universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Dynamische Systeme verstehen

Differenzen- und Differentialgleichungen im Unterricht

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Christina Monika Drexel
Matrikelnummer:	0206846
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Lehramtsstudium UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie
Betreuer:	MMag. Dr. Andreas Ulovec

Wien, im März 2011

Danksagung

Ich möchte mich bei den Menschen bedanken, ohne welche ich diesen Weg nicht hätte gehen können. Ganz voran meinen Eltern, ohne deren Unterstützung dieser Lebensweg nicht möglich gewesen wäre. Vielen Dank für eure Geduld, euer Vertrauen in mich, eure finanzielle Hilfe und dass ihr immer ein offenes Ohr für mich habt. Meinen Geschwistern, mit dem Wissen, dass sie immer für mich da sind. Meinem Freund Niall, der immer die richtigen Worte findet. Zu guter Letzt gilt auch meinem Diplomarbeitsbetreuer MMag. Dr. Ulovec mein herzlichster Dank für seine geduldige und konstruktive Betreuung.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Lehrpersonen sind im Mathematikunterricht häufiger mit der berechtigten Schüler- und Schülerinnenfrage nach dem Sinn des zu Lernenden konfrontiert, als es in anderen Schulfächern der Fall ist. Ein Grund für diesen Sachverhalt ist die scheinbar von der realen Welt losgelöste Existenz der Mathematik. Wird die Schulmathematik als „reine Mathematik" betrieben, so ist sie Gegenstand ihrer selbst und weckt nur selten das Interesse von Heranwachsenden.

Auch Heymann [23] befasste sich mit diesem Problem, und spricht in diesem Zusammenhang von der Notwendigkeit der Weltorientierung im Schulunterricht und im speziellen des Mathematikunterrichts. Unter dem Begriff der Weltorientierung versteht er die *„Erweiterung des Wahrnehmungs- und Urteilshorizonts, über den Alltagshorizont der Schüler* [und Schülerinnen, Anmerkung] *hinaus; Ordnung der Vorstellungen; Aufbau eines differenzierten Weltbildes."* [23]. Er ist sich zwar der Tatsache bewusst, dass einzelne Schulfächer lediglich einen Ausschnitt der Welt wiedergeben und Ergänzungen bedürfen, jedoch können sie insofern zur Weltorientierung der Heranwachsenden beitragen, als dass sie einen Zusammenhang zwischen dem objektiven Weltbezug des jeweiligen Unterrichtsfaches zu der subjektiven Lebenswelt der Schüler und Schülerinnen herstellen.

Die spezielle Tücke des Schulfaches Mathematik ortet Heymann in der Bestimmung des objektive Weltbezuges, welcher sich, abgesehen von der mathematischen Alltagskultur, sehr schwierig gestaltet. Zwar ist die Mathematik *„Teil unserer Welt"* jedoch auch, und darin besteht das Hauptproblem, *„zugleich in ihr verborgen."*[23]. Dies trotz der Tatsache, dass, wie Heymann meint, die Mathematik *„konstitutiv für unsere Welt"* [23] ist.

Letzteres begründet er einerseits dadurch, dass die Mathematik essentiell für das *„rationale, durch die modernen Wissenschaften geprägte Weltbild des abendländischen Kulturkreises"* ist, andererseits auf Grund der Beobachtung, dass Mathematik grundlegend *„für die (im weitesten Sinne) technisch konstruierte Lebenswelt, die sich die Menschen des abendländischen Kulturkreises seit Beginn der industriellen Revolution geschaffen haben"*[23] ist.
Beide Fakten verbindet, dass die Mathematik nicht ohne weiteres erkennbar ist und somit ihr Weltbezug ein indirekter darstellt. Für einen guten Schulunterricht ist es unerlässlich, diese Mathematik zugänglich zu machen.

> *„Wenn die Mathematik, die für unsere Welt konstitutiv ist, weitgehend hinter den Phänomenen verborgen ist, bedarf es eines besonderen Umgangs mit Mathematik im Unterricht, um ihren Weltbezug deutlich werden zu lassen. Daß dabei die Anwendung von Mathematik auf außermathematische Sachverhalte eine wichtige Rolle spielen muß, scheint unbestreitbar."*[23]

Diese Erkenntnis hat mittlerweile auch Einfluss auf die Lehrpläne für Mathematik genommen, was am Lehrplan für die österreichische AHS Oberstufe, welcher seit dem Schuljahr 2007/08 verpflichtend ist, exemplarisch veranschaulicht werden soll.

Zu Beginn dieses Lehrplans werden die Bildungs- und Lehraufgaben des Mathematikunterrichts wie folgt erläutert:

> *„Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen. Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus*

resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts." [45].

Es wird also schon von Anfang an auf die Wichtigkeit der Erkenntnis, welche Rolle die Mathematik in unserer Welt spielt, aufmerksam gemacht und zu einem unerlässlichen Bildungsanliegen erklärt. Dieser Ansatz kommt auch bei den meisten darauf folgenden, von der Lehrperson zu vermittelnden, mathematische Kompetenzen zu tragen:

- *„Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen: Sie äußern sich in der Fähigkeit, mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen. Die Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen erkennen.*
- *Kompetenzen, die sich auf mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, äußern sich im Ausführen der folgenden mathematischen Aktivitäten:*
  - *Darstellend - interpretierendes Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik und zurück zu tun haben; (...)*
  - *Experimentell - heuristisches Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die etwa mit zielgerichtetem Suchen nach Gesetzmäßigkeiten, mit Variation von Parametern oder dem Aufstellen von induktiv gewonnenen Vermutungen zu tun haben; auch das Ausführen von Simulationen, das Untersuchen von Grenz- und Spezialfällen sowie das Übergehen zu Verallgemeinerungen gehören in der experimentellen Phase zu diesen Aktivitäten*
  - *Kritisch - argumentatives Arbeiten umfasst alle Aktivitäten, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben; (...)"* [45]

Auch bei dem Großteil der zu lehrenden Aspekte der Mathematik, welche im Lehrplan verortet sind, wird die Weltorientierung, sowie die außermathematische Anwendung hervorgehoben:

- *„Erkenntnistheoretischer Aspekt: Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen*

- *Pragmatisch- anwendungsorientierter Aspekt: Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder*

- *Autonomer Aspekt: Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen - von festgelegten Prämissen ausgehend - stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess*

- *Kulturell - historischer Aspekt: Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung"* [45]

Mittels der außermathematischen Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts wird nicht nur die Weltorientierung der Mathematik vermittelt, sondern auch ein Beitrag zu den Aufgabenbereichen der Schule geleistet. Herauszustreichen sind dabei folgende Bildungsbereiche:

- *„Mensch und Gesellschaft: Der Unterricht soll aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens (Finanzwirtschaft, Soziologie, Medizin usw.) eine wichtige Rolle spielt*

- *Natur und Technik: Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden*

- *Kreativität und Gestaltung: Mathematik besitzt neben der deduktiven auch eine induktive Seite; vor allem das Experimentieren an neuen Aufgabenstellungen und Problemen macht diese Seite sichtbar, bei der Kreativität und Einfallsreichtum gefördert werden"* [45]

Im Bezug auf die didaktischen Grundsätze legen die Autoren des Lehrplans nahe, dass die Schüler und Schülerinnen durch eigene Aktivitäten eine Einsicht in die Welt der Mathematik bekommen sollen. Hierbei wird Wert darauf gelegt, dass verschiedene Methoden zur Vermittlung des Wissens angewandt werden.

Hinsichtlich der Vermittlung der Weltorientierung der Mathematik, ist vor allem der folgende im Lehrplan angeführte Grundsatz wichtig:

> *„Lernen in anwendungsorientierten Kontexten: Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen der Inhalte innerhalb der Mathematik und durch geeignete fächerübergreifende Unterrichtssequenzen sind anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben-und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen."* [45]

Der Grundsatz der Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht ist gleichbedeutend mit der schon angesprochenen außermathematischen Anwendung der Mathematik. Dieser kann im Schulunterricht auf vielfältige Weise zu Sprache kommen, etwa durch klassische Textaufgaben, Modellierungsaufgaben, Projekte und fächerübergreifenden Unterricht. Modellierungsaufgaben stellen hierbei einen relativ jungen im Unterricht angewandten Aufgabenbereich dar, weshalb auf dessen Charakteristika im Kapitel 2 gesondert eingegangen wird. Natürlich gibt es für die Anwendungsorientierung, je nach dem welchen Realitätsgehalt diese aufweisen soll, mehr oder weniger dankbare im Unterricht zu lehrende Theorie. Ein Bereich, welcher sich vorzüglich für realitätsnahe außermathematische Anwendungen eignet, ist der laut Lehrplan in der 8. Klasse zu unterrichtende Lehrstoff der *„dynamischen Prozesse”*. Dieser setzt sich aus den folgenden Punkten zusammen:

- *„Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen*
- *Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen*
- *Lösen von einfachen Differentialgleichungen, insbesondere y' = k.y”* [45]

Da es den Umfang dieser Arbeit sprengen würde, wurde auf die Ausführung der Theorie von Wirkungs- und Flussdiagrammen verzichtet. Vielmehr liegt das Augenmerk auf den Differenzen- und Differentialgleichungen, da sie alleine schon ein großes Potenzial für Anwendungen bieten und auch für einfache Computersimulationen zugänglich sind. Bei der Besprechung der Theorie der Differenzen- und Differentialgleichungen im Kapitel 3 wurde versucht, ein Mittelweg zwischen dem zu besprechenden Umfang des Kernstoffes und jenem der „reinen Mathematik” zu finden. Einerseits ein Grund hierfür ist die mögliche Vertiefung des Lehrstoffes in diesem Bereich hinsichtlich der für die Lehrpersonen vorhandenen Erweiterungsbereiche bzw. der Möglichkeit Differenzen- und Differentialgleichungen im Rahmen des Wahlpflichtfaches genauer zu besprechen, andererseits wäre eine detaillierte und mathematisch abgeschlossene Darstellung dieses Themenbereiches im Rahmen dieser Arbeit nicht zielführend.
Wie schon erwähnt wurde, bieten Differenzen- und Differentialgleichungen einen Fundus für Anwendungsorientierungen im Mathematikunterricht, basierend auf der Tatsache, dass sie in Natur-, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften zur Beschreibung von Vorgängen angewandt werden. Ein spezieller Bereich der Naturwissenschaften, welcher ohne Differenzen- und Differentialgleichungen nicht auskommen würde, stellt die Biologie dar. Die so genannte „Wissenschaft des Lebens” ist es auch, welche, meiner Meinung nach, ein für Schüler und Schülerinnen interessantes und nachvollziehbares außermathematisches Anwendungsgebiet bietet und die Weltorientierung der Mathematik erfahrbar macht. Auf Grund dieser Überlegungen stammen die Unterrichtsbeispiele in Kapitel 4 aus diesem wissenschaftlichen Bereich.

Kapitel 2

Modellieren im Mathematikunterricht

Setzt man sich mit aktuellen Beiträgen der Mathematikdidaktik auseinander, so ist immer wieder von der Wichtigkeit des Modellierens und der Modellbildung im Mathematikunterricht die Rede. Was genau diese Begriffe bedeuten, was ein Modellierungskreislauf ist und wodurch sich so genannte Modellierungsaufgaben auszeichnen, soll in diesem Abschnitt besprochen werden.

2.1 Das Modell und die Modellierung - Eine Begriffsbestimmung

Das Modell

Der Begriff Modell besitzt verschiedenste Definitionen. Das Fremdwörterbuch des Duden gibt, unter anderen, folgende Erklärungen für diesen Begriff:

> Ein Modell ist *„(...) 1. Muster, Vorbild (...) 7. vereinfachte Darstellung (...) des Ablaufs eines Sachverhalts, die eine Untersuchung od. Erforschung erleichtert od. erst möglich macht."* [5]

Diese sehr offen gehaltene Beschreibung dessen, was ein Modell ist, führt zur Existenz von, je nach Problemstellung, verschiedenen Arten von Modellen (vgl. [24] oder [32] , zitiert nach [20]):

- Modelle, die helfen Vorhersagen zu machen (z.B. Modell zur Ausbreitung einer Krankheit)
- Modelle, welche helfen die Realität zu erklären (z.B. Warum sich die Planeten auf ihren Bahnen bewegen.)
- Modelle, welche helfen die Realität zu beschreiben (z.B. Stadtpläne)
- Modelle, welche vorschreiben (z.B. Betriebsanleitungen für Geräte)

Modelle werden folglich konstruiert, je nach dem, welchen Zweck sie erfüllen sollen.
Somit existieren *„angemessene"* und *„weniger angemessene"* Modelle und es kann *„nicht trennscharf zwischen „richtigen" und „falschen" Modellen unterschieden werden."* [24].
Des Weiteren ist die Art eines Modells ausschlaggebend dafür, ob zu dessen Beschreibung die Mathematik herangezogen werden kann oder nicht. Ein Modell muss folglich nicht zwangsweise ein mathematisches Modell sein. Eine Definition letzteres versucht Greefrath [19] zu geben:

> *„Ein mathematisches Modell ist also eine isolierte Darstellung der Welt, die vereinfacht worden ist, dem ursprünglichen Prototyp entspricht und zur Anwendung von Mathematik geeignet ist."*

Das Modellieren

Als Modellieren bezeichnet man jenen Prozess, welcher die Brücke zwischen Realität und Modell darstellt. Ist das Ziel einer Modellierung ein mathematisches Modell, so bezeichnet die sogenannte mathematische Modellierung einen Teilprozess des Modellierens. Hinsichtlich der Konstruktion eines mathematischen Modells wird die Modellierung oft deshalb benötigt, weil reale Sachverhalte und Problemstellungen sich meist zu komplex gestalten, um mathematisches Werkzeug direkt auf diese anzuwenden.
In der didaktischen Diskussion treten verschiedenste Meinungen hinsichtlich des Begriffs der mathematischen Modellierung auf. *„Sie reichen vom Mathematisieren im engeren Sinne, d.h. vom Aufstellen eines mathematischen Modells als geeignetes Abbild eines Ausschnitts der Welt, bis zum angewandten Problemlösen im umfassendsten Sinne."* [10].
Wird der Begriff des mathematischen Modellierens in das allgemeine Modellieren eingebettet, so ist es möglich, diesen Prozess in verschiedene Phasen zu unterteilen, welche mittels eines so genannten Modellierungskreislaufes anschaulich dargestellt werden können (vgl. [24]).

2.2 Modellierungskreisläufe im Mathematikunterricht

Wie in 2.1 schon erwähnt wurde, ist es möglich, die unterschiedlichen Teilaspekte des Modellierens an Hand eines Modellierungskreislaufes zu visualisieren. Aus der Vielzahl der verschiedenen Modellierungskreisläufe, welche in der Literatur aufscheinen, sollen an dieser Stelle zwei näher betrachtet werden. Vorauszuschicken ist hierbei, dass der Modellierungsprozess und somit auch die Modellierungskreisläufe selbst idealisiert sind und in der Praxis wohl selten strikt nach einem solchen Schema vorgegangen wird. Der Lehrperson, sowie den Schülern und Schülerinnen, bieten diese aber ein hilfreiches Gerüst, an welchem sie sich bei ihrer (Modellierungs-)Arbeit orientieren können.
Der erste hier angeführte Kreislauf nach Blum und Leiß (vgl. [10]) ist sehr detailliert und bietet auf Grund dieser Differenziertheit einen gelungenen Einblick in die wichtigsten Teilaspekte der Modellierung.

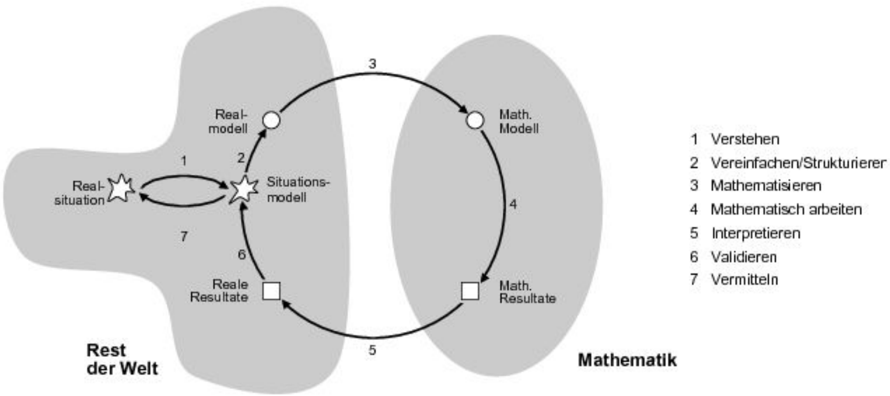


Abbildung 2.2.1: Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß [10]

Die sieben Phasen dieses Modellierungskreislauf, vom Verstehen bis zum Vermitteln, zeichnen sich auch dadurch aus, dass sie die möglichen kognitiven Hürden beim Modellierungsprozess aufzeigen und somit eine Hilfestellung bei der Überwindung dieser darstellen (vgl. [10]). Als mathematisches Modellieren hebt Blum [10] dabei „*die Schritte 2,3,5 und 6 dieses Kreislaufes*" hervor. An Hand eines Beispiels werden die einzelnen Teilaspekte der Modellierung ab Seite 15 näher ausgeführt.
Wie schon erwähnt wurde, wird ein solcher Kreislauf selten starr Schritt für Schritt durchlaufen. Katja Maaß [32] meint hierzu:

> *„In der Regel wird man zum Beispiel schon bei der Bildung des mathematischen Modells überlegen, inwieweit man überhaupt über die nötigen mathematischen Kompetenzen zur Bearbeitung des Modells verfügt. Oder man bemerkt bereits beim Berechnen, dass das Modell nicht geeignet ist und sucht nach neuen Möglichkeiten. Insgesamt ist das Modellieren ein komplexer Prozess, bei dem immer wieder zwischen verschiedenen Schritten gewechselt wird."*

Der zweite in der Abbildung 2.2.2 genauer betrachtete Modellierungskreislauf wurde im Rahmen des „DISUM"-Forschungsprojekt (Didaktische Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik) entwickelt und in Deutschland bei den Schuljahrgängen 8 bis 10 aller Schulstufen verwendet. Dieser stellt quasi das andere Ende auf der Schwierigkeitsskala verschiedener Modellierungskreisläufe dar und benutzt für Schüler und Schülerinnen verständliche Begriffe und Hilfestellungen.

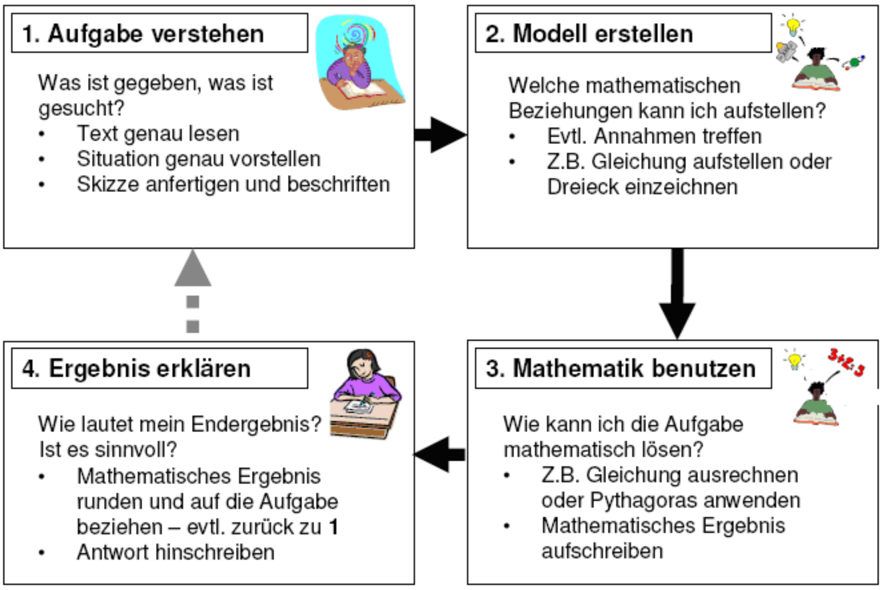


Abbildung 2.2.2: „Lösungsplan" für Modellierungsaufgaben [10]

In diesem „Lösungsplan" wurde der graue Pfeil eingefügt, um den Lernenden darauf hinzuweisen, dass bei einem nicht zufriedenstellenden Ergebnis der Kreislauf ein weiteres Mal bzw. weitere Male durchlaufen werden kann.

2.3 Modellierungsaufgaben

Aufgaben sind ein unerlässlicher Teil des Mathematikunterrichts. Sind sie gut durchdacht, so können sie Schülern und Schülerinnen beim Verständnis und Vertiefen des Gelernten helfen, frühere Stoffinhalte wieder zum Erwachen bringen und Freude an der Mathematik wecken. Dieser Tatsache zum Trotz werden viele Lernende lediglich mit jenen Aufgaben konfrontiert, an welchen gerade gelernte Algorithmen geübt werden sollen und die diesen Umstand mehr oder weniger direkt zum Ausdruck bringen, Stichwort „eingekleidete Aufgaben".
Modellierungsaufgaben gehen hier einen anderen Weg, zumal bei diesen nicht die Mathematik, sondern komplexe und realitätsnahe Problemstellungen im Vordergrund stehen (vgl. [32]). Neben diesem typischen Merkmal von Model-

lierungsaufgaben sind Offenheit, Authentizität, sowie die Lösbarkeit mittels eines Modellierungsprozesses wichtige Charakteristika (vgl. [32]).
Gerade die Tatsache, dass solche Aufgaben realistische Probleme ansprechen, ist unerlässlich für den Unterricht, da Schüler und Schülerinnen dadurch die Augen für die Mathematikhaltigkeit ihrer Umwelt, wie auch ihres Alltages, geöffnet werden können und somit dem allgemeinen Vorurteil, dass man die im Mathematikunterricht gelernten abstrakten Konstrukte sowieso nie wieder benötigen wird, entgegenwirkt.
Natürlich kann man der Forderung, dass mehr Modellierungsaufgaben im Unterricht bearbeitet werden sollen, entgegenhalten, dass der Zeitrahmen welcher Lehrenden und Lernenden zur Verfügung steht auf Grund deren Komplexität gesprengt wird. Hier schafft jedoch die Möglichkeit, Aufgaben zu stellen, welche lediglich einzelne Teilprozesse des Modellierungskreislaufes ansprechen, Abhilfe. Modellierungsaufgaben dieser Art besitzen zudem den Vorteil, dass sich solche auch für Schularbeiten eignen, wenn sie zuvor im Unterricht ausreichend geübt worden sind. Hinrichs [24] meint hierzu: „*Zu Unterscheiden sind im Mathematikunterricht Aufgaben, an denen die Schüler lernen sollen, und Aufgaben, an denen Schüler zeigen sollen, was sie können.*"

Um den Unterschied zwischen einer klassischen Textaufgabe und einer Modellierungsaufgabe hervorzuheben, soll an dieser Stelle je ein Beispiel gegeben werden.

Textaufgabe:
In einem See, in welchem maximal 400 Fische leben können, werden 20 Fische ausgesetzt. Es sei $P(t)$ die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt t (in Jahren). Das Wachstum der Fischpopulation kann durch die Differentialgleichung $P'(t) = 0,0009 \cdot P(t) \cdot [400 - P(t)]$ mit der Anfangsbedingung $P(0) = 20$ beschrieben werden. Stelle eine Formel für $P(t)$ auf und berechne hiermit die Werte für $t = 0, 2, 4, ...30$. Stelle das Wachstum auch graphisch dar.
(vgl. [33])

Bei dieser Aufgabe wird von den Lernenden lediglich das Einsetzen der vorgegebenen Werte in die Formel für das Wachstum bei Beschränkung eingefordert, der Realitätsbezug „Fische im See" nicht weiter thematisiert. An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass solche Aufgabenstellungen für das Üben und Kennenlernen von Anwendungen gelernter Algorithmen nicht unwesentlich sind, jedoch, bei Behandlung von lediglich nach dieser Art gestalteter Beispiele, die Frage nach dem Sinn der Mathematik von Schülern und Schülerinnen nicht unbedingt positiv beantwortet wird.

Modellierungsaufgabe „Fische im Teich":
In einem künstlich errichteten Naturteich, in welchem höchstens 400 Fische leben können, werden 20 Fische ausgesetzt. Nach einem Jahr befinden sich bereits 28 Fische darin, nach dem zweiten sind es schon 39. Wie lange wird es dauern, bis die Grenze der Kapazität erreicht ist? Welche Gründe können dafür verantwortlich sein, dass nicht mehr als 400 Fische in dem Teich leben können?

