinnen**
1	1959	Rumänien	Braşov	7	52	
2	1960	Rumänien	Sinaia	5	39	

3	1961	Ungarn	Veszprém	6	48	
4	1962	Tschechoslowakei	České Budějovice	7	56	
5	1963	Polen	Breslau	8	64	
6	1964	UdSSR	Moskau	9	72	
7	1965	DDR	Berlin	10	80	
8	1966	Bulgarien	Sofia	9	72	
9	1967	Jugoslawien	Cetinje	13	99	
10	1968	UdSSR	Moskau	12	96	
11	1969	Rumänien	Bukarest	14	112	
12	1970	Ungarn	Keszthely	14	112	
13	1971	Tschechoslowakei	Žilina	15	115	
14	1972	Polen	Toruń	14	107	
15	1973	UdSSR	Moskau	16	125	
16	1974	DDR	Erfurt	18	140	
17	1975	Bulgarien	Burgas	17	135	
18	1976	Österreich	Lienz	18	139	
19	1977	Jugoslawien	Belgrad	21	155	
20	1978	Rumänien	Bukarest	17	132	
21	1979	Vereinigtes Königreich	London	23	166	
22	1981	USA	Washington	27	185	
23	1982	Ungarn	Budapest	30	119	
24	1983	Frankreich	Paris	32	186	
25	1984	Tschechoslowakei	Prag	34	192	
26	1985	Finnland	Joutsa	38	209	
27	1986	Polen	Warschau	37	210	
28	1987	Kuba	Havanna	42	237	
29	1988	Australien	Canberra	49	268	
30	1989	Deutschland	Braunschweig	50	291	
31	1990	Volksrepublik China	Beijing	54	308	
32	1991	Schweden	Sigtuna	56	318	
33	1992	Russland	Moskau	56	322	
34	1993	Türkei	Istanbul	73	413	
35	1994	Hongkong	Hong Kong	69	385	
36	1995	Kanada	Toronto	73	412	
37	1996	Indien	Mumbai	75	424	
38	1997	Argentinien	Mar del Plata	82	460	
39	1998	Taiwan	Taipeh	76	419	
40	1999	Rumänien	Bukarest	81	450	
41	2000	Republik Korea	Taejon	82	461	
42	2001	USA	Washington	83	473	7%
43	2002	Vereinigtes Königreich	Glasgow	84	479	
44	2003	Japan	Tokio	82	457	

45	2004	Griechenland	Athen	85	486	
46	2005	Mexiko	Mérida	91	513	8%
47	2006	Slowenien	Ljubljana	90	498	8%
48	2007	Vietnam	Hanoi	93	520	9%
49	2008	Spanien	Madrid	97	535	10%
50	2009	Deutschland	Bremen	104	565	10%
51	2010	Kasachstan	Astana	97	517	9%
52	2011	Niederlande	Amsterdam			
53	2012	Argentinien				

Tab. 1: Chronologie der Internationalen Mathematikolympiaden
(vgl. www.imo-official.org/organizers.aspx)

Die Teilnahme eines Landes setzt eine Einladung durch das Gastgeberland voraus, wobei dieses verpflichtet ist, ehemalige Teilnehmerländer wieder einzuladen. Österreich wurde das erste Mal 1968 nach Moskau geladen, entsandte vorerst jedoch nur den damaligen Landesschulinspektor Alexander als Beobachter. Sein Bericht und die gestellten Wettbewerbsaufgaben zeigten, dass eine Teilnahme österreichischer Schüler nur durch zusätzliche Förderung sinnvoll wäre, da das Niveau des regulären Mathematikunterrichts unter dem der Wettbewerbsaufgaben lag. Auch 1969 nahm kein Schüler aus Österreich teil:

> *„Auch bei der folgenden Olympiade in Rumänien* [1969, Anm. CG] *war Österreich nur durch einen Beobachter, OSTR Prof. Flick, vertreten, der eine ähnliche Einschätzung der Situation des Mathematikunterrichts in Österreich lieferte* [wie LSI Alexander, Anm. CG]*. Im Herbst 1969 war es dann endlich soweit. Dem energischen Einsatz von Ministerialrat Dr. E. Szirucsek ist es zu danken, dass mit einer Vorbereitung begonnen werden konnte:*
>
> - *Einrichtung von Vorbereitungskursen in ganz Österreich*
> - *Finden interessierter junger und leistungsbereiter Mathematiklehrer*
> - *Schulung dieser Kollegen durch renommierte Hochschulmathematiker*
>
> *Es war ein hektisches Jahr. Defizite aus dem Studium hinsichtlich ‚Beweisen' waren zu beseitigen und die Suche nach geeigneten Aufgaben war der Zentralpunkt der Wochenendbeschäftigung."*
>
> (www.oemo.at/de/info/history.php)

Am Ende der Vorbereitungskurse wurden 1970 die ersten Kurs- und Landeswettbewerbe und in weiterer Folge die erste österreichische Mathematikolympiade (kurz ÖMO) abgehalten. In diesem Sommer bei der 12. internationalen Mathematikolympiade in Ungarn war Österreich erstmals durch acht Schüler (Karl Czakler, Johann Hackl, Franz Hofbauer, Gerald Leitner, Wolfgang

Matej, Angelika Rindler, Erich Steinbauer, Herbert Tobisch) vertreten. Der Aufwand hat sich gelohnt: Johann Hackl holte die erste Bronzemedaille für Österreich. Seither nahm Österreich an jeder IMO teil und kehrte jedes Mal mit Ausnahme von 1983 und 2003 mit Medaillen heim. Die meisten Medaillen erlangte Österreich 1976, als die IMO von Österreich organisiert wurde: acht Stück bei acht Teilnehmern. Von 1970 bis 2010 fuhren 176 Schüler und 10 Schülerinnen aus Österreich zu einer internationalen Mathematikolympiade. In Summe erzielten österreichische Schüler bereits 125 Medaillen. Karl Grill gewann bisher als einziger Österreicher zwei Goldmedaillen (1976 und 1977; sowie 1975 Silber). Die meisten Medaillen brachte Wilfried Pascher mit einer goldenen, einer silbernen und zwei bronzenen in den Jahren 1973 bis 1976 nach Österreich.

Übersicht über Medaillen, die von österreichischen Schülern gewonnen wurden:

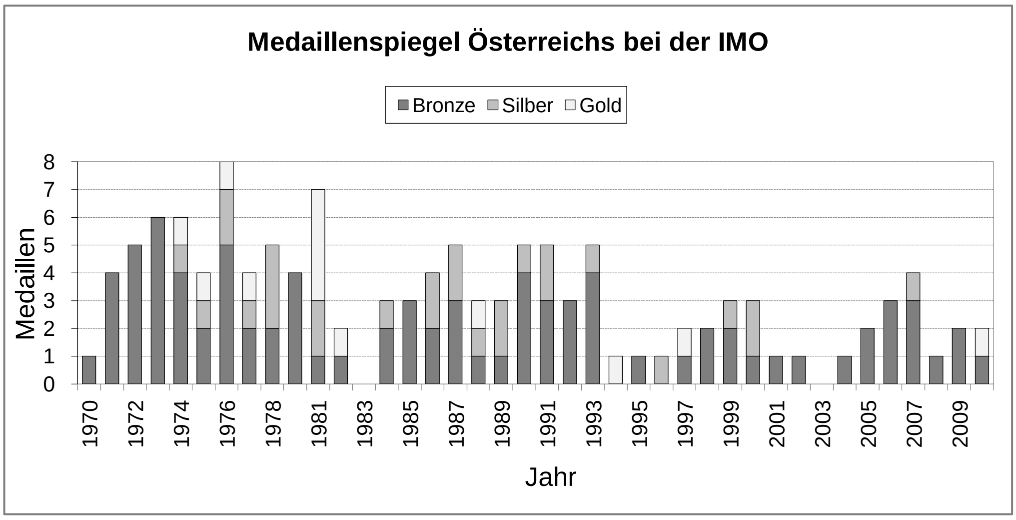

Abb. 9: Medaillen, die im Laufe der Jahre von österreichischen Schülern bei der IMO gewonnen wurden (1980 wurde in der Zeitachse ausgelassen, da in diesem Jahr keine IMO stattfand.)
(vgl. www.oemo.at/de/info/imo.php)

Es muss dazu erwähnt werden, dass von Beginn der internationalen Mathematikolympiade bis 1981 jedes Land maximal acht und 1982 nur maximal vier Schüler entsenden durfte. Seit 1983 beträgt die Maximalteilnehmerzahl sechs. Österreich entsandte stets Mannschaften mit der erlaubten Höchstschülerzahl.

Die internationale Mathematikolympiade wird ausschließlich als Einzelwettbewerb ausgetragen. Das bedeutet, jeder Teilnehmer wird für sich entsprechend der von ihm erreichten Punktezahl bewertet und gereiht, jedoch existiert inoffiziell auch eine Rangliste der Länder. Dafür werden die erzielten Punkte der Teilnehmer eines Landes addiert und die Länder entsprechend ihrer Gesamtpunktezahl gereiht. Die Abbildung 10 zeigt die Platzierung Österreichs in der inoffiziellen Länderwertung seit seiner ersten Teilnahme 1970. Die graue Fläche markiert dabei die Anzahl der im entsprechenden Jahr teilnehmenden Länder und damit die Zahl der zu vergebenden Plätze.

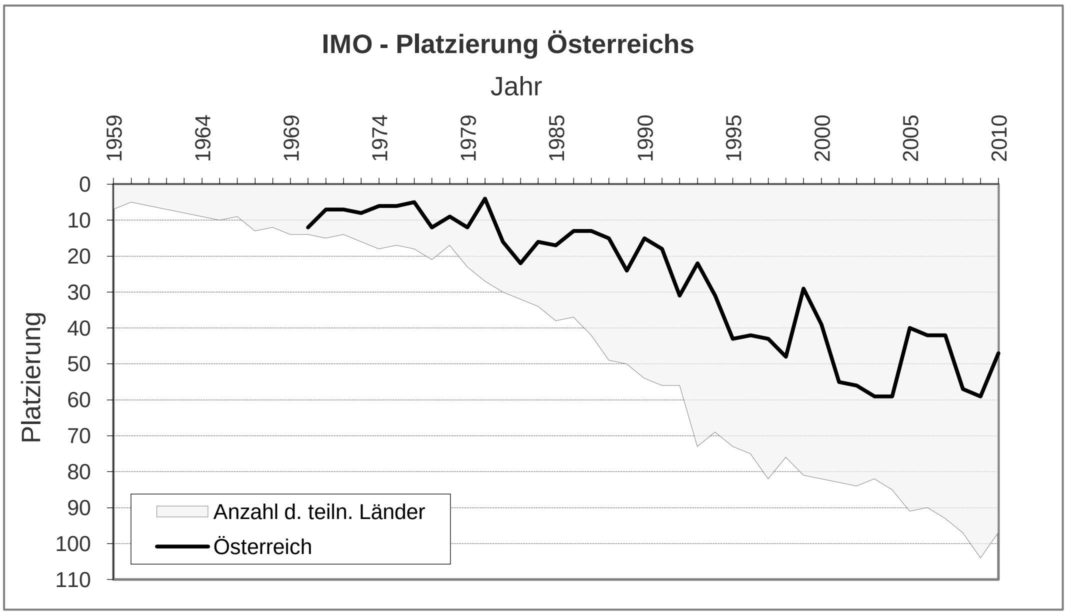

Abb. 10: Platzierung Österreichs in der inoffiziellen Länderwertung der IMO im Laufe der Jahre (ohne 1980)

In der Länderwertung erzielte Österreich 1981, als es Vierter wurde, seinen besten Platz. Bei der „Heim-IMO“ 1976 wurde Österreich Fünfter, die Jahre zuvor, 1974 und 1975, Sechster. Da die Teilnehmerzahl im Laufe der Jahre rasch anstieg, wurde es zunehmend schwieriger, eine gute Platzierung zu erreichen. Das beste Ergebnis in den letzten zehn Jahren war Platz 40 im Jahr 2005. Damals nahmen 91 Nationen teil. Um die Platzierung Österreichs im Verhältnis zur Anzahl der teilnehmenden Länder anschaulicher darzustellen, zeigt Abbildung 11, wie viel Prozent der Teilnehmerstaaten schlechter als Österreich abschnitten. Dazu wurde folgender Wert auf der y-Achse aufgetragen:

$$1 - \frac{\textit{Platzierung Österreichs}}{\textit{Gesamtzahl}}$$

Insgesamt lässt sich sagen, dass Österreich im guten Mittelfeld liegt. Es ließ bei 23 Olympiaden 50 Prozent oder mehr der teilnehmenden Länder hinter sich (1971-1976, 1981, 1984-1991, 1993-1994, 1999-2000, 2005-2007 und 2010) und zählte bei 17 Olympiaden selbst zur schlechteren Hälfte. Im Mittel ließ Österreich 51% der teilnehmenden Nationen hinter sich.

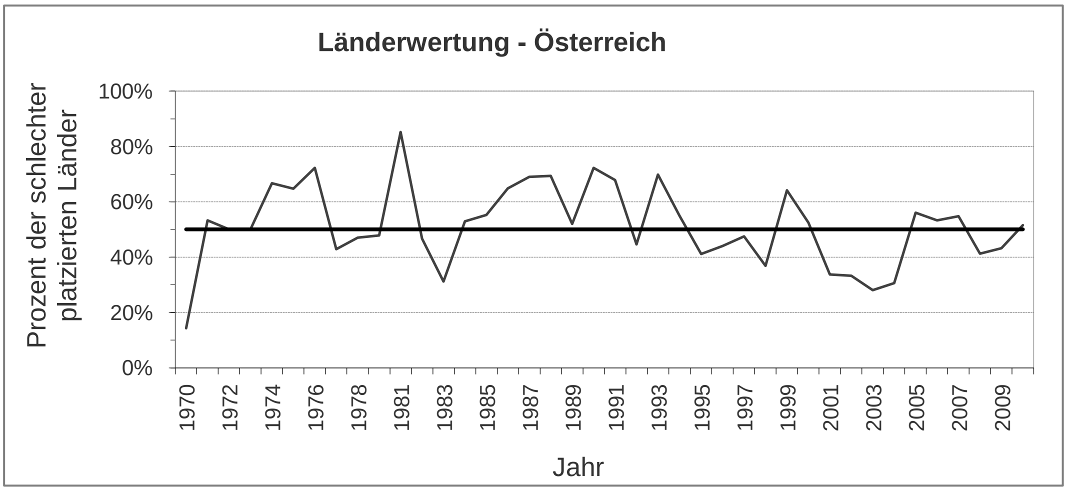

Abb. 11: Platzierung Österreichs in der inoffiziellen Länderwertung der IMO im Verhältnis zur Anzahl der teilnehmenden Länder

Natürlich drängt sich nun die Frage auf, welche Länder bessere beziehungsweise schlechtere Ergebnisse erzielen. Eine genaue Analyse, welche Länder wie bei der Mathematikolympiade abschneiden, würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen. Die genauen Daten der Ergebnisse aller Länder und Teilnehmer jeder Olympiade findet man auf der bereits erwähnten, offiziellen Homepage der IMO (www.imo-official.org). Um einen kleinen Einblick zu geben, zeigen die folgenden Abbildungen 12 und 13 die Platzierungen einiger europäischer beziehungsweise außereuropäischer Staaten in der inoffiziellen Länderwertung.

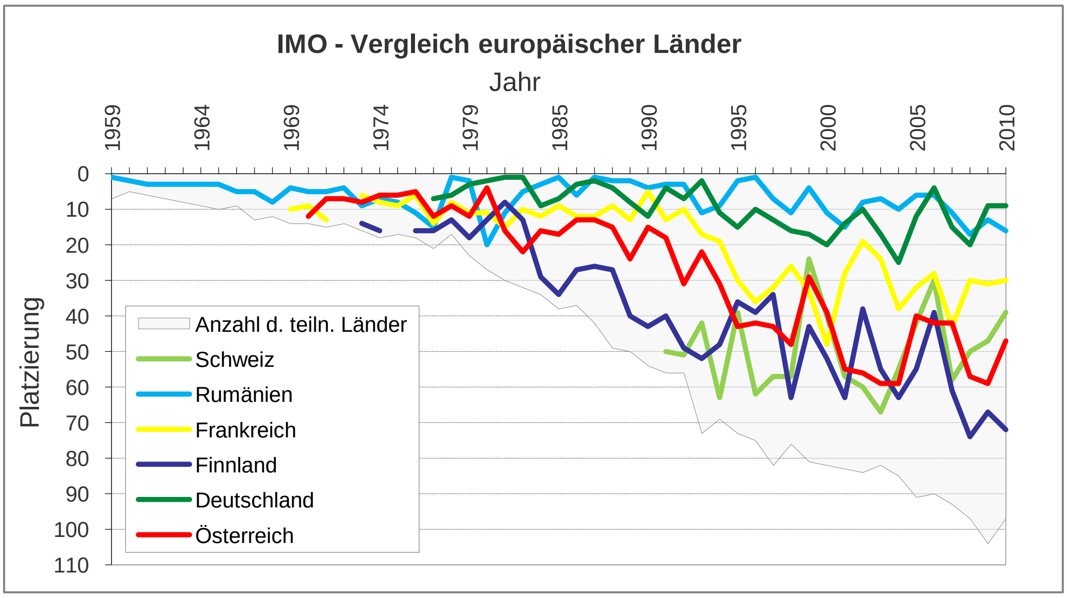

Abb. 12: Platzierung Österreichs und einiger ausgewählter, europäischer Staaten bei der inoffiziellen Länderwertung der IMO im Laufe der Jahre

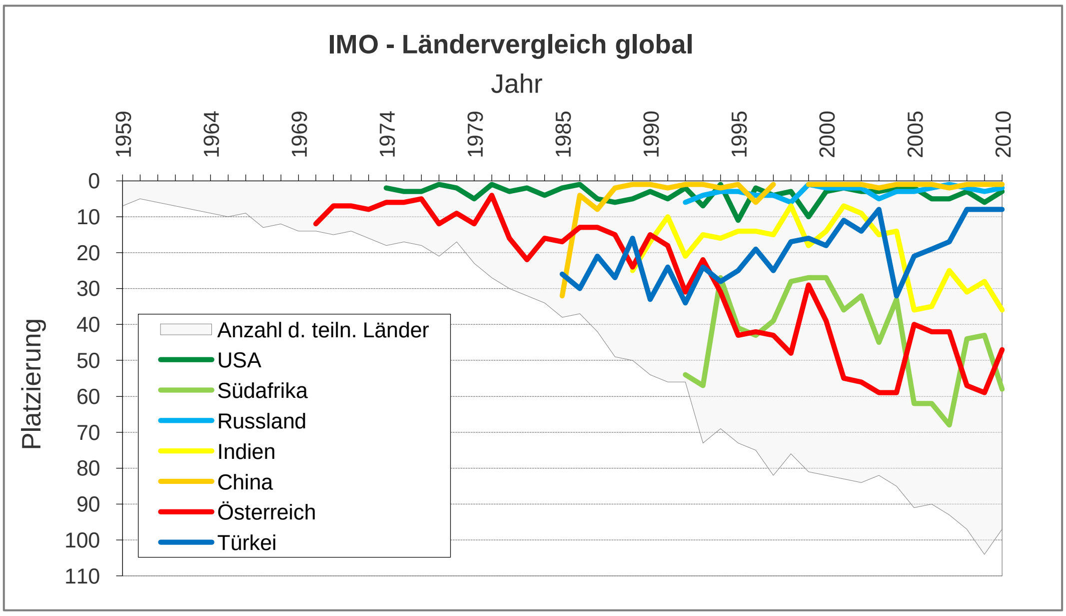

Abb. 13: Österreich im globalen Vergleich

Die Auswahl der Länder erfolgte dabei willkürlich. Zu der Wertung Deutschlands sei angemerkt, dass bis 1990 die angeführte Platzierung die der Bundesrepublik Deutschland darstellt, und die DDR eine eigene Mannschaft entsandte. Seit 1991 tritt Deutschland mit einem gemeinsamen Team an.

Es sei darauf hingewiesen, dass alle Daten, die zum Erstellen der Abbildungen 10 bis 13 verwendet wurden, der offiziellen Homepage der IMO (www.imo-official.org/results.aspx) entnommen wurden. Auf der Zeitachse wurde stets das Jahr 1980 ausgelassen, da in diesem Jahr keine IMO stattfand.

Gerd Baron

Abschließend darf ein Name nicht unerwähnt bleiben, der eng mit der geschichtlichen Entwicklung der österreichischen Mathematikolympiade (ÖMO) verbunden ist: Gerd Baron. Drmota, Mathematikprofessor an der TU Wien, schrieb 2005 anlässlich der Jubiläen 35 Jahr Österreichische Mathematikolympiade und 65 Jahre Gerd Baron:

> *„[…] kein Name ist mit der ÖMO so verbunden wie der von Gerd Baron. Er hat sie von Anfang an wissenschaftlich betreut und durch seinen unermüdlichen Einsatz prägend gestaltet. […] Es gibt wohl kaum jemanden, der praktisch alle bisher gestellten Olympiadebeispiele kennt und in wenigen Augenblicken auch noch so komplizierte (neue) Beispiele lösen kann, sondern auch über Jahrzehnte hinweg die oft undankbare Aufgabe der (Mit-) Organisation von Wettbewerben und des Zusammenstellens von*

Wettbewerbsbeispielen übernommen hat.“

(Drmota, 2005, S. 31)

Gerd Baron, Mathematikprofessor i. R. an der TU Wien, war einer der Gründungsväter der Mathematikolympiade in Österreich und ist bis heute ihr wissenschaftlicher Leiter. Er stellt den Großteil der Wettbewerbsaufgaben selbst zusammen. Über das Entstehen der Wettbewerbsaufgaben schreibt Baron selbst im Vorwort seiner Sammlung von ÖMO-Aufgaben aus den Jahren 2000 – 2008:

> *„Ja wie entstehen eigentlich die Beispiele? Meist aus der eigenen wissenschaftlichen Arbeit als Nebenprodukt. Aus der Vorbereitung von Vorträgen. Aus der Konstruktion von Übungs- und Prüfungsbeispielen zu Vorlesungen. Oft auch durch Umbau guter Ideen der Verschleierung von Sachverhalten in der Fachliteratur. Doch auch durch das Fehlen geeigneter Aufgaben in einzelnen Teilgebieten, wie Mengenlehre, Funktionalgleichungen, Kombinatorik, et cetera. Oder bei Beispielen, die in der Angabe oder in der Lösung eine spezielle Zahl (Jahreszahl, Datum usw.) enthalten sollen. Also das Suchen von speziellen Eigenschaften ‚gewünschter' Zahlen. Natürlich entstehen dabei oft ganze Beispielgruppen unterschiedlich schwieriger Beispiele.“*

(Baron, 2009, S. 3)

12 Struktur der Vorbereitung und der Wettbewerbe in Österreich

Wie im vorigen Kapitel angesprochen, wurde vor der ersten Teilnahme österreichischer Schüler bei der internationalen Mathematikolympiade festgestellt, dass der reguläre Mathematikunterricht für eine erfolgreiche Teilnahme nicht ausreichend vorbereitet. Daher wurde damals im Schuljahr 1969/70 die Institution der österreichschen Mathematikolympiade (ÖMO) mit Vorbereitungskursen und verschiedenen Wettbewerben eingerichtet, wobei sich im Grunde der Aufbau bis heute kaum verändert hat. Die ÖMO wird vom Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) für AHS-Schüler durchgeführt, dieses beauftragt einen Bundeskoordinator – derzeit Mag. Gstöttner vom Bundesrealgymnasium Schloss Wagrain in Vöcklabruck (OÖ) – und Landeskoordinatoren mit der Organisation. Dabei ist der Bundeskoordinator für die Weitergabe zentral erstellter Informationen (Programm, Termine,…) an die neun Landeskoordinatoren verantwortlich. Auch betreut er die elektronische Projektplattform der ÖMO und sammelt die Aufgaben der Kurswettbewerbe. Die Landeskoordinatoren wiederum leiten Informationen an die Kursleiter in ihrem Bundesland weiter.

Die Homepage der österreichschen Mathematikolympiade (www.oemo.at), die von ehemaligen Teilnehmern betrieben wird, beschreibt den Kern der Mathematikolympiade so:

„Die Mathematik Olympiade ist eine Institution, die mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler sowohl fördert als auch fordert. Es handelt sich dabei um eine sog. ‚unverbindliche Übung', die zwei Wochenstunden pro Schuljahr umfasst. In diesen Kursen lernen die Schülerinnen und Schüler Mathematik, die großteils über die Schulmathematik hinausgeht. Dabei wird nicht nur die Rechenfertigkeit gefördert, sondern das logische Denken und die Fähigkeit, Probleme zu lösen; Fertigkeiten, die in einem Studium, aber auch im späteren Leben, sehr wichtig sind. Neben den Kursen gibt es zahlreiche Wettbewerbe, in denen sich die Teilnehmer messen können."

(www.oemo.at/de/info/general.php)

Im Zuge der unverbindlichen Übung Mathematikolympiade werden Anfänger- und Fortgeschrittenenkurse angeboten. Sie stehen primär allen AHS-Schülern[11] ab der 9. Schulstufe[12] offen und werden von interessierten Lehrern abgehalten. Sobald sich zehn oder mehr Schüler anmelden, kann eine Schule einen Kurs eröffnen. Reicht die Zahl der Interessenten nicht für beide Kursarten, besteht die Möglichkeit, einen gemischten Kurs zu veranstalten. Dieser kann wöchentlich zweistündig für Anfänger und Fortgeschrittene gemeinsam abgehalten werden, wobei der Kursleiter versuchen wird, auf die unterschiedlichen Bedürfnisse der Teilnehmer einzugehen. Auch kann ein gemischter Kurs in getrennten Einheiten wöchentlich alternierend für Anfänger und Fortgeschrittene angeboten werden. Kommt an einer Schule kein Kurs zustande, steht es einem interessierten Schüler frei, an einem Kurs einer anderen Schule teilzunehmen. Um möglichst allen Interessierten die Teilnahme an einem Kurs zu ermöglichen, wird meist im Juni über die Mathematiklehrer vom Landes- bzw. Stadtschulrat der Bedarf an Kursen erhoben. Im September steht dann fest, wo welche Kurse zustande kommen.

Die Anfängerkurse – oder auch Einführungskurse genannt – richten sich an Schüler, die zum ersten Mal an der Mathematikolympiade teilnehmen. Am Ende des Kurses findet ein Kurswettbewerb statt. Die Besten eines Kurses dürfen sich im Landeswettbewerb mit anderen ihres Bundeslandes messen. Für Anfänger stellt der Landeswettbewerb die letzte Stufe der ÖMO dar.

Die Fortgeschrittenenkurse schließen ebenfalls mit einem Kurswettbewerb ab. Für die besten Fortgeschrittenen folgt der Gebietswettbewerb, bei dem sich die Teilnehmer an drei Orten in Österreich für den Bundeswettbewerb qualifizieren können. Der Bundeswettbewerb findet in zwei Ausscheidungsrunden statt, denen jeweils ein intensiver Vorbereitungskurs voraus geht. Der erste Teil des Bundeswettbewerbs wird auch oft Zwischenbewerb genannt. Im zweiten Teil des Bundeswettbewerbs wird der Sieger der österreichischen Mathematikolympiade

[11] In Ausnahmefällen können auch BHS-Schüler teilnehmen.
[12] Sonderregelungen für besonders begabte Unterstufenschüler werden im Kapitel 13 beschrieben.

(ÖMO) ermittelt, die besten Sechs der ÖMO dürfen dann an der internationalen Mathematikolympiade (IMO) teilnehmen. Für die österreichische IMO-Mannschaft wird kurz vor der IMO ein kurzer Spezialtrainingskurs abgehalten. Die Schüler, die die Plätze 7 bis 12 bei der ÖMO belegen, dürfen zu der Mitteleuropäischen Mathematikolympiade (kurz MEMO) fahren, auch für sie wird ein eigener Spezialtrainingskurs durchgeführt.

Für Schüler, die bei den Wettbewerben mitmachen wollen, aber keinen Kurs besucht haben, besteht die Möglichkeit, bei einem Qualifikationswettbewerb ihr Können unter Beweis zu stellen. Qualifikationswettbewerbe finden für Anfänger und für Fortgeschrittene statt, es gelten dieselben Regeln wie für Kurswettbewerbe, sie werden von den Landeskoordinatoren organisiert und durchgeführt. Die Besten dürfen an einem Landes- bzw. Gebietswettbewerb teilnehmen. Diese Möglichkeit richtet sich beispielsweise an Schüler, die das Wahlpflichtfach Mathematik besuchen oder in deren Nähe kein Kurs stattfindet und die sich dennoch bei den Bewerben mit anderen messen wollen.

Abbildung 14 zeigt einen Überblick über die einzelnen Wettbewerbsstufen der Mathematikolympiade in Österreich:

Anfänger	**Fortgeschrittene**
Kurs– / Qualifikationswettbewerb ⇣ Landeswettbewerb	Kurs– / Qualifikationswettbewerb ⇣ Gebietswettbewerb ⇣ Bundeswettbewerb 1 ⇣ Bundeswettbewerb 2 ⇣ IMO bzw. MEMO

Abb. 14: Stufen der Bewerbe der österreichischen Mathematikolympiade

Die einzelnen Stufen der Mathematikolympiade werden in den folgenden Kapiteln genauer erläutert.

Die Kurse an den Schulen werden wie bereits erwähnt von Mathematiklehrern gehalten, für sie wird jedes Jahr im Herbst in Mariazell ein dreitägiges Kursleiterseminar angeboten. Das Team für die Vorbereitungskurse der Bundeswettbewerbe setzt sich aus Mathematiklehrern und Universitätsprofessoren zusammen.

Um einen Einblick zu geben, wie viele Schüler und Lehrer in diese Form der Begabtenförderung involviert sind, hier ein paar Zahlen aus dem Schuljahr 2009/10, in welchem Bundesland wie viele Kurse von wie vielen Leitern mit wie vielen Schülern abgehalten wurden:

	Wien	NÖ	Steiermark	Kärnten	OÖ	Salzburg	Tirol	Vorarlberg
Kurse	14	4	27	2	15	2	2	5
Schüler	178	39	326	13	179	22	25	52
Lehrer	13	4	24	2	12	2	3	4

Tab. 2: ÖMO-Kurse im Schuljahr 2009/10

In Summe wurden 2009/10 in Österreich 71 Kurse von 64 Kursleitern gehalten, zu denen sich 834 Schüler angemeldet haben. Die meisten Kurse gab es in der Steiermark, in Oberösterreich und in Wien, im Burgenland kam hingegen kein Kurs zustande.

