universität wien

DIPLOMARBEIT

Thales bis Diophant - Antike griechische Mathematiker und ihre Bedeutung für den heutigen Schulunterricht

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin:	Julia Nigl
Matrikel-Nummer:	0601121
Studienkennzahl:	A 190 406 313
Studienrichtung:	Lehramtsstudium UF Mathematik; UF Geschichte, Sozialkunde, Politische Bildung
Betreuer:	Dr. Andreas Ulovec

Wien, am 9.2.2011

Danksagung

Ich danke meinen Eltern Andrea und Manfred, meinem Bruder Niklas, meinem Freund Martin, meinen Großeltern und meinen Freundinnen und Freunden für ihre Unterstützung.
Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Betreuer Dr. Andreas Ulovec für die nützlichen und wichtigen Hilfestellungen bei dieser Diplomarbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der vorliegenden Diplomarbeit sollen die Errungenschaften der griechischen Mathematiker der Antike näher betrachtet und ihr Einfluss auf den heutigen Mathematikunterricht in der Schule untersucht werden. Wie und in welchem Ausmaß beeinflusst die Mathematik der antiken Griechen die aktuelle Schulmathematik? Finden die entsprechenden Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte Eingang in den Unterricht oder in die Schulbücher?

In den Lehrplänen der AHS Unterstufe und der AHS Oberstufe sind historische Betrachtungen der Mathematik vorgesehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen demnach Einblicke in die Entwicklung mathematischer Begriffe und Methoden bekommen. Außerdem sollen sie einige Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen lernen. Historische Informationen können einen alternativen und motivierenden Zugang zur Mathematik bieten. Laut den Lehrplänen soll Mathematik außerdem als dynamische Wissenschaft dargestellt werden und ihre Bedeutung bei der Entwicklung der abendländischen Kultur gezeigt werden. Mathematik soll als ein wichtiger Bestandteil der Allgemeinbildung gesehen werden. Die historische Betrachtung von verschiedenen Themengebieten bietet eine Chance die dynamische Entwicklung zu veranschaulichen. Außerdem ist sie eine Möglichkeit das Thema aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten.

Somit soll diese Arbeit einerseits zeigen, wo die Errungenschaften der griechischen Mathematik in die Lehrpläne und Schulbücher einfließen und andererseits auch die Möglichkeiten für Lehrende darstellen, die Geschichte der griechischen Mathematik in den Unterricht zu integrieren.

Die Grundlagen für diese Arbeit bieten Werke zur Historie der Mathematik, die Lehrpläne der AHS Unterstufe aus dem Jahr 2000 und der AHS Oberstufe aus dem Jahr 2004 und dazu passende aktuelle Schulbuchreihen.

Für Themengebiete der AHS Unterstufe werden die Schulbuchreihen „Das ist Mathematik“ von Hans- Christian Reichel und anderen Autoren und „Mathe Buch“ von Anita Dorfmayr und anderen Autoren herangezogen. „Das ist Mathematik“ wurde gewählt, weil es ein bewährtes und häufig eingesetztes Schulbuch ist. Als Gegensatz soll mit dem „Mathe Buch“ ein relativ neues Schulbuch in die Betrachtungen miteinbezogen werden.

Die Schulbuchreihen „Lehrbuch Mathematik“ von Stefan Götz und anderen und „Mathematik verstehen“ von Günter Malle und anderen werden für die Analyse der Themen der AHS Oberstufe verwendet. Die Gründe für die Verwendung sind denen der Schulbücher der AHS Unterstufe sehr ähnlich. Das „Lehrbuch Mathematik“ ist ein sehr weit verbreitetes und bewährtes Mathematikschulbuch und sollte deshalb in der Schulbuchanalyse nicht fehlen. „Mathematik verstehen“ von Günter Malle ist ein relativ neues Mathematikbuch, aber bereits am Vormarsch. Denn es wird immer öfter im Unterricht eingesetzt.

Der Aufbau der neun Kapitel ist identisch. Zuerst werden der jeweilige griechische Mathematiker, seine Lebensumstände und seine Philosophie betrachtet und vorgestellt. Im Anschluss sollen dessen wichtigsten bzw. herausragenden mathematischen Kenntnisse oder Leistungen aufgezeigt werden. Dabei soll der Fokus vor allem auf den Kenntnissen liegen, die heute noch von Bedeutung für den Schulunterricht „Mathematik“ sind.

Im Anschluss wird auf den Einfluss dieser Kenntnisse auf den heutigen Lehrplan und auf die heutigen Schulbücher eingegangen. Von großem Interesse ist auch, ob oder wie die historischen Mathematiker in den unterschiedlichen Schulbüchern vorgestellt werden.

2 Thales von Milet

Thales von Milet war Mathematiker, Philosoph und Astronom. Er soll jedenfalls der erste Mathematiker gewesen sein, dem gewisse Resultate zugeschrieben werden und der Beweise durchgeführt hat.[1]

Über sein Leben ist uns leider nur sehr wenig bekannt. Vermutlich lebte er von 624 bis 548 v. Chr. in der Handelsstadt Milet an der kleinasiatischen Küste. Milet galt damals als das größte ionische Kulturzentrum.[2] In Anekdoten wird er als geschäftstüchtiger Kaufmann, als weltfremder Theoretiker, als pragmatischer Ingenieur und als Intellektueller beschrieben. Unter anderem soll er im Jahr 585 die Sonnenfinsternis vorausgesagt, eine Theorie über das Wesen der Gestirne besessen, den Magnetismus beschrieben und eine naturwissenschaftliche Erklärung für die Nilüberschwemmungen versucht haben. Sein Ansehen muss sehr groß gewesen sein.[3]

Eine Anekdote über Thales spielt in Ägypten und hat die Höhenmessung der Pyramiden zum Thema. Thales soll von einem ägyptischen Priester gebeten worden sein, die Höhe der Cheopspyramide zu schätzen. Dieser erwiderte aber, dass er die Höhe nicht schätzen wird, sondern messen und zwar ohne Werkzeug und Hilfsmittel. Er legte sich dafür in den Sand, um seine eigene Körpergröße zu bestimmen. Dann stellte er sich an ein Ende der gemessen Länge seines Körpers und wartete bis sein Schatten genauso lang war, wie seine Körpergröße. Im selben Moment musste auch die Schattenlänge der Cheopspyramide ihrer Höhe entsprechen. Um die Höhe zu jeder Zeit messen zu können, machte Thales den Vorschlag einen Wanderstab in den Sand zu stecken und die Schattenlänge mit der Stablänge zu vergleichen. Durch Teilung oder Vervielfachung des Pyramidenschattens konnte man die Höhe des Bauwerks bestimmen.[4]

Neben Thales stammen noch zwei weitere bedeutende Denker aus der Stadt Milet, Anaximandros und Anaximenes. Vermutlich waren sie alle drei von der Vorstellung überzeugt, dass „im Grunde der Welt eine Ordnung herrscht“. Sie konzentrierten sich

[1] Kaiser, Nöbauer, 14
[2] Alten, 50
[3] Schönbeck, 29
[4] Colerus, 18

auf Regelmäßigkeiten des Beobachtbaren und auf Gesetzmäßigkeiten des natürlichen Geschehens.[5] Thales von Milet sah die Welt als von der Natur gegeben, aber er schrieb die Ereignisse nicht mehr der Willkür der Götter zu. Er suchte nach einer Erklärung für den Anfang und bezeichnete das Wasser als Urstoff.[6]

2.1 Geometrie

Thales betätigte sich vor allem im Bereich der Geometrie. Über seine mathematischen Erkenntnisse wissen wir durch Proklos und Diogenes, zwei griechische Philosophen des 5. Jahrhunderts vor Christus, Bescheid.[7] Proklos stützt sich bei seinen Aussagen auf eine nicht erhaltene Mathematikgeschichte des Eudemos von Rhodos.[8]

Thales von Milet scheint viel über die Geometrie bei den Ägyptern gelernt zu haben. Bei Proklos kann man lesen:„*Thales aber verpflanzte zuerst – nachdem er nach Ägypten gekommen war – diese Wissenschaft nach Griechenland und machte selbst viele Entdeckungen; zu vielen anderen legte er für die Späteren den Grund. Sein Verfahren war dabei teilweise mehr allgemeiner Art, teilweise mehr auf die Sinnendinge ausgerichtet*.“ Neben der neuen Messtechnik für die Höhe von Pyramiden, soll Thales auch die Tatsache, dass der Durchmesser den Kreis halbiert, von Darstellungen ägyptischer Denkmäler abgelesen haben. Dort machte er wohl auch die Erfahrung, dass das Jahr aus 365 Tagen besteht.[9]

Wahrscheinlich haben astronomische Beobachtungen zur Entfaltung der Geometrie des Thales beigetragen. Denn die Aussagen von Thales beschreiben konkretes Erfahrungswissen, das möglicherweise bei astronomischen Erkundungen gewonnen wurde. Von der babylonischen Geometrie unterscheidet sich diese Geometrie in der Allgemeinheit der Formulierungen. Die Babylonier beschäftigten sich hauptsächlich mit praktischen Aufgaben, mit Berechnungen von Längen und Abständen. Es ist nicht bekannt, ob Thales selbst die neuen Begriffe entwickelte, ob er sie schon vorgefunden hat oder ob sie überhaupt erst später entstanden.[10]

[5] Schönbeck, 28
[6] Alten, 50
[7] Schönbeck, 29
[8] Scriba, 31
[9] Árpád, 23
[10] Schönbeck, 30

Proklos überlieferte uns auch die ersten vier der folgenden Sätze.[11] Der fünfte und letzte Satz stammt aus einer Überlieferung der Geschichtsschreiberin Pamphile.[12]
Sie lauten in Kurzform:

1) Der Durchmesser halbiert den Kreis.

2) In jedem gleichschenkeligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

3) Wenn zwei Geraden einander schneiden, sind die Scheitelwinkel gleich.

4) Der „dritte Kongruenzsatz“: Wenn zwei Dreiecke je zwei Winkel je einen dem anderen gleich haben und dazu noch je eine Seite – sei es die Basis der gleichen Winkel oder eine dem einen der beiden gleichen Winkel gegenüberliegende – dann sind auch die übrigen Seiten und der übrige Winkel gleich.

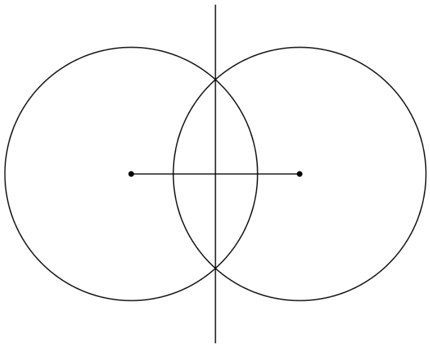
5) Der Satz, der bis heute nach ihm benannt ist: Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist immer ein Rechter. [13]

Bei diesen fünf Sätzen handelt es sich hauptsächlich um Symmetriebeziehungen. Wahrscheinlich war Thales der erste Grieche, der diese Aussagen explizit formulierte oder er hatte erste Begründungen und Beweisüberlegungen für diese Aussagen angestellt.[14]

Bei Thales trat neben den ältesten Elementen der Geometrie, der geraden Linie und dem Kreis, erstmals der Begriff des Winkels auf. Dieser entsteht beim Schnitt zweier Geraden. Sehr früh scheint auch schon die Besonderheit des rechten Winkels bekannt gewesen sein. Dieser entsteht, wenn sich zwei Geraden symmetrisch schneiden. Die Konstruktion dazu sieht folgendermaßen aus und findet sich in Euklids „Elemente“:

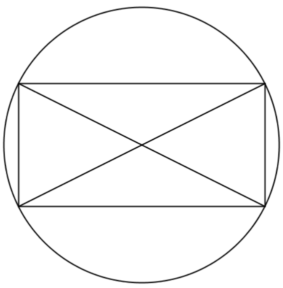
[11] Scriba, 31
[12] Scriba, 32
[13] Árpád, 24
[14] Scriba, 32

Man geht von einer gegeben Strecke aus und zieht mit dem Zirkel bei gleicher Öffnung von deren Endpunkten aus zwei Kreise.[15]



Die griechische Bezeichnung für Winkel ist „gonia“ und stammt aus der Architektur. Der Winkel ist eine innere Ecke, die zwei Mauern miteinander bilden. Somit ist der rechte Winkel die normale, gewöhnliche Ecke zweier aufeinander stoßender Wände.[16]

Wie Thales seine Sätze erkannt oder bewiesen hat, ist nicht überliefert. Womöglich hat er an der nach ihm benannten Grundfigur, einem Kreis mit eingeschriebenem Rechteck und dessen Diagonalen, die Wahrheit der Sätze demonstriert. Die Besonderheit daran könnte sein, dass er an dieser Figur etwas gesehen hat und von einem Einzelfall auf die Gesamtheit schloss.[17]



Er erkannte, dass bei einem Rechteck mit vier rechten Winkeln die gegenüberliegenden Seiten und die Diagonalen gleich lang sein müssen und sich die Diagonalen einander halbieren. Wenn man nun durch den Schnittpunkt der Diagonalen und durch einen Eckpunkt einen Kreis zieht, so geht dieser auch durch die anderen drei Eckpunkte des Rechtecks.[18]

[15] Scriba, 33
[16] Árpád, 25
[17] Schönbeck, 31
[18] Scriba, 33

Die Beweise des Thales muss man sich als anschauliche Vorformen der späteren logischen Beweise vorstellen. Doch an den Figuren wurde auch durch Zeigen, mit der Methode des Aufeinanderlegens, mit Hilfe heuristischer Überlegungen und mit Klappungs- und Spiegelungsargumenten argumentiert. Die Symmetrie der Figur ist ein wesentlicher Bestandteil des Beweisgangs, denn für Thales „herrscht im Grunde der Welt eine Ordnung“.[19]

Der Einfluss der thaletischen Geometrie auf die weitere Entwicklung der Geometrie ist unsicher. Außerdem ist eine Beziehung zwischen Thales und Pythagoras von Samos, den chronologisch nächsten bekannten Mathematiker, nicht belegt. Sie kann aber auch nicht ausgeschlossen werden.[20]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

In den Schulbuchreihen „Das ist Mathematik“ und „Mathe Buch“ findet man einen kurzen Absatz zur Persönlichkeit des Thales. Dabei wird vor allem auf seine Arbeitsgebiete Geometrie, Astronomie und Philosophie hingewiesen. In „Das ist Mathematik 2“ sind auch Hinweise zu seinen Erfahrungen in Ägypten angeführt. Im „Mathe Buch 2“ wird darauf verzichtet. Stattdessen wird näher auf seine Leistungen im Bereich der Geometrie eingegangen und auch erwähnt, dass er bewies, dass die Basiswinkel in einem gleichschenkeligen Dreieck gleich sind und dass der WSW-Satz gilt. Schließlich wird noch darauf hingewiesen, dass bei ihm der Begriff „Winkel“ erstmals auftauchte.

<u>Winkel</u>

Thales verwendete erstmals den Begriff des Winkels, der für uns heute ganz selbstverständlich ist. Schülerinnen und Schüler kommen schon in der ersten Klasse der AHS Unterstufe mit dem Winkel als mathematischen Begriff in Berührung. Denn laut dem Lehrplan für die AHS Unterstufe sollen Schülerinnen und Schüler in dieser Schulstufe Winkel in ihrem Umfeld finden und skizzieren können. Außerdem sollen sie die Gradeinteilung von Winkeln kennen und Winkel mit einem Winkelmesser (Geodreieck) zeichnen können.

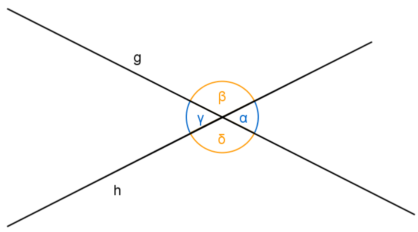
[19] Schönbeck, 32
[20] Schönbeck, 32

In den verwendeten Schulbüchern wird der Begriff des Winkels sehr ähnlich behandelt. Zu Beginn werden die Bestandteile eines Winkels, deren Bezeichnung mit griechischen Buchstaben und deren Maßeinheit bearbeitet. Danach werden die verschiedenen Winkelarten vorgestellt und das Winkelmessen und –zeichnen mit dem Geodreieck erklärt. Immer wieder sind zwischendurch Beispiele aus dem täglichen Leben angeführt, wie die Uhr, der Kompass oder Bilder auf denen verschiedenste Arten von Winkeln zu entdecken sind.[21]

<u>Scheitelwinkel</u>

Der Scheitelwinkel steht in allen Schulbuchreihen erst in der zweiten Klasse AHS am Programm, allerdings in geringer Intensität. In den Schulbuchreihen „Mathe Buch" und „Das ist Mathematik" wird der Scheitelwinkel nur in Übungsbeispielen erwähnt.[22]

<u>Beispiel</u>: Zeichne einen beliebigen Winkel α! Verlängere beide Winkelschenkel von α über den Scheitel hinaus zu den Geraden g und h! Bezeichne die dadurch neu entstehenden Winkel wie in der nebenstehenden Darstellung mit β, γ und δ!



Die Winkel α und γ nennt man Scheitelwinkel. Ebenso sind die Winkel β und δ Scheitelwinkel.

a) Begründe folgende Eigenschaften:
   1) Scheitelwinkel sind stets gleich groß.
   2) Scheitelwinkel sind auch Parallelwinke.
b) Gib alle in der Figur auftretenden Paare von Nebenwinkel an. [23]

<u>Die Basiswinkel in einem gleichschenkeligen Dreieck sind gleich.</u>

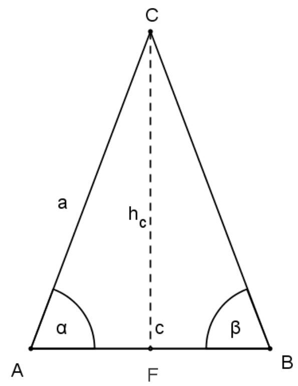
Das Kennenlernen und Untersuchen von Dreiecken ist im Lehrplan der AHS Unterstufe in der zweiten Klasse vorgesehen. Außerdem sollen wesentliche Eigenschaften eines Dreiecks festgestellt werden und die Figuren skizziert und konstruiert werden.

---

[21] MatheFit 1, 121f.; Mathe Buch 1, 196f.; Das ist Mathematik 1, 192f.
[22] Mathe Buch 2, 50; Das ist Mathematik 2, 172
[23] Das ist Mathematik, 172

Die Autoren des Schulbuchs „Das ist Mathematik 2“ behandeln den Satz des Thales, der beschreibt, dass die Basiswinkel in einem gleichschenkeligen Dreieck gleich sind im Zuge des Themengebiets „Besondere Dreiecke“. Nach einem Beispiel für ein gleichschenkeliges Dreieck, Beschriftungskonventionen und der Symmetrie im Dreieck wird ein Merksatz über die Symmetrie und die Basiswinkel formuliert.
Merksatz: (Gleichschenkeliges Dreieck) Die beiden Basiswinkel sind gleich groß. Jedes gleichschenkelige Dreieck hat eine Symmetrieachse. [24]

Im zweiten Mathematikschulbuch „Mathe Buch 2“ wird der Satz formuliert und anschließend bewiesen. Danach folgt noch der Hinweis, dass man diesen Satz für den Beweis des berühmten „Satz von Thales“ benötigt. Die Autoren dieses Buches haben sich beim Thema des gleichschenkeligen Dreiecks auf diese Eigenschaft beschränkt.[25]
Satz: In einem gleichschenkeligen Dreieck sind die zwei Basiswinkel gleich groß.
Beweis: Wir zeichnen h_c ein.
Überlege Die Höhe h_c ist gleichzeitig die Seitensymmetrale s_{AB}, denn der Punkt C ist von A und B gleich weit entfernt und h_c steht normal auf c = AB.
Vergleiche jetzt ΔAFC und ΔBFC. Sie haben die gleichen Seitenlängen a, h_c und $\frac{c}{2}$. Daher sind sie kongruent. Aus diesem Grund haben sie auch lauter gleiche Winkel, insbesondere gilt auch $\alpha = \beta$.



Konstruktionsbeispiele und Aufgaben zur Berechnung von fehlenden Bestimmungsstücken scheinen in beiden Büchern auf.

Der Kongruenzsatz: WSW- Satz
Zu diesem Kongruenzsatz, der von Euklid in sein Werk „Elemente“ aufgenommen wurde, wird im Kapitel über Euklid Stellung genommen.

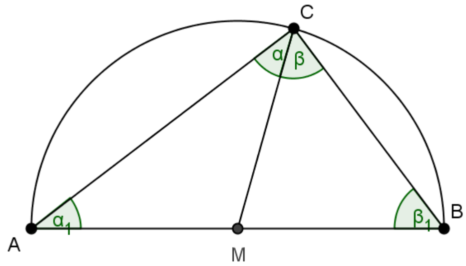
[24] Das ist Mathematik 2, 214
[25] Mathe Buch 2, 261

Satz von Thales: Alle Peripheriewinkel in einem Halbkreis sind rechtwinkelig.[26]

Der berühmte Satz von Thales fällt im Lehrplan in den Bereich Untersuchen von Dreiecken und Feststellen von wesentlichen Eigenschaften. Außerdem gehört dieser Satz zum Punkt Skizzieren und Konstruieren von Figuren.

In allen Schulbüchern wird der Satz von Thales als Merksatz formuliert und auch auf die gleiche Art und Weise bewiesen:

Nimm auf dem Halbkreis einen beliebigen Punkt C an (Figur rechts daneben)! Zu zeigen ist, dass der Winkel $\gamma = \angle ACB$ ein rechter Winkel ist. Gehe dabei folgendermaßen vor:



1. Verbinde C mit M, dem Halbierungspunkt von AB!
2. ΔAMC und ΔMBC sind gleichschenkelig. Begründe, weshalb!
   Daraus folgt: $\angle MCA = \angle CAM = \alpha$ und $\angle BCM = \angle MBC = \beta$.
3. Im Dreieck ABC gilt:
   $$\alpha + \beta + \underbrace{(\alpha + \beta)}_{\gamma} = 180^\circ \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$ [27]

Die Symmetrie

In der fünften Schulstufe sollen die Schülerinnen und Schüler einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können.