Die einzelnen Phasen des in Abbildung 2.2.1 dargestellten Modellierungskreislaufes nach Blum und Leiß (z.B. [10]) könnten sich bei dieser Modellierungsaufgabe folgendermaßen gestalten:

1. Verstehen: Dieser erste Schritt dient dazu, dass die Schüler und Schülerinnen eine „*Vorstellung von der Situation der Aufgabe*" [24] bilden, in dem sie die Fragestellung verstehen und die notwendigen Informationen aus dem Text entnehmen. Bei der „Fische im Teich"-Aufgabe wäre dies, die Bedeutung der Grenze der Kapazität zu begreifen und zu verstehen, dass nach dem Wachstum der Fische gefragt ist. Somit ist das Situationsmodell das Wachstum der Fische in besagtem Teich.

2. Vereinfachen/Strukturieren: In dieser Phase wird das Situationsmodell vereinfacht und strukturiert, womit der Weg zum Realmodell geebnet wird. Die Orientierung an der Fragestellung hilft hier, um wichtige Größen und Informationen von weniger wichtigen zu unterscheiden.
Des Weiteren fließen an dieser Stelle auch individuelle Beweggründe ein.

Hinrichs [24] schreibt: *„Bei der Schaffung eines Realmodells berücksichtigen wir jedoch neben diesen speziellen Aspekten* [Unterscheidung von „wichtigen" und „unwichtigen" Größen und Informationen, Anmerkung] *der jeweiligen Modellierung auch subjektive Faktoren:*

- *Welche „Mathematik" kenne ich in diesem Zusammenhang?*
- *Welche Ideen habe ich?*
- *Welche Analogien/Beziehungen sehe ich?*
- *Wie viel Motivation habe ich/Wie viel Zeit möchte ich investieren?*
- *etc.*"

Zudem stellt das Bilden eines Realmodells immer eine Gratwanderung zwischen dem Finden eines möglichst einfachen Modells und dessen Angemessenheit für die Problemstellung dar.
In unserem Beispiel ist es nahe liegend, den Teich und seine möglichen anderen Bewohner außer Acht zu lassen. Würde man dies nicht tun, wäre das Problem zu komplex, um mit den mathematischen Werkzeugen, welche den Lernenden zur Verfügung stehen, gelöst werden zu können. Ein mögliches Realmodell wäre somit das Wachstum von Fischen bei Beschränkung.

3. Mathematisieren: An dieser Stelle wird das erarbeitete Realmodell mathematisiert, das heißt gefundene Annahmen und Objekte mittels Funktionen und Gleichungen ausgedrückt. Das mathematische Modell wird also mittels „*Übersetzung der Modellbeschreibung aus der Sprache des Alltags in die Sprache der Mathematik*" erhalten [32]. Oftmals, gerade wenn dem Realmodell geometrische Figuren zu Grunde liegen, ist es der Fall, dass die Unterscheidung zwischen Realmodell und mathematischem Modell schwer fällt, weswegen die Teilschritte Vereinfachen/Strukturieren und Mathematisieren nicht immer scharf voneinander getrennt werden können (vgl. [32] oder auch [24]).
Wie aufmerksame Leser möglicherweise bereits festgestellt haben, ist eine mögliche Lösung der Modellierungsaufgabe „Fische im Teich" schon im Realmodell enthalten, nämlich das „Wachstum bei Beschränkung" und somit kann die logistische Differentialgleichung $P'(t) = a \cdot P(t) \cdot [K - P(t)]$

angewendet werden.
Sei $P(t)$ die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt t, t in Jahren, und die Konstante $K = 400$. Des Weiteren sind die Werte $P(0) = 20$, $P(1) = 28$ und $P(2) = 39$ bekannt. Die mittlere Änderungsrate der Fischpopulation nach der Zeit wird also durch die logistische Differentialgleichung $P'(t) = a \cdot P(t) \cdot [400 - P(t)]$ beschrieben, wobei a der so genannte Proportionalitätsfaktor ist.

4. Mathematisch arbeiten: Diese Phase dient dem Ermitteln einer mathematischen Lösung des Problems dadurch, dass „*heuristische Strategien und mathematische Algorithmen*" [32] im mathematischen Modell angewandt werden.
   Die Lösung der logistischen Differentialgleichung $P'(t) = a \cdot P(t) \cdot [K - P(t)]$ ist die logistische Wachstumsfunktion $P(t) = \frac{K \cdot P_0}{P_0 + (K - P_0) \cdot e^{-aKt}}$, mit $P(0) = P_0$. Das Einsetzen der entsprechenden Werte liefert: $P(t) = \frac{8000}{20 + 380 \cdot e^{-400 \cdot at}}$. Es fehlt nun noch die Berechnung des Proportionalitätsfaktor a, welcher durch die Verwendung von $P(1) = 28$ ermittelt werden kann.
   Es gilt $28 = \frac{8000}{20 + 380 \cdot e^{-400 \cdot a \cdot 1}}$ und somit $380 \cdot e^{-400 \cdot a} = \frac{8000}{28} - 20$, woraus durch weiteres Umformen und der Anwendung der Logarithmusfunktion folgt, dass $a = -\frac{\ln\left|\frac{\frac{8000}{28} - 20}{380}\right|}{400} = 0,000894374 \approx 0,0009$ ist. Möchte man dieses Ergebnis überprüfen, so kann hierfür der Wert $P(2) = 39$ herangezogen werden. Wird $P(2) = \frac{8000}{20 + 380 \cdot e^{-0,0009 \cdot 400 \cdot 2}} = 39,03089$ ausgerechnet, so gilt in absoluten Zahlen $P(2) = 39$ und es wurde gezeigt, dass $a \approx 0,0009$ stimmt. Folglich wird das Wachstum der Fischpopulation durch $P'(t) = 0,0009 \cdot P(t) \cdot [400 - P(t)]$ beschrieben und die Anzahl der Fische zum Zeitpunkt t ist $P(t) = \frac{8000}{20 + 380 \cdot e^{-0,36t}}$. Um eine möglichst aussagekräftige Wachstumsprognose zu erhalten ist es sinnvoll, mittels graphikfähigem Taschenrechner oder eines geeigneten Programms, wie in Abbildung 2.3.1 dargestellt wird, die genauen Werte auszurechnen und die entsprechende Graphik zu betrachten.

Jahr	Wachstum
0	20
1	28,06
2	39,03
3	53,67
4	72,71
5	96,6
6	125,35
7	158,18
8	193,56
9	229,34
10	263,31
11	293,64
12	319,31
13	340,05
14	356,19
15	368,39
16	377,4
17	383,96
18	388,67
19	392,03
20	394,41
21	396,08
22	397,26
23	398,08
24	398,66
25	399,06
26	399,35
27	399,54
28	399,68
29	399,78
30	399,85

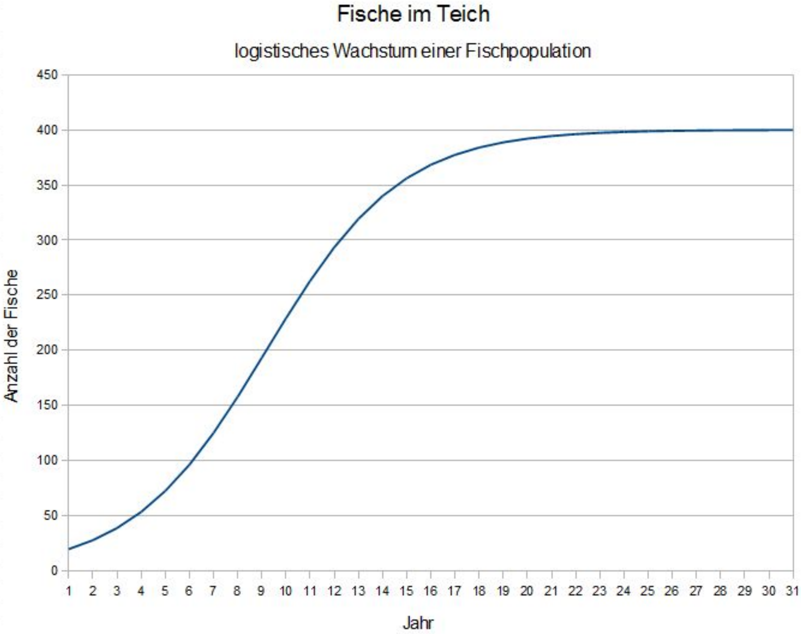


Abbildung 2.3.1: „Fische im Teich"

Will man wissen, ob, mathematisch betrachtet, die Kapazitätsgrenze erreicht wird, so kann dies mit Hilfe des Grenzwertes der Funktion $P(t) = \frac{8000}{20+380 \cdot e^{-0,36t}}$ für $t \to \infty$ eruiert werden. Auf Grund dessen, dass $\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{8000}{20+380 \cdot e^{-0,36t}}$ ist und $\lim_{t \to \infty} e^{-0,36 \cdot t} = 0$ gilt, folgt $\lim_{t \to \infty} P(t) = 400$. Das mathematische Resultat wäre somit, dass sich die Fischpopulation der Kapazitätsgrenze mit fortschreitender Zeit annähert.

5. Interpretieren: Die erhaltene mathematische Lösung muss in dieser Phase, mit Augenmerk auf die Realsituation und Fragestellung, interpretiert werden.

   Für diesen Schritt kann man sich noch einmal die vorhandenen Daten aus Abbildung 2.3.1 zu Gemüt führen. Sinnvolles Runden ergibt dann das reale Resultat, dass nach etwa 27 Jahren 400 Fische den Teich besiedeln.

6. Validieren: Nun gilt es, das erhaltene reale Resultat kritisch zu überprüfen. Hinrichs [24] nennt zwei verschiedene *„Perspektiven der Validierung”*:

    - *„Überprüfen der realen Resultate im Hinblick auf die Realsituation. Dies umschließt auch die Reflexion getroffener Modellannahmen im Hinblick auf das Ziel der Modellierung.*
    - *Vergleichung und Bewerten unterschiedlicher Modellierungen für eine Realsituation.”*

    Ersteres beinhaltet, je nach Komplexität der Modellierung, die Überprüfung der Sinnhaftigkeit von erhaltenen Werten, Maßeinheiten und Gültigkeitsbereichen, sowie der Plausibilität von auftretenden Zusammenhängen. Des Weiteren kann das Nachweisen der mathematischen Abgeschlossenheit und Widerspruchsfreiheit, die Kontrolle von extremen Situationen und Randbedingungen, wie auch die Überprüfung der Stabilität des Modells der ersten „Perspektive der Validierung” zugerechnet werden. Zudem können an dieser Stelle die realen Resultate durch die Hilfe von unabhängig bestimmten und sicheren Tatsachen kontrolliert werden (vgl. [24], zitiert nach [8]).
    Die zweite Perspektive lädt dazu ein, dass im Unterricht die verschiedenen von den Lernenden erarbeiteten Modelle verglichen werden. Somit können, bei unterschiedlichen Resultaten, die getroffenen Annahmen und Idealisierungen hinsichtlich ihrer Zulässigkeit diskutiert und kritisch überprüft werden.
    Bei dem Modellierungsbeispiel „Fische im Teich” wurde bereits überprüft, ob der errechnete Proportionalitätsfaktor stimmt. Auch die Kontrolle der extremen Situation $t \to \infty$ fand bereits in der Phase des Mathematisierens statt. Zudem wurde für das reale Resultat eine sinnvolle Rundung vollzogen.
    Ein anderes Modell für das Wachstum der Fische wird durch die Differentialgleichung des beschränkten exponentiellen Wachstums beschrieben. Für diese gilt, dass die *momentane Änderungsrate der Fischpopulation nach der Zeit t = Zuwachsfaktor $\times$ (Kapazitätsgrenze-Fischbestand zum Zeitpunkt t)* ist. Sei der Zuwachsfaktor $0,1$, dann erhält man durch

Einsetzen dieses, sowie von $K = 400$ die Differentialgleichung $P'(t) = -0,1 \cdot P(t) + 40$ (vgl. [33]). Die Lösung dieser kann mittels der Substitution $f(t) = P(t) - \frac{40}{0,1}$ ermittelt werden. Da $P'(t) = -0,1 \cdot P(t) + 40 = -0,1 \cdot (P(t) - \frac{40}{0,1})$ und $f'(t) = P'(t)$ ist, folgt $f'(t) = -0,1 \cdot f(t)$. Wie eine solche homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung gelöst werden kann, wird auf Seite 64 theoretisch ausgeführt.
Auf Grund dessen, dass $f(t) = c \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ ist, führt die Rücksubstitution zu dem allgemeinen Ergebnis $P(t) = c \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 400$. Wird nun die Anfangsbedingung $P(0) = 20$ in diese Gleichung eingesetzt, führt das Umformen dieser zum Wert $c = -380$, womit die spezielle Lösung $P(t) = -380 \cdot e^{-0,1 \cdot t} + 400$ lautet. Auch hier zeigt die Untersuchung des Grenzwertes, dass gilt $\lim_{t \to \infty} P(t) = 400$.
Anzumerken ist, dass wenn für dieses Modell die Werte $P(1)$ und $P(2)$ als Anfangsbedingungen herangezogen werden, die spezielle Lösung von anderer Gestalt ist. Hier liegt ein Manko dieser Modellierung.
Sieht man von diesem ab und betrachtet die Werte und Graphik der erhaltenen Gleichung in Abbildung 2.3.2, so wird eine weitere Schwäche dieser Modellierung ersichtlich.

Jahr	Wachstum
0	20
1	56,16
2	88,88
3	118,49
4	145,28
5	169,52
6	191,45
7	211,3
8	229,25
9	245,5
10	260,21
11	273,51
12	285,55
13	296,44
14	306,29
15	315,21
16	323,28
17	330,58
18	337,19
19	343,16
20	348,57
21	353,47
22	357,89
23	361,9
24	365,53
25	368,81
26	371,78
27	374,46
28	376,89
29	379,09
30	381,08
31	382,88

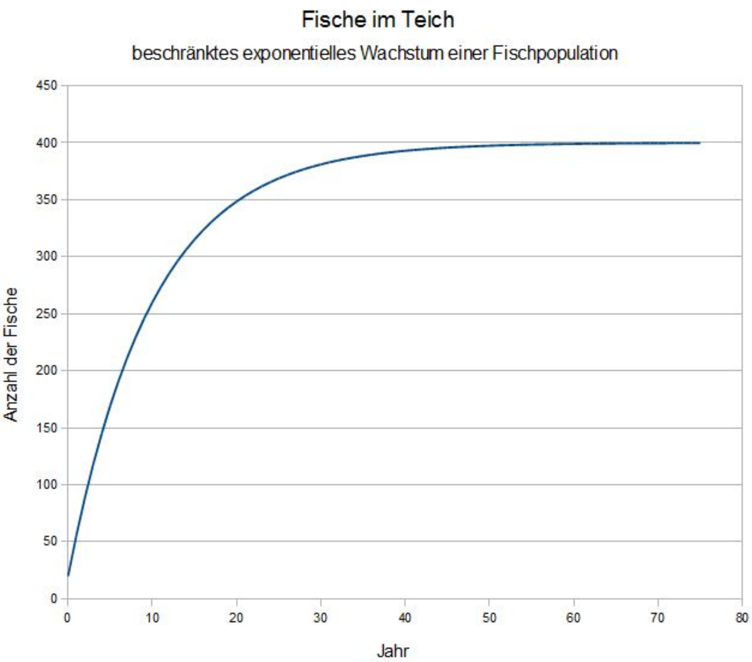


Abbildung 2.3.2: „Fische im Teich” bei beschränktem exponentiellen Wachstum

Werden diese Werte des beschränkten exponentiellen Wachstums mit jenen des beschränkten logistischen Wachstums verglichen, so wird man bei den ersteren mit einem sehr schnellen Wachstum in den ersten 20 Jahren konfrontiert, danach nimmt das Wachstum stetig ab und erst nach dem 67. Jahr kann mit gutem Gewissen auf 400 Fische gerundet werden, eine nicht sehr realistische Vision. Beim beschränkten logistischen Wachstum ist dies schon rund 40 Jahre früher der Fall, obwohl dieses zu Beginn sehr langsam wächst, eine Zeit lang exponentiell verläuft und danach wieder abflacht.

Auch der Vergleich mit der Entwicklung der Weltbevölkerung könnte zur Validierung des Modells des beschränkten logistischen Wachstums der Fische herangezogen werden. Denn, studiert man Statistiken welche sich mit der Vermehrung von Menschen befassen, kommt auch hier ein beschränktes logistisches Wachstum der Erdbevölkerung zum Vorschein. Um der Modellierungsaufgabe „Fische im Teich" Genüge zu tun, soll noch die Frage nach möglichen Gründen für die Existenz einer Kapazitätsgrenze beantwortet werden. Einerseits handelt es sich um einen Teich, welcher nicht unbegrenzt Platz bietet. Je nach Fischspezies wird von einem einzelnen Fisch mehr oder weniger viel Platz als eigenes Revier benötigt. Des Weiteren sind auch die Ressourcen, wie etwa Nahrung oder Sauerstoffgehalt im Wasser begrenzt, andere Bewohner des Teichs benötigen ebenso Platz und Ressourcen, etc..

7. Vermitteln: Wie auch in der Praxis üblich, wenn Modelle in Auftrag gegeben werden, sollen die Schüler und Schülerinnen ihre Ergebnisse präsentieren und erklären. Hinrichs [24] weist hier auf die *„überwiegend didaktische Funktion"* dieses letzten Schrittes hin, denn: *„Es werden also in dieser Phase des Modellierungskreislaufes vornehmlich kommunikative und argumentative Kompetenzen angesprochen* [...]*."*.

2.4 Legitimation - Ist Modellieren wichtig?

Es wurde schon erwähnt, dass der Realitätsgehalt von Modellierungsaufgaben ein wichtiger Aspekt dieser ist. Für Aufgaben welche Realitätsbezüge beinhalten, plädiert Blum [10] folgendermaßen:

- *„Nur mit Realitätsbezügen kann der Mathematikunterricht zum Umweltverstehen, zur Alltagsbewältigung und zur Berufsvorbereitung beitragen („pragmatische" Gründe).*
- *Realitätsbezüge sind ein Vehikel zur Kompetenzenentwicklung und sind insbesondere für die Förderung der Kompetenz Modellieren unentbehrlich („formale" Gründe).*
- *Realitätsbezüge helfen Schülern beim Mathematiklernen, sie dienen zum besseren Verstehen und Behalten von mathematischen Inhalten und können diese motivieren („lernpsychologische" Gründe).*
- *Nur mit Realitätsbezügen lässt sich ein adäquates Mathematikbild bei Schülern aufbauen („kulturbezogene" Gründe).*"

Auch Katja Maaß [32] hebt die Unerlässlichkeit von Realitätsbezügen hervor, welche sie, zusammen mit der Offenheit von Modellierungsaufgaben, für deren selbstdifferenzierende Eigenschaften verantwortlich macht. Sie ist der Meinung, dass auf Grund der Realitätsnähe das Interesse für einen ansonsten sehr abstrakten Inhalt geweckt und somit auch ein affektiver Zugang zur Mathematik eröffnet wird. Des Weiteren führt die offene Aufgabenstellung dazu, dass Schüler und Schülerinnen mit unterschiedlichen Leistungsniveaus ihrem eigenen Können entsprechende Lösungswege entwickeln und somit auch leistungsschwache Lernende zu einem Erfolgserlebnis verholfen wird (vgl. [32]).
Von Maaß stammt auch eine in Deutschland durchgeführte 15 Monate lange Längsschnittstudie, welche sich mit den Auswirkungen von Modellierungsaufgaben auf die Einstellungen von Lernenden zur Mathematik beschäftigte. Konkret wurden folgende zwei Fragen untersucht (vgl. [31]):

1. *„Inwieweit können Modellierungsfähigkeiten bei Lernenden der Sekundarstufe I durch explizites Thematisieren des Modellierungsprozesses auf einer Metaebene gefördert werden?*

2. *Inwieweit wird das Bild von Mathematik und die Einstellung zur Mathematik durch einen so gearteten Unterricht verändert?"*

Zur Beantwortung dieser Fragen teilte sie die Lernenden zweier 7. bzw. 8 Klassen danach ein, ob sich deren Vorstellungen von Mathematik hauptsächlich als nützlichkeitsorientiert, prozessorientiert, nicht-fachspezifisch affektiv, schemaorientiert, formalismusorientiert oder nicht-fachspezifisch kognitiv erwiesen (vgl. [28]). Zudem wurden die Reaktionen der Schüler und Schülerinnen auf die im Unterricht integrierten Modellierungsaufgaben während des gesamten Untersuchungszeitraumes mittels Lerntagebücher, Fragebögen, Interviews, Hausübungen sowie kurzen Tests und Klassenarbeiten festgehalten. *„Charakteristisch für diese Studie war die Wahrung einer möglichst natürlichen Unterrichtssituation über einen relativ langen Zeitraum und die Thematisierung des Modellierungsprozesses auf einer Metaebene."*, so Maaß [28].
Die Ergebnisse der Studie fasst Maaß [28] wie folgt zusammen: *„Lernende, deren Vorstellungen sich i. W. als nützlichkeitsorientiert, prozessorientiert oder nicht-fachspezifisch affektiv rekonstruieren ließen, nahmen die Aufgaben weitgehend positiv auf und bildeten bis zum Ende der Studie i. d. R. nützlichkeitsorientierte Vorstellungen aus bzw. verstärkten bereits vorhandene Vorstellungen.* ". Die Tatsache, dass sich eine solche Auswirkung auf die Vorstellungen schon nach nur 15 Monaten zeigte, ist für Maaß [28] ein Hinweis, wie effektiv eine solche Veränderung des Unterrichts mittels Modellierungsaufgaben sein kann. Jedoch konnten lediglich die Hälfte der Untersuchungsteilnehmer und - teilnehmerinnen diesen drei „Vorstellungsgruppen" zugeordnet werden und „[...]*die andere Hälfte der Jugendlichen, deren Weltbild als schema-, formalismusorientiert oder nicht-fachspezifisch kognitiv beschrieben werden konnte, [lehnte] die Modellierungsprobleme vehement und zum Teil sehr emotional ab.*" [28]. Trotz dem, dass bei dieser Gruppe keine deutliche Veränderung der Vorstellungen nachgewiesen werden konnte, zeigt Maaß (vgl. [28]) sich davon überzeugt, dass eine langfristige Veränderung von Vorstellungen über Mathematik herbeigeführt werden kann.

Kapitel 3

Die Differenzen- und Differentialgleichung

3.1 Einführung

Differenzen- und Differentialgleichungen stellen ein unerlässliches Hilfsmittel bei der mathematischen Beschreibung von Wechselwirkungen bzw. dynamischen Systemen und Prozessen für Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen aus den verschiedensten Gebieten, wie etwa Natur-, Sozial- und Wirtschaftswissenschaften, dar.
Dynamische Systeme können dabei als „[...] *Systeme, die in Abhängigkeit von der Zeit eine Veränderung erfahren, sodass jede Komponente* [eines Systems, Anmerkung] *über bestimmte Veränderungsraten auf sich selbst oder andere Komponenten einwirken kann.*" [39] verstanden werden. Hierbei lassen sich des weiteren diskrete dynamische Systeme von kontinuierlichen dynamischen Systemen unterscheiden. Bei ersteren handelt es sich um Prozesse, deren Änderungen in äquivalenten Zeitabschnitten $\triangle\, t$ gemessen werden können, wie etwa so genannte „nicht überlappende Generationen" von Populationen. Zur Modellierung solcher diskreter dynamischer Systeme werden Differenzengleichungen verwendet, wodurch die mittlere Änderungsrate zwischen diesen Zeitabschnitten ermittelt werden kann. Differentialgleichungen werden hingegen zur mathematischen Beschreibung von kontinuierlichen dynamischen Systemen herangezogen, also jenen Systemen, deren Änderungen in einem zeitlichen Kontinuum betrachtet werden können, wodurch die momentane Änderungsrate erhalten wird (vgl. [17]).