13 Kurse und Wettbewerbe für Anfänger

An die Teilnahme an einem Anfängerkurs (oder auch Einführungskurs genannt) sind prinzipiell zwei Bedingungen geknüpft: Man hat noch nie an der Mathematikolympiade teilgenommen und man besucht die 9. oder 10. Schulstufe. In der Vergangenheit zeigten aber auch immer wieder begabte Unterstufenschüler Interesse. Im Ausnahmefall durften auch sie mitmachen, und es hat sich gezeigt, dass auch für Jüngere eine Teilnahme durchaus sinnvoll und erfolgreich sein kann. Mag. Gstöttner erzählte im Interview von einem Schüler, der bereits in der ersten Klasse AHS einen Anfängerkurs besuchte. In der zweiten Klasse nahm er wieder an einem Anfängerkurs teil und wurde beim Landeswettbewerb für Oberösterreich Zweiter (von ca. 40 Schülern, die mehrheitlich die 4., 5. oder 6. Klasse besuchten). In der dritten Klasse wechselte er in den Fortgeschrittenenkurs qualifizierte sich für den Bundeswettbewerb. In der 4. Klasse nahm er sogar an der MEMO teil. Seit kurzem gibt es daher eine neue Regelung für Unterstufenschüler, die besagt, dass auch besonders begabte Unterstufenschüler an den Olympiadenkursen teilnehmen dürfen und ihre Teilnahme auch zu der erforderlichen Eröffnungszahl von 10 Schülern für einen Kurs zählt. Auf ihre Teilnahme wird allerdings bei der Erstellung der Wettbewerbsaufgaben nicht Rücksicht genommen. Das bedeutet, dass das Niveau der Wettbewerbsaufgaben nicht wegen jüngerer Schüler herabgesetzt wird, somit können alle Schüler teilnehmen, die sich zutrauen mitzumachen. Nach der Erfahrung von Mag. Gstöttner ist es oft einfacher, in der 4. Klasse Talente zu finden, und für eine Teilnahme an der Mathematikolympiade zu begeistern, als in der 5. Klasse. In der 4. Klasse verfügen Schüler leichter über Reserven als in der 5., in der sie meist durch Schulwechsel oder neue Klassenzusammenstellungen belastet sind und ein Neueinstieg in einen Mathematikolympiadekurs eine zusätzliche Beanspruchung darstellt. Steigen Schüler hingegen bereits in der 4. Klasse ein, ist es für sie leichter, in der 5. Klasse weiterzumachen. Als weiteres Argument für eine Teilnahme jüngerer Schüler gibt Mag. Gstöttner an, dass es für ein gutes

Abschneiden bei internationalen Bewerben entscheidend ist, möglichst früh mit Förderung zu beginnen.

Wie schon dargelegt, werden die Einführungskurse (wie auch die Fortgeschrittenenkurse) als zweistündige Unverbindliche Übung direkt an einer Schule von einem Mathematiklehrer gehalten. Hauptfokus der Kurse ist natürlich die Vorbereitung auf die folgenden Wettbewerbe, aber sie sind mehr als ein bloßes Hintrainieren auf Höchstleistungen bei der Olympiade. Mag. Henner betont im Interview, die Hauptmotivation für einen Kurs soll sein, dass den Schülern die Auseinandersetzung mit der Mathematik Spaß macht, und sie nicht nach einem halben Jahr *„frustriert den Hut drauf werfen“* (Zitat Henner).

13.1 Kursinhalte

Die in den Kursen bearbeiteten Inhalte richten sich primär nach den Kursteilnehmern. Das Vorwissen der Schüler differiert, daher wird sich der Kursleiter an Niveau und Interesse der Kursteilnehmer orientieren. Im Gegensatz zum Wahlpflichtfach Mathematik, wo die inhaltliche Gestaltung frei in der Hand des Lehrers liegt, gibt es allerdings für die unverbindliche Übung Mathematikolympiade schon Rahmenvorgaben. Ziel ist, auf die Wettbewerbe vorzubereiten und die dort gefragten Fähigkeiten zu trainieren. Es ist aber auch wichtig, auf die Schüler einzugehen, sie dort zu fördern, wo sie Interesse haben, und ihnen Freude an der Mathematik zu vermitteln. Man wird allerdings nichts durchnehmen, von dem man weiß, dass es beim Wettbewerb nicht benötigt wird. Baron bringt in einem Artikel 1991 einen sehr anschaulichen Vergleich mit der Vorbereitung auf sportliche Wettbewerbe:

> *„[Wir] müssen diese [bei den Wettbewerben zu bearbeitenden,* Anm. CG] *Beispiele näher unter die Lupe nehmen. Bis zu einem gewissen Grad kommt auch hier die sportliche Natur der Wettbewerbe ins Spiel. Die Funktion des Trainers wird vom Kursleiter, allgemeiner vom Vorbereiter übernommen. Dies hat nichts mit Reiten zu tun, obwohl er auf einigen Feinheiten der mathematisch exakten Formulierung herumreiten muß. […] Selbstverständlich muß der Trainer Methoden und Beispiele aus jenen Gebieten trainieren, die zu den Wettbewerben kommen werden. Schließlich wird ja auch nicht ein Hochspringer in den Marathonlauf gehetzt.“*
>
> (Baron, 1991, S. 22)

Generell ist zum Inhalt zu sagen, dass es rein um abstrakte, theoretische Mathematik geht, so dass beispielsweise Anwendungs- oder Modellierungsaufgaben keinen Platz haben. Im Vordergrund stehen Beweise und allgemeine Überlegungen, selten kommen reine Rechenbeispiele vor. Der vorgegebene Rahmen für die Wettbewerbsaufgaben des Kurswettbewerbs für Anfänger umfasst folgende vier Gebiete:

1. Gleichungen
2. Ungleichungen
3. Elementare Geometrie (ohne konstruktive Abbildungsgeometrie)
4. Zahlentheorie

Dieser Rahmen steckt gleichzeitig die Inhalte des Vorbereitungskurses ab. Soll doch im Kurs den Schülern *„das grundlegende Handwerkszeug“* (Zitat Ballik) beigebracht werden, das sie zum Lösen der Wettbewerbsaufgaben benötigen.

Leitet man als Mathematiklehrer zum ersten Mal einen Kurs, ist es sehr ratsam, auf die Erfahrung olympiadeerprobter Kollegen zurückzugreifen und Wettbewerbsaufgaben vergangener Jahre zu studieren, um einen Einblick zu bekommen, welche Fertigkeiten gefragt sind. In einem Informationsblatt, das bis zum Jahr 2005 den Erlässen des BMUKK beigelegt wurde, werden die Kursinhalte ein wenig eingegrenzt:

> *„Im folgenden seien die Sachgebiete der Kurse mit einigen Schwerpunkten zusammengefasst, die nur ein Gerüst darstellen können und je nach Zeit und Intention erweitert werden sollen; dabei kann man sich an den Beispielen der vergangenen Wettbewerbe orientieren.*
> *Einführungskurs:*
> - *<u>Gleichungen:</u> mit 1 und 2 Variablen, mit speziellen Funktionen, Parametern, notwendige und hinreichende Bedingung*
> - *<u>Ungleichungen:</u> arithmetisch-geometrisches Mittel, homogene, symmetrische Ungleichungen, Bestimmungsungleichungen, Identitäten*
> - *<u>Geometrie:</u> Ähnlichkeit, Pythagoräische Lehrsatzgruppe, Eulergerade, kongruente Dreiecke, Peripherie- und Zentriwinkel*
> - *<u>Zahlentheorie:</u> Teilbarkeit, euklidischer Algorithmus, Kongruenzen“*
>
> (BMUKK, 2005, S. 3)

Mag. Ballik konkretisierte im Interview mögliche Kursschwerpunkte folgendermaßen:

Das Gebiet <u>Gleichungen und Ungleichungen</u> umfasst unter anderem:

- das Lösen von quadratischen Gleichungen
- die binomischen Formeln und das Faktorisieren von Termen
- das Ergänzen auf vollständige Quadrate
- das Horner Schema
- Spezialfunktionen wie beispielsweise die Abrundungsfunktion $\lfloor x \rfloor$
- das Durchführen von Fallunterscheidungen

- Mittelungleichungen wie zum Beispiel die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung, die harmonisch-geometrische Mittelungleichung, die arithmetisch-harmonische Mittelungleichung und die arithmetisch-quadratische Mittelungleichung werden oft bei Wettbewerbsaufgaben gebraucht.

In der <u>Elementaren Geometrie</u> geht es vorrangig darum, aus der Unterstufe bekanntes Schulwissen wieder aufzufrischen und eventuell um Sätze wie den Peripheriewinkelsatz zu ergänzen. Wichtig dabei ist das Thema ähnliche Dreiecke.

Das Gebiet <u>Zahlentheorie</u> umfasst unter anderem:

- Teilbarkeit
- Primfaktorzerlegung
- Kongruenzen
- Zahlentheoretische Gleichungen
- den kleinen Satz von Fermat

Des Weiteren stellen Beweismethoden wie die vollständige Induktion oder indirekte Beweise, das Trainieren von exaktem Arbeiten und Argumentieren sowie vernetztes Denken zentrale Punkte dar. Oft benötigt man für die Lösung einer Olympiadeaufgabe nur wenig Wissen und einfache Formeln, muss diese aber mehrfach und verschachtelt anwenden, oder der Weg zur Lösung führt über eine Vernetzung verschiedener Teilgebiete. Mag. Gstöttner betonte im Interview, dass nicht nur Wissen wichtig ist, sondern es oft entscheidend ist, sein Knowhow, sein Reservoir an Wissen im richtigen Moment richtig einzusetzen.

Das Unterrichtsministerium stellt über diverse Kursthemen Skripten zur Verfügung. Es handelt sich dabei meist um Sammlungen von Übungsaufgaben und alten Wettbewerbsbeispielen sowie ihren Lösungen, wobei allerdings meist nicht zwischen Anfängern und Fortgeschrittenen differenziert wird. Es obliegt dem Kursleiter, selbst zu entscheiden, welche Inhalte für seinen Kurs passend sind. Auf die Skripten wird im Kapitel über die Kurse für Fortgeschrittene näher eingegangen.

Ein Skript zielt speziell auf Anfängerkurse ab, dieses soll daher an dieser Stelle kurz besprochen werden. Es heißt *„Mathematik Olympiade 1991 – Neue Beispiele für EINFÜHRUNGSKURSE“*. Wie der Titel schon sagt, handelt es sich dabei um eine reine Sammlung von Aufgaben, die nach Schwierigkeitsgraden aufsteigend von Olympiadeklasse 5 bis 9 geordnet sind. Die angegebenen Lösungswege sollen als Anregung dienen. Zielgruppe dieses Skripts sind nicht ausschließlich Olympiadeanfänger. Erich Windischbacher schreibt im Vorwort:

> *„In dieser Aufgabensammlung habe ich neue, interessante Wettbewerbsaufgaben für Anfänger zusammengefaßt. Dabei habe ich auch an interessierte Schüler der 5. bis 9. Schulstufe gedacht, bei*

denen man die Freude am Problemlösen fördert.“

(Windischbacher, 1991, S. 1)

In Punkto methodisches Vorgehen gibt es in Anfängerkursen wie in Fortgeschrittenenkursen keine einheitliche Linie, es ist sehr von Kursleiter und Kursteilnehmern abhängig. In der Regel ist es laut Mag. Henner eine Mischung von sehr wenig Vortrag und viel Impuls nachzudenken, Beispiele zu lösen und nachzubesprechen. In der Regel passiert in den Kursen viel in Teamwork, die Teilnehmer bringen sich manche Inhalte gegenseitig bei und profitieren davon, dass ihre Stärken unterschiedlich gelagert sind.

13.2 Der Kurswettbewerb

Am Ende eines jeden Olympiadekurses steht ein Kurswettbewerb. Er wird österreichweit in einem Zeitraum von 1 bis 2 Wochen meist im Mai durchgeführt, teilnahmeberechtigt sind alle Schüler eines Kurses. Die Aufgaben für diese erste Stufe der Mathematikolympiadewettbewerbe stellt jeder Kursleiter in dem inhaltlichen Rahmen, der in Kapitel 13.1. skizziert wurde, selbst zusammen. Sie sind von den Kursteilnehmern schriftlich auszuarbeiten.

Ein wichtiges Prinzip der Olympiadeaufgaben stellt die Regel dar, dass Schüler höherer Schulstufen aufgrund ihres Schulunterrichts keinen Vorteil gegenüber jüngeren haben sollen. Daher benötigt man zum Lösen der Wettbewerbsaufgaben nur Schulwissen, das Inhalt der Lehrpläne bis zur 9. Schulstufe ist und nie Fähigkeiten wie zum Beispiel Differenzieren oder Integrieren, die erst in höheren Klassen vermittelt werden. Auch Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik spielen kaum eine Rolle.

Grundsätzliche Anforderungen an Wettbewerbsaufgaben der Mathematikolympiade beschreibt Baron in einem Artikel 1991 recht ausführlich und zitiert dazu Engel:

> *„Was macht eine mathematische Wettbewerbsaufgabe aus? Wie soll sie sein? Ich möchte dazu A. ENGEL zitieren, denn seine Formulierung stimmt mit den gepflogenen Auswahlkriterien gut überein, wenn auch diese nicht immer eingehalten werden.*
> *Als erstes Zitat wähle ich den Beginn des Vorworts seines Buches Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR [A. Engel: Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR. Ernst Klett, 1966].*
>
> > ‚Dieses Buch enthält keine einzige Routineaufgabe, die ohne Überlegung auf den Anhieb gelöst werden könnte. Man benötigt in der Regel großen Einfallsreichtum, Einfühlungsvermögen und schöpferische Fähigkeiten. Die notwendigen Vorkenntnisse sind dagegen gering. Die elementare Mathematik der Mittelstufe reicht immer aus. Einige der Aufgaben sind so ‚leicht', daß sie im Prinzip von einem Sextaner gelöst werden können. Andere sind so schwierig, daß jeder Mathematiker mit

Hochschulbildung stolz sein kann, wenn er sie nach mehrstündiger intensiver Arbeit bezwingen kann (vorausgesetzt, daß er sie nicht kennt).'

Was eine gute Olympiadeaufgabe ist, definiert ENGEL in [A. Engel: Das Training unserer IMO-Mannschaft. Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 1988, S. 186-192] und [A. Engel: Bericht über die XXXI. Internationale Mathematikolympiade (IMO). Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 1990, S. 222-223].

‚Definition einer guten Olympiade-Aufgabe: Sie ist umso besser je weniger Vorkenntnisse sie erfordert. Ein Schüler sollte gegenüber einem Mathematiker keinen Nachteil haben. ... Ein Mathematiker sollte gegenüber einem Schüler keinen besonderen Vorteil haben. […]

Eine IMO-Aufgabe ist gut, wenn Vorkenntnisse fast nichts helfen.'

Meiner Meinung nach müßte man hier auf ‚spezielle Vorkenntnisse' ausbessern. Denn klarerweise sollen Schüler Vorkenntnisse, besonders die Methoden betreffend, mitbringen. Sowohl die Lösungsmethoden als auch die Darstellungsmethoden (exakte und sachlich und sprachlich richtige Ausdrucksweise) sind dabei gemeint. Denn ‚Die Anforderungen an die Vollständigkeit der Darstellung sind bei Olympiaden sehr hoch' [A. Engel: Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR. Ernst Klett, 1966, S. 5]. Dazu dienen ja auch die Vorbereitungen und die spezielle Ausbildung der Schüler [in den diversen Vorbereitungskursen, Anm. CG]*"*

(Baron, 1991, S. 23f)

Einen zusätzlichen Aspekt, was eine „schöne" Olympiadeaufgabe ausmacht, gibt Mag. Gstöttner im Interview an: Sie hat möglichst viele verschiedene und ziemlich unterschiedliche Lösungswege.

Für die Kurswettbewerbe (gilt für Anfänger und Fortgeschrittene) stellt also der Kursleiter die zu lösenden Aufgaben zusammen, er legt auch die Regeln fest, ob beispielsweise Formelsammlungen verwendet werden dürfen oder nicht. Generell gilt für die Verwendung von Hilfsmitteln:

„Bei den Kurs-, Qualifikations-, Landes- und Gebietswettbewerben können einfache Formelsammlungen verwendet werden. Die Entscheidung liegt bei der Jury. Taschenrechner dürfen bei keinen Wettbewerben verwendet werden."

(Protokoll zur Besprechung der ÖMO 2010 am 20.10.2009)

Die Punkteverteilung und die Korrektur der Aufgaben obliegen ebenfalls dem Kursleiter. Üblicherweise sind drei bis fünf Aufgaben in ca. drei Stunden zu lösen.

Zur Veranschaulichung sollen die Wettbewerbsaufgaben eines Anfängerkurses im Jahr 2010 dienen:

Von den folgenden vier Aufgaben sollen drei ausgewählt werden.

1. Sei $ABCDE$ die Hälfte eines regelmäßigen Achtecks. Die Geraden AB und DE schneiden sich in P. Zeige, dass C der Umkreismitelpunkt von $\triangle APB$ ist.
2. Löse die Ungleichung
$$x^2 - 4x + 5 > \Big|3|x-1| - 2\Big|.$$
3. Löse die Gleichung
$$x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor$$
über der Grundmenge $\mathbb{R}$. Dabei bedeutet $\lfloor y \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich y ist.
4. Wir bilden die Summe von 5 aufeinanderfolgenden durch 3 teilbaren Zahlen (z. B. 3+6+9+12+15) und nennen sie A, dann die der nächsten 5 durch 3 teilbaren Zahlen (hier 18+21+...) und nennen sie B und dann noch einmal der nächsten 5 durch 3 teilbaren Zahlen und nennen ihre Summe C. Kann das Produkt $ABC = 2010^3$ sein?

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Arbeitszeit: 3 Stunden

13.3 Der Landeswettbewerb

Die Besten der Anfängerkurswettbewerbe dürfen an einem Landeswettbewerb teilnehmen, in dem die Besten eines Bundeslandes ermittelt werden. Dabei gilt, dass jeder Kurs höchstens 50% der am Kurswettbewerb teilnehmenden Schüler jedoch nicht mehr als fünf zu den Landeswettbewerben entsenden darf. Das bedeutet bei jedem Kurswettbewerb qualifizieren sich die besten Fünf, es sei denn, in einem Kurs schrumpft die Teilnehmerzahl im Laufe des Schuljahres auf unter 10, dann tritt die 50%-Regel in Kraft. Die Landeswettbewerbe werden an verschieden Orten in Österreich zum gleichen Zeitpunkt ausgetragen, wobei die Richtlinie des Unterrichtsministeriums für die Durchführung des Landeswettbewerbs für Anfänger 2010 lautete:

> *„Vom 14. bis 16. Juni 2010 sollen die Landeswettbewerbe für Anfänger in Gallneukirchen (für Oberösterreich und Salzburg), in Aichdorf bei Judenburg (für Kärnten und Steiermark), in Ötz (für Tirol und Vorarlberg) und in Wien (für Wien, Niederösterreich) stattfinden, an denen die besten Schüler/innen der Kurswettbewerbe für Anfänger teilnehmen. Als Termin für die Landeswettbewerbe für Anfänger wurde der 15. Juni 2010 festgelegt, wobei der 14. Juni 2010 als Anreisetag und der 16. Juni 2010 als Abreisetag vorgesehen sind. Die Landeswettbewerbe stehen unter der Leitung je eines Komitees, das aus den Leiter/innen jener Vorbereitungskurse zusammengesetzt ist, die mit Schülerdelegationen an dem betreffenden Landeswettbewerb teilnehmen.“*

(BMUKK, 19.1.2010)

Die Wettbewerbsaufgaben werden von einem Komitee aus Vorschlägen der Kursleiter ausgewählt und sind österreichweit für alle Bundesländer gleich. Dem Aufgabenkomitee für den Landeswettbewerb 2010 gehörten Univ.Prof. Dr. DI Clemens Heuberger, Mag. Dr. Theresia Eisenkölbl, Mag. Karl Czakler und Mag. Walther Janous an.

Vom Aufgabenkomitee für den Landeswettbewerb 2007 wurde ein *„Inhaltlicher Leitfaden für den Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger“* erstellt. In diesem wird auf sieben Seiten ein Überblick gegeben, welche Kenntnisse den Teilnehmern nützlich sein könnten bzw. sollten. Es werden die bereits in Kapitel 13.1 angeführten Themengebiete konkreter umrissen, indem Begriffe, Techniken und Resultate genauer aufgelistet und Ergänzungsvorschläge angeführt werden. Zusätzlich wird angegeben, welche allgemeinen Fähigkeiten bezüglich mathematischer Sprache, spezieller Funktionen, Beweismethoden, Rechenregeln und Umformungen Teilnehmer beherrschen sollten. Dieser Leitfaden versteht sich einerseits als Rahmen für die Erstellung von Landeswettbewerbsaufgaben, andererseits auch als Hilfestellung und Richtlinie für die Gestaltung von Anfängerkursen. Um einen tieferen Einblick zu geben, welches Können von Anfängern in der Mathematikolympiade verlangt wird, findet sich der Leitfaden im Anhang. Da in diesem Leitfaden zu den einzelnen Themenbereichen Zahlentheorie, Gleichungen, Ungleichungen und Geometrie exemplarisch Aufgaben der Landeswettbewerbe der vergangenen Jahre angeben sind, wird an dieser Stelle darauf verzichtet. Die Aufgaben des Landeswettbewerbs der ÖMO 2010 (und der Jahre zuvor) sind auf der bereits mehrfach erwähnten Homepage der österreichischen Mathematikolympiade unter www.oemo.at/de/math/competitions.php verfügbar. Üblicherweise sind vier Aufgaben in vier Stunden zu bearbeiten.

Für Anfänger stellt der Landeswettbewerb die letzte Stufe und den Endpunkt der ÖMO dar.

14 Kurse und Wettbewerbe für Fortgeschrittene

Schüler, die entweder die 11. oder eine höhere Schulstufe besuchen oder bereits an einem Anfängerbewerb teilgenommen haben, gelten bei der österreichischen Mathematikolympiade als Fortgeschrittene. Sie können einen Fortgeschrittenenkurs der unverbindlichen Übung Mathematikolympiade besuchen.

Vieles was bereits über Prinzipielles der Anfängerkurse und der Anforderungen an Wettbewerbsaufgaben gesagt wurde, gilt auch für die Fortgeschrittenen. Neben dem höheren Niveau unterscheiden sie sich jedoch in zwei Punkten markant von den Anfängern:

Zum einen können die Fortgeschrittenenkurse bis zur Matura von einem Schüler wiederholt besucht werden, wodurch in den Kursen das Niveau der einzelnen

Teilnehmer noch mehr divergieren kann als in Anfängerkursen. Es kann beispielsweise sein, dass in einem Kurs ein Schüler sitzt, der in der 7. Klasse neu bei der Mathematikolympiade einsteigt, und einer, der bereits bei einem Bundesbewerb oder gar bei der internationalen Mathematikolympiade teilgenommen hat. Gerade diese unterschiedlichen Voraussetzungen ermöglichen jedoch zusätzliche methodische Gestaltungsweisen eines Kurses. So kann der Kursleiter beispielsweise zeitweise in den Hintergrund treten und die Schüler können sich gegenseitig beim Lösen von Aufgaben helfen, oder ehemalige Wettbewerbsteilnehmer können ihre Kollegen an ihren Erfahrungen teilhaben lassen. Hier stechen besonders ehemalige IMO-Teilnehmer, die im nächsten Schuljahr wieder die unverbindliche Übung Mathematikolympiade besuchen, hervor, sie übernehmen in den Kursen oft eine Art Tutorenrolle.

Zum anderen gibt es für Fortgeschrittene mehr Wettbewerbsstufen. Ist es für Anfänger nach den zwei Stufen Kurswettbewerb und Landeswettbewerb zu Ende, können sich Fortgeschrittene innerhalb der ÖMO in den vier Stufen Kurswettbewerb, Gebietswettbewerb, Bundeswettbewerb 1 und 2 durchsetzen, um sich schließlich für einen internationalen Bewerb – die IMO oder die MEMO – zu qualifizieren.

14.1 Kursinhalte

Das bereits erwähnte Informationsblatt des Unterrichtsministeriums aus dem Jahr 2005 listet für Fortgeschrittenenkurse folgende Inhalte auf:

- *Gleichungssysteme:* *lineare, nichtlineare Gleichungssysteme; Cramersche Regel, Äquivalenz, geometrische Deutung, Ungleichungssysteme*
- *Zahlentheorie:* *kleiner Fermat, Eulersche φ-Funktion, einfache spezielle diophantische Gleichungen*
- *Folgen und Reihen:* *Konvergenz, rekursive Folgen, charakteristische Gleichung*
- *Geometrie:* *Abbildungsgeometrie, Winkelfunktionen, Flächen- und Volumszerlegungen, Ähnlichkeit, kongruente Dreiecke, elementargeometrische Konstruktionen, Feuerbachkreis*

(BMUKK, 2005)

Wie bereits für Anfängerkurse erläutert, gilt auch für Fortgeschrittenenkurse, dass die Schwerpunktsetzung innerhalb der angeführten Sachgebiete bei jedem Kursleiter liegt, und sich dieser an den Stärken, Schwächen und Interessen seiner Schüler orientieren wird. Manchmal werden zusätzlich zu den oben angeführten Themen das Schubfachprinzip und Invarianten sowie Inhalte aus dem Gebiet Kombinatorik, welches derzeit bei internationalen Wettbewerben besonders beliebt ist, besprochen. Selten aber doch – besonders wenn Schüler eines Fortgeschrittenenkurses bereits in Raach an den Vorbereitungskursen für die

Bundeswettbewerbe teilgenommen haben – werden auch Funktionalgleichungen behandelt. Nimmt ein Schüler zum zweiten oder dritten Mal an einem Fortgeschrittenenkurs teil, ist ein Kurswechsel überlegenswert. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass ein weiterer Kurs an einer Schule stattfindet, die für den Schüler gut erreichbar ist. Da aufgrund der Eröffnungszahl von zehn Teilnehmern oft bereits Interessenten von mehreren Schulen zusammengefasst werden, ist es meist nur in größeren Städten möglich, dass Schüler auch Kurse anderer Leiter besuchen.

Als Hilfestellung werden vom BMUKK zahlreiche Skripten zur Verfügung gestellt. In Papierform gibt es neben reinen Aufgabensammlungen diverser Wettbewerbsaufgaben, die nicht thematisch geordnet sind, unter anderem Skripten mit den Titeln *„Gleichungssysteme“, „Gleichungen“, „Funktionalgleichungen“, „Ungleichungen“* und *„Geometrie“.*

Das Skriptum *„Gleichungssysteme“* ist eine Zusammenstellung von Wettbewerbsaufgaben und ihrer Lösungen zu den Themen lineare Gleichungssysteme mit Zahlen, lineare Gleichungssysteme mit Parametern, Gleichungssysteme mit quadratischen Variablen und mit Parametern, Gleichungssysteme höherer Ordnung, Systeme mit n-Variablen und Textaufgaben.

Im Skriptum *„Gleichungen“* finden sich Aufgaben (samt Lösungsvorschlägen), bei denen lineare Gleichungen ohne oder mit Parameter zu lösen sind, Definitions- und Lösungsmenge anzugeben sind, Fragen nach der Äquivalenz von Gleichungen zu beantworten sind, quadratische Gleichungen sowie Gleichungen höheren Grades ohne und mit Parameter zu lösen sind und Aufgaben, bei denen lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen oder Gleichungen höheren Grades mit Spezialfunktionen wie Betrag, Signum oder der Abrundungsfunktion zu lösen sind. Den Schluss bilden wieder Textaufgaben, bei denen zuerst die Gleichung aufgestellt werden muss, die zur Lösung führt.

Das Skriptum *„Funktionalgleichungen“* bietet einen einführenden Querschnitt durch verschiedene Lösungsverfahren sowie eine Aufgabensammlung.

Das Skriptum *„Ungleichungen“* enthält einen Theorieteil und eine Aufgabensammlung mit Lösungen. Der Aufbau des Theorieteils ist „typisch mathematisch“: eine Abfolge von Definitionen, Sätzen und ihren Beweisen. Es werden folgende Themen behandelt: arithmetisches, geometrisches, harmonisches und quadratisches Mittel und die zwischen ihnen geltenden Ungleichungen, die Bernoulli‘sche Ungleichung, die Tschebyscheff-Ungleichung, die Cauchy-Schwarz-Buniakowsky-Ungleichung, die Hölder-Ungleichung, die Minkowski-Ungleichung und Ungleichungen für konvexe Funktionen. Bei den Aufgaben sind großteils angegebene Ungleichungen zu beweisen.

Das Skriptum *„Geometrie“* beinhaltet eine Auswahl an Aufgaben (samt Lösungsvorschlägen) aus der ebenen und räumlichen Geometrie. Zur Anwendung kommen dabei unter anderem: Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken, der Peripherie- und der Zentriwinkelsatz, der Satz von Pythagoras, der Satz von Thales, der Satz von Ptolemäus, die Heron'sche Flächenformel, die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises, abbildungsgeometrische Deutungen und trigonometrische Anwendungen.

Zusätzlich gibt es einige Skripten zu Algebra, Folgen und Reihen, Zahlentheorie, Geometrie und Kombinatorik sowie Literaturtipps online auf der elektronischen Projektplattform des Unterrichtsministeriums, über die alle an der österreichischen Mathematikolympiade Mitwirkenden kommunizieren. Weitere Unterlagen erhalten Kursleiter auf dem Kursleiterseminar, das jedes Jahr in Mariazell stattfindet.

14.2 Der Kurswettbewerb

Der Kurswettbewerb für Fortgeschrittene findet bereits im März statt, so bleibt bis zur internationalen Olympiade, die jährlich im Juli stattfindet, noch Zeit für die weiteren Ausscheidungsrunden und ihre Vorbereitungskurse. Bis auf Inhalt und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben unterscheiden sich die Kurswettbewerbe der Fortgeschrittenen nicht von jenen der Anfänger. Daher wird Allgemeines, das bereits in Kapitel 13.2 erläutert wurde, hier nicht wiederholt. Die Aufgaben stellt auch bei den Fortgeschrittenen jeder Kursleiter für seinen Kurs zusammen. Grundsätzlich sollen es drei oder vier Beispiele sein, für deren Lösung drei Stunden zur Verfügung stehen. Den inhaltlichen Rahmen bilden die im Kurs erarbeiteten Stoffgebiete. Die Anforderungen, die an die Schüler gestellt werden, sollen durch die Aufgaben eines Kurswettbewerbs für Fortgeschrittene von 2010 gezeigt werden:

1) Sei $P(n) = n^5 + 20n^4 + 135n^3 + 340n^2 + 224n$.

   Zeige, dass $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n durch 30 teilbar ist.

   Lässt sich die Zahl 30 in dieser Aufgabe durch eine größere Zahl ersetzen? Falls ja – bestimme die größte!

2) Löse folgendes Gleichungssystem in $\mathbb{R}^3$:

$$x + 2y + z^2 + 1 = 0$$
$$xyz = 33$$
$$x^2 + 4y^2 = (z^2 + 5)(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5})$$

3) Man zeige, dass für jedes konvexe Viereck $ABCD$ gilt:

   Sind M_1, M_2, M_3 und M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD und DA, sowie M_5 und M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC und BD, so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.

4) Es gilt: $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{i^4} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} = \frac{\pi^4}{90}$

a) Begründe: $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots+\frac{1}{(2i+1)^4}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$

b) Bestimme folgende unendliche Summe

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}-\frac{1}{9^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}-\frac{1}{12^4}++-\ldots=?$$

Die Besten der Kurswettbewerbe qualifizieren sich für den Gebietswettbewerb. Dabei gilt wie beim Landeswettbewerb, dass jeder Kurs 50% seiner Teilnehmer jedoch nicht mehr als fünf entsenden darf. Nicht zu diesem Kontingent zählen Teilnehmer, die im Vorjahr Sieger eines Landeswettbewerbs waren oder sich für den zweiten Teil des Bundeswettbewerbs qualifizierten, sowie ehemalige IMO- oder MEMO-Teilnehmer. Diese haben eine Art „Freikarte".

14.3 Der Gebietswettbewerb

Für den Gebietswettbewerb werden die Bundesländer in drei Gebiete zusammengefasst. Dabei bilden Wien, Niederösterreich und Burgenland das Gebiet „Ost", Steiermark und Kärnten „Süd" und die restlichen Bundesländer „West". Der Wettbewerb findet an drei Orten – im Jahr 2010 waren dies Raach, Leibnitz und Obertraun – zur selben Zeit mit denselben Aufgaben statt. Er dauert drei Tage im April: Es ist – wie beim Landeswettbewerb – ein Tag für die Anreise, einer für den Wettbewerb und einer für Siegerehrung und Abreise vorgesehen. Teilnehmen darf, wer sich in einem Kurs- oder Qualifikationswettbewerb qualifiziert hat. Die teilnehmenden Schüler und ihre Kursleiter sind für diese Zeit von der Schule freigestellt.