Die Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ behandelt, wie auch im Lehrplan vorgesehen die Symmetrie schon in der ersten Klasse AHS oder Hauptschule. Die Schwerpunkte liegen dabei vor allem bei der Wirkung von Symmetrie und bei Beispielen aus dem alltäglichen Leben. Außerdem wird der Begriff der Symmetrieachse eingeführt und kurz erläutert, wie man symmetrische Punkte konstruiert. Symmetrische Figuren werden als Figuren definiert, die durch eine gerade Linie so in zwei Teile geteilt werden können, dass sie beim Falten entlang dieser Linie deckungsgleich übereinander liegen. Dies kommt in der Schulbuchreihe „Mathe Buch“ erst im Buch der sechsten Schulstufe vor. Das Thema wird aber alles in allem auf die gleiche Art und Weise bearbeitet.[28]

[26] Mathe Buch 2, 261; Das ist Mathematik, 211
[27] Das ist Mathematik 2, 220
[28] Das ist Mathematik 1, 198; Mathe Buch 2, 152

3 Pythagoras und die Pythagoreer

Pythagoras von Samos lebte vermutlich von 570 bis 480 v. Chr. Er soll sehr viel auf Reisen gewesen sein, wobei er sich sein Wissen erwarb.[29] Unter anderem führten ihn seine Unternehmungen nach Ägypten, wo er vom persischen Eroberer Kambyses gefangen genommen wurde und nach Babylon gebracht worden sein soll. Dort verweilte er sieben Jahre und wurde in die Mystik, die Zahlenlehre, die Musik und in andere Wissenschaften eingeweiht. Möglicherweise kam Pythagoras auch mit Zarathustra, dem Gründer der altiranischen Religion „Parsismus" und seiner Lehre in Berührung. Pythagoras von Samos könnte auch von Thales und dessen Schüler Anaximander gelernt haben.[30] Nach der Mitte des 6. Jahrhunderts vor Christus wanderte er nach Italien, nach Kroton aus. Dort gründete er eine religiös-philosophische Lebensgemeinschaft und wurde bald zu einer mythischen Figur.[31]
Diese Lebensgemeinschaft wandte sich gegen die Auflockerung der Sitten in großen Teilen des Adels und praktizierte selbst ein Leben voll von Selbstbeherrschung und kollektiver Disziplin. Die Mitglieder beschäftigten sich mit verschiedenen Wissenschaften und auch der Philosophie. Die Mathematik wurde zu einem Teil ihrer Religion, denn in ihr fanden sie die Antwort auf die Frage nach der Erhebung der Seele und der Vereinigung mit Gott. Das Wesen der Welt lag ihrer Auffassung nach in der göttlichen Harmonie der Zahlen. Die Verinnerlichung der Harmonie der Zahlen machte sie, ihrem Glauben nach, unsterblich.[32]
Diese Bruderschaft übte auch politische Macht aus und in ihrem Umfeld wurde der so genannte „hippokratische Eid" formuliert. Durch diese Schule hat Pythagoras großen Einfluss auf die italienischen Vorsokratiker und auch auf Sokrates und Platon ausgeübt.[33] Die Mitglieder dieser Bruderschaft wurden bereits von Aristoteles „die Pythagoreer" genannt. Die Bruderschaft erlosch im Laufe des 4. Jahrhunderts.[34]

[29] Schönbeck, 32
[30] Alten, 51
[31] Scriba, 33
[32] Alten, 51
[33] Schönbeck, 32 f.
[34] Scriba, 33

3.1 Die Quellen

Die Quellenlage in dieser Zeit ist ähnlich schlecht, wie in vorangegangenen Jahren bei Thales von Milet. Welche mathematischen Erkenntnisse von Pythagoras selbst und welche von seinen Anhängern stammen, lässt sich heute nur mehr schwer rekonstruieren. Eudemos von Rhodos, ein Schüler des Aristoteles[35] spricht in seinem historischen Bericht davon, dass Pythagoras das Wissen über die Geometrie zu einer „Freien Lehre“ umgebildet hat. Die Mathematik war nun wohl eine Wissenschaft, die um ihrer selbst Willen betrieben wurde und nicht nur wegen praktischen Lebenserfordernissen.[36] Eudemos schreibt über Pythagoras: „*Es folgte Pythagoras, der den wissenschaftlichen Betrieb der Geometrie in das System der höheren Bildung einbezog. Seine Untersuchungen galten ihren obersten Prinzipien, und seine theoretischen Forschungen bewegten sich frei von materiellen Einflüssen im Bereich des reinen Denkens*.“[37]

Proklos, ein Philosoph und Überlieferer des Werkes von Eudemos schreibt: „*Nach diesen verwandelte Pythagoras die Beschäftigung mit diesem Wissenszweige in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlage derselben von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und die Theoreme derselben immaterieller und intellektueller erforschte. Er ist es auch, der die Theorie des Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen Körper erfand*.“[38]

Durch das Interesse der Pythagoreer an den Eigenschaften der Zahlen und auf Grund der Zahlenmystik, entwickelte sich die Mathematik zur exakten Wissenschaft. Das bedeutet, dass mathematische Sätze mit Hilfe von Postulaten bewiesen und dass Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten von Zahlen abstrakt formuliert wurden.[39]

Außerdem soll Pythagoras die Geometrie in das System der höheren Bildung miteinbezogen haben und seitdem spricht man vom bekannten „Quadrivium“ der Fächer Arithmetik, Astronomie, Geometrie und Musik.[40]

---

[35] Colerus, 21
[36] Scriba, 33
[37] Kaiser, Nöbauer, 15
[38] Colerus, 21
[39] Alten, 51
[40] Schönbeck, 33

3.2 Die Zahlenlehre

Das Zentrum der religiös- philosophischen Lehre der Pythagoreer bildete die Zahl. Die Pythagoreer entwickelten die ersten Grundlagen der Zahlentheorie und der Musiktheorie. Die Ausgangspunkte dafür bildeten die Einheit und die natürlichen Zahlen beginnend mit zwei.[41] Die Eins wurde als der Ursprung aller Zahlen gesehen und nicht als Zahl selbst.[42]

Möglicherweise schätzte Pythagoras selbst die Musiktheorie besonders, denn er machte die grundlegende Entdeckung der „rationalen Harmonie“. Er soll den Zusammenhang zwischen der Höhe eines Tons und der Länge einer den Ton schwingenden Saite erkannt haben. Dabei hat er bemerkt, dass gewisse einfache Verhältnisse von Saitenlängen mit besonders wohlklingenden Tonstufen verbunden sind. Beispielsweise stehen die Verhältnisse 2:1, 3:2 oder 4:3 mit den Intervallen Oktav, Quint und Quart in Verbindung. Diese Erkenntnis begründete auch die Auffassung, dass das Harmonische jederzeit und überall rational aufweisbar sei. Die Pythagoreer selbst sagten: „*Denn groß und vollkommen vollendet und alles bewirkend und göttlichen und himmlischen sowie menschlichen Lebens Anfang sowie Anteil nehmende Führerin ist die Kraft der Zahl*.“ Diese fast religiöse Gewissheit von der Bedeutung der Zahl führte sowohl zu einer elementaren Zahlenlehre, der psêchoi (=Steine)- Arithmetik, als auch zu einer Zahlenmystik. [43]
Dies führt uns zur Zahlenlehre des Pythagoras von Samos.

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Im heutigen Schulunterricht werden Verhältnisse und Proportionen in der 6. und 7.Schulstufe behandelt. In „Das ist Mathematik 2“ findet man auch einen historischen Abriss zu diesem Thema und Informationen über die Pythagoreer selbst. Denn in der Einleitung zum Thema „Brüche und Bruchzahlen“ wird über die Pythagoreer, ihr Zahlenverständnis und ihre Beziehung zur Musiktheorie berichtet.[44] Ein Unterkapitel ist „Brüche zur Angabe von Größen- und Zahlenverhältnissen“. In diesem sollen einfache Verhältnisse angegeben werden.[45] Im darauffolgenden Schuljahr wird der Verhältnisbegriff um Proportionen erweitert. Auch in diesem Kapitel findet man in

[41] Scriba, 33
[42] Colerus, 32
[43] Schönbeck, 34
[44] Das ist Mathematik 2, 32f.
[45] Das ist Mathematik 2, 50

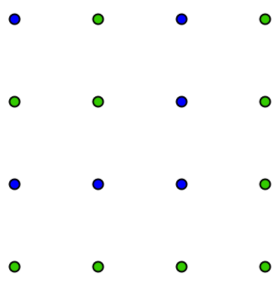
„Das ist Mathematik 3“ Informationen über die Pythagoreer. Danach werden Verhältnisse von Größen und Zahlen, Proportionen und direkte und indirekte proportionale Größen behandelt.[46]

In „Mathe Buch 2“ werden Verhältnisse nicht extra angesprochen, sondern gleich direkte und indirekte Proportionen erläutert.[47] In „Mathe Buch 3“ werden diese Begriffe nochmals wiederholt und auf funktionale Abhängigkeiten erweitert.[48] Historische Informationen sind nicht vorhanden.

3.2.1 Dreiecks-, Quadrat-, Rechtecks- und Polygonalzahlen

Zu Beginn des 5. Jahrhunderts fragte Epicharmos, vermutlich ein Schüler des Pythagoras: „*Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinethalben auch einer geraden, einen Stein zulegen oder auch von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bliebe noch dieselbe?*“ Somit ist schon im 5. Jahrhundert vor Christus die Methode, bei der aus Steinen geometrischen Figuren gelegt werden, belegt. Hauptsächlich wurden Dreiecks-, Quadrat-, Rechtecks- und Polygonalzahlen gelegt. Dreieckszahlen sind Summen von natürlichen Zahlen. Rechteckszahlen sind Verdopplungen von Dreieckszahlen. Weitere Zusammenhänge lassen sich folgendermaßen veranschaulichen und auch zu Gesetzen verallgemeinern.[49]

Beispiel:

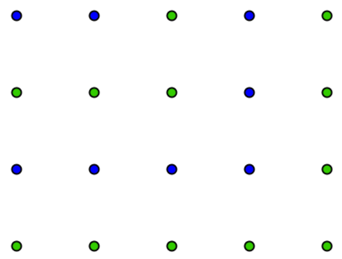


$$\begin{array}{ll} 1 & (=1\cdot 1) \\ 1+3=4 & (=2\cdot 2) \\ 1+3+5=9 & (=3\cdot 3) \\ 1+3+5+7=16 & (=4\cdot 4) \end{array}$$

Hier wurde veranschaulicht, dass die Summe von ungeraden natürlichen Zahlen stets eine Quadratzahl ist, also $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

[46] Das ist Mathematik 3, 112- 134
[47] Mathe Buch 2, 118
[48] Mathe Buch 3, 234
[49] Schönbeck, 35 f.

Beispiel:

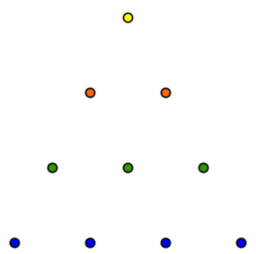


$$
\begin{array}{ll}
2 & (=1\cdot 2) \\
2+4=6 & (=2\cdot 3) \\
2+4+6=12 & (=3\cdot 4) \\
2+4+6+8=20 & (=4\cdot 5)
\end{array}
$$

Die Addition von geraden natürlichen Zahlen ist stets das Produkt von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen: $2+4+6+...+2n=n(n+1)$.

Bei der Summierung der natürlichen Zahlen bildete man ein Punkte- Dreieck mit der Eins als Spitze und nannte alle Zahlen Dreieckszahlen, die aus einer Addition von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen entstanden waren.

Beispiel: 10 ist eine Dreieckszahl.
Denn: 1 + 2 + 3 + 4 = 10



Das entsprechende Gesetz dazu lautet: $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.[50]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Die Rechtecks- und Quadratzahlen werden im Schulbuch „Das ist Mathematik 1“ im Zuge des Themas „Rechteck und Quadrat“ angesprochen. Es werden die daraus resultierenden Formeln zur Berechnung der Summe der ersten n ungeraden und der

[50] Colerus, 32

ersten n geraden Zahlen angegeben.[51] Über Dreieckszahlen wird in „Das ist Mathematik 2“ berichtet.[52]
Auch im Schulbuch „Mathe Buch 1“ findet man drei Beispiele zu Dreiecks-, Quadrat- und Fünfeckszahlen im Kapitel über die natürlichen Zahlen. Allerdings werden der historische Ursprung und die Bedeutung nicht erwähnt.[53]

In „Mathematik verstehen 5“ werden in einem historischen Abriss zum Thema „Zahlen“ die Dreiecks- und Quadratzahlen der Pythagoreer vorgestellt.[54]

3.2.2 Befreundete und vollkommene Zahlen

Die Pythagoreer beschäftigten sich auch mit den so genannten „befreundeten Zahlen“ und den „vollkommenen Zahlen“. „Befreundete Zahlen“ sind Zahlen, die die Summe der Teiler der anderen Zahl sind.
Beispiel: 220 und 284 sind „befreundete Zahlen“.
Denn 284 hat die Teiler 1, 2, 4, 71, 142 und $1+2+4+71+142=220$.
220 hat die Teiler 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 und $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$.

Eine „vollkommene Zahl“ ist eine Zahl bei der die Summe der Teiler gleich die Zahl selbst ist.
Beispiel: 6 ist eine „vollkommene Zahl“.
Denn $6=1+2+3$ und 1, 2, 3 sind ja gerade die Teiler von 6. [55]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Im Schulbuch „Lehrbuch der Mathematik 5“ werden im Zuge der Reflexion über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen, befreundete und vollkommene Zahlen angesprochen. Auch Pythagoras und seine Kenntnis von diesen werden erwähnt.[56]

[51] Das ist Mathematik 1, 214f.
[52] Das ist Mathematik 2, 32
[53] Mathe Buch 1, 30f.
[54] Mathematik verstehen 5, 50
[55] Colerus, 33
[56] Lehrbuch der Mathematik 5, 83

3.2.3 Inkommensurable Strecken

Das Ziel der Pythagoräer bei der Beschäftigung mit den Zahlen war, wie bereits erwähnt, die Verinnerlichung der Harmonie der Zahlen. Man glaubte auch kurz, die lückenlose Harmonie gezeigt zu haben und den Rätseln des Seins auf der Spur zu sein. Doch dann stieß man auf inkommensurable Strecken, also auf irrationale Zahlen.[57] Vermutlich war es Hippasos von Metapont, ein Schüler des Pythagoras, der diese Entdeckung um 450 v. Chr. machte.[58]

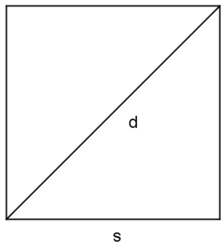
Proklos hat folgende Legende in diesem Zusammenhang überliefert: „*Man sagt, dass der Mann, der zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Öffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei. Und zwar deshalb, weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen hätte bleiben sollen. Deshalb auch wurde der Untäter, der von ungefähr dieses Bild des Lebendigen berührte und aufdeckte, an den Ort der Entstehung versetzt und wird dort von den ewigen Fluten umspült*."[59]

Die euklidische Definition der Inkommensurabilität lautet: „*Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maß gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt." Größen, die nicht kommensurabel sind, bezeichnet man als inkommensurabel und Größen heißen kommensurabel, wenn es eine gemeinsame Messstrecke c gibt, von der sie beide Vielfache sind. Es gibt somit natürliche Zahlen m und n, so dass* $a = mc$ *und* $b = nc$ *. Daraus folgt* $a : b = m : n$ [60]

In der Literatur ist man sich nicht einig, was der Auslöser für die Entdeckung gewesen sein könnte, aber sicher ist, dass man auf irrationale Zahlen durch einen Einzelfall stieß.[61] Auf der einen Seite steht die Vermutung, dass der Pythagoreer beim Studium des Quadrats und dessen Diagonale auf die Inkommensurabilität aufmerksam wurde. Auf der anderen Seite ziehen Wissenschafter in Betracht, dass die Irrationalität bei der Beschäftigung mit dem regelmäßigen Fünfeck aufgetreten ist. Dafür, dass die Irrationalität von Zahlen bei der Behandlung des Quadrats und der Quadratdiagonalen bemerkt wurde, spricht, dass in der nicht- mathematischen

[57] Colerus, 34
[58] Scriba, 35
[59] Colerus, 34
[60] Schönbeck, 41
[61] Szabó, 193

Literatur die Inkommensurabilität der Seite und der Diagonale eines Quadrats am häufigsten erwähnt wird. [62]



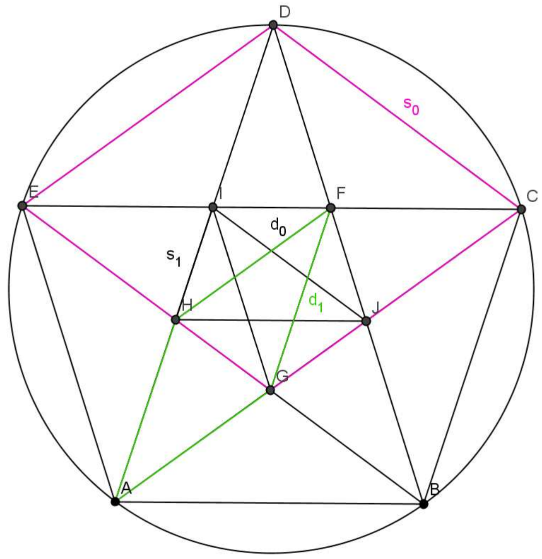
Betrachten wir dieses Quadrat, so erhalten wir aus dem pythagoreischen Lehrsatz den Zusammenhang $d^2 = s^2 + s^2 = 2s^2$. Möchte man nun dieses Verhältnis mit Hilfe von ganzen Zahlen ausdrücken, entsteht ein Widerspruch bei der Verwendung von geraden und ungeraden natürlichen Zahlen.[63]

Ein geometrischer Beweis der Inkommensurabilität aus den „Elementen“ Euklids wird im Kapitel „Euklid“ behandelt.

Die zweite Vermutung, dass die Irrationalität von Zahlen am regelmäßigen Fünfeck entdeckt wurde, wird nun vorgestellt. Für diese Vermutung spricht, dass das regelmäßige Pentagramm, das durch die Einzeichnung der Diagonalen in einem regelmäßigen Fünfeck entsteht, das Ordenssymbol des pythagoreischen Bundes war. Man kann annehmen, dass die Pythagoeer gerade ihr Ordenszeichnen besonders intensiv untersuchten. [64]
Um ein gemeinsames Maß zweier Strecken zu finden, konnte man sich der Methode der „Wechselwegnahme“ bedienen: von der größeren Strecke zieht man so oft wie möglich die kleinere ab. Geht das ohne Rest auf, hat man ein ganzzahliges Verhältnis. Bleibt ein Rest, so zieht man diesen so oft wie möglich von der kleineren Strecke ab. Geht das, ohne dass ein weiterer Rest übrigbleibt, dann ist der Rest ein gemeinsames Maß für beide Strecken und sie stehen in einem rationalen Verhältnis zueinander. Andernfalls wird das Verfahren mit dem neu entstanden Rest wiederholt. Bleibt irgendwann kein Rest übrig, so hat man ein gemeinsames Maß für die Strecken gefunden und diese heißen dann kommensurabel. Bricht die

[62] Szabó, 193
[63] Scriba, 36
[64] Scriba, 36

Wechselwegnahme allerdings nie ab, so sind die Ausgangsstrecken inkommensurabel. [65]



Die fünf Diagonalen des Ausgangsfünfecks sind jeweils parallel zu einer Seite und bilden im Inneren wiederum ein regelmäßiges Fünfeck. Dessen Diagonalen nehmen wieder die gleichen fünf Richtungen ein. Somit sind CDEG und AGFH zwei verschieden große Rauten mit je vier gleichen Seiten. Daher hat der größere Abschnitt einer Diagonale, beispielsweise EG die Länge einer Seite des Ausgangsfünfecks. Der kleinere Abschnitt ist gleich lang wie eine Diagonale des inneren Fünfecks. Außerdem ist das Mittelstück von einer Diagonale des Ausgangsfünfecks identisch mit der Seite des inneren Fünfecks. Somit gilt:

$$d_0 - s_0 = d_1$$
$$s_0 - d_1 = s_1$$
$$d_1 - s_1 = d_2$$
$$s_1 - d_2 = s_2$$
$$d_2 - s_2 = d_3 \ldots$$

Die Wechselwegnahme bricht nie ab und deshalb gibt es kein gemeinsames Maß für Seite und Diagonale.[66]

Die Entdeckung der Inkommensurabilität markiert einen Übergang zu einer neuen Periode der griechischen Mathematik, denn bis jetzt war sie hauptsächlich eine intuitive und veranschaulichende Wissenschaft. [67]

[65] vgl. Schönbeck, 43 und Scriba, 36
[66] Scriba, 37
[67] Schönbeck, 47

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

In der heutigen Schulmathematik verwendet man meistens das Quadrat, um irrationale Zahlen zu erklären. Denn laut Lehrplan sollen Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse anhand einfacher Beispiele erkennen, dass es Rechensituationen gibt, die nicht mit Hilfe der rationalen Zahlen lösbar sind.

In den Schulbüchern „Das ist Mathematik 4“ und „Mathe Buch 4“ werden die irrationalen Zahlen über das Quadrat eingeführt. In „Das ist Mathematik 4“ sind auf der letzten Seite des Kapitels historische Informationen über die Entdeckung der irrationalen Zahlen und ihre vermeintlichen Entdecker, die Pythagoreer zu lesen. Dabei wird erwähnt, dass die Entdeckung des Irrationalen einen großen Einschnitt in der Denkweise der griechischen Mathematiker bedeutete.[68]

In „Mathematik verstehen 5“ wird die historische Entwicklung der irrationalen Zahlen zum Abschluss des Kapitels „Zahlen“ erläutert. Zu Beginn wird über das Interesse der Pythagoreer an der Musiktheorie und über ihre Kenntnisse im Bereich der musikalischen Intervalle berichtet. Danach wird erklärt, was kommensurabel für die Pythagoreer bedeutete, nämlich dass es ein „gemeinsames Maß“ gibt. Wenn sich beispielsweise zwei Streckenlängen wie 2 : 3 verhalten, bedeutet das, dass es ein gemeinsames Maß gibt, welches in der einen Strecke zweimal und in der anderen Strecke dreimal enthalten ist. Danach wird über die Entdeckung von inkommensurbalen Strecken durch Hippasos von Metapont im Quadrat bzw. im regelmäßigen Fünfeck berichtet. Auch Eudoxos und seine Proportionenlehre werden erwähnt. Schließlich wird angemerkt, dass das Problem der Inkommensurabilität erst mit der Einführung der irrationalen Zahlen gelöst werden konnte.[69]

3.3 Der Satz des Pythagoras

Den Satz, den wir heute noch als den berühmten „Satz des Pythagoras“ kennen besagt, dass in jedem rechtwinkeligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate der Katheten.

Wahrscheinlich war die Tatsache, dass die Form eines Dreiecks durch die Verhältnisse der Seitenlängen bestimmt ist, schon vor Pythagoras bekannt.

[68] Das ist Mathematik 4, 14- 27; Mathe Buch 4, 28- 34
[69] Mathematik verstehen 5, 52

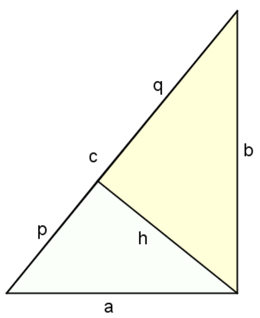
Ägyptische Mathematiker wussten bereits, dass ein Dreieck, dessen Seitenlängen im Verhältnis 3: 4: 5 stehen, rechtwinkelig ist und in Indien war bekannt, dass ein rechter Winkel entsteht, wenn die Seitenlängen im Verhältnis 5: 12: 13 stehen.[70] Aber die Pythagoreer verallgemeinerten diesen Sachverhalt, formulierten ihn um und hoben ihn in den Rang einer mathematischen Aussage, wie sie am Beginn dieses Abschnitts zu lesen ist. Somit kennen wir ihn heute noch als den berühmtesten Satz, der auf den Mathematiker Pythagoras von Samos zurückgeführt wird. [71]

Ob dieser Satz wirklich von Pythagoras selbst stammt, lässt sich nach heutigen Erkenntnissen nicht mehr eruieren. Möglicherweise hat er ihn von anderen gelernt, oder auch gar nicht gekannt. Ob er ihn tatsächlich bewiesen hat, ist ebenso unklar. Proklos berichtet tausend Jahre nachdem Pythagoras gelebt hat: „*Schenken wir denjenigen Gehör, die das Altertum erforschen wollen, so werden wir finden, dass sie dies Theorem auf Pythagoras zurückführen und berichten, er habe der Entdeckung halber einen Stier geopfert*.“[72]

Heute sind mehrere hundert verschiedene Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes bekannt. Manche stammen von berühmten Mathematikern, andere von Persönlichkeiten der Kunst und der Politik und andere wiederum von Schülern oder Schülerinnen.[73] Doch wie mag wohl der erste Beweis ausgesehen haben?

<u>Vermutung 1:</u>

Die erste Vermutung, die nun vorgestellt wird, ist dass die Pythagoreer die Ähnlichkeit von Teilfiguren erkannten und damit beim Beweis arbeiteten.



Aus $p:a = a:c$ folgt $a^2 = pc$ und aus $q:b = b:c$ folgt $p^2 = qc$

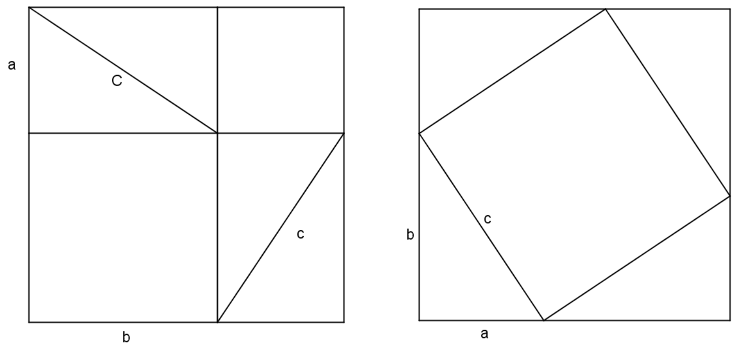
Daraus ergibt sich: $a^2 + b^2 = (p+q)c = cc = c^2$ [74]

[70] Colerus, 27
[71] Schönbeck, 36
[72] Schönbeck, 36- 37
[73] Kaiser, Nöbauer, 122
[74] Schönbeck,40

<u>Vermutung 2:</u>

Eine weitere Möglichkeit ist, dass die Pythagoreer durch Probieren geeignete Flächenzerlegungen fanden und somit den Lehrsatz beweisen konnten.

Man bezeichnet dafür die beiden Katheten eines vorgegebenen rechtwinkeligen Dreiecks mit a und b und seine Hypotenuse mit c. Nun werden zwei Quadrate mit der Seitenlänge $a+b$ gezeichnet, die so zerteilt werden:



Zieht man nun das rechtwinkelige Dreieck mit den Katheten a und b viermal ab, so haben die verbleibenden Figuren gleichen Flächeninhalt.

Nun muss man nur mehr zeigen, dass bei der rechten Figur ein Quadrat mit der Seitenlänge c übrig bleibt. Dazu reicht der Nachweis, dass die Winkel des dem Quadrat mit der Seitenlänge a+b eingeschriebenen Vierecks alle 90° betragen. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei rechten Winkeln ist.[75]

Ein weiterer Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes von Euklid wird auf Seite … vorgestellt.

3.3.1 Pythagoreische Zahlentripel

Pythagoras kannte auch eine Methode, um die Seitenlängen von beliebig vielen rechtwinkeligen Dreiecken zu ermitteln: „*Sie nimmt eine gegebene ungerade Zahl (größer als 1) als die kleinere Kathete an, bildet hiervon das Quadrat, subtrahiert davon 1 und nimmt die Hälfte des Restbetrages als die größere Kathete; addiert sie aber 1 dazu, so bildet sie die dritte Seite, die Hypotenuse*."