Was kann man sich nun aber unter den Begriffen der Differenzen- und Differentialgleichung vorstellen?
Betrachten wir hierfür einen zeitabhängigen Prozess $f(t)$, etwa die weltweite Bevölkerungsentwicklung oder auch das Gedeihen einer Bakterienkultur auf einem Nährboden, und dessen Änderung in einem hinreichend kleinen Zeitraum $\triangle\ t$. Angenommen die mittlere Änderungsrate dieses Prozesses im Zeitintervall $[t,\ t+\triangle\ t]$ (auf Grund der oben angeführten Beispiele wäre hier das Wachstum oder auch die Abnahme der Bevölkerung bzw. der Bakterienkultur zu nennen) ist direkt proportional zum Prozess $f(t)$ mit dem Proportionalitätsfaktor k, dann erhält man die so genannte **Differenzengleichung**:

$$\frac{f(t+\triangle\ t)-f(t)}{\triangle\ t}=k\cdot f(t) \tag{3.1.1}$$

Ist diese Funktion f auf $\mathbb{R}_0^+$ definiert und differenzierbar, so ist sie auch stetig und durch den Grenzübergang $\triangle\ t\rightarrow 0$ gelangt man zur momentanen Änderungsrate und somit zu der so genannten **Differentialgleichung**:

$$f'(t)=k\cdot f(t) \tag{3.1.2}$$

Natürlich ließe sich an dieser Stelle einwenden, dass diese Art der Berechnung der Entwicklung einer Population, sei dies nun die menschliche oder bakterielle, viel zu kurz gegriffen ist und etliche Faktoren, wie etwa Naturkatastrophen, Seuchen, etc. außer Acht lässt. Des Weiteren wächst natürlich keine Population stetig, wie bei 3.1.2 der Einfachheit halber angenommen worden ist, sondern sprunghaft, weil der Wertebereich in $\mathbb{N}=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$, nicht in $\mathbb{R}_0^+$ liegt.
Daher ist es unerlässlich hervorzuheben, dass Differenzen- und auch Differentialgleichungen meist auf idealisierten Annahmen beruhen. Bei der Differenzengleichung in unserem Fall wäre das, dass sich die mittlere Änderungsrate des zeitabhängigen Prozesses genau ermitteln lässt. Für die Differentialgleichung liegt eine solche idealisierte Annahme darin, dass dieser Prozess als eine differenzierbare Funktion $f(t)$ dargestellt werden kann. Zudem handelt es sich bei solchen Differentialgleichungen, wie auch bei Differenzengleichungen, nicht um exakte Abbildungen der Realität, sondern um mathematische Modelle, deren Erfolge sich an der Genauigkeit ihrer Vorhersagungen messen (vgl. [22]).

3.2 Die Differenzengleichung

Begriffsbestimmung

Definition 1. Die Abbildung einer Menge natürlicher Zahlen $D \subsetneqq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, auf eine Zahlenmenge $M \subsetneqq \mathbb{R}$ wird *Folge* oder auch *Zahlenfolge* genannt. Als Schreibweise findet man meist $(x_n)_{n\epsilon D}$, $\langle x_n \rangle_{n\epsilon D}$, (x_n) oder einfach Folge x_n vor. Die einzelnen x_n werden als *Folgenglieder* und die Zahlen $n\epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$ als *Indizes* bezeichnet.

Folgen können *explizit* durch eine Funktion $f : D \to M$ mit $f(n) = x_n$ oder *rekursiv* mittels einer Funktion $f : D \to M$ mit $f(x_{n-k}, ..., x_n) = x_{n+1}$ definiert werden, wobei $D \subsetneqq \mathbb{N}$ und $M \subsetneqq \mathbb{R}$ gilt. Bei der expliziten Darstellung ist dementsprechend eine direkte Berechnungsvorschrift vorhanden, wie etwa für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(n) = 3n - 1 = x_n$, welche die Folge $(-1; 2; 5; ...)$ beschreibt. Die rekursive Darstellung zeichnet sich hingegen dadurch aus, dass ein Folgeglied aus einem oder mehreren vorangegangenen Folgegliedern berechnet wird. Hierzu ist die Kenntnis eines Anfangsgliedes x_0 nötig. Ein Beispiel für eine rekursive Definition wäre etwa die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x_n) = x_n + 3 = x_{n+1}$ und $x_0 = 7$, wodurch die arithmetische Folge (7; 10; 13; ...) bestimmt ist. An dieser Stelle sei festgehalten, dass sowohl die durch $a_{n+1} = a_n + d$, $d \neq 0$ die konstante Differenz und $n\epsilon\mathbb{N}$,definierte arithmetische Folge (a_n), sowie die geometrische Zahlenfolge (b_n), welche mittels der Formel $b_{n+1} = b_n \cdot q$, mit $q \neq 0$ ein fester Faktor, $b_0 \neq 0$ und $n\epsilon\mathbb{N}$,erhalten wird, rekursiv definierte Folgen sind.
Wird ein Folgeglied aus seinem Vorgänger gewonnen, das heißt rekursiv definiert, so wird die Funktion f auch oftmals als *Iterator* und die Gleichung $f(x_n) = x_{n+1}$, $n\epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, als *Iterationsvorschrift* bezeichnet, da $f(x_0) = x_1$, $f(f(x_0)) = f(x_1) = x_2$, ... gilt (vgl. [17]).
Angenommen eine solche Iterationsvorschrift $f(x_n) = x_{n+1}$, $n\epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, ist gegeben, so führt die Subtraktion von x_n auf beiden Seiten zu der Gleichung $x_{n+1} - x_n = \tilde{f}(x_n)$, mit $\tilde{f}(x_n) = f(x_n) - x_n$. Dies bedeutet, dass „[...] *zur Bestimmung des jeweils nächsten Folgenglieds die Differenz $x_{n+1} - x_n$ zum nächsten Folgenglied und nicht direkt das nächste Folgenglied x_{n+1} in Abhängigkeit vom aktuellen Folgenglied angegeben* [...]" [17] wird.
Wird ein Folgeglied x_{n+1} hingegen in Abhängigkeit von mehreren vorange-

gangenen Folgegliedern x_{n-k}, ..., x_n bestimmt, so wird sie mittels der sogenannten Rekursionsformel $f(x_{n-k}, ..., x_n) = x_{n+1}$ dargestellt. Auch bei dieser bietet sich oftmals die Möglichkeit, mittels Umformung zu der Gleichung $x_{n+1} - x_n = f(x_{n-k}, ..., x_n) - x_n = \widetilde{f}(x_{n-k}, ..., x_n)$ zu gelangen.

Definition 2. Eine Gleichung der Form $x_{n+1}-x_n = \widetilde{f}(x_n)$ mit $\tilde{f}(x_n) = f(x_n)-x_n$ bzw. $x_{n+1}-x_n = \widetilde{f}(x_{n-k}, ..., x_n)$ mit $\widetilde{f}(x_{n-k}, ..., x_n) = f(x_{n-k}, ..., x_n)-x_n$, wobei jeweils $f : D \to M$, $n\epsilon D \subseteqq \mathbb{N}$, $M \subseteqq \mathbb{R}$ und somit $\tilde{f} : D \to M$ gilt, wird *Differenzengleichung* genannt.

Somit können sämtliche Iterations- und fast alle Rekursionsvorschriften in Differenzengleichungen transformiert werden und vice versa (vgl.[17]).

Definition 3. Eine Differenzengleichung besitzt die *Ordnung* k, wenn sie eine Beziehung zwischen den Werten einer Folge $(x_n)_{n=0,1,2,...}$an je $k+1$ aufeinander folgenden Stellen x_n, ..., x_{n+k} herstellt.

Beispiel. Die Gleichung $a_{n+1} - a_n = d$, $d \neq 0$ und $n\epsilon D \subseteqq \mathbb{N}_0$, welche die konstante Differenzenfolge $(d_n) = d, d, d, ...$ bestimmt, sowie die Gleichung $b_{n+1} - b_n \cdot q = 0$, $q \neq 0$ und $n\epsilon D \subseteqq \mathbb{N}$, wodurch die geometrische Folge (b_n) erhalten wird, sind somit Differenzengleichungen 1. Ordnung.

Definition 4. Ist eine Differenzengleichung der Form

$$h_k(n) \cdot x_{n+k} + h_{k-1}(n) \cdot x_{n+k-1} + ... + h_1(n) \cdot x_{n+1} + h_0(n) \cdot x_n = g(n)$$

gegeben, mit $h_k, ..., h_0$ und g Funktionen der unabhängigen Variable $n\epsilon D \subseteqq \mathbb{N}$ und nicht von x_n, so wird sie *linear über der Menge D* oder kurz *linear* genannt. Ist dies nicht der Fall, so bezeichnet man sie als *nicht-linear über der Menge D* bzw. einfach als *nicht-linear*. Die Funktion g wird auch als *Störfunktion* bezeichnet.

Beispiel. Eine Gleichung $x_{n+1} - x_n = 0$ mit $n\epsilon D \subseteqq \mathbb{N}$ stellt somit ein Beispiel für eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung dar. $x_{n+2} - 4 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot x_n = 0$,

$n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, ist eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung. Dass es sich bei diesen beiden Beispielen um sogenannte homogene lineare Differenzengleichungen handelt, wird aus Definition 5 ersichtlich. Eine der bekanntesten nichtlinearen Differenzengleichungen 1. Ordnung ist die Heron'sche Wurzelformel $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$, mit $a \epsilon \mathbb{R}$ fest und $n \epsilon \mathbb{N}_0$.

Definition 5. Ist $g(n)$ die Nullfunktion für alle $n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, dann wird

$$h_k(n) \cdot x_{n+k} + h_{k-1}(n) \cdot x_{n+k-1} + ... + h_1(n) \cdot x_{n+1} + h_0(n) \cdot x_n = 0$$

als *homogene lineare Differenzengleichung* bezeichnet.

Definition 6. Sei $g(n) \neq 0$ für mindestens ein $n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, so heißt

$$h_k(n) \cdot x_{n+k} + h_{k-1}(n) \cdot x_{n+k-1} + ... + h_1(n) \cdot x_{n+1} + h_0(n) \cdot x_n = g(n)$$

inhomogene lineare Differenzengleichung.

Beispiel. Eine inhomogene lineare Differenzengleichung 2.Ordnung wäre etwa $x_{n+2} - 5 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot x_n = 5^k + 2$, $n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$.

Definition 7. Sind h_k, ..., h_0 konstante Funktionen, also $h_k(n) = a_k$, ..., $h_1(n) = a_1$ und $h_0(n) = a_0$ für alle $n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, so wird

$$a_k \cdot x_{n+k} + a_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + ... + a_1 \cdot x_{n+1} + a_0 \cdot x_n = g(n)$$

lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten genannt.

Auch bei dieser Art einer Differenzengleichung kann zwischen homogenen linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten und inhomogenen solchen unterschieden werden, je nach dem ob die Störfunktion $g(n)$, $n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, überall die Nullfunktion ist oder nicht.

Beispiel. Somit stellen $x_{n+1} - x_n = 0$ und $x_{n+2} - 4 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot x_n = 0$ homogene lineare Differenzengleichung 1. bzw. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar, wobei jeweils $n\epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$ gilt. Die Gleichung $x_{n+2} - 5 \cdot x_{n+1} + 4 \cdot x_n = 5^k + 2$, $n\epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, ist hingegen eine inhomogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Definition 8. Wird eine explizite Darstellung des n-ten Folgegliedes x_n ermittelt, so wird diese Darstellung *allgemeine Lösung der Differenzengleichung* genannt.

Somit stellt die allgemeine Lösung einer Differenzengleichung eine Folge (x_n) dar, wobei die einzelnen Folgeglieder rationale, reelle, wie auch komplexe Zahlen seien können. Dabei muss beachtet werden, dass eine spezielle Lösung erst durch die Angabe von Anfangswerten eindeutig bestimmt werden kann. Dies bedeutet, dass für eine Differenzengleichung k-ter Ordnung k Anfangswerte x_0, ..., x_{k-1} gegeben seien müssen.
Auf Grund dieser Abhängigkeit von den gegebenen Anfangswerten gibt es jedoch unendlich viele Lösungsfolgen. *„Es kann natürlich aber auch eine konstante Lösungsfolge geben. Dies spielt eine besondere Rolle, da sie die so genannte Gleichgewichtslösung ist. Der konstante Wert dieser Lösungsfolge wird als Fixpunkt* [...]*bezeichnet."*, so Siller [39].

Definition 9. Sei eine Folge $f(x_n) = x_{n+1}$ gegeben. Dann heißt der Wert x_n *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtspunkt*, wenn für diesen gilt, dass $x_{n+1} = x_n$ bzw. $f(x_n) = x_n$ ist. Oftmals wird ein solcher Fixpunkt kurz als $\overline{x}$ oder $x^\star$dargestellt.

Ein Fixpunkt ist folglich nichts anderes, als der Grenzwert einer Lösungsfolge, falls dieser existiert.
Wie schon erwähnt wurde, werden Differenzengleichungen zur Beschreibung von diskreten dynamischen Prozessen herangezogen. Möchte man nun das Langzeitverhalten eines solchen Prozesses untersuchen, so bietet es sich an, den Grenzwert $\overline{x}$, das heißt den Fixpunkt, zu berechnen, sowie dessen Verhalten zu analysieren und graphisch, mittels Spinnwebs- Zeit- oder Phasendiagramm, darzustellen. Unter dem Verhalten eines Fixpunktes wird dabei verstanden, ob dieser anziehend oder abstoßend ist.

Definition 10. Ein Fixpunkt $\overline{x}$ wird *anziehend* genannt, wenn er eine ε- Umgebung $U_\varepsilon(\overline{x})$, $\varepsilon > 0$, sodass jede in dieser Umgebung beginnende Lösungsfolge gegen $\overline{x}$ konvergiert. *Abstoßend* heißt ein Fixpunkt $\overline{x}$ dann, wenn jede in $U_\varepsilon(\overline{x})$ beginnende Lösungsfolge diese wieder verlässt, ausgenommen von $\overline{x}$ selbst.

Lineare Differenzengleichungen

Existenz- und Eindeutigkeitssatz linearer Differenzengleichungen

Die lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung

$$h_k(n) \cdot x_{n+k} + h_{k-1}(n) \cdot x_{n+k-1} + ... + h_1(n) \cdot x_{n+1} + h_0(n) \cdot x_n = g(n) \quad (3.2.1)$$

über einer Menge $D \subseteqq \mathbb{N}$ von aufeinanderfolgenden Werten von $n \epsilon D$ besitzt genau eine und nur eine Lösung x, deren Funktionswerte für k aufeinanderfolgende n-Werte willkürlich vorgegeben sind.

Beweis. Seien k x-Werte x_a, x_{a+1}, ..., x_{a+k-1}, $a\epsilon D$, vorgegeben. Der Wert x_{a+k} kann dann eindeutig bestimmt werden, wenn in 3.2.1 $n = a$ gesetzt wird. Somit erhält man die lineare Differenzengleichung

$$h_k(a) \cdot x_{a+k} + h_{k-1}(a) \cdot x_{a+k-1} + ... + h_1(a) \cdot x_{a+1} + h_0(a) \cdot x_a = g(a)$$

Auf Grund dessen, dass für den Fall $h_k(a) = 0$ das Glied $h_k(a) \cdot x_{a+k}$ weggelassen werden könnte, folgt, dass $h_k \neq 0$ ist und somit gilt:

$$x_{a+k} = \frac{1}{h_k(a)} \cdot (g(a) - h_{k-1}(a) \cdot x_{a+k-1} - ... - h_1(a) \cdot x_{a+1} - h_0(a) \cdot x_a)$$

x_{a+k} ist daher eindeutig bestimmt, da alle Größen der rechten Seite bekannt sind. Analog ist es möglich zu zeigen, dass auch die nachfolgenden Werte x_{a+k+1}, $x_{a+k+2,...}$ eindeutig bestimmt sind.
Nun muss nur noch bewiesen werden, dass der Wert x_n für alle $n\epsilon D$ eindeutig bestimmt ist. Dies erfolgt mittels Induktion.
Induktionsannahme: Für ein beliebiges $j > k$ mit $(a + j)\epsilon D$ gilt, dass alle x_{a+k}, ..., x_{a+j} eindeutig bestimmt sind.
Induktionsbehauptung: Ist dies der Fall, so ist auch die nachfolgende Größe

x_{a+j+1} eindeutig bestimmt.

Induktionsbeweis: Wird $n = a + j + 1 - k$ in 3.2.1 gesetzt, so erhält man:

$$h_k(a+j+1-k)\cdot x_{a+j+1}+h_{k-1}(a+j+1-k)\cdot x_{a+j}+...+h_1(a+j+1-k)\cdot x_{a+j-k+2}+h_0(a+j+1-k)\cdot x_{a+j+1-k} = g(a+j+1-k)$$

Da auch hier gilt, dass $h_k(a + j + 1 - k) \neq 0$ ist, ergibt sich mittels Dividieren dieser Funktion auf beiden Seiten und durch Umformung der Gleichung:

$$x_{a+j+1} = \frac{1}{h_k(a+j+1-k)}\cdot(g(a+j+1-k) - h_{k-1}(a+j+1-k)\cdot x_{a+j} - ... - h_0(a+j+1-k)\cdot x_{a+j+1-k})$$

Somit ist gezeigt, dass die Größe x_{a+j+1} eindeutig bestimmt ist, da sämtliche Größen der rechten Seite laut Induktionsannahme bekannt sind.
Weil auch $h_0(n) \neq 0$ für alle $n \epsilon D$ gilt, kann analog zum gerade gezeigten Induktionsbeweis bewiesen werden, dass auch die Größen x_m , mit $m \epsilon D$ und $m < a$, eindeutig bestimmt sind.

□

(vgl. [38])

Eigenschaften der Lösungen linearer Differenzengleichungen

Angenommen die inhomogene lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung

$$h_k(n)\cdot x_{n+k} + h_{k-1}(n)\cdot x_{n+k-1} + ... + h_1(n)\cdot x_{n+1} + h_0(n)\cdot x_n = g(n) \quad (3.2.2)$$

und die dazugehörige homogene lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung

$$h_k(n)\cdot x_{n+k} + h_{k-1}(n)\cdot x_{n+k-1} + ... + h_1(n)\cdot x_{n+1} + h_0(n)\cdot x_n = 0 \quad (3.2.3)$$

mit jeweils $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ und $g(n) \neq 0$ für mindestens ein $n \epsilon D$ seien gegeben.

Die Lösungen von linearen Differenzengleichungen besitzen einige gemeinsame grundlegende Eigenschaften, welche durch die folgenden drei Sätze aufgezeigt werden sollen:

Satz 1: Angenommen die homogene lineare Differenzengleichung 3.2.3 besitzt die beiden Lösungen x_n^1 und x_n^2, so ist die Summe dieser beiden Lösungen $x_n = x_n^1 + x_n^2$ wieder eine Lösung dieser.

Satz 2: Angenommen die homogene lineare Differenzengleichung 3.2.3 besitzt eine Lösung x_n^1, dann ist jedes Produkt dieser mit einer beliebigen Konstante $K\epsilon\mathbb{R}$, also $x_n = K \cdot x_n^1$, auch eine Lösung dieser Differenzengleichung.

Satz 3: Angenommen es sei eine beliebige spezielle Lösung $\widetilde{x}_n$ der inhomogenen linearen Differenzengleichung 3.2.2 gegeben und $x_n \equiv C_1 {\cdot} x_n^1 {+} C_2 {\cdot} x_n^2 {+} ... {+} C_k {\cdot} x_n^k$, kurz als $x_n(C_1, ..., C_k)$ geschrieben mit $C_1, ..., C_k$ k beliebig wählbare Konstanten, sei die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differenzengleichung 3.2.3, dann ist die Summe $x_n = \widetilde{x}_n + x_n(C_1, ..., C_k)$ die allgemeine Lösung von 3.2.2.

Typen linearer Differenzengleichungen 1.Ordnung

Sei $n\epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, h_1, h_0 und g Funktionen der unabhängigen Variable $n\epsilon D$, sowie $h_1(n) \neq 0$ und $h_0(n) \neq 0$ für alle $n\epsilon D$. Dann wird durch

$$h_1(n) \cdot x_{n+1} + h_0(n) \cdot x_n = g(n)$$

eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung definiert.
Abhängig davon, ob $g(n)$ die Nullfunktion ist oder nicht, und wie sich die Quotienten $\frac{h_0(n)}{h_1(n)}$ und $\frac{g(n)}{h_1(n)}$ gestalten, erhält man unterschiedliche Arten der umgeformten linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung $x_{n+1} + \frac{h_0(n)}{h_1(n)} \cdot x_n = \frac{g(n)}{h_1(n)}$. Gehen wir zunächst davon aus, dass $g(n)$ die Nullfunktion ist, also $g(n) = 0\, \forall n\epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, eine Tatsache, welche in weiterer Folge bedeutet, dass auch $\frac{g(n)}{h_1(n)} = 0\, \forall n\epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ gilt. Somit ist alleine die Gestalt des Quotienten $\frac{h_0(n)}{h_1(n)}$ dafür ausschlaggebend, welche Art einer homogenen linearen Differenzengleichung 1. Ordnung vorhanden ist.

Sei $\frac{h_0(n)}{h_1(n)} = -a\ \forall n\epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, $a \neq 1$ eine Konstante und somit $x_{n+1} - a \cdot x_n = 0$.

Definition 11. Eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung der Gestalt $x_{n+1} - a \cdot x_n = 0$ mit $a \neq 1$ fest und $n\epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ heißt *lineare homogene Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten.*

Sei $x_{n+1} - a \cdot x_n = 0$, $a \neq 1$ fest und $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, gegeben. Ist die Lösung dieser Art einer Differenzengleichung gesucht, so muss die explizite Darstellung des n-ten Folgegliedes ermittelt werden. Sei der Anfangswert x_0 bekannt, so kann die Lösungsfolge (x_n) schrittweise ermittelt werden. Da $x_{n+1} = a \cdot x_n$ gilt, welche eine Rekursionsformel für eine geometrische Folge darstellt, folgt:

$$\begin{aligned}
x_0 & \\
x_1 &= a \cdot x_0 \\
x_2 &= a \cdot x_1 = a^2 \cdot x_0 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= a \cdot x_{n-2} = a^{n-1} \cdot x_0 \\
x_n &= a \cdot x_{n-1} = a^n \cdot x_0
\end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösungsfolge (x_n) durch $x_n = a^n \cdot x_0$ definiert, wobei jeder gegebene Anfangswert x_0 zu einer eigenen, speziellen, Lösungsfolge führt.

Ist hingegen $\frac{h_0(n)}{h_1(n)} = -a_n$, das bedeutet der Quotient bildet ebenfalls eine von $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ abhängige Folge (a_n), dann gilt: $x_{n+1} - a_n \cdot x_n = 0$.

Definition 12. Eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung der Gestalt $x_{n+1} - a_n \cdot x_n = 0$ mit $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ heißt *lineare homogene Differenzengleichung 1. Ordnung.*

Auch für diese Differenzengleichung $x_{n+1} - a_n \cdot x_n = 0$ bietet es sich an, die Lösungsfolge schrittweise, unter der Kenntnis des Anfangswertes x_0, zu berechnen. Mittels der expliziten Darstellung $x_{n+1} = a_n \cdot x_n$ gestaltet sich die Ermittlung der Lösung wie folgt:

$$\begin{aligned}
x_0 & \\
x_1 &= a_0 \cdot x_0 \\
x_2 &= a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot a_0 \cdot x_0 \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= a_{n-2} \cdot x_{n-2} = a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot x_0 \\
x_n &= a_{n-1} \cdot x_{n-1} = a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0 \cdot x_0
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösungsfolge (x_n) wird daher durch die explizite Darstellung $x_n = x_0 \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j$ erhalten. Durch das Einsetzen des jeweils gegebenen Anfangswertes x_0 kann somit eine spezielle Lösungsfolge ermittelt werden.

Sei nun $g(n) \neq 0$ für zumindest ein $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, das heißt $g(n)$ stellt keine Nullfunktion dar, dann folgt klarerweise, dass auch der Quotient $\frac{g(n)}{h_1(n)} \neq 0$ für mindestens ein $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ ist.
Für den Fall, dass sowohl $\frac{h_0(n)}{h_1(n)} = -a$, wie auch $\frac{g(n)}{h_1(n)} = b$, jeweils feste Konstanten für alle $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ darstellen, ergibt sich die Differenzengleichung $x_{n+1} - a \cdot x_n = b$.