In einem Erlass des BMUKK für die Durchführung des Gebietswettbewerbs 2010 (vom 14. bis 16. April) wurden folgende Richtlinien festgelegt:

> *„Der Beginn der Wettbewerbe ist um 8:30 Uhr anzusetzen. Die Arbeitszeit beträgt vier Stunden. Vor Beginn der Arbeit wird der versiegelte Umschlag mit den Prüfungsthemen von zwei Schülerinnen/Schülern auf seine Unversehrtheit geprüft und nach Bestätigung der Unversehrtheit von diesen geöffnet. […]*
> *Es ist dafür Sorge zu tragen, dass nach Mitteilung der Themen kein Kontakt der Schülerinnen und Schüler untereinander bzw. mit Außenstehenden möglich ist.*
> *Das Verlassen des Arbeitsraumes während der Arbeitszeit ist nur in dringenden Fällen zu gestatten, wobei geeignete, durch die örtlichen Verhältnisse gebotene Vorsichtsmaßregeln zu treffen sind.*
> *Alle am Wettbewerbsort anwesenden Leiterinnen und Leiter der Vorbereitungskurse bilden am Wettbewerbsort ein Komitee, das aus*

seiner Mitte eine/n Vorsitzende/n wählt, die/der die weiteren Veranlassungen hinsichtlich der Aufsicht sowie der Korrektur der Arbeiten trifft. Hierbei ist von dem Grundsatz auszugehen, dass jede Arbeit von mindestens zwei Lehrerinnen und Lehrern überprüft werden muss. Die Beschlüsse des Komitees, insbesondere die über die Reihung der Kandidatinnen und Kandidaten, werden vom Komitee mit einfacher Stimmenmehrheit gefasst. Bei Stimmengleichheit entscheidet die/der Vorsitzende. Hinsichtlich der Aufsicht während des Wettbewerbes ist von dem Grundsatz auszugehen, dass diese Aufsicht von mindestens zwei Mitgliedern des Komitees durchgeführt wird, wobei danach zu trachten ist, dass diese Komiteemitglieder keine Kontakte zu den von ihnen vorbereiteten Schülerinnen und Schülern haben. Die/Der Vorsitzende wird ersucht, die Überprüfung der Arbeiten zu koordinieren."

(Erlass des BMUKK vom 25.3.2010)

Man sieht, dass hier – im Gegensatz zu den Kurswettbewerben, bei denen doch vieles dem Leiter überlassen bleibt – die Durchführung des Gebietswettbewerbs genau festgelegt ist.

Die Aufgaben für die Gebietswettbewerbe stellt der wissenschaftliche Leiter der ÖMO, Univ.-Prof. Dr. Gerd Baron, zusammen. Folgende Aufgaben wurden 2010 gegeben (Quelle: www.oemo.at/problems/gwb/g2010-de.pdf):

41. Österreichische Mathematik Olympiade
Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene
15. April 2010

1. Seien $0 \leq a, b \leq 1$ reelle Zahlen. Beweise, dass dann
$$\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{(1-a^2)(1-ab)(1-b^2)} \leq 1$$
gilt.

2. Man löse folgende Gleichung für reelle x, y, z:
$$4x^4 - x^2(4y^4 + 4z^4 - 1) - 2xyz + y^8 + 2y^4z^4 + y^2z^2 + z^8 = 0$$

3. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und sei D ein Punkt auf der Seite BC. Seien U bzw. V die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle ABD$ bzw. $\triangle ADC$. Zeige, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle AUV$ ähnlich sind.

4. Sei $(b_n)_{n\geq 0} = \sum_{k=0}^{n}(a_0 + kd)$ für positive ganze Zahlen a_0 und d. Wir betrachten alle solchen Folgen, für die $b_i = 2010$ für ein positives ganzes i gilt. Bestimme den größtmöglichen Wert von i und für diesen auch die Zahlen a_0 bzw d.

Bei den Gebietswettbewerben qualifizieren sich insgesamt in etwa die besten 40 für den Bundeswettbewerb. Die genaue Regelung hängt von der Anzahl der Teilnehmer eines Gebiets ab, wobei für ehemalige IMO- oder MEMO-Teilnehmer analog zum Gebietswettbewerb eine Sonderregelung gilt.

15 Bundeswettbewerbe

Die Bundeswettbewerbe finden in zwei Stufen statt. Am ersten Teil dürfen die Schüler aus den Fortgeschrittenenkursen teilnehmen, die sich bei den Gebietsbewerben dafür qualifiziert haben. Sie werden zu einem Trainingscamp eingeladen, das jedes Jahr Anfang Mai in Raach (NÖ) stattfindet, dieser Kurs dauert ungefähr zehn Tage. An dessen Ende wird der Zwischenwettbewerb – oder auch Bundeswettbewerb Teil 1 genannt – abgehalten. Die Hälfte der Teilnehmer qualifiziert sich dabei für den zweiten Teil des Bundeswettbewerbs, für die anderen ist die österreichische Mathematikolympiade hier zu Ende. Ende Mai finden sich die ca. 20 Schüler, die am zweiten Teil des Bundeswettbewerbs teilnehmen dürfen, wieder in Raach ein. Nach etwa zehn Tagen Kurs findet der letzte Bewerb der österreichischen Mathematikolympiade, der Bundeswettbewerb Teil 2, statt. Seine besten sechs Teilnehmer dürfen Österreich auf der internationalen Mathematikolympiade vertreten. Die Schüler, die die Plätze 7 bis 12 belegen, dürfen zur Mitteleuropäischen Mathematikolympiade fahren[13].

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass die Teilnahme an der österreichischen Mathematikolympiade sowie an den internationalen Bewerben für die Schüler kostenlos ist. Sämtliche Kosten für Fahrt, Unterkunft und Verpflegung werden vom Unterrichtsministerium getragen, dadurch wird eine individuelle Förderung der mathematischen Begabungen unabhängig von sozialer Herkunft und finanziellen Mitteln ermöglicht.

15.1 Vorbereitungskurse

Für die Vorbereitungskurse in Raach gibt es keinen fixen Lehrplan. Die Inhalte variieren von Jahr zu Jahr etwas und orientieren sich – wie auch die Anfänger- und Fortgeschrittenenkurse – daran, was bei den internationalen Bewerben verlangt wird. Baron umreißt die Themen folgendermaßen:

> *„Da die trainierten und in den österreichischen Bewerben gestellten Probleme sich an jenen der IMO orientieren, sind die mathematischen Teilgebiete in einer aufsteigenden Mengenkette beschreibbar. Beginnend mit Zahlentheorie, Gleichungen,*

[13] Wobei es für die MEMO-Teilnahme einige Zusatzregeln gibt, die im Kapitel 18 näher beschrieben sind.

Ungleichungen und Geometrie (ohne konstruktive Abbildungsgeometrie) bei den Anfängern, werden sie um Folgen und Reihen, Gleichungssysteme und Ungleichungssysteme sowie (uneingeschränkter) Geometrie in der Ebene und im Raum für die Fortgeschrittenenkurse erweitert. Bei den Spezialkursen in Raach kommen für den Bundeswettbewerb die bei den internationalen Bewerben üblichen weiteren Gebiete Funktionen, Funktionalgleichungen, Polynome sowie Kombinatorik und kombinatorische Geometrie hinzu. Zu letzteren zählen Abzählungs- und Zerlegungsprobleme, Graphentheorie und Färbungsprobleme. Klarerweise gehörte zu allen angeführten Gebieten noch das Epitheton ornans ‚elementar' hinzugefügt […].“

(Baron, 1991, S. 22f)

Baron betont jedoch im weiteren Verlauf seines Artikels, dass es unmöglich ist, eine „erschöpfende Liste der Teilgebiete“ zu erstellen. Besonders in den höheren Stufen der Wettbewerbe gehören die Aufgaben mehreren Teilgebieten gleichzeitig an und können nur durch ein Ineinandergreifen verschiedener Methoden gelöst werden.

In Raach trägt ein Team aus Universitätsprofessoren und Lehrern höherer Schulen vor, welches in Besprechungen gemeinsam überlegt, welche Themen behandelt werden sollen, wo inhaltlich mehr Augenmerk wichtig wäre, und wo im Vergleich zum Vorjahr nachjustiert werden sollte. Die detaillierte Aufarbeitung seines Themas entscheidet jeder Vortragende in Selbstverantwortung. Ziel der Kurse ist die Erweiterung und Vertiefung des Wissens in den verschiedenen Teilgebieten. Neben der Vermittlung von Fachwissen geht es aber auch um grundlegende Lösungsmethoden und vernetzende Denkweisen, so spielt auch das Trainieren des Aufgabenlösens eine große Rolle. Besonders im Vorbereitungskurs zum 2. Bundeswettbewerb liegt der Schwerpunkt darauf, das Lösen von Aufgaben aus verschiedenen Bereichen zu üben und zu reflektieren, auf welche Weisen man auf Lösungen kommen kann.

Ein Skriptum für die Kurse in Raach aus dem Jahr 2002 enthält ein Kapitel über allgemeine Lösungsstrategien, Aufgaben zu dem Prinzip von Dirichlet (oder auch Schubfachschluss genannt). Weiters Aufgaben und Lösungen zu den Themen Funktionen und Funktionalgleichungen sowie zu Rekursionen. Am Ende findet sich eine Sammlung von ehemaligen IMO-Aufgaben. Einige andere Skripten sind auf der Projektplattform des Unterrichtsministeriums zu finden. Sie zeigen deutlich, dass das mathematische Niveau in den Kursen in Raach erheblich über dem des regulären Schulunterrichts in der Oberstufe liegt. Bei den Vorbereitungskursen für die Bundeswettbewerbe 2010 wurden folgende Themen von den angeführten Referenten vorgetragen:

Univ.Prof. Dr. DI Clemens HEUBERGER (TU Graz)	Zahlentheorie
OStR Dr. Kurt SCHOISSWOHL (Innsbruck)	Folgen und Reihen, Funktionalgleichungen

Prof. Mag. Richard HENNER (Wien)	Schubfachprinzip, Invarianten, Kombinatorik
OStR Mag. Erich WINDISCHBACHER (Graz)	Geometrie
Prof. Mag. Heinrich Josef GSTÖTTNER (Vöcklabruck)	Polynome, Gleichungssysteme
Birgit Vera SCHMIDT (TU Graz)	Ungleichungen, Gleichungen
Prof. Mag. Karl CZAKLER (Wien)	Ungleichungen, Geometrie
Prof. Dr. Robert GERETSCHLÄGER (Graz)	Nationale Bewerbe (Geometrie)
DI Dr. Stephan WAGNER (Stellenbosch University)	Kombinatorik
OStR Mag. Wolfgang SCHNEIDERGRUBER (Salzburg)	Geometrische Ungleichungen, Folgen und Reihen
Mag. Gerhard KIRCHNER (Innsbruck)	Rekursionen, Funktional-gleichungen, Kombinatorik

Tab. 3: Themen und Referenten in Raach 2010

15.2 Der Bundeswettbewerb Teil 1 und Teil 2

Alle Aufgaben der Bundeswettbewerbe werden vom wissenschaftlichen Leiter der ÖMO, Univ. Prof. Dr. Gerd Baron zusammengestellt. Korrigiert werden die Ausarbeitungen der Schüler von den Vortragenden der Vorbereitungskurse in Raach. Im Zwischenbewerb sind vier Aufgaben in 4,5 Stunden zu lösen. Der zweite Teil des Bundeswettbewerbs dauert zwei Tage, an jedem Tag werden drei Aufgaben gestellt, für die 4,5 Stunden zur Verfügung stehen. Über den Inhalt der Wettbewerbsaufgaben schreiben Baron und Schmidt:

> *„Inhaltlich können die Aufgaben des Bundeswettbewerbs aus allen auch bei Landeswettbewerb und Gebietswettbewerb vertretenen Fachgebieten sowie zusätzlich aus dem Gebiet ‚Funktionalgleichungen' stammen. Viele Aufgaben lassen sich dabei nur schwer einem bestimmten Fachgebiet zuordnen, da sie Elemente aus mehreren Gebieten enthalten."*

(Baron u. Schmidt, 2009, S. 8)

Die Wettbewerbsregeln sind sehr genau festgelegt. So schreiben beispielsweise ehemalige ÖMO-Teilnehmer auf der Homepage www.oemo.at über die Bundeswettbewerbe:

> *„Die Regeln sind hier noch um einiges strenger als beim Gebietswettbewerb. So muss zum Beispiel das Papier, das du während des Wettbewerbs verwendest, schon am Tag vor dem Wettbewerb beschriftet werden und darf danach nicht mehr verändert werden (angeblich wird es sogar in einem Safe eingeschlossen!)."*

(www.oemo.at/de/info/compete.php#BWB1)

Das bereits sehr hohe mathematische Niveau veranschaulichen die Aufgaben der Bundeswettbewerbe Teil 1 und Teil 2 aus dem Jahr 2010 (Quelle: www.oemo.at/problems/bwb/b2010-de.pdf):

41. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

Teil 1, 13. Mai 2010

1. Es sei $f(n) = \sum_{k=0}^{2010} n^k = 1 + n + n^2 + \cdots + n^{2010}$.

   Man zeige, dass für jede natürliche Zahl m mit $2 \leq m \leq 2010$ gilt:
   Es gibt keine natürliche Zahl n, sodass $f(n)$ durch m teilbar ist.

2. Für jede positive ganze Zahl n wird eine Funktion $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - k|$ für alle reellen Zahlen x definiert.

   Man bestimme für jede zweistellige Zahl n (in Dezimalschreibweise) die Lösungsmenge L_n der Ungleichung $f_n(x) < 41$.

3. Gegeben sei die Menge $M_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ der natürlichen Zahlen kleiner oder gleich n. Wir nennen eine Teilmenge S von M_n *ausgezeichnet*, wenn sie nicht leer ist und für jede natürliche Zahl $k \in S$ eine k-elementige Teilmenge T_k von S existiert.

   Man bestimme $a(n)$, die Anzahl der ausgezeichneten Teilmengen von M_n.

4. Zeichnet man in einem Dreieck ABC durch einen inneren Punkt P die drei Seitenparallelen, so zerlegen diese das Dreieck ABC in drei Vierecke (in den Ecken) und drei Dreiecke, die jeweils auf einer Seite aufsitzen.

   (a) Man zeige: Wählt man für P den Inkreismittelpunkt I, so gilt für jedes entstandene kleine Dreieck, dass sein Umfang gleich ist der Länge der Seite, auf der das Dreieck aufsitzt.

   (b) Man bestimme für ein gegebenes Dreieck ABC alle inneren Punkte P, sodass für jedes entstandene kleine Dreieck gilt, dass sein Umfang gleich ist der Länge der Seite, auf der das Dreieck aufsitzt.

   (c) Für welchen inneren Punkt P ist die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke minimal?

Teil 2, Tag 1, 2. Juni 2010

1. Man zeige: Für alle Tripel paarweise verschiedener ganzer Zahlen x, y, z ist

$$\frac{(x-y)^7 + (y-z)^7 + (z-x)^7 - (x-y)(y-z)(z-x)\left((x-y)^4 + (y-z)^4 + (z-x)^4\right)}{(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5} \geq 3.$$

   Wann gilt Gleichheit?

2. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) positiver natürlicher Zahlen $x > y > z > 0$, sodass $x^2 = y \cdot 2^z + 1$.

3. Bei einem kreisrunden Billardtisch prallt eine Kugel an der Bande genau so ab, als ob die Bande die Tangente an den Kreis im Auftreffpunkt wäre.

   Auf einem kreisrunden Billardtisch ist ein regelmäßiges Sechseck mit den Ecken auf dem Kreis gezeichnet.

   Auf dem Umfang des Sechsecks, aber in keiner seiner Ecken, ist eine (punktförmige) Kugel platziert. Man beschreibe einen periodischen Kurs dieser Kugel mit genau vier verschiedenen Bandenpunkten. In wie vielen verschiedenen Stoßrichtungen kann die Kugel auf einen solchen Kurs gebracht werden?

Teil 2, Tag 2, 3. Juni 2010

4. Im Gitterausschnitt mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(n,0)$, $(n,2)$ und $(0,2)$ kann man von einem Gitterpunkt (a,b) entweder zu $(a+1,b)$ oder zu $(a+1,b+1)$ oder zu $(a,b-1)$ ziehen, sofern der zweite Punkt auch zum Ausschnitt gehört.

   Wie viele Wege von $(0,0)$ zu $(n,2)$ unter Berücksichtigung dieser Zugregeln gibt es?

5. Zwei Zerlegungen eines Quadrats in drei Rechtecke heißen wesentlich verschieden, wenn man nicht durch Umordnen der Rechtecke von einer zur anderen gelangen kann.

   Wie viele wesentlich verschiedene Zerlegungen eines 2010×2010 Quadrats in drei Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es, bei denen der Flächeninhalt eines Rechtecks das arithmetische Mittel der Flächeninhalte der beiden anderen ist?

6. In einem konvexen Sechseck heißt eine Diagonale eine „lange" Diagonale, wenn sie das Sechseck in zwei Vierecke zerlegt.
   Je zwei lange Diagonalen zerlegen das Sechseck in zwei Dreiecke und zwei Vierecke.

   Gegeben sei nun ein konvexes Sechseck mit der Eigenschaft, dass bei jeder Zerlegung durch zwei lange Diagonalen die auftretenden Dreiecke jeweils gleichschenkelig mit den Sechseckseiten als Basen sind.

   Man zeige, dass dann das Sechseck einen Umkreis hat.

Angesichts dieser Aufgaben, drängt sich die Frage auf, wovon es abhängt, ob Oberstufenschüler tatsächlich in der Lage sind, Beispiele dieses Schwierigkeitsgrades zu lösen. Nach der Einschätzung von Mag. Henner liegt es zum einen Teil sicher an der Qualität der Vorbereitung in den Kursen, aber auch sehr an der individuellen Begabung der Teilnehmenden und daran, ob die Schüler auch zu Hause üben und sich selbstständig mit Inhalten und Aufgaben beschäftigen.

16 Inhalte der Wettbewerbsaufgaben versus Regelunterricht

Aus welchen mathematischen Teilgebieten die Wettbewerbsaufgaben der ÖMO kommen, und welche Themen folglich zuvor in den diversen Kursen durchgenommen werden, wurde nun in den Kapiteln 13.1, 14.1 und 15.1 beschrieben. Abbildung 15 zeigt einen Überblick über die Häufigkeit der einzelnen Themen bei den Wettbewerben der ÖMO, deren Aufgaben zentral gestellt werden (Landeswettbewerb für Anfänger (LWA), Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene (GWF), Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (BWF)), in den Jahren von 2000 bis 2008. Die Einteilung der Teilgebiete sowie die thematische Zuordnung der Aufgaben wurden aus dem Buch über die österreichischen Mathematikolympiaden von 2000 bis 2008 von Baron und Schmidt übernommen (Baron u. Schmidt, 2009).

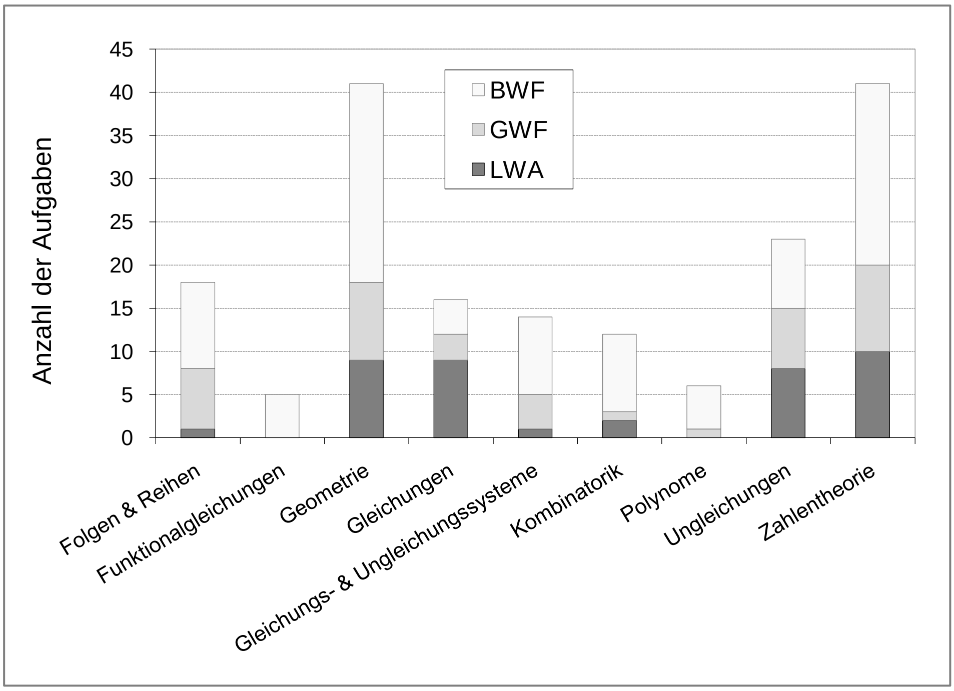

Abb. 15: Themenhäufigkeit bei den ÖMO-Wettbewerben von 2000 bis 2008

Bei Landeswettbewerben und bei Gebietswettbewerben wurden in den Jahren 2000 bis 2008 insgesamt jeweils 36 Aufgaben (4 Aufgaben pro Jahr) gestellt. Auf Bundesebene waren es 82 Aufgaben, wobei in Abbildung 15 auf eine Unterteilung in Bundeswettbewerb 1 und 2 verzichtet wurde. Wie bereits in vorigen Kapiteln beschrieben, lassen sich nicht alle Aufgaben eindeutig einem Thema zuordnen. Bei der der Abbildung 15 zugrunde liegenden Einteilung wurden 20 Aufgaben zwei Teilgebieten und eine Aufgabe drei Teilgebieten zugeordnet. Dabei fällt auf, dass überwiegend schwierigere Aufgaben themenübergreifende Lösungsansätze erfordern: Es wurden 12 Bundeswettbewerbsaufgaben und 6 Gebietswettbewerbsaufgaben hingegen nur 2 Anfängeraufgaben zwei Themen zugerechnet, bei der dreifach zugeordneten Aufgabe handelt es sich um ein Beispiel eines Landeswettbewerbs. Die häufigsten Überschneidungen finden zwischen den Themen Folgen & Reihen und Zahlentheorie (7 Aufgaben) gefolgt von Kombinatorik und Zahlentheorie (4 Aufgaben) statt. Den Themen Geometrie und Funktionalgleichungen konnten die Aufgaben eindeutig zugeordnet werden.

Man erkennt in Abbildung 15, dass die Mehrheit der Aufgaben bei den ÖMO-Wettbewerben in der betrachteten Zeitspanne aus den Gebieten Zahlentheorie und Geometrie stammen. Bei den Landeswettbewerben dominieren die Themen, die bereits als Inhalte der Anfängerkurse in Kapitel 13.1 beschrieben wurden: Zahlentheorie (10 Aufgaben), Geometrie (9 Aufgaben), Gleichungen (9 Aufgaben) und Ungleichungen (8 Aufgaben). Bei den Gebietswettbewerben tritt das Lösen von Gleichungen etwas in den Hintergrund, dafür gewinnen die Themen Folgen &

Reihen und Gleichungs- & Ungleichungssysteme an Häufigkeit. Polynome spielen nur bei Aufgaben für Fortgeschrittene und Funktionalgleichungen ausschließlich bei Bundeswettbewerben – und da nur in der 2. Runde – eine Rolle.

Geometrische Inhalte des Lehrplans und der Olympiade

In Folge wird nun das bei den Olympiadeaufgaben dominante Gebiet Geometrie mit dem Lehrplan für Mathematik der AHS-Oberstufe (vom 8.7.2004) verglichen. Der Lehrplan wurde dafür von www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (aufgerufen am 23.11.2010) herunter geladen.

Im Regelunterricht zieht sich das Thema Geometrie durch alle Klassen der Oberstufe – wobei in der 8. keine neuen Inhalte hinzukommen, sondern nur Stoff der 5. bis 7. Klasse wiederholt wird. Bei den im Lehrplan vorgeschriebenen geometrischen Inhalten dominieren die Vektorrechnung und Trigonometrie. So wird in der 5. Klasse mit Vektoren und analytischer Geometrie der Ebene begonnen, in der 6. Klasse zur analytischen Geometrie des Raumes übergegangen, um schließlich in der 7. Klasse Inhalte der nichtlinearen, analytischen Geometrie (Kreis, Kugel, Kegelschnittslinien) zu erarbeiten. Weiters ist in der 5. Klasse das Thema Trigonometrie (Definieren der Winkelfunktionen sin α, cos α, tan α für $0° \leq \alpha \leq 360°$; Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern – auch mittels Sinus- und Kosinussatz; Kennenlernen von Polarkoordinaten) vorgesehen.

Bei der Mathematikolympiade werden nie Berechungen mit Vektoren verlangt und Kenntnisse in Trigonometrie sind kaum erforderlich. Dabei lassen sich manche Aufgaben durchaus mittels Vektorrechnung oder durch das Verwenden von Winkelfunktionen lösen, und dies ist auch nicht verboten, es gibt allerdings meist „elegantere“ Wege. Es ist nicht der Fall, dass man Inhalte des Oberstufenlehrplans für Mathematik bei den Olympiaden nicht verwenden darf – im Gegenteil, es ist alles erlaubt, was zu einer korrekten Lösung führt – allerdings existiert bei den geometrischen Olympiadeaufgaben meist auch ein Weg, sie ohne Vektorrechnung oder Winkelfunktionen zu lösen. Bei den internationalen Bewerben gibt es die Regelung, dass bei einer Lösung unter Verwendung von Vektorrechnung keine Teilpunkte vergeben werden. Das bedeutet, ist die Aufgabe richtig gelöst, bekommt man alle Punkte, hat man einen Fehler gemacht, bekommt man keinen Punkt.

Um einen Einblick zu geben, welche Geometriekenntnisse bei der Mathematikolympiade gefragt sind, werden die Inhalte eines Geometrieskriptums für die Olympiadekurse skizziert: Nach einer Wiederholung von grundlegenden Definitionen von Strecke, Gerade, Strahl, (rechter) Winkel, Normale, Abstände zwischen Punkten und Geraden, Parallelität, Schnittpunkt, Streckenmittelpunkt, Strecken- und Winkelsymmetrale werden wichtige Begriffe rund um folgende geometrische Figuren erklärt: Kreis (Mittelpunkt, Radius, Sehne, Durchmesser, Tangente, Sekante, Passante), Dreieck (spezielle Dreiecke, Winkelsumme, besondere Punkte, Flächeninhalt), Viereck (Winkelsumme, Umkreis, Inkreis, Diagonale, Fläche, spezielle Vierecke), Polygone (Außenwinkel, konkave und konvexe Polygone, regelmäßige Polygone, Winkelsumme). Es folgt ein Kapitel über Spiegelungen (an einer Geraden bzw. an einem Punkt) und ein Kapitel über Teilverhältnisse. Weiters werden Kongruenz und Ähnlichkeit von Dreiecken, die Eulersche Gerade, der Strahlensatz, die Satzgruppe von Pythagoras und die Heron'sche Flächenformel behandelt. Zum Thema Kreis werden vertieft: Lagebeziehungen von zwei Kreisen, Tagenten von einem Punkt an einen Kreis, der Eistütensatz[14], der Südpolsatz[15], der Peripherie-, der Zentri- und der Sehnen-Tangentenwinkelsatz. Abschließend werden Besonderheiten von Sehnen- und von Tangentenvierecken besprochen.

Man sieht, es wird primär Bekanntes aus der Unterstufe wiederholt, vertieft und erweitert. Mag. Gstöttner hebt im Interview hervor, dass bei den geometrischen Olympiadeaufgaben sehr viel mit Ähnlichkeiten, Satz von Thales, Satz von Pythagoras und Peripheriewinkelsatz gearbeitet wird.

Da es eine Qualität der Olympiadeaufgaben ist, dass sie nicht alle nach einem Schema zu lösen sind, ist es schwierig, sie allgemein zu beschreiben. Im Anhang sind einige Geometrieaufgaben von Olympiaden der letzten 10 Jahre zusammengestellt, um einen Einblick zu geben, welcher Art sie sind. Auf Aufgaben aus dem Jahr 2010 wurde dabei verzichtet, da sie großteils in den vorigen Kapiteln angeführt sind (Kapitel 13.2: Anfängerkurswettbewerb Aufgabe 1, Kapitel 14.2: Fortgeschrittenenkurswettbewerb Aufgabe 3, Kapitel 15.3: Gebietswettbewerb Aufgabe 3, Kapitel 15.2: Bundeswettbewerb Teil 1 Aufgabe 4 sowie Teil 2 Aufgabe 3 und 6).

Exemplarisch sei an dieser Stelle eine Olympiadeaufgabe aus dem Themengebiet Geometrie eines Anfängerwettbewerbs herausgegriffen und ein möglicher Lösungsweg skizziert. Anschließend wird eine Geometrieaufgabe des Bundeswettbewerbs 2000 einer thematisch ähnlichen Schulbuchaufgabe der Oberstufe gegenübergestellt und ein möglicher Lösungsweg der Bundeswettbewerbsaufgabe detailliert erläutert.

Aufgabe aus dem Themengebiet Geometrie des LWA 2003

Im Landeswettbewerb für Anfänger 2003 war folgende Aufgabe zu lösen:

> *Man zeige: Jedes einem Quadrat umschriebene Rechteck ist selbst ein Quadrat.*
> *(Ein Rechteck ist einem Quadrat umschrieben, wenn auf jeder*

---

[14] <u>Eistütensatz:</u> Die beiden Tangenten von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang.

[15] <u>Südpolsatz:</u> Sei *ABC* ein Dreieck. Dann schneiden die Streckensymmetrale von *AB* und die Winkelsymmetrale von $\angle ACB$ einander auf dem Umkreis des Dreiecks.

Rechteckseite genau ein Eckpunkt des Quadrats liegt.)

(Baron u. Schmidt, 2009, S. 20, Aufgabe 50)

Ein möglicher Beweis, der beschriebenen Eigenschaft könnte folgendermaßen geführt werden:

Da laut Angabe einem Quadrat ein Rechteck umschrieben wird, setzt sich dieses Rechteck EFGH allenfalls aus dem eingeschriebenen Quadrat ABCD und vier rechtwinkeligen Dreiecken (AEB, BFC, DCG, ADH) zusammen (vgl. Abb. 16).