[75] Kaiser, Nöbauer, 122

Diese Aussage kann in moderner Schreibweise so notiert werden: $n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$ [76]

Man könnte es auch als ein Verfahren bezeichnen um beliebig viele Zahlentripel zu finden, wobei a, b, c stets ganze Zahlen sind und die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Allerdings kann diese Methode nur bei ungeraden Zahlen angewandt werden. Das Verfahren für gerade Zahlen wurde hunderte Jahre später von Platon entwickelt. [77]

Wahrscheinlich wusste Pythagoras auch schon, dass man die Zahlentripel mit ganzen Zahlen vervielfachen konnte, ohne die Ganzzahligkeit bei der Lösung zu beeinflussen. Denn Zeichnungen zeigen, dass sich an der Figur selbst nichts verändert, wenn man die Einheitsstrecke verdoppelt, verdreifacht oder vervierfacht.[78]

Laut Schönbeck kannten bereits Mathematiker aus Babylonien eine Lösung für die heute vielleicht berühmteste Gleichung überhaupt: $a^2 + b^2 = c^2$. Sie wussten, dass man für ungleichartige teilerfremde (positive) Zahlen u und v mit u > v mit der Formel $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ ein nichttriviales Lösungstripel erhält.[79]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Der Lehrsatz des Pythagoras ist heute noch ein wichtiger Bestandteil der Schulmathematik. Dies merkt man sowohl beim Lehrplan, als auch bei den verschiedenen Schulbüchern. Im Lehrplan wird der Satz des Pythagoras explizit erwähnt, denn in der dritten Klasse der AHS sollen die Schülerinnen und Schüler den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können. Ein Jahr später sollen sie den Lehrsatz des Pythagoras wiederum für Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern nutzen können und auch eine Begründung des Lehrsatzes verstehen.

[76] Schönbeck, 37
[77] Colerus, 28
[78] Colerus, 29
[79] Schönbeck, 37

In den Schulbüchern sind der Herleitung des Satzes und dessen Anwendungsmöglichkeiten sehr ausführliche und umfangreiche Kapitel gewidmet. Doch in jedem der untersuchten Schulbücher geht man etwas anders an das Thema heran.
Nach einem sehr ausführlichen einführenden Beispiel gelangt man auch in „Mathe Buch 3“ zum Lehrsatz des Pythagoras, der folgendermaßen formuliert wird: Errichte in einem rechtwinkeligen Dreieck über jeder Dreiecksseite ein Quadrat. Zwischen den Flächeninhalten dieser Quadrate besteht folgender Zusammenhang: Die beiden kleineren Quadrate über den Katheten a und b haben zusammen einen genauso großen Flächeninhalt wie das große Quadrat über der Hypotenuse c des Dreieck: $a^2 + b^2 = c^2$. Einen allgemeinen Beweis findet man in diesem Schulbuch nicht.[80]

Die Autoren von „Das ist Mathematik 3“ beginnen das Kapitel zum Pythagoreischen Lehrsatz mit einem Beispiel aus dem täglichen Leben und formulieren anschließend gleich den Lehrsatz: Für die Seitenlängen jedes rechtwinkeligen Dreiecks mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$. Mögliche Kurzsprechweisen: Kathete a hoch 2 plus Kathete b hoch 2 = Hypotenuse c hoch 2 oder a zum Quadrat plus b zum Quadrat = c zum Quadrat.
Danach wird die Richtigkeit dieses Lehrsatzes auch begründet und zwar mit Hilfe von Flächenzerlegungen, wie bereits im Kapitel 3.3 vorgestellt. Die Schülerinnen und Schüler werden auch aufgefordert, selbst kongruente Dreiecke auszuschneiden und sie so aneinander zu legen, dass ein Quadrat entsteht. Im Kapitel „Berechnungen mit dem Satz von Pythagoras –Quadratwurzel“ wird ein Beispiel mit einer Knotenschnur vorgestellt, das schon im alten Ägypten angewandt wurde. Dabei wird eine Halskette aus Perlen in der Form eines rechtwinkeligen Dreiecks aufgelegt. So merkt man, dass auf den Dreiecksseiten 3, 4, und 5 Perlen liegen. Dadurch wird vermutet, dass dies die kleinsten natürlichen Zahlen sind, für die die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Daraufhin folgt ein Hinweis auf die pythagoreischen Zahlentripel. [81]

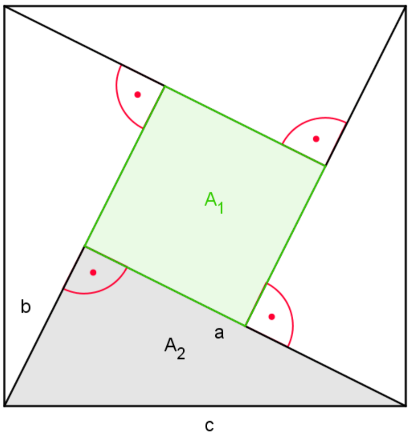
In der vierten Klasse der AHS Unterstufe werden im dazugehörigen Schulbuch aus der Reihe „Das ist Mathematik“ zu Beginn nochmals der Lehrsatz allgemein wiederholt und ergänzende Aufgaben angeführt. Anschließend widmen sich die

[80] Mathe Buch 3, 207
[81] Das ist Mathematik 3, 222- 232

Autoren dem Kathetensatz und dem Höhensatz, die beide ebenfalls auf Pythagoras zurückgehen. Zur Herleitung des Katheten- und des Höhensatzes verwenden die Autoren, wie vermutlich schon die Pythagoräer selbst, die Ähnlichkeit von Teilfiguren. Dies wurde bereits im Kapitel 3.3 vorgestellt. Ein eigenes Unterkapitel widmet sich den verschiedensten Möglichkeiten, den Lehrsatz zu beweisen. Wobei nun der Beweis aus dem Buch der dritten Klasse von den Schülerinnen und Schülern selbst durchgeführt werden soll.

Zusätzlich wird folgender Beweis durch ein Beispiel angeführt.

Beispiel:



- Zeichne ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck mit den Seiten a, b und c. Errichte anschließend jenes Quadrat, das die Hypotenuse c als Seite hat. Zeichne in dieses Quadrat wie in der Abbildung das rechtwinkelige Dreieck noch dreimal ein.
- Wie groß ist der Flächeninhalt A_1 des kleinen grünen Quadrats?
- Benenne den Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks mit A_2 und den des großen Quadrats mit A_3. Überlege, dass gilt: $A_1 + 4 \cdot A_2 = A_3$. Beweise durch Einsetzten und Umformen, dass gilt: $a^2 + b^2 = c^2$!

Auch dir Umkehrung, dass jedes Dreieck, für dessen Seitenlängen die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, rechtwinkelig ist, wird bewiesen. [82]

Nachdem auch die Anwendungen des Lehrsatzes im Rechteck und im Quadrat wiederholt werden, werden noch Anwendungen im Dreieck, im Parallelogramm und im Rhombus, im Trapez, im Deltoid und in Prismen und in der Pyramide vorgestellt.

Auch in „Mathe Buch 4“ widmen sich die Autoren nach einer kurzen Wiederholung des Lehrsatzes und Anwendungen in ebenen Figuren, dem Beweis des Satzes von Pythagoras. Insgesamt werden vier Beweise vorgestellt. Einer davon ist jener, der bereits im Kapitel 3.3 vorgestellt wurde und der auch in „Das ist Mathematik 4“ zu finden ist. Bei diesem Beweis verwendet man geeignete Flächenzerlegungen.

[82] Das ist Mathematik 4, 156f.

Zum Abschluss werden noch die Anwendungen des Lehrsatzes in Körpern, vor allem im Quader und in der Pyramide behandelt.[83]

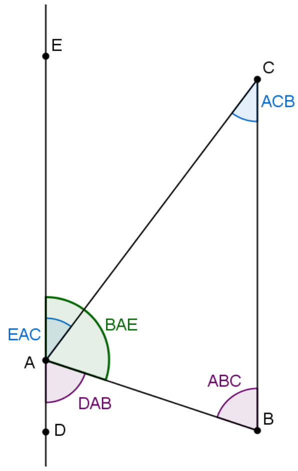
Über das Leben und Wirken des Pythagoras von Samos sind in jedem Schulbuch Informationen zu finden, allerdings in unterschiedlicher Intensität und mit verschiedenen Schwerpunkten. Die Autoren von „Mathe Buch 3“ widmen dem Hintergrundwissen zu Pythagoras eine ganze Seite. Nach einem Abriss seiner Biographie, wird der Pythagoreische Bund und seine Lehre, in deren Mittelpunkt die Zahl stand, vorgestellt und die Entdeckung der irrationalen Zahlen erwähnt. Zum Abschluss wird noch die Beziehung zwischen Mathematik und Musik erläutert, die Pythagoras entdeckt haben soll.[84] In „Das ist Mathematik 3“ liegt der Schwerpunkt auf den historischen Hintergründen zum berühmten „Satz des Pythagoras“. Die Autoren weisen auch darauf hin, dass man sich nicht sicher ist, von wem der Satz stammt und dass das Interesse des Pythagoras vermutlich primär den Quadratzahlen und den pythagoreischen Zahlentripel galt.[85]

3.4 Die Geometrie

Pythagoras und seine Schüler müssen schon umfangreiche geometrische Kenntnisse besessen haben. Unter anderem wussten sie vom Satz von der Winkelsumme im Dreieck. Des Weiteren gehörten zur pythagoreischen Geometrie die geometrisch- konstruktive Theorie über Flächenanlegungen und eine geometrisch- vergleichende Lehre über Flächeninhalte. Außerdem kannten die Pythagoreer wichtige Eigenschaften des regelmäßigen Fünfecks, des Pentagons und des Sternfünfecks, des Pentagramms. Außerdem wussten sie wahrscheinlich von drei regelmäßigen Körpern, dem Tetraeder, dem Hexaeder und dem Dodekaeder.
Hippasos von Metapont, ein Schüler des Pythagoras, soll auch einen aus „zwölf regelmäßigen Fünfecken bestehenden kugelförmigen Körper“ beschrieben haben.[86]

[83] Mathe Buch 4, 42- 51
[84] Mathe Buch 3, 213
[85] Das ist Mathematik 3, 222f.
[86] Schönbeck, 40 f.

3.4.1 Winkelsummensatz im Dreieck



„Es sei ABC das Dreieck, und man ziehe durch A die Parallele DE zu BC. Da nun BC und DE parallel, und die Wechselwinkel gleich sind, so ist also $\angle DAB = \angle ABC$, und $\angle EAC = \angle ACB$. Dazu füge man den gemeinsamen Winkel $\angle BAC$. Die Winkel $\angle DAB$, $\angle BAC$, und $\angle CAE$, das sind die Winkel $\angle DAB + \angle BAE$, das sind die 2 Rechten, sind also gleich den drei Winkeln des Dreiecks ABC. Die drei Winkel des Dreiecks sind folglich zusammen gleich 2 Rechten.“ [87]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Alle wesentlichen Entdeckungen und Theorien der Pythagoreer gingen in die „Elemente“ Euklids ein. Auch der Winkelsummensatz für Dreiecke wurde von Euklid in die „Elemente“ übernommen und noch mal bewiesen. Deshalb soll im Kapitel über Euklid näher darauf eingegangen werden.

[87] Scriba, 37

4 Zenon von Elea

Zenon von Elea lebte vermutlich von 490 bis 430 vor Christus. Er war ein Philosoph und beschäftigte sich mit Problemen, die die Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit der Dinge und die Bewegung betrafen.[88]

Laut Cantor war Zenon kein Mathematiker, sondern eher das Gegenteil eines solchen. Er eröffnete aber mit seiner Skepsis einen Streit. Denn er rührte als erster an den großen Gegensätzlichkeiten innerhalb der Menschheit.[89]

Die griechische Mathematik war ursprünglich allein auf den Zahlenbegriff aufgebaut. Doch mit der Entdeckung der irrationalen Zahlen wurde diese Sichtweise erschüttert. Es war nun unmöglich eine exakte Mathematik nur auf den Zahlenbegriff aufzubauen. Der Ausweg aus diesem Dilemma war die Geometrie, denn man konnte jede auftretende Größe als Strecke darstellen und auch die arithmetischen Grundoperationen konnten problemlos durchgeführt werden. Aber die Griechen verwendeten weiter ihre Proportionenlehre, die mit den irrationalen Zahlen nicht fertig wurde. Dies brachte Kritiker, wie Zenon von Elea auf den Plan. Er zeigte mit seinen Paradoxien, in welch logischen Schwierigkeiten sich die Mathematiker befanden. Er zeigte, dass keine Bewegung möglich ist, wenn man annimmt, dass eine Größe aus einer großen Anzahl von kleinen unteilbaren Teilchen aufgebaut ist, oder dass Größen unendlich oft teilbar sind.[90]

Zenons bekannteste Paradoxien betreffen die Bewegung und werden als „Achilles und die Schildkröte“, „die Dichotomie“, „der fliegende Pfeil“ und das „Stadion“ bezeichnet. Sie sind allerdings nur über Kommentatoren und Kritiker überliefert und nicht im originalen Wortlaut. Unter anderem schrieben Platon und Aristoteles über Zenons Paradoxien.[91]

[88] Alten, 52
[89] Colerus, 41
[90] Kaiser, Nöbauer, 131-132
[91] Schaffer, 4

4.1 *Paradoxon von Achilles und der Schildkröte*

Achilles und eine Schildkröte veranstalten einen Wettlauf. Da Achilles viel schneller als die Schildkröte laufen kann, gewährt er ihr einen Vorsprung.

Zenon behauptet nun, dass Achilles die Schildkröte nie einholen kann, egal wie schnell er läuft und egal wie lange der Wettlauf dauert. Denn als erstes muss Achilles die Strecke durchlaufen, die ihn vom Ausgangspunkt der Schildkröte trennt. Aber während er damit beschäftigt ist, ist auch die Schildkröte wieder ein Stück vorwärts gekommen. Nun muss Achilles als nächstes wieder den Abstand zu seinem Gegner überwinden. Währenddessen ist aber die Schildkröte wieder weitergekommen. Wie klein auch immer der Abstand zwischen Achilles und der Schildkröte ist, Achilles wird immer eine gewisse Zeit brauchen, diesen Abstand zu durchlaufen und in dieser Zeit hat die Schildkröte einen neuen Abstand geschaffen. Somit müsste Achilles um seinen Kontrahenten zu überholen, eine unendliche Reihe von Wegstücken zurücklegen. Dies ist aber unmöglich, weil unendlich viele Strecken nicht in einer endlichen Zeit bewältigt werden können.[92]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Die Paradoxa von Zenon können mit Hilfe der geometrischen Reihe gelöst werden. Geometrische Reihen sind in der 10. Schulstufe im Lehrplan vorgesehen.

Im Schulbuch „Mathematik Lehrbuch 6“ wird zum Abschluss des Kapitels „Folgen und Grenzprozesse“ das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte erzählt und ein Lösungsvorschlag gegeben.

Auch in „Mathematik verstehen 6“ wird im Kapitel „Unendliche Reihen“ zum Abschluss das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte behandelt und auf die Frage eingegangen, wie sich dieses Paradoxon lösen lässt.[93]

In beiden Schulbuchreihen wird auch Zenon von Elea mit seinen Lebensdaten erwähnt.

---

[92] Schaffer, 5
[93] Mathematik verstehen 6, 147

5 Platon und Aristoteles

Der Vollständigkeit halber sollen hier auch die berühmten Philosophen Platon und Aristoteles angeführt werden. Beide können nicht in die Reihe der bedeutenden griechischen Mathematiker eingeordnet werden, aber sie beeinflussten beide die Entwicklung der Mathematik.

Platon lebte von 427 bis 347 v. Chr. und war ein Schüler des Sokrates. Zu seinen Lebzeiten hatte die kulturelle Blüte Athens bereits ihren Zenit überschritten. Durch den Peloponnesischen Krieg und andere Kriege litt die Demokratie unter einer Krise und Platon wollte sie durch seine Philosophie und seine Tugend retten.[94]
Er war ein Philosoph und gilt als Lehrmeister der abendländischen Philosophie. Obwohl er nicht als Mathematiker bezeichnet werden kann, hat er die Entwicklung der Mathematik wesentlich beeinflusst. Er förderte das deduktiv- axiomatische System. Eine Theorie, die allerdings umstritten ist, ist, dass er somit zum methodischen Ansatz der Elemente des Euklid beigetragen hat.[95]
Über Platons Akademie soll der Spruch gestanden haben, dass keiner, der der Geometrie unkundig sei, eintreten möge.[96]

Platon unterschied erst spät zwischen der Philosophie und der Mathematik. „*Ich aber habe mich ziemlich bald aus dem bloßen Denken in die Messkunst gerettet*."
Im Fokus des Philosophierens von Platon stand die so genannte Ideenlehre, die möglicherweise der wichtigste Beitrag der Antike zur Geschichte des rationalen Denkens war. Sie beschreibt die neue Ontologie der mathematischen Gegenstände und hat vermutlich in der Reflexion über diese Frage ihren Ausgangspunkt. Platon beantwortete auch die Frage nach dem Seinscharakter der mathematischen Gegenstände. Er meinte, nicht die sinnlich wahrnehmbaren, konkreten Figuren, sondern die geistig wahrnehmbaren, intelligiblen Figuren sind Gegenstand der Geometrie – nicht die Figur Kreis, sondern der Erkenntnisgegenstand Kreis.[97]

[94] Alten, 54
[95] Schönbeck, 58
[96] Colerus, 48
[97] Schönbeck, 59 f.

Für Platon nahm die Mathematik eine Zwischenstellung zwischen dem Reich der reinen Ideen und der Welt der sinnlich erfahrbaren Dinge ein.[98]
Seit dieser Zeit ist eine Diskussion über die Natur der mathematischen Gegenstände entfacht. Platon stellte als erster in der Geschichte die sogenannte „analytische Methode“ in den Fordergrund der Forschung. Das bedeutete, dass das geometrische Problem als gelöst betrachtet wurde und davon rück schließend die Eigenschaften der Figuren erforscht wurden.[99]
Platon ermahnte seine Schüler, sich der Mathematik philosophisch und kritisch zu widmen.[100]

Der bedeutendste Denker und Philosoph der Antike, Aristoteles lebte von 384 bis 322 vor Christus und war ein Schüler von Platon. Später war er selbst Lehrer von Alexander „dem Großen“ und er gründete die Philosophenschule „Lykeion“ in Athen. Aristoteles widmete sich auch der Mathematik. Er gilt als Schöpfer der Logik, auf die sich mathematische Schlüsse stützen und die die Anwendung von indirekten Beweisen ermöglicht. Die Logik war bis ins 19. Jahrhundert eine wesentliche Grundlage der Mathematik. In ihr liegen die Wurzeln für den logischen Formalismus und für die Einführung des heute noch üblichen Aussagenkalküls und zwar, dass jeder Aussage genau zwei Wahrheitswerte zugeordnet werden können, wahr oder falsch.[101]

Aristoteles war der Meinung, dass mathematische Objekte durch Abstraktion aus der Anschauung genommen wurden. Er interessierte sich vor allem auch für das Unendliche und das Kontinuum, das seiner Ansicht nach, nicht aus Punkten zusammengesetzt sein kann.[102]

Sein Schüler Eudemos verfasste jene wertvolle Geschichte der Mathematik, auf die sich Proklos bezieht und die noch heute als „Mathematikerverzeichnis“ von unschätzbarem Wert ist.[103]

[98] Alten, 38
[99] Colerus, 49
[100] Colerus, 49
[101] Alten, 54
[102] Scriba, 40
[103] Colerus, 49

6 Euklid

Über das Leben von Euklid sind kaum Daten überliefert. Vermutlich lebte er in der Zeit von 365 bis 300 vor Christus. Er soll jünger gewesen sein als Eudoxos und älter als Archimedes. Er lebte in Alexandria und ist der Begründer der dortigen mathematischen Schule. Er verfasste das bedeutendste Mathematikbuch aller Zeiten, die „Elemente". Nach dem heutigen Stand der Forschung gilt Euklid zwar nicht als Schöpfer der Geometrie, aber als unabhängiger, selbstständiger und einziger Autor der dreizehn Bücher der „Elemente".[104] Die „Elemente" sind neben der Bibel das am meisten vervielfältigte Buch des abendländischen Kulturraumes.[105]
Über Euklid ist nur eine einzige Anekdote überliefert. Sein König soll ihn gefragt haben, ob es für den Unterricht oder die Aneignung der Mathematik keinen bequemeren Weg gebe als den der „Elemente". Darauf soll Euklid geantwortet haben, dass es für die Mathematik keinen Königsweg gebe.[106]
Vermutlich verfasste Euklid sogar zehn mathematische Schriften, allerdings sind neben den „Elementen" nur noch die Werke „Data", „Phainomena", „Opitca" und „Über die Teilung der Figuren" erhalten. In „Data" und „Über die Teilung der Figuren" finden sich auch Ergänzungen und Kommentare zu den „Elementen". Euklid beschäftigt sich in „Phainomena" mit der Geometrie von Figuren, die auf eine Kugeloberfläche gezeichnet werden können und in „Opitca" widmet er sich der Geometrie der Perspektive, also der Umwandlung einer dreidimensionalen Szene in ein zweidimensionales Bild durch das menschliche Auge.[107]

Während in vorangegangen Zeiten die Mathematiker keine Schriften hinterließen, wimmelte es in der Zeit des Euklid nur so von mathematischen Aufzeichnungen.[108]
Hippokrates von Chios war vermutlich der erste Mathematiker, der sich um eine systematische, logische und deduktive Darstellung der geometrischen Kenntnisse bemühte. Leider sind weder von seinem möglichen Werk der Inhalt und der Aufbau bekannt, noch von anderen.[109]

[104] Schönbeck, 131
[105] Colerus, 51
[106] Colerus, 50
[107] Stewart, 25
[108] Colerus, 51
[109] Schönbeck, 133

6.1 Die „Elemente"

„Die Elemente" werden auf griechisch „Ta stoicheia" genannt. Der Titel wurde mit Sicherheit nicht zufällig gewählt. Denn „stoicheion bezeichnet die einfachsten Bestandteile körperlicher Dinge. Das heißt „Stoicheia" waren die Grundbestandteile sowohl im Sinne von Grundstoff, als auch im Sinne von Grundlage.[110]

Das Werk „Elemente" zeigt die Kriterien der griechischen Mathematik der damaligen Zeit und ist der älteste größere mathematische Text, der aus der griechischen Antike überliefert ist. Die Besonderheit des Werkes liegt vor allem im deduktiven Vorgehen und in den Beweisen, die sich auf Definitionen und Postulaten beziehen.[111] Dabei spielt die Logik eine bedeutende Rolle. Denn das Ziel des euklidischen Lehrsystems ist, aus den Postulaten und Definitionen, Theoreme und Probleme der Geometrie zu folgern und so die geometrische Struktur des natürlichen Raumes zu erschließen. Euklid zeigt den Zusammenhang zwischen unbewiesenen Grundsätzen und zu beweisenden Sätzen, aber es fehlt eine Unterscheidung zwischen undefinierten Grundbegriffen und zu definierenden Begriffen.[112] Die einzelnen Bücher sind eng miteinander verknüpft, obwohl sie sehr unterschiedliche Themen und Fragestellungen behandeln.[113]

Die Elemente sind in 13 Bücher gegliedert, wobei ein Buch einer Papyrusrolle entspricht. Man könnte sagen ein Buch entspricht heute einem Kapitel eines Werkes. Die Bücher sind mit römischen Ziffern benannt.

Buch I: Das erste Buch enthält hauptsächlich Wissen der Pythagoreer und beginnt mit Definitionen, mit denen Grundbegriffe, wie der Punkt, die Linie, der Winkel oder auch verschiedenartige Winkel und Vierecke beschrieben werden. Die allerletzte Definition behandelt parallele Strecken in der ebenen Geometrie, die als Linien mit keinem gemeinsamen Punkt beschrieben werden.[114] Den Definitionen folgen die Postulate.