Definition 13. Eine Differenzengleichung $x_{n+1} - a \cdot x_n = b$ mit $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ wird *lineare inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten und konstanter Inhomogenität* genannt.

Sei $a \neq 1$. Für $x_{n+1} - a \cdot x_n = b$ gestaltet sich das Auffinden der expliziten Darstellung von x_n etwas komplizierter, als es bei den vorangegangenen linearen homogenen Differenzengleichungen der Fall gewesen ist. Zu aller erst benötigt man den so genannten Fixpunkt $\overline{x}$ der Gleichung $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$. Wie aus der Definition des Fixpunktes entnommen werden kann, muss für diesen gelten, dass $x_{n+1} = x_n$ ist. Ist dies der Fall, so gilt $x_{n+1} = x_n = a \cdot x_n + b$ und somit $x_n = a \cdot x_n + b$. Wird nun auf beiden Seiten die Größe x_n subtrahiert, so gelangt man zu der Gleichung $0 = (a-1) \cdot x_n + b$. Auf Grund dessen, dass $(a-1) = -(1-a)$ ist, erhält man den Fixpunkt $\overline{x} = \frac{b}{(1-a)}$. Die Differenzen zu diesem Fixpunkt liefert:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \overline{x} &= a \cdot x_n + b - \overline{x} \\
x_{n+1} - \frac{b}{(1-a)} &= a \cdot x_n + b - \frac{b}{(1-a)} \\
x_{n+1} - \frac{b}{(1-a)} &= a \cdot x_n - \frac{a \cdot b}{(1-a)} \\
x_{n+1} - \frac{b}{(1-a)} &= a \cdot \left(x_n - \frac{b}{(1-a)}\right)
\end{aligned}$$

Die Substitution $y_n = x_n - \frac{b}{(1-a)}$, womit auch $y_{n+1} = x_{n+1} - \frac{b}{(1-a)}$ gilt, führt daher zu der Gleichung $y_{n+1} = a \cdot y_n$. Die allgemeine Lösung einer solchen Rekursionsformel, welche schon auf der Seite 33 ermittelt wurde, lautet unter der Voraussetzung, dass y_0 bekannt ist, $y_n = a^n \cdot y_0$.
Die Rücksubstitution führt deshalb zu der Gleichung $x_n - \frac{b}{(1-a)} = a^n \cdot \left(x_0 - \frac{b}{(1-a)}\right)$ mit $y_0 = x_0 - \frac{b}{(1-a)}$, wobei der Anfangswert x_0 bekannt sei. Somit wird, durch Umformung der Gleichung, die explizite Darstellung des n-ten Folgegliedes x_n erhalten, welche $x_n = a^n \cdot \left(x_0 - \frac{b}{(1-a)}\right) + \frac{b}{(1-a)}$ lautet.

Für den Fall $a = 1$ ist die lineare inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten und konstanter Inhomogenität von der Gestalt $x_{n+1} - x_n = b$. Umformung führt folglich zu der Gleichung $x_{n+1} = x_n + b$, welche die Rekursionsformel der arithmetischen Folge ist. Ist der Anfangswert x_0 bekannt, besteht die Möglichkeit die Lösung schrittweise zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
&x_0 \\
x_1 &= x_0 + b \\
x_2 &= x_1 + b = x_0 + 2 \cdot b \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= x_{n-2} + b = x_0 + (n-1) \cdot b \\
x_n &= x_{n-1} + b = x_0 + n \cdot b
\end{aligned}$$

Folglich ist die explizite Darstellung $x_n = x_0 + n \cdot b$ die allgemeine Lösung der Rekursionsdarstellung der arithmetischen Folge. Wieder wird eine spezielle Lösungsfolge erhalten, je nach dem, welcher Anfangswert x_0 gegeben ist.

Eine weitere Art einer linearen inhomogenen Differenzengleichung 1. Ordnung ist vorhanden, wenn beide Quotienten $\frac{h_0(n)}{h_1(n)}$ und $\frac{g(n)}{h_1(n)}$ Folgen auf $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ definieren. Sei nun also $\frac{h_0(n)}{h_1(n)} = -a_n$ und $\frac{g(n)}{h_1(n)} = b_n$ für alle $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$.

Definition 14. Eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung $x_{n+1} - a_n \cdot x_n = b_n$ mit $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ wird *lineare inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung* genannt.

Die Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung 1. Ordnung setzt sich, laut Satz 3 im Unterabschnitt 3.2, aus der speziellen Lösung $\widetilde{x}_n$ der linearen inhomogenen Differenzengleichung 1. Ordnung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen linearen homogenen Differenzengleichung 1. Ordnung zusammen. Somit kann allgemein festgehalten werden, dass diese Lösung von der Gestalt $x_n = C \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j + \widetilde{x}_n$, mit C eine Konstante und $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, ist.
Die spezielle Lösung $\widetilde{x}_n$ wird hierbei mittels der so genannten *Methode der Variation der Konstanten*, ein Ansatz von Lagrange auf welchen auch noch im Abschnitt über Differentialgleichungen näher eingegangen wird, ermittelt.
Bei dieser Methode wird die Konstante C der allgemeinen Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung 1.Ordnung durch die Funktion $C_n = C(n)$ ersetzt, wodurch man den Ansatz $\widetilde{x}_n = C_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j$ erhält. Setzt man dies in die umgeformte gegebene Differenzengleichung $x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n$ ein, ergibt sich $C_{n+1} \cdot \prod_{j=0}^{n} a_j = a_n \cdot C_n \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j + b_n$.

Somit folgt:

$$\begin{aligned} C_{n+1} \cdot \prod_{j=0}^{n} a_j &= C_n \cdot \prod_{j=0}^{n} a_j + b_n \\ C_{n+1} &= C_n + \frac{b_n}{\prod_{j=0}^{n} a_j} \\ C_{n+1} - C_n &= \frac{b_n}{\prod_{j=0}^{n} a_j} \end{aligned}$$

Angenommen der Anfangswert C_0 dieser Differenzengleichung ist bekannt, dann können die einzelnen Folgeglieder von (C_n) auf Grund der Gleichung $C_{n+1} = C_n + \frac{b_n}{\prod_{j=0}^{n} a_j}$ sukzessive ausgerechnet werden.

$$\begin{aligned}
C_0 & \\
C_1 &= C_0 + \frac{b_0}{a_0} \\
C_2 &= C_1 + \frac{b_1}{a_0 \cdot a_1} = C_0 + \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0 \cdot a_1} \\
&\vdots \\
C_{n-1} &= C_{n-2} + \frac{b_{n-2}}{a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}} = C_0 + \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0 \cdot a_1} + \ldots + \frac{b_{n-2}}{a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}} \\
C_n &= C_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} = C_0 + \frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0 \cdot a_1} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}
\end{aligned}$$

Folglich lautet die explizite Darstellung für den Wert C_n: $C_n = C_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\prod_{j=0}^{i} a_j}$.

Rücksubstitution führt zu der speziellen Lösung $\widetilde{x}_n = \left(C_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\prod_{j=0}^{i} a_j} \right) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j$,

wodurch die allgemeine Lösung $x_n = C \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j + \left(C_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\prod_{j=0}^{i} a_j} \right) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j$ erhalten wird. Setzt man an dieser Stelle $x_0 = C + C_0$, dann kann die allgemeine Lösung etwas einfacher als $x_n = \left(x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\prod_{j=0}^{i} a_j} \right) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} a_j$ dargestellt werden.

Die letzte Möglichkeit einen Typ linearer Differenzengleichungen 1. Ordnung zu bestimmen ist dann gegeben, wenn sich die Quotienten derart gestalten, dass $\frac{h_0(n)}{h_1(n)} = -a$, a eine Konstante, und $\frac{g(n)}{h_1(n)} = b_n \ \forall n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ sind. Hierfür erhält man die Differenzengleichung 1. Ordnung $x_{n+1} - a \cdot x_n = b_n$.

Definition 15. Die Differenzengleichung 1. Ordnung mit $x_{n+1} - a \cdot x_n = b_n$ für alle $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ wird *lineare inhomogene Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten* genannt.

Die Lösung von $x_{n+1} - a \cdot x_n = b_n$ wird ebenfalls durch die Addition von der speziellen Lösung der linearen inhomogenen Differenzengleichung 1. Ordnung mit konstantem Koeffizienten und der allgemeinen Lösung der zugehörigen linearen homogenen Differenzengleichung 1. Ordnung erhalten. Die allgemeine Lösung dieser linearen homogenen Differenzengleichung 1. Ordnung lautet $x_n = a^n \cdot C$, C eine Konstante. Mittels der Annahme, dass $C_n = C(n)$ eine Funktion für alle $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ ist, kann wieder die Methode der Variation der Konstanten angewandt werden, wobei die spezielle Lösung $\widetilde{x}_n = C_n \cdot a^n$ gesetzt wird. Letztere wird in $x_{n+1} - a \cdot x_n = b_n$ eingesetzt, wodurch die Differenzengleichung $C_{n+1} \cdot a^{n+1} - a \cdot C_n \cdot a^n = b_n$ zustande kommt. Hieraus gelangt man zu der Gleichung $C_{n+1} = C_n + \frac{b_n}{a^{n+1}}$.
Angenommen der konstante Wert C_0 ist bekannt, so ist es möglich durch schrittweises Vorgehen die explizite Darstellung von C_n zu ermitteln.

$$
\begin{aligned}
&C_0 \\
C_1 &= C_0 + \frac{b_0}{a} \\
C_2 &= C_1 + \frac{b_1}{a^2} = C_0 + \frac{b_0}{a^1} + \frac{b_1}{a^2} \\
&\vdots \\
C_{n-1} &= C_{n-2} + \frac{b_{n-2}}{a^{n-1}} = C_0 + \frac{b_0}{a^1} + \frac{b_1}{a^2} + \ldots + \frac{b_{n-2}}{a^{n-1}} \\
C_n &= C_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{a^n} = C_0 + \frac{b_0}{a^1} + \frac{b_1}{a^2} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{a^n}
\end{aligned}
$$

Die explizite Darstellung von C_n lautet somit $C_n = C_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{a^{i+1}}$. Durch die Rücksubstitution dieser Darstellung in die spezielle Lösung $\widetilde{x}_n$ führt zu der Gleichung $\widetilde{x}_n = \left(C_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{a^{i+1}} \right) \cdot a^n$, wodurch die allgemeine Lösung von $x_{n+1} - a \cdot x_n = b_n$ wie folgt lautet: $x_n = a^n \cdot C + \left(C_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{a^{i+1}} \right) \cdot a^n$. Die Annahme, dass $x_0 = C + C_0$ ist, sowie das Zusammenfassen der Terme, liefert folgende Darstellung der allgemeinen Lösung $x_n = \left(x_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{a^{i+1}} \right) \cdot a^n$.

Lineare Differenzengleichung 2. Ordnung

Eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung wird durch $h_2(n) \cdot x_{n+2} + h_1(n) \cdot x_{n+1} + h_0(n) \cdot x_n = g(n)$ definiert, wobei h_2, h_1, h_0 und g Funktionen der unabhängigen Variable $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ und nicht von x_n sind.
Des Weiteren muss $h_2(n) \neq 0$ für alle $n \epsilon D$ gelten, da ansonsten der Ausdruck $h_2(n) \cdot x_{n+2}$ weggelassen werden könnte, und es sich somit nicht mehr um eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung handeln würde.
Auf Grund dessen, dass $h_2(n) \neq 0 \, \forall n \epsilon D$ ist, kann die vorhandene Differenzengleichung durch diese Funktion dividiert werden, wodurch die Differenzengleichung die Form $x_{n+2} + \frac{h_1(n)}{h_2(n)} \cdot x_{n+1} + \frac{h_0(n)}{h_2(n)} \cdot x_n = \frac{g(n)}{h_2(n)}$ erhält.
Sei nun $\frac{h_1(n)}{h_2(n)} = -a$ und $\frac{h_0(n)}{h_2(n)} = -b$ mit $a, b \epsilon \mathbb{R}$ fest und $b \neq 0$. Gilt weiter, dass die Störfunktion $g(n)$ die Nullfunktion ist, dann gilt $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$ für alle $n \epsilon D$.

Definition 16. Eine Differenzengleichung der Gestalt $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$ mit $a, b \epsilon \mathbb{R}$ fest, $b \neq 0$ und $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, wird *homogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* genannt.

Diese Differenzengleichung ist von mathematikhistorischem Interesse, da der Sonderfall $a, b = 1$ die sogenannte „Fibonacci-Gleichung” darstellt, ein von Leonardo von Pisa entwickeltes Wachstumsmodell, deren Lösungsfolgen als „Fibonacci-Zahlen” bekannt sind.
Grundsätzlich existieren zwei Möglichkeiten, um zur allgemeinen Lösung einer homogenen linearen Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu gelangen, wobei das erste Verfahren sich meist komplizierter als das zweite hier vorgestellte gestaltet. Vorausschickend sei noch einmal an die ersten beiden Sätze aus 3.2 erinnert, welche für das Auffinden eines Ergebnisses unerlässlich sind.

1. Wie schon bei linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung, kann auch bei linearen homogenen Differenzengleichungen 2. Ordnung folgendermaßen vorgegangen werden: Zu aller erst werden die Werte $x_2, \ldots, x_n$ ausgerechnet und anschließend mittels sukzessiver Substitution jedes x_k, $k \epsilon D$,

durch einen Term dargestellt, welcher lediglich Konstante, sowie die Anfangsbedingungen x_0 und x_1 enthält.

2. Das zweite Lösungsschema scheint möglicherweise etwas kompliziert, wird aber in der Praxis dem ersten Verfahren vorgezogen. Wichtig für das Verständnis dieses Lösungsweges sind Satz 4 und Satz 5.

   Satz 4: Sei $\lambda \neq 0$ eine feste Zahl. Dann besitzt jede homogene lineare Differenzengleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten Lösungen der Art $x_n = \lambda^n \, \forall n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$.

   Beweis. Angenommen $x_n = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$ eine feste Zahl, ist eine Lösung von $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$ für alle $n \epsilon D$. Einsetzen dieser in die Differenzengleichung führt zu der Gleichung $\lambda^{n+2} - a \cdot \lambda^{n+1} - b \cdot \lambda^n = 0$, wodurch folgt, dass $(\lambda^2 - a \cdot \lambda - b) \cdot \lambda^n = 0$ gilt. Auf Grund dessen, dass $\lambda \neq 0$ ist, muss, damit die Gleichung stimmt, $\lambda^2 - a \cdot \lambda - b = 0$ sein. Für dieses sogenannte charakteristische Polynom erhält man die Lösungen $\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$. Dass hierbei $\lambda_{1,2} \neq 0$ ist, wird aus der Tatsache, dass für $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$ $b \neq 0$ gilt, ersichtlich . Will man sich vergewissern, dass es sich bei diesem Ergebnis wirklich um Lösungen der Gleichung $\lambda^{n+2} - a \cdot \lambda^{n+1} - b \cdot \lambda^n = 0$, und somit der Differenzengleichung $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$, handelt, so kann dies durch Einsetzen überprüft werden. Sei $\lambda_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$, so führt das Einsetzen dieser Lösung in $\lambda^{n+2} - a \cdot \lambda^{n+1} - b \cdot \lambda^n = 0$ zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{n+2} - a \cdot \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{n+1} - b \cdot \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{n} &= 0 \\
\left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2} - a \cdot \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right) - b\right] \cdot \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{n} &= 0 \\
\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2} - a \cdot \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right) - b &= 0 \\
\frac{a^2}{4} + a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} + \frac{a^2}{4} + b - \frac{a^2}{2} - a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - b &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Folglich ist $\lambda_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ eine Lösung von $\lambda^{n+2} - a \cdot \lambda^{n+1} - b \cdot \lambda^n = 0$ und somit auch von der Differenzengleichung $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$ für alle $n \epsilon D$. Analog kann gezeigt werden, dass $\forall n \epsilon D \; \lambda_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ eine Lösung von $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$ ist.

$\square$

Satz 5: Besitzt eine homogene Differenzengleichung 2. Ordnung die zwei Lösungen $x_0(n)$ und $x_1(n)$ mit $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, dann ist $x_n = c_0 \cdot x_0(n) + c_1 \cdot x_1(n)$ genau dann eine allgemeine Lösung dieser, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} x_0(0) & x_1(0) \\ x_0(1) & x_1(1) \end{vmatrix} = x_0(0) \cdot x_1(1) - x_1(0) \cdot x_0(1) \neq 0 \tag{3.2.4}$$

(ohne Beweis).

Erfüllen $x_0(n)$ und $x_1(n)$ die Bedingung 3.2.4, so werden diese zwei Lösungen auch als *Fundamentalsystem* der homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung bezeichnet.
Unter der Kenntnis dieser beiden Sätze kann nun das Lösungsschema für lineare homogene Differenzengleichungen 2. Ordnung, $x_{n+2} - a \cdot x_{n+1} - b \cdot x_n = 0$, erörtert werden, welches sich in die folgenden vier Schritte unterteilen lässt:

(a) Zu aller erst wird der unbestimmte Ansatz $x_n = \lambda^n \, \forall n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ gemacht, wodurch das charakteristische Polynom $\lambda^2 - a \cdot \lambda - b = 0$ erhalten wird.

(b) Dieses charakteristische Polynom wird gelöst und die Diskriminante $D = \frac{a^2}{4} + b$ der Ergebnisse $\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$ untersucht.
Hierbei können drei Fälle unterschieden werden:

   i. $D = \frac{a^2}{4} + b > 0$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ beide reell.
   ii. $D = \frac{a^2}{4} + b > 0$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, wobei λreell ist.
   iii. $D = \frac{a^2}{4} + b < 0$ mit λ_1 und λ_2 beide konjugiert komplex.

(c) Ansetzen der allgemeinen Lösung $x_n = c_0 \cdot x_0(n) + c_1 \cdot x_1(n)$. Hierbei ist zu beachten, dass $x_0(n)$ und $x_1(n)$ ein Fundamentalsystem darstellen und, in Abhängigkeit der Gestalt der Diskriminante und somit von λ_1 und λ_2, wie folgt aussehen können:

i. $x_0(n) = \lambda_1^n$ und $x_1(n) = \lambda_2^n$ für $D = \frac{a^2}{4} + b > 0$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ beide reell. Die allgemeine Lösung für diesen Fall lautet somit $x_n = c_0 \cdot \lambda_1^n + c_1 \cdot \lambda_2^n$.

ii. $x_0(n) = \lambda^n$ und $x_1(n) = n \cdot \lambda^n$ für $D = \frac{a^2}{4} + b > 0$ mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, wobei λ reell ist. Hieraus ergibt sich für die allgemeine Lösung $x_n = c_0 \cdot \lambda^n + c_1 \cdot n \cdot \lambda^n$.

iii. $x_0(n) = r^n \cdot \cos(n \cdot \varphi)$ und $x_1(n) = r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$ für $D = \frac{a^2}{4} + b < 0$ mit λ_1 und λ_2 beide konjugiert komplex. Dieser Fall führt zu der allgemeinen Lösung

$$x_n = c_0 \cdot r^n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_1 \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

(d) Sind zwei Anfangswerte x_0 und x_1 gegeben, so können c_0 und c_1 der allgemeinen Lösung bestimmt werden, womit eine spezielle Lösung der linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung gefunden werden kann. Auch hier werden wieder, analog zu den Punkten (b) und (c) drei Fälle unterschieden:

i. Für $x_n = c_0 \cdot \lambda_1^n + c_1 \cdot \lambda_2^n$ ist somit das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} I.\ c_0 \cdot \lambda_1^0 + c_1 \cdot \lambda_2^0 &= x_0 \\ II.\ c_0 \cdot \lambda_1^1 + c_1 \cdot \lambda_2^1 &= x_1 \end{aligned}$$

ii. $x_n = c_0 \cdot \lambda^n + c_1 \cdot n \cdot \lambda^n$ führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I.\ c_0 \cdot \lambda^0 + c_1 \cdot 0 \cdot \lambda^0 &= x_0 \\ II.\ c_0 \cdot \lambda^1 + c_1 \cdot 1 \cdot \lambda^1 &= x_1 \end{aligned}$$

iii. Aus der allgemeine Lösung

$$x_n = c_0 \cdot r^n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_1 \cdot r^n \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I.\ c_0 \cdot r^0 \cdot \cos(0 \cdot \varphi) + c_1 \cdot r^0 \cdot \sin(0 \cdot \varphi) &= x_0 \\ II.\ c_0 \cdot r^1 \cdot \cos(1 \cdot \varphi) + c_1 \cdot r^1 \cdot \sin(1 \cdot \varphi) &= x_1 \end{aligned}$$

Systeme von Differenzengleichungen

Bisweilen wurden lediglich Differenzengleichungen untersucht, für welche sich eine Lösungsfunktion ermitteln ließ. Solche Differenzengleichungen werden zur Beschreibung von Prozessen, in welcher lediglich eine Größe wirkt, herangezogen. Nun ist es aber im Allgemeinen so, dass in Prozessen meist zwei oder mehrere Größen sich gegenseitig beeinflussen. Diese Prozesse können mittels sogenannter Systeme von Differenzengleichungen mathematisch beschrieben werden. Die Lösung eines solchen Systems von Differenzengleichungen stellt ein Funktionentupel $(x_1(n), \ldots, x_k(n))^t \epsilon \mathbb{R}^k$, $k \epsilon \mathbb{N}$ und $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, dar.
In diesem Abschnitt wird der Fokus auf lineare Differenzengleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gelegt, da die Betrachtung von jenen mit nicht konstanten Koeffizienten den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Zumal diese auch im Schulunterricht auf Grund ihrer Komplexität nicht zur Sprache kommen.

Definition 17. Besteht ein System von Differenzengleichungen nur aus linearen Differenzengleichungen, so heißt dieses *lineares Differenzengleichungssystem.*

Beispiel. Die explizite Darstellung eines Systems von k linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kk} \epsilon \mathbb{R}$ gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11} \cdot x_1(n) + a_{12} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{1k} \cdot x_k(n) + g_1(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21} \cdot x_1(n) + a_{22} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{2k} \cdot x_k(n) + g_2(n) \quad (3.2.5) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= a_{k1} \cdot x_1(n) + a_{k2} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{kk} \cdot x_k(n) + g_k(n) \end{aligned}$$

wobei $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ ist.

Ein System von Differenzengleichungen wird aus Gründen der einfacheren Handhabung oftmals auch mittels Matrixschreibweise dargestellt.

Beispiel. Es sei das System 3.2.5 von k linearen Differenzengleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kk} \,\epsilon\, \mathbb{R}$, $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, gegeben. Definiert man $\mathbf{x}(n) := \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix}$, $\mathbf{g}(n) := \begin{pmatrix} g_1(n) \\ g_2(n) \\ \vdots \\ g_k(n) \end{pmatrix}$, beide Elemente aus $\mathbb{R}^k$, und die $k \times k$ Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$, so ergibt sich die Darstellung $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{g}(n)$.

Definition 18. Sind alle Störfunktionen $g_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, eines linearen Differenzengleichungssystems Nullfunktionen, dann wird dieses *linear homogenes Differenzengleichungssystem* genannt. Ist jedoch auch nur ein einziges $g_i(n) \neq 0$ für ein $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, so heißt das lineare Differenzengleichungssystem *linear inhomogenes Differenzengleichungssystem*.

Oft wird dem Vektor $\mathbf{x}(n)$ auch die Bezeichnung *Zustandsvektor* $\mathbf{z}(n)$ bzw. $\overrightarrow{z_n}$ zu teil, da der Zustand eines Systems sich mittels dieses Vektors ausdrücken lässt.

Bei linear homogenen Differenzengleichungssystemen wird des Weiteren die Matrix $\mathbf{A}$ als *Übergangsmatrix* betitelt, weil sie den Prozess, durch welchen ein System von einem Zustand in den nächsten Zustand übergeht, beschreibt. Zudem kann es bei einem solchen System von Differenzengleichungen einen Gleichgewichtszustand geben, welcher mittels eines so genannten *Fixvektor* $\overrightarrow{z}$, für welchen $\overrightarrow{z} = \mathbf{A} \cdot \overrightarrow{z}$ gilt, beschrieben wird.
Allen Systemen von Differenzengleichungen ist gemein, dass eine Anfangsbedingung, in Form eines so genannten *Anfangsvektor*

$$\mathbf{x}(0) := (x_1(0),\, x_2(0),\, \ldots,\, x_k(0))^t \,\epsilon\, \mathbb{R}^k$$

auftreten kann.