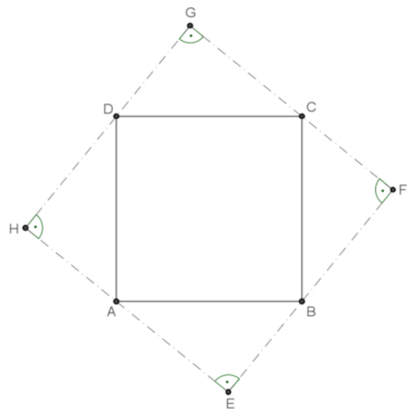

Abb. 16

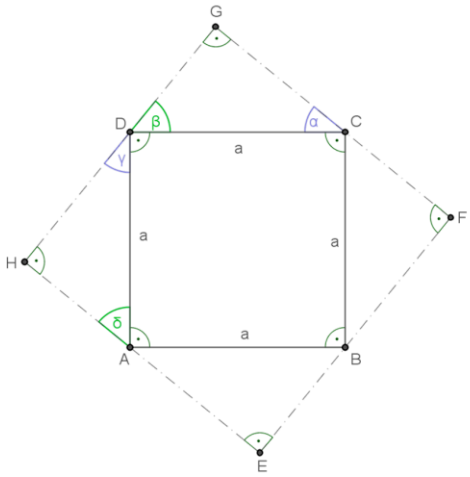

Abb. 17

Die in Abbildung 17 eingezeichneten Winkel α und β ergänzen einander auf 90°. Ebenso sind β und γ komplementär. Folglich gilt α=γ und β=δ. Die vier rechtwinkeligen Dreiecke AEB, BFC, DCG und ADH stimmen in ihren Winkeln überein und sind daher zueinander ähnlich. Auch sind ihre Hypotenusen gleich lang. Daher sind die vier rechtwinkeligen Dreiecke AEB, BFC, DCG und ADH kongruent. Jede Seite des Rechtecks EFGH setzt sich aus einer kürzeren und einer längeren Kathete der kongruenten, rechtwinkeligen Dreiecke zusammen. Folglich sind alle Seiten des Rechtecks gleich lang und EFGH muss ein Quadrat sein.

□

Gegenüberstellung einer Aufgabe aus dem Themengebiet Geometrie des BWF 2000 und einer Schulbuchaufgabe

Im Jahr 2000 wurde beim Bundeswettbewerb folgende Aufgabe gestellt:

Im spitzwinkeligen, nicht gleichseitigen Dreieck ∆ABC mit dem Winkel γ=60° seien U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und D der Schnittpunkt der Geraden AH und BC (Höhenfußpunkt der Höhe durch A).
Man zeige, dass die eulersche Gerade HU Winkelsymmetrale des Winkels ∠BHD ist.

(Baron u. Schmidt, 2009, S. 14, Aufgabe 12)

Im Mathematikbuch für die 8. Klasse AHS von Malle u. a. findet sich in einer Aufgabensammlung zur Maturavorbereitung, in der der Stoff der Oberstufe wiederholt wird, folgende Aufgabe:

> *Berechne den Höhenschnittpunkt H, den Schwerpunkt S und den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ∆ABC und zeige, dass H, S, und U auf einer Geraden liegen. A=(-4│-2), B=(8│10), C=(2│-14)*
>
> (Malle u. a., 2007, S.184, Aufg. 13.04, a)

In beiden Aufgaben geht es um ein Dreieck, seine Eulersche Gerade und darum, eine besondere Eigenschaft zu zeigen. Um die Olympiadeaufgabe lösen zu können, reicht das Wissen um die Winkelsumme eines Dreiecks und um die besonderen Eigenschaften des Umkreismittelpunkts, des Höhenschnittpunkts, eines gleichseitigen Dreiecks und einer Raute aus – vorausgesetzt man kann dieses Wissen geschickt einsetzen. Es trifft für diese Aufgabe zu, dass – wie in Kapitel 13.2 eine gute Olympiadeaufgabe allgemein charakterisiert wurde – wenig Vorkenntnisse erforderlich sind, entscheidend sind Einfallsreichtum, kreatives Kombinieren und mehrfaches, verschachteltes Anwenden bekannter Sachverhalte, aber auch genaues Arbeiten. Ein Patentrezept für die Lösung dieser Aufgabe gibt es nicht, aber auch nicht für andere Geometrieaufgaben und überhaupt für kaum eine Olympiadeaufgabe.

Lösung der BWF-Aufgabe

Wie kann ein möglicher Lösungsweg der Aufgabe aus dem Bundeswettbewerb 2000 aussehen? (Der in Folge skizzierte Lösungsweg ist an den Lösungsvorschlag von Baron und Schmidt (Baron u. Schmidt, 2009, S. 74) angelehnt.)

<u>1. Schritt: Genaues Lesen der Angabe und der Fragestellung:</u>

Hier noch einmal die Aufgabe:

> *Im spitzwinkeligen, nicht gleichseitigen Dreieck ∆ABC mit dem Winkel γ=60° seien U der Umkreismittelpunkt, H der Höhenschnittpunkt und D der Schnittpunkt der Geraden AH und BC (Höhenfußpunkt der Höhe durch A).*
>
> *Man zeige, dass die eulersche Gerade HU Winkelsymmetrale des Winkels ∠BHD ist.*

<u>2. Schritt: Anfertigen einer Skizze:</u>

Bei geometrischen Aufgaben empfiehlt es sich immer, eine Skizze anzufertigen. Bei dieser Aufgabe wird die zu zeigende Eigenschaft durch die besondere Größe des Winkels γ=60° bedingt, daher ist es wichtig, dass in der Skizze γ genau 60° hat. Andernfalls ist es schwierig, zu erkennen, warum in dieser Art Dreieck die Euler'sche Gerade die Winkelsymmetrale des Winkels ∠BHD ist.

In der Skizze in Abbildung 18 ist der in der Angabe beschriebene Sachverhalt dargestellt, wobei oBdA[16] angenommen wird, dass der Winkel $\angle BAC$ größer als der Winkel $\angle CBA$ ist. (Die Gleichheit der beiden Winkel wird durch die Bedingung, dass ABC kein gleichseitiges Dreieck sein darf, ausgeschlossen.) Der Winkel $\angle BHD$ wird ε genannt. Es soll somit gezeigt werden, dass die Euler'sche Gerade den Winkel ε halbiert.

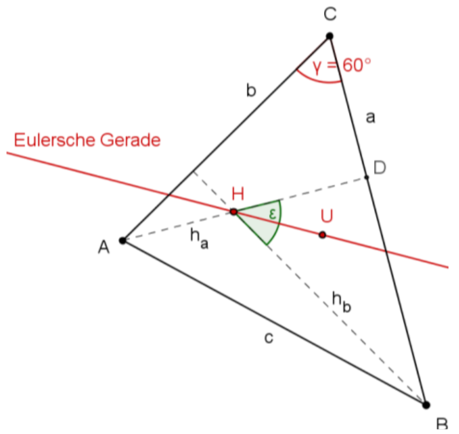

Abb. 18: Angabe der BWF-Aufgabe

3. Schritt: Erkennen der Zusammenhänge:

Oft weiß man – besonders bei Olympiadeaufgaben – nicht so recht, wie man vorgehen soll. Bei Aufgaben aus der Geometrie hilft es manchmal mehrere Hilfslinien und bekannte Eigenschaften einzuzeichnen, um die herrschenden Zusammenhänge besser zu verstehen. Daher wurden in der nebenstehenden Abbildung (Abb. 19) die Streckensymmetralen der Seiten a und b – bezeichnet mit m_a und m_b – sowie die Mittelpunkte mit der Seiten a und b – bezeichnet mit M_a und M_b – eingezeichnet und die rechten Winkel zwischen den Seiten und ihren Höhen bzw. ihren Streckensymmetralen hervorgehoben. Weiters sei E der Höhenfußpunkt der Höhe h_b, G der Schnittpunkt von m_a und h_b, und F der Schnittpunkt von m_b und h_a.

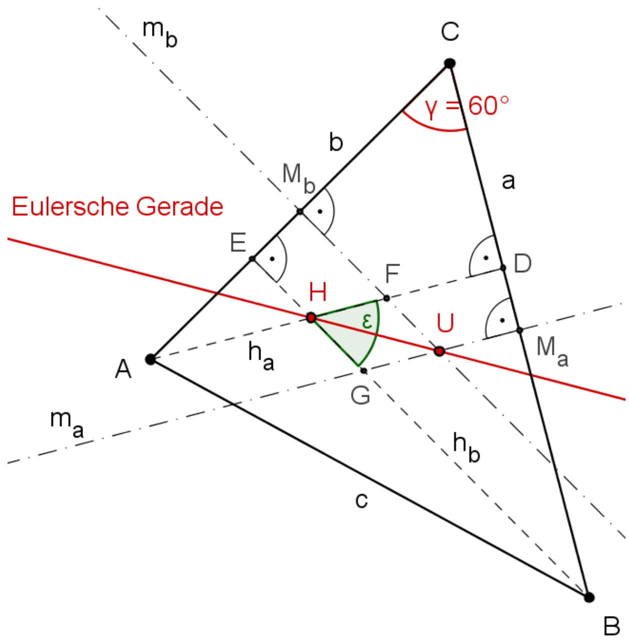

Abb. 19: Skizze der BWF-Aufgabe

Da die Höhe und die Seitensymmetrale auf die zugehörige Dreieckseite normal stehen und somit zueinander parallel sind, erkennt man in Abbildung 19, dass die Höhen und Streckensymmetralen der Seiten a und b das Parallelogramm HGUF bilden. Die Euler'sche Gerade ist eine Diagonale

[16] ohne Beschränkung der Allgemeinheit

dieses Parallelogramms. Es ist bekannt, dass die Diagonalen einer Raute die Eckwinkel halbieren. Kann man also zeigen, dass HGUF nicht nur ein Parallelogramm, sondern sogar eine Raute ist, folgt daraus, dass die Euler'sche Gerade ε halbiert.

<u>4. Schritt: Führen des Beweises:</u>

Betrachtet man das Dreieck ADC in Abbildung 20, erkennt man aufgrund der Winkelsumme eines Dreiecks, dass δ=30° ist. Somit stellt ADC die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks dar und $\overline{CD}$ ist halb so lang wie die Seite b. Da M_b der Mittelpunkt der Seite b ist, gilt $\overline{CM_b} = \overline{CD}$.

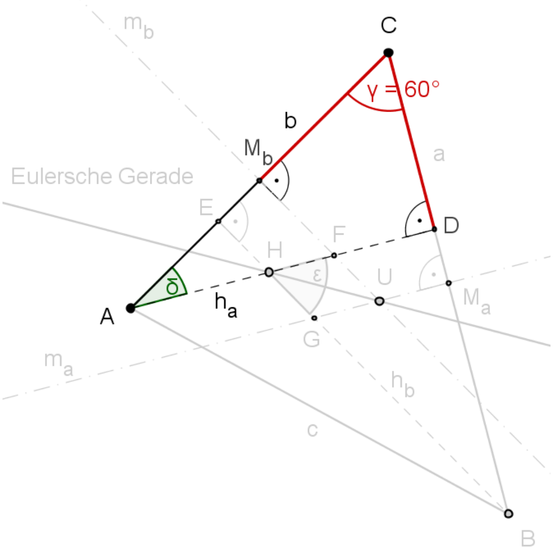

Abb. 20

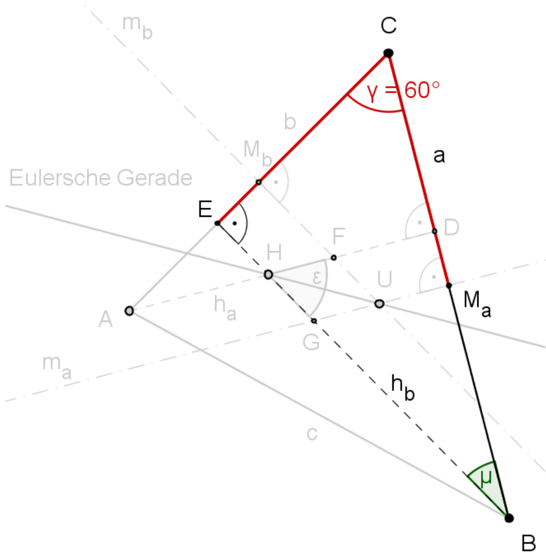

Abb. 21

Analog ist in Abbildung 21 ersichtlich, dass auch μ=30° und das Dreieck BCD die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks darstellt, und auch $\overline{CM_a} = \overline{CE}$ gilt.

Da $\overline{CM_b} = \overline{CD}$ und $\overline{CE} = \overline{CM_a}$, folgt $\overline{EM_b} = \overline{M_aD}$.

$\overline{EM_b}$ und $\overline{M_aD}$ sind die Höhen des Parallelogramms HGUF. Da sie gleich lang sind, ist HGUF eine Raute und die Euler'sche Gerade die Winkelsymmetrale von ε.

□

Es stellt sich nun die Frage, was Schüler können müssen, um diese Aufgabe lösen zu können, und wie die erforderlichen Kompetenzen vermittelt und trainiert werden können. Betrachten wir dazu den oben skizzierten Lösungsweg Schritt für Schritt:

Im ersten Schritt (Genaues Lesen der Angabe und der Fragestellung) geht es darum, zu verstehen, worum es in dieser Aufgabe überhaupt geht. Das genaue, sinnerfassende Lesen der Angabe einer mathematischen Aufgabe ist eine Grundkompetenz, die von der Volksschule an trainiert wird, jedoch wiederkehrenden, öffentlichen Diskussionen und Studien zufolge leider oft auch in der Oberstufe nicht vorausgesetzt werden kann. Es ist aber eine Kompetenz, die durch wiederholtes, sowohl angeleitetes als auch selbstständiges Training eingeübt werden kann. Dafür können in den Vorbereitungskursen die Angaben der Aufgaben, die gemeinsam gelöst werden, langsam und ausführlich besprochen werden. Auch empfiehlt es sich die Angaben Schülern in ihren eigenen Worten wiedergeben zu lassen.

Spätestens bei Schritt 2, dem Anfertigen einer Skizze, stellt sich heraus, ob der gegebene Sachverhalt verstanden wurde. Dieser Schritt kann genauso wie Schritt 1 bei fast jeder geometrischen Aufgabe geübt werden. Ein wichtiger Punkt beim Erstellen einer guten Skizze ist, zu erkennen, worauf es ankommt: Wie viel Genauigkeit ist notwendig, um die gegebene Situation richtig darzustellen, damit Zusammenhänge leichter erkannt werden können, und wo ist eine ungefähre Freihandzeichnung ausreichend? Immerhin kostet zu viel Genauigkeit im Wettbewerb unnötig Zeit. In unserer Aufgabe hängt die zu zeigende Eigenschaft davon ab, dass ein Winkel des Dreiecks 60° beträgt. Daher empfiehlt es sich hier, dass dieser Winkel auch in der Skizze 60° hat. Wie genau der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt konstruiert werden sollten, oder ob eine Freihandschätzung ausreichend sind, hängt nicht zuletzt von den Fähigkeiten des einzelnen Schülers ab. Es gibt Schüler, die sehr gut freihändig skizzieren können und welche die Zusammenhänge auch in einer ungenauen Skizze gut erkennen können, sodass eine Freihandschätzung für sie ausreichend ist, um die Aufgabe zu lösen.

Haben Schüler Schwierigkeiten beim Erkennen der Zusammenhänge (Schritt 3), empfiehlt es sich in dieser Aufgabe H und U wirklich zu konstruieren, damit augenscheinlich wird, dass HGUF eine Raute bilden. Neben der Genauigkeit einer Skizze kann auch das Einzeichnen mehrerer Hilfslinien das Finden eines Lösungsansatzes erleichtern. Dazu ein Beispiel: Hat man H und U nicht mit Hilfe der Höhen und Streckensymmetralen der Seiten a und b, sondern mit denen der Seiten a und c konstruiert, erhält man folgende Skizze (Abb. 22):

Durch das Fehlen der Seitensymmetrale von b in Abbildung 22 ist ε nicht Eckwinkel einer Raute. Man sieht nur das Dreieck HGU, von dem man zeigen müsste, dass es gleichschenkelig ist,

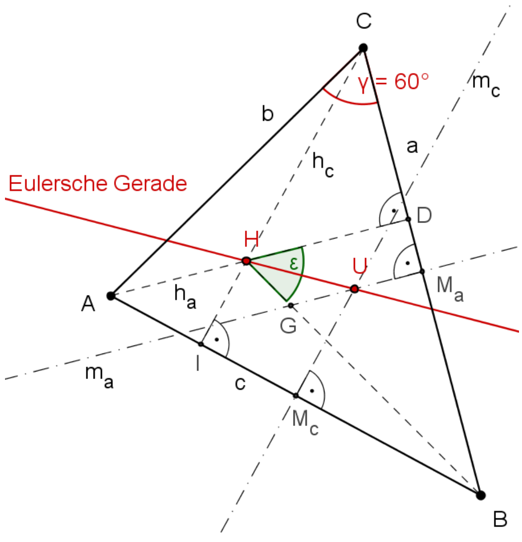

Abb. 22

damit gezeigt wäre, dass die Euler'sche Gerade Winkelsymmetrale von ε ist[17]. Durch Einzeichnen der Höhe und der Seitensymmetrale von b und ihrer rechten Winkel mit b, fällt der oben beschriebene Lösungsweg eher ins Auge.

Beim Finden einer Lösungsstrategie gibt es bei dieser Aufgabe mindestens zwei Knackpunkte: das Verdachtsmoment, dass HGUF eine Raute ist und seine Erhärtung durch das Erkennen, dass ADC und BCE Hälften eines gleichseitigen Dreiecks sind und daher $\overline{EM_b} = \overline{M_aD}$ ist. Beides kann wie bereits beschrieben durch eine gute Skizze und das Einzeichnen relevanter Hilfslinien unterstützt werden. Weiters kann der Blick der Schüler durch das Üben ähnlicher Aufgaben – beispielsweise Aufgaben, in denen zu zeigen ist, dass ein bestimmtes Viereck eine Raute ist, oder in denen damit gearbeitet wird, dass in einem gleichseitigem Dreieck Höhen und Seitensymmetralen zusammenfallen und daher der Höhenfußpunkt ident mit dem Seitenmittelpunkt ist – geschult werden.

Hat man eine Lösungsstrategie entwickelt, gilt es, den gefragten Beweis zu führen (Schritt 4). Dafür ist grundsätzliches Wissen über das Führen mathematischer Beweise und das dabei geforderte genaue Arbeiten und exakte Begründen wichtig. Dies gilt jedoch für alle Aufgaben, in denen eine bestimmte Eigenschaft zu zeigen ist. Um diese Aufgabe auf die beschriebene Art zu lösen, muss man folgendes geometrisches Wissen haben: dass der Umkreismittelpunkt der Schnittpunkt der Seitensymmetralen ist und was eine Seitensymmetrale ist, sowie dass der Höhenschnittpunkt der Schnittpunkt der Höhen ist und was eine Höhe ist (bereits notwendig, um die Angabe zu verstehen und eine Skizze anzufertigen); dass die Winkelsumme eines Dreiecks 180° beträgt; dass die Höhen und Seitensymmetralen eines gleichseitigen Dreiecks zusammenfallen (und daher die Höhen die Seiten halbieren); dass die Diagonalen einer Raute die Eckwinkel halbieren und dass die Höhen einer Raute gleich lang sind. Dieses Wissen wird bereits in der Unterstufe unterrichtet und in den Olympiadekursen wiederholt. Ohne grundlegende, inhaltliche Kenntnisse wird kaum eine Aufgabe lösbar sein, allerdings garantiert Wissen allein nicht, dass man im entscheidenden Moment daran denkt und zu der „zündenden" Idee kommt.

Wie bereits mehrfach beschrieben, ist es ein Kerncharakteristikum von Olympiadeaufgaben, dass es für sie keine „Lösungsrezepte" gibt, die eingeübt werden können und mit deren Hilfe alle Aufgaben gelöst werden können. Aber wie kann man Schüler dabei unterstützen, Probleme zu lösen, bei denen nicht von vornherein klar ist, wie man vorgehen soll und bei denen so schwer beschreibbar ist, wie man auf den entscheidenden Gedanken kommt? Zwei wichtige Säulen wurden bereits beschrieben: Fachwissen und Übung (wiederholtes, aktives Problemlösen). Eine dritte Säule stellen Problemlösungsstrategien dar. George Polya gilt als ein wichtiger Pionier in der Erforschung und Beschreibung von Problemlösungsstrategien und ihrer Vermittlung. Er teilt den

[17] Ist HGU ein gleichschenkeliges Dreieck, dann ist $\angle GHU = \angle GUH$. Da $\angle GUH = \angle UHD$, würde $\angle GHU = \angle UHD$ folgen und somit wäre gezeigt, dass die Euler'sche Gerade ε halbiert.

Problemlösungsprozess in vier Phasen (Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Planes, Ausführen des Planes und Rückschau) und stellt eine Liste von Fragen vor, mit deren Hilfe einerseits Lehrer Schüler zu einer Lösung führen können, die andererseits auch Schüler zum Finden einer selbstständigen Lösung anleiten kann (vgl. Polya, 1995). Hier eine kleine Übersicht von Polyas richtungsweisenden Fragen, die in Polyas *„Schule des Denkens“* an der Innenseite des Umschlags abgedruckt ist (Polya, 1995):

Wie sucht man die Lösung?	
Erstens Du mußt die Aufgabe verstehen	**VERSTEHEN DER AUFGABE** • *Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?* • Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch? • Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein! • Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?
Zweitens Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten Du mußt vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann Du mußt schließlich einen Plan der Lösung erhalten	**AUSDENKEN EINES PLANES** • Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen? • *Kennst Du eine verwandte Aufgabe?* Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte? • *Betrachte die Unbekannte!* Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat. • *Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen?* Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit Du sie verwenden kannst? • Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück! • Wenn Du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so daß die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind? • Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?
Drittens Führe Deinen Plan aus	**AUSFÜHREN DES PLANES** • Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so *kontrolliere jeden Schritt*. Kannst Du deutlich sehen, daß der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, daß er richtig ist?
Viertens Prüfe die erhaltene	**RÜCKSCHAU** • Kannst Du das *Resultat kontrollieren*? Kannst Du den Beweis kontrollieren?

Lösung	• Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen? • Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?

Polyas Fragenkatalog kann in Olympiadekursen eingesetzt werden, um den Lösungsprozess gemeinsam gelöster Aufgaben zu strukturieren, und um den Schülern ein Hilfsmittel in die Hand zu geben, wie sie für sich selbst Wege und Strategien für das Lösen von Aufgaben, die im ersten Moment unlösbar scheinen, entwickeln können.

Einen weiteren Ansatzpunkt, Problemlösungskompetenzen zu fördern, stellen die Defizite der Schüler dar. Frank Heinrich ist in einer Studie der Frage nachgegangen, welche Verhaltensweisen das Finden von Lösungen beim Bearbeiten mathematischer Probleme hemmen, be- oder verhindern (vgl. Heinrich, 2008, S. 22). Er hat dafür mathematisch leistungsfähigere Schüler der Sekundarstufe 2 und Mathematiklehramtsstudenten bei der Bearbeitung von mathematischen Problemen gefilmt und ihren Problemlösungsprozess anhand der Videoaufzeichnungen analysiert. Seine Analyse basiert auf der Fehlertypologie von Geering, nach der sich Defizite beim Betreiben von Mathematik in Form von *Wissensfehlern*, *Fertigkeitsfehlern*, *Strategiefehlern* oder einer Kombination der drei Arten zeigen. Demnach kann die Lösung eines Problems dadurch verhindert werden, dass benötigtes Fachwissen fehlt, fehlerhaft vorhanden ist oder falsch eingesetzt wird (Wissensfehler). Unter möglichen Fertigkeitsfehlern hebt Heinrich vor allem Fehler im Rechnen und hier insbesondere Defizite beim Umformen von Termen und Gleichungen hervor. In unserer Olympiadeaufgabe wären beispielsweise Fertigkeiten wie Skizzieren oder Konstruieren gefragt. Mit Strategiefehlern setzt sich Heinrich detaillierter auseinander:

> *„Unter* Strategiefehlern *wollen wir die Verwendung ungeeigneter Lösungsansätze bzw. Lösungsstrategien oder logische Fehler verstehen. Dabei handelt es sich in der Regel nicht um klassische Fehler. Über Strategiefehler beim Problemlösen ist in der Breite noch wenig bekannt. Sie sind von den Problembearbeitern am schwierigsten zu erkennen bzw. zu beheben […].“*

(Heinrich, 2008, S. 25)

Heinrich identifiziert folgende Arten von Strategiefehlern:

- ***Komponenten aus fehlerhaften früheren Lösungsanläufen werden ungeprüft weiter verwendet***. (Elemente eines nicht zielführenden Lösungsanlaufes, von dem die Bearbeiter wissen, dass er Fehler enthält, werden ohne Überprüfung in anderen Lösungsanläufen weiter benutzt.)
- ***Lösungssuche erfolgt nicht methodenbewusst.*** (Es wird mit einer heuristischen Strategie „formal“ gearbeitet; d. h., ohne zu wissen, was diese zu leisten vermag;

wann und wo sie sinnvoll genutzt werden kann; wodurch sie sich auszeichnet und von „welcher Art“ die Lösung sein muss.)

- ***Eigenschaften eines mathematischen Sachverhaltes werden unzureichend bzw. unvollständig ausgeschöpft.*** (Ein mathematischer Sachverhalt wird vor dem Hintergrund des Suchens nach einer Problemlösung unter genau einem Aspekt behandelt, wenngleich weitere Betrachtungsweisen (und damit Arbeitsrichtungen) nahe liegend sind.)
- ***Die Lösungssuche wird asymmetrisch organisiert.*** (Die Lösungssuche wird im Hinblick auf bestimmte Aspekte (Qualitäten) des Problemlösungsprozesses deutlich einseitig gestalten, selbst bei lange andauernder Erfolglosigkeit.)
- ***Lösungsbedingungen werden nicht oder unangemessen in Lösungsanläufe einbezogen.*** (Zur Lösung notwendige Bedingungen werden in Lösungsanläufen nicht oder nicht angemessen (z. B. zu einem fortgeschrittenen Zeitpunkt, wo der Einbezug nicht mehr möglich ist) berücksichtigt.)
- ***Zwischenergebnisse werden nicht „gespeichert“.*** (Ergebnisse früherer Lösungsbemühungen, die bei der weiteren Lösungssuche benötigt werden, sind nicht mehr verfügbar. Sie wurden entweder nicht fixiert (z. B. nur mündlich genannt, aber nicht schriftlich festgehalten) oder wurden vernichtet.)
- (Trächtige) ***Lösungsideen werden nicht oder nur unzureichend fortentwickelt.*** (Vor allem „Nichtroutine“Ideen […] werden nur als Gedankensplitter eingebracht, eine Fortentwicklung der Idee wird nicht vorgenommen.)
- ***Vorerfahrung wird formal, unkritisch oder unreflektiert übertragen.*** (Die Problemlöser übertragen frühere Erfahrungen auf neuartige Kontexte, ohne die Angemessenheit und Korrektheit des Schlusses zu berücksichtigen.)
- ***Probierende Lösungsverfahren werden als „zu unmathematisch“ verworfen.*** (Wenngleich probierende Lösungszugänge Aussicht auf Erfolg versprechen, werden „mathematischere“ Zugänge (z. B. Algorithmen) gewählt.)
- ***Zur Überprüfung bisheriger Arbeitsergebnisse werden unangemessene oder unkorrekte Kontrollstrategien verwendet.*** (Hierbei geht es nicht um Fertigkeitsfehler im Rahmen von Kontrollverfahren, sondern um logische Fehler.)

(vgl. Heinrich, 2008, S. 25-29)

Um die Problemlösungskompetenz der Olympiadeteilnehmer zu verbessern, könnten die Erkenntnisse Heinrichs in den Vorbereitungskursen zur Analyse der individuellen Fehlerquellen verwendet werden, damit bestehende Defizite durch gezielte Fördermaßnahmen reduziert werden können. So schlägt Heinrich beispielsweise vor, Einseitigkeiten im Lösungsvorgehen durch das bewusste Einnehmen verschiedener Betrachtungsweisen zu ein und demselben mathematischen Sachverhalt und dem bewussten Vernetzen sonst getrennt behandelter Inhalte entgegenzuwirken (vgl. Heinrich, 2008, S. 32).

Abschließend muss zu der oben beschrieben Aufgabe aus dem Bundeswettbewerb 2000 gesagt werden, dass bei Olympiaden durchaus Aufgaben gestellt wurden und werden, die mehr Wissen und Lösungskompetenzen als die ausgewählte und oben beschriebene Aufgabe erfordern. Häufige Fragestellungen bei Olympiadeaufgaben aus dem Themengebiet Geometrie sind: Konstruktion von bestimmten Figuren, Zeigen von besonderen Eigenschaften von bestimmten Punkten, Geraden oder Figuren, Bestimmen von Mengen von Punkten mit bestimmten Eigenschaften, Bestimmen von Flächeninhalten, u. v. m. Wie bereits erwähnt, wurde im Anhang eine Auswahl verschiedenartiger Geometrieaufgaben zusammengestellt.

Lösung der Schulbuchaufgabe

Um die oben angeführte Aufgabe aus dem Schulbuch[18] zu lösen, darf man aus der Unterstufe nicht vergessen haben, welche Eigenschaften der Höhenschnittpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Schwerpunkt haben. Weiters muss man Geradengleichungen aufstellen können und den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen können. Ein möglicher Lösungsweg der Aufgabe könnte folgendermaßen aussehen:

Um den <u>Höhenschnittpunkt H</u> zu berechnen, stellt man Gleichungen von zwei Geraden auf, auf denen jeweils eine Dreieckshöhe liegt, und schneidet sie. Die Höhe eines Dreiecks ist definiert als Normalabstand einer Seite zum gegenüberliegenden Eckpunkt. So entspricht beispielsweise der Richtungsvektor der Geraden, die die Höhe h_a enthält, dem Normalvektor der Seite a und die Geradengleichung kann mit Hilfe dieses Vektors und der Koordinaten des Eckpunkts A aufgestellt werden. Analog kommt man zur Gleichung der Geraden, die die Höhe h_b enthält. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist der Höhenschnittpunkt der Dreiecks ABC.

Der <u>Umkreismittelpunkt U</u> eines Dreiecks entspricht dem Schnittpunkt der drei Seitensymmetralen. Um U zu berechnen, stellt man die Geradengleichungen zweier Seitensymmetralen auf und ermittelt ihren Schnittpunkt. Die Symmetrale der Seite a steht normal auf die Seite a – sie hat daher denselben Richtungsvektor wie die Höhe h_a, welcher bereits bekannt ist – und verläuft durch den Mittelpunkt der Seite a, welcher noch zu berechnen ist. Analog ermittelt man den Mittelpunkt der Seite b und stellt die Gleichung der Symmetrale der Seite b mithilfe des bereits bekannten Normalvektors der Seite b auf. Man schneidet die beiden Seitensymmetralen und erhält U.

Um zu den Koordinaten des <u>Schwerpunktes S</u> zu gelangen, muss man wissen, dass er der Schnittpunkt der Schwerlinien ist, und dass eine Schwerlinie durch den Mittelpunkt einer Seite und durch den gegenüberliegenden Eckpunkt verläuft. Da der Mittelpunkt der Seite a und der der Seite b bereits bekannt ist, bietet es sich an

[18] Die Aufgabe lautete:

> *Berechne den Höhenschnittpunkt H, den Schwerpunkt S und den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ΔABC und zeige, dass H, S, und U auf einer Geraden liegen.*
> *A=(-4│-2), B=(8│10), C=(2│-14)*

mit ihnen weiterzuarbeiten. Man stellt eine Gerade durch den Mittelpunkt der Seite a und den Eckpunkt A, sowie eine durch den Mittelpunkt der Seite b und den Eckpunkt B auf, schneidet diese und erhält den Schwerpunkt S.

Abschließend ist noch zu zeigen, dass die Punkte H, S und U auf einer Geraden liegen. Dafür stellt, man eine Gleichung einer Geraden auf, die durch zwei der drei Punkte verläuft und überprüft, ob der dritte Punkt Element der Geraden ist.