Allgemein kann das Buch I in vier Teile gegliedert werden. Im ersten Teil werden fundamentale Theoreme und Konstruktionen, wie die Kongruenz von Dreiecken oder die Halbierung von Winkeln behandelt. Im zweiten Abschnitt steht die Parallelität von Strecken im Mittelpunkt. Dazu gehört auch das Theorem, dass die Summe der

[110] Schönbeck, 134
[111] Alten, 55
[112] Schönbeck, 136
[113] Schönbeck, 131
[114] Artmann, 3

Innenwinkel eines Rechtecks gleich zwei rechten Winkeln ist. Als dritter Teil kann die Behandlung des Parallelogramms gesehen werden und zum Schluss folgt noch die Satzgruppe des Pythagoras.[115]

Buch II: Der Inhalt von Buch II wird entweder als algebraische Umformungen, die geometrisch dargestellt werden können oder als geometrische Propositionen, die algebraisch interpretierbar sind, beschrieben.[116] Kurz kann man von „algebraischen Sätzen in geometrischem Gewand“ [117] oder von „geometrischer Algebra“ sprechen. Den Begriff „geometrische Algebra“ prägte Hieronymus Georg Zeuthen[118] Die meisten Theoreme dieses Buches können auf die binomische Beziehung $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zurückgeführt werden. Diese Resultate entstehen durch Unterteilung von Rechtecken. Im Buch II wird der Satz von Pythagoras verallgemeinert und diese Verallgemeinerung kennen wir heute als den Kosinussatz. Außerdem wird die Lösung zu dem Problem der Konstruktion einer flächengleichen Figur zu einer gegeben geradlinigen Figur gegeben.[119]

Buch III: Das Buch III widmet sich der Kreislehre. Neben Kreisen werden Tangenten, Berührungen von zwei Kreisen und von Vierecken und Kreisen behandelt. Dazu gehört auch die Proposition, dass alle Winkel im selben Kreissegment gleich groß sind.[120]

Buch IV: Im vierten Buch von Euklids „Elementen“ werden einerseits die Ein- und Umschreibung einer geradlinigen Figur in/ um einen gegeben Kreis behandelt und andererseits die Ein- und Umschreibung eines Kreises in/ um eine gegebene geradlinige Figur. Diese Probleme werden für allgemeine Dreiecke, Quadrate, regelmäßige Fünfecke, Sechsecke und Fünfzehnecke gelöst.[121]

Buch V: Buch V ist das abstrakteste von allen und ist unabhängig von den anderen. Es werden Größen behandelt, wie Zahlen, Linien, Winkel oder ebene Flächen. Auf Grund der Allgemeinheit dieser Theorie ist sie durchgehend in der

[115] Artmann, 4
[116] Schönbeck, 168
[117] Schönbeck, 170
[118] Schönbeck, 168
[119] Artmann, 4
[120] Artmann, 5
[121] Artmann, 5

Mathematik einsetzbar. Verschiedene Quellen bezeugen, dass diese Theorie von Eudoxos von Knidos stammt. Manche der Theoreme, wie $a:b=c:d \Rightarrow a:c=b:d$ wurden allerdings mit Sicherheit schon vor Eudoxos benützt.[122]

Buch VI: Die Bücher I, II und VI stellen das Kernstück der ebenen Geometrie bei Euklid dar. In Buch VI steht die Ähnlichkeit von Figuren im Mittelpunkt. Der ganze Aufbau von Buch VI basiert auf dem Theorem der Proportionalität von Strecken. Zum Schluss werden geometrische Lösungen von quadratischen Gleichungen behandelt.[123]

Buch VII: Mit Buch VII beginnt Euklid wieder von Neuem, aber jetzt mit der Arithmetik. Er verwendet nichts aus den vorhergehenden Büchern. Die Definitionen zu Beginn gehören zu den Büchern VII bis IX. Die Proportionalität von Zahlen wird ebenfalls definiert, aber es gibt auch hier keinen Zusammenhang zu Buch V. Die euklidische Arithmetik basiert auf dem euklidischen Algorithmus zur Ermittlung ob zwei Zahlen zueinander prim sind. Mit Hilfe dieses Algorithmus kann man den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen bestimmen. Die Theorie des „Größten gemeinsamen Teilers“ ist das Kernstück von Buch VII. Das Pendant dazu ist das „Kleinste gemeinsame Vielfache“. Die Definition der Proportionalität von Zahlen dient auch dazu, die Eigenschaften der Proportionen von Zahlen darzustellen.[124]

Buch VIII: Das Hauptaugenmerk der Bücher VIII und IX liegt auf dem Studium von mittleren Proportionalen und von geometrischen Reihen.[125] Der zweite Teil des Buches behandelt spezielle Typen von Zahlen, wie Quadratzahlen oder Kubikzahlen.[126]

Buch IX: Zwischen den Büchern VIII und IX ist ein kontinuierlicher Übergang. Die Teilung wirkt somit fast künstlich. Denn in den anderen Fällen sind die einzelnen Bücher bestimmten Themen zugeordnet. Im Buch IX wechselt Euklid dann aber zu

[122] Artmann, 6
[123] Artmann, 6
[124] Artmann, 7
[125] Schönbeck, 145
[126] Artmann, 8

einem ganz anderen Thema, zu der Theorie von den geraden und ungeraden Zahlen. Diese Theorie endet in der Konstruktion von perfekten Zahlen.[127]

Buch X: Im zehnten Buch widmet sich Euklid inkommensurablen Strecken. Der euklidische Algorithmus zur Bestimmung des „Größten Gemeinsamen Nenners“ wird auf allgemeine Größen angewandt um Kriterien für die Inkommensurabilität zu bekommen. Historisch gesehen, ist die Entdeckung von inkommensurablen Strecken oder wie wir heute sagen würden, irrationalen Zahlen, von immenser Wichtigkeit.[128]
Das Buch X gilt als am sorgfältigsten ausgearbeitet, wird aber manchmal auch als unübersichtlich empfunden.[129]

Buch XI: Buch XI beginnt mit einer langen Liste von Definitionen für die Bücher XI bis XIII. Der generelle Aufbau des Buches ähnelt dem von Buch I. Zuerst findet man Grundsätze der räumlichen Geometrie, wie Geraden, Flächen, Parallelität oder Orthogonalität. Danach werden räumliche Winkel und ihre Proportionen und ihre Konstruktion behandelt. Schließlich widmet sich Euklid noch der Rauminhaltslehre. [130] Inhaltlich geht es vermutlich auf Theaitetos und Eudoxos zurück. Auch die Beweise stammen wahrscheinlich von ihnen.[131]

Buch XII: Im vorletzten Buch werden Flächen und Volumen behandelt. Um die Fläche eines Kreises im Verhältnis zu einem Quadrat oder das Volumen einer Pyramide zu bestimmen sind infinitesimale Methoden notwendig. Die Exhaustionsmehtode, die Euklid verwendet, soll zuerst von Eudoxos angewandt worden sein. Der Beweis dafür ist anders und schwieriger als in anderen geometrischen Büchern.[132] Im Mittelpunkt stehen die berühmten Sätze über die Inhalte von Prisma und Pyramide und von Zylinder und Kegel.[133]

Buch XIII: Im dreizehnten und letzten Buch widmet sich Euklid den Platonischen Körpern. Die Konstruktion und Berechnung der so genannten platonischen Körper (Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) wird sehr häufig als

[127] Artmann, 8
[128] Artmann, 8f.
[129] Schönbeck, 176
[130] Artmann, 9
[131] Schönbeck, 185
[132] Artmann, 9
[133] Schönbeck, 185

Höhepunkt und eigentliches Ziel der Elemente gesehen. Es ist wohl kein Zufall, dass die platonischen Körper, die von Platon als die „vollkommensten Körper“ bezeichnet werden, den krönenden Abschluss von Euklids Werk bilden und im letzten dreizehnten Buch behandelt werden. Euklids Weg führt somit von der ebenen zur räumlichen Geometrie.[134]

Doch weder Euklid noch Platon beschrieben diese Körper zuerst. „*Sondern drei der […] Körper, nämlich Würfel, Pyramide [= reguläres Tetraeder] und Dodekaeder gehören den Pythagoreern, Oktaeder und Ikosaeder dem Theaitetos. Nach Platon heißen sie, weil dieser sie im Timaios erwähnt. Euklids Namen trägt dieses Buch, weil er es in die Reihe der Elemente eingefügt hat*.“

Nacheinander werden für jedes Polyeder drei Aufgaben gelöst. Zuerst soll ein Polyeder errichtet und mit einer Kugel umschlossen werden. Danach soll die Polyederkante berechnet und mit dem Kugeldurchmesser verglichen werden. Schließlich werden die Kanten der fünf Körper dargestellt und miteinander verglichen.[135]

Mit dem Theorem XIII.18a: „*Außer den besprochenen fünf Körpern [lässt sich] kein weiterer Körper errichten […], der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkeligen Figuren umfasst würde*;“ enden die Elemente. Es gibt laut Euklid somit genau fünf platonische Körper. [136]

Die „Elemente“ wären vermutlich nicht entstanden, ohne die Vorarbeiten von Thales, den Pythagoreern, Eudoxos und anderen. Auch die Philosophie von Platon und die Methodologie des Aristoteles haben Einfluss ausgeübt.[137]

Euklid werden häufig wissenschaftliche Leistungen abgesprochen und er wird nur als guter Didaktiker bezeichnet. Aufgrund der schlechten Quellenlage, fällt es sehr schwer gesicherte Aussagen über Euklids Bezug zur Geometrie und zur Algebra zu machen.[138] Es bestehen sogar teilweise Zweifel, ob Euklid die „Elemente“ wirklich selbst verfasst hat. Denn möglicherweise könnte er, wie in dieser Zeit üblich, mündlich- diskursiv unterrichtet haben und sein Werk könnte aus den Aufzeichnungen seiner Schüler entstanden sein. Kritiker bemängeln bei den „Elementen“ die strikte Aufeinanderfolge von Definition, Satz und Beweis und das

[134] Schönbeck, 183
[135] Schönbeck, 188
[136] Schönbeck, 190
[137] Scriba, 49f.
[138] Schönbeck, 132

Fehlen von Motivationen und Beispielen. Dieselben sahen auch in der Herrschaft Euklids im mathematischen Schulunterricht den Grund für die Unbeliebtheit des Faches.[139]

Das älteste bekannte Pergamentmanuskript der „Elemente“ wurde im Jahre 888 in Byzanz geschrieben, also rund 1200 nach deren vermutlicher Entstehung. Die „Elemente“ stellen ein Kulturgut ersten Ranges dar, dem immer viel Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Einerseits setzte man sich im Laufe der Geschichte mit dem Inhalt auseinander und andererseits nutzte man die „Elemente“ für Sprachstudien, als Lesetext und als historisches Dokument.[140]

6.2 Das Beweisverfahren des Euklid

Die Bausteine der „Elemente“ sind Definitionen (horoi), Postulate (aitemata), Axiome (koinai ennoiai), Lehrsätze (theoremata), Aufgaben (problemata) und Hilfssätze (lemmata). Die erste und sehr Bekannte Definition für den Punkt lautet: „Ein *Punkt ist, was keine Teile hat*.“ Ein Postulat dazu wäre: „*Gefordert soll sein: Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann*.“[141] Bekannt sind uns auch heute noch die Schlussformulierungen, wie „was zu beweisen war – quod erat demonstrandum“ und „was auszuführen war – quod erat faciendum“. Das Beweisverfahren des Euklid wurde von Proklos beschrieben und soll ein hierarchisches Stufenkonzept mit sechs Stücken gewesen sein. Nach einer Vorlage folgten die Voraussetzung und die Behauptung. Danach ging er zur Konstruktion und dem Beweis über. Schließlich endete der Beweisvorgang mit der Schlussfolgerung.[142]
In der Geometrie wird vieles heute noch genauso und genau in derselben Reihenfolge bewiesen, wie von Euklid selbst. Die Beweislücken bei Euklid betreffen meistens Anordnungsfragen und lassen sich sehr leicht schließen. Seine Beweisideen sind durchgängig brauchbar und oft trickreich, woraus man auf eine lange Beschäftigung mit dem Stoff schließen kann.[143]

[139] Scriba, 51f.
[140] Scriba, 59f.
[141] Schönbeck, 134
[142] Schönbeck, 137
[143] Scriba, 56

6.3 Grundbegriffe der ebenen Geometrie

Punkt und Linie:

Def. I.1.: „*Ein Punkt ist, was keine Teile hat*."

Def. I.2.: „*Eine Linie breitenlose Länge*." [144]

Strecke:

Def. I.4.: „*Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig lieg*t."[145]

Rechteck und Quadrat:

Def. I.22.: „*Von den vierseitigen Figuren ist ein Quadrat jede, die gleichseitig und rechtwinkelig ist, ein längliches Rechteck jede, die zwar rechtwinkelig, aber nicht gleichseitig ist*. […]"[146]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Die Themen, die Euklid im Buch I der Elemente behandelt, findet man in den ersten vier Jahren der AHS wieder. In der ersten Klasse sollen laut Lehrplan Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewonnen werden. Somit werden Begriffe, wie Punkt, Strecke, Gerade, Parallelität, Winkel und Symmetrie behandelt.

Die Autoren der Schulbuchreihe „Das ist Mathematik" starten bei der Einführung in die Geometrie mit einem historischen Teil. Ein ganzer Absatz wird Euklid und seinem Werk „Elemente" gewidmet. Euklid wird als „Wegbereiter der Geometrie" bezeichnet und auch die Anekdote über ihn und seinen König Ptolemäus wird erzählt.[147]
Bei der Einleitung des Kapitels „Geometrische Grundbegriffe" wird noch mal auf Euklid und die „Elemente" eingegangen. Um zu erklären, was ein Punkt, eine Linie oder eine Gerade überhaupt sind, werden die Definitionen von Euklid angeführt und erläutert. Auch die unendlich lange Gerade und parallele Geraden werden in Bezug auf Euklid angesprochen. In einem kurzen, abschließenden Absatz wird angemerkt, dass über das Leben von Euklid sehr wenig bekannt ist.[148]

[144] Thaer, 1
[145] Thaer, 1
[146] Thaer, 2
[147] Das ist Mathematik 1, 171
[148] Das ist Mathematik 1, 182f.

In „Mathe Buch 1“ von Anita Dorfmayr wird die historische Figur des Euklid zum Abschluss des Kapitels „Strecken und Geraden“ angesprochen. Der Fokus liegt dabei auf dem Buch „Die Elemente“. Allerdings steht nicht der Inhalt im Vordergrund, sondern Bedeutendes über das Buch selbst, wie beispielsweise, dass das Original nicht erhalten ist, dass es neben der Bibel das meistgedruckte Buch ist, dass es kein anderes vergleichbares wissenschaftliches Werk gibt, dass es so lange aktuell geblieben ist oder dass es kein Buch gibt, dass so oft bearbeitet und übersetzt wurde.[149]

Im Buch „Das ist Mathematik 1“ werden im Kapitel „Linien“ Strecke, Strahl und Gerade noch mal definiert und auf den Zusammenhang zwischen Punkt und Gerade eingegangen. Im Folgenden wird die Strecke als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten definiert. Nach den Streckenzügen folgen das Addieren und Subtrahieren von Strecken. Schließlich werden noch parallele und normale Geraden behandelt.[150]
Die Autoren von „Mathe Buch 1“ halten das Kapitel über Strecken und Geraden eher kurz. Zu Beginn werden der Strahl und die Strecke erklärt. Danach erläutern die Autoren die Gerade, parallele Geraden und normale Geraden. Schließlich werden nicht parallele Geraden und der Abstand eines Punktes von einer Geraden behandelt.[151]

6.3.1 Winkel

Def. I.8.: „*Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander fortzusetzen*.“

Def. I.10.: „*Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter*.“

Def. I.11.: „*Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist*.“

Def. I.12.: „*Spitz, wenn er kleiner als ein Rechter*.“ [152]

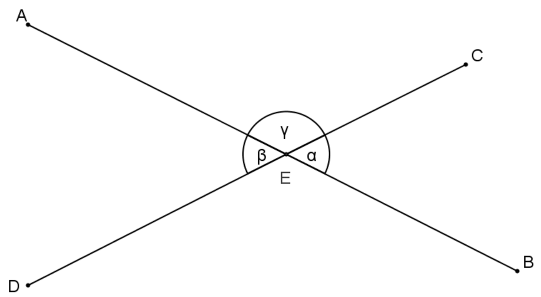
[149] Mathe Buch 1, 81
[150] Das ist Mathematik 1, 182- 191
[151] Mathe Buch 1, 76- 81
[152] Thaer, 1

Der Scheitelwinkelsatz

Den Scheitelwinkelsatz geht bereits auf Thales von Milet zurück. Ein Beweis von Euklid folgt nun.

Prop.I.15.: „*Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind*."

Beweis:



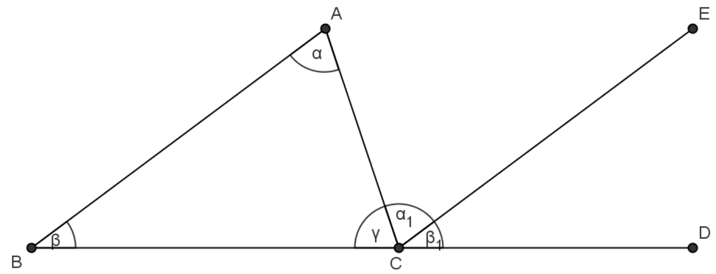
Wenn man die Strecken DC und AE betrachtet, stellt man fest, dass $\beta + \gamma = 2R$ sein muss. Dies geht auf den Satz „*Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muss sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden*" zurück. Auch wenn man die Strecken AB und CE betrachtet, ergibt sich aus dem gleichen Satz, dass $\gamma + \alpha = 2R$ sein muss. Nun folgt aus $\beta + \gamma = 2R$ und $\gamma + \alpha = 2R$, dass $\alpha + \gamma = \gamma + \beta$. Nun können wir das Axiom „*Wenn von Gleichem gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich*" anwenden. Wir nehmen also von beiden Seiten γ weg und so bleibt $\alpha = \beta$.□ [153]

Winkelsummensatz für Dreiecke

Euklid bewies mit Hilfe des Parallelenpostulats den Winkelsummensatz für Dreiecke.[154] Dieser Satz ist einer der wichtigsten in der elementaren Geometrie. Er wird so oft benützt, dass man dazu geneigt ist, seine Bedeutung zu vergessen.

Prop.I.32: „*An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkel zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich*."[155]

[153] Árpád, 331
[154] Schönbeck, 151f.
[155] Schönbeck, 151



Man verlängert die Seite BD zum Punkt D. EC soll parallel zu BA sein. Auf Grund der Proposition I.29 erhalten wir: $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$. Daher ist der Außenwinkel $\alpha_1 + \beta_1$ gleich $\alpha + \beta$. Und weil $\gamma + \alpha_1 + \beta_1 = 2\mathrm{R}$ folgt $\alpha + \beta + \gamma = 2\mathrm{R}$. □ [156]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Der Winkel wird, wie bereits im Kapitel über Thales von Milet erwähnt, bereits in der ersten Klasse der AHS oder der Hauptschule im Zuge der geometrischen Grundbegriffe erarbeitet. Die Definitionen von stumpfen und spitzen Winkeln in „Mathe Buch 1“ und „Das ist Mathematik 1“ gleichen denen von Euklid. [157]

Der Beweis des Scheitelwinkelsatzes aus „Mathe Buch 2“ wurde ebenfalls bereits im Kapitel über Thales vorgestellt.

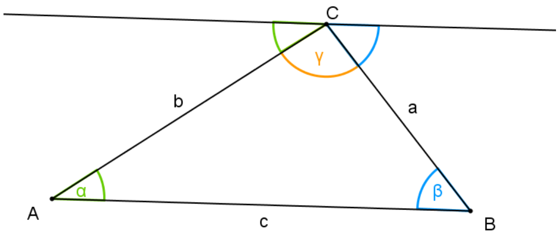
Eine bedeutende Eigenschaft von Dreiecken ist, dass die Summe der drei Innenwinkel zwei rechten Winkeln entspricht. Die Pythagoreer kannten diese Eigenschaft bereits, aber sie floss, wie die meisten ihrer Erkenntnisse, in die „Elemente“ Euklids ein. Euklid bewies diesen, für die elementare Geometrie sehr wichtigen, Winkelsummensatz für Dreiecke.

Im Lehrplan gehört der Sachverhalt zu den wesentlichen Eigenschaften des Dreiecks, die in der sechsten Schulstufe untersucht und festgestellt werden sollen.

Der Winkelsumme im Dreieck ist in „Das ist Mathematik 2“ ein eigenes Unterkapitel gewidmet. Zur Veranschaulichung sollen die Schülerinnen und Schüler die Winkel von einem Dreieck abreißen und so zusammenlegen, dass sie einen gestreckten Winkel ergeben. Zusätzlich soll dieser Satz mit Hilfe einer Anleitung bewiesen werden. Der Beweis geht auf den von Euklid zurück und verwendet ebenfalls die Parallelität. Er sieht folgendermaßen aus:

[156] Artmann, 35

[157] Das ist Mathematik 1, Mathe Buch 1, 198



1. Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und ziehe durch den Punkt C eine Parallele zur Seite c.
2. Die in der Abbildung gekennzeichneten Winkel rechts und links von γ ergeben mit γ zusammen einen gestreckten Winkel.
3. Vergleiche diese beiden Winkel mit α und β. Beschreibe welcher Zusammenhang vorliegt. [158]

In „Das ist Mathematik 2" soll in einer Übungsaufgabe der Beweis genau gleich wie bei Euklid durchgeführt werden. Außerdem wird noch die Winkelsumme für die Außenwinkel behandelt. [159]

Im Schulbuch „Mathe Buch 2" wird der Winkelsummensatz im Kapitel „Dreiecke und Dreieckskonstruktionen" nur in einem Satz erwähnt. Allerdings gibt es einen Hinweis zu einer Übungsaufgabe aus dem Kapitel „Koordinatensystem, Winkel, kongruente Figuren". Diese Aufgabe entspricht dem Beweis des Winkelsummensatzes im Dreieck für Innenwinkel aus „Das ist Mathematik 2".[160]

6.3.2 Parallelität

Ein Höhepunkt der „Elemente" von Euklid ist die Parallelenlehre. Die Einleitung dazu soll die Definition von parallelen Geraden darstellen.

Def. I.23: „*Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen*."[161]

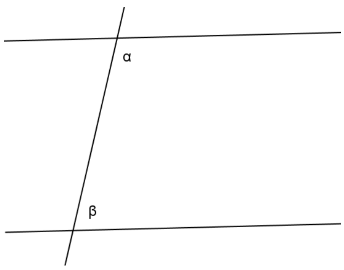
Sehr wichtig bei der Parallelenlehre ist das 5. Postulat.

Postulate 5: „*Gefordert soll sein, dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins*

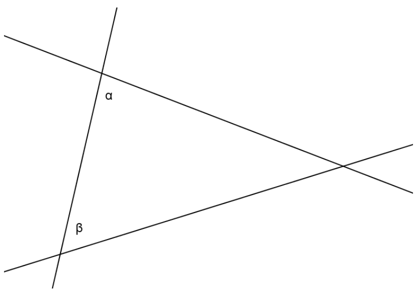
[158] Das ist Mathematik 2, 191- 193
[159] Das ist Mathematik 2, 191- 193
[160] Mathe Buch 2, 50 und 56
[161] Thaer, 2

unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.“ [162]

Das heißt, zwei gegebene, zueinander parallele Geraden schließen mit einer von



ihnen geschnittenen Geraden gleichgroße Wechsel- bzw. Stufenwinkel ein und deshalb schließen sie auch entgegengesetzte Winkel α und β mit der Summe $\alpha + \beta = 2\text{R}$ ein.



Um das zu beweisen, muss gezeigt werden, dass die beiden gegebenen Geraden bei $\alpha + \beta < 2\text{R}$ mit der sie schneidenden Geraden ein Dreieck bilden.
Gerade für diese Behauptung gelang der Beweis nicht.[163]

Da der Beweis für diese Behauptung nicht gelang, wurde sie vermutlich von Euklid in den Rang eines unbewiesenen Grundsatzes erhoben. [164]

Man unterscheidet heute zwischen der euklidischen Geometrie, der hyperbolischen Geometrie und der elliptischen Geometrie. Diese klassischen Geometrien unterscheiden sich durch die Parallelenfrage. In der euklidischen Geometrie gibt es zu einer Geraden und durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt nur eine einzige Parallele. In der elliptischen Geometrie gibt es dazu überhaupt keine Parallele und in der hyperbolischen mindestens zwei. Folglich ist das 5. euklidische Postulat das, was den Namen „euklidische Geometrie“ rechtfertigt.[165]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Die Parallelität zählt ebenfalls zu den Grundbegriffen der Geometrie und wird bereits ab der ersten Klasse AHS und Hauptschule behandelt.

[162] Thaer, 3
[163] Schönbeck, 152
[164] Schönbeck, 153
[165] Schönbeck, 155

In „Das ist Mathematik 1“ wird parallel so definiert: „*Parallele Geraden haben keinen Schnittpunkt*.“[166]
In „Mathe Buch 1“ sind zwei parallele Geraden aufgezeichnet und mit dem Hinweis versehen, dass diese parallel zueinander sind. Außerdem wird noch erwähnt, dass der Abstand zweier Parallelen überall gleich groß ist.[167]

6.4 Dreiecke

Def. I.20.: „*Von den dreiseitigen Figuren ist ein gleichseitiges Dreieck jede mit der gleichen Seiten, ein gleichschenkeliges jede mit nur zwei gleichen Seiten, ein schiefes jede mit drei ungleichen Seiten*.“[168]

Def. I.21.: „*Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein rechtwinkeliges Dreieck jede mit einem rechten Winkel, ein stumpfwinkeliges jede mit einem stumpfen Winkel, ein spitzwinkeliges jede mit drei spitzen Winkeln*.“[169]

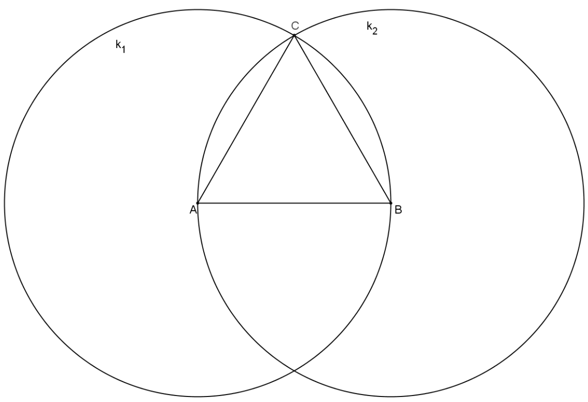
In den „Elementen“ behandelt Euklid auch die Winkel-, Seiten- und Streckensymmetralen, sowie den In- und Umkreis eines Dreiecks.

Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks

Prop. I.1.: „*Über einer gegebenen Stecke ein gleichseitiges Dreieck errichten*.“

Beweis:

Die gegebene Strecke sei AB und über ihr soll ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.



Mit A als Mittelpunkt und AB als Radius zeichne man den Kreis k_1. Ebenso zeichne man mit B als Mittelpunkt und wiederum AB als Radius den Kreis k_2. Anschließend verbinde man den Schnittpunkt C der beiden Kreise mit A und B. Die Behauptung lautet nun, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist.

166 Das ist Mathematik 1, 188
167 Mathe Buch 1, 78
168 Thaer, 2
169 Thaer, 2

Da A Mittelpunkt des Kreises k_1 ist, gilt AC = AB. Ebenso ist BC = AB, weil B der Mittelpunkt des Kreises k_2 ist. Daraus folgt, dass sowohl AC als auch BC gleich AB sind. Also gilt auch AC = BC. Demnach sind alle Seiten des Dreiecks ΔABC gleich und das Dreieck ist gleichseitig.□[170]

6.4.1 Kongruenzsätze

In den „Elementen" sind bereits die drei wichtigsten Kongruenzsätze für Dreiecke enthalten.

SWS- Satz:

Prop. I.4.: „*Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkel entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen*."[171]

SSS- Satz:

Prop. I.8.: „*Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, dann müssen in ihnen auch die von gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich sein*."[172]

WSW- Satz und WWS- Satz:

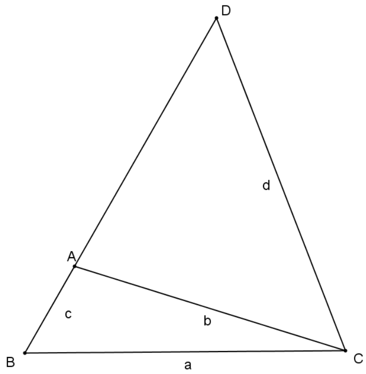
Prop. I.26.: „*Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel zwei Winkeln entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite, nämlich entweder die den gleichen Winkel anliegenden oder die einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten einander gleich, dann müssen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel*."[173]

[170] vgl. Thaer, 3f. und Grünfelder, 61f.
[171] Thaer, 5
[172] Thaer, 8
[173] Thaer, 18

6.4.2 Dreiecksungleichung

Prop. I.20.: „*In jedem Dreieck sind zwei Seiten, beliebig zusammengenommen, größer als die letzte*."[174]

<u>Beweis:</u>



Das Dreieck sei ΔABC.

Behauptung: Im Dreieck ΔABC sind zwei Seiten zusammen größer als die letzte, das heißt $AB + AC > BC$, $AB + BC > AC$ und $BC + AC > AB$.

Also: $c + b > a$, $c + a > b$ und $a + b > c$.

Man verlängere die Seite BA nach D, mit AD = AC = b und ziehe die Strecke CD.

Weil nun AD = AC ist, gilt für die Winkel $\angle ADC$ und $\angle ACD$ die Gleichheit. Also ist $\angle BCD > \angle ADC$. Da aber ΔDBC ein Dreieck ist mit $\angle BCD > \angle BDC$ und dem größeren Winkel aber die größere Seite gegenüberliegen muss, ist BD > BC.

Aber es gilt AD = AC, wonach $AB + AC > BC$ ist. Also $c + b > a$.

Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $AB + BC > AC$ und $BC + AC > AB$, also $c + a > b$ und $a + b > c$. □[175]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Dreiecke sollen laut Lehrplan in der zweiten Klasse AHS in den Unterricht einfließen. Schülerinnen und Schüler sollen Dreiecke untersuchen, wesentliche Eigenschaften feststellen, skizzieren und konstruieren können.

In „Das ist Mathematik 2" werden zu Beginn die Dreiecksarten unterschieden. Das gleichschenkelige und das gleichseitige Dreieck werden genau so, wie bereits bei Euklid definiert. Wenn alle drei Seiten eines Dreiecks verschieden lang sind, wird im heutigen Schulunterricht meistens vom allgemeinen Dreieck und nicht wie bei Euklid vom schiefen Dreieck gesprochen.

Danach folgt, wie in den „Elementen", die Einteilung der Dreiecke nach den Winkeln. Man unterscheidet zwischen dem spitzwinkeligen, dem stumpfwinkeligen und dem rechtwinkeligen Dreieck.

[174] Thaer, 14
[175] vgl. Thaer, 14f. und Grünfelder, 73

Als Übungsaufgabe findet man die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks. Als Anleitung wird eine Skizze geboten, die der aus dem Beweis von Euklid sehr ähnelt.[176]

In „Mathe Buch 2“ werden die Dreiecke zuerst nach den Winkeln eingeteilt. Das gleichseitige und das gleichschenkelige Dreieck werden im Zuge der Dreieckskonstruktionen eingeführt.[177]

Die Kongruenz ist heute noch ein wesentlicher Bestandteil des Schulunterrichts. Denn laut Lehrplan sollen die Schülerinnen und Schüler einer zweiten Klasse AHS kongruente Dreiecke herstellen können und auch in der Lage sein die Kongruenz begründen zu können. Behandelt werden der WSW- Satz, der SWS- Satz, der SSS- Satz und der SSW- Satz.

In „Das ist Mathematik 2“ und „Mathe Buch 2“ werden die Kongruenzsätze hauptsächlich zur Konstruktion von Dreiecken verwendet. Die Kongruenzsätze werden als Merksätze festgehalten.
<u>SSS- Satz</u>: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen.

<u>WSW- Satz</u>: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Länge einer Seite und in den Größen jener Winkel übereinstimmen, dieser Seite anliegen.

<u>SWS- Satz</u>: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den Längen zweier Seiten und in der Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.

<u>SSW- Satz</u>: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seitenlängen und in der Größe jenes Winkels übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt.

Die Formulierungen sind heute im Vergleich zu den „Elementen“ kürzer und verständlicher, aber der Inhalt hat sich nicht verändert.[178]

---

[176] Das ist Mathematik 2, 189f.
[177] Mathe Buch 2, 54- 58
[178] Mathe Buch 2, 56- 62; Das ist Mathematik, 194- 202

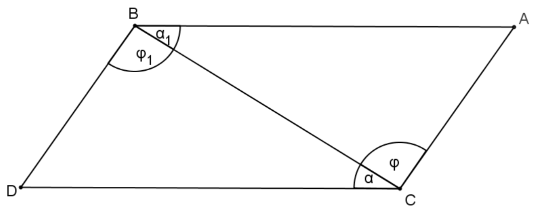
Die Dreiecksungleichung wird in „Das ist Mathematik 2“ im Zuge der Dreieckskonstruktionen erwähnt. Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler versuchen ein Dreieck zu konstruieren, bei dem die Seiten a und b zusammen kürzer sind, als die Seite c. Sie sollen erkennen, dass mit diesen Angaben kein Dreieck konstruiert werden kann. Danach sollen an einem beliebigen Dreieck die Seitenlängen abgemessen werden und je zwei Seitenlängen addiert und mit der dritten verglichen werden. Die Folgerung daraus ist, dass in jedem Dreieck die sogenannte Dreiecksungleichung gilt, die in drei Fassungen aufgeschrieben werden kann: 1) $a+b>c$ 2) $a+c>b$ 3) $b+c>a$ [179]

6.5 Parallelogramm

Prop. I.33.: „*Strecken, welche gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind auch selbst gleich und parallel*.“

<u>Beweis:</u>

Seien AB und CD zwei gleich lange und parallele Stecken. Die Stecken AC und BD mögen sie auf beiden Seiten miteinander verbinden.



Behauptung: Auch AC und BD sind gleich lang und parallel.

Man ziehe nun zusätzlich die Linie BC. Da $AB \parallel CD$ ist und beide Strecken von BC geschnitten werden, gilt für die Wechselwinkel die Gleichheit.

Also $\angle ABC = \angle BCD = \alpha$.

Da AB = CD ist und BC beiden gemeinsam, so sind den Dreiecken ΔABC und ΔDCB zwei Seiten, nämlich AB = CD und BC, und die Winkel $\angle ABC$ und $\angle BCD$ gleich. Damit sind die Dreiecke nach dem SWS- Satz kongruent. Demnach muss auch gelten, dass $\angle ACB = \angle CBD = \varphi$. Da hier BC beim Schnitt mit AC und BD gleiche Wechselwinkel bildet, müssen AC und BD parallel sein.□[180]

[179] Das ist Mathematik 2, 195
[180] Grünfelder, 76

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

In der sechsten Schulstufe stehen laut Lehrplan die Vierecke am Programm. Vierecke sollen untersucht werden und dabei wesentliche Eigenschaften herausgearbeitet werden. Außerdem sollen Vierecke skizziert und konstruiert werden.

In „Das ist Mathematik 2“ wird das Parallelogramm, das auch zu den Vierecken zählt, so definiert: „*Vierecke, bei denen je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißen Parallelogramme*.“ Die Eigenschaften sind folgende: „*Parallele Seiten sind jeweils gleich lang. Gegenüberliegende Winkel sind jeweils gleich groß. […]*“ Diese Eigenschaften werden auch in den „Elementen“ festgehalten. [181]

In „Mathe Buch 2“ wird das Parallelogramm sehr ähnlich der Definition Euklids beschrieben: „*Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind*.“ Die Eigenschaften eines Parallelogramms werden in diesem Schulbuch nicht explizit angeführt.[182]

6.6 Satz von Pythagoras

Die Flächenlehre von Euklid enthält die älteste überlieferte systematische Flächeninhaltslehre. Es geht dabei nicht um arithmetische Flächenmessungen, sondern um geometrische Flächenvergleiche. Mit dem Axiom „*Was einander deckt, ist einander gleich*“ wird vorausgesetzt, dass Kongruenz auch Flächeninhaltsgleichheit zur Folge hat.[183]

Das Hauptaugenmerk wird auf den Vergleich von Parallelogrammen und Dreiecken untereinander und miteinander, gelegt. Inhaltsmaße werden nicht angegeben.

Prop.I.35: „*Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich*.“

Prop.I.37: „*Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich*.“

[181] Das ist Mathematik 2, 228f.
[182] Mathe Buch 2, 227
[183] Schönbeck, 155

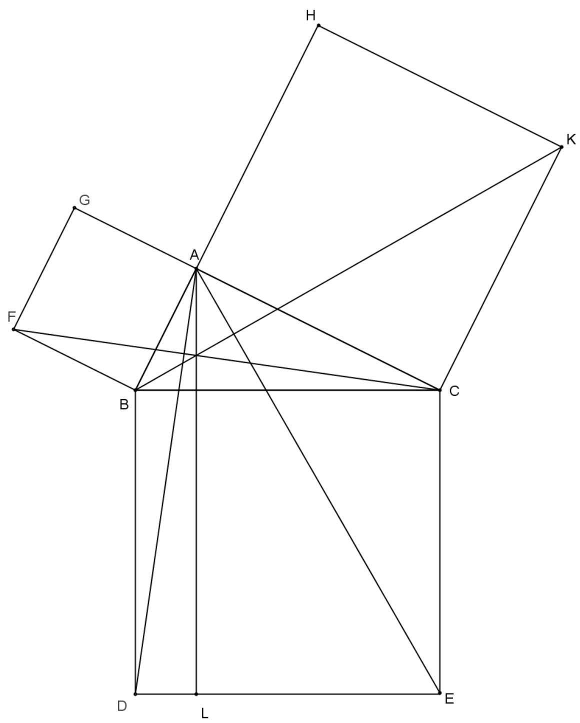
Prop.I.41: „*Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck*.“ [184]

Der Höhepunkt der Flächenlehre ist der nach Pythagoras von Samos benannte Satz über rechtwinkelige Dreiecke. Proklos schrieb dazu: „*Bewundere ich nun schon diejenigen, die die Wahrheit dieses Theorems zuerst erforschten, so muss ich um so mehr den Verfasser der Elemente hochschätzen: der durch den überzeugendsten Beweis dieses Theorem erhärtet hat*.“

Den Satz des Pythagoras findet man in Euklids „Elementen“ folgendermaßen:
Prop.I.47.: „*Am rechtwinkeligen Dreieck ist da Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich*.“ [185]

Beweis:

Der Beweis von Euklid für den pythagoreischen Lehrsatz gilt als einer der bedeutendsten.



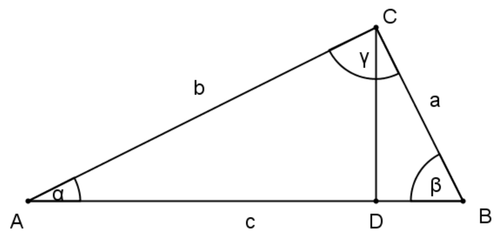
Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel $\angle BAC$. Über BC wird das Quadrat BDEC, über AC das Quadrat ACKH und über BA das Quadrat BAGF gezeichnet. Durch A wird eine Parallele AL zu BD gezeichnet und die Punkte A und D, sowie die Punkte F und C werden verbunden.

Da die Winkel $\angle BAC$ und $\angle BAG$ beide rechte Winkel sind, so bilden an der Geraden BA im Punkt A die zwei nicht auf derselben Seite liegenden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen gleich zwei rechten Winkel sind. Also wird AG durch CA fortgesetzt. Aus demselben Grund wird AH durch BA gerade fortgesetzt. Euklid verwendet hier den Satz „*Bilden*

[184] Schönbeck, 156
[185] Thaer, 32

an einer geraden Linie in einem Punkt auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien Nebenwinkel, die zusammen zwei rechten gleich sind, dann müssen diese geraden Linien einander gerade fortsetzen."

$\angle DBC = \angle FBA$, denn beide sind rechte Winkel. Fügt man $\angle ABC$ beiderseits hinzu, dann ist der ganze Winkel $\angle DBA$ gleich dem ganzen Winkel $\angle FBC$. Da DB = BC und FB = BA, so sind die zwei Seiten DB, BA den zwei Seiten FB, BC gleich. Nun ist $\angle DBA = \angle FBC$, also ist AD = FC und $\Delta ABD = \Delta FBC$.
Des Weiteren ist das Rechteck $BL = 2\Delta ABD$. Rechtecke werden in diesem Beweis durch die Angabe von zwei gegenüberliegenden Eckpunkten beschrieben. Denn beide haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD und AL. Außerdem ist das Quadrat $GB = 2\Delta FBC$, denn beide haben wiederum dieselbe Grundlinie FB und liegen zwischen denselben Parallelen FB und GC. Also ist das Rechteck BL gleich dem Quadrat GB.
Auf ähnliche Art und Weise lässt sich zeigen, dass wenn man die Strecken AE und BK zieht, das Rechteck CL gleich dem Quadrat HC ist. Also ist das ganze Quadrat BDEC gleich der Summe der zwei Quadrate GB und HC. Dabei ist das Quadrat BDEC über BC gezeichnet und GB über BA und HC über AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC gleich den Quadraten über den Seiten BA und AC zusammen. €[186]



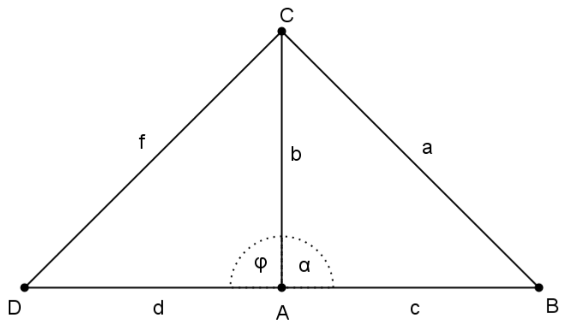
In diesem Beweis ist auch der Beweis des so genannten Kathetensatzes verpackt. Aus diesem und aus dem Satz von Pythagoras lässt sich außerdem noch der Höhensatz herleiten. Denn nach dem Satz von Pythagoras gilt $AC^2 = CD^2 + AD^2$. Mit Hilfe des Kathetensatzes erhalten wir $AC^2 = AB \cdot AD = (AD + DB) \cdot AD$. Somit gelangt man zu $CD^2 = AD \cdot DB$.€[187]

[186] Kaiser, Nöbauer, 123
[187] Kaiser, Nöbauer, 124

6.6.1 Die Umkehrung zum Satz des Pythagoras

Prop.I.48.: „*Wenn an einem Dreieck das Quadrat über einer Seite den Quadraten über den beiden übrigen Seiten zusammen gleich ist, dann ist der von diesen beiden übrigen Seiten des Dreiecks umfasste Winkel ein Rechter*.“ [188]

<u>Beweis</u>:



Das Dreieck ABC ist gegeben. Die Strecke AD ist gleich der Strecke AB und φ ist ein rechter Winkel. Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras, dass $f^2 = d^2 + b^2 = c^2 + b^2$. Dies ist laut Voraussetzung gleich a^2. Daher ist die Strecke f gleich der Strecke a. Auf Grund des SSS- Satzes sind die Dreiecke ABC und ADC kongruent und daher ist $\alpha = \varphi$ ein rechter Winkel. □ [189]

6.6.2 Kosinussatz

Die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras führt zu einem Satz, der uns heute unter der Bezeichnung „Kosinussatz“ ein Begriff ist.

Prop.II.12.: „*An jedem stumpfwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite größer als die Quadrate über den den stumpfen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um den stumpfen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot außen abgeschnittenen Strecke an der stumpfen Ecke*.“[190]

<u>Beweis:</u>

Sei ABC ein stumpfwinkeliges Dreieck mit dem stumpfen Winkel $\angle BAC$. Auf die Verlängerung von CA wird eine Normale BD durch den Punkt B gezeichnet.

Behauptung: $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2CA \cdot AD$

Da die Strecke CD im Punkt A beliebig geteilt ist, ist $DC^2 = CA^2 + AD^2 + 2 \cdot CA \cdot AD$ (binomisches Theorem II.4).

---

[188] Thaer, 33
[189] Artmann, 45
[190] Thaer, 42

Man füge DB^2 beiderseits hinzu, dann sind $CD^2 + DB^2 = CA^2 + AD^2 + DB^2 + 2CA \cdot AD$.
Aber $CB^2 = CD^2 + DB^2$, denn der Winkel bei D ist ein Rechter.
Und $AB^2 = AD^2 + DB^2$.
Also ist $CB^2 = CA^2 + AB^2 + 2 \cdot DA \cdot AC$. Folglich ist $CB^2 = AB^2 + CA^2 + 2CA \cdot AD$ □ [191]

Heute würden wir AB = c, BC = a, CA = b und $\angle BAC = \alpha$ setzen. Dann ist $DA = c \cdot \cos\alpha$. Weil α stumpfwinkelig ist, ist $\cos\alpha$ negativ und wir erhalten $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.[192]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Der Kosinussatz, der das Ergebnis der Verallgemeinerung des Pythagoreischen Lehrsatzes ist, soll laut Lehrplan in der 9. Schulstufe behandelt werden. Denn in diesem Unterrichtsjahr sollen die Schülerinnen und Schüler Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken und an Figuren und Körpern auch mittels Sinus- und Kosinussatz durchführen.
Der Kosinussatz wird in „Lehrbuch der Mathematik 5“ und „Mathematik verstehen 5“ mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes hergeleitet.[193]

6.7 Geometrische Algebra

Prop.II.3.: „*Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenanntem Abschnitt zusammen gleich*.“ [194]

Diese Proposition führt zum Distributivgesetz $(a+b)a = ab + a^2$.[195]

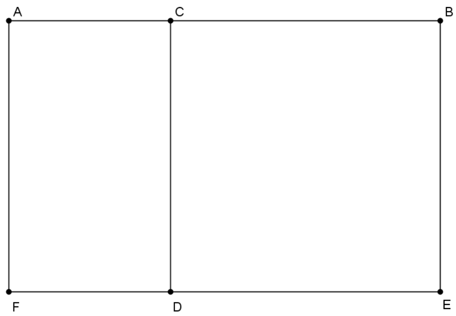
Beweis:

Die Strecke AB wird beliebig durch C geteilt. Unsere Behauptung lautet nun, dass $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.

[191] Thaer, 42f.
[192] Artmann, 69f.
[193] Mathematik verstehen 5, 99
[194] Thaer, 35
[195] Alten, 63

Über CB wird das Quadrat CDEB eingezeichnet und ED wird nach F verlängert. Man ziehe nun durch A AF, wobei AF parallel zu CD und BE.

AE=AD+CE. AE ist nun $AB \cdot BC$; denn es wird von Ab, BE umfasst, und BE = BC. Und AD ist $AC \cdot CB$; denn DC = CB. Und DB ist CB^2. Als ist $AB \cdot BC = AC \cdot CB + BC^2$.□ [196]



Prop.II.4.: „*Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke (etwa a+b) den Quadraten über den Abschnitten (also a und b) und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich*.“ [197]

Dieses Theorem führt zur binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.[198]

Prop.II.6.: „*Halbiert man eine Strecke und setzt ihre irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke (etwa a) mit der Verlängerung (etwa b) und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.“*[199]

Wörtlich übertragen bedeutet dies $(a+b)\cdot b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2$

Setzt man aber $p = a$ und $x = b$, bekommen wir $(p+x)\cdot x = \left(\frac{p}{2}+x\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$.

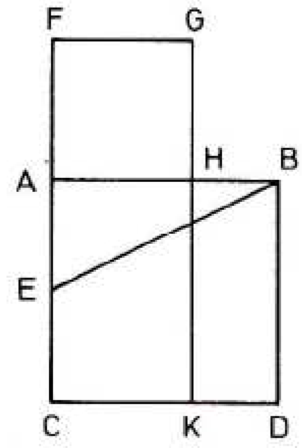
Dies erinnert an die Methode der quadratischen Ergänzung.[200]

Prop.II.11.: „*Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist*.“[201]

---

[196] Alten, 63f.
[197] Thaer, 35
[198] Schönbeck, 168
[199] Thaer, 37
[200] Schönbeck, 169f.

<u>Beweis:</u>



AB sei die gegebene Strecke. Man soll AB so teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Stecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist. Man zeichne über AB das Quadrat ABCD, halbiere AC im Punkt E, ziehe BE, verlängere CA nach F, mache EF=BE, zeichne über AF das Quadrat FH und ziehe GH nach K durch. Ich behaupte, dass man AB in H so geteilt hat, dass $AB \cdot BH = AH^2$. Da die Strecke AC nämlich in E halbiert und FA ihr angelegt ist, so ist $CF \cdot FA + AE^2 = EF^2$. Aber EF=EB, also ist $CF \cdot FA + AE^2 = EB^2$.

Aber $EB^2 = BA^2 + AE^2$, denn der Winkel bei A ist ein rechter, also ist $CF \cdot FA + AE^2 = BA^2 + AE^2$. Man nehme das gemeinsame AE^2 weg. Dann ist $CF \cdot FA = AB^2$ der Rest.

$CF \cdot FA$ ist hier FK, dann AF=FG und AB^2 ist AD. Also ist FK=AD. Man nehme das Parallelogramm FH=HD. HD ist hier $AB \cdot BH$, denn AB=BD und FH ist AH^2. Also ist $AB \cdot BH = HA^2$. Man hat also eine gegeben Strecke AB in H so geteilt, dass $AB \cdot BH = HA^2$. □

In moderner mathematischer Sprache können wir diese Konstruktion so beschreiben: Zur Lösung von $x^2 + ax = a^2$ wird zunächst die linke Seite durch Addition von $\frac{a^2}{4}$ auf ein vollständiges Quadrat ergänzt. Das entspricht der Konstruktion des Punktes E. Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel, so erhält man $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$. (Natürlich wird nur die positive Wurzel berücksichtigt.) $x + \frac{a}{2}$ entspricht der Strecke EF und $\sqrt{\frac{5a^2}{4}}$ der Strecke BE. Nun wird $\frac{a}{2}$ auf beiden Seiten abgezogen und man erhält $x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2}$. Das entspricht der Strecke AF = BE – AE.[202]

[201] Thaer, 41
[202] Kaiser, Nöbauer, 101f.

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Euklid beschäftigte sich bereits mit algebraischen Sachverhalten, die sich geometrisch darstellen lassen. Dadurch kommt er bereits auf das heutige Distributivgesetz und auf die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und verwendet die Methode des Ergänzens auf ein vollständiges Quadrat.

Das Distributivgesetz wird im heutigen Schulunterricht in der ersten Klasse AHS im Zuge der Bearbeitung der natürlichen Zahlen, eingeführt. Mit binomischen Formeln kommen die Schülerinnen und Schüler erstmals in der 7. Schulstufe in Berührung. Bei der Bearbeitung von linearen quadratischen Gleichungen in einer Variablen in der 9. Schulstufe lernt man die Methode der Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat im Schulunterricht kennen.