Lineare homogene Differenzengleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei ein lineares homogenes Differenzengleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_{11},\, a_{12},\, \ldots,\, a_{kk} \,\epsilon\, \mathbb{R}$ gegeben, dessen explizite Darstellung für $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$ folgendermaßen aussieht:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11} \cdot x_1(n) + a_{12} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{1k} \cdot x_k(n) \\
x_2(n+1) &= a_{21} \cdot x_1(n) + a_{22} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{2k} \cdot x_k(n) \\
&\vdots \\
x_k(n+1) &= a_{k1} \cdot x_1(n) + a_{k2} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{kk} \cdot x_k(n)
\end{aligned}$$

Die Matrixschreibweise lautet deshalb $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n)$.
Angenommen es sei ein Anfangsvektor $\mathbf{x}(0) = (x_1(0),\, x_2(0),\, \ldots,\, x_k(0))^t \,\epsilon\, \mathbb{R}^k$ gegeben, dann kann unter der zu Hilfe Zuhilfenahme von $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n)$

die Lösung wie folgt schrittweise berechnet werden:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}(0) \\
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(0) \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{x}(0) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(n-1) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n-2) = \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{x}(0) \\
\mathbf{x}(n) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n-1) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{x}(0)
\end{aligned}$$

Auf Grund dessen, dass für jeden Anfangsvektor $\mathbf{x}(0) \,\epsilon\, \mathbb{R}^k$ das Einsetzen von $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{x}(0)$ in $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n)$ zur Identität führt, lautet die allgemeine Lösung einer solchen Systems von Differenzengleichungen $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{c}$, wobei $\mathbf{c}$ ein willkürlicher Konstantenvektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_k)^t$ mit $c_i \,\epsilon\, \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, willkürliche Konstanten.
Obwohl dieses Lösungsverfahren auf den ersten Blick einfach erscheint, treten häufig langwierige Berechnungen bei der Bestimmung der n-ten Potenz der Matrix $\mathbf{A}$ auf. Mit Hilfe der folgenden Vorgehensweise, welche sich vor allem den Mitteln der linearen Algebra bedient, können diese jedoch umgangen werden (vgl. [38]):

1. Ausrechnen der Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ stellen die, nicht unbedingt paarweise verschiedenen, Lösungen der charakteristischen Gleichung $f(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$ der Matrix $\mathbf{A}$ dar, wobei $\mathbf{I}$ die $k \times k$ Einheitsmatrix ist.

2. Ermitteln der Eigenvektoren für die Eigenwerte von $\mathbf{A}$: Werden die Eigenwerte in die charakteristische Gleichung eingesetzt, so können durch das Lösen der erhaltenen Gleichung $|\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}| = 0$, $i = 1, \ldots, k$, die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{e}_i$ ausgerechnet werden. Hierbei ist zu beachten, dass eine $k \times k$ Matrix k linear unabhängige Eigenvektoren besitzen muss, da ansonsten die n-te Potenz dieser nicht ermittelt werden kann.

3. Aufstellen der Transformationsmatrix und der Diagonalmatrix: Die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ setzt sich aus den erhaltenen Eigenvektoren zusammen und lautet $\mathbf{T} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k)$. Die Eigenwerte kommen bei der

Diagonalmatrix $\mathbf{D}$ zu tragen, da $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$ gilt. Für diese ist es relativ einfach die n-te Potenz zu berechnen, weil $\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}$ ist. Auf Grund dessen, dass $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{T}^{-1}$ die inverse Transformationsmatrix, ist, führt die Anwendung der Rechenregeln für Matrizen zu $\mathbf{A}^n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1}$.

4. Ermitteln der allgemeinen Lösung von $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n)$: Es wurde schon gezeigt, dass für einen vorhandenen Anfangsvektor $\mathbf{x}(0)$ durch sukzessives Vorgehen $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{x}(0)$ ermittelt werden kann. Dies bedeutet, dass $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{x}(0) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$ ist und auf Grund der Wählbarkeit eines Anfangsvektors $\mathbf{x}(0)$ gelingt es, dass das Resultat des Produktes $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}(0)$ ein beliebig festlegbarer Spaltenvektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)^t \,\epsilon\, \mathbb{R}^k$ ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{s} \\ &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix} \cdot \mathbf{s} \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \lambda_1^n, \mathbf{e}_2 \cdot \lambda_2^n, \ldots, \mathbf{e}_k \cdot \lambda_k^n) \cdot \mathbf{s} \\ &= s_1 \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \lambda_1^n + s_2 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \lambda_2^n + \ldots + s_k \cdot \mathbf{e}_k \cdot \lambda_k^n \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung eines linearen homogenen Differenzengleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann folglich auch die Form $\mathbf{x}(n) = s_1 \cdot \mathbf{e}_1 \cdot \lambda_1^n + s_2 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \lambda_2^n + \ldots + s_k \cdot \mathbf{e}_k \cdot \lambda_k^n$ annehmen, wobei $s_1, s_2, \ldots, s_k \epsilon \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind. Zu einer speziellen Lösung dieser gelangt man dann, wenn ein Anfangsvektor $\mathbf{x}(0)$ vorgegeben ist, wodurch die Konstanten $s_1, s_2, \ldots, s_k \epsilon \mathbb{R}$ ausgerechnet und in die allgemeine Lösung eingesetzt werden können.

Lineare inhomogene Differenzengleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei ein lineares inhomogenes Differenzengleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a_{11}, a_{12}, $\ldots$, $a_{kk} \, \epsilon \, \mathbb{R}$, $n \epsilon D \subseteq \mathbb{N}$, gegeben:

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= a_{11} \cdot x_1(n) + a_{12} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{1k} \cdot x_k(n) + g_1(n) \\
x_2(n+1) &= a_{21} \cdot x_1(n) + a_{22} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{2k} \cdot x_k(n) + g_2(n) \\
&\vdots \\
x_k(n+1) &= a_{k1} \cdot x_1(n) + a_{k2} \cdot x_2(n) + \ldots + a_{kk} \cdot x_k(n) + g_k(n)
\end{aligned}$$

Dieses lässt sich vereinfacht durch die Matrixschreibweise

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n) + \mathbf{g}(n)$$

darstellen. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems setzt sich, analog zu den schon besprochenen linearen inhomogenen Differenzengleichungen 1. Ordnung, aus der allgemeinen Lösung des homogenen Teiles $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n)$ und einer beliebigen speziellen Lösung $\widetilde{\mathbf{x}}(n)$ des inhomogenen Systems zusammen. Eine spezielle Lösung kann hierbei durch die *Methode der unbestimmten Koeffizienten* gewonnen werden, bei welcher unbestimmte Koeffizienten enthaltende Versuchslösungen in das Differenzengleichungssystem eingesetzt werden, um so die Gleichungen erfüllende Konstanten auszurechnen.

Lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung

Ist eine lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung gegeben, so gibt der folgende Satz eine Hilfestellung zur Lösungsfindung. Der Beweis wird hierfür lediglich für jene Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten geführt.

Satz 6: Jede lineare Differenzengleichung höherer Ordnung kann als lineares Differenzengleichungssystem 1. Ordnung dargestellt werden.

Beweis. Es sei die lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $x_{n+k} + a_{k-1} \cdot x_{n+k-1} + ... + a_1 \cdot x_{n+1} + a_0 \cdot x_n = g(n)$, mit

$a_{k-1}, \ldots, a_0 \,\epsilon\, \mathbb{R}$ und g eine Funktion der unabhängigen Variable $n \epsilon D \subsetneqq \mathbb{N}$, gegeben. Setzt man $x_1(n) := x_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x_1(n) &:= x_n \\ x_2(n) &:= x_1(n+1) = x_{n+1} \\ &\vdots \\ x_k(n) &:= x_{k-1}(n+1) = x_{n+k-1} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Dies führt zu einem aus k Differenzengleichungen 1. Ordnung bestehendem Differenzengleichungssystem 1. Ordnung mit den Funktionen $x_1, \ldots, x_k$, nämlich:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_2(n) \\ x_2(n+1) &= x_3(n) \\ &\vdots \\ x_{k-1}(n+1) &= x_k(n) \\ x_k(n+1) &= -a_0 \cdot x_1(n) - a_1 \cdot x_2(n) - a_2 \cdot x_3(n) - \ldots - a_{k-1} \cdot x_k(n) + g(n) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Somit entspricht jeder Lösung von 3.2.6 eine Lösung von 3.2.7 und umgekehrt führt jede Lösung von 3.2.7 zu einer Lösung von 3.2.6. □

(vgl. [38])

3.3 Die Differentialgleichung

Begriffsbestimmung

Definition 19. Als *Differentialgleichung* wird eine Bestimmungsleichung für Funktionen einer oder mehrerer unabhängiger Variablen bezeichnet, welche auch mindestens eine Ableitung dieser Funktion nach der bzw. den Variablen enthält.

Dies bedeutet, dass einer Bestimmungsgleichung genau dann die Bezeichnung Differentialgleichung zuteil wird, wenn sie eine Beziehung zwischen der gesuchten Funktion y und ihren Ableitungen y', y'', ... herstellt. Aus dieser Bemerkung wird auch ersichtlich, dass die Lösung einer solchen Bestimmungsgleichung alle Funktionen y umfasst, welche diese Differentialgleichung erfüllen.

Beispiel. Ziehen wir zur näheren Erläuterung dessen, was Lösungen von Differentialgleichungen sind noch einmal unser Einführungsbeispiel heran. Dieses wird hier mittels der *Methode der Trennung der Variablen*, eine Lösungsstrategie auf die später noch genauer eingegangen werden soll, gelöst.
In besagtem Einführungsbeispiel lautet die Differentialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$ und es gilt $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ differenzierbar und stetig.
Sei nun also $f'(t) = k \cdot f(t)$, das heißt $\frac{df}{dt} = k \cdot f(t)$. Mittels Umformung gelangt man zum Ausdruck $\frac{1}{f(t)} \cdot df = k \cdot dt$ und das Integrieren dieses führt in weiterer Folge zu der Gleichung $\ln|f(t)| = k \cdot t + \tilde{C}$. Da hier das Ziel der Erhalt der Funktion $f(t)$ ist, kommt an dieser Stelle die Exponentialfunktion e zum Einsatz, durch deren Anwendung $f(t) = e^{k \cdot t + \tilde{C}}$ erhalten wird. Setzt man nun $e^{\tilde{C}} = c$, mit $c \epsilon \mathbb{R}$, so kann man die allgemeine Lösung folgendermaßen darstellen: $f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$. Es sind also alle Funktionen dieser Art Lösungen der Differentialgleichung $f'(t) = k \cdot f(t)$.
Eine so genannte *spezielle Lösung* dieser Differentialgleichung würde man erhalten, wenn zusätzlich eine *Anfangsbedingung* $f(t_0) = f_0$ gegeben wäre.

Definition 20. Bestimmungsgleichungen für eine Funktion von einer unabhängigen Variablen, welche mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion nach dieser Variable enthält, werden *gewöhnliche Differentialgleichungen* genannt.

Die Darstellung einer solchen gewöhnlichen Differentialgleichung kann implizit, wie auch explizit erfolgen:

Implizit: $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$
Explizit: $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$

Definition 21. Eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion von mehr als einer unabhängigen Variable, welche zumindest eine partielle Ableitung der gesuchten Funktion nach einer unabhängigen Variable besitzt, nennt man *partielle Differentialgleichung.*

Die implizite Darstellung einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung, einem Begriff auf welchen in Definition 4 eingegangen wird, mit zwei unabhängigen Variablen x und y, sowie der gesuchten Funktion $u = u(x, y)$ ist $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, wobei $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ist.
Diese Art der Darstellung für eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit ebenfalls zwei unabhängigen Variablen x und y und der gesuchten Funktion $u = u(x, y)$ lautet $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$, mit u_x, wie auch u_y partielle Ableitungen von der oben schon erwähnten Form. Die partiellen Ableitungen $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ und $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ seien an dieser Stelle erwähnt. Es wird hierdurch ersichtlich, dass bei jeglichen partiellen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei oder mehreren unabhängigen Veränderlichen analog vorgegangen wird.

Definition 22. Die höchste auftretende Ableitung bzw. partielle Ableitung der gesuchten Funktion einer gewöhnlichen bzw. partiellen Differentialgleichung wird als *Ordnung* der gewöhnlichen bzw. partiellen Differentialgleichung bezeichnet.

Definition 23. Als *Grad* einer gewöhnlichen bzw. partiellen Differentialgleichung wird die Potenz der höchsten vorkommenden Ableitung bzw. partiellen Ableitung der gesuchten Funktion bezeichnet.

Beispiel. Die Differentialgleichung 3.1.2 stellt folglich eine explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung 1. Grades dar. Eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung 1. Grades ist $y(x) - x \cdot y'(x) = 0$, $y'^2(x) - \frac{1}{4} \cdot x^2 = 0$ eine implizite Darstellung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung 2. Grades.

Definition 24. Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt *linear*, wenn sie sowohl in der unbekannten Funktion $y(x)$ wie auch in ihren Ableitungen $y'(x), ...$ linear ist. *Nichtlinear* werden folglich jene gewöhnlichen Differentialgleichungen genannt, welche das Kriterium der Linearität nicht erfüllen. Analog zur Linearität gewöhnlicher Differentialgleichungen bezeichnet man eine partielle Differentialgleichung als *linear*, wenn die unbekannte Funktion u, sowie deren partielle Ableitungen linear sind. Ist eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung nur in ihren partiellen Ableitungen linear, jedoch nicht in der gesuchten Funktion selbst, so heißt sie *quasilinear*.

Beispiel. Eine lineare Differentialgleichung wäre somit $y'(x)+3 \cdot x \cdot y(x) = \sin x$, nichtlinear hingegen $y'(x) + 3 \cdot x \cdot y^2(x) = \sin x$.

Definition 25. Ein Satz gekoppelter, simultaner gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen zur Ermittlung mehrerer unbekannter Funktionen wird ein *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen* bzw. *ein System von partiellen Differentialgleichungen* genannt.

Die Darstellung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen kann implizit, wie auch explizit erfolgen. Hierbei ist zu beachten, dass die Bezeichnungen F_i und f_i den gesuchten Funktionen zuteil werden und der Index $i = 1, ..., r$ für die Anzahl der Differentialgleichungen steht.

Implizit: $F_i(x, y_1, y_2, ..., y_1', y_2', ..., y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, ..., y_r^{(n)}) = 0$

Explizit: $y_i^{(n)}(x) = f_i(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x))$

Existenz und Eindeutigkeit

Ein wichtiger Begriff, auf welchen an dieser Stelle eingegangen werden soll, ist der des *Anfangswertproblems.* Auf Seite 50 wurde schon erwähnt, dass eine spezielle Lösung dann erreicht wird, wenn man zusätzlich eine Anfangsbedingung gegeben hat. Allgemein spricht man von einem Anfangswertproblem dann, wenn eine spezielle Lösung einer Differentialgleichung gesucht ist, das heißt der Anzahl der Ordnung entsprechend viele Anfangsbedingungen gegeben sind, welche die gesuchte Lösung der Differentialgleichung erfüllen muss.
Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist es ausreichend, wenn diese Anfangsbedingungen in einem Punkt gegeben sind. Partiellen Differentialgleichungen genügt dies leider nicht, vielmehr müssen hier zusätzlich Werte an den Rändern des Definitionsbereiches gegeben sein, in diesem Falle spricht man auch von einem *Randwertproblem.*
Dies Bedeutet nun nicht, dass solche Werte bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht auftreten, vielmehr können auch bei dieser Anfangsbedingungen Werte der Funktion am Rand ihres Definitionsbereiches, nicht nur an einem Punkt, sein.
Die Frage, ob ein Anfangswertproblem einer Differentialgleichung bzw. eines Systems von Differentialgleichung eindeutig lösbar ist, wird durch Existenz- und Eindeutigkeitssätze beantwortet. Diese werden im Folgenden jedoch lediglich überblicksmäßig und nicht im Detail behandelt, da eine genaue mathematische Betrachtung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.
Des Weiteren ist es ausreichend, nur den Existenz-, sowie den Eindeutigkeitssatz für Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung zu betrachten, da sowohl explizit dargestellte Differentialgleichungen n-ter Ordnung, sowie Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung mittels Ordnungsreduktion auf solche überführt werden können.
Ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung ist ein System der Form:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Auf Grund dessen, dass $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_n)$ sind, besteht die Möglichkeit 3.3.1 durch $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ auszudrücken, wobei $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$, G ein Gebiet und $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
Ist ein solches Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, sowie ein Anfangswertproblem $(x_0, \mathbf{y}_0) \epsilon G$ gegeben, dann stellt sich die Frage, welche Voraussetzungen $\mathbf{f}$ erfüllen muss, sodass sich für dieses Anfangswertproblem eine Lösung findet. Die Antwort auf dieses Problem liefert der *Satz von Peano*, welcher besagt, dass wenn $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung und $\mathbf{f}$ auf G stetig ist, jedes Anfangswertproblem $(x_0, \mathbf{y}_0) \epsilon G$ eine Lösung besitzt. Dementsprechend ist die Stetigkeit jedenfalls eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit eines Anfangswertproblems.
In weiterer Folge ist dennoch unklar, ob diese Lösung eindeutig ist. Es wird also nach jenen Anforderungen an $\mathbf{f}$ gefragt, auf Grund derer jedes Anfangswertproblem $(x_0, \mathbf{y}_0) \epsilon\, G$ eine auf einem Intervall I_x definierte und eindeutig bestimmte Lösung hat. Die Auflösung dieser Problematik verlangt nach einer strikteren Bedingung als der der Stetigkeit, nämlich die lokale Lipschitz-Bedingung. Die Funktion $\mathbf{f}$ genügt einer solchen für den Fall, dass zu jedem $(x, \mathbf{y}) \epsilon\, G$ eine in G vorhandene Umgebung von $(x, \mathbf{y})$ existiert, in welcher die globale Lipschitz-Bedingung erfüllt ist.

Definition 26. Sei $\mathbf{f}$ eine Funktion mit $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$und $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Man sagt $\mathbf{f}$ erfüllt in G die *globale Lipschitz-Bedingung*, wenn gilt:

$$\exists S \epsilon \mathbb{R}^+ \colon |\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \overline{\mathbf{y}})| \leqq S \cdot |\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}| \ \forall (x, \mathbf{y}), (x, \overline{\mathbf{y}}) \epsilon G$$

Angenommen die globale Lipschitz-Bedingung trifft auf $\mathbf{f}$ zu, so tut diese auch der lokalen Lipschitz-Bedingung genüge wenn G ein Gebiet ist und es folgt:

Eindeutigkeitssatz: Sei ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, $\mathbf{y}' = f(x, \mathbf{y})$, gegeben und $\mathbf{f}$ auf G stetig. Entspricht $\mathbf{f}$ in G der lokalen Lipschitz-Bedingung, dann existiert für jedes Anfangswertproblem $(x_0, \mathbf{y}_0) \epsilon G$ ein Intervall I_x mit einer auf diesem definierter, eindeutig bestimmten Lösung.

Da sich die Überprüfung der lokalen Lipschitz-Bedingung in der Praxis umständlich gestaltet, hilft man sich hierbei mit der Tatsache, dass wenn für

$\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$, mit $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, alle partiellen Ableitungen nach den in $\mathbf{y}$ enthaltenen Variablen $y_1, y_2, ...$ stetig sind, $\mathbf{f}$ in G die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt. Folglich ist es für die positive Beantwortung der Frage, ob jedes Anfangswertproblem von $\mathbf{f} : G \to \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, ausreichend, die Stetigkeit von $\mathbf{f}$ in G, sowie eben diese für die partiellen Ableitungen in G nachzuweisen.
Für Differentialgleichungen n-ter Ordnung gilt es also, die Stetigkeit von f, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\dots$, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ zu überprüfen.
Bei linearen Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung und somit auch linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung genügt es, die Stetigkeit der Koeffizientenfunktionen und der Störfunktionen auf deren gemeinsamen Intervall I_x zu untersuchen, da, wenn diese gegeben ist, jedes Anfangswertproblem eine auf dem gesamten Intervall I_x definierte und eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

(vgl. [37])

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt werden lediglich gewöhnliche Differentialgleichungen der Form $F(x, y, y') = 0$ beziehungsweise $y'(x) = f(x, y(x))$ betrachtet. Dies bedeutet, dass die höchste vorkommende Ableitung $y'(x)$ ist.

Graphische Darstellung gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

Die graphische Darstellung einer Differentialgleichung ist gerade in der Praxis von großer Wichtigkeit, weil dadurch Näherungslösungen gefunden werden können. Bevor eines dieser Verfahren genauer besprochen werden kann, müssen jedoch einige Begriffe geklärt werden.
Zu allererst soll auf das *Richtungsfeld* einer Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y)$ eingegangen werden. Dieses erhält man, indem in jedem Punkt der (x, y)-Ebene eine kurze Gerade mit der entsprechenden Steigung $y'(x)$, auch *Linienelemente* genannt, gezeichnet wird.

Dieses Vorgehen zur Erhaltung eines Linienelements wird in Abbildung 3.3.1 aufgezeigt.

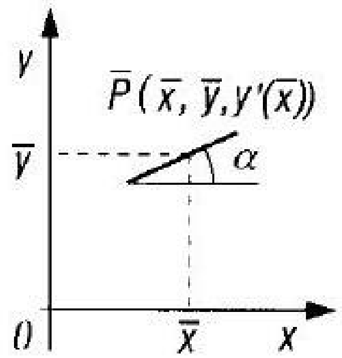


Abbildung 3.3.1: Linienelement [6]

In Abbildung 3.3.2 wird am Beispiel der Differentialgleichung $y'(x) = 1$ das Richtungsfeld dargestellt, wobei die durchgezogene Gerade die spezielle Lösung des Anfangwertproblems $(-1, -2)$ visualisiert.

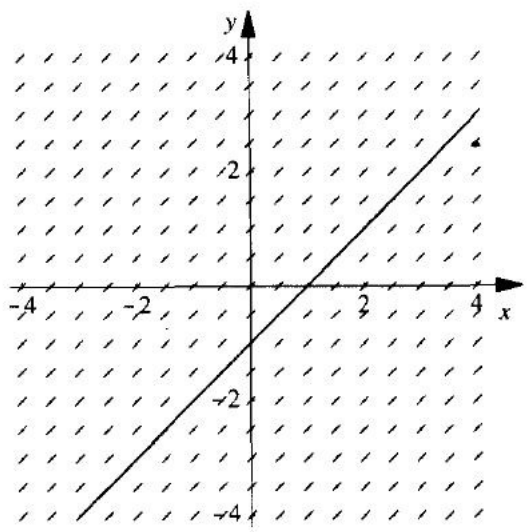


Abbildung 3.3.2: Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x) = 1$ [30]

Linien, welche jene Punkte mit derselben Steigung verbinden, also Kurven der Form $f(x, y) = C$, werden *Isoklinien* genannt. Die Abbildung 3.3.3 veranschaulicht nicht nur das Richtungsfeld und zwei spezielle Lösungen einer Differentialgleichung, sondern auch drei Isoklinien, welche durch strichlierte Geraden von links oben nach rechts unten dargestellt werden. Als Kreise visualisieren lassen sich hingegen die Isoklinien der Differentialgleichung $y'(x) = x^2 + y^2$, wie Abbildung 3.3.4 zeigt.