Im Großen und Ganzen verlangt diese Schulbuchaufgabe folgende Fähigkeiten: Ermitteln von Normalvektoren, Berechnen von Mittelpunkten, Aufstellen von Geradengleichungen und Berechnen von Schnittpunkten. Im Gegensatz zu den bei der Lösung der Olympiadeaufgabe erforderlichen Kompetenzen sind dies Tätigkeiten, die im Regelunterricht nach einem bestimmten Algorithmus eingeübt werden. Es soll hier jedoch nicht der Eindruck erweckt werden, dass die Schulmathematik grundlegend verschieden von der „Olympiadenmathematik" ist. Beides ist Mathematik. Man kann jedoch sagen, dass bei der Mathematikolympiade mehr Wert auf exaktes Arbeiten, Beweisen und Argumentieren gelegt wird und mehr Kreativität beim Finden eines Lösungsweges erforderlich ist als im Regelunterricht – wobei sich dabei die Frage erhebt, wie *der* Regelunterricht in Mathematik aussieht. Je nach Schwerpunktsetzung des jeweiligen Lehrers im Regelunterricht differieren Inhalte und Arbeitsweisen im Unterricht von denen in den Olympiadekursen unterschiedlich stark. Es soll hier auch nicht das Bild entstehen, dass der Regelunterricht unzulänglich ist, und dass in den Olympiadekursen „bessere" oder „echtere" Mathematik betrieben wird; stehen doch Regelunterricht und Olympiadekurse nicht in Konkurrenz zueinander – vielmehr könnten ausgewählte Inhalte, Materialen und Erfahrungen der Mathematikolympiade in den Regelunterricht einfließen und diesen bereichern.

17 Die internationale Mathematikolympiade

Die internationale Mathematikolympiade (kurz IMO) findet jährlich im Juli statt. Jedes Teilnehmerland darf sechs Schüler entsenden, wobei die österreichischen Vertreter, wie in den vorangehenden Kapiteln beschrieben, im Zuge der Wettbewerbe der österreichischen Mathematikolympiade ermittelt werden. Für sie gibt es kurz vor der Abreise zur IMO noch einen ca. dreitägigen Spezialtrainingskurs. Diese Vorbereitung direkt vor der IMO war ursprünglich die Initiative eines IMO-Teams, das sich einige Tage vor der Abreise zur IMO privat getroffen hat und einen ehemaligen IMO-Teilnehmer eingeladen hat, um mit ihnen noch zu trainieren. Mittlerweile ist daraus ein offizielles, von Olympiadelehrern geleitetes Training geworden.

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass es jedem Land überlassen bleibt, wie es seine Teilnehmer bestimmt. Der österreichische Weg unterscheidet sich dabei zum Beispiel von dem in Deutschland in Folgendem: In Österreich können alle interessierten Schüler an der Unverbindlichen Übung Mathematikolympiade teilnehmen. An deren Ende erst steht der erste Wettbewerb, von dessen Ergebnis die Möglichkeit zur Teilnahme an weiteren Förderkursen und Wettbewerbsrunden abhängt. Auch Deutschland ermittelt seine IMO-Teilnehmer durch einen nationalen Stufenwettbewerb, bei dem sich jeweils die Besten einer Stufe für die nächste qualifizieren, jedoch findet hier die erste Wettbewerbsrunde bereits am Beginn eines Schuljahres an den Schulen statt. Es folgen eine Regionalrunde und eine Landesrunde und schließlich der Bundeswettbewerb, Förderkurse werden ab der Regionalrunde angeboten. Das bedeutet, man muss zuerst sein Können bei Wettbewerben unter Beweis stellen, um dann in Kursen gefördert zu werden (vgl. www.mathematik-olympiaden.de/faqs.html, www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo/wettbewerb/awb.htm und www.mathe-wettbewerbe-nrw.de/).

Die Ziele, die die internationale Mathematikolympiade verfolgt, werden auf einer deutschen Internetseite über die Mathematikolympiade folgendermaßen beschrieben:

> *„Die IMO möchte zur Förderung mathematisch interessierter und befähigter Schülerinnen und Schüler beitragen und ihnen Gelegenheit zum freiwilligen Leistungsvergleich auf internationaler Ebene geben. Neben dem fachlichen Wettstreit steht die Begegnung junger Menschen aus allen fünf Kontinenten mit dem Ziel der Völkerverständigung im Vordergrund. Daher findet außer den Klausuren auch immer ein umfangreiches Rahmenprogramm für die Delegationen statt.“*

(www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo/imo/imo.htm)

Die IMO ist eine Veranstaltung für Schüler, daher dürfen die Teilnehmer nicht älter als 20 Jahre alt sein und noch keine universitäre Ausbildung begonnen haben. Solange ein Schüler diese zwei Bedingungen erfüllt, darf er jedoch beliebig oft mitmachen. Die IMO wird ausschließlich als Einzelwettbewerb ausgetragen, die Teilnehmer müssen die gestellten Aufgaben jeder für sich alleine schriftlich ausarbeiten. Vorschläge für die Wettbewerbsaufgaben der IMO können von allen teilnehmenden Ländern eingereicht werden, wobei das Gastgeberland eine Vorauswahl von ca. 30 Aufgaben trifft. Die endgültige Entscheidung, in welcher Reihenfolge welche Aufgaben bei der IMO zu lösen sind, liegt bei einer internationalen Jury, die sich aus den Leitern aller Delegationen der Teilnehmerländer zusammensetzt. Die Delegationsleiter sind daher bis nach den Wettbewerben von ihren Teams isoliert, während ihre Stellvertreter für die Betreuung der Schüler verantwortlich sind. Bei der IMO 2010 in Kasachstan leiteten Dr. Geretschläger (Leader) und Mag. Gstöttner (Deputy-Leader) die österreichische Delegation. Die Wettbewerbsaufgaben dieser IMO sind im Anhang zu finden.

Über den Ablauf der internationalen Mathematikolympiade ist auf der Homepage der österreichischen Mathematikolympiade www.oemo.at zu lesen:

> *„Die IMO dauert für gewöhnlich 2 Wochen und findet jedes Jahr im*

Juli statt. Noch bevor die Teilnehmer anreisen, treffen sich bereits die Leiter, um die Beispiele auszusuchen und in die jeweilige Landessprache zu übersetzen. Dann können die Teilnehmer und der stellvertretende Leiter anreisen. Am Abend findet die Eröffnungszeremonie statt, und an den beiden folgenden Tagen kämpfen die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler schon beim Wettbewerb um Punkte. Dabei bekommen sie an jedem der beiden Tage jeweils drei Beispiele (bei denen jeweils sieben Punkte erreicht werden können), für deren Lösung sie 4,5 Stunden Zeit haben. Natürlich ist kein Taschenrechner erlaubt, gelegentlich sind sogar Geodreiecke verboten (und nur "normale", gerade Lineale erlaubt). Die Regeln sind also noch wesentlich strenger als bei den nationalen Wettbewerben.“

(www.oemo.at/de/info/imo.php)

Über die Wettbewerbsaufgaben schreiben Baron und Schmidt in ihrem Buch über die Mathematikolympiade:

„Die Aufgaben kommen aus allen Fachgebieten und sind auch oft nicht eindeutig einem Fachgebiet zuzuordnen. Generell sind die Aufgabenstellungen schwieriger als beim Bundeswettbewerb der Österreichischen Mathematikolympiade, normalerweise aber mit relativ grundlegenden Methoden zu lösen.“

(Baron u. Schmidt, 2009, S. 9)

Wie allerdings aus der oben zitierten Zielsetzung der IMO hervorgeht, gibt es auf jeder IMO nach den Wettbewerbstagen auch ein Freizeitprogramm. So bleibt den Teilnehmern nach den Klausuren Zeit – während die Leiter die Arbeiten korrigieren – bei gemeinsamen Veranstaltungen und Ausflügen internationale Kontakte zu knüpfen.[19] Das Programm der 51. IMO 2010 in Kasachstan gestaltete sich für die Delegationsleiter, ihre Stellvertreter und die Schüler entsprechend dem oben beschriebenen Ablauf so:

Date	Leaders	Deputy Leaders	Contestants
Friday 2.07.2010	Arrival		
Saturday 3.07.2010	Jury meeting		
Sunday 4.07.2010	Jury meeting		

[19] Kurzer Hinweis für Interessierte: Auf der Homepage des Österreichischen Zentrums für Begabtenförderung und Begabungsforschung ist ein Bericht von Dr. Geretschläger zu finden, der einen interessanten Einblick gibt, wie der österreichische Delegationsleiter die IMO 2007 in Vietnam erlebt hat.
(www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/olympiaden/mathematikolympiade_ns18.pdf)
Die IMO 2006 in Slowenien wurde von den österreichischen Schülern genau dokumentiert. Ihre Erfahrungen sind in Form von Tagebucheinträgen unter www.oemo.at/wiki/index.php/IMO_2006 zu finden.

Monday 5.07.2010	Jury meeting	Arrival	Arrival
Tuesday 6.07.2010	Opening ceremony		
Tuesday 6.07.2010		Departure to the Republican Educational and Practical Center «Baldauren»	
Wednesday 7.07.2010	Q & A[20]	First day of contest	First day of contest
Thursday 8.07.2010	Q & A	Second day of contest	Second day of contest
Friday 9.07.2010	Coordination	Coordination	Excursion
Saturday 10.07.2010	Coordination	Coordination	Excursion
Sunday 11.07.2010	Last jury meeting	Last jury meeting	Excursion
Monday 12.07.2010	Excursion		
Tuesday 13.07.2010	Closing Ceremony / Farewell Dinner		
Wednesday 14.07.2010	Departure		

Tab. 4: Programme 51st International Mathematical Olympiad (Astana, Kazakhstan) (www.imo2010org.kz/?lang=eng&id_rubric=17)

Die Medaillen werden am letzten Abend bei der Abschlusszeremonie verliehen. Anders als bei olympischen Spielen im Sport, werden bei der IMO mehrere Gold-, Silber und Bronze-Medaillen verliehen. Ihre Vergabe ist folgendermaßen geregelt: Es wird insgesamt ungefähr der Hälfte der Teilnehmer eine Medaille zugesprochen, wobei Gold, Silber und Bronze im Verhältnis 1:2:3 vergeben werden. Somit erhalten in etwa ein Zwölftel der Teilnehmer eine Goldmedaille, ein Sechstel eine Silbermedaille und ein Viertel eine Bronzemedaille. Alle Teilnehmer, die keine Medaille errungen haben, aber bei mindestens einer Aufgabe alle sieben Punkte erreicht haben, werden lobend erwähnt und erhalten ein „Certificate of Honourable Mention“.

Insgesamt können bei den sechs Wettbewerbsaufgaben maximal 42 Punkte erreicht werden. Wie viele Punkte nötig sind, um eine Medaille zu erlangen, ist aufgrund der oben beschriebenen Vergaberegeln von Jahr zu Jahr verschieden. Abbildung 23 stellt dar, mit wie vielen Punkten man in den Jahren 2001 bis 2010 eine Medaille bekam.

Man sieht, dass man in den letzten zehn Jahren mit der Hälfte der Maximalpunkteanzahl bereits eine Bronze- oder Silbermedaille erhielt. Mit 32 Punkten war einem schon – bis auf 2005 – eine Goldmedaille sicher. Gleichzeitig zeigt Abbildung 23, wie viele Punkte die Hälfte der Teilnehmer, die keine Medaille bekam, maximal erreichte. So schaffte beispielsweise 2001 die Hälfte der Teilnehmer nicht mehr als 10 Punkte.

[20] Questions and Answers: Während der ersten 30 Minuten der Wettbewerbe haben die Teilnehmer die Möglichkeit, Fragen an die Jurymitglieder zu stellen. [Anm. CG]

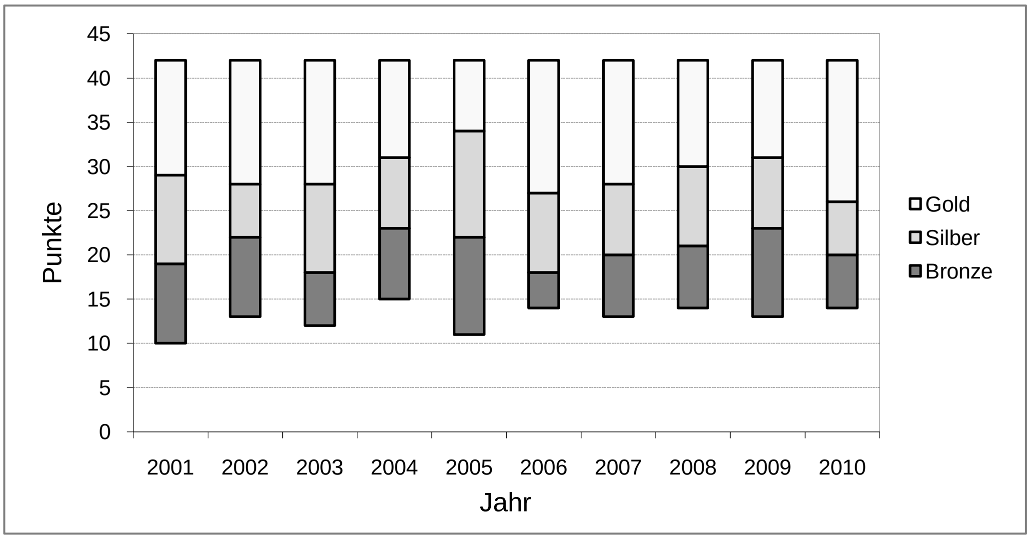

Abb. 23: erforderliche Punkteanzahl, um bei der IMO in den Jahren 2001 bis 2010 eine Medaille zu gewinnen (vgl. www.imo-official.org)

18 Die Mitteleuropäische Mathematikolympiade

Die Mitteleuropäische Mathematikolympiade (kurz MEMO) gilt als Nachfolger des Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerbs. Dieser wurde von 1978 bis 2006 als – wie der Name schon sagt – bilateraler, mathematischer Wettkampf zwischen österreichischen und polnischen Schülern veranstaltet. Er wurde in Einzel- und Mannschaftswettbewerben ausgetragen.

Seit 2007 findet auf österreichische Initiative hin anstatt des Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerbs jährlich im September die Mitteleuropäische Mathematikolympiade statt. Daran nehmen Österreich, Polen, Tschechien, Slowakei, Schweiz, Slowenien und Kroatien seit 2007 sowie Deutschland und Ungarn seit 2008 und Litauen seit 2009 teil. Die MEMO stellt eine Möglichkeit dar, internationale Wettbewerbserfahrung zu sammeln, und auf eine eventuelle, zukünftige IMO-Teilnahme vorzubereiten. Mag. Gstöttner betonte im Interview die Bedeutung von Wettbewerbserfahrung und wie wichtig es für einen guten Erfolg ist, dass Olympioniken auch unter dem Schuljahr an mehreren Wettbewerben teilnehmen. Eine Möglichkeit stellt das *Turnier der Städte* (Tournament of Towns) dar, an dem die österreichischen Städte Graz und Vöcklabruck teilnehmen. Dieser internationale Mathematikwettbewerb wurde in der Sowjetunion gegründet, damit sich die begabten Schüler, die nicht an der IMO teilnehmen durften – auch die gesamte Sowjetunion durfte nur 6 Schüler zur IMO schicken – in einem Wettbewerb messen konnten. Heute nehmen weltweit über 1000 Städte teil, wobei die Aufgaben zentral von Moskau zur Verfügung gestellt werden, jedoch die Durchführung und Auswertung jeder Stadt überlassen bleibt.

Aber zurück zur MEMO: Teilnehmen dürfen alle Schüler, die in dem jeweiligen Jahr nicht bei der IMO antreten, aber im darauf folgenden Jahr noch bei der IMO mitmachen dürften. Die Teams der einzelnen Länder umfassen wie bei der IMO höchstens sechs Schüler. Wer aus Österreich teilnehmen darf, wird bei der österreichischen Mathematikolympiade ermittelt. Zum Zug kommen – wie bereits beschrieben – die Schüler, die die Plätze 7 bis 12 beim zweiten Teil des Bundeswettbewerbs belegen, sofern sie die Teilnahmebedingungen erfüllen, also nicht die 8. Klasse AHS oder 5. Klasse BHS besuchen. Gegebenenfalls rücken Nachplatzierte vor.

Bei der 4. MEMO 2010 in der Slowakei wurde das österreichische Team von Univ. Prof. Dr. Baron (Leader) und Birgit Vera Schmidt (Deputy-Leader) begleitet. Baron und Schmidt schreiben in ihrem Buch über den allgemeinen Ablauf:

> *„Die Aufgaben sind dabei* [bei der MEMO, Anm. CG] *vom Schwierigkeitsgrad her ähnlich wie die bei der IMO gestellten. Zusätzlich zum Einzelwettbewerb, bei dem innerhalb von 4,5 Stunden 4 Aufgaben zu bearbeiten sind, gibt es einen Mannschaftswettbewerb, bei dem die teilnehmenden Teams jedes Landes kooperieren dürfen und gemeinsam eine Lösung erarbeiten. Auch hierbei beträgt die Arbeitszeit 4,5 Stunden für 4 Aufgaben.“*
>
> (Baron u. Schmidt, 2009, S. 9)

Bei der MEMO 2010 gewann das österreichische Team im Einzelbewerb eine Silber- und eine Bronze-Medaille sowie drei „Honourable Mentions“. Im Mannschaftsbewerb wurde Österreich nach Ungarn, Polen und Deutschland Vierter. Die Aufgaben der MEMO 2010 sind im Anhang zu finden.

19 Überlegungen zur Teilnahme an der Mathematikolympiade

Nachdem nun Geschichte, Ablauf und Inhalt der Mathematikolympiade ausführlich dargestellt wurden, erhebt sich die Frage, auf welche Zielgruppe sie fokussiert, welche Schüler sich für eine Teilnahme an der Mathematikolympiade eignen und welche Anforderungen sie an ihre Teilnehmer stellt. Die formalen Kriterien, die zu einer Teilnahme an der ÖMO oder IMO berechtigen, wurden in den vorigen Kapiteln besprochen, nun geht es darum, welche Schüler man als Mathematiklehrer auf eine Teilnahme an der Olympiade ansprechen könnte bzw. sollte, sofern Schüler nicht von sich aus ihr Interesse bekunden. Darauf angesprochen, gab Mag. Henner im Interview an, dies wäre schwer zu sagen. Wenn man jedoch so wie er bereits 40 Jahre bei der Mathematikolympiade mitarbeite, kommen manche Inhalte auch im Regelunterricht vor. Dabei fielen Schüler auf, die sich gern und freiwillig mit Zusatzaufgaben beschäftigen und ihre Lösungen begründen können. Seiner Erfahrung nach, kann man nicht immer nach Noten gehen. Manche Schüler haben im Regelunterricht nur durchschnittliche Noten, blühen aber in einem Olympiadekurs auf, weil sie dort herausgefordert werden. In der Regel sind jedoch gute Mathematiknoten schon ein Hinweis auf eine gewisse mathematische Begabung. Ein weiteres Kriterium für eine Teilnahme an der unverbindlichen Übung Mathematikolympiade kann ein geplantes Mathematik- oder Technikstudium sein, da die Olympiadekurse nicht nur eine gute Vorbereitung für die Wettbewerbe, sondern auch für ein einschlägiges Studium leisten. Mag. Henner erzählte im Interview, dass viele ehemalige Kursteilnehmer eine mathematische oder technische Studienrichtung einschlagen würden und sich oft leichter täten als ihre Studienkollegen. Auch fielen sie auf der Universität positiv auf, da sie *„auf eine gewisse Art zu denken gelernt haben“*.

Mag. Gstöttner besucht am Schulanfang jedes Jahr alle Gymnasien in Vöcklabruck und stellt sich und die unverbindliche Übung Mathematikolympiade in allen 4. bis 8. Klassen vor. Auch er betont dabei, dass der Besuch dieser unverbindlichen Übung eine gute Vorbereitung auf jedes Studium, in dem Mathematik vorkommt, darstellt, und ihm viele ehemalige Schüler bestätigt haben, dass sie durch den Olympiadekurs große Vorteile auf der Universität haben. Des Weiteren findet man unter den Kursinhalten eine Fülle an möglichen Spezialgebieten für die Matura. Mag. Gstöttner ermutigt jeden, der Freude am Problemlösen hat, an der unverbindlichen Übung teilzunehmen, da man oft schwer von Vornherein sagen kann, ob sich jemand dafür eignet oder nicht.

Mag. Henner erzählte, dass in Wien die Leiter der Mathematikolympiadekurse seit 1991 für Schüler der 8. Schulstufe den *Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb* organisieren. Ursprünglich wurde er als Werbung für die ÖMO-Kurse installiert. Als immer weniger Schüler an der Mathematikolympiade teilnahmen, kamen die Wiener Kursleiter zu dem Schluss, dass es gut wäre, bereits die Viertklässler einzuladen, in der Oberstufe einen Olympiadekurs zu besuchen, und für sie vorab einen interessanten Wettbewerb zu veranstalten. So wurde der *Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb* geboren und findet seither einmal im Jahr nach Ostern an der Technischen Universität statt. Meist sind ca. 10 Aufgaben in zwei Stunden zu lösen. Für Wiener Schüler bietet er eine gute Möglichkeit, ihr Interesse an mathematischen Wettbewerben zu testen. (Die Angaben und Lösungen der letzten Jahre findet man unter: http://lehrer.rg18.ac.at/~hennr/m-oly/wmdw.htm) Die Anzahl der Olympiadekursteilnehmer ist seither gestiegen, und viele Wiener Schüler, die in der 5. Klasse einen Anfängerwettbewerb besuchen, haben von dieser Möglichkeit beim *Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb* erfahren.

Auch in anderen Bundesländern gibt es Mathematikwettbewerbe für Unterstufenschüler, die eine Möglichkeit darstellen, spätere Olympioniken zu finden, als Beispiel sei die Miniolympiade in Oberösterreich angeführt. Oft werden Schüler, die bei Schülerwettbewerben gut abschneiden, gefragt, ob sie an einem Olympiadekurs teilnehmen wollen – natürlich vorausgesetzt sie erfüllen die bereits beschriebenen Voraussetzungen.

Auf einer Internetseite über die Mathematikolympiade in Wien, wird mit folgenden Punkten für die Teilnahme an der Mathematikolympiade geworben:

- *Wenn du gerne in lockerer Atmosphäre eine zusätzliche Mathematikdoppelstunde pro Woche erleben möchtest,...*
- *Wenn du gerne alleine oder in einer kleinen Gruppe an Problemen tüftelst,...*
- *Wenn du lernen möchtest, wie man an neuartige Probleme herangeht,...*
- *Wenn du erleben möchtest, wie schön es sein kann, wenn der plötzliche Einfall kommt, nachdem du schon eine Weile über eine Aufgabe nachgedacht hast,...*
- *Wenn du ganz einfach deine mathematische Begabung testen und deine mathematischen Fähigkeiten verbessern möchtest,...*
- *Wenn du deine mathematischen Kräfte an Wettbewerbsaufgaben messen möchtest, ...*
- *Wenn du der Schule eine Weile Lebewohl sagen und dich am Bundeswettbewerb oder an der Internationalen Olympiade beteiligen möchtest,...*
- *Wenn du 2009 nach Bremen (Deutschland) oder 2010 nach Astana (Kasachstan) oder 2011 nach Amsterdam (Niederlande) zur Internationalen Olympiade fahren möchtest,...*

…dann melde dich zur Teilnahme an einem Mathematikolympiadekurs an!“

(http://lehrer.rg18.ac.at/~hennr/m-oly/wasistmo.htm)

Auf der bereits viel zitierten Homepage www.oemo.at wird angeregt, nicht außer Acht zu lassen, welchen Zeitaufwand eine ÖMO-Teilnahme mit sich bringt:

> *„Wenn du an der Mathematik-Olympiade teilnehmen willst, musst du dir darüber im Klaren sein, dass diese Teilnahme auch einen gewissen zeitlichen Aufwand mit sich bringt. Schließlich hast du jede Woche 2 Stunden Kurs, wobei du meistens auch noch zu Hause Beispiele rechnen willst. Außerdem wirst du, wenn du dich für die Wettbewerbe qualifizierst, für diese unter Umständen einige Tage von der Schule freigestellt. Das klingt zwar sehr toll, aber du versäumst in der Zeit natürlich auch den Stoff, der durchgenommen wird. Es ist zwar nicht erforderlich, aber sinnvoll, wenn du in der Schule so gut bist, dass du es dir leisten kannst, ein paar Unterrichtsstunden zu verpassen!“*

(www.oemo.at/de/info/general.php)

Für Mag. Ballik sind folgende Eigenschaften für eine erfolgreiche Teilnahme an der Mathematikolympiade von Vorteil: Lust und Interesse an Mathematik, Kreativität, Mut, neue Lösungswege zu suchen und eigenen Ideen nachzugehen, eigenständiges Denken, Ausdauer bei der Bearbeitung von Aufgaben. Neben dem *Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb* verweist Mag. Ballik auf den

Wettbewerb *Känguru der Mathematik*. Dabei handelt es sich um einen Multiple-Choice-Wettbewerb für Schüler der 3. bis 13. Schulstufe, an dem mittlerweile 40 Staaten teilnehmen (vgl. www2.kaenguru.at). Gute Ergebnisse bei diesem – wie auch jedem anderen – Wettbewerb können ein Hinweis auf eine Eignung für die Mathematikolympiade sein.

In seinem Artikel über Mathematische Olympiaden geht Univ. Prof. Dr. Baron auch auf grundsätzliche Anforderungen an Olympiadeteilnehmer ein. Er hebt hervor, dass neben *„fundierten mathematischen Kenntnissen aus allen relevanten Teilgebieten der Mathematik“* Eigenschaften wie *„logisches Denken, eine rasche Auffassungsgabe, eine hohe Konzentrationsfähigkeit und großer Ideenreichtum“* gefragt sind. Baron betont auch die Wichtigkeit der Fähigkeit, die eigenen Gedanken präzise und vollständig darzustellen und wohl definierte Begriffe exakt zu verwenden (vgl. Baron, 1991, S. 26f). Ein weiterer Anhaltspunkt für Überlegungen zu einer Teilnahme an der Mathematikolympiade könnte daher die Frage sein, ob man die gefragten Kenntnisse und Fertigkeiten lernen und trainieren möchte.

20 Erfahrungen von (ehemaligen) Teilnehmern

In der bisherigen Betrachtung der Mathematikolympiade aus verschiedenen Perspektiven fehlt noch die der teilnehmenden Schüler. Was sagen sie zu der Institution Mathematikolympiade? Um einen kleinen Einblick zu geben, welche Erfahrungen sie gemacht haben und wie sie ihre Teilnahme beurteilen, sollen in Folge exemplarisch einige (Ex-)Olympioniken zu Wort kommen.

Im Jahresbericht 2002/2003 des BRG 18 in Wien wurde ein sehr ausführlicher Bericht von Franz Zach mit dem Titel *„Mein Leben mit der Mathematik“* veröffentlicht. Franz Zach nahm von der 5. bis zur 8. Klasse an der unverbindlichen Übung Mathematikolympiade und an zahlreichen Wettbewerben teil. In seinem Bericht stellt er sehr anschaulich dar, wie er die Teilnahme an der Mathematikolympiade erlebt hat. Er ist im Anhang ungekürzt abgedruckt, einige seiner Erfahrungen sollen hier aber hervorgehoben werden. Alle in Folge zitierten Abschnitte seines Berichts sind entnommen von: www.oemo.at/wiki/index.php/Mein_Leben_mit_der_Mathematik

Franz Zach beschreibt die Mathematik als sein Hobby, das ihn schon im Kleinkindalter fasziniert. Er beginnt früh, sich für Zahlen zu interessieren und im Kopf zu addieren und zu multiplizieren. Sein Einstieg in die Mathematikolympiade erfolgt nach einer Teilnahme am Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb 1999 in der 4. Klasse AHS. Er beginnt in der 5. Klasse mit einem Anfängerkurs an seiner Schule, stellt rückblickend aber fest, dass dieser Kurs für ihn vermutlich schon in der 4. Klasse interessant gewesen wäre:

> *„In der fünften Klasse nahm ich erstmals an so einem Kurs teil. Man lernt die grundlegenden Lösungsansätze für Mathematikbeispiele der*

Art, wie sie dann bei den Wettbewerben auf dem Angabezettel stehen. Die Teilnehmer lernen Methoden wie vollständige Induktion, Mittelungleichung und geometrische Sätze wie den Peripheriewinkelsatz. Im Normalunterricht kommen diese Begriffe nie vor. Wer sich dafür interessiert, was hinter den eben genannten Begriffen steckt und im Moment die Unterstufe besucht und beabsichtigt, weiterhin das BRG 18 zu besuchen - was ich im Nachhinein für sehr empfehlenswert halte -, sollte sich am Besten für nächstes Jahr bei Prof. Krauskopf für den Anfängerkurs anmelden. Man kann damit auch schon in der vierten Klasse beginnen. Vielleicht hätte ich diese Möglichkeit auch nützen sollen, vermutlich hat sich aber kein Lehrer darum bemüht, mich dazu zu bewegen. Ich hätte sicher nicht abgelehnt.“

Im Anfängerkurswettbewerb qualifiziert sich Franz Zach für den Landeswettbewerb und erreicht dort den zweiten Platz. Sein gutes Ergebnis motiviert ihn weiterzumachen. In der 6. und 7. Klasse nimmt er an einem Fortgeschrittenenkurs teil und schafft es 2001 bis zum Gebietswettbewerb, 2002 sogar bis in die zweite Runde des Bundeswettbewerbs. Über den Fortgeschrittenenkurs in der 7. Klasse schreibt er:

„Im zweiten Jahr des Fortgeschrittenenkurses hörte ich zu Beginn viele bereits bekannte Sachen, einige waren aber auch neu, oder ich hatte sie vergessen. Trotz des Angebots von Professor Henner, Beispiele zu lösen während er mir bereits Bekanntes vortrug, hörte ich immer zu (repetitio est mater studiorum). Für mich zumindest war es eindeutig zu spüren, dass mir die Beispiele leichter fielen als im ersten Jahr.“

Wie im Kapitel 15 beschrieben, wird der Bundeswettbewerb in zwei Teilen ausgetragen, wobei die Teile heute durch einen kleinen zeitlichen Abstand getrennt sind. 2002 – als Franz Zach am Bundeswettbewerb teilnahm – fanden die beiden Runden des Bundeswettbewerbs mit ihren Vorbereitungskursen unmittelbar aufeinander folgend statt. Über die Teilnahme am Bundeswettbewerb schreibt Zach:

„Zuerst hatte ich Bedenken, dass sich das alles mit den verschiedenen Schularbeiten und Tests nicht ausgehen würde. Aber das hätte mich trotzdem nicht abhalten können, am Bundeswettbewerb teilzunehmen. Vielleicht ist es nicht ganz klar, warum man für diesen Bundeswettbewerb zweieinhalb Wochen braucht. Es dauert deshalb so lange, weil man zwei Wochen Unterricht in verschiedenen Teilgebieten erhält (Geometrie, Zahlentheorie, Ungleichungen, Schubfachschluss, ...). Nicht einmal am Sonntag hatte man seine Ruhe. Am Nachmittag war nämlich auch Unterricht. […]
Am Ende hatte ich Vieles dazu gelernt, aber ich glaube, dass mir das bei keinem Wettbewerbsbeispiel geholfen hat. Es war wohl

hauptsächlich die Übung aus dem Olympiadekurs in der Schule, die mir beim Endwettbewerb 15 von 48 Punkten brachte. […] Mein Gesamtergebnis reichte dann zwar weder für die Internationale Mathematikolympiade noch für den Länderwettbewerb gegen Polen, aber ich war ganz zufrieden. Ich hatte noch eine Chance im nächsten Jahr.“

Franz Zach schreibt seinen Rückblick in der 8. Klasse, als er zum dritten Mal den Fortgeschrittenenkurs besucht:

> *„Dieses Jahr ist also das letzte Jahr Mathematikolympiade für mich. Der Gebietswettbewerb liegt noch vor mir. Ich bin überzeugt, dass auch meine doch immer recht guten Ergebnisse bei den Känguru-Wettbewerben zu einem großen Teil Ergebnis der Olympiadekurse waren.“*

In jenem Jahr erreicht Franz Zach den 33. Platz beim ersten Teil des Bundeswettbewerbs und schaffte es damit leider nicht in den zweiten Teil (vgl. www.oemo.at/de/community/participantdetails.php?uid=71). An Schluss seines Berichts legt Zach die Teilnahme an der Mathematikolympiade allen Interessierten ans Herz:

> *„Hoffentlich habe ich niemanden davor abgeschreckt sondern Viele dazu bewegt, den Mathematikolympiadekurs nächstes Jahr zu besuchen. Man kann sicher auch erst in der 6. oder 7. Klasse beginnen, und wenn man Spaß an Mathematik hat, hat man auch sicher viel davon. Es kann auch sein, dass einem der Schulmathematik-Unterricht nicht zusagt und man trotzdem bei der Mathematikolympiade gute Ergebnisse hat. Das Meiste, was man dort nämlich lernt, kommt im Mathematikunterricht nicht vor.“*

Als zweites Beispiel sei Sara Kropf angeführt. Sie schaffte es 2004 bis 2007 jedes Jahr in den zweiten Teil des Bundeswettbewerbs, nahm 2005 am Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerb teil und vertrat Österreich 2006 und 2007 bei der internationalen Mathematikolympiade (vgl. www.oemo.at/de/community/participantdetails.php?uid=154). Über ihre Erfahrungen bei der IMO 2007 in Vietnam erzählt sie:

> *„Auffallend waren in unserem Hotel die vielen Wachleute, allerdings hatten wir sehr wohl die Möglichkeit zu Spaziergängen in der näheren Umgebung – wenn auch nur in Begleitung unseres vietnamesischen Guides. Jedes Team hatte einen Guide, der dafür zuständig war, dass die Schüler/innen zum richtigen Zeitpunkt am richtigen Ort waren, keinem etwas passierte, und die/der übersetzte, falls wir etwas einkaufen gehen wollten und das Vietnamesisch von Peter Gila nicht mehr ausreichte. (Er hatte sehr erfolgreich gelernt und konnte so ziemlich alles Notwendige, wie Mineralwasser und Souvenirs,*

selbstständig einkaufen).
Eine weitere interessante Erfahrung war es, Hundefleisch zu kosten. Wir sechs Schüler/innen aus Österreich beschlossen: ‚Wenn wir schon einmal in Vietnam sind, dann müssen wir auch die exotischen Nahrungsmittel versuchen, die hier üblich sind!' Hundefleisch schmeckt sehr gut, auch wenn man sich etwas an diesen Geschmack gewöhnen muss.
Alles in allem war die IMO in Vietnam eine eindrucksvolle Erfahrung, sowohl der Wettbewerb als auch die Aktivitäten rundherum. Ich lernte viele Menschen aus unterschiedlichen Kulturen kennen und hatte die Möglichkeit, in ein interessantes Land wie Vietnam zu reisen."