Das Distributivgesetz wird selbstverständlich in allen untersuchten Schulbüchern behandelt. Aber nur in „Das ist Mathematik 1“ wird auch eine geometrische Deutung angeführt.[203]

Die Binomischen Formeln werden in beiden Schulbuchreihen auf die gleiche Art und Weisen mit Hilfe der geometrischen Deutung erklärt.[204]

Die Methode der Ergänzung auf ein vollständiges Quadrat wird in „Lehrbuch der Mathematik 5“ und „Mathematik verstehen 5“ verwendet um die Lösungsformeln zur Lösung von allgemeinen quadratischen Gleichungen mit einer Variablen herzuleiten.[205]

6.8 Kreislehre

Im Buch III der Elemente findet man vor allem Lehrsätze und Konstruktionsaufgaben zum Kreis, die noch heute in der Schulmathematik fest verankert sind. Man findet Sätze über Sehnen, Sekanten, Tangenten und über Berührungs- und Schnittpunkte von Kreisen.[206]

---

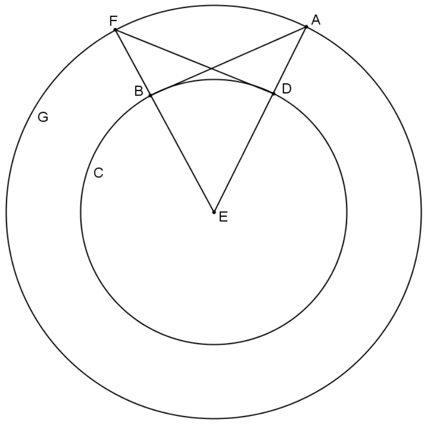
[203] Das ist Mathematik 1, 77
[204] Das ist Mathematik 3, 91; Mathe Buch 3, 165; Mathe Fit 3, 120
[205] Lehrbuch der Mathematik 5, 89; Mathematik verstehen 5, 158
[206] Schönbeck, 159

Def. I.15.: „*Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die Umfang (Bogen) heißt] umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind*.“[207]

Def. III.1.: *Gleiche Kreise sind solche, deren Durchmesser oder deren Radien gleich sind*.“ [208]

Def. III.2.: Dass sie den Kreis berühre *(Tangente sei, sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet.“* [209]

Eine Tangentenkonstruktion ergibt sich aus der Aufgabe Prop.III.17., die auch noch heute in der Schule gerne gestellt wird.
Prop.III.17.: „*Von einem gegebenen Punkte aus an einen gegebenen Kreis eine Tangente zeichnen.*“ [210]
<u>Beweis:</u>



A sei der gegebene Punkt und BCD sei der gegebene Kreis. Man soll nun von A an den Kreis eine Tangente ziehen. Zuerst verschaffe man sich den Kreismittelpunkt E und danach ziehe man AE. Nun zeichnet man mit E als Mittelpunkt und EA als Abstand den Kreis AFG. Man ziehe ferner von D aus DF, wobei DF normal auf EA ist. Dann ziehe man EF und AB. Die Behauptung ist, dass man so vom Punkt A an den Kreis BCD eine Tangente gezogen hat, nämlich AB.

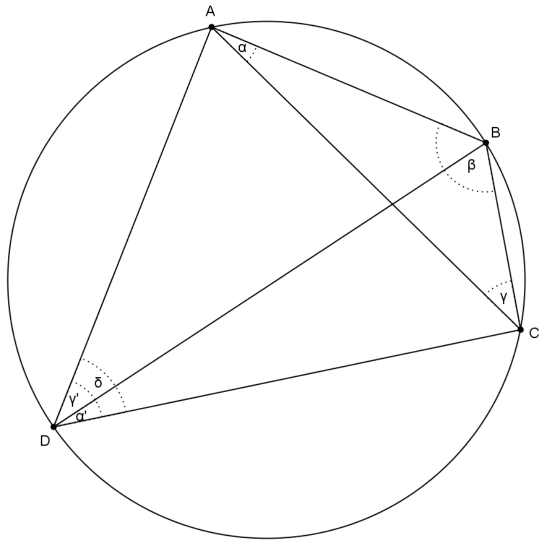
Da E Mittelpunkt der Kreise BGD und AFG ist, so ist EA=EF und ED=EB. Somit sind die zwei Seiten AE und EB gleich den Seiten FE bzw. ED und sie umfassen einen gemeinsamen Winkel bei E. Also ist die Grundlinie DF gleich der Grundlinie AB, der Winkel DEF gleich dem Winkel EBA und übrigen Winkel gleich den übrigen Winkeln. Also ist der Winkel EDF gleich dem Winkel EBA. EDF ist ein rechter Winkel, also ist auch EBA ein rechter.

[207] Thaer, 1
[208] Thaer, 45
[209] Thaer, 45
[210] Thaer, 59

EB geht vom Mittelpunkt aus. Eine rechtwinkelige Linie, die zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogen und gerade ist, berührt aber den Kreis. Also berührt AB den Kreis BGD.
Man hat also von einem gegebenen Punkt A an einen gegebenen Kreis BGD eine Tangente gezogen, nämlich AB. €[211]

Prop.III.22.: *„In jedem einem Kreise einbeschriebenen Viereck sind gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich.“*[212]

<u>Beweis:</u>



Im Dreieck ABC haben wir $\alpha+\beta+\gamma=2R$. Die Winkel α und α' liegen im selben Segment, das von BC begrenzt wird. Somit folgt aus der Prop.III.21 $\alpha=\alpha'$.
(Prop.III.21.: „*In einem Kreis sind die Winkel in einem Kreissegment gleich.*“)
Ebenso ist $\gamma=\gamma'$ und weil $\delta=\alpha'+\gamma'$ erhalten wir $\beta+\delta=\beta+\alpha+\gamma=2R$. □ [213]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Das dritte Buch der Elemente widmet Euklid der Kreislehre und behandelt. Die Begriffe Sehnen, Sekanten, Tangenten und Berührungs- und Schnittpunkte von Kreisen sind auch heute noch in den Lehrplänen und Schulbüchern fest verankert.
Laut Lehrplan sollen Schülerinnen und Schüler bereits in der 1. Klasse AHS Eigenschaften von Kreisen kennen und sie auch mit den passenden Hilfsmitteln konstruieren können. In der vierten Klasse sollen die Schülerinnen und Schüler Schranken für Umfang und Inhalt des Kreises angeben können, sowie Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können. Weiters sollten Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen hergeleitet und angewendet werden.

[211] Burckhardt, 11
[212] Thaer, 62
[213] Artmann, 85f.

Nachdem die Begriffe „Kreislinie“ und „Kreisfläche“ unterschieden wurden, wird in „Das ist Mathematik 1“ der Kreis so definiert: „*Alle Punkte eines Kreises k haben vom Mittelpunkt denselben Abstand, nämlich den Radius r*.“ Danach kommen die Kreissehne, der Kreisbogen, das Kreissegment und der Kreissektor an die Reihe. Schließlich werden noch Sekante, Tangente und Passante erläutert. Die Beschreibung der Tangente entspricht heute noch der Definition von Euklid. Die Autoren von „Das ist Mathematik 1“ behandeln auch die gegenseitige Lage von Kreisen und den Kreisring.[214]

Im „Mathe Buch 1“ wird der Kreis genauso definiert, wie im anderen Buch. Danach werden nur noch die Kreissehne, konzentrische Kreise, der Kreissektor und das Kreissegment behandelt. Die Lagebeziehungen zwischen einem Kreis und einer Gerade fehlen. Somit kommen die Begriffe Sekante, Tangente und Passante in diesem Buch nicht vor. [215]

Der Kreis und die Kreistangente werden auch noch einmal in der siebten Klasse AHS im Zuge der nichtlinearen analytischen Geometrie behandelt. Dabei werden allerdings Kreis- und Tangentengleichungen aufgestellt. Dies kommt in Euklids „Elementen“ noch nicht vor.

6.9 Konstruktion regelmäßiger Vielecke

Die Kreislehre wird von Euklid mit der Konstruktion von Figuren, die dem Kreis ein- oder umschrieben werden, beendet. Entweder soll einem gegebenen Kreis ein reguläres n- Eck ein- oder umgeschrieben werden, oder umgekehrt.[216]

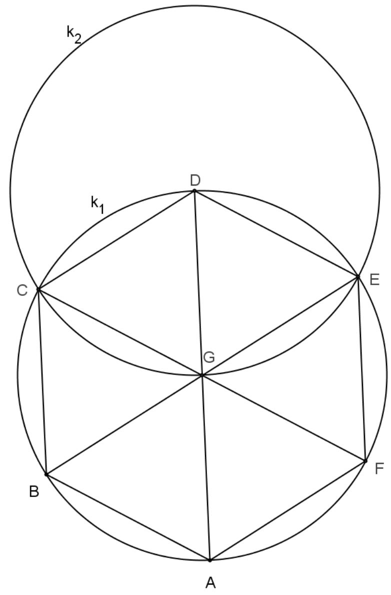
Am anspruchsvollsten sind die Konstruktionen des Fünf- und Fünfzehnecks. Euklid kannte wahrscheinlich auch die Konstruktion des Drei-, des Vier-, des Sechs-, des Acht-, des Zehn-, des Zwölf- und des Sechzehnecks. Die Frage nach der Konstruierbarkeit weiterer regelmäßiger Vielecke wurde damals noch nicht gestellt und auch erst im 18. Jahrhundert von Carl Friedrich Gauß beantwortet.[217]

[214] Das ist Mathematik 1, 203- 212
[215] Mathe Buch 1, 200- 202
[216] Schönbeck, 161
[217] Schönbeck, 161f.

Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks:

Prop. IV.15.: „*Einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck einzubeschreiben*."[218]

Beweis:



Es sei k_1 der gegebene Kreis. Ihm soll ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Sechseck einbeschrieben werden.

Man ziehe im Kreis k_1 den Durchmesser AD, suche den Mittelpunkt G des Kreises und zeichne mit D als Mittelpunkt und DG als Radius den Kreis k_2. E und C seien die Schnittpunkte der beiden Kreise. Man verbinde E und C mit G und verlängere die so entstandenen Strecken nach B und F, welche die Schnittpunkte der Verlängerung mit dem Kreis sind. Man ziehe dann AB, BC, CD, DE, EF und FA.

1. Behauptung: Das so entstandene Sechseck ist gleichseitig.

Weil G der Mittelpunkt des Kreises k_1 ist, gilt GE = GD.

Genauso gilt DE = DG, da D der Mittelpunkt von k_2 ist.

Damit folgt GE = DE. Daraus folgt die Gleichseitigkeit vom Dreieck ΔEGD.

Alle drei Winkel in diesem Dreieck sind demnach auch gleich und die Winkelsumme ergibt 180°. (Prop. I.5.: „*Im gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich; auch müssen die bei Verlängerung der gleichen Strecken unter der Grundlinie entstehenden Winkel einander gleich sein*." und Winkelsummensatz)

Der Winkel $\angle EGD$ misst folglich 60°.

Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch $\angle DGC = 60°$ gilt.

Da weiter die Strecke CG, auf EB gestellt, die Nebenwinkel $\angle EGC + \angle CGB = 180°$ bildet, ist auch der Restwinkel $\angle CGB = 60°$. (Prop. I.13.: „*Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muss sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden*.")

Die Winkel $\angle EGD$, $\angle DGC$ und $\angle CGB$ sind also gleich. Folglich sind auch die Scheitelwinkel $\angle BGA$, $\angle AGF$ und $\angle FGE$ gleich 60°.

[218] Thaer, 88

Also sind die genannten sechs Winkel gleich. Demnach sind die sechs Bogen der Winkel gleich, damit auch die sechs Strecken, also ist das Sechseck gleichseitig.
(Prop. III.26.: „*In gleichen Kreisen sind die Bogen gleich, über denen gleiche Winkel stehen […]*“; Prop. III.29.: „*Gleichen Bogen in gleichen Kreisen liegen gleiche Sehnen gegenüber*.“)

2. Behauptung: Das Sechseck ist auch gleichwinkelig.
Der Bogen über FA ist gleich dem Bogen über DE. Man füge den Bogen ABCD beiderseits hinzu, dann ist der ganze Bogen FABCD dem ganzen EDCBA gleich. Über dem erstgenannten Bogen steht der Winkel $\angle FED$ und über dem zweiten der Winkel $\angle AFE$. Also muss gelten $\angle AFE = \angle DEF$. (Prop.III.27.: „*In gleich Kreisen über gleichen Bogen stehende Winkel sind einander gleich […]*“)
Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch die übrigen Winkel den Winkeln $\angle AFE$ und $\angle DEF$ gleich sind. Folglich ist das Sechseck gleichwinkelig und dem Kreis k_1 eingeschrieben. □ [219]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher
Die Schülerinnen und Schüler der zweiten Klasse AHS sollen auch heute noch regelmäßige Vielecke untersuchen, deren wesentliche Eigenschaften feststellen und sie skizzieren und konstruieren können.
Im Schulbuch von Reichel „Das ist Mathematik 2“ gibt es ein eigenes Kapitel „Vierecke und regelmäßige Vielecke“ zu diesem Thema. Dabei wird der Fokus auf das regelmäßige Sechseck und das regelmäßige Achteck gelegt. Deren Konstruktion ist ebenfalls wichtig.[220]
In der Einleitung des Kapitels werden auch das regelmäßige Fünfeck, das Pentagramm und deren besondere Bedeutung in der antiken Mathematik erwähnt.[221]

Dorfmayr behandelt in ihrem Schulbuch „Mathe Buch 2“ die regelmäßigen Vielecke gar nicht. Sie erläutert aber in „Mathe Buch 1“ im Kapitel „Winkel und Kreis“ die Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks.[222]

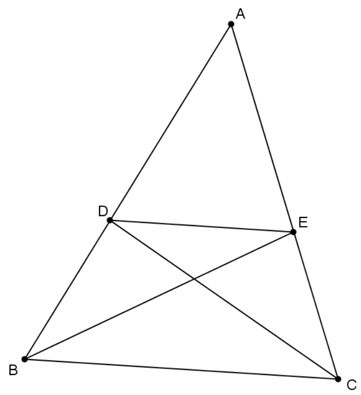
[219] Grünfelder, 48f.
[220] Das ist Mathematik 2, 246- 250
[221] Das ist Mathematik 2, 226
[222] Mathe Buch 1, 202

6.10 Ähnlichkeitslehre

Grundlegend für die euklidische Ähnlichkeitslehre ist die Proportionenlehre.
Von großer Bedeutung ist dabei vor allem der Strahlensatz, den man bei Euklid als Fundamentalsatz VI.2 findet. Thales von Milet soll diesen schon verwendet haben und Euklid hat ihn bewiesen.

Fundamentalsatz VI.2.: „*Zieht man in einem Dreieck parallel zu einer Seite eine gerade Linie, so teilt diese die Dreiecksseiten proportional*. *Und wenn die Dreiecksseiten proportional geteilt sind, dann muss die Verbindungsstrecke der Teilpunkte zu letzten Dreiecksseite parallel sein.*“[223]

<u>Beweis:</u>



Im Dreieck ΔABC ziehe man eine Parallele DE zu einer der Seiten, beispielsweise BC.
Die erste Behauptung lautet nun, dass das Verhältnis BD : DA = CE : EA gilt.
Man ziehe BE und CD.
Dann ist $\Delta BDE = \Delta CDE$, denn sie liegen auf der gleichen Grundlinie DE und zwischen denselben Parallelen DE und BC. (Prop. I. 37.: „*Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich*.“)
Das Dreieck ΔADE ist eine weitere Größe und gleiche Größen haben zu einer festen Größe dasselbe Verhältnis. (Prop.V.7.: „*Gleiche Größen haben zu festen Größen dasselbe Verhältnis, ebenso die feste Größe zu gleichen*.“)
Demnach gilt die Proportion $\Delta BDE : \Delta ADE = \Delta CDE : \Delta ADE$. Aber $\Delta BDE : \Delta ADE = BD : AD$, denn sie verhalten sich zueinander wie Grundlinien, weil sie dieselbe Höhe haben, nämlich das von E auf AB zu fällende Lot.

[223] Thaer, 112

(Prop. VI.1.: „*Dreiecke sowie Parallelogramme unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundlinien*.“)
Aus demselben Grund gilt $\Delta CDE : \Delta ADE = CE : AE$. Also gilt auch $BD : DA = CE : EA$.
(Prop. V.11.: „*Mit demselben Verhältnis zusammenfallende Verhältnisse fallen auch miteinander zusammen*.“)

Zum Beweis des zweiten Teils des Satzes betrachte man wiederum das Dreieck ΔABC. In ihm seien die Seiten AB und AC proportional geteilt, das heißt $BD : DA = CE : EA$. Die Strecke DE sei gezogen. Nun wird behauptet, dass DE $\parallel$ BC. Da $BD : DA = CE : EA$ gilt sowohl die Proportion $\Delta BDE : \Delta ADE = BD : AD$ als auch $\Delta CDE : \Delta ADE = CE : AE$. Daraus folgt schließlich auch das Verhältnis $\Delta BDE : \Delta ADE = \Delta CDE : \Delta ADE$. Beide Dreiecke ΔBDE und ΔCDE haben also zu ΔADE dasselbe Verhältnis. Also gilt $\Delta BDE = \Delta CDE$. Weil nun aber beide Dreiecke auf derselben Grundlinie DE liegen und einander gleich sind, müssen sie auch zwischen denselben Parallelen liegen. Also ist DE $\parallel$ BC. (Prop. I.39.: „*Auf derselben Grundlinie nach derselben Seite gelegene gleiche Dreiecke liegen auch zwischen denselben Parallelen.*“) □ [224]

Nun werden die vier Ähnlichkeitssätze für Dreiecke ohne Beweis angeführt. Sie sind in den „Elementen“ niedergeschrieben.

Prop. VI.4.: „*In winkelgleichen Dreiecken stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen*.“[225]

Prop. VI.5.: „*Stehen in zwei Dreiecken die Seiten in Proportion, so müssen die Dreiecke winkelgleich sein und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen*.“[226]

Prop. VI.6.: „*Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, dann müssen die Dreiecke*

[224] Gründfelder, 80f.
[225] Thaer, 114
[226] Thaer, 115

winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen."[227]

Prop. VI. 7.: „*Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und um weitere Winkel die Seiten in Proportion stehen, während die letzten Winkel beide zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner als ein Rechter sind, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, um die die Seiten in Proportion stehen*."[228]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Der Fundamentalsatz, der bereits bei Euklid eine besondere Stellung einnahm, wird auch heute noch, wie in den „Elementen" zu Beginn der Ähnlichkeitslehre behandelt. In der dritten Klasse sollen die Schülerinnen und Schüler ähnliche Figuren erkennen und beschreiben können.

Die Autoren von „Das ist Mathematik 3" unterscheiden zwischen dem 1. und dem 2. Strahlensatz.

<u>1. Strahlensatz:</u>

Werden zwei Strahlen g und h mit dem gemeinsamen Ausgangspunkt S von parallelen Geraden p_1, p_2 und p_3 geschnitten, so gilt:

$$SA_1 : SA_2 = SB_1 : SB_2 = k : (k+l)$$

$$SA_1 : A_1A_2 = SB_1 : B_1B_2 = k : l$$

$$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3 = l : m$$

Die Längen zweier Abschnitte auf dem Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

<u>2. Strahlensatz:</u>

Werden zwei Strahlen g und h mit dem gemeinsamen Ausgangspunkt S von zwei parallelen Geraden p_1 und p_2 geschnitten, so gilt:

$$\begin{array}{l} SA_1 : SA_2 \\ SB_1 : SB_2 \end{array} = A_1B_1 : A_2B_2 = k : (k+l)$$

Die von S ausgehenden Streckenlängen auf den beiden Strahlen verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf den parallelen Geraden. [229]

[227] Thaer, 116
[228] Thaer, 117
[229] Das ist Mathematik 3, 207f.

Dorfmayr und Co. behandeln das Thema Strahlensatz in „Mathe Buch 3“ anders. Es werden drei Merksätze formuliert.

Merksatz 1: Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abstände vom Schnittpunkt S auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abstände vom Schnittpunkt S auf dem anderen Strahl.

$b : e = c : f$

Merksatz 2: Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

$b : y = c : z$

Merksatz 3: Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den parallelen Geraden wie die entsprechenden Abstände vom Schnittpunkt S.

$a : d = b : e$

$a : d = c : f$ [230]

6.11 Proportionenlehre

Euklid beschäftigt sich im Buch V mit der Proportionenlehre. Viele der Definitionen und Sätze stammen wahrscheinlich von Eudoxos von Knidos. Dieser lebte vermutlich von 408 bis 355 vor Christus. Er wollte den vorhanden Verhältnisbegriff auch auf irrationale Verhältnisse ausdehnen. Außerdem entwickelte er die Exhaustionsmethode, die man ebenfalls in den „Elementen“ findet. Sie ist die Basis für die Inhaltsbestimmung gekrümmter Flächen und Volumina.[231] Der Beweis der Exhaustionsmethode wird im Kapitel 6.16 durchgeführt und die Inhaltsbestimmung wird im Kapitel über Archimedes von Syrakus näher behandelt.

Die Bücher V und X, in denen Euklid die Größenlehre behandelt, gelten als sehr abstrakt und besonders schwierig und werden als Höhepunkte der Elemente angesehen. Diese Bücher werden sogar als die tiefsinnigste mathematische Leistung der Griechen bezeichnet. Isaac Barrow drückte seine Bewunderung so aus: „*There is nothing in the whole body of the Elements of a more subtile invention, nothing more*

[230] Mathe Buch 3, 185
[231] Scriba, 38

solidly established and more accurately handled, than the doctrine of proportionals.“ [232]

Durch formale Mängel in der Proportionentheorie von Theaitetos kam Eudoxos dazu, nach einem neuen Proportionsbegriff zu suchen. Er erkannte die Notwendigkeit einer Vorraussetzung für Größen, die der Def.V.4. aus den „Elementen“ entspricht: „*Dass sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können*.“

In den Elementen ist die Neudefinition der Proportionen durch Eudoxos als Def.V.5. enthalten:[233]

Def.V.5.: „*Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind;“*[234]

Def.V.6.: *Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen*.“ [235]

Diese Definition kann man folgendermaßen in eine uns heute gebräuchliche Formulierung übertragen:

„Für Größen A und B sowie für Größen α und β soll die Gleichung $\mathrm{A}:\mathrm{B}=\alpha:\beta$ gelten, wenn für beliebige Zahlen m und n

mit $\mathrm{n}\cdot\mathrm{A}>\mathrm{m}\cdot\mathrm{B}$ stets $\mathrm{n}\cdot\alpha>\mathrm{m}\cdot\beta$

mit $\mathrm{n}\cdot\mathrm{A}=\mathrm{m}\cdot\mathrm{B}$ stets $\mathrm{n}\cdot\alpha=\mathrm{m}\cdot\beta$

mit $\mathrm{n}\cdot\mathrm{A}<\mathrm{m}\cdot\mathrm{B}$ stets $\mathrm{n}\cdot\alpha<\mathrm{m}\cdot\beta$ gilt“.[236]

Auf dieser Basis konnte die allgemeine Proportionenlehre aufgebaut werden, wie man sie im Buch V findet.

Die Grundlage für die Überlegungen des Eudoxos war die elementare Proportionenlehre der Pythagoreer. Diese Proportionenlehre galt aber nur für

[232] Schönbeck, 172
[233] Polli, 78
[234] Thaer, 91
[235] Thaer, 91
[236] Schönbeck, 174

messbare Größen, also für Größen, deren Verhältnis in Ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann.[237]

Das Verhältnis von zwei gegebenen Zahlen a, b ist ein rationales, wenn es eine gemeinsames Maß k gibt, von dem beide ein ganzzahliges Vielfaches sind. Das heißt: $a = n \cdot k$, $b = m \cdot k$, wobei n, $m \in N$.

Gilt für ein Zahlenpaar c, d: $c = n \cdot k'$ und $d = m \cdot k'$, so ist $a : b = c : d$.

In diesem Fall ist $ma = nb$ und $mc = nd$.

Gilt nur für beliebige ganze Zahlen m', n', dass $m'a < n'b$, dann ist auch $m'c < n'd$. Dies gilt ebenfalls für die Relation >. [238]

In den „Elementen“ ist dieser Sachverhalt folgendermaßen formuliert:

Def.VII.20.: *„Zahlen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten*.“[239]

Eudoxos Definition von Verhältnisgleichheit von zwei Paaren gilt nun auch in jenen Fällen, in denen nicht gesichert ist, ob es sich um ein rationales Verhältnis handelt.[240]

Die ersten sechs Propositionen aus dem fünften Buch lassen sich kurz in moderner Schreibweise zusammenfassen. Für Größen a, b und natürliche Zahlen m, n gilt:

1. $n(a + b) = na + nb$
2. $(n + m)a = na + ma$
3. $n(ma) = (nm)a$
4. $a : b = c : d \Rightarrow (ra) : (sb) = (rc) : (sd)$
5. $r(a - b) = ra - rb$ wenn a > b
6. $(r - s)a = ra - sa$ wenn r > s [241]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Verhältnisse und Proportionen wurden bereits im Kapitel über Pythagoras besprochen.