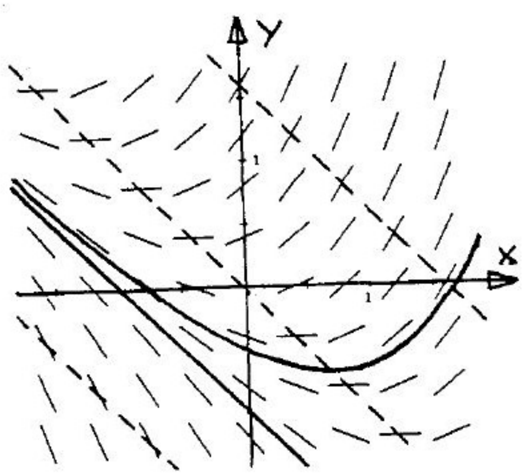


Abbildung 3.3.3: [41]

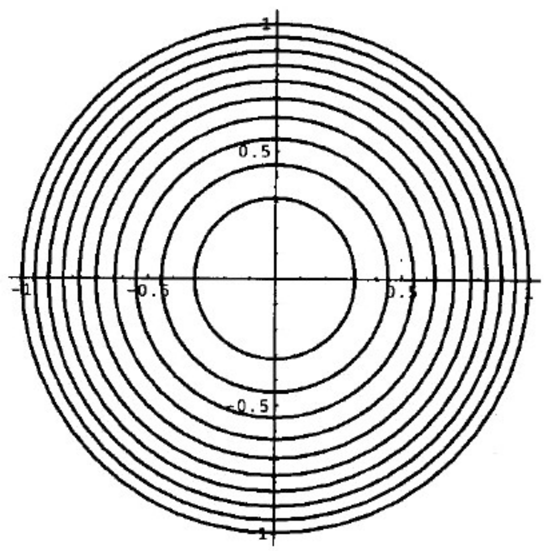


Abbildung 3.3.4: Isoklinien der Differentialgleichung $y'(x) = x^2 + y^2$ [40]

Folglich teilt eine Differentialgleichung 1. Ordnung jedem Punkt in der (x, y)-Ebene eine Richtung zu und beschreibt eine Kurvenschar.
Des weiteren wird zwischen *orthogonalen Trajektoren* und *isogonalen Trajektoren* unterschieden. Erstere schneiden die vorhandene Kurvenschar in allen

Punkten senkrecht, letztere sind Kurven, die eben diese gegebene Kurvenschar unter einem festen Winkel schneiden. Die Abbildung 3.3.5 veranschaulicht orthogonale Trajektoren einer Differentialgleichung, in dieser als Trajektorien bezeichnet, welche die Kurvenschar, in der Abbildung Scharkurven genannt, in allen Punkten senkrecht schneiden.

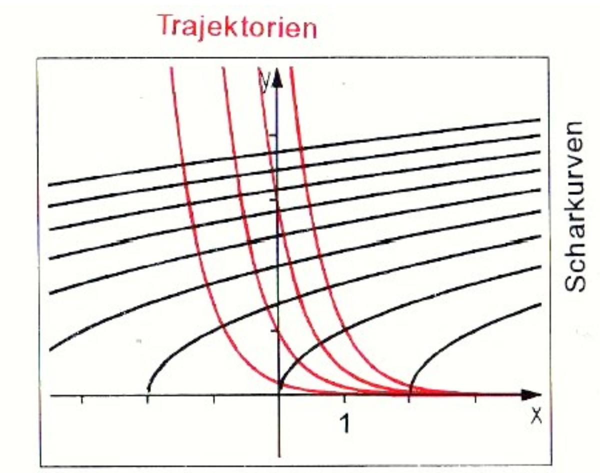


Abbildung 3.3.5: orthogonale Trajektoren [7]

Sei nun also eine Anfangsbedingung, der Punkt (x_0, y_0), gegeben. Will man sich graphisch eine Vorstellung der Lösung machen, so zeichnet man ausgehend von diesem Punkt in die Richtung $y'(x_0)$ einen kleinen Teil der Lösungskurve, bis man zum benachbarten Punkt (x_1, y_1) gelangt. Führt man diese Vorgehensweise fort, so erhält man einen Polygonzug. Dieser führt desto genauer zu dem richtige Ergebnis, je kleiner die einzelnen Etappen gewählt sind. Dieses Näherungsverfahren wird die *Eulersche Methode* genannt und ist in Abbildung 3.3.6 dargestellt. Da dieses Verfahren leider fehleranfällig ist, wird es in der Praxis kaum angewandt. Jedoch ist es für das Verständnis, was eine Differentialgleichung ist bzw. deren numerischen Zugang, hilfreich.

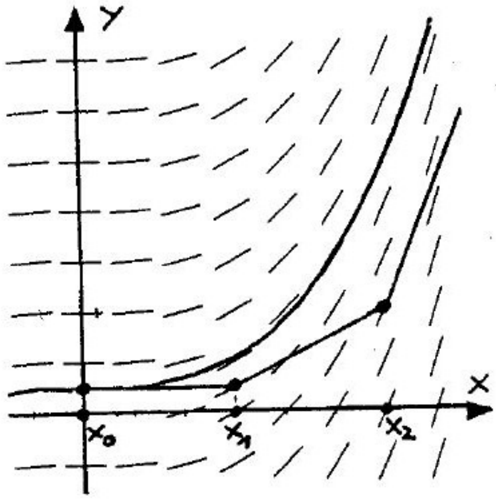


Abbildung 3.3.6: Die Eulersche Methode [41]

Differentialgleichungen 1. Ordnung und deren Lösungsverfahren

Die Differentialgleichung der Form $y'(x) = g(x)$

Sei $g(x) = f(x, y)$ eine stetige Funktion mit $g : D_x \to \mathbb{R}$, wobei D_x der Definitionsbereich von $g(x)$ ist. Bei dieser einfachen Differentialgleichung 1.Ordnung erhält man die allgemeine Lösung mittels Integration. Dies bedeutet, dass für alle $x \,\epsilon\, D_x$ jede Stammfunktion $F(x) = \int g(x)\,dx$ eine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = g(x)$ ist.
Denn gilt $y'(x) = g(x)$, so bedeutet dies nichts anderes als $\frac{\partial y}{\partial x} = g(x)$ und mittels Umformung sowie Integration gelangt man zu $y(x) = \int g(x)\,dx + C$, $C \epsilon\, \mathbb{R}$.
Sei das Gebiet $G = D_x \times \mathbb{R}$. Dann besitzt jedes Anfangswertproblem $(x_0, y_0) \epsilon G$ eine eindeutig bestimmte Lösung der Form $F_{(x_0,y_0)}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} g(t)\,dt$. Diese etwas komplizierte Formel läßt sich durch das Einsetzen des Punktes (x_0, y_0) in die allgemeine Lösung $y(x) = \int g(x)dx + C$ umgehen, wodurch C ausgerechnet werden kann. Setzt man dieses danach zurück in die allgemeine Lösung ein, so liegt die spezielle Lösung in diesem Punkt vor.

Beispiel. Sei $y'(x) = \frac{1}{2}x$ mit $g(x) = \frac{1}{2}x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $G = \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Es gilt also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}x$ und daraus folgt $\int 1\,dy = \frac{1}{2} \int x\,dx$. Die allgemeine Lösung lautet daher $y = \frac{1}{4}x^2 + C$, $C \epsilon \mathbb{R}$. Sei nun die Anfangsbedingung $(2, 1) \epsilon\, \mathbb{R}^2$ gegeben. Man erhält mittels Einsetzen in die allgemeine Lösung $C = 0$, was bedeutet, dass $y = \frac{1}{4}x^2$ die spezielle Lösung für $(2, 1) \epsilon\, \mathbb{R}^2$ ist. Ein anderer Punkt aus $\mathbb{R}^2$, welcher eine Anfangsbedingung darstellt, ist $(2,3)$. Aus $3 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + C$ folgt $C = 2$ und somit ist die spezielle Lösung für diese Anfangsbedingung $y(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$.

Die Differentialgleichung $y'(x) = g(x) \cdot h(y)$ mit trennbaren Variablen

Es seien $g : D_x \to \mathbb{R}$ und $h : D_y \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit D_x, $D_y \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle. Auf Grund dieser Eigenschaften von $g(x)$ und $h(y)$ ist $y\prime(x) = g(x) \cdot h(y)$ eine auf dem Gebiet $G = D_x \times D_y$ stetige Funktion, welche Differentialgleichung mit trennbaren Variablen genannt wird. Die Methode der Trennung der Variablen ist es auch, welche zur gesuchten allgemeinen Lösung führt.
Sei $h(y) \neq 0$. Aus $\frac{\partial y}{\partial x} = g(x) \cdot h(y)$ folgt mittels der Trennung der Variablen und Integration $\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx + C$, $C \epsilon \mathbb{R}$.

Angenommen es ist ein Anfangswertproblem $(x_0, y_0) \epsilon\, G$ gegeben, dann gibt es zwei verschiedene Fälle:

1. Ist $h(y_0) = 0$, so besteht die Möglichkeit, dass die konstante Funktion $F_{(x_0,y_0)}(x) = y_0$ eine spezielle Lösung liefert. Jedoch ist dies nicht immer der Fall.

2. Ist $h(y_0) \neq 0$, dann erhält man die gesuchte spezielle Lösung durch das Ermitteln von C.

Beispiel. Sei $y'(x) = -x \cdot y^2$ mit $g(x) = x$ und $h(y) = -y^2$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ gegeben. Auf Grund der Trennung der Variablen erhält man $-\frac{1}{y^2}\, dy = x\, dx$ und durch Integration folgt $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$. Formt man diese Gleichung um, so ergibt sich die allgemeine Lösung $y(x) = \frac{2}{x^2 + 2 \cdot C}$.

Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen 1. Ordnung

Diese Art von Differentialgleichung umfasst drei Typen:

1. Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung der Form $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$: Hierbei ist $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ mit $g(x,y)$ und $h(x,y)$, $h(x,y) \neq 0$, zwei stetige Funktionen, welche denselben Grad bezüglich der Variablen besitzen. Die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung lässt sich durch die Methode der Substitution erreichen. Hierfür wird $z = \frac{y}{x}$ gesetzt und mittels Umformung $y = z \cdot x$ erhalten. Leitet man letztere Gleichung nach x ab, so ist das Ergebnis von der Form $y'(x) = z + z' \cdot x$. Dies lässt sich auch, setzt man $y'(x) = f(z)$, folgendermaßen darstellen: $z' = \frac{f(z)-z}{x}$, wobei $z' = \frac{\partial z}{\partial x}$ ist. Wird an dieser Stelle die Trennung der Variablen angewandt, ergibt sich $\frac{1}{f(z)-z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$. Wendet man nun die Integration sowie die Rücksubstitution, an, ist die allgemeine Lösung von $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ erreicht. Ist ein Anfangswertproblem gegeben, so kann dies mittels Einsetzen des gegeben Punktes und Ermitteln von C erreicht werden.

   Beispiel. Sei $y'(x) = \frac{y^2}{x^2}$. Somit ist $f(z) = z^2$, $z = \frac{y}{x}$, und folglich gilt $\frac{1}{z^2-z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$. Auf Grund dessen, dass $\frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{z\cdot(z-1)} = \frac{z-z+1}{z\cdot(z-1)} = \frac{z-(z-1)}{z\cdot(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ ist, erhält man $\int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{1}{x}\,dx$, woraus sich $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| = \ln|x| + C$ ergibt. Hieraus bekommt man, wegen der Anwendung der Exponentialfunktion, $\frac{z-1}{z} = c \cdot x$, mit $c = e^C \epsilon \mathbb{R}$. Rücksubstitution und Umformen liefert dann die allgemeine Lösung $y = \frac{x}{1-c\cdot x}$.

2. Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $y'(x) = f\,(ax + by + c)$ mit $f\,(ax + by + c)$ eine stetige Funktion und $a, b, c \,\epsilon\, \mathbb{R}$: Die Bedingung, dass $b \neq 0$ ist, muss hierbei erfüllt sein, da ansonsten die Variablen dieser Differentialgleichung schon getrennt sind. Auch bei dieser Art von Differentialgleichung führt die Substitution zur allgemeinen Lösung. Hierfür wird $z = ax + by + c$ gesetzt und nach x abgeleitet, was die Gleichung $z' = a + b\,y'$ zur Folge hat. Da $y'(x) = f\,(ax + by + c) = f(z)$ ist, gilt $z' = a + b\,f(z)$. Weil auch hier, analog zum vorhergehenden Typus der Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, $z' = \frac{\partial z}{\partial x}$ ist, erhält man auf Grund der Methode der Trennung der Variablen und durch Rücksubstitution die allgemeine Lösung.

Beispiel. Sei $y'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2$ und $z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 2$, also $y'(x) = f(z) = z$. Wird z nach x abgleitet, dann gilt $z' = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}y'$ und somit $z' = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}z$. Demnach ist $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-z}{4}$, wobei die Trennung der Variablen $\frac{1}{1-z}\,dz = \frac{1}{4}\,dx$ ergibt. Führt man nun die Integration durch, gelangt man zu dem Ausdruck $\ln|1-z| = \frac{1}{4}x + C$, welcher mittels der Exponentialfunktion auf die Form $1 - z = \widetilde{c} \cdot e^{\frac{1}{4}x}$, mit $\tilde{c} = e^C$gebracht werden kann. Die allgemeine Lösung $y = c \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + x + 4$, wobei $c = 4 \cdot \widetilde{c}$ ist, erhält man wieder mittels Rücksubstitution und Umformung.

3. Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $y'(x) = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$: Bei diesem Typus einer Differentialgleichung, mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \epsilon \mathbb{R}$ Konstanten und der stetigen Funktion $f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, existieren zwei Kriterien für zwei verschiedene Lösungen, abhängig von der Determinante

$$\triangle \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a \cdot \beta - b \cdot \alpha$$

   (a) Sei $\triangle \neq 0$, dann betrachtet man zuerst das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= -c \\ \alpha \cdot x + \beta \cdot y &= -\gamma \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

   Angenommen $(x_0, y_0) \epsilon \mathbb{R}^2$ ist eine Lösung des Gleichungssystems 3.3.2, so setzt man $\overline{y} = y - y_0$ und $\overline{x} = x - x_0$. Wird $\overline{y}$ nach $\overline{x}$ abgeleitet, dann gilt $\overline{y}'(\overline{x}) = y'(\overline{x}+x_0) = f\left(\frac{a\overline{x}+ax_0+b\overline{y}+by_0+c}{\alpha\overline{x}+\alpha x_0+\beta\overline{y}+\beta y_0+\gamma}\right) = f\left(\frac{a\overline{x}+b\overline{y}}{\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}}\right)$ und somit $\overline{y}'(\overline{x}) = f\left(\frac{a+b\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{\alpha+\beta\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}\right)$. Mittels der Substitution $z = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$ gelangt man zur Ähnlichkeitsdifferentialgleichung des Typs 1, welche durch das auf Seite 61 erklärten Verfahren gelöst werden kann. Wendet man zum Schluss die Rücksubstitution an, wird die allgemeine Lösung erreicht.

Beispiel. Es sei $y'(x) = \frac{y-1}{x-y+3}$ mit $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ gegeben. Dann ist $(-2,1)\epsilon\,\mathbb{R}^2$ eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ x - y &= -3 \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $\overline{y} = y - 1$ und $\overline{x} = x + 2$ ist. Aus $\overline{y}'(\overline{x}) = y'(\overline{x}-2) = \frac{(\overline{y}+1)-1}{(\overline{x}-2)-(\overline{y}+1)+3} = \frac{\overline{y}}{\overline{x}-\overline{y}} = \frac{\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{1-\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}$ erhält man mittels Substitution $\overline{y}'(\overline{x}) = f\left(\frac{a+bz}{\alpha+\beta z}\right) = \frac{z}{1-z}$ für $z = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Wird letzterer Term nach $\overline{x}$ abgeleitet und umgeformt, dann ergibt sich $\overline{y}'(\overline{x}) = z + \overline{x} \cdot z'$, was bedeutet, dass $\frac{z}{1-z} - z = \overline{x} \cdot z'$ ist. Hieraus bekommt man die Differentialgleichung $\frac{1-z}{z^2}\,dz = \bar{x}\,dx$, deren Integration die Gleichung $-\frac{z \cdot \ln|z|+1}{z} = \ln|\overline{x}| + C$, also $-\ln|z| - \frac{1}{z} = \ln|\overline{x}| + C$, liefert. Rücksubstitution ergibt dann $-\ln\left|\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right| - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \ln|\overline{x}| + C$, ein Ausdruck, aus welchem in Folge der Logarithmusgesetze $-\ln|\overline{y}| + \ln|\overline{x}| - \frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \ln|\overline{x}| + C$ entsteht. Somit erhält man die Gleichung $\ln|\overline{y}| = -\frac{\overline{x}}{\overline{y}} - C$, welche, mittels Anwendung der Exponentialfunktion und Rücktransformation, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, nämlich $y = c \cdot e^{-\frac{x+2}{y-1}} + 1$, $c = e^{-C}$, liefert.

(b) Sei $\triangle = 0$. Auch in diesem Fall führt eine Transformation zur gesuchten Lösung, nämlich $\overline{y} = ax + by$ und $\overline{x} = x$. Wird diese durchgeführt, so gelangt man zu einer Differentialgleichung mit trennbaren Variablen, für welche eine allgemeine Lösung, wie schon auf Seite 60 besprochen, gefunden werden kann.

Beispiel. Ein Beispiel für eine solche Differentialgleichung stellt $y'(x) = \frac{x-y+1}{-x+y+1}$ dar, da $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ist. Auf Grund dessen, dass $\overline{y} = x - y$ ist, folgt aus der Ableitung nach $\overline{x} = x$ die Differentialgleichung $\overline{y}'(\overline{x}) = 1 - y\prime(x) = 1 - \frac{\overline{y}+1}{-\overline{y}+1}$. Wird letzterer Term auf den gleichen Nenner gebracht und die Ausdrücke zusammengefasst ergibt sich $\overline{y}'(\overline{x}) = -\frac{2 \cdot \overline{y}}{1-\overline{y}}$, eine Differentialgleichung, welche mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden kann.

Wendet man eben diese Methode an, dann ist $\frac{1-\overline{y}}{\overline{y}}\,d\overline{y} = -2\,d\overline{x}$ der erste Schritt zur allgemeinen Lösung. Integration auf beiden Seiten führt zu der Gleichung $\ln|\overline{y}| - \overline{y} = -2 \cdot \overline{x} + C$, aus welcher durch Rücktransformation und Umformung die implizite allgemeine Lösung $\ln|x-y| - x + y = C$ folgt.

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung der Form $y'(x) = a(x) \cdot y + s(x)$, wobei $s(x)$ Störfunktion heißt, wird lineare Differentialgleichung genannt, da sowohl die Funktionen, wie auch ihre Ableitungen, nur linear auftreten. Des Weiteren sind $a(x)$ und $s(x)$ auf dem offenen Intervall D_x stetig, mit $a(x) : D_x \to \mathbb{R}$ sowie $s(x) : D_x \to \mathbb{R}$.
Bei diesem Typ einer Differentialgleichung unterscheidet man ferner zwischen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, was bedeutet, dass $s(x)$ auf dem gesamten Intervall D_x die Nullfunktion ist, und der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, bei welcher $s(x) \neq 0$ für alle $x \,\epsilon\, D_x$ ist.

1. Die homogene lineare Differentialgleichung $y'(x) = a(x) \cdot y$: Die allgemeine Lösung wird hier auf Grund der Trennung der Variablen erreicht. Da $y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$ ist, gelangt man mittels Umformung und Integration zu der Gleichung $\ln|y(x)| = \int a(x)\,dx + C$. Die Verwendung der Exponentialfunktion führt folglich zur allgemeinen Lösung $y_{hom}(x) = c \cdot e^{\int a(x)\,dx}$, wobei $c = e^C \,\epsilon\, \mathbb{R}$ ist. Angenommen ein Anfangswertproblem $(x_0, y_0) \epsilon\, G = R^2$ ist gegeben, so erhält man die spezielle Lösung für dieses entweder mittels Einsetzen des Punktes in die Gleichung $y(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$ oder durch das Einsetzen des Punktes in die allgemeine Lösung, wodurch c ausgerechnet werden kann. Hat man den Wert von c ermittelt, dann ist die spezielle Lösung von der Form der allgemeine Lösung mit dem Unterschied, dass anstatt der Variablen c der erhaltene Wert eingesetzt wurde.

Beispiel. Zur Veranschaulichung hilft das Beispiel $y'(x) = \frac{x}{1+x^2} \cdot y$. Diese homogene lineare Differentialgleichung kann auf die Form $\frac{1}{y}\, dy = \frac{x}{1+x^2}\, dx$ gebracht werden, welche den weiteren Lösungsweg augenscheinlich macht. Denn Integration, sowie die darauf folgende Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten liefert die allgemeine Lösung $y(x) = c \cdot \sqrt{1+x^2}$, mit $c = e^C$. Angenommen es ist das Anfangswertproblem $(2,1) \epsilon\, \mathbb{R}^2$gegeben. Das Einsetzen dieses in die allgemein Lösung liefert $1 = c \cdot \sqrt{1+2^2}$ und somit $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Die spezielle Lösung für den Anfangswert $(2,1)$ lautet daher $y(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{1+x^2}$.

2. Die inhomogene lineare Differentialgleichung $y'(x) = a(x) \cdot y + s(x)$: Auf Grund dessen, dass sich diese Differentialgleichung von der homogenen linearen Differentialgleichung lediglich durch das Vorhandensein der Störfunktion $s(x)$ unterscheidet, ergibt sich die allgemeine Lösung aus der Addition von $y_{hom}(x)$ mit einer speziellen Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung. Zum Beweis dieser Aussage nimmt man an, dass zwei spezielle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung, nämlich $y_\alpha(x)$ und $y_\beta(x)$ gegeben seien. Somit ist $y'_\alpha(x) = a(x) \cdot y_\alpha + s(x)$, $y'_\beta(x) = a(x) \cdot y_\beta + s(x)$ und die Subtraktion ersterer Differentialgleichung von der letzteren ist $y'_\beta(x) - y'_\alpha(x) = a(x) \cdot (y_\beta - y_\alpha)$. Zum einen fällt also die Störfunktion $s(x)$ weg, zum anderen ist $y_\beta - y_\alpha = y_{hom}$, ergo eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Folglich ist die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung $y_{inh}(x) = y_{hom}(x) + y_s(x)$, wobei hier $y_s(x) = y_\alpha(x)$ ist. Ist es nicht möglich eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung zu identifizieren, so hilft die *Methode der Variation der Konstanten* der Ermittlung einer allgemeinen Lösung. Bei dieser Methode wird der Lösungsansatz $y(x) = c \cdot e^{\int a(x)\, dx}$ verwendet, wobei $c = c(x)$ eine geeignete „Konstante" und auf D_x stetig differenzierbar ist. Leitet man $y(x)$ nach der Produktregel ab, so erhält man $y'(x) = c'(x) \cdot e^{\int a(x)\, dx} + c(x) \cdot a(x) \cdot e^{\int a(x)\, dx}$. Da $y(x) = c \cdot e^{\int a(x)\, dx}$ ist, folgt $y'(x) = c'(x) \cdot e^{\int a(x)\, dx} + a(x) \cdot y(x)$. Andererseits gilt auch $y'(x) = a(x) \cdot y + s(x)$. Durch Gleichsetzen wird die Gleichung $c'(x) \cdot e^{\int a(x)\, dx} + a(x) \cdot y(x) = a(x) \cdot y + s(x)$ erzielt, aus welcher mittels Umformung und Kürzen $c'(x) = \frac{1}{e^{\int a(x) dx}} \cdot s(x)$ re-

sultiert. Weil $c'(x) = \frac{\partial c}{\partial x}$ ist, gilt $c(x) = \int \frac{1}{e^{\int a(x) dx}} \cdot s(x)\, dx$ und somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y(x) = (c + c(x)) \cdot e^{\int a(x)\, dx} = (c + \int \frac{1}{e^{\int a(x) dx}} \cdot s(x)\, dx) \cdot e^{\int a(x)\, dx}$.

Beispiel. Sei $y'(x) = \frac{x}{1+x^2} \cdot y + \frac{1}{x^2}$ gegeben, das heißt $s(x) = \frac{1}{x^2}$. Da die Lösung der homogenen linearen Gleichung, $y_{hom}(x) = c \cdot \sqrt{1+x^2}$, schon gefunden worden ist, reicht es aus, die spezielle Lösung $y_s(x)$ zu ermitteln. Sei nun also $c = c(x)$ eine geeignete „Konstante", so liefert die Ableitung von $y_{hom}(x)$ nach x: $y'_{hom}(x) = c'(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + c(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2 \cdot x$, woraus folgt, dass $y'_{hom}(x) = c'(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + c(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ist. Setzt man nun $y'_{hom}(x) = y'(x)$, wobei beachtet werden muss, dass $y_{hom}(x) = c(x) \cdot \sqrt{1+x^2}$ ist, liefert dies die Gleichung $c'(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + c(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{1+x^2} \cdot c(x) \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{x^2}$ und in weiterer Folge $c'(x) \cdot \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{x^2}$. Auf Grund dessen, dass $c'(x) = \frac{\partial c}{\partial x}$ ist, kann $c(x)$ durch die Methode der Trennung der Variablen ermittelt werden, woraus sich $c(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ ergibt. Die spezielle Lösung lautet somit $y_s(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \sqrt{1+x^2} = -\frac{1+x^2}{x}$, was zu der allgemeinen Lösung $y(x) = c \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{1+x^2}{x}$ führt.