(www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/olympiaden/ mathematikolympiade_ns18.pdf)

Dass Michael Drmota und Robert Tichy an der ÖMO teilgenommen haben, liegt schon einige Jahre zurück. In einem Artikel, den sie gemeinsam anlässlich der Jubiläen 35 Jahre Österreichische Mathematikolympiade und 65 Jahre Gerd Baron geschrieben haben, betonen sie die Rolle, die die ÖMO in ihrer Studienwahl hatte:

*„Beide Autoren dieses Artikels verdanken der ÖMO ihre Entscheidung, Mathematik studiert zu haben – beim zweitgenannten Autor wäre es sonst wohl Astronomie oder Physik geworden. Gerd Baron und einige Kursleiter haben ihnen die Mathematik und dabei insbesondere das Problemlösen schmackhaft gemacht. Im Vorbereitungskurs in Raach, aber auch beim ÖPMW [*Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerb, Anm. CG]*, war Gerd Baron immer für Fragen aller Art offen und seine originelle Persönlichkeit war eine wesentliche Bereicherung in der doch häufig eher trockenen Schulmathematik."*

(Drmota u. Tichy, 2005, S. 37)

Anlässlich 40 Jahre Mathematikolympiade stellt Drmota in einem Artikel sich selbst und seine Beziehung zur ÖMO näher vor:

„Ich bin Mathematiker an der TU Wien und stehe dem Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie vor. Ich bin derzeit auch stellvertretender Vorsitzender der ÖMG [Österreichische Mathematische Gesellschaft, wissenschaftlicher Verein zur Förderung von Lehre, Forschung und Anwendung der Mathematik in Österreich, Anm. CG]*. Ich bin mit der Mathematikolympiade mehrfach in Berührung gekommen, zunächst als Schüler ab der 7. Klasse – das ist schon einige Jahre her –, wo ich dann im anschließenden Maturajahr auch am Österreichisch-Polnischen Mathematikwettbewerb (ÖPMW) teilnehmen durfte. Einige Jahre später wurde ich Assistent bei Prof. Baron; damit war ich zwar nicht direkt in die Mathematikolympiade involviert, aber doch hautnah am*

Geschehen.“

(Drmota, 2009, S. 29)

Genaue Erhebungen, was Olympioniken nach ihrer Schulzeit tun, konnte ich in meiner Recherche nicht ausfindig machen. Mag. Gstöttner erzählte aber, dass er anlässlich des Jubiläums 40 Jahre ÖMO alle ehemaligen Preisträger eingeladen hat, und ein großer Teil – vielleicht sogar die Hälfte – davon über die Welt verstreut als Universitätsprofessoren tätig ist, die überwiegende Mehrheit blieb der Mathematik treu, wenige wechselten zur Physik und nur einzelne „*Exoten*“ entschieden sich für komplett andere Wege.

Es sei an dieser Stelle jedoch auch erwähnt, dass die Mathematikolympiade nicht an allen Schulen und nicht von allen Lehrern uneingeschränkte Unterstützung genießt und auch nicht allen mathematikinteressierten Schülern liegt. Im Zuge meiner Recherchen für diese Diplomarbeit sprach ich unter anderem mit einer Mathematiklehrerin des BG und BRG Baden Biondekgasse, die mit einer kleinen Gruppe ihrer Schüler an einem Olympiadekurs einer Schule in Wr. Neustadt teilnahm. Ihre Schüler waren von ihrem Mathematikunterricht eine hohe Anwendungsorientierung gewohnt. Sie erzählte mir, dass sowohl sie als auch ihre Schüler von den rein abstrakten Inhalten des Olympiadekurses sehr verwundert und auch enttäuscht waren. Ihre Schüler hatten großes Interesse, sich über den Regelunterricht hinaus mit Mathematik zu beschäftigen, allerdings in einer anwendungsorientierten Form, wie sie es von ihrem Regelunterricht gewohnt waren. Es blieb daher bei einer einmaligen Teilnahme.

Auch Mag. Henner gab im Interview an, dass vor allem in den Anfängerkursen Schüler wieder abbrechen: Manchen sind die Kurse zu schwer, manchen zu theoretisch. Weitere Gründe sind laut Mag. Gstöttner falsche Erwartungen oder Schul(arbeits)stress. Aber es gibt Schüler, die sich für die abstrakte Mathematik interessieren, und für diese bieten die Kurse eine gute Fördermöglichkeit.

21 Die Mathematikolympiade und Begabtenförderung

Betrachtet man die Mathematikolympiade unter dem Blickwinkel der Begabtenförderung, kann man sagen, dass die Vorbereitungskurse, die in Form der unverbindlichen Übung Mathematikolympiade abgehalten werden, ein Enrichment-Angebot darstellen, bei dem Schüler der Oberstufe[21] die Möglichkeit haben, sich außerhalb des Regelunterrichts in mathematische Themen zu vertiefen. Dieses Förderangebot richtet sich an alle interessierten Schüler, die Teilnahme ist an keinerlei Testverfahren, die vorab eine mathematische Hochbegabung diagnostizieren, gekoppelt. Die Erfahrung zeigt, dass durch diese Offenheit eine Selbstregulierung einsetzt und einerseits Schüler, deren Erwartungen nicht entsprochen wird, oder denen das Niveau zu herausfordernd ist, den Kursen mit der

[21] wie beschrieben in besonderen Fällen auch Schüler der Unterstufe

Zeit fern bleiben, andererseits können so auch interessierte Schüler teilnehmen, die noch nicht durch außergewöhnliches Können aufgefallen sind. Manchmal zeigen Schüler, die im Regelunterricht nur als „durchschnittlich" beurteilt werden, bei komplexeren Aufgaben in Olympiadekursen unerwartet gute Leistungen. Durch die Offenheit dieses Enrichment-Angebots wird somit vermieden, mathematische Fähigkeiten durch einen Test als Zustand festzuschreiben, an den eine Förderung gekoppelt ist. Stattdessen wird dem *Prozessaspekt der Fähigkeitsentwicklung* Rechnung getragen (vgl. Walther, 1986, S. 116).

Mit begabungsfördernden Aspekten der Mathematikolympiade beschäftigte sich unter anderem im Jahr 1999 eine Studie von Wissenschaftlern der Universität Wien (Oswald, Hanisch und Hager) über die Beteiligung österreichischer Jugendlicher an Wettbewerben wie den Olympiaden in Mathematik, Physik und Chemie, Fremdsprachen- und Redewettbewerben und einigen anderen. Sie ging der Frage nach, ob *„die Teilnahme an Wettbewerbskursen und an Wettbewerben zur Identifikation von Begabungen und zur Selbstentdeckung persönlicher Fähigkeiten führt und dadurch die Entscheidungsgrundlagen für die individuelle Studien- oder Berufswahl bewusst werden lässt"* (Oswald, Hanisch u. Hager, 2005, S. 3).

Diese Untersuchung ergab, dass die Teilnahme an Wettbewerbskursen und Wettbewerben eine *„positiv motivierende Herausforderung"* ist, und dass sie für Jugendliche eine Möglichkeit darstellt, *„ein höheres Maß an Bewusstsein ihrer Fähigkeiten [zu] erfahren"* (Oswald, Hanisch u. Hager, 2005, S. 138). Auch wurde die Bedeutung der Lehrer bei der Identifikation von Begabungen deutlich: So wurde auf die Frage, wodurch oder durch wen ihre Teilnahme herbeigeführt wurde, von 65% der befragten Jugendlichen angegeben *„durch die Fachlehrkraft"* (vgl. Oswald, Hanisch u. Hager, 2005, S. 6). Der Einfluss einer Wettbewerbsteilnahme auf die weitere Lebensgestaltung wird unterschiedlich bewertet:

> *„Der Einfluss des Wettbewerbs auf die individuelle Lebensgestaltung scheint zunächst als eher gering eingeschätzt, er wird jedoch mit zunehmendem zeitlichen Abstand (und mit zunehmender Erfahrung ‚im Leben') tendenziell höher bewertet; […]."*
>
> (Oswald, Hanisch u. Hager, 2005, S. 139)

Aus den Antworten des offenen Teils der Umfrage, die im Zuge dieser Studie durchgeführt wurde, möchte ich zwei Aussagen zitieren, die die sensible psychische und soziale Situation von Hochbegabten erkennen lässt, und die die Studienleiter als repräsentativ beurteilen:

> *„Ich habe durch die Wettbewerbe Selbstvertrauen gewonnen; das Vertrauen-Dürfen auf meine eigenen Fähigkeiten wurde mir erst da eigentlich bewusst, ich habe Sicherheit für meine Zukunft, für meine Bildungsentscheidung und Berufslaufbahn gewonnen; Selbsteinschätzung konnte ich erfahren und lernen."*
>
> (Oswald, 2002, S. 121)

> *„Die Arbeit mit Gleichgesinnten - die wissen wollen, die nicht nur*

darauf aus sind, möglichst wenig zu tun; denen es nicht einfach um schulisches ‚Durchkommen' geht – das war für mich grundlegend wichtig!
Mit Gleichgesinnten in einen Gedankenaustausch zu treten, sich mit ihnen messen zu können, mit ihnen in der freien Zeit zu spielen, das war einfach auch lustig.
Man hat es nicht immer leicht, wenn man ein besonderes Interesse an einem Gegenstand hat. Wenn alle an dich glauben und von dir überzeugt sind, fällt es dir leichter."

(Oswald, 2002, S. 122)

Oswald, Hanisch und Hager fassten ihre Ergebnisse wie folgt zusammen:

„Es lässt sich erkennen, dass Wettbewerbe als Anlässe zur Begabtenförderung aufgefasst werden können: Insbesondere bringen Schüler zum Ausdruck, dass sie die Identifikation ihrer Fähigkeiten, ihres Leistungsbewusstseins und ihres Selbstwertgefühls mit der Person eines Lehrers in Verbindung sehen, wobei das Erwecken des Interesses (der Begeisterung) für ein bestimmtes Fach damit im Zusammenhang steht. Die Erfahrung einer herausfordernden Lernsituation gepaart mit der Erfahrung der Gemeinsamkeit der Lerninteressen mit Gleichgesinnten scheint die Wirkung selbstsicherer und sozialer Haltung für das Leben bewirken zu können."

(Oswald, Hanisch u. Hager, 2005, S. 141)

Neben der wichtigen Rolle der Kurse und Wettbewerbe für die Teilnehmer selbst, kommt der Mathematikolympiade als einer Form der Nachwuchsförderung auch eine große Bedeutung für die Mathematik als Wissenschaft zu. So betont Drmota:

„Schließlich hat die Mathematikolympiade noch eine weitere Funktion, die mir als Universitätsmathematiker ganz besonders am Herzen liegt: Sie ist zweifellos eine Talenteschmiede. Außerordentlich viele österreichische Mathematiker, die national oder international tätig sind, sind durch die Schule der ÖMO gegangen, haben durch die Begegnung mit der ÖMO ihr Interesse für Mathematik geweckt bekommen, und ihre Studien- und Berufswahl wurde damit entsprechend beeinflusst. Ich möchte vielleicht wieder pars pro toto einen Namen herausgreifen: Christian Krattenthaler, Mathematiker an der Universität Wien und Wittgensteinpreisträger 2007, war – ich möchte fast sagen selbstverständlich – bei der ÖMO und auch bei der IMO.

(Drmota, 2009, S. 31)

Auch international kann man beobachten, dass viele ehemalige IMO-Teilnehmer unter den „Top-Mathematikern" (www.mathematik-olympiaden.de/IMOs/imo.html) zu finden sind. Als Beispiel sei die Fields-Medaillen-Verleihung im Jahr 2010 herausgegriffen. Die Fields-Medaille wird alle vier Jahr für herausragende Entdeckungen in der Mathematik verliehen, sie gilt als eine der höchsten Auszeichnungen, die ein Mathematiker erhalten kann. 2010 wurde sie an vier Mathematiker überreicht: Elon Lindenstrauss aus Israel, Ngo Bao Chau aus Vietnam, Stanislav Smirnov aus Russland und Cedric Villani aus Frankreich. (vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Fields-Medaille). Drei von ihnen haben in ihrer Jugend an der IMO teilgenommen: Ngo Bao Chau gewann 1988 und 1989 bei der IMO eine Goldmedaille, Elon Lindenstrauss 1988 Bronze und Stanislav Smirnov 1986 und 1987 Gold (vgl. www.mathematik-olympiaden.de/IMOs/fields.html). Als weiteres Beispiel führt Drmota den australischen Mathematiker Terence Tao an:

> *„Beispielsweise war Terence Tao Preisträger bei der IMO* [1986 Bronze, 1987 Silber, 1988 Gold, Anm CG]*. Manche bezeichnen Tao als Mozart der Mathematik. Er ist jetzt knapp über 30* [geboren 1975, Anm. CG] *und hat bereits jetzt bahnbrechende Arbeiten in verschiedenen Mathematikdisziplinen geschrieben, z. B. in der Zahlentheorie und in der Theorie partieller Differentialgleichungen. Er wurde auch mit der Fields-Medaille* [2006, Anm. CG] *ausgezeichnet, dem ranghöchsten mathematischen Preis."*

(Drmota, 2009, S. 31)

Abschließend und zusammenfassend kann gesagt werden:

> *„Die Mathematikolympiade ist ohne Zweifel Begabtenförderung auf hohem Niveau und ist m. E. sicherlich zeitgemäß. Die Vorbereitungskurse bieten interessierten Schülern die Möglichkeit, sich in das Fach zu vertiefen und sind eine Schule des kreativen als auch des logisch strukturierten Denkens. Außerdem sind die Wettbewerbe zusätzlicher Ansporn und Motivation."*

(Drmota, 2009, S. 31)

ANHANG

Checkliste zur Vorauswahl potentiell hochbegabter Schulkinder

(aus: Reichle, 2004, S. 99-109)

I. Lernverhalten, Denkfähigkeit

KOPIER-VORLAGE

		fast nie	manch-mal	häufig	fast immer	weiß nicht
1	Zeigt ein für ihr/sein Alter breites und vielfältiges Wissen.	O	O	O	O	O
2	Zeigt ein für ihr/sein Alter umfangreichen Wortschatz.	O	O	O	O	O
3	Drückt sich gewandt aus.	O	O	O	O	O
4	Formuliert präzise.	O	O	O	O	O
5	Merkt sich neue Informationen rasch.	O	O	O	O	O
6	Entnimmt aus Texten, Experimenten o.ä. neue Informationen selbstständig.	O	O	O	O	O
7	Verwendet vorhandene Information selbstständig in neuen Zusammenhängen.	O	O	O	O	O
8	Erkennt und formuliert Problemstellungen.	O	O	O	O	O
9	Plant Lösungswege.	O	O	O	O	O
10	Kombiniert Lösungsschritte bei Bedarf neu.	O	O	O	O	O
11	Lernt rasch aus Fehlern.	O	O	O	O	O
12	Erkennt Analogien.	O	O	O	O	O
13	Bildet selbst Analogien.	O	O	O	O	O
14	Schließt aus bekannten Tatsachen auf eine allgemeingültige Aussage.	O	O	O	O	O
15	Zieht aus einer allgemeingültigen Regel spezifische Schlüsse.	O	O	O	O	O
16	Beobachtet genau.	O	O	O	O	O
17	Liest viel und vor allem Bücher für Erwachsene.	O	O	O	O	O
	Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gewichte	1	2	3	4	
	Gewichteter Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gesamtwert					

Checkliste zur Vorauswahl potenziell hochbegabter Schulkinder

KOPIER-VORLAGE

EBG-1

Datum: ______________________

Name des Kindes (oder Code-Nummer): ______________________

Alter: ______________________

Geschlecht: ______________________

Schule: ______________________

Klasse: ______________________

Name der Lehrkraft: ______________________

Wie lange kennen Sie das Kind bereits? ______________________

Wie viele Kinder besuchen diese Klasse? ______________________

Kreuzen Sie bitte so an, wie es Ihrer Ansicht nach für das Verhalten des Schülers/der Schülerin *innerhalb der letzten 14 Tage* zutrifft.

II. Motivation

KOPIER-VORLAGE

		fast nie	manch-mal	häufig	fast immer	weiß nicht
1	Beschäftigt sich lange Zeit mit der Lösung eines Problems.	O	O	O	O	O
2	Wird durch Übungsaufgaben gelangweilt.	O	O	O	O	O
3	Braucht kaum Lob und andere Verstärker, um eine Aufgabenstellung durchzuführen, die ihn/sie interessiert.	O	O	O	O	O
4.1	Führt Erfolg bei der Lösung einer Aufgabe zurück auf: a) eigene Fähigkeiten b) Anstrengung.	O	O	O	O	O
4.2	Führt Erfolg *nicht* zurück auf: a) Aufgabenschwierigkeit b) Zufall.	O	O	O	O	O
5	Versucht, Aufgaben so perfekt wie möglich zu lösen.	O	O	O	O	O
6	Äußert Kritik an dem Ergebnis eigener Anstrengung.	O	O	O	O	O
7	Möchte selbstständig mit möglichst wenigen Anweisungen arbeiten.	O	O	O	O	O
8	Ist selbstbewusst.	O	O	O	O	O
	Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gewichte	1	2	3	4	
	Gewichteter Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gesamtwert					

III. Kreativität

KOPIER-VORLAGE

		fast nie	manch-mal	häufig	fast immer	weiß nicht
1	Stellt Fragen, die zu neuen Aspekten eines Problems führen.	O	O	O	O	O
2	Produziert eine Vielzahl von Ideen zu oder Lösungen von Problemen.	O	O	O	O	O
3	Produziert ungewöhnliche oder neuartige Problemlösungen, bei denen vorhandenes Wissen neu kombiniert wird.	O	O	O	O	O
4	Äußert ungewöhnliche Meinungen und kann sie glaubwürdig vertreten.	O	O	O	O	O
5	Spielt verschiedene Möglichkeiten einer Problemlösung durch.	O	O	O	O	O
6	Hat einen ausgeprägten Sinn für Humor.	O	O	O	O	O
7	Sieht Situationen als lustig an, die von anderen nicht so empfunden werden.	O	O	O	O	O
8	Akzeptiert für sich selbst Verhaltensweisen, die eher für das andere Geschlecht als typisch gelten.	O	O	O	O	O
9	Ästhetische Aspekte eines Produkts oder einer Problemlösung sind ihr/ihm wichtig.	O	O	O	O	O
	Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gewichte	1	2	3	4	
	Gewichteter Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gesamtwert					

IV. Soziale Fähigkeiten

KOPIER-VORLAGE

		fast nie	manch-mal	häufig	fast immer	weiß nicht
1	Beschäftigt sich mit Begriffen wie Recht und Unrecht oder Gut und Böse.	O	O	O	O	O
2	Bildet sich häufig eine von der Mehrheit abweichende Meinung.	O	O	O	O	O
3	Hat keine Angst davor, sich von anderen zu unterscheiden.	O	O	O	O	O
4	Stellt Meinungsäußerungen und Verhaltensweisen von »Autoritäten« kritisch in Frage.	O	O	O	O	O
5	Übt konstruktive Kritik.	O	O	O	O	O
6	Verhält sich Lehrern und Mitschülern gegenüber koope-rativ.	O	O	O	O	O
7	Ist bereit, Verantwortung zu übernehmen.	O	O	O	O	O
8	Ist bei der Durchführung über-nommener Aufgaben zuverlässig.	O	O	O	O	O
9	Kommt mit Gleichaltrigen wie mit Erwachsenen gut aus.	O	O	O	O	O
10	Kann sich an neue Situationen gut anpassen.	O	O	O	O	O
	Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gewichte	1	2	3	4	
	Gewichteter Gesamtwert pro Spalte	-	-	-	-	
	Gesamtwert					

Addieren Sie bitte am Ende jeder Seite die Anzahl der Ankreuzungen in jeder Spalte, multiplizieren Sie diese mit dem Gewicht jeder Spalte und tragen Sie diesen Wert in die Zeile »Gewichteter Gesamtwert pro Spalte« ein. Addieren Sie jetzt bitte alle gewichteten Gesamtwerte und tragen Sie diesen Wert in der letzten Zeile ein.
Um vorhandene Begabung und vor allem auch eventuell vorhandene Schwerpunkte dieser Begabung etwas besser beurteilen zu können, notieren Sie bitte auf dieser Seite die Gesamtwerte, die Sie für die Schülerin/den Schüler in jedem Bereich ermittelt haben.

I. Lernverhalten, Denkfähigkeit __________ (min. 17 Punkte, max. 68 Punkte)
II. Motivation __________ (min. 11 Punkte, max. 44 Punkte)
III. Kreativität __________ (min. 9 Punkte, max. 36 Punkte)
IV. Soziale Fähigkeiten __________ (min. 10 Punkte, max. 40 Punkte)

Die Werte, die über der Hälfte der Differenz zwischen minimal und maximal erreichbaren Punktzahl liegen, kann man als überdurchschnittlich interpretieren. Solche, die über zwei Drittel liegen, kann man als weit überdurchschnittlich bewerten.

Richtwerte

I. Lernverhalten, Denkfähigkeit: überdurchschnittlich bei über *43 Punkten*
weit überdurchschnittlich bei über *51 Punkten*

II. Motivation: überdurchschnittlich bei über *28 Punkten*
weit überdurchschnittlich bei über *33 Punkten*

III. Kreativität: überdurchschnittlich bei über *23 Punkten*
weit überdurchschnittlich bei über *27 Punkten*

IV. Soziale Fähigkeiten: überdurchschnittlich bei über *25 Punkten*
weit überdurchschnittlich bei über *30 Punkten*

Die Ergebnisse dieser Beurteilungen können nur *ein allererster Hinweis* auf eine Hochbegabung sein.
Der Sachverhalt muss auf jeden Fall mit diagnostischen Verfahren abgeklärt werden, die – anders als dieses Verfahren – den psychometrischen Standards der Profession entsprechen.

Aufgaben der 51. IMO 2010 in Kasachstan

(von: www.imo-official.org/problems.aspx , aufgerufen am 16.11.2010)

Language: **German**

Day: **1**

Mittwoch, 7. Juli 2010

Aufgabe 1. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass die Gleichung

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Hierbei bezeichnet $\lfloor z \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als z ist.)

Aufgabe 2. Das Dreieck ABC habe den Inkreismittelpunkt I und den Umkreis Γ. Die Gerade AI schneide Γ ein zweites Mal im Punkt D. Ferner seien E ein Punkt auf dem Bogen BDC und F ein Punkt auf der Seite $\overline{BC}$ mit

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \frac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

Schließlich sei G der Mittelpunkt der Strecke $\overline{IF}$. Man beweise, dass sich die Geraden DG und EI auf Γ schneiden.

Aufgabe 3. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Zahl

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine Quadratzahl ist.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Language: **German**

Day: **2**

Donnerstag, 8. Juli 2010

Aufgabe 4. Im Inneren des Dreiecks ABC liege der Punkt P. Die Geraden AP, BP und CP schneiden den Umkreis Γ von ABC jeweils ein zweites Mal in den Punkten K, L bzw. M. Die Tangente an Γ durch C schneide die Gerade AB in S. Es gelte $|\overline{SC}| = |\overline{SP}|$.
Man beweise $|\overline{MK}| = |\overline{ML}|$.

Aufgabe 5. In jedem von sechs Behältern B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und B_6 befindet sich zu Beginn genau eine Münze. Es gibt zwei Typen von erlaubten Operationen:

Typ 1: Man wähle einen nicht-leeren Behälter B_j mit $1 \leq j \leq 5$ aus. Man entferne eine Münze aus B_j und füge zum Behälter B_{j+1} zwei Münzen hinzu.

Typ 2: Man wähle einen nicht-leeren Behälter B_k mit $1 \leq k \leq 4$ aus. Man entferne eine Münze aus B_k und vertausche die Inhalte der (möglicherweise leeren) Behälter B_{k+1} und B_{k+2}.

Man entscheide, ob es eine endliche Folge von solchen Operationen gibt, nach deren Ausführung die ersten fünf Behälter B_1, B_2, B_3, B_4 und B_5 leer sind und der sechste Behälter B_6 genau $2010^{2010^{2010}}$ Münzen enthält. (Man beachte: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Aufgabe 6. Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Ferner sei s eine positive ganze Zahl, so dass

$$a_n = \max \{ a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1 \}$$

für alle $n > s$ gilt. Man beweise, dass es positive ganze Zahlen N und ℓ mit $\ell \leq s$ derart gibt, dass $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ für alle $n \geq N$ gilt.

Language: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Aufgaben der 4. MEMO 2010 in der Slowakei

(von: http://memo2010.skmo.sk/index.php , aufgerufen am 16.11.2010)

language: German

EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD MIDDLE FOURTH
STREČNO
SLOVAKIA 2010

4. Mitteleuropäische Mathematikolympiade

EINZELWETTBEWERB
11. SEPTEMBER 2010

Aufgabe I-1.
Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y+1)f(x) + (x+1)f(y) \ .$$

Aufgabe I-2.
Alle positiven Teiler einer positiven ganzen Zahl N stehen an einer Tafel. Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel, bei dem sie abwechselnd ziehen. Im ersten Zug löscht Spieler A die Zahl N. Wenn die zuletzt gelöschte Zahl d war, dann löscht der nächste Spieler entweder einen Teiler oder ein Vielfaches von d. Der Spieler, der keinen Zug mehr machen kann, verliert. Man bestimme alle Zahlen N, für die der Spieler A immer gewinnen kann, unabhängig davon, wie B zieht.

Aufgabe I-3.
Gegeben sei ein Sehnenviereck $ABCD$ mit einem Punkt E auf der Diagonalen AC, sodass $\overline{AD} = \overline{AE}$ und $\overline{CB} = \overline{CE}$. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks BDE. Der Kreis k schneide die Gerade AC in E und F.
Man zeige, dass die Geraden FM, AD und BC einander in einem Punkt schneiden.

Aufgabe I-4.
Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

(a) n hat mindestens vier verschiedene positive Teiler.

(b) Für alle Teiler a und b von n mit $1 < a < b < n$ teilt die Zahl $b - a$ ebenfalls n.

Arbeitszeit: 5 Stunden
Fragezeit: 45 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von ihrem Schwierigkeitsgrad ab.

language: German

4. Mitteleuropäische Mathematikolympiade

MANNSCHAFTSWETTBEWERB
12. SEPTEMBER 2010

Aufgabe T-1.
Gegeben seien drei streng monoton wachsende Folgen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, \qquad c_1, c_2, c_3, \ldots$$

positiver ganzer Zahlen. Jede positive ganze Zahl ist in genau einer dieser drei Folgen enthalten. Für jede positive ganze Zahl n gelten die folgenden Bedingungen:

(a) $c_{a_n} = b_n + 1$;

(b) $a_{n+1} > b_n$;

(c) Die Zahl $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ ist gerade.

Man bestimme a_{2010}, b_{2010} und c_{2010}.

Aufgabe T-2.
Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ bestimme man die größte reelle Konstante C_n, sodass für alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n \cdot (a_1 - a_n)^2 .$$

Aufgabe T-3.
In jeder Ecke eines regelmäßigen n-Ecks steht eine Burg. Im gleichen Moment schießt jede Burg auf eine der beiden nächstgelegenen Burgen (und trifft). Das *Ergebnis des Schießens* ist die Menge der getroffenen Burgen. Wir unterscheiden nicht, ob eine Burg ein oder zwei Mal getroffen wurde. Sei $P(n)$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse des Schießens.
Man beweise, dass für jede positive ganze Zahl $k \geq 3$ die Zahlen $P(k)$ und $P(k+1)$ teilerfremd sind.

Aufgabe T-4.
Sei n eine positive ganze Zahl. Ein Quadrat $ABCD$ ist unterteilt in n^2 Einheitsquadrate. Jedes davon wird von der Diagonalen parallel zu BD in zwei Dreiecke zerlegt. Einige der Ecken der Einheitsquadrate werden rot gefärbt, sodass jedes der $2n^2$ Dreiecke mindestens einen roten Eckpunkt hat.
Man bestimme, wie viele rote Eckpunkte mindestens benötigt werden.

Aufgabe T-5.
Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E bzw. F. Sei K der zu D bezüglich des Inkreismittelpunktes symmetrische Punkt. Die Geraden DE und FK schneiden einander in S.
Man zeige, dass AS parallel zu BC ist.

Aufgabe T-6.
Seien A, B, C, D, E Punkte, sodass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist und $ABDE$ ein Parallelogramm. Die Diagonalen AC und BD schneiden einander in S, und die Strahlen AB und DC schneiden einander in F.
Man zeige, dass $\sphericalangle AFS = \sphericalangle ECD$.