[237] Dahan- Dalmedico, 53
[238] Scriba, 38
[239] Thaer, 142
[240] Scriba, 39
[241] Artmann, 129

6.12 Der Euklidische Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus bildet die Basis für die Zahlentheorie des Euklid. Er verwendete ihn, um den größten gemeinsamen Teiler festzulegen. Der Algorithmus besteht aus mehrmaliger Anwendung der Division mit Rest. Formal kann man ihn so aufschreiben: Seien a, b natürliche Zahlen und b>a. Dann gibt es ganze Zahlen q und r mit $b = qa + r$ und $0 \leq r < a$.[242]

Prop.VII.1.: „*Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Zahlen abwechselnd immer die kleinere von der größeren weg, so müssen, wenn niemals ein Rest die vorangehende Zahl genau misst, bis die Einheit übrig bleibt, die ursprünglichen Zahlen gegeneinander prim sein*."[243]

Beweis:

In seiner typischen Vorgehensweise, kürzt Euklid die sukzessive Wegnahme auf ein paar Schritte. Seien a, b gegeben und sei b> a und sei

$b = qa + r$, $r < a$

$a = sr + t$, $t < r$

$r = ut + 1$

Wenn a und b ein gemeinsames Maß e > 1 haben, dann misst e r, daher auch a und r und auch t und r. Somit müsste e 1 messen und das ist unmöglich. Also sind a und b prim zueinander. □ [244]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Dieser Algorithmus wird in den heutigen Schulbüchern nicht angeführt. Der größte gemeinsame Teiler wird mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung ermittelt.

6.13 Primzahlen

Der Fundamentalsatz über die Primzahlzerlegung schließt sowohl die Möglichkeit, als auch die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung mit ein. Dass jede Zahl $(\neq 1)$, die durch die Zahl eindeutig bestimmt ist, Primzahl oder ein Produkt von Primzahlen ist,

[242] Artmann, 166
[243] Thaer,142
[244] Artmann, 166

wurde von Euklid noch nicht so formuliert, aber seine Aussage lässt sich leicht ergänzen.

Prop.VII.30.: *„Wenn zwei Zahlen, indem sie einander vervielfältigen, irgendeine Zahl bilden und irgend eine Primzahl dabei das Produkt misst, dann muss diese auch eine der ursprünglichen Zahlen messen."*[245]

Das heißt, wenn $p \mid a \cdot b \rightarrow p \mid a \vee p \mid b$. Für teilerfremde Zahlen a und b gilt somit $a \mid b \cdot c \rightarrow a \mid c$, wenn $(a \cdot b \cdot c \neq 0)$.[246]

<u>Beweis:</u>

Seien a, b zusammengesetzte Zahlen. Sei p eine Primzahl und p teilt ab. Man muss nun zeigen, dass $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Da p ein Teiler von $c = ab$, gibt es eine Zahl e, sodass $pe = c = ab$. Aus $pe = ab$ erhalten wir nach dem Theorem VII.19. $p : a = b : e$.

Wenn p ein Teiler von a ist, ist der Beweis vollendet.

Wenn p kein Teiler von a ist, dann ist der größte gemeinsame Teiler von a und p gleich 1. Somit sind a und p prim zueinander.

Der grundlegende Schritt in diesem Beweis ist die Anwendung von VII.20. Das ergibt, dass es eine Zahl n gibt, so dass $np = b$ und $na = e$. Daher ist p ein Teiler von b. □[247]

Prop. VII.31.: „*Jede zusammengesetzte Zahl wird von irgendeiner Primzahl gemessen."*[248]

<u>Beweis:</u>

Zum Beweisen dieses Satzes verwendet Euklid die Definitionen Def.VII.2., Def.VII.11: „*Primzahl ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt*." und Def.VII.13.: „*Zusammengesetzt ist eine Zahl (also Nicht- Primzahl ist diejenige), die sich durch eine (andere) Zahl messen lässt*."

Sei a nun eine beliebige zusammengesetzte Zahl und wir wollen zeigen, dass a von irgendeiner Primzahl gemessen wird. Da a eine zusammengesetzte Zahl ist, muss sie eine andere Zahl b als Teiler haben. Die Zahl b selbst kann nun eine Primzahl

---

245 Thaer, 160
246 Schönbeck, 144f.
247 Artmann, 179
248 Thaer, 160

sein oder ebenfalls eine zusammengesetzte Zahl. Wenn b Primzahl ist, ist der Satz bewiesen, denn dann haben wir bereits irgendeine Primzahl gefunden, die die zusammengesetzte Zahl misst.
Ist b eine zusammengesetzte Zahl, muss sie auch einen Teiler c besitzen. c ist natürlich auch Teiler von a. C kann nun wieder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl sein. Im ersten Fall wäre der Satz wieder bewiesen. Ist c jedoch eine zusammengesetzte Zahl, so muss diese wiederum einen Teiler d haben, von dem c gemessen wird. Usw.
Sollte man nun die gesuchte Primzahl nicht finden, so würde dies bedeuten, dass die Zahl a unendlich viele, immer kleiner werdende Teile besitzt. Dies ist allerdings im Bereich der Zahlen auf Grund der Definition der Zahl nicht möglich. □ [249]

Bei der Primzahltheorie ist eines der schönsten Ergebnisse von Euklid, die Folge der Primzahlen.
Prop. IX.20.: „*Das Theorem über die Anzahl der Primzahlen. Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*“[250]
<u>Beweis:</u>
Euklid beweist diese Aussage auch relativ einfach und elegant. [251]
Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1,...,p_n$. Betrachten wir nun die Zahl $N := p_1 + ... + p_k + 1$. N besitzt Primfaktorenzerlegung und insbesondere teilt irgendein p_i $(1 \leq i \leq k)$ die Zahl N, weil $p_1,...,p_k$ Primzahlen sind.

$$\Rightarrow p_i \mid N = p_1 + ... + p_k + 1,\ p_i \mid p_1,...,p_i,...,p_k$$

$$\Rightarrow p_i \mid N - p_1 - ... - p_k = 1$$

Widerspruch, weil p_i ist eine Primzahl und somit größer als 1.□

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Die Primzahlen werden in den heutigen Lehrplänen nicht explizit erwähnt, aber sie fallen in den allgemeinen Bereich der Teilbarkeitsregeln, die man in der zweiten Klasse der AHS kennen und anwenden soll.

[249] Árpád, 335
[250] Thaer, 204
[251] Schönbeck, 145

Noch heute von großer Bedeutung ist die Erkenntnis von Euklid, dass jede zusammengesetzte Zahl von irgendeiner Primzahl gemessen wird. Dies wird heute als Primfaktorenzerlegung bezeichnet und findet in beiden bearbeiteten Schulbüchern Platz. Die Primfaktorenzerlegung wird auch zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen verwendet.

Euklid wusste auch schon, dass es unendlich viele Primzahlen gibt und konnte es auch beweisen. Dies wird in den Schulbüchern „Das ist Mathematik 2“ und „Mathe Buch 2“ in eigenen Absätzen erwähnt, aber nicht bewiesen.

6.14 Lehre von geraden und ungeraden Zahlen

Ein Höhepunkt der Zahlenlehre des Euklid ist die so genannte Lehre vom Geraden und Ungeraden. Diese Lehre stammt vermutlich bereits aus voreuklidischer Zeit, aus der Zeit der Pythagoreer. Sie wurde aber von Euklid in überarbeiteter Form in die „Elemente“ übernommen. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden beruht auf der Unterscheidung zweier Zahlenarten, die eine Einteilung aller Zahlen in zwei disjunkte Teilmengen bewirkt. In den „Elementen“ werden die Zahlenmengen so definiert: „*Gerade ist die Zahl, die sich halbieren lässt*.“ und „U*nd ungerade die, die sich nicht halbieren lässt, oder die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet*.“ Diese Definitionen zeigen auch, dass die frühe griechische Zahlenlehre nur von ganzen Zahlen handelt und dass Bruchzahlen bei den theoretischen Betrachtungen nicht in Erwägung gezogen werden. Auch die Eins wird nicht als Zahl anerkannt. Zahlen sind stets Vielfache von Eins und immer positiv. In der ganzen griechischen Mathematik kommt auch die Null nicht vor.[252]

Prop.IX.25.: *„Wenn von einer geraden Zahl eine ungerade Zahl subtrahiert wird, ist der Rest ungerade.“* [253]

Im Buch IX behandelt Euklid zum Abschluss die so genannten „vollkommenen Zahlen“.

[252] Schönbeck, 140f.
[253] vgl. Thaer, 206

Def.VII.22.: „*Eine vollkommene Zahl ist eine Zahl, die ihren Teilen zusammen gleich ist*."[254]

Prop.IX.36: „*Verschafft man sich beliebig viele Zahlen, von der Einheit aus in Reihe nach dem Verhältnis 1:2, bis die Summe aus allem eine Primzahl wird, und bildet die Summe, mit dem letzten Glied vervielfältigt, eine Zahl, so muss das Produkt eine vollkommene Zahl sein*."[255]

Somit sind vollkommene Zahlen, natürliche Zahlen, die gleich der Summe ihrer echten Teiler sind.[256] Diese Behauptung beweist Euklid mit Hilfe der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung und der Summenformel für geometrische Reihen. Denn ist $(2^{n+1}-1)$ eine Primzahl p, dann ist $2^n(2^{n+1}-1)$ eine vollkommene Zahl v. Dies lässt sich dadurch beweisen, dass die Summe aller Teiler einer Zahl v $1+2+4+...+2^n+p+2p+4p+...+2^np=(1+p)\cdot(1+2+...+2^n)=2^{n+1}(2^{n+1}-1)=2v$ ist. Euklid kannte die Zahlen 6, 28 und 496 als gerade vollkommene Zahlen. Bis heute sind nur 32 vollkommene gerade Zahlen entdeckt.[257] Ob es auch ungerade vollkommene Zahlen gibt, ist bis heute nicht geklärt.[258]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Nach der euklidischen Definition lassen sich gerade Zahlen halbieren und ungerade lassen sich nicht halbieren bzw. unterscheiden sich diese von den geraden um eine Einheit. Diese Definitionen haben sich nicht verändert und fallen heute in den Bereich des Lehrplans, dass man in der ersten Klasse Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen soll.

Vollkommene Zahlen werden in „Lehrbuch der Mathematik 5" von den Autoren zum Abschluss des Kapitels „Rechnen mit konkreten und allgemeinen Zahlen" angeführt. Als Beispiel wird die Zahl 28 angegeben.[259]

---

[254] Thaer, 142
[255] Thaer, 211
[256] Kaiser, Nöbauer, 215
[257] Schönbeck, 147
[258] Kaiser, Nöbauer, 216
[259] Lehrbuch der Mathematik 5, 83

6.15 Geometrische Reihe

Bei den geometrischen Reihen kommt Euklid bis zur Summenformel. Im neunten Buch der „Elemente“ ist zu lesen: Prop.IX.35: „*Hat man beliebig viele Zahlen in geometrischer Reihe und nimmt man sowohl von der zweiten als auch von der letzten der ersten gleiche weg, dann muss sich, wie der Überschuss der zweiten zur ersten, so der Überschuss der letzte zur Summe der ihr vorangehenden verhalten*.“ [260]

Sind nun $a, a \cdot q, a \cdot q^2, \ldots$ die Glieder der geometrischen Reihe, so gilt das Verhältnis $(a \cdot q - a) : a = (a \cdot q^n - a) : (a + \ldots + a \cdot q^{n-1})$. Dieses liefert die noch heute bekannte und benutzte Formel für die Summe der ersten n Glieder $s_n = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a \cdot q^{n-1} = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ mit $q \neq 1$.[261]

Die Grundlage für das Studium der mittleren Proportionalen und der geometrischen Reihen geht vermutlich auf Archytas zurück. Er kannte bereits das arithmetische, das geometrische und das umgekehrte bzw. harmonische Mittel.
An diese Definitionen schließt Euklid an und entdeckt für Quadratzahlen die Proportion VIII.11.: $a^2 : a^1b^1 = a^1b^1 : b^2$ und für Kubikzahlen die so genannte hippokratische Proportion VIII.12.: $a^3 : a^2b^1 = a^2b^1 : a^1b^2 = a^1b^2 : b^3$.[262]

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Geometrische Reihen sind gemäß Lehrplan in der zehnten Schulstufe vorgesehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen mit geometrischen Reihen arbeiten und den Zusammenhang zwischen geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen erkennen.

In beiden analysierten Schulbuchreihen der Oberstufe findet man die geometrische Reihe im Kapitel „Folgen und Reihen“ in der 6. Klasse. Die Summenformel für die ersten n Glieder einer geometrischen Reihe wird genauso, wie bei Euklid angegeben.[263]

[260] Thaer, 210
[261] Schönbeck, 146
[262] Schönbeck, 145f.
[263] Lehrbuch der Mathematik 6, 185

6.16 Inkommensurable Strecken

Def.X.1.: *„Kommensurabel heißen Größen [und linear kommensurabel heißen Strecken], die von demselben Maß gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt.“*[264]

Def.X.2.: *„Strecken sind quadriert kommensurabel, wenn die Quadrate über ihnen von derselben Fläche gemessen werden und (quadriert) inkommensurabel, wenn es zu den Quadraten über ihnen keine Fläche gibt, die gemeinsames Maß hat.“*[265]

Die Übertragung des euklidischen Algorithmus auf beliebige Größen.
Prop.X.1.: „*Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.“*[266]

Prop.X.2.: „*Misst, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein*.“[267]

Prop.X.5 und 6: „*Zwei Größen haben zueinander ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl genau dann, wenn die Größen kommensurabel sind.“*[268]
In anderen Worten: Die Größen a und b sind kommensurabel $\Leftrightarrow$ Es gibt Zahlen k, m, so dass $a : b = k : m$.[269]

Prop.XII.2.: „*Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate der Durchmesser*.“[270]
In modernen Schreibweise bedeutet das:
A_1, A_2 seien Flächeinhalte und d_1, d_2 die dazugehörigen Durchmesser bzw. r_1, r_2 die Radien, dann folgt $A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2 = r_1^2 : r_2^2$.

264 Thaer, 213
265 Thaer, 214
266 Thaer, 213f.
267 Thaer, 214
268 Schönbeck, 178
269 Artmann, 226
270 Thaer, 355

Also $A_1 : r_1^2 = A_2 : r_2^2$. Somit ist das Verhältnis des Flächeninhalts eines Kreises zum Quadrat des Radius konstant. Diese Konstante nennen wir heute π und wir schreiben $A : r^2 = \pi$ oder $A = \pi \cdot r^2$. [271]

Nun soll natürlich noch der Wert von π so genau wie möglich bestimmt werden. Mehr dazu im Kapitel über Archimedes.

Beweis:

Der Beweis dieser Proposition ist das, was später Exhaustionsmethode genannt wird.

K_1 und K_2 seien Kreise mit den Flächeninhalten A_1 und A_2 und den Durchmessern d_1 und d_2. Es gibt eine bestimmte Fläche B, so dass $d_1^2 : d_2^2 = A_1 : B$ und man soll zeigen, dass $B = A_2$. Euklid schaffte das durch das Ausschließen von $B < A_2$ und $B > A_2$.

Annahme: $B < A_2$

Schreibe ein Quadrat EFGH in K_2 ein und umschreibe denselben mit einem Quadrat, wie in der nebenstehenden Abbildung. Dies zeigt, dass das Quadrat $EFGH > \frac{1}{2} A_2$.

Im nächsten Schritt halbiere den Bogen EF usw. und schreibe ein Achteck in K_2 ein. Jedes von den Dreiecken, wie ΔEFK nimmt mehr als die Hälfte des Flächeninhalts des verbleibenden Segments ein. An diesem Punkt führt Euklid Prop.X.1 an und sagt: „Thus, by bisecting the remaining circumferences and joining straight lines, and by doing this continually, we shall leave some segment of the circle which will be less than the excess by which the circle K_2 exceeds the area B."

Nun sei P_n ein Polygon, so dass $B < P_n$. Man schreibe in K_1 ein Polygon Q_n ein, das ähnlich zu P_n ist. Aus Prop.XII.1. folgt $Q_n : P_n = d_1^2 : d_2^2$. Also $Q_n : P_n = A_1 : B$.

Durch Umformen erhält man $Q_n : A_1 = P_n : B$. Das ist ein Widerspruch, denn $Q_n < A_1$ und $P_n > B$.

Für $B > A_2$ ist die Vorgehensweise identisch. □ [272]

[271] Artmann, 272
[272] Artmann, 274

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Da inkommensurable Strecken bereits bei den Pythagoreern entdeckt wurden und von Euklid in die „Elemente“ übernommen wurden, wurde die Bedeutung für den heutigen Schulunterricht bereits im Kapitel über Pythagoras erläutert.

Die Exhaustionsmethode, die beim Beweis des Satzes, dass sich Kreise zueinander, wie ihre Durchmesser verhalten, wird in „Mathematik verstehen 8“ im Zuge der Integralrechnung genau vorgestellt. Die Vorgehensweise entspricht im Grunde der von Euklid. [273]

6.17 Volumen einer Pyramide und eines Kegels

Drei Bücher der „Elemente“ widmet Euklid der räumlichen Geometrie. Er behandelt neben den Grundsätzen der räumlichen Geometrie, wie Gerade, Fläche, Winkel, Parallelität oder Orthogonalität, auch Volumina von Prismen, Pyramiden, Zylinder und Kegeln. Schließlich stehen im letzten Punkt die Konstruktion und die Berechnung der platonischen Körper im Mittelpunkt.

Prop.XII.7, Zusatz: „*Jede Pyramide ist ein Drittel des Prismas […], welches mit ihr dieselbe Grundfläche hat und gleiche Höhe*.“[274]

Prop.XII.10.: „*Jeder Kegel ist ein Drittel des Zylinders, der mit ihm dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat*.“[275]

Diese Propositionen schreiben wir heute in der Form $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

Im heutigen Schulunterricht wird die räumliche Geometrie ab der ersten Klasse behandelt. Schülerinnen und Schüler sollen Volums- und Oberflächenberechnungen an Quadern und einfachen, daraus zusammengesetzten Körpern durchführen. Im darauf folgenden Schuljahr sollen Volumina von Prismen berechnet werden. In der dritten Klasse sollen Prismen und Pyramiden zeichnerisch dargestellt werden. Außerdem sollen Schülerinnen und Schüler die Oberfläche, das Volumen und das

[273] Mathematik verstehen 8, 73- 75
[274] Schönbeck, 185
[275] Thaer, 367

Gewicht dieser berechnen können. Zum Abschluss soll man in der vierten Klasse Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln, sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können.
Die platonischen Körper werden im heutigen Lehrplan und in den analysierten Schulbüchern nicht explizit erwähnt.

7 Archimedes von Syrakus

Archimedes lebte vermutlich von 287 bis 212 vor Christus. Er wurde in Syrakus als Sohn des Astronomen Phidias geboren und studierte in Alexandria bei den Nachfolgern des Euklid Mathematik und Physik. Weitere Arbeitsgebiete waren die Mechanik, die Optik, die Hydrostatik und die Technik.

Archimedes von Syrakus bereiste auch Ägypten, wo er möglicherweise die Schraubenpumpe, die heute nach ihm benannt ist („Archimedische Schraube"), erfand. Diese Schraube nutzte man noch in der Neuzeit um Grundwasser zur Bewässerung zutage zu fördern.[276]

Er galt bereits zu Lebzeiten als großer Mathematiker, Physiker und auch Erfinder. Er entwickelte neben der Schraubenpumpe und anderen Maschinen, auch Kriegsmaschinen. Er war auch technischer Berater des Königs Hieron III. und seiner Nachfolger. Im zweiten Punischen Krieg soll er wesentlich dazu beigetragen haben, dass sich Syrakus zwei Jahre lang gegen die Belagerung der Römer wehren konnte. Denn er konstruierte besonders wirkungsvolle Waffen.[277] Beispielsweise entwickelte er Kriegsmaschinen, die Felsbrocken in feindliche Gebiete schleudern konnten oder er bündelte mit Hilfe seiner Kenntnisse über optische Gesetze die Sonnenstrahlen auf den Schiffen der Römer, die daraufhin in Flammen aufgingen.[278]

Im Jahr 212 wurde Archimedes bei der Einnahme von Syrakus von einem römischen Soldaten erschlagen. Der Legende nach soll er gerade mit dem Zeichnen geometrischer Figuren beschäftigt gewesen sein und soll dem herannahenden Römer zugerufen haben: „Störe meine Kreise nicht!".[279] Über Archimedes sind einige Anekdoten überliefert, die ihn als klassischen Typ des zerstreuten Gelehrten charakterisieren.[280]

Archimedes hat kein zusammenhängendes Werk hinterlassen, sondern nur Einzelabhandlungen.[281] Überlieferte Kopien von Abhandlungen des Archimedes sind „Über das Gleichgewicht ebener Flächen", „Quadratur der Parabel", „Über Kugeln und Zylinder", „Über spiralförmige Linien", „Über Konoide und Phäroide", „Über schwimmende Körper", „Messung des Kreises" und „Der Sandrechner und die

---

[276] Stewart, 31
[277] vgl. Alten, 56 und Scriba, 67
[278] Stewart, 31
[279] Scriba, 67
[280] Kaiser, Nöbauer, 18
[281] Kaiser, Nöbauer, 18

Methodenlehre“. Das letztgenannte Werk wurde erst 1906 von Johan Heiberg entdeckt.[282]

Als Astronom entwickelte Archimedes ein Planetarium, in dem die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der fünf bekannten Planeten simuliert wurden. Das Hebelgesetz leitete er streng logisch her und verwendete es zur Berechnung der Schwerpunkte von Dreiecken, Parallelogrammen, Trapezen und Parabelteilen. Weiters entwickelte er auf dem Gebiet der Mechanik das Gesetz für den Auftrieb. Im Werk über die Sandrechnung zeigt Archimedes, wie man in der ionischen Ziffernschreibweise auch sehr große Zahlen anschreiben und verarbeiten kann.[283]

7.1 Die Zahl π

Bereits in früheren Kulturen war bekannt, dass der Umfang eines Kreises immer dasselbe Vielfache seines Durchmessers ist. Die Babylonier verwendeten zum Beispiel den Faktor $3\frac{1}{8}$. Die Griechen rechneten auch noch nicht mit π selbst, sondern betrachteten eher das geometrische Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser.[284] Archimedes unternahm den ersten ernstzunehmenden Versuch zur Bestimmung von π. Die Methode von Archimedes nennt man noch heute „Klassische Methode zur Berechnung von π“.

Dazu formulierte er folgenden Satz:

„*Das Verhältnis des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser ist kleiner als* $3\frac{1}{7}$ *und größer als* $3\frac{10}{71}$.[285]

<u>Beweis:</u>

Die Griechen konnten im Allgemeinen sehr gut Vielecke beschreiben. Der Kreis ist allerdings eine Kurve und Archimedes näherte sich nun dieser Kurve mit Vielecken, die er dem Kreis ein- und umschrieb. Denn der Umfang jedes eingeschriebenen Vielecks musste kleiner sein als jener des Kreises und der Umfang jedes umgeschriebenen Vielecks musste länger sein. Zuerst konstruierte er Sechsecke um

[282] Stewart, 31
[283] Kaiser, Nöbauer, 19
[284] Stewart, 30
[285] Kaiser, Nöbauer, 145

und in den Kreis. Danach halbierte er jeweils die Seiten der Vielecke. Somit erhielt er ein Zwölfeck, dann ein 24- Eck, ein 48- Eck und ein 96- Eck. [286]

Er verwendete zur Ermittlung des Umfanges dieser Polygone im wesentlichen die Rekursionsformeln für die Seitenlängen s_{2n} bzw. S_{2n} des einem Kreis vom Radius R eingeschriebenen (bzw. umgeschriebenen) regelmäßigen 2n- Ecks:

$$s_{2n} = \left\{2R^2 - R\left(4R^2 - s_n^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad S_{2n} = \frac{2RS_n}{2R + \left(4R^2 - S_n^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Aus s_{96} und S_{96} ergaben sich dann die angegebenen Schranken. Durch Archimedes wurde π also mit 3,14 auf zwei Dezimalstellen genau angegeben.[287]

Einfluss auf Lehrplan und Unterricht

In der 4. Klasse der AHS Unterstufe sollen Schülerinnen und Schüler Schranken für Umfang und Inhalt des Kreises angeben können, Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können und Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen herleiten und anwenden können. Im Zuge dieser Berechnungen am Kreis kommen die Schülerinnen und Schüler erstmals mit der Zahl π in Berührung.

In „Das ist Mathematik 4“ wird die Zahl π ähnlich wie von Archimedes selbst hergeleitet. Zuerst sollen die Schülerinnen und Schüler für Kreise mit bestimmten Durchmessern, die Umfänge schätzen. Danach sollen sie diese mit Hilfe von Schnüren messen. Dann sollen sie die Quotienten Umfang durch Durchmesser bilden und erkennen, dass diese im Mittel rund 3,14 sind. Schließlich wird erläutert, dass die Mathematiker in der Antike bereits wussten, dass es zwischen dem Durchmesser und dem Umfang eines Kreises einen bestimmten Zusammenhang gibt, also, dass der Umfang des Kreises proportional zu seinem Durchmesser ist. Und der Proportionalitätsfaktor ist eben π.