Die exakte Differentialgleichung 1.Ordnung $g(x,y) + h(x,y) \cdot y'(x) = 0$

Es sei $G = D_x \times D_y$ ein Gebiet und $g(x,y) : G \to \mathbb{R}$ sowie $h(x,y) : G \to \mathbb{R}$, $h(x,y) \neq 0$, stetige Funktionen.
Die Differentialgleichung $g(x,y) + h(x,y) \cdot y'(x) = 0$ wird exakt genannt, sofern es eine Stammfunktion $F(x,y)$ von $g(x,y)$ und $h(x,y)$ gibt, welche $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = g(x,y)$ wie auch $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = h(x,y)$ erfüllt.
Dies bedeutet, dass eine solche Stammfunktion genau dann existiert, wenn die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ für alle $(x,y)\epsilon G$ gilt.
Angenommen diese Bedingung ist erfüllt, dann findet sich die Lösung einer exakten Differentialgleichung durch die Berechnung eben dieser Stammfunktion. Auf Grund dessen, dass $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = g(x,y)$ und $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = h(x,y)$ ist, gilt $F(x,y) = \int g(x,y)\,dx + C_1(y) = \int h(x,y)\,dy + C_2(x)$, wobei es sich bei $C_1(y)$ und $C_2(x)$ um „Konstanten" handelt.
Diese können einerseits dadurch gewonnen werden, indem man die von x abhängigen Ausdrücke und die von y abhängigen Ausdrücke auf jeweils eine eigene Seite der Gleichung bringt.
Eine andere Möglichkeit stellt die Ableitung von $F(x,y)$ nach y dar, weil $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \int g(x,y)dx}{\partial y} + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} = h(x,y)$ ist. Hieraus ist man imstande $C_1'(y)$ zu bestimmen, wodurch $C_1(y)$ ermittelt werden kann. Durch das Einsetzen letzteres in $F(x,y) = \int g(x,y)\,dx + C_1(y)$ erhält man die allgemeine Lösung der exakten Differentialgleichung, welche eine Niveaulinie $F(x,y) = C$ der Stammfunktion $F(x,y)$ ist.

Beispiel. Es ist die Differentialgleichung $(3x^2 + 2y) + (2x - 8y) \cdot y'(x) = 0$ gegeben. Aus dem Überprüfen der Integrabilitätsbedingung, $\frac{\partial(3x^2+2y)}{\partial y} = 2 = \frac{\partial(2x-8y)}{\partial x}$, wird ersichtlich, dass es sich hierbei um eine exakte Differentialgleichung handelt. Integriert man nun $g(x,y)$ nach dx , so ergibt sich $F(x,y) = x^3 + 2xy + C_1(y)$. Wird dieses nun nach y abgleitet und mit $h(x,y)$ gleichgesetzt, erhält man $2x + C_1'(y) = 2x - 8y$ und somit $C_1 = -4y^2$. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet daher $F(x,y) = x^3 + 2xy - 4y^2 = C$.

Die Bernoullische Differentialgleichung $y'(x) = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^r$

$a(x)$ und $b(x)$ seien stetige Funktionen mit $a : D_x \to \mathbb{R}$ und $b : D_x \to \mathbb{R}$. Des weiteren ist $r \epsilon \mathbb{R}$ eine Konstante, für welche $r \neq 0$, sowie $r \neq 1$ gelten muss. Will man die allgemeine Lösung einer solchen Differentialgleichung finden, geht man wie folgt vor: Durch die Multiplikation der Differentialgleichung mit y^{-r} auf beiden Seiten wird $y'(x) \cdot y^{-r} = a(x) \cdot y^{1-r} + b(x)$ erhalten. Setzt man in diese Gleichung die Substitution $u(x) = y^{1-r}$ und deren Ableitung $u'(x) = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot y'$ ein, so gewinnt man $\frac{u'(x)}{(1-r)} = a(x) \cdot u(x) + b(x)$. Die Multiplikation mit dem Term $(1-r)$ liefert eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, nämlich $u'(x) = (1-r) \cdot a(x) \cdot u(x) + (1-r) \cdot b(x)$, deren Lösung bereits auf Seite 66 besprochen wurde. Rücksubstitution in der allgemeinen Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung liefert dann dieselbe der Bernoullischen Differentialgleichung.

Beispiel. Es sei $y'(x) = y - x \cdot y^2$, $r = 2$. Werden beide Seiten dieser Differentialgleichung mit y^{-2} multipliziert, so ist das Ergebnis $y'(x) \cdot y^{-2} = y^{-1} - x$ und die Ableitung der Substitution $u(x) = y^{-1}$ nach x liefert $u'(x) = -y^{-2} \cdot y'(x)$. Einsetzen führt folglich zu der Differentialgleichung $-u'(x) = u(x) - x$, das heißt $u'(x) = -u(x) + x$. Als erstes ist nun die allgemeine Lösung des homogenen Teiles dieser linearen Differentialgleichung gesucht. Zu diesem Zweck wird die Lösung von $u'(x) = -u(x)$ durch die Methode der Trennung der Variablen ermittelt, welche lautet: $u_{hom}(x) = c \cdot e^{-x}$, $c = e^C$. Fasst man nun c als $c(x)$ auf, leitet $u_{hom}(x) = c(x) \cdot e^{-x}$ nach x ab und setzt das Ergebnis mit $u'(x)$ gleich, so erhält man die Gleichung $c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} = -u(x) + x$. Hieraus ist leicht ersichtlich, dass $c'(x) = x \cdot e^x$ und folglich $c(x) = e^x \cdot (x-1)$ ist. Daher gilt $u(x) = c \cdot e^{-x} + x - 1$ und die Rücksubstitution liefert die allgemeine Lösung $y(x) = \frac{1}{c \cdot e^{-x} + x - 1}$.

Die Riccatische Differentialgleichung $y'(x) = f(x) \cdot y^2 + g(x) \cdot y + h(x)$

Es sind $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ stetige Funktionen. Um eine allgemeine Lösung dieser Art einer Differentialgleichung zu erhalten, ist die Kenntnis einer speziellen Lösung $y_0(x)$ nötig. Angenommen eine solche ist vorhanden, dann macht dies den Ansatz $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{u(x)}$, also $y\prime(x) = y_0'(x) - \frac{1}{u^2(x)} \cdot u'(x)$ und somit $y'(x) - y_0'(x) = -\frac{1}{u^2(x)} \cdot u'(x)$, möglich.
Auf Grund der Subtraktion $y'(x) - y_0'(x)$, wie auch der Substitution gilt:

$$
\begin{aligned}
y'(x) - y_0'(x) &= f(x) \cdot y^2 + g(x) \cdot y + h(x) - f(x) \cdot y_0^2 - g(x) \cdot y_0 - h(x) \\
-\frac{1}{u^2(x)} \cdot u'(x) &= f(x) \cdot (y_0(x) - \frac{1}{u(x)})^2 + g(x) \cdot (y_0(x) - \frac{1}{u(x)}) - f(x) \cdot y_0^2 - g(x) \\
-u^{-2} \cdot u'(x) &= (2 \cdot f(x) \cdot y_0 + g(x)) \cdot u^{-1} + f(x) \cdot u^{-2}
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis der Multiplikation letzterer Gleichung mit dem Faktor$-u^2$ ist die inhomogene lineare Differentialgleichung $u'(x) = (2 \cdot f(x) \cdot y_0 + g(x)) \cdot u + f(x)$, durch deren Lösung die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung gefunden werden kann.

Beispiel. Ist $y'(x) = y^2 - (2x+1) \cdot y + x^2 + x + 1$ mit der speziellen Lösung $y_0 = x$ gegeben, dann erlaubt dies den Ansatz $y(x) = x + \frac{1}{u(x)}$. Differenziation nach x liefert die Gleichung $y'(x) = 1 - \frac{1}{u^2(x)} \cdot u'(x)$ und somit gilt $1 - \frac{1}{u^2(x)} \cdot u'(x) = (x + \frac{1}{u(x)})^2 - (2x+1) \cdot (x + \frac{1}{u(x)}) + x^2 + x + 1$, woraus die Gleichung $-\frac{1}{u^2(x)} \cdot u'(x) = \frac{1}{u^2(x)} - \frac{1}{u(x)}$ folgt. Die Multiplikation mit dem Faktor $-u^2$ auf beiden Seiten führt zu der inhomogenen linearen Differentialgleichung $u'(x) = 1 - u(x)$. Betrachtet man den homogenen Teil dieser, so ist ersichtlich, dass die Methode der Trennung der Variablen bei diesem die gesuchte homogene Lösung nach sich zieht. Diese lautet $u_{hom}(x) = c \cdot e^x$, mit $c = e^C \epsilon \mathbb{R}$. Die Ableitung von $u_{hom}(x)$ nach x, wobei angenommen wird, dass $c = c(x)$ ist, und die Gleichsetzung dieses Ergebnisses mit $u'(x)$ liefert $c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x = u(x) - 1$. Aus dem Vereinfachen dieser Gleichung entsteht $c'(x) \cdot e^x = 1$, wodurch $c = \frac{1}{e^x}$ erhalten wird. Somit lautet die spezielle Lösung $u_s = 1$, welche gemeinsam mit der homogenen Lösung zu der allgemeine Lösung $u(x) = c \cdot e^x + 1$ führt. Durch die Rücksubstitution dieses Ergebnisses in $y(x) = x + \frac{1}{u(x)}$ gelangt man zu der allgemeinen Lösung $y(x) = x + \frac{1}{c \cdot e^x + 1}$.

3.4 Vor- und Nachteile von Differenzen- und Differentialgleichungen

Häufig können dynamische Systeme mittels Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen dargestellt werden, wobei jede dieser Beschreibungen Vor-, wie auch Nachteile aufweist. So können etwa Differenzengleichungen nicht nur leichter simuliert werden, sie bieten auch das mathematische Werkzeug um eine größere Fülle an realen Problemen zu beschreiben, als es durch Differentialgleichungen möglich ist. Jedoch ist es oft schwer, für Differenzengleichungen eine geschlossene Lösungsformel anzugeben. Trotz dieser Tatsache werden manchmal Differentialgleichungen, für welche die Lösungsfunktionen selten exakt ermittelt werden können, durch die dazugehörigen Differenzengleichungen ausgetauscht, da dann immerhin die Lösung näherungsweise berechnet werden kann. Differentialgleichungen bieten hingegen den Vorteil, dass sie sehr übersichtlich sind, eine Eigenschaft, welche bei Differenzengleichungen oftmals zu wünschen übrig lässt.
Die Übersichtlichkeit ist es auch, warum einem Differenzengleichungssystem gegenüber einer einzigen Differenzengleichung meist der Vorzug gegeben wird. Oftmals wird sogar mit einem Differenzengleichungssystem gearbeitet, obwohl dieses in eine einzige Differenzengleichung umgewandelt werden könnte. Des weiteren besitzen Differenzengleichungssysteme den Vorteil, dass etwaige Änderungen lediglich die Bearbeitung einer einzelnen Gleichung nach sich zieht, was das Variieren von Modellen, sowie das Experimentieren ungemein erleichtert. (vgl. [33])

Kapitel 4

Unterrichtsmaterialien

4.1 Unterrichtsbeispiele: Differenzengleichungen

Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Die lineare Differenzengleichung 1. Ordnung vom Typ $x_{n+1} - a \cdot x_n = 0$

Beispiel. Seit 1960 ist der Blauwal weltweit geschützt, da er durch den industriellen Walfang, welcher zwischen 1920 und 1940 begann, auf wenige Prozent seines ursprünglichen Bestandes geschrumpft ist. Die Blauwalpopulation in der südlichen Hemisphäre wurde für das Jahr 1997/1998 von der internationalen Walfangkomission (IWC) auf 2300 geschätzt. Wenn sich diese Population mit einer jährlichen Wachstumsrate von ca. $8,2\%$ erholt und das Fangverbot eingehalten wird, wie lange dauert es dann, bis die vom IWC angenommene ursprüngliche Zahl von etwa 200 000 Tieren wieder erreicht wird?

Beispiel. Kohlenstoffdioxid ist nicht nur die Basis allen pflanzlichen Lebens, sondern auch ein Bestandteil der so genannten „Treibhausgase", welche zum Klimawandel beitragen. Messungen der Luft haben gezeigt, dass der aktuelle Wert von Kohlenstoffdioxid bei $386\,ppm$ (parts per million) liegt. Die jährliche Zuwachsrate ist dabei im Bereich von $0,4 - 0,5$ Prozent anzusiedeln. Um die weltweiten Folgen des Klimawandels noch beherrschen zu können, rät der Weltklimarat dazu, die Konzentration des Kohlenstoffdioxids nicht $450\,ppm$ übersteigen zu lassen. Wann sind diese $450\,ppm$ erreicht, wenn die internationale Gemeinschaft nichts unternimmt und der Kohlenstoffdioxidgehalt jährlich um $0,45\%$ wächst? Um wie viel früher ist dies der Fall, wenn das „worst case scenario" angenommen wird?

Die lineare Differenzengleichung 1. Ordnung vom Typ $x_{n+1} - a \cdot x_n = b$

Beispiel. Auf einer Insel siedelt sich eine neue Vogelart an, welche sich mit einer jährlichen Rate von 15% vermehrt. Durch Zuzug kommen jedes Jahr 20 neue Exemplare hinzu. Wie ist die Entwicklung über einen langen Zeitraum? Ist diese realistisch? (vgl. [18])

Beispiel. Ein kleiner, flacher Teich enthält 200 000 Liter Wasser. Täglich fließen 10 000 Liter in den Teich, gleichzeitig verdunsten jeden Tag 4% des Wassers im Teich. Erstelle eine Formel, welche den Wasserbestand des Sees als Differenzengleichung angibt. Gibt es für die Wassermenge des Teiches eine Grenze? (vgl. [17])

Die lineare Differenzengleichung 1. Ordnung vom Typ $x_{n+1} - a \cdot x_n = b_n$

Beispiel. Die Fischmenge M in einem Teich, M als totale Fischbiomasse in kg ausgedrückt, beträgt 6000 kg und wächst durch Eiablage und Wachstum der Fische mit der spezifischen Rate $r = 2$ pro Jahr. Der natürliche Verlust beträgt jedes Jahr 10%. Ausgehend von diesen Daten legt ein Angelverein eine Fangrate von 1200 kg pro Jahr fest, welche jedes Jahr um 20% erhöht wird.

1. Stelle eine Differenzengleichungen auf, welche den Wachstumvorgang der Fischmenge M beschreibt.

2. Wie groß ist die Fischmenge M am Ende des ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Jahres, wenn $x_0 = 6000\,kg$ ist? Stelle den Wachstumsverlauf der ersten fünf Jahre in einem $(n,\, x_n)$- Koordinatensystem dar.

Die lineare Differenzengleichung 1. Ordnung vom Typ $x_{n+1} - a_n \cdot x_n = b_n$

Beispiel. Das Leben im (Erd-)Boden bewirkt eine jährliche Zunahme der Nährstoffkonzentration; diese Zuname reduziert sich aber jährlich um 1% ausgehend von 35% (also 34% im zweiten Jahr, 33% im dritten usw.; kurz gesagt: Die Humusbildung lässt nach). Durch Anbau von Getreide werden dem Boden Nährstoffe entzogen. Wird nicht gedüngt, wächst weniger und der Nährstoffentzug wird- ausgehend von 400 Einheiten- jährlich um 5% geringer. Wie entwickeln sich die Nährstoffmengen x_n in den nächsten Jahren, wenn derzeit $x_0 = 1070$ Mengeneinheiten (ME) im Boden zur Verfügung stehen? [18]

Nicht-lineare Differenzengleichung 1. Ordnung

Beispiel. In einem abgegrenzten Gebiet des Nordpolarmeeres lebt eine Population von ca. 1200 Grönlandwalen. In diesem Lebensraum besitzen die Wale keine natürlichen Feinde und finden ein reichhaltiges Nahrungsangebot vor. Daher werden sie sich zunächst annähernd exponentiell vermehren. Naturschützer haben sogar beobachtet, dass die Anzahl der Tiere im ersten Beobachtungsjahr um 8% gewachsen ist. Bei der Zunahme der Anzahl der Wale sinkt aber die vorhandene Nahrung. Auf Grund des sinkenden Nahrungsangebot, wie auch aus Platzgründen, können sich die Wale nicht mehr mit dem zu Beginn vorhandenen Zuwachsfaktor vermehren. Vorsichtigen Schätzungen zu folge bietet das Nordpolarmeer für etwa 20 000 Grönlandwale einen Lebensraum, wobei mit der Annäherung an diese Zahl der Zuwachs der Grönlandwale abnehmen wird. (vgl. [17])

1. Stelle eine Differenzengleichung auf, welche das Wachstum der Wale beschreibt. (Hinweis: Am Anfang ist das Wachstum exponentiell, wenn es sich der Sättigungsgrenze nähert, begrenzt.)

2. Simuliere die Entwicklung der Grönlandwalpopulation mit Hilfe eines geeigneten Programmes für die nächsten 100 Jahre und stelle dies graphisch dar.

Lineare Differenzengleichung 2. Ordnung

Beispiel. Gedankenexperiment: Stell dir vor....

- Ein neugeborenes Kaninchenpaar befindet sich in einem großen Gehege.
- Ein Kaninchenpaar kann sich nach dem 1. Monat fortpflanzen und gebärt nach einem Monat Trächtigkeit immer ein Kaninchenpaar.
- Dieses Verhalten ändert sich nach keiner Generation.

Wie viele Kaninchenpaare sind nach einem Jahr im Gehege? Die Beantwortung dieser Frage gelang im 13. Jahrhundert Leonardo von Pisa, auch „Fibonacci" genannt, und stellt das erste Modell eines Populationswachstums dar, weshalb es von mathematischhistorischer Bedeutung ist.

1. Stelle eine Differenzengleichung auf, welche das Wachstum dieser Kaninchenpopulation beschreibt. Hilfestellung: Fülle die folgende Tabelle aus. Was erkennst du?

Monat n	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Kaninchenpaare x_n						

2. Wie viele Kaninchen sind nach einem Jahr im Gehege?

3. Auf dem australischen Festland wurden 1859 von britischen Siedlern 24 Wildkaninchen freigelassen. Um 1920 herum wurde die Kaninchenzahl auf rund 10 Milliarden geschätzt. (Daten aus [49])

   (a) Nimm an, dass es sich bei diesen 24 Kaninchen von 1859 um 12 weibliche und 12 männliche Kaninchen handelt. Welche Kaninchenanzahl hätte Fibonacci für das Jahr 1920 vorausgesagt?

   (b) Wieso kann das Modell von Fibonacci nicht stimmen? Welche Verbesserungsvorschläge hast du, damit ein realistischeres Modell angefertigt werden kann?

Beispiel. *„Mehr als die Hälfte aller Arten, die auf der Erde vorkommen, leben innerhalb oder auf den Körpern anderer Organismen. Dort finden sie die Bedingungen und manchmal auch die Ressourcen, die sie für ihr Wachstum benötigen. Fast jeder Organismus ist das Habitat eines anderen - sogar Bakterien stellen Habitate für ihre spezifischen Viren dar, die Bakteriophagen. Eine enge Beziehung zwischen Individuen verschiedener Arten, bei der eines in oder auf dem anderen lebt, bezeichnet man als Symbiose."* [42]
Der Begriff Symbiose wird in der Biologie, ungleich dem Gebrauch in der Alltagssprache, als Überbegriff für verschiedenste Arten des Zusammenlebens verwendet. Das Spektrum der Gestalt des Zusammenlebens ist breit gefächert, so kann es einerseits sein, dass die Beziehung von zwei Lebewesen zum Tod eines der beiden führt, andererseits ist es etwa auch möglich, dass zwei Organismen den jeweils anderen zum Überleben benötigen. Zwischen diesen beiden extremen Formen der Symbiose gibt es noch viele weitere abgeschwächte Spielarten dieser.
Nehmen wir an, dass eine Population der Spezies A und eine Population der Art B in einer Form der Symbiose leben, welche sich positiv auf die Entwicklung dieser beiden Populationen auswirkt, wobei jede dieser Populationen auch ohne die andere überleben würde. Dieser Fall kann durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + a \cdot B_n \\ B_{n+1} &= B_n + b \cdot A_n \end{aligned}$$

beschrieben werden. Es ist möglich A_{n+1} durch geschicktes Eliminieren von B_n als eine Differenzengleichung 2. Ordnung darzustellen. Auch für B_{n+1} kann diese Umformung vollzogen werden, in dem in dessen Gleichung A_n geschickt ausgetauscht wird. a und b sind dabei positive Konstanten, welche die wechselseitige Beeinflussung der Populationen A und B beschreiben. (vgl. [17])

1. Stelle A_{n+1} als Differenzengleichung 2. Ordnung dar. (Hilfestellung: Nimm hierfür die Gleichung von B_{n+1} zur Hilfe und verändere für dieses geschickt den n- Wert.) Stelle A_n explizit dar.

2. Führe Aufgabe Nummer 1 für B_{n+1} durch.

3. Die Population A besteht zu Beginn unserer Betrachtungen aus 80 Individuen und die Population B aus 100. Ein Jahr später besitzt die Population A bereits 86 Individuen und B 103.

   (a) Ermittle die Konstanten a und b.

   (b) Stelle A_n und B_n explizit dar.

   (c) Stelle die Entwicklung der beiden Populationen für die nächsten 40 Jahre in einer Graphik dar.

Systeme von Differenzengleichungen

Beispiel. Angenommen ein kleiner Wald besteht aus zwei Arten von Bäumen, wobei A_n die Anzahl der Bäume A und B_n die Anzahl der Bäume B im Jahr n ist. Stirbt ein Baum, so wächst an seiner Stelle ein neuer Baum, welcher entweder zur Art A oder zur Art B gehört. Die Spezies A lebt sehr lange, sodass jedes Jahr nur 1% dieser Art stirbt. Bei den Bäumen der Art B sterben hingegen jedes Jahr 5% . Weil die Bäume B jedoch sehr schnell wachsen, fallen 75% der freien Stellen ihnen zu. Die Art A bekommt hingegen nur 25% der vakanten Stellen. Dieser Vorgang kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n - 0,01 \cdot A_n + 0,25 \cdot 0,01 \cdot A_n + 0,25 \cdot 0,05 \cdot B_n \\ B_{n+1} &= B_n - 0,05 \cdot B_n + 0,75 \cdot 0,05 \cdot B_n + 0,75 \cdot 0,01 \cdot A_n \end{aligned}$$

1. Erkläre die einzelnen Terme, aus welchen sich der Baumbestand der Spezies A, wie auch der Baumbestand der Spezies B im Jahr $n+1$ zusammensetzen.

2. Stelle das Modell in der Matrixschreibweise dar und ermittle die explizite Darstellung für $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$.

3. Sind zu Beginn der Beobachtung des Waldes 10 Bäume der Art A und 990 Bäume der Spezies B vorhanden, wie entwickelt sich der Baumbestand des kleinen Waldes auf lange Sicht? Benutze hierfür ein geeignetes Computerprogramm und betrachte die Jahre 1 bis 5, sowie die Jahre 10, 50, 100, 500 und 1000.