Aufgabe T-7.
Für eine nichtnegative ganze Zahl n sei a_n die positive ganze Zahl mit der Dezimaldarstellung

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1\,.$$

Man zeige, dass $\frac{a_n}{3}$ immer Summe zweier positiver Kubikzahlen, aber nie Summe zweier Quadratzahlen ist.

Aufgabe T-8.
Gegeben sei eine positive ganze Zahl n, die keine Zweierpotenz ist. Man zeige, dass eine positive ganze Zahl m existiert, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(a) m ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen.

(b) Die Dezimaldarstellung der Zahl m besteht aus zwei identischen Ziffernblöcken zu je n Ziffern.

Arbeitszeit: 5 Stunden
Fragezeit: 45 Minuten
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von ihrem Schwierigkeitsgrad ab.

Inhaltlicher Leitfaden für den Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

Version 2006/07

Zweck dieses Leitfadens ist es, einen Überblick darüber zu geben, welche Kenntnisse den Teilnehmerinnen und Teilnehmern beim LWA nach Meinung des Aufgabenkomitees nützlich sein können und auch sollen. Fallweise erlauben wir uns auch, unter der Rubrik „Ergänzungsvorschläge" mathematische Aussagen oder Techniken zu erwähnen, die zwar nicht direkte Voraussetzungen für den Wettbewerb sind, aber die Behandlung der Themen im Kurs abrunden können bzw. als Beispiele der Anwendung der angeführten Techniken dienen können.

1 Allgemeines und Übergreifendes

- Mathematische Sprache und Ausdrucksweise

  Anmerkung. Die Punkte der folgenden Liste sind weniger als „formeller Stoff" zu verstehen, sondern als Begriffe, die im Kontext verstanden und korrekt verwendet werden sollten, z.B. bei der Angabe von Lösungsmengen und Äquivalenzumformungen ...

  * wahre und falsche Aussagen, „und", „oder", „wenn, dann", „genau dann, wenn", „notwendig", „hinreichend", „äquivalent"
  * Mengen, Vereinigung, Durchschnitt, Paare und Tripel (insbesondere bei Gleichungssystemen)
  * Intervallschreibweise (z.B. bei Lösungsmengen)
  * „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit", „es genügt zu zeigen", „Abschwächung", „Verschärfung"
  * Erkennen von Mustern, Formulierung von Vermutungen und Behauptungen

- Beweismethoden und -techniken

  * Direkter und indirekter Beweis
  * Vollständige Induktion (Deutliche Gliederung in die einzelnen Schritte)
  * Fallunterscheidung

- Rechenregeln für Potenzen $a^0 = 1, a^{b^c} = a^{(b^c)}, \left(a^b\right)^c = a^{b\cdot c}$, Konvention $0^0 = 1$

- Wichtige Funktionen

  * Absolutbetrag $|x|$
  * Signum oder Vorzeichen $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$
  * Größte ganze Zahl kleiner oder gleich x. Notation: $[x]$ (Gaußklammer) oder auch $\lfloor x \rfloor$

* Fakultät $n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$ und $0! = 1$

- Algebraische und sonstige Umformungen

  * Faktorisierungen $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
  * Binomischer Lehrsatz für „kleine" Exponenten
    Anmerkung. Pascalsches Dreieck ohne Formel für Binomialkoeffizienten
  * Erkennen vollständiger Quadrate
    Anmerkung. Z.B. $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$
  * Auf Quadrate ergänzen
    Anmerkung. Z.B. $a^2 + 4a + 9 = (a+2)^2 + 5$
  * Wenn $m > n$ und m, n ganze Zahlen sind, dann gilt bereits $m \geq n + 1$.

Ergänzungsvorschläge

- Summen- und Produktschreibweise
  $$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ und } \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$
- Summenformel für die geometrische Reihe
  $$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ für } q \neq 1.$$
- Summenformel für die arithmetische Reihe
  Summe = (Anzahl der Glieder) · (Arithmetisches Mittel von erstem und letztem Glied)
- Gebrochener Anteil $\{x\} := x - [x]$

2 Zahlentheorie

Begriffe

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Dezimaldarstellung einer Zahl (Basis 10)
- Teilbarkeit
- Primzahlen
- Größter gemeinsamer Teiler (ggT), kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV), teilerfremde Zahlen
- Kongruenzen

  Zwei ganze Zahlen a und b heißen kongruent modulo einer positiven ganzen Zahl m, falls a und b bei Division durch m denselben (kleinsten nichtnegativen) Rest lassen. Notation: $a \equiv b \pmod{m}$. Das ist äquivalent dazu, dass m ein Teiler von $a - b$ ist.

Resultate und Techniken

- Rechenregeln für Teilbarkeiten

  Wenn m ein Teiler von a und von b ist, so ist m auch ein Teiler von $a \pm b$; wenn m ein Teiler von a ist und b eine ganze Zahl ist, so ist m auch ein Teiler von $a \cdot b$.

- Primfaktorzerlegung und ihre Eindeutigkeit

- Bestimmen von größtem gemeinsamen Teiler sowie kleinstem gemeinsamen Vielfachen über die Primfaktorzerlegung

- Rechnen mit Kongruenzen

  Falls $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$, dann gilt auch $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ und $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ sowie $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ (aber nicht: $a^c \equiv a^d \pmod{m}$!). Grob gesagt: Man darf in Ausdrücken Terme (außer im Exponenten) immer durch kongruente Terme ersetzen.

- Argumentieren mit Kongruenzen, z.B. Fallunterscheidungen und Aufzeigen von Widersprüchen

  Beispielsweise sind alle Quadratzahlen kongruent zu

  * 0 oder 1 modulo 3,
  * 0 oder 1 modulo 4,
  * 0, 1 oder 4 modulo 5,
  * 0, 1 oder 4 modulo 8.

  Beispiel (LWA 2006). Gibt es ganze Zahlen a, b, sodass $a^{2006} + b^{2006} + 1$ durch 2006^2 teilbar ist?

- Teilbarkeitsregeln durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 und durch kleine Zweier-, Fünfer- und Zehnerpotenzen

  Etwa: Eine Zahl ist genau dann durch 2, 4 bzw. 8 teilbar, wenn die aus ihrer letzten, ihren letzten beiden bzw. ihren letzten drei Ziffern im Dezimalsystem gebildete Zahl durch 2, 4 bzw. 8 teilbar ist.

- Diophantische Gleichungen

  Eine diophantische Gleichung ist eine Gleichung, für die ganzzahlige Lösungen gesucht werden.

  Anmerkung. Hier geht es nicht um spezielle Typen diophantischer Gleichungen (z.B. lineare diophantische Gleichungen), sondern vielmehr um ad-hoc Überlegungen mit Teilbarkeit und/oder Kongruenzen. Dabei kann es durchaus sein, dass die Lösungsmenge leer ist und trotzdem die Formulierung „Man finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung …“ verwendet wird.

Ergänzungsvorschläge

- Zifferndarstellungen in anderen Basen als 10

- Teilbarkeitsregel durch 11

  Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre Querdifferenz durch 11 teilbar ist.

- „Aufeinanderfolgende Quadrate“

  Falls für ganze Zahlen a und x die Ungleichung $a^2 < x < (a+1)^2$ gilt, so kann x keine Quadratzahl sein. Z.B. ist $x = b^2+2b+3$ für $b \in \mathbb{Z}$ „selten“ eine Quadratzahl (und Überprüfen der kleinen Fälle zeigt, dass x nie eine ist).

- Kleiner Satz von Fermat

  Wenn p eine Primzahl und a eine ganze Zahl ist, die nicht durch p teilbar ist, so gilt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

- Euklidischer Algorithmus

  Es seien a und b ganze Zahlen. Wir dividieren a durch b mit kleinstem nichtnegativen Rest r und erhalten
  $$a = b \cdot q + r \qquad q \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r < b.$$
  Sei d ein gemeinsamer Teiler von a und b. Dann teilt d die Zahlen a und b und damit nach den Rechenregeln für Teiler auch r. Jeder gemeinsame Teiler von a und b ist daher auch gemeinsamer Teiler von b und r. Nach demselben Argument ist jeder gemeinsame Teiler von b und r auch ein gemeinsamer Teiler von a und b. Daraus folgt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, r)$.

  Wiederholt man diesen Schritt nun für b und r anstelle von a und b, so erhält man ein effizientes Verfahren zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$.

  Anmerkung. An dieser Stelle wird der Euklidische Algorithmus als Beispiel gesehen, wie die Rechenregeln für Teiler auch in einem theoretischen Kontext angewendet werden können. Das erzielte Verfahren ist zwar mathematisch von großem praktischen Wert, nicht allerdings beim LWA, wo die Zahlen im Allgemeinen so klein sein werden, dass man mit der Bestimmung des ggT durch Primfaktorzerlegung das Auslangen finden wird.

3 Gleichungen

Begriffe

- Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge

Resultate und Techniken

- Lineare Gleichungen
- Quadratische Gleichungen
  * Lösungsformel
  * Vietasche Sätze
  * Diskriminante und Charakterisierung der Anzahl der reellen Lösungen
- Polynomiale Gleichungen höheren Grades
  * Erraten von Lösungen: Ganzzahlige Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten teilen das konstante Glied.
  * Abspalten von Linearfaktoren.
- Gleichungen mit rationalen Funktionen (Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen.)
- Einfache Gleichungssysteme

  Beispiel (LWA 2005). Man bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die gleichzeitig die folgenden drei Gleichungen erfüllen.
  $$\begin{aligned} [x] + \{y\} &= z, \\ [y] + \{z\} &= x, \\ [z] + \{x\} &= y. \end{aligned}$$

- Einfache Exponentialgleichungen

  Beispiel (LWA 2002). Man zeige: Es gibt keine positive rationale Zahl x mit $x^{[x]} = \frac{9}{2}$.

- Gleichungen mit Quadratwurzeln, Gaußklammern, Absolutbetrag, ... (Fallunterscheidung!)
- Gleichungen mit Parametern (Fallunterscheidungen!)
- Beweisen von Identitäten

  Beispiel (LWA 2006). Sei n eine gerade positive ganze Zahl. Wir betrachten Rechtecke mit den Seitenlängen k und $k+1$, wobei k größer als $n/2$ und höchstens gleich n ist. Man zeige: Für alle geraden natürlichen Zahlen n ist die Summe der Flächen der jeweils betrachteten Rechtecke gleich
$$\frac{n(n+2)(7n+4)}{24}.$$

Ergänzungsvorschläge

- Horner-Schema

4 Ungleichungen

- Rechnen mit Ungleichungen

  Summe und Produkt von positiven Zahlen sind positiv. Multiplikation einer Ungleichung mit einer positiven Zahl erhält das Ungleichheitszeichen, Multiplikation mit einer negativen Zahlen kehrt das Ungleichheitszeichen um. Vorsicht beim Quadrieren und Wurzelziehen!

- Lösen von linearen Ungleichungen, quadratischen Ungleichungen, polynomialen Ungleichungen höheren Grades, rationalen Ungleichungen, Ungleichungen mit Quadratwurzeln, Absolutbetrag, Gaußklammer und Fakultäten, sowie mit Parametern (vgl. Gleichungen). Fallunterscheidungen!

- Beweis von allgemeingültigen Ungleichungen

  Beispiel (nach LWA 1990). Man zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y, z die Ungleichung $x^2 + y^4 + z^6 \geq xy^2 + y^2z^3 + xz^3$ gilt.

  Die Ungleichungen können auch über ganzen oder natürlichen Zahlen zu beweisen sein, z.B. mit vollständiger Induktion.

- Grundlegende Ungleichungen (mit Kenntnis des Gleichheitsfalls)

  * Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$.
  * Mittelungleichung: Für $x, y > 0$ gilt
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}.$$
    Gleichheit genau für $x = y$.
  * Für $x, y > 0$ gilt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

- Äquivalenzumformungen, Verschärfung und Abschwächung, klare Unterscheidung von bereits Bewiesenem (bzw. Bekanntem) und noch zu Beweisendem

5 Geometrie

Begriffe

- Winkelschreibweise: $\measuredangle ABC$
- Streckensymmetrale, Winkelsymmetrale
- Dreieck
  - Seitensymmetrale, Höhe, Schwerlinie, Winkelsymmetrale
  - Umkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Inkreismittelpunkt
  - Umkreis, Inkreis
- Viereck
  - Rhombus (Raute), Parallelogramm, Trapez, Deltoid
  - Sehnenviereck
- Kreis
  - Sehne
  - Tangente
- Spiegelung

  Anmerkung. In einer Angabe soll „der Punkt P wird an der Seite AB gespiegelt" verstanden werden.
- Teilverhältnis

  Anmerkung. „Die Strecke AB wird vom Punkt P innen im Verhältnis $2 : 1$ geteilt" soll verstanden werden.

Resultate und Techniken

- Winkelsumme im Drei- und Viereck
- Kongruente und ähnliche Dreiecke, Strahlensatz, Kongruenzsätze
- Satz von Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz
- Peripheriewinkelsatz (inkl. Zentriwinkel), insbesondere Satz von Thales
- Erkennen von Sehnenvierecken

  Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich auf 180° oder über Peripheriewinkelsatz.
- Tangenten

  Die Tangentenstrecken von einem Punkt an einen Kreis sind gleich lang.
- Berührende Kreise

  Abstand der Mittelpunkte ist Summe bzw. Differenz der Radien.
- Flächenformeln
  - Dreieck: „Grundlinie mal halber Höhe", „Inkreisradius mal halbem Umfang"
  - Rhombus (Raute), Parallelogramm, Trapez, Deltoid

Ergänzungsvorschläge

- Ankreise
- Heronsche Flächenformel
- Tangentenviereck (Viereck mit Inkreis)
  Summen der Längen gegenüberliegender Seiten sind gleich.
- Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der entsprechenden Seitenlängen.

Aufgabenkomitee für den LWA 2007
Karl Czakler, GRG 21, Franklinstraße 21, Wien
Theresia Eisenkölbl, Universität Wien
Clemens Heuberger, TU Graz
Walther Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck
Kommentare oder Fragen (aber keine Aufgaben): `oemo-aufgaben-komitee@opt.math.tugraz.at`

Auswahl an Geometrieaufgaben aus den Wettbewerben der ÖMO von 2000 bis 2009

(soweit nicht anders angegeben, entnommen aus: Baron u. Schmidt, 2009; die angegebene Aufgabennummer entspricht der des entsprechenden Wettbewerbs)

Landeswettbewerb 2001:

4. Es sei ABC ein Dreieck mit den Winkeln α und β größer als 45°. Über der Seite AB errichten wir ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck ABR mit der Hypotenuse AB und R im Inneren des Dreiecks ABC. Analog errichten wir über BC und AC gleichschenkelig rechwinkelige Dreiecke CBP und ACQ, aber mit den Ecken P und Q (jeweils beim rechten Winkel) außerhalb des Dreiecks ABC.

   Man zeige, dass CQRP ein Parallelogramm ist.

Landeswettbewerb 2002:

4. Im Trapez ABCD mit der Basis AB sei E der Mittelpunk der Seite AD. Weiters sei $2\overline{CD} = \overline{EC} = \overline{BC} = b$. Der Winkel ECB sei 120°.

   Man konstruiere das Trapez und bestimme seinen Flächeninhalt als Funktion von b.

Landeswettbewerb 2004:

4. Von einem Rhombus (einer Raute) ABCD kennt man die Umkreisradien R von ΔABC und r von ΔBCD.

   Man konstruiere den Rhombus.

Landeswettbewerb 2005:

4. Gegeben ist das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt 2000. P, Q, R seien die Mittelpunkte der Seiten BC, AC, AB. U, V, W seien die Mittelpunkte der Seiten QR, RP, PQ. Die Längen der Strecken AU, BV, CW seien x, y, z.

   Man zeige, dass ein Dreieck mit den Seiten x, y, z existiert und berechne seinen Flächeninhalt.

Landeswettbewerb 2006:

4. Man zeige: Hat ein Dreieck zwei gleich große Ankreise, so ist es gleichschenkelig.

   (Hinweis: Der Ankreis des Dreiecks ABC zur Seite a berührt die Verlängerungen der Seiten AB und AC und die Seite BC.)

Landeswettbewerb 2007:

4. Wir betrachten ein Parallelogramm ABCD, in dem der Mittelpunkt M der Seite CD auf der Winkelsymmetrale von $\angle$BAD liegt.

   Man zeige, dass $\angle$AMB ein rechter Winkel ist.

Landeswettbewerb 2009:

4. Der Mittelpunkt M des Quadrates ABCD wird an C gespiegelt. Dadurch erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks BDE mit der Strecke AM wird mit S bezeichnet.

   Man zeige, dass S die Strecke AM halbiert.

(von: www.oemo.at/problems/lwa/lwa2009-deutschoffiziell.pdf)

Gebietswettbewerb 2000:

3. Wir betrachten zwei Kreise k_1 *(M_1, r_1)* und k_2 *(M_2, r_2)* mit $z = \overline{M_1M_2} > r_1 + r_2$ und eine gemeinsame äußere Tangente mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 (sie liegen also auf derselben Seite der Verbindungsgeraden M_1M_2). Wir verändern nun die Radien so, dass ihre Summe $r_1 + r_2 = c$ konstant bleibt.

   Welche Menge von Punkten durchläuft der Mittelpunkt der Tangentenstrecke P_1P_2, wenn r_1 von 0 bis c variiert?

Gebietswettbewerb 2002:

3. Im konvexen (alle Innenwinkel kleiner als 180°) Sechseck ABCDEF mit dem Umfang s haben die Diagonaldreiecke ACE bzw. BDF die Umfänge u bzw. v.

   a) Man zeige die Ungleichung $\frac{1}{2} < \frac{s}{u+v} < 1$

   b) Man untersuche ob 1 durch eine kleinere oder ½ durch eine größere Zahl ersetzt werden kann, und die Ungleichung für alle konvexen Sechsecke gültig bleibt.

Gebietswettbewerb 2003:

3. Gegeben sind zwei parallele Geraden g und h sowie ein Punkt P, der außerhalb des von g und h gebildeten Streifens liegt. Durch P werden nun drei paarweise verschiedene Geraden g_1, g_2 und g_3 gezeichnet, die g in den Punkten A_1, A_2, A_3 und h in den Punkten B_1, B_2, B_3 schneiden. Die Punkte $C_{12}=(A_1B_2)\cap(A_2B_1)$, $C_{13}=(A_1B_3)\cap(A_3B_1)$, $C_{23}=(A_2B_3)\cap(A_3B_2)$ sind die Schnittpunkte der entsprechenden Geraden.

   Man zeige:

   a) Es gibt genau eine Gerade n, die die Punkte C_{12};C_{13};C_{23} enthält und
   b) n ist parallel zu g und h.

Gebietswettbewerb 2008:

3. Gegeben ist ein spitzwinkeliges Dreieck ABC.

   Man bestimme alle Punkte P im Inneren des Dreiecks mit:

$$1 \leq \frac{\angle APB}{\angle ACB}, \frac{\angle BPC}{\angle BAC}, \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \leq 2$$

Gebietswettbewerb 2009:

3. Gegeben ist das spitzwinkelige Dreieck ABC (Durchlaufsinn ABC gegen den Uhrzeigersinn) mit den Höhenfußpunkten D (auf BC), E (auf AC) und F (auf AB). Weiters seien P, Q und R wie folgt definiert:

• P ist im Dreieck CFB der Höhenfußpunkt von F auf BC.

• Q ist im Dreieck ADC der Höhenfußpunkt von D auf AC.

• R ist im Dreieck AEB der Höhenfußpunkt von E auf AB.

Die sechs Punkte D, E, F, P, Q und R bilden bei passender Nummerierung $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ (gegen den Uhrzeigersinn mit T_1=P) ein konvexes Sechseck (alle Winkel kleiner als 180°).
Man zeige, dass in diesem konvexen Sechseck kein Punkt existiert, der auf allen drei Diagonalen T_1T_4, T_3T_6 und T_5T_2 liegt.

(www.oemo.at/problems/gwb/g2009-de.pdf)

Bundeswettbewerb Teil 2, 2003:

6. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck. Der Kreis k mit dem Durchmesser AB schneidet die Strecken AC und BC in den Punkten P und Q. Sei R der Schnittpunkt der Kreistangenten in A und Q und S derjenige der Tangenten in B und P.

   Man zeige: C liegt auf der Strecke RS.

Bundeswettbewerb Teil 2, 2004:

6. Über den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit dem Flächeninhalt 1 werden nach außen Dreiecke mit dem der jeweiligen Seite gegenüber liegenden Winkel 60° gezeichnet. Die neuen Eckpunkte seien P, Q und R.
   a) Welchen Flächeninhalt kann das Dreieck PQR maximal haben?
   b) Welchen Flächeninhalt kann das Dreieck der Inkreismittelpunkte der auf den Seiten aufgesetzten Dreiecke maximal haben?

Bundeswettbewerb Teil 2, 2007:

3. Man bestimme alle Rhomben (Rauten) ABCD mit der Seitenlänge 2a durch Angabe des Winkels $\alpha=\angle BAD$, für die gilt:

   Es gibt einen Kreis, den jede Rautenseite in einer Sehne der Länge a schneidet.

Bundeswettbewerb Teil 2, 2008:

3. Die Gerade g ist gegeben und auf ihr die vier Punkte P, Q, R, S (in dieser Reihenfolge von links nach rechts).

   Man konstruiere alle Quadrate ABCD mit folgenden Eigenschaften:
   P liegt auf der Trägergerade von AD. Q liegt auf der Trägergerade von BC.
   R liegt auf der Trägergerade von AB. S liegt auf der Trägergerade von CD.

Bundeswettbewerb Teil 1, 2009:

4. Seien D, E und F die Seitenmittelpunkte des Dreiecks ABC (D auf BC, E auf CA und F auf AB). Weiters sei $H_aH_bH_c$ das Höhenfußpunktdreieck des Dreiecks ABC. P, Q und R seien die Seitenmittelpunkte des Dreiecks $H_aH_bH_c$ (P auf H_bH_c, Q auf H_cH_a und R auf H_aH_b).

   Man zeige: Die Geraden PD, QE und RF haben einen Punkt gemeinsam.

(www.oemo.at/problems/bwb/b2009-de.pdf)

Mein Leben mit der Mathematik

(von Franz Zach (kleinphi), veröffentlicht im Jahresbericht des BRG 18 2002/2003,

aus: www.oemo.at/wiki/index.php/Mein_Leben_mit_der_Mathematik)

Da ich dieses Jahr zum letzten Mal an der Mathematikolympiade teilnehmen werde, weil ich heuer die achte Klasse besuche, ist es Zeit, einen Rückblick auf die letzten vier Jahre Mathematikolympiade zu machen.

Schon seit ich ein Kleinkind war, war die Mathematik mein Hobby. Bereits vor meinem dritten Geburtstag konnte ich Autonummern lesen, zuerst Ziffer für Ziffer, später dann als gesamte Zahl. Ich überprüfte dabei immer, ob vordere und hintere Nummer wirklich übereinstimmten. Später setzte ich mich oft einfach hin und zählte bis 1000. Ich hatte damals auch die Fähigkeit, zwei sechsstellige Zahlen bei einmaligem Vorlesen im Kopf zu addieren. Heute fällt mir das weit schwerer als damals. Ebenso habe ich das Multiplizieren zweier zweistelliger Zahlen in Sekundenschnelle wieder verlernt. Heute zähle ich natürlich nicht mehr bis 1000, es ist mir wohl mit der Zeit zu langweilig geworden. Ich vertraue auch darauf, dass vordere und hintere Autonummern übereinstimmen. Daher suchte ich nach neuen Herausforderungen.

Da kam mir das Angebot meiner Mathematikprofessorin Prof. Hodecek gerade recht, als sie meiner Klasse ankündigte, dass bald ein wienweiter Mathematikwettbewerb für die vierten Klassen AHS stattfinden werde. Ich meldete mich so wie einige andere Klassenkollegen dafür an. Bei diesem Wettbewerb nahmen einige hundert Viertklassler teil. Der Saal war dementsprechend groß. Jeder bekam einen Platz zugewiesen. Damals sah ich auch zum ersten Mal Professor Baron, der die Mathematikolympiade in Österreich seit Beginn (1970) betreut. Auf mich wirkte er sehr streng, besonders, als er einen Teilnehmer zusammenschrie, der das Kuvert mit den Beispielen einige Sekunden zu früh geöffnet hatte. Ich löste damals sieben von zehn Beispielen.

In der Schule sind 70% eine eher mittelmäßige oder schlechte Leistung, aber bei der Mathematikolympiade gibt es oft gar keinen Teilnehmer mit allen Punkten. Nur einer unter den etwa 300 löste alle zehn Aufgaben, 95% der Teilnehmer schafften nicht einmal die Hälfte. Die Angaben und meine Lösungen habe ich mir natürlich aufgehoben. Heute, nach vier Jahren Mathematikolympiadekurs kommen mir diese Beispiele extrem leicht vor. Sie sind nicht viel schwieriger als die Beispiele beim Känguru-Wettbewerb für höhere Altersstufen. Dort hatte man jedoch pro Aufgabe zehn Minuten Zeit, beim Känguru der Mathematik nur 2,5. Dazu hat natürlich der regelmäßige Besuch der Kurse einen großen Beitrag geleistet.

In der fünften Klasse nahm ich erstmals an so einem Kurs teil. Man lernt die grundlegenden Lösungsansätze für Mathematikbeispiele der Art, wie sie dann bei den Wettbewerben auf dem Angabezettel stehen. Die Teilnehmer lernen Methoden wie vollständige Induktion, Mittelungleichung und geometrische Sätze wie den Peripheriewinkelsatz. Im Normalunterricht kommen diese Begriffe nie vor. Wer sich dafür interessiert, was hinter den eben genannten Begriffen steckt und im Moment die Unterstufe besucht und beabsichtigt, weiterhin das BRG 18 zu besuchen - was ich im Nachhinein für sehr empfehlenswert halte -, sollte sich am Besten für nächstes Jahr bei Prof. Krauskopf für den Anfängerkurs anmelden. Man kann damit auch schon in der vierten Klasse beginnen. Vielleicht hätte ich diese Möglichkeit auch nützen sollen, vermutlich hat sich aber kein Lehrer darum bemüht, mich dazu zu bewegen. Ich hätte sicher nicht abgelehnt.

Als Abschluss des Anfängerkurses findet ein Kurswettbewerb statt. Die besten fünf Teilnehmer qualifizieren sich für den wienweiten Anfängerwettbewerb der Mathematikolympiade, der damals im neuen Gebäude der TU stattfand. Dort waren nur etwa 35 Teilnehmer. Es gab vier Beispiele, für die man, glaube ich, vier Stunden Zeit hatte. Seltsamerweise fiel mir das Geometriebeispiel besonders leicht. Normalerweise habe ich bei dieser Art von Aufgaben keine zielführende Ideen. Das andere Beispiel, das ich lösen konnte, war sehr primitiv. Es waren alle zweistelligen Zahlen mit einer bestimmten Eigenschaft gesucht. Das es davon nur 90 gibt und man sehr einfach viele ausschließen konnte, war das schon mal schnell gelöst. In diesem Zusammenhang möchte ich ein Buch empfehlen, in dem alle Beispiele der Mathematikolympiaden in Österreich von 1990 bis 1999 für Anfänger und Fortgeschrittene enthalten sind. (Baron, Gerd (Hg.), Österreichische Mathematikolympiaden, 1990-1999, Aufgaben und Lösungen, Verlag öbv&hpt Wien, ISBN 3-209-02908-3) [in der Schulbibliothek verfügbar]

Zurück zum wienweiten Anfängerwettbewerb. Die anderen zwei Beispiele konnte ich nicht lösen. Die Angabe war zwar verständlich, was auch nicht immer unbedingt der Fall ist, trotzdem kann die Lösung sehr kompliziert und trickreich sein. Einmal hätte man bei einem Beispiel, welches mit der Mittelungleichung zu lösen war (mehr Informationen darüber gibt es in einem Mathematikolympiadekurs), die Variable a in a/2+a/2 aufspalten müssen. Soweit ich mich erinnern kann hat diese Aufgabe damals niemand vollständig gelöst.

Nach dem Wettbewerb wurden die Lösungen präsentiert, allerdings nicht vom Aufgabensteller Prof. Baron persönlich, sondern von einem Kursleiter. Die Lösungen der zwei von mir nicht gelösten Probleme wurden mir auch nachher nur teilweise klar. Einige andere behaupteten, dass das "eh alles ganz leicht" war.

Umso mehr war ich am nächsten Tag überrascht, dass ich den zweiten Platz unter den ca. 35 Teilnehmern erreicht hatte. Ich bekam eine Schachtel mit Produkten der Firma 3M. Außerdem durfte ich mir ein Buch aussuchen. Es sollte noch erwähnt werden, dass der erste Preis ebenfalls an einen Teilnehmer aus dem Anfängerkurs von Prof. Krauskopf ging, obwohl nur fünf Personen von den 35 seinen Kurs besuchten.

Motiviert durch meine gute Leistung setzte ich meine Mathematikolympiadekarriere im nächsten Schuljahr (2000/01) mit dem Fortgeschrittenenkurs bei Prof. Henner fort.

Einiges, was man im Anfängerkurs schon gehört hat, wird dort wiederholt, aber es kommen natürlich auch viele interessante neue Themen vor. Nach den ersten Monaten, in denen man verschiedene Lösungswege für alle Arten von Beispielen, die normalerweise bei den Wettbewerben vorkommen, lernt, werden nur mehr Beispiele gelöst, oder zumindest zu lösen versucht. Im ersten Jahr hatte ich natürlich noch nicht so viel Übung. Deshalb fiel mir auch der Kurswettbewerb ziemlich schwer. Mit 6 von 24 Punkten ist man im normalen Unterricht einer der Schlechtesten, hier war ich fünfter von immerhin zehn Teilnehmern. Also durfte ich nach Raach am Hochgebirge - alles ist relativ, die Berge sind nicht besonders hoch

- zum Gebietswettbewerb für Wien, Niederösterreich und das Burgenland fahren. Raach ist ein kleines Dorf im südlichen Niederösterreich. Man wird also durch nichts von seinen mathematischen Übungen abgelenkt, falls man glaubt, dass das Üben am Tag vor dem Wettbewerb noch etwas bringt. Für fast 60 Teilnehmer gab es nur 10 Plätze für den Bundeswettbewerb. Wenn man erst in die 6. Klasse geht wie ich damals hat man es besonders schwer. Ich wurde nur 14., aber ich hatte ja noch zwei Chancen. Immerhin wurde ich hochoffiziell für drei Tage vom Unterricht freigestellt.

Im zweiten Jahr des Fortgeschrittenenkurses hörte ich zu Beginn viele bereits bekannte Sachen, einige waren aber auch neu, oder ich hatte sie vergessen. Trotz des Angebots von Professor Henner, Beispiele zu lösen während er mir bereits Bekanntes vortrug, hörte ich immer zu (repetitio est mater studiorum). Für mich zumindest war es eindeutig zu spüren, dass mir die Beispiele leichter fielen als im ersten Jahr.

Beim Kurswettbewerb erreichte ich diesmal 18 von 24 Punkten und damit den 4. Platz. Den Kurswettbewerb im Jahr davor hätte man mit dieser Punktezahl gewonnen. Wie fast immer hinderte mich das Geometriebeispiel an einem besseren Ergebnis. Trotzdem war ich diesmal recht optimistisch, den Bundeswettbewerb zu erreichen. Dazu musste ich aber zuerst noch den Gebietswettbewerb überstehen. In diesem Jahr wurde auch ein neuer Modus eingeführt. Jetzt konnten sich nicht nur zehn Teilnehmer für den Bundeswettbewerb qualifizieren sondern etwa 15. Damit hätte ich es im Jahr davor auch geschafft.