4. Gibt es einen Gleichgewichtszustand? Ermittle den Fixvektor $\overrightarrow{z}$.

(vgl. [3])

Beispiel. Die mathematische Epidemiologie ist ein Teilgebiet der Biomathematik, welches versucht, die Ausbreitung von Infektionskrankheiten in einer Population mit Hilfe mathematischer Modelle zu beschreiben. Bei der Ansteckung durch eine Krankheit besteht einerseits die Möglichkeit, dass sie durch ein infiziertes Populationsmitglied oder durch einen Zwischenwirt auf ein gesundes Individuum übertragen wird. Eine Krankheit kann zudem heilbar sein oder auch nicht. Des Weiteren besteht bei manchen heilbaren Krankheiten die Möglichkeit der Immunisierung, bei anderen wiederum nicht. Es besteht auch die Chance, dass ein Individuum nicht krank wird, obwohl es Kontakt zu einem erkrankten Populationsmitglied hatte, etwa wegen einer Schutzimpfung, weil das Immunsystem die Krankheitserreger vernichten konnte oder weil der Kontakt zu dem kranken Individuum zu wenig intensiv war. Neben dieser Vielzahl von Faktoren gibt es noch eine Reihe weiterer, welche sich auf die Ausbreitung einer Krankheit auswirken. Hieraus wird ersichtlich, dass sich die mathematischen Modelle in der Epidemiologie meist sehr komplex gestalten.
Das einfachste Modell einer Epidemie geht davon aus, dass eine fixe Populationsgröße P vorhanden ist. Diese besteht zu einem Zeitpunkt t aus den gesunden, aber grundsätzlich infizierbaren Individuen, welche in der Literatur mit S_t (engl. susceptible) angegeben werden, und den kranken Individuen I_t (engl. infectious). Die Krankheit ist zwar heilbar, jedoch wird man nicht dagegen immun. In jedem Zeitschritt wird ein Prozentsatz a der Gesunden angesteckt und ein Anteil b der Kranken wieder gesund. Dieses Modell wird $SI-$Modell genannt.

1. Das SI-Modell lautet

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t - a \cdot S_t + b \cdot I_t \\ I_{t+1} &= I_t - b \cdot I_t + a \cdot S_t \end{aligned}$$

   Welche Werte können a und b annehmen?

2. Stelle das Modell in der Matrixschreibweise dar und ermittle die explizite Darstellung für $\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} S_t \\ I_t \end{pmatrix}$.

3. Eine Population besteht aus 10 000 Individuen. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 6% wird ein gesundes Individuum mit der Krankheit infisziert. Die Heilungsrate in jedem Zeitschritt beträgt 20%. Simuliere den Verlauf mit Hilfe eines geeigneten Computerprogrammes. Was stellst du fest?

4.2 Unterrichtsbeispiele: Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Die Differentialgleichung der Form $y'(x) = g(x)$

Beispiel. Bei linearem Wachstum ist die momentane Änderungsrate einer Funktion eine Konstante k, das heißt $f'(x) = k$.

1. Löse diese Differentialgleichung.

2. Die Entwicklung der österreichischen Bevölkerung wird von der Statistik Austria (www.statistik.at) verfolgt. Sie stellte zu Beginn des Jahres 1981 eine Bevölkerung von 7.553.326 Menschen fest, Anfang des Jahres 1982 waren es schon 7.584.094.

   (a) Wenn du linearen Wachstum annimmst, wie groß wäre die österreichische Bevölkerung zu Beginn des Jahres 2010? Vergleiche dein Ergebnis mit dem ermittelten Wert der Statistik Austria.

   (b) Wie sieht die zukünftige Entwicklung der österreichischen Bevölkerung bei linearem Wachstum aus? Ist dies realistisch? (Hinweis: Betrachte den Grenzwert für $t \to \infty$)

Beispiel. Die flugunfähige Vogelart Kiwi lebt in Neuseeland. Auf Grund von eingeführten Arten, wie etwa Hunde und Katzen, sowie wegen des Straßenverkehrs, sind jene Kiwis, welche nicht in Reservaten leben, in ihrem Bestand bedroht. Eine Untersuchung stellte fest, dass im Jahre 2008 der freilebende Bestand von Kiwis nur noch rund 72 600 Tiere betrug. Die jährliche Rückgangsrate wird mit $2 - 3\%$ angegeben. (vgl. [47])

1. Wenn die momentane Änderungsrate der Kiwipopulation durch eine Konstante k beschrieben werden kann, durch welche Funktion kann dann die Änderung der Population repräsentiert werden?

2. Nimm an, dass die jährliche Rückgangsrate $2,5\%$ beträgt. Wann wird es keine freilebenden Kiwis mehr geben, wenn nichts unternommen wird?

Die Differentialgleichung $y'(x) = g(x) \cdot h(y)$ mit trennbaren Variablen

Beispiel. Manchmal produzieren Populationen Gifte, etwa durch Stoffwechselrückstände, welche sie in ihrem Wachstum hemmen oder sogar tödlich wirken. Ist dies der Fall, so tritt das sogenannte Wachstum mit Selbstvergiftung auf.

1. Die Differentialgleichung für das Wachstum mit Selbstvergiftung lautet $P'(t) = a \cdot P(t) - d \cdot g(t) \cdot P(t)$, wobei $g(t) = b \cdot e^{a \cdot t}$ die von der Population produzierte Giftmenge ist. a, b und d sind Konstanten, welche größer als 0 sind. Wofür stehen sie?

2. Löse die Differentialgleichung. (Hinweis: Trennung der Variablen)

3. Wird Bier gebraut, so setzt man einer Mischung aus Hopfen, Malz und Wasser Hefebakterien hinzu. Da beim Vergären einer zuckerhaltigen Lösung durch Hefebakterien Alkohol entsteht, welcher sich negativ auf deren Wachstum auswirkt, liegt bei diesem Prozess ein Wachstum mit Selbstvergiftung vor. Sei $P(t)$ die Anzahl der Hefebakterien zum Zeitpunkt t und zu Beginn 8 Millionen Bakterien in einem Milliliter dieser Mischung vorhanden. Wenn sich Hefebakterien unter idealen Bedingungen um 50% pro Stunde vermehren und $d \cdot b = 0,0306$ ist, wie sieht dann die zeitliche Entwicklung der Bakterienpopulation aus? (vgl. [17])

Beispiel. Eine Population wächst, wenn ideale Bedingungen vorhanden sind, exponentiell mit der Rate a. Angenommen es wird dieser Population in gleichen Zeitabständen t eine zunehmende Giftmenge zugeführt, was durch die Funktion $g(t) = b \cdot t$,b die Giftmenge zu Beginn, ausgedrückt werden kann. Die wachstumshemmende Wirkung dieses Giftes auf die Population kann, je nach Art des Giftes, durch einen spezifischen Wert d angegeben werden. Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Population reduziert sich somit proportional (Proportionalitätsfaktor ist der spezifische Wert d) zu der Anzahl der Individuen der Population und zu der Menge des zugeführten Giftes. Diese Art des Wachstums wird vergiftetes Wachstum genannt.

1. Stelle eine Differentialgleichung für vergiftetes Wachstum der Population auf, wobei $P(t)$ die Anzahl der Individuen der Population zum Zeitpunkt t sei.

2. Löse diese Differentialgleichung. (Hinweis: Trennung der Variablen)

3. In einem Labor soll an einer Bakterienkultur, welche unter idealen Bedingungen pro Stunde um 20% wächst, ein neues Antibiotikum getestet werden. Zu Beginn des Experimentes sind 1 000 000 Bakterien vorhanden. Ausgehend von 1.2 mg wird jede Stunde eine erhöhte Dosis dieses für die Bakterien giftigen Antibiotika gespritzt, was durch die Funktion $g(t) = 1,2 \cdot t$ beschrieben werden kann. Dieses Gift wirkt mit einer spezifischen Rate $d = 0,4$. Nach wie vielen Stunden sind keine Bakterien mehr vorhanden? (vgl. [17])

Die Bernoullische Differentialgleichung $y'(x) = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^r$

Beispiel. Seit 1960 ist der Blauwal weltweit geschützt, da er durch den industriellen Walfang, welcher zwischen 1920 und 1940 begann, auf wenige Prozent seines ursprünglichen Bestandes geschrumpft ist. Die Blauwalpopulation in der südlichen Hemisphäre wurde für das Jahr 1997/1998 von der internationalen Walfangkomission (IWC) auf 2300 geschätzt. Es wurde beobachtet, dass sich die Blauwalpopulation mit einer Wachstumsrate von ca. 8,2% erholt, wenn das Fangverbot eingehalten wird. Wie lange dauert es dann, bis die vom IWC angenommene ursprüngliche Zahl von etwa 200 000 Tieren wieder erreicht wird?

1. Stelle eine Differenzengleichung auf, welche den Wachstum der Walpopulation beschreibt.

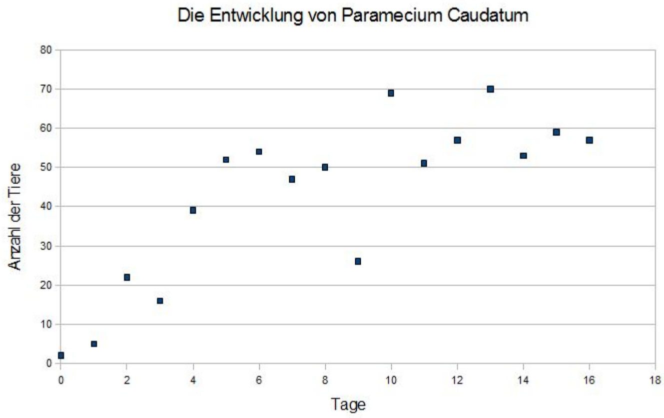
2. Der Wachstum kann auch durch die Differentialgleichung

$$P'(t) = a \cdot P(t) \cdot [K - P(t)]$$

beschrieben werden. Löse diese und rechne a aus. (Hinweis: Erkennst du die Bernoullische Differentialgleichung?)

3. Welche Annahmen sind bei der Differenzengleichung ausschlaggebend, welche bei der Differentialgleichung? Was erscheint dir realistischer? Begründe!

Beispiel. Paramecium caudatum ist eine Pantoffeltierchenart. Der russische Mikrobiologe G. F. Gause untersuchte um 1934 diese Art in Laborexperimenten, wobei er die Anzahl der sich in $0.5\,cm^3$ Nährlösung befindlichen Tiere jeden Tag zählte. Die Ergebnisse seiner Forschung können in der untenstehenden Graphik abgelesen werden (Daten: vgl. [11]).



1. Der Wachstum dieser Pantoffeltierchen kann durch die logistische Differentialgleichung $P'(t) = 0.016 \cdot P(t) \cdot [60 - P(t)]$ angenähert werden. Was bedeuten die Werte 0.016 und 60?

2. Löse diese logistische Differentialgleichung. Der Anfangswert sei hierbei $P(0) = 2$.

3. Rechne die Ergebnisse für die Zeitpunkte 2, 4, 6, $\ldots$, 16 aus und erstelle eine Graphik. Was hältst du von diesem Modell?

4.3 Modellierungsaufgaben

Beispiel. In einem künstlich errichteten Naturteich, in welchem höchstens 400 Fische leben können, werden 20 Fische ausgesetzt. Nach einem Jahr befinden sich bereits 28 Fische darin, nach dem zweiten sind es schon 39. Wie lange wird es dauern, bis die Grenze der Kapazität erreicht ist? Welche Gründe können dafür verantwortlich sein, dass nicht mehr als 400 Fische in dem Teich leben können?

Beispiel. Im Jahr 1960 war der Aralsee noch der 4. größte See der Erde mit einer beachtlichen Oberfläche von fast 70 000 km². Durch die zunehmende landwirtschaftliche Nutzung des Wassers der Zuflüsse des Aralsees, wie etwa der Bewässerung von Baumwollplantagen, verlandete der See zunehmend und teilte sich sogar. Seit Mitte der 1980er Jahre sprechen Wissenschaftler nicht mehr von dem Aralsee, sondern vom großen und kleinen bzw. dem nördlichen und südlichen Aralsee.

	Großer Aralsee			Kleiner Aralsee		
Jahr	Wasserlevel in m	Wasseroberfläche in tausend km²	Volumen in km³	Wasserlevel in m	Wasseroberfläche in tausend km²	Volumen in km³
1986	41,02	38,56	380,63	40,9	2,83	22,47
1987	40,19	37,13	343,17	40,8	2,81	22,39
1988	39,67	36,18	312,65	40,5	2,75	21,84
1989	39,1	35,3	306,92	40,2	2,71	20,28
1990	38,24	33,67	280,44	40,5	2,75	21,84
1991	37,66	32,02	257,16	40,4	2,73	20,92
1992	37,2	31,83	240,17	40,2	2,71	20,28
1993	36,95	31,42	231,7	39,37	2,57	18,43
1994	36,9	31,31	229,87	40,1	2,69	20,01
1995	36,5	30,04	217,25	40,5	2,75	21,84
1996	35,48	28,54	195,63	40,5	2,75	21,84
1997	34,8	26,91	173,44	41,2	2,91	22,67
1998	34,21	25,75	168,43	42,5	3,24	27,03
1999	33,98	24,12	147,62	36,8	2,09	12,03
2000	33,5	22,93	139,53	39,8	2,62	19,26
2001	32,4	21	131,16	39,2	2,55	17,97
2002	32	18,7	110,84	39,3	2,58	18,44
2003	31,5	17,3	97,23	40	2,65	19,77
2004	31,09	16,4	93,46	40,8	2,81	22,39
2005	30,7	15,77	89,79	41	2,86	22,52
2006	30,4	13,47	81,35	41,8	2,99	24,01

Abbildung 4.3.1: Entwicklung des kleinen und großen Aralsees von 1986 bis 2006 (Daten aus [46])

Welche Prognose stellst du für die Entwicklung des großen Aralsees an Hand der in der Abbildung 4.3.1 vorhandenen Daten? Suche aktuelle Daten für den großen Aralsee. Stimmen die Prognosen mit deinen Berechnungen überein?

Kapitel 5

Zusammenfassung

Diese Arbeit setzt sich mit der Behandlung von Differenzen- und Differentialgleichungen im Unterricht mittels anwendungsorientierter Kontexte auseinander.

Hierfür wurde in der Einleitung versucht, eine allgemein didaktische, sowie, durch den Mathematiklehrplan der 8. Klasse AHS, eine rechtliche Grundlage der zu besprechenden Themen zu schaffen.

Das zweite Kapitel widmet sich einem relativ neuen, im Unterricht verwendeten Aufgabentypus, nämlich den Modellierungsaufgaben. Dabei lag der Fokus darauf, eine kurze Darstellung der wichtigsten Begriffe und Theorien von Modellierungen im Unterricht zu erarbeiten. Auf Grund der konzentrierten Abhandlung dieses Themas wurde von vielen, auch wichtigen, Aspekten abgesehen. Für Lehrpersonen, welche Modellierungsaufgaben in ihrem Unterricht integrieren möchten, ist es deshalb unverzichtbar, sich mit einschlägiger Fachliteratur zu diesem Thema zu beschäftigen.

Die Differenzen- und Differentialgleichungen kommen im dritten Kapitel zur Sprache. Das Ziel für die mathematische Darstellung dieser lautete, dass sich deren Theorie zwischen dem Bereich der Schulmathematik und jener der „reinen Mathematik" ansiedeln soll. Es ist an dieser Stelle darauf hinzuweisen, dass die Auswahl dieser Theorie eine sehr subjektive war, weil im Mathematiklehrplan der 8. Klasse AHS nicht spezifiziert wird, welche Arten von Differenzen- und Differentialgleichungen, außer dem Typ $y' = k \cdot y$, im Unterricht besprochen werden sollen.

Bei dem letzten Kapitel, welches die Unterrichtsmaterialien enthält, war ursprünglich geplant, lediglich selbstgestaltete Beispiele der Autorin mit möglichst realitätsnahen Daten anzuführen. Dieses Ziel konnte leider nicht vollständig erfüllt werden, da sich das Auffinden von geeigneten Daten als sehr viel schwieriger, wie ursprünglich angenommen, erwies.

Abstract

This diploma thesis deals with the teaching of difference and differential equations in applied contexts. The introduction gives, in addition to a didactical basis, a regulatory basis for the following work based on the curriculum for the 8th form AHS. The second chapter considers the relatively new area of modelling examples, including a short overview of the most important theories and concepts. However, because of the focused view this chapter takes on the subject, it is recommended that any teacher considering applying modelling examples in school should read further on the subject. The third chapter deals with the theory of difference and differential equations. This theory is found to be a compromise between the mathematics taught at school and pure mathematics. The types of difference and differential equations considered in this work may be seen as subjective, as the curriculum for the 8th form AHS does not specify what types of difference and differential equations should be taught, only the form $y' = k \cdot y$. The application of this theory through teaching materials based on biological systems and their associated models is considered in the final chapter.

Literaturverzeichnis

[1] Ableitinger, Christoph (2008). *Diskrete biomathematische Modelle im Schulunterricht. Chancen aus der Sicht der Mathematikdidaktik.* Dissertation. Universität Wien.

[2] Ableitinger, Christoph (2010). *Biomathematische Modelle im Unterricht. Fachwissenschaftliche und didaktische Grundlagen mit Unterrichtsmaterialien.* Vieweg+Teubner Verlag. Wiesbaden.

[3] Allman, Elizabeth S.; Rhodes, John A. (2004). *Mathematical Models in Biology. An Introduction.* Cambridge University Press. Cambridge.

[4] Ayres, Frank (1999). *Differentialgleichungen.* McGraw-Hill Publishing Company. Frankfurt am Main.

[5] Baer, Dieter; Wermke, Matthias (2000). *Duden. Das große Fremdwörterbuch. Herkunft und Bedeutung der Fremdwörter.* Dudenverlag. Mannheim. 2. Auflage.

[6] Bartsch, Hans-Jochen (2007). *Taschenbuch mathematischer Formeln.* Carl Hanser Verlag. München. 21. Auflage.

[7] Bigalke, Anton; Köhler, Norbert (Hrsg.) (1995). *Analysis Kursstufe.* Cornelsen Verlag. Berlin. 1. Auflage.

[8] Blechman, Il´ja; Myškis, Anatolij; Panovko, Jakov (1984). *Angewandte Mathematik.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin.

[9] Blum, Werner (1996). *Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht-Trends und Perspektiven.* In: Kadunz et al. (1996).

[10] Blum, Werner (2006). *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht - Herausforderung für Schüler und Lehrer.* In: Büchter et al. (2006).

[11] Brauer, Fred; Castillo-Chávez, Carlos (2001). *Texts in Applied Mathematics 40. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Springer Verlag. New York.

[12] Braunß, Hans-Andreas; Junek, Heinz; Krainer, Thomas (2007). *Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften.* Birkhäuser Verlag. Basel, Boston, Berlin.

[13] Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern-Leistung überprüfen.* Cornelsen Verlag. Berlin. 1. Auflage.

[14] Büchter, Andreas; Humenberger, Hans; Hußmann, Stephan; Prediger, Susanne (Hrsg.) (2006). *Realitätsnaher Mathematikunterricht - vom Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag.* Verlag Franzbecker. Hildesheim.

[15] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. (1995). *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung. Aufgaben. Lösungen.* Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg.

[16] Dürr, Rolf; Ziegenbalg, Jochen (1989). *Mathematik für Computeranwendungen. Dynamische Prozesse und ihre Mathematisierung durch Differenzengleichungen.* Verlag Ferdinand Schöningh. Paderborn. 2., verbesserte Auflage.

[17] Engel, Joachim (2010). *Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende.* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg.

[18] Götz, Stefan; Reichel, Hans-Christian; Müller, Robert; Hanisch, Günter (2004). *Lehrbuch der Mathematik 7. Klasse.* öbv&pt Verlagsgesellschaft. Wien. 4. Auflage.

[19] Greefrath, Gilbert (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe.* Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg.

[20] Henn, Hans-Wolfgang (2000). *Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen…oder…von guten und schlechten Modellen.* In: Hirscher (2000).

[21] Henn, Hans-Wolfgang (Hrsg.) (2003). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 2003 in Dortmund.* Verlag Franzbecker. Hildesheim.

[22] Heuser, Harro (1980). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Verlag B. G. Teubner.Wiesbaden. 15. Auflage.

[23] Heymann, Hans Werner (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik. Band 13.* Beltz Verlag. Weinheim. Basel.

[24] Hinrichs, Gerd (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht.* Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg.

[25] Hirscher, Horst (2000). *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht. Bericht über die 16. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 1. bis 4. Oktober 1998 in Wolfenbüttel.* Verlag Franzbecker. Hildesheim.

[26] Hofer, Julia (2009). *Wachstum ohne Grenzen? Modellierung von Wachstums- und Zerfallsprozessen durch Differenzengleichungen.* Diplomarbeit. Universität Wien.

[27] Kadunz, Gert; Kautschitsch, Hermann; Ossimitz, Günther; Schneider, Edith (Hrsg.) (1996). *Trends und Perspektiven. Beiträge zum 7. internationalen Symposium zur „Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt vom 26.-30.9.1994.* Verlag Hölder-Pichler-Tempsky. Wien.

[28] Kaiser, Gabriele; Maaß, Katja (2006). *Vorstellungen über Mathematik und ihre Bedeutung für die Behandlung von Realitätsbezügen.* In: Büchter et al. (2006).

[29] Koller, Dieter (Hrsg.) (1995). *Simulation dynamischer Vorgänge. Ein Arbeitsbuch.* Ernst Klett Schulbuchverlag. Stuttgart. 1. Auflage.

[30] Lang, Christian B.; Pucker, Norbert (1998). *Mathematische Methoden in der Physik.* Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg.

[31] Maaß, Katja (2003). *Veränderungen der Schüler(innen)vorstellungen über Mathematik durch Modellierungsprobleme im Unterricht - erste Ergebnisse einer empirischen Studie*. In: Henn (2003).

[32] Maaß, Katja (2007). *Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe* I. Cornelsen Verlag. Berlin.

[33] Malle, Günther; Ramharter, Esther; Ulovec, Andreas; Kandl, Susanne (2007). *Mathematik verstehen 8*. öbvhpt Verlagsgesellschaft. Wien. 1. Auflage.

[34] Neubrand, Michael (Hrsg.) (2009). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 02.03.2008 bis 06.03.2009 in Oldenburg*. Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien. Münster. Teil I von II.

[35] Ortlieb, Claus Peter; Von Dresky; Caroline; Gasser, Ingenuin; Günzel; Silke (2009). *Mathematische Modellierung. Eine Einführung in zwölf Fallstudien*. Vieweg+Teubner. Wiesbaden.

[36] Plöchinger, Ernst (1995). *Grundkurs höhere Mathematik*. Verlag Harri Deutsch. Thun, Frankfurt am Main.

[37] Reinhardt, Fritz; Soeder, Heinrich (1998). *dtv-Atlas Mathematik. Band 2. Analysis und angewandte Mathematik*. Deutscher Taschenbuch Verlag. München. 10. Auflage.

[38] Rommelfanger, Heinrich (1986). *Differenzengleichungen*. Bibliographisches Institut. Mannheim, Wien, Zürich.

[39] Siller, Hans-Stefan (2006). *Modellbilden - eine zentrale Leitidee der Mathematik*. Dissertation. Paris-Lodron Universität Salzburg.

[40] Strampp, Walter; Ganzha, Victor (1995). *Differentialgleichungen mit Mathematica*. Verlag Vieweg. Wiesbaden.

[41] Timmann, Steffen (1998). *Repetitorium der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Binomi Verlag. Springe.

[42] Townsend, Colin R., Harper, John L., Begon, Michael E. (2003). *Ökologie*. Springer Verlag. Berlin. Heidelberg.

[43] Walter, Wolfgang (2000). *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung*. Springer-Verlag. Berlin. 7. Auflage.

[44] Wenzel, Horst; Meinhold, Peter (1994). *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner Verlagsgesellschaft. Stuttgart. Leipzig. 7. Auflage.

[45] www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (08.02.2011)

[46] www.cawater-info.net/aral/data/morpho_e.htm (27.01.2011)

[47] www.doc.govt.nz/conservation/native-animals/birds/land-birds/kiwi/kiwi/facts/ (23.01.2011)

[48] www.iwcoffice.org/

[49] www.rabbitfreeaustralia.org.au/rabbit_problem.html (25.01.2011)

[50] www.statistik.at

Akademischer Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Christina Monika Drexel

Geburtsdatum: 12.08.1984

Eltern: Günter und Monika Drexel

Geschwister: Judith und Günter

Geburtsort: Dornbirn

Staatsbürgerschaft: Österreich

schulische Ausbildung

1990 - 1994 Private Volksschule Altach

1994 - 1998 Bundesrealgymnasium Dornbirn Schoren

1998 - 2002 BORG Götzis

Studium

2002 - 2003 Diplomstudium der Astronomie an der Universität Wien

2003 - 2010 Lehramtsstudium der Mathematik und Psychologie & Philosophie an der Universität Wien