In jedem Jahr fand der Gebietswettbewerb in Reichenau an der Rax statt. Außer dem Ort war alles so wie im Jahr zuvor. Am Montag war Anreisetag, am Dienstag Vormittag vier Stunden Wettbewerb. Der Nachmittag stand zur freien Verfügung, am Mittwoch war die Preisverleihung und danach Rückfahrt. Zum Glück gab es bei diesem Gebietswettbewerb ein Beispiel, bei dem ich mir sofort sicher war, dass ich es losen würde. Es handelte sich nämlich um ein Zahlentheoriebeispiel mit Teilbarkeiten, das ist mein Lieblingsgebiet. Das zweite Beispiel war unglaublich einfach. Es handelte sich um ein Gleichungssystem mit fünf Variablen. Klingt schrecklich, oder? War es aber nicht. Nachdem ich über eine halbe Stunde lang versucht hatte, zu substituieren und mir fünf ineinander verschachtelte Wurzeln herauskamen hatte ich die glorreiche Idee, alle Gleichungen zu addieren. Dann musste ich nur noch vollständige Quadrate bilden und ich war fertig. Ich glaube, wenn jemand die Idee gehabt hätte, einfach zu addieren, und nie einen Mathematikolympiadekurs besucht hätte, wäre es ihm auch möglich gewesen, das Beispiel zu lösen. Viele Teilnehmer jedoch, darunter auch welche, die sich für den Bundeswettbewerb qualifizierten, lösten dieses Beispiel nicht. Als ich von der Einfachheit des Geometriebeispiels hörte - ich hätte nur die Dreiecksungleichung anwenden müssen - dachte ich mir, dass ich wohl wieder zu schlecht gewesen war, um mich für den Bundeswettbewerb zu qualifizieren. Trotzdem ging es sich diesmal aus. Es war zwar knapp und nur der schon erwähnten Regelung zu verdanken, aber das ist ja egal; wichtig ist nur, dass es sich ausgegangen ist. Ich erhielt ein Buch und eine Urkunde. Außerdem durfte ich zweieinhalb Wochen lang während der Schulzeit zum Bundeswettbewerb nach Raach fahren.

Zuerst hatte ich Bedenken, dass sich das alles mit den verschiedenen Schularbeiten und Tests nicht ausgehen würde. Aber das hätte mich trotzdem nicht abhalten können, am Bundeswettbewerb teilzunehmen. Vielleicht ist es nicht ganz klar, warum man für diesen Bundeswettbewerb zweieinhalb Wochen braucht. Es dauert deshalb so lange, weil man zwei Wochen Unterricht in verschiedenen Teilgebieten erhält (Geometrie, Zahlentheorie, Ungleichungen, Schubfachschluss, ...). Nicht einmal am Sonntag hatte man seine Ruhe. Am Nachmittag war nämlich auch Unterricht. Von Montag bis Sonntag war, ausgenommen an den drei Wettbewerbstagen, der Tagesablauf immer gleich. Schon um 7:30 war Frühstück, um 8:15 musste man zum Unterricht erscheinen, der sich am Vormittag meistens in drei Ein-Stunden-Einheiten mit 15 Minuten Pause dazwischen gliederte. Man war also um 11:45 fertig. Um 12 Uhr war Mittagessen. Danach war großzügigerweise bis etwa 14:30 Mittagspause. Die verbrachte ich meistens im Zimmer und ruhte mich aus. Der Nachmittagsunterricht bestand oft aus zwei Eineinhalb-Stunden-Einheiten, endete also um 17:45, manchmal war es auch wie am Vormittag, dann dauerte es eben bis 18 Uhr. Nach dem Abendessen hatte ich meistens genug von Mathematik, was mir eher selten passiert. Ich nützte den Abend lieber, um aus dem Haus zu gehen. Raach liegt in einer sehr schönen Umgebung. Für mich als Geländeläufer war die Umgebung gerade richtig. Ich kann aber nicht leugnen, dass ich gelegentlich während des Laufens über mathematische Beispiele nachdachte.

Nach einer Woche kam dann der so genannte Zwischenwettbewerb. Das war eine Neueinführung, nachdem sich ja nun mehr Leute für den Bundeswettbewerb qualifizierten. Diesmal dacht ich mir, als ich die Beispiele sah: "Da kann ich ja gleich wieder gehen". Bei einem Beispiel erwähnte ich einen Lösungsansatz mit Modulen und bekam dafür 4 Punkte. Meine restlichen 3 Punkte resultierten aus der Erwähnung der Phi-Funktion (für Neugierige: Anzahl der Zahlen $x < z$ mit $ggT(x,z)=1$) von 2002. Das Geometriebeispiel blieb wie fast immer ungelöst. Bei der Lösungspräsentation vom Aufgabensteller Prof. Baron persönlich stellte sich dann heraus, dass insgesamt 7 Fälle zu unterscheiden waren. Es erreichte auch niemand die volle Punktezahl für dieses Beispiel. Meiner Meinung nach versteht man die Lösungsvorschläge von Prof. Baron nur dann, wenn man die Beispiele im Wettbewerb zumindest teilweise gelöst hat. Sonst kommt man mit seinem hohen Tempo beim Erklären nicht mit.

Eigentlich war ich mir sicher, dass ich mich nicht für die zweite Woche qualifiziert hatte, trotzdem reichte mein Ergebnis. Anscheinend war es ein paar Anderen noch schlechter als mir gegangen und so hatte ich mich qualifiziert. Nach einem Wandertag ging es dann weiter mit dem Unterricht. Am Ende hatte ich Vieles dazu gelernt, aber ich glaube, dass mir das bei keinem Wettbewerbsbeispiel geholfen hat. Es war wohl hauptsächlich die Übung aus dem Olympiadekurs in der Schule, die mir beim Endwettbewerb 15 von 48 Punkten brachte. Dieser Wettbewerb fand an zwei Tagen statt, bestand also aus zwei Teilen zu jeweils drei Beispielen mit vier Stunden Zeit. Ein Beispiel am zweiten Tag löste ich sogar vollständig, nämlich ein Polynombeispiel, während ich für die zwei Geometriebeispiele nur 2 von 16 Punkten bekam. Mein Gesamtergebnis reichte dann zwar weder für die Internationale Mathematikolympiade noch für den Länderwettbewerb gegen Polen, aber ich war ganz zufrieden. Ich hatte noch eine Chance im nächsten Jahr.

Dieses Jahr ist also das letzte Jahr Mathematikolympiade für mich. Der Gebietswettbewerb liegt noch vor mir. Ich bin überzeugt, dass auch meine doch immer recht guten Ergebnisse bei den Känguru-Wettbewerben zu einem großen Teil Ergebnis der Olympiadekurse waren.

Hoffentlich habe ich niemanden davor abgeschreckt sondern Viele dazu bewegt, den Mathematikolympiadekurs nächstes Jahr zu besuchen. Man kann sicher auch erst in der 6. oder 7. Klasse beginnen und wenn man Spaß an Mathematik hat, hat man auch sicher viel davon. Es kann auch sein, dass einem der Schulmathematik-Unterricht nicht zusagt und man trotzdem bei der Mathematikolympiade gute Ergebnisse hat. Das Meiste, was man dort nämlich lernt, kommt im Mathematikunterricht nicht vor. Da hat man dann einen Vorsprung gegenüber den Anderen und muss nichts mehr lernen, was auch angenehm ist.

Literaturverzeichnis

Alvarez, Christiane*: Hochbegabung: Tipps für den Umgang mit fast normalen Kindern.* München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 2007

Anderski, Christa: *Begabte Kinder hoch begaben.* Düsseldorf: Alein-Verlag, 2003

Bardy, Peter: *Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung.* München: Elsevier, 2007

Baron, Gerd: *Mathematische Olympiaden.* In: Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Band 19, 1991, S. 17-43
Verfügbar unter: www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1991 Band 19/Baron1991.pdf (aufgerufen am 12.10.2010)

Baron, Gerd: *Wettbewerbe in alten und neuen Zeiten in unseren und anderen Breiten.* In: 5 Jahre Jagd auf Zahlen und Figuren, 10 Jahre Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb. Wien: öbv, 2000, S. 7-24

Baron, Gerd u. Schmidt, Birgit Vera (Hrsg.*): Österreichische Mathematik-Olympiaden 2000 – 2008, Aufgaben und Lösungen.* Wien: Eigenverlag, 2009

Bauersfeld, Heinrich und Kießwetter, Karl (Hrsg.): *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? – Ein Buch aus der Praxis für die Praxis*. Offenburg: Mildenberger Verlags GmbH, 2006

Beerman, Lilly; Heller, Kurt; u. Menacher, Pauline: *Mathe nichts für Mädchen? Begabung und Geschlecht am Beispiel von Mathematik, Naturwissenschaft und Technik.* Bern u. a.: Huber, 1992

Benölken, Ralf: *Attributionsmuster mathematisch potentiell begabter Mädchen im Grundschulalter.* In: Fuchs, Mandy und Käpnick, Friedhelm (Hrsg.): *Mathematisch begabte Kinder – Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Begabungsforschung Band 8. Berlin: Lit Verlag, 2008, S. 84-101

Brandenstein, Maria: *Hochbegabt? Besondere Begabungen erkennen und gezielt fördern.* Berlin: Cornelsen Scriptor, 2003

Brunner, Esther u. a.: *Hochbegabung – (k)ein Problem? Handbuch zur interdisziplinären Begabungs- und Begabtenförderung*. Zug: Klett und Balmer, 2005

Büchter, Andreas*: Zur Erforschung von Mathematikleistung. Theoretische Studie und empirische Untersuchung des Einflussfaktors Raumvorstellung.* Disseration an der TU Dortmund. Juli 2010
Verfügbar unter: www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/_personelles/papers/buechter/diss_ab.pdf (aufgerufen am 28.03.2011)

Deutsche Gesellschaft für das begabte Kind e.V. (Hrsg.): *Im Labyrinth: Hochbegabte Kinder in Schule und Gesellschaft*. Münster: Lit Verlag, 2001

Devlin, Keith: *Das Mathe-Gen.* München: dtv, 2006 (5. Auflage)

Drmota, Michael u. Tichy, Robert: *35 Jahre Österreichische Mathematische Olympiade und 65 Jahre Gerd Baron*. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.): Internationale Mathematische Nachrichten, Heft Nr. 199, Wien: ÖMG, 2005, S. 31-38
Verfügbar unter: www.oemg.ac.at/IMN/imn199.pdf (aufgerufen am 12.10.2010)

Drmota, Michael: *40 Jahre Mathematikolympiade*. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hrsg.): *Internationale Mathematische Nachrichten*, Heft Nr. 212, Wien: ÖMG, 2009, S. 29-32

dtv-Lexikon in 24 Bänden, München: Deutscher Taschenbuch Verlag, 2006

Engel, A.: *Mathematische Olympiadeaufgaben aus der UdSSR*. Ernst Klett, 1966 (zitiert aus: Baron, 1991)

Engel, A.: *Das Training unserer IMO-Mannschaft*. Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 1988, S. 186-192 (zitiert aus: Baron, 1991)

Engel, A.: *Bericht über die XXXI. Internationale Mathematikolympiade (IMO).* Zentralblatt der Didaktik der Mathematik 1990, S. 222-223 (zitiert aus: Baron, 1991)

Feger, Barbara: *Hochbegabung – Chancen und Probleme*. Bern: Huber, 1988

Feger, Barbara u. Prado, Tania: *Hochbegabung – Die normalste Sache der Welt*. Darmstadt: Primus Verlag, 1998

Finsterwald, Monika: *Reattributionstrainings: Eine Chance für eine spezifische Förderung von Mädchen im MINT-Bereich?* In: BM f. Bildung, Wissenschaft und Kultur*: Begabungsförderung durch Geschlechtssensibilität in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik.* Wien, 2005, S. 63-73

Fleiß, Ida: *Hochbegabung und Hochbegabte – mit Berichten Betroffener*. Marburg: Tectum Verlag, 2003

Fleiß, Ida: *Hochbegabung und Hochbegabte – mit Berichten Betroffener*. Marburg: Tectum Verlag, 2009 (3. überarbeitete Aufl.)

Förster, Frank u. Grohmann, Wolfgang: *Möglichkeiten der Begabtenförderung im Unterricht durch natürliche Differenzierung*. In: Fuchs, Mandy und Käpnick, Friedhelm (Hrsg.): *Mathematisch begabte Kinder – Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Begabungsforschung Band 8. Berlin: Lit Verlag, 2008, S. 113-123

Fuchs, Mandy und Käpnick, Friedhelm (Hrsg.): *Mathematisch begabte Kinder – Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Begabungsforschung Band 8. Berlin: Lit Verlag, 2008

Gallagher, James: *Hochleistungsförderung und Chancengleichheit – Ein weltweiter Konflikt*. In: Wieczerkowski, Wilhelm (Hrsg.): *Hochbegabung, Gesellschaft, Schule. Ausgewählte Beiträge aus der 6. Weltkonferenz über hochbegabte und talentierte Kinder in Hamburg vom 5. bis 9. August 1985.* Schriftenreihe Studien zu Bildung und Wissenschaft 35. Bad Honnef: Bock, 1986

Gardner, Howard: *Abschied vom IQ – Rahmen-Theorie der vielfachen Intelligenzen.* Stuttgart: Klett-Cotta, 1991

Götze, Carl: *Schulbegabung und Lebensbegabung*. In: Petersen, Peter (Hrsg.): *Der Aufstieg der Begabten*. Leipzig – Berlin: Teubner, 1916, S. 9-16

Hany, Ernst u. a. (Hrsg.): *Begabung und Hochbegabung – Theoretische Konzepte, Empirische Befunde, Praktische Konsequenzen*. Bern: Huber, 1992

Hany, Ernst: *Gebt den Lehrern eine Chance – Ein Plädoyer für den Einsatz von Lehrerchecklisten*. In: news&science. *Begabtenförderung und Begabungsforschung.* özbf, Nr. 16/Mai 2007, S. 21-23.
Verfügbar unter:
www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/wiss_beitraege/04-01-00-HANY_GebtLehrerneineChance-b.pdf (aufgerufen am 26.5.2010)

Heilmann, K.: *Begabung, Leistung, Karriere. Die Preisträger im Bundeswettbewerb Mathematik 1971-1995.* Göttingen et al. 1999 (Dissertation)

Heinrich, F.: *Defizitäre Verhaltensweisen beim Bearbeiten mathematischer Probleme.* In: Fuchs, M. u. Käpnick, F. (Hrsg.): *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Berlin: Lit, 2008, S. 22-33

Heller, Kurt: *Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter*. Bern u. a.: Hogrefe, 2001 (2. überarbeitete und erweiterte Aufl.)

Heller, Kurt, u. a.: *Hochbegabung im Grundschulalter – Erkennen und Fördern*. Begabungsforschung Band 2. Berlin: Lit Verlag, 2006

Holling, Heinz; Vock, Miriam u. Wittmann, Anna Julia: *Wie erkennt man Hochbegabung bei jungen Erwachsenen?* In: Deutsche Gesellschaft für das begabte Kind e.V. (Hrsg.): *Im Labyrinth: Hochbegabte Kinder in Schule und Gesellschaft*. Münster: Lit Verlag, 2001, S. 16-21

Käpnick, Friedhelm: *Mathematisch begabte Kinder.* Frankfurt am Main: Peter Lang, 1998

Köhler, Thomas (Hrsg.): *Potential und Performanz, Begabungsforschung und Begabtenförderung in Österreich und Mitteleuropa*. Innsbruck: Studienverlag, 2008

König, Gerhard: *Begabung und Begabungsförderung – ein Literaturüberblick über neuere Ergebnisse unter besonderer Berücksichtigung der mathematischen Begabung.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1986/3, S. 81-98

Krutetskii, Vadim Andreevich: *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press, 1976

Lehmann, Walter u. Jüling, Inge: *Fördermöglichkeiten für besonders begabte Kinder und Jugendliche*. In: Reichle, Barbara: *Hochbegabte Kinder – Erkennen, fördern, problematische Entwicklungen verhindern*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 2004, S. 34-58

Malle, Günter, u. a.: *Mathematik verstehen 8*. Wien: öbv, 2007

Mönks, Franz: *Ein interaktionales Modell der Hochbegabung*. In: Hany, Ernst u.a. (Hrsg.): *Begabung und Hochbegabung – Theoretische Konzepte, Empirische Befunde, Praktische Konsequenzen*. Bern: Huber, 1992, S. 17-22

Oswald, Friedrich: *Begabungen entdecken, Begabte fördern*. Skriptum zur Vorlesung Sommersemester 2000. Wien: WUV-Universitätsverlag, 2000

Oswald, Friedrich: *Begabtenförderung in der Schule – Entwicklung einer begabtenfreundlichen Schule*. Wien: Facultas Verlag, 2002

Oswald, Friedrich; Hanisch, Günter u. Hager Gerhard: *Wettbewerbe und „Olympiaden“ – Impulse zur (Selbst)-Identifikation von Begabungen*. Begabungskultur Band 3. Wien: Lit Verlag, 2005

Petersen, Peter (Hrsg.): *Der Aufstieg der Begabten*. Leipzig – Berlin: Teubner, 1916

Polya, George: *Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme.* Tübingen: Francke Verlag, 1995 (4. Auflage)

Reichle, Barbara: *Hochbegabte Kinder – Erkennen, fördern, problematische Entwicklungen verhindern*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 2004

Richter, Andrea: *Hochbegabung – Information für Lehrer*. St. Pölten: NÖ Landesakademie, Bereich Zukunft und Entwicklung, 2003

Rost, Detlef: *Hochbegabung.* In: Gehirn & Geist, März 2008, S. 44-50
Verfügbar unter:
www.glothkom.de/SER/wp-content/uploads/2009/01/gug_2008_3_s44.pdf
(aufgerufen am 23.2.2010)

Rustemeyer, Ruth: *Einführung in die Unterrichtspsychologie*. Darmstadt: WBG, 2007

Sewerin, Horst: *Mathematische Schülerwettbewerbe*. München: Manz Verlag, 1979

Siemchen, Helga: *Kinder und Jugendliche mit Hochbegabung, Erkennen, stärken, fördern – damit Begabung zum Erfolg führt*. Stuttgart: Kohlhammer, 2005

Span, Peter u. Overtoom-Corsmit, Ruth: *Informationsverarbeitung beim mathematischen Problemlösen durch intellektuell hochbegabte Schüler.* In: Wieczerkowski, Wilhelm (Hrsg.): *Hochbegabung, Gesellschaft, Schule. Ausgewählte Beiträge aus der 6. Weltkonferenz über hochbegabte und talentierte Kinder in Hamburg vom 5. bis 9. August 1985.* Schriftenreihe Studien zu Bildung und Wissenschaft 35. Bad Honnef: Bock, 1986, S. 252-260

Stanley, Julian C.: *Ein Ansatz zur Förderung mathematischer Talente in den USA*. In: Wieczerkowski, Wilhelm (Hrsg.): *Hochbegabung, Gesellschaft, Schule. Ausgewählte Beiträge aus der 6. Weltkonferenz über hochbegabte und talentierte Kinder in Hamburg vom 5. bis 9. August 1985.* Schriftenreihe Studien zu Bildung und Wissenschaft 35. Bad Honnef: Bock, 1986, S. 225-238

Stern, William: *Psychologische Begabungsforschung und Begabungsdiagnose*. In: Petersen, Peter (Hrsg.): *Der Aufstieg der Begabten*. Leipzig – Berlin: Teubner, 1916, S. 105-120

Tanzberger, Renate: *Zum Gender Sensitivity-Pfad.* In: BM f. Bildung, Wissenschaft und Kultur: *Begabungsförderung durch Geschlechtssensibilität in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Wien, 2005, S. 5-10

Trautmann, Thomas: *Einführung in die Hochbegabtenpädagogik*. Grundlagen der Schulpädagogik Band 53. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren, 2005

Ulm, Volker: *Mathematische Begabung und ihre Förderung im Unterricht.* Beitrag am 100. MNU Kongress des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V., Regensburg, 2009
Verfügbar unter: www.mnu.de/extern/lv-rp-lvt2009/Artikel_Herr_Ulm.pdf
(aufgerufen am 14.2.2011)

Wagner, Harald: *Förderung mathematischer Talente in den USA: Das Beispiel des Johns Hopkins Center for Talented Youth.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1986/4, S. 126-130

Wagner, Harald; Zimmermann, Bernd u. Stüven, Norbert: *Identifizierung und Förderung mathematisch besonders befähigter Schüler. Bericht über einen Modellversuch*. In: Wieczerkowski, Wilhelm (Hrsg.): *Hochbegabung, Gesellschaft, Schule. Ausgewählte Beiträge aus der 6. Weltkonferenz über hochbegabte und talentierte Kinder in Hamburg vom 5. bis 9. August 1985.* Schriftenreihe Studien zu Bildung und Wissenschaft 35. Bad Honnef: Bock, 1986, S. 239-251

Waldner-Gstrein, Marion: *Mathematische Hochbegabung: Entwicklung im Kindergartenalter*. Diplomarbeit an der Fakultät für Psychologie der Universität Wien, 2004

Walther, Gerd: *Inhaltliche und organisatorische Aspekte der Arbeit mit mathematisch interessierten und begabten Schülern.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1986/4, S. 115-119

Westphal, Ursel: *Projektorientiertes Lernen in Mathematik – Individuelle Herausforderung.* In: Fuchs, Mandy und Käpnick, Friedhelm (Hrsg.): *Mathematisch begabte Kinder – Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft.* Begabungsforschung Band 8. Berlin: Lit Verlag, 2008, S. 227-239

Wieczerkowski, Wilhelm (Hrsg.): *Hochbegabung, Gesellschaft, Schule. Ausgewählte Beiträge aus der 6. Weltkonferenz über hochbegabte und talentierte Kinder in*

Hamburg vom 5. bis 9. August 1985. Schriftenreihe Studien zu Bildung und Wissenschaft 35. Bad Honnef: Bock, 1986

Ziegler, Albert: *Hochbegabung*. München: Ernst Reinhardt Verlag, 2008

Zimbardo, Philip u. a.: *Psychologie*. München: Pearson Studium, 2004 (16. aktualisierte Auflage)

Zimmermann, Bernd*: Mathematisch hochbegabte Schüler – Das Hamburger Modell.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1986/3, S. 98-106

Vom BMUKK zur Verfügung gestellte Skripten für Mathematikolympiadekurse mit den Titeln:

- Geometrie
- Gleichungen
- Raach
- Aufgaben aus internationalen mathematischen Bewerben
- Mathematikolympiade 1991 – neue Beispiele für Einführungskurse
- Österreichische Mathematik Olympiade 1992 – neue Wettbewerbsbeispiele für F-Kurse
- Ungleichungen
- Gleichungssysteme
- Funktionalgleichungen

Internetquellen:
(alphabethisch geordnet)

www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?id=240,0,0,1,0,0 (aufgerufen am 21.2.2011)

www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?id=543,730,1,1,1,0 (aufgerufen am 20.5.2010)

www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?koop_blks (aufgerufen am 21.2.2011)

www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?lehrmittel (aufgerufen am 21.2.2011)

www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/grundsatzerlass_bf_2009/grundsatzerlass_bf_09.pdf (aufgerufen am 17.2.2011)

www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/olympiaden/mathematikolympiade_ns18.pdf (aufgerufen am 22.11.2010)

www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/File/wiss_beitraege/04-01-00-HANY_GebtLehrerneineChance-b.pdf (aufgerufen am 26.5.2010)

www.begabtenzentrum.at/wcms/picture/upload/uberspringen_oswald_01 (aufgerufen am 17.2.2011)

www.bgmoedling-keim.ac.at/index_standard.php (aufgerufen am 17.2.2011)
www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (aufgerufen am 23.11.2010)
www.bmukk.gv.at/medienpool/15239/begabten_neu.pdf (aufgerufen am 30.3.2010)
www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (aufgerufen am 16.2.2011)
www.bmukk.gv.at/schulen/recht/gvo/schog_01.xml#02 (aufgerufen am 17.2.2011)
www.bmukk.gv.at/schulen/recht/gvo/schug_teil1.xml (aufgerufen am 17.2.2011)
www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo/imo/imo.htm (aufgerufen am 15.11.2010)
www.bundeswettbewerb-mathematik.de/imo/wettbewerb/awb.htm (aufgerufen am 15.11.2010)
www.glothkom.de/SER/wp-content/uploads/2009/01/gug_2008_3_s44.pdf (aufgerufen am 23.4.2010)
www.hirnwindungen.de/begabung/kiesswetter.pdf (aufgerufen am 28.03.2011)
www.hochbegabten-homepage.de/intelligenztest_fuer_kinder.html (aufgerufen am 21.2.2011)
www.imo-official.org (aufgerufen am 22.11.2010)
www.imo-official.org/organizers.aspx (aufgerufen am 12.10.2010)
www.imo-official.org/results.aspx (aufgerufen am 12.10.2010)
www.imo2009.de (aufgerufen am 15.11.2010)
www.imo2010org.kz (aufgerufen am 15.11.2010)
www.imo2010org.kz/?lang=eng&id_rubric=17 (aufgerufen am 12.10.2010)
www.imo2011.nl (aufgerufen am 16.11.2010)
www.intertel-iq.org/ (aufgerufen am 19.5.2010)
www.kinderunisteyr.at (aufgerufen am 21.2.2011)
www.lehrer-online.de/jahr-der-mathematik.php (aufgerufen am 21.2.2011)
www.lernende-region-trier.de/lr-trier/de-DE/download/checkliste_hbf.pdf?PHPSESSID=6233402e684290bf5634a69b1d63af20 (aufgerufen am 26.5.2010)
www.logios.de/hochbegabung/methoden_materialien_medien.htm (aufgerufen am 16.2.2011)
www.mathe-wettbewerbe-nrw.de/ (aufgerufen am 15.11.2010)
www.mathe-zirkel.de (aufgerufen am 21.2.2011)
www.mathematik-olympiaden.de/faqs.html (aufgerufen am 15.11.2010)
www.mathematik-olympiaden.de/IMOs/fields.html (aufgerufen am 19.11.2010)
www.mathematik-olympiaden.de/IMOs/imo.html (aufgerufen am 12.10.2010)
www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/_personelles/papers/buechter/diss_ab.pdf (aufgerufen am 28.03.2011)
www.matheraetsel.de (aufgerufen am 21.2.2011)
www.mensa.de/ (aufgerufen am 19.5.2010)
www.mnu.de/extern/lv-rp-lvt2009/Artikel_Herr_Ulm.pdf (aufgerufen am 14.2.2011)

www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1991 Band 19/Baron1991.pdf (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemg.ac.at/IMN/imn199.pdf (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/de/ (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/de/community/participantdetails.php?uid=71 (aufgerufen am 22.11.2010)

www.oemo.at/de/info/compete.php#BWB1 (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/de/info/general.php (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/de/info/history.php (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/de/info/imo.php (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/de/math/competitions.php (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/problems/bwb/b2010-de.pdf (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/problems/gwb/g2009-de.pdf (aufgerufen am 25.11.2010)

www.oemo.at/problems/gwb/g2010-de.pdf (aufgerufen am 12.10.2010)

www.oemo.at/problems/lwa/lwa2009-deutschoffiziell.pdf (aufgerufen am 25.11.2010)

www.oemo.at/wiki/index.php/IMO_2006 (aufgerufen am 16.11.2010)

www.oemo.at/wiki/index.php/Mein_Leben_mit_der_Mathematik (aufgerufen am 22.11.2010)

www.oepu-noe.at/recht/lp/ (aufgerufen am 16.2.2011)

www.popperschule.at (aufgerufen am 21.2.2011)

www.projektwoche.jku.at (aufgerufen am 21.2.2011)

www.schlauseite.de (aufgerufen am 26.5.2010)

www.syvum.com/sat/index.htm (aufgerufen am 28.03.2011)

www.talente-ooe.at/fileadmin/user_upload/verschiedenes/soak_2011/Sommerakademie_St._Florian_2011_5.-8._Schulstufe.pdf (aufgerufen am 21.2.2011)

www.vwv.de (aufgerufen am 21.2.2011)

www.zahlenjagd.at (aufgerufen am 21.2.2011)

www2.kaenguru.at (aufgerufen am 17.11.2010)

http://de.wikipedia.org/wiki/Fields-Medaille (aufgerufen am 19.11.2010)

http://de.wikipedia.org/wiki/Mitteleurop%C3%A4ische_Mathematik-Olympiade (aufgerufen am 16.11.2010)

http://kinderuni.at/ (aufgerufen am 21.2.2011)

http://lehrer.rg18.ac.at/~hennr/m-oly/wasistmo.htm (aufgerufen am 17.11.2010)

http://lehrer.rg18.ac.at/~hennr/m-oly/wmdw.htm (aufgerufen am 17.11.2010)

http://memo2010.skmo.sk/index.php (aufgerufen am 16.11.2010)

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit mathematisch hochbegabten von Kindern und Jugendlichen im Alter der Sekundarstufen I und II. Im ersten Teil erfolgt eine theoretische Auseinandersetzung mit dem allgemeinen Begriff Hochbegabung. Es wird sein geschichtlicher Bedeutungswandel beleuchtet und einige Definitionsansätze der Wissenschaft vorgestellt, weiters wird auf zwei gängige Modelle von Hochbegabung näher eingegangen: das Drei-Ringe-Modell von Renzulli, sowie dessen Weiterentwicklung im Triadischen Interdependenzmodell von Mönks und im Komponentenmodell von Wieczerkowski, und das Münchner Hochbegabungsmodell von Heller. Anschließend werden Möglichkeiten der Identifikation von Hochbegabten beschrieben und ein kurzer Überblick über Fördermöglichkeiten in Form von Akzeleration oder Enrichment gegeben.

Der zweite Teil widmet sich der mathematischen Hochbegabung im Speziellen. Es werden unterschiedliche Ansätze, mathematische Hochbegabung zu definieren, vorgestellt und für einen guter Mathematiker erforderliche Fähigkeiten herausgearbeitet. Es werden Möglichkeiten der Diagnostik diskutiert und als Beispiele für mathematikspezifische Tests der *Scholastic Aptitude Test* (SAT) und der *Hamburger Test für mathematische Begabung* (HTMB) kurz vorgestellt. Schließlich werden diverse Fördermöglichkeiten in und außerhalb der Schule aufgezeigt.

Im dritten Teil dieser Arbeit wird die unverbindliche Übung Mathematikolympiade als eine Möglichkeit, mathematisch hochbegabte Schüler in der Schule außerhalb des Regelunterrichts zu fördern, detailliert beschrieben. Nach einem Einblick in ihre geschichtliche Entwicklung werden die Struktur und die Inhalte der Vorbereitungskurse sowie die Wettbewerbe in Österreich und auf internationaler Ebene näher beleuchtet. Es kommen (ehemalige) Teilnehmer zu Wort, um von ihren Erfahrungen zu berichten, und abschließend werden begabtenfördernde Aspekte der Mathematikolympiade herausgearbeitet.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Claudia Grasl

Geburtsdatum: 14. August 1976

Geburtsort: Mödling

Staatsbürgerschaft: Österreich

Schulbildung und beruflicher Werdegang:

1982-1986	Volksschule Bad Vöslau
1986-1994	Bundesrealgymnasuim Berndorf
1994-1995	Freiwilliges Soziales Jahr
1995-1998	Gesundheits- und Krankenpflegeschule Baden
1998-2007	Tätigkeit als Diplomierte Gesundheits- und Krankenpflegeschwester
seit 2006	Lehramtstudium UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie an der Universität Wien

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht verwendet und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen deutlich als solche kenntlich gemacht habe.

Wien, am____________

Claudia Grasl