Im Anschluss wird die Methode, die auch schon Archimedes verwendete, zur Berechnung von π vorgestellt. Dem Kreis werden regelmäßige Sechsecke ein- und umschrieben und mit Hilfe gleichseitiger Dreiecke können die Umfänge des ein- und

[286] Stewart, 30
[287] Kaiser, Nöbauer, 145f.

umgeschriebenen Sechsecks berechnet werden. Somit erhält man eine untere und obere Schranke für den Umfang des Kreises.
Außerdem wird in einem eigenen Abschnitt historisches zur Zahl π angegeben.[288]
Zum Abschluss des Kapitels „Berechnungen am Kreis" findet man noch mal eine historische Abhandlung zum Thema Kreisberechungen. Dabei werden Thales von Milet, Euklid und auch Archimedes erwähnt. Vor allem wird auf die praktischen Anwendungen theoretischer Sätze durch Archimedes hingewiesen und auf seine Methode zur Abschätzung der Zahl π.[289]

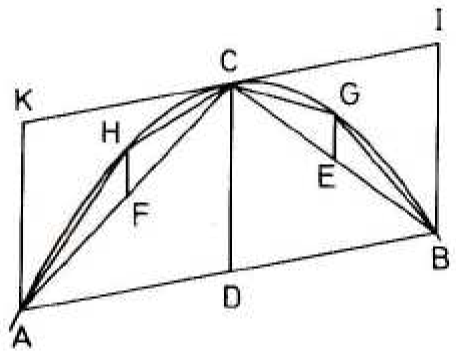
In „Mathe Buch 4" werden die Herleitungen des Kreisumfangs und des Flächeninhalts des Kreises sehr ausführlich, aber ähnlich, wie in „Das ist Mathematik 4" behandelt. Im ersten Teil zur Bestimmung des Kreisumfangs werden dem Kreis regelmäßige Vielecke eingeschrieben und deren Umfang mit Hilfe gleichseitiger Dreiecke berechnet. Im zweiten Teil werden dem Kreis regelmäßige Vielecke umschrieben und wiederum deren Umfang berechnet. Somit erhält man zwei Schranken für die Zahl π. Zum Abschluss des Kapitels findet man einen Teil über die Geschichte der Zahl π. Dabei werden unter anderem Archimedes und sein Satz über das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser erwähnt.[290]

7.2 Infinitesimalrechnung

Die Beschäftigung mit dem Inhaltsproblem war der Ausgangspunkt für die Entstehung der Integralrechnung. Die erste exakte Quadratur einer Fläche, die nicht von Geraden begrenzt wird, gelang Hippokrates von Chios mit der Bestimmung der Fläche mehrerer „Kreismöndchen".[291]
Wesentliche Ergebnisse auf diesem Gebiet erzielte Archimedes. Er führte mehrere Quadraturen und Kubaturen durch. In „Quadratur der Parabel" beschäftigt er sich mit der Inhaltsbestimmung des Parabelsegments.

[288] Das ist Mathematik 4, 185- 187
[289] Das ist Mathematik 4, 205
[290] Mathe Buch 4, 62- 72
[291] Kaiser, Nöbauer, 162

7.2.1 Parabelquadratur



Sei ein Parabelsegment gegeben, das durch die Gerade AB und die Parabel ACB begrenzt wird. Durch den Halbierungspunkt D von AB zieht man eine Gerade DC parallel zur Achse der Parabel.
Nun zieht Archimedes die Parallele FH und eine Parallele EG zur Achse durch die Halbierungspunkte von AC bzw. BC.
Unter der Verwendung der Eigenschaften der Parabel zeigt Archimedes zunächst, dass $\Delta ACH + \Delta CBG = \frac{1}{4}\Delta ABC$ gilt. Wir wiederholen den Vorgang und kommen dadurch zu vier Dreiecken, deren Summe gleich ein Viertel der Fläche der beiden Dreiecke beträgt, die wir gerade betrachtet haben. Setzt man den Prozess fort, so erhält man: $\Delta ABC + \frac{1}{4}\Delta ABC + \frac{1}{4^2}\Delta ABC + \frac{1}{4^3}\Delta ABC + ...$
Unter Verwendung des Exhaustionsprinzips leitet Archimedes nun her, dass bei hinreichend oftmaliger Ausführung des oben beschriebenen Prozesses die Differenz zwischen dem Polygon und dem Parabelsegment beliebig klein wird.
Dies ist in der Tat so, denn das Dreieck ABD hat die halbe Fläche des umgeschriebenen Parallelogramms ABIK und ist daher flächengrößer als der halbe Flächeninhalt des Parabelsegments.
Im nächsten Abschnitt versucht Archimedes, die geometrische Reihe der Flächen der jeweils entfernten Dreiecke zu summieren. Seine Vorgangsweise können wir in unserer heutigen Terminologie mit Hilfe des folgenden Satzes beschreiben:
Bilden A, B, C, C, …., E, X eine endliche geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$, dann ist ihre Summe, vermehrt um $\frac{1}{3}$ des letzten Gliedes, gleich $\frac{4}{3}$ des ersten Gliedes.

<u>Beweis:</u>

$$B + \frac{B}{3} = \frac{4B}{3} = \frac{A}{3}$$

$$C + \frac{C}{3} = \frac{4C}{3} = \frac{B}{3}$$

$$D+\frac{D}{3}=\frac{4D}{3}=\frac{C}{3}$$

…………

$$X+\frac{X}{3}=\frac{4X}{3}=\frac{E}{3}$$

Durch Addition erhält man:

$$B+C+...+E+X+\frac{B}{3}+\frac{C}{3}+\frac{D}{3}+...+\frac{E}{3}+\frac{X}{3}=\frac{A+B+...+E}{3}$$

Nun ziehen wir $\frac{B}{3}+\frac{C}{3}+\frac{D}{3}+...+\frac{E}{3}$ von beiden Seiten ab und addieren beiderseits A:

$$A+B+C+D+...+E+X+\frac{X}{3}=\frac{4A}{3}$$

Die Fläche des Parabelsegments ist nun größer als jede Teilsumme $A+B+...+X$, kann aber durch eine hinreichend große Anzahl von Summanden beliebig nahe angenähert werden.

Im letzten Schritt des Beweises zeigt Archimedes, dass die Fläche des Parabelsegments gleich $\frac{4A}{3}$ ist, wobei A die Fläche des ersten eingeschriebenen Dreiecks bezeichnet:

Angenommen, die Fläche F des Parabelsegments ist größer als $\frac{4A}{3}$, so wäre eine Partialsumme, die sich um weniger als $F-\frac{4A}{3}$ vom Parabelsegment unterscheidet größer als $\frac{4A}{3}$. Das ist ein Widerspruch.

Angenommen die Fläche F des Parabelsegments wäre kleiner als $\frac{4A}{3}$, so betrachten wir eine Partialsumme mit dem letzten Glied X, das kleiner als die Differenz $\frac{4A}{3}-F$ ist. Nun ist aber $\frac{4A}{3}-(A+B+...+X)$ gleich $\frac{X}{3}$. Somit müsste F kleiner sein als $A+B+...+X$, was natürlich unmöglich ist.

Also ist die Fläche des Parabelsegments gleich $\frac{4}{3}\Delta ABC$.□ [292]

[292] Kaiser, Nöbauer, 166f.

7.2.2 Heuristische Herleitung

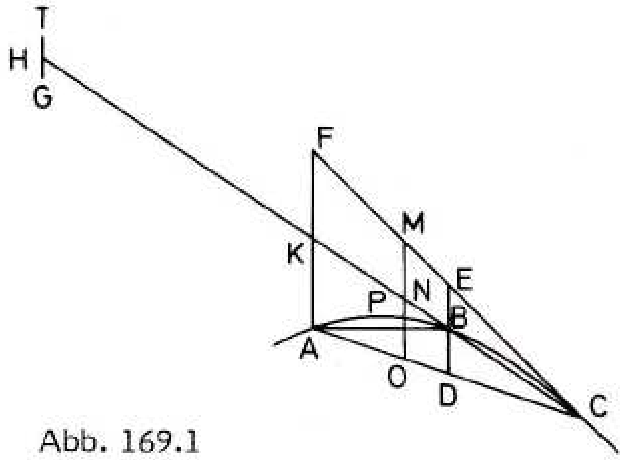


Abb. 169.1

„Es sei ABC ein von der Geraden AC und der Parabel ABC begrenztes Parabelsegment, und D sei der Mittelpunkt von AC. Man ziehe die Gerade DBE parallel zur Achse der Parabel und AB, BC. Dann wird das Segment ABC gleich $\frac{4}{3}$ des Dreiecks ABC sein.

Durch A ziehe man AKF parallel zu DE und die Parabeltangente in C schneide DBE in E und AKF in F. Man verlängere CB bis zum Schnittpunkt K mit AF und CK bis H, so dass KH gleich CK wird. Man denke sich CH als Waagebalken mit dem Mittelpunkt K. MO sei irgend eine zu ED parallele Gerade. Sie treffe CF, CK, CA in M, N, O und die Kurve in P.

Da nun CE eine Tangente der Parabel ist und CD die Ordinate, so folgt EB = BD. Denn das ist in den Elementen der Kegelschnitte bewiesen.

Da FA, MO, ED parallel sind, so folgt FK = KA und MN = NO. Nach den in einem Hilfssatz bewiesenen Parabeleigenschaften gilt nun

$$\begin{aligned} MO : OP &= CA : AO \\ &= CK : KN \\ &= HK : KN \end{aligned}$$

Man nehme eine Strecke TG gleich OP und bringe sie mit ihrem Schwerpunkt nach H, so dass TH = HG ist. Da nun N der Schwerpunkt der Strecke MO ist und

MO : OP = HK : KN

folgt, dass TG in H und MO in N sich in Bezug auf K das Gleichgewicht halten.

Ähnlich folgt für alle anderen Strecken, die zu DE parallel sind und den Parabelbogen treffen, dass (1) der Abschnitt zwischen FC, AC mit dem Mittelpunkt auf KC und (2) eine dem Abschnitt zwischen der Kurve und AC gleiche und mit ihrem Schwerpunkt nach H gebrachte Strecke sich um K das Gleichgewicht halten.

Folglich ist K der Schwerpunkt des ganzen Systems, das besteht aus (1) allen den von FC und AC begrenzten Strecken wie MO, die so wie in der Figur liegen, und (2)

allen den nach H gelegten Strecken, die den von der Kurve und AC begrenzten Strecken wie PO gleich sind.
Da nun das Dreieck CFA aus allen den parallelen Strecken wie MO zusammengesetzt ist und das Segment CBA aus allen Strecken innerhalb der Kurve wie PO, so folgt, dass das Dreieck, so wie es in der Figur liegt, sich in Bezug auf K im Gleichgewicht befindet mit dem Segment CBA, das mit seinem Schwerpunkt nach H gebracht ist. Man teile KC in W so, dass CK = 3KW. Dann ist W der Schwerpunkt des Dreiecks ACF, denn das ist in den Büchern über das Gleichgewicht bewiesen.

Folglich ist $\Delta ACF : \text{Segment } ABC = HK : KW = 3 : 1$

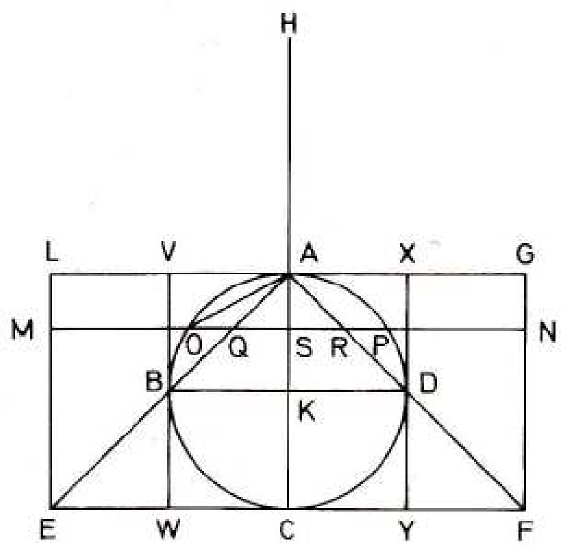
Daher $\text{Segment } ABC = \frac{1}{3}\Delta ACF$

Aber $\Delta ACF = 4\Delta ABC$

Folglich $\text{Segment } ABC = \frac{4}{3}\Delta ABC$

Die hier ausgesprochene Tatsache ist nun durch das Gesagte nicht wirklich bewiesen Aber es deutet darauf hin, dass der Schluss richtig ist. Da wir also sehen, dass der Satz nicht bewiesen ist, aber zugleich vermuten, dass das Ergebnis richtig ist, so brauchen wir einen geometrischen Beweis, den ich gefunden und bereits veröffentlicht habe.“

Die fundamentale Idee von Archimedes ist nun, dass er die Fläche bzw. den Körper in eine große Anzahl von parallelen Streifen bzw. dünnen parallelen Schichten teilt um einen gesuchten Flächeninhalt oder ein Volumen zu bestimmen. Diese Strecken bzw. Schichten denkt er sich an einem Ende eines Hebels so aufgehängt, dass sie sich mit einer Figur im Gleichgewicht befinden, deren Inhalt und Schwerpunkt man kennt.



Mit Hilfe dieser Methode kann Archimedes auch das Kugelvolumen bestimmen. Dieses Resultat hielt er für so bedeutend, dass er es sich auf seinem Grabstein eingravieren ließ. [293]

7.2.3 Kugelvolumen

Mit derselben Methode kann auch folgendes bewiesen werden:

Jede Kugel ist viermal so groß wie der Kegel, dessen Grundfläche einem größten Kreis der Kugel und dessen Höhe dem Radius der Kugel gleich ist.

Beweis:

Es seien ABCD ein größter Kreis der Kugel und AC, BD zueinander senkrechte Durchmesser. Mit BD als Durchmesser werde in der zu AC senkrechten Ebene ein Kreis beschrieben und über diesem Kreis als Grundfläche der Kegel mit der Spitze A konstruiert. Der Mantel dieses Kegels werde verlängert und mit der durch C parallel zu seiner Grundfläche gelegten Ebene geschnitten. Der Schnitt ist ein Kreis mit dem Durchmesser EF. Über diesem Kreis als Grundfläche werde ein Zylinder errichtet, dessen Höhe und Achse AC ist. CA werde bis H verlängert, so dass AH gleich CA wird. Man betrachte CH als Waagebalken. A ist sein Mittelpunkt.

In der Ebene des Kreises ABCD ziehen wird irgendeine zu BD parallele Gerade MN. Sie schneide den Kreis O, P, den Durchmesser AC in S und die Gerade AE, AF in Q, R. A verbinden wir mit O. Durch MN legen wir die zu AC senkrechte Ebene.

Diese Ebene schneidet den Zylinder in einem Kreis mit dem Durchmesser MN, die Kugel in einem Kreis mit dem Durchmesser OP und den Kegel in einem Kreis mit dem Durchmesser QR.

Da nun MS = AC und QS = AS, so folgt

$$
\begin{aligned}
MS \cdot SQ &= CA \cdot AS \\
&= AO^2 \\
&= OS^2 + SQ^2
\end{aligned}
$$

Und da HA = AC, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
HA : AS &= CA : AS \\
&= MS : SQ \\
&= MS^2 : MS \cdot SQ \\
&= MS^2 : (OS^2 + SQ^2) \\
&= MN^2 : (OP^2 + QR^2)
\end{aligned}
$$

[293] Kaiser, Nöbauer, 168- 170

= (Kreis, Durchmesser MN) : (Kreis, Durchmesser OP + Kreis, Durchmesser QR)

Das heißt HA : AS = (Schnittkreis des Zylinders) : (Schnittkreis der Kugel + Schnittkreis des Kegels)

Daher ist der Schnittkreis des Zylinders so, wie er liegt, in Bezug auf A im Gleichgewicht mit dem Schnittkreis der Kugel zusammen mit dem des Kegels, wenn die beiden letzten Kreise mit ihren Schwerpunkten nach H verlegt sind.
Ähnliches gilt für die drei entsprechenden Schnitte in einer Ebene, die auf AC senkrecht stehen und durch irgendeine andere in dem Parallelogramm LF gelegene und zu EF parallele Gerade gehen.
Behandeln wir in derselben Weise alle Gruppen von je drei Kreisen, in denen die zu AC senkrechten Ebenen den Zylinder, die Kugel und den Kegel schneiden und aus denen diese drei Körper zusammengesetzt sind, so folgt, dass der Zylinder in der Lage, in der er ist, sich in Bezug auf A im Gleichgewicht befindet mit der Kugel und dem Kegel zusammengenommen, wenn beide mit ihren Schwerpunkten nach H gebracht werden.
Da K der Schwerpunkt des Zylinders ist, folgt

HA : AK = Zylinder : (Kugel + Kegel AEF)

Aber HA ist gleich 2 AK, also

	Zylinder	=	2 (Kugel + Kegel AEF)	
Aber	Zylinder	=	3 (Kegel AEF)	[nach Euklid]
Also	Kegel AEF	=	2 (Kugel)	
Da	EF	=	2 BD	
so ist	Kegel AEF	=	8 (Kegel ABD)	
also	Kugel	=	4 (Kegel ABD)	□ [294]

Einfluss auf Lehrplan und Unterricht

Im Zuge der Integralrechnung in der 8. Klasse AHS wird in „Mathematik verstehen 8“ auch über die Entwicklung der Integralrechnung geschrieben. Dabei werden unter anderem die Quadratur des Kreises, das Exhaustionsverfahren und die Quadratur der Parabel erwähnt oder beschrieben. Archimedes verwendete die

[294] Kaiser, Nöbauer, 170f.

Exhaustionsmehtode um den Flächeninhalt der Parabel näherungsweise zu bestimmen. Eine Skizze der Parabel $y = x^2$ dient zur Veranschaulichung. [295]

Im Zuge der Integralrechnung werden Volumina von Rotationskörper bestimmt. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler unter anderem die Formel für das Kugelvolumen herleiten.[296]

Im „Lehrbuch der Mathematik 8“ werden zum Abschluss des Kapitels über die Integralrechnung auch Eudoxos und Archimedes und ihre Leistungen im Bereich der Berechnung von Flächeninhalten krummliniger Flächen kurz erwähnt.[297]

Auch in diesem Schulbuch soll mit Hilfe der Integralrechnung für Rotationskörper das Volumen einer Kugel mit Radius r hergeleitet werden.[298]

[295] Mathematik verstehen 8, 72- 79
[296] Mathematik verstehen 8, 41
[297] Lehrbuch der Mathematik 8, 107
[298] Lehrbuch der Mathematik 8, 86

8 Eratosthenes von Kyrene

Eratosthenes von Kyrene lebte von zirka 276 bis 194 v. Chr. Er war somit ein Zeitgenosse von Archimedes von Syrakus. Er wurde als Universalgelehrter betrachtet und widmete sich in der Stadt Alexandria der Philologie, der Grammatik, der Mathematik, der Literatur, der Astronomie und auch der Geometrie. Ab dem Jahr 235 v. Chr. war er der Vorstand des Museions von Alexandria.[299]

8.1 Das Sieb des Eratosthenes

Mit der Siebmethode des Eratosthenes kann man die Folge der Primzahlen ermitteln. Mehr erfährt man allerdings nicht. Seine Bedeutung ist somit beschränkt.

Die erste Überlieferung stammt von Nikomachos von Gerasa, der ungefähr dreihundert Jahre nach Eratosthenes lebte. Nikomachos gilt als wichtiger Schreiber von Elementen auf dem Gebiet der Arithmetik.[300]

Die Meinungen über die Bedeutung dieser Siebmethode sind eher bescheiden. Beispielsweise schreibt Cantor: „*Die Siebmethode des Eratosthenes ist gerade keine solche, zu deren Ersinnung ein übermäßiger Scharfsinn gehörte*." Aber derselbe bekräftigt auch, dass man die Siebmethode in einem zeitlichen Zusammenhang sehen müsse und dass sie einen bedeutenden Fortschritt in der Zahlentheorie darstellt. Denn zuerst unterschied man Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen und erkannte deren Eigenschaften. Danach zeigte Euklid, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist und nun kam der dritte Schritt, die Siebmethode von Eratosthenes. Denn er zeigte nun zumindest, dass es möglich sei, die Primzahlen soweit zu entdecken, soweit man in der Zahlenreihe gehen will.[301]

Die Siebmethode wird nun folgendermaßen ausgeführt:

„*Man schreibt – so lautet die Regel – alle ungeraden Zahlen von der Zahl 3 an der Reihe nach auf. Streicht man nun jede dritte Zahl hinter der Zahl 3 durch, so sind die Vielfachen der Zahl 3 entfernt. Dann geht man zur nächsten Zahl 5 über und streicht jede fünfte Zahl hinter ihr durch, ohne Rücksicht darauf, ob sie schon durch einen früheren Strich vernichtet ist oder nicht; so sind die Vielfachen von der Zahl 5*

[299] Alten, 57
[300] Waldal, 11
[301] Waldal, 12f.

entfernt. Fährt man weiter so fort, indem man beim Abzählen und Durchstreichen die bereits durchstrichenen Zahlen den unberührten gleichachtet und nur den Unterschied macht, dass man keine durchstrichene Zahl als Ausgangspunkt einer neunen Aussiebung benutzt, so bleiben schließlich nur die Primzahlen übrig. Sämtliche zusammengesetzten Zahlen dagegen sind vernichtet, und am Anfange fehlt auch noch die Primzahl 2, welche Jamblichus, weil sie gerade ist, nicht unter die Primzahlen gerechnet wissen will…"[302]

Nikomachos schreibt nur die ungeraden natürlichen Zahlen ab 3 auf. Daraus könnte man schließen, dass er bereits sehr vertraut war mit den Primzahlen. Vermutlich war es für ihn unsinnig zuerst die ganze Zahlfolge aufzuschreiben und dann wieder die Hälfte zu streichen. Mit seiner Schreibweise vermeidet er auch die Zahl 2. Diese Zahl wurde vielfach diskutiert, weil sie die einzige gerade Primzahl ist. Euklid und Eratosthenes wiederum hätten wahrscheinlich die ganze Zahlenfolge betrachtet, wobei jede Zahl unentbehrlich und gleichwertig wäre.[303]

Bezug zu Lehrplan und Unterricht

Das Sieb des Eratosthenes findet man in den Schulbüchern „Das ist Mathematik 2" und „Mathe Buch 2". In beiden Büchern wird die Vorgehensweise beschrieben und außerdem wird die Person des Eratosthenes von Kyrene kurz vorgestellt.[304]

<u>Beispiel</u>: Finde mit Hilfe des Siebes von Eratosthenes alle Primzahlen kleiner als 60.

Ausführung: Du schreibst alle natürlichen Zahlen bis 60 auf.

1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~

Alle Vielfachen von 2 sind nicht prim, wir streichen sie daher aus der Liste.

Die erste nicht gestrichene Zahl größer als 2 ist 3. Nun streichen wir alle Vielfachen von 3, die noch nicht gestrichen wurden. Nun ist die erste nicht gestrichene Zahl

[302] Waldal, 13
[303] Waldal, 15
[304] Das ist Mathematik 2, 25; Mathe Buch 2, 14

gleich 5. Unter den verbleibenden Zahlen werden daher alle Vielfachen von 5 gestrichen.

Die übrig gebliebenen Zahlen schreiben wir noch einmal auf:

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	~~49~~	53	59	

In der nächsten Runde streichen wir die Vielfachen von 7. Es gibt nur die Zahl 49. Vielfache von 11, 13, 17, 19, 23 und 29 kommen nicht mehr vor. Daher sind alle übrig gebliebenen Zahlen außer der Zahl 1 Primzahlen.

Ergebnis: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59. [305]

[305] Mathe Buch 2, 14

9 Apollonios von Perge

Apollonios von Perge wurde wahrscheinlich 260 v. Chr. in dem Städtchen Perge im Süden Kleinasiens geboren und lebte 70 Jahre.[306] Er war Professor der Akademie in Alexandria. Neben der Mathematik beschäftigte ihn auch die Astronomie. Höchstwahrscheinlich war er der Erfinder der Theorie der Epizyklen und der Exzenter. Diese Theorie besagt, dass sich ein Planet auf einer kleinen oder großen Kreisbahn bewegt, deren Mittelpunkt selbst einen größeren oder kleineren Kreis um den Beobachter schreibt.[307]

Apollonios verfasste einige mathematische Werke, von denen viele verloren gegangen sind. Das bedeutendste wird „Konika“ genannt. Man weiß über diese Schriften nur durch Anmerkungen oder Andeutungen späterer Mathematiker. Unter anderem verfasste er ein Werk, das „Schnellrechner“ bezeichnet wird und als Weiterführung der archimedischen Sandrechnung gilt. Neben einer Schrift „Über Berührungen“ schrieb Apollonios die Werke „Über ebene geometrische Orte“ und „Über regelmäßige Körper“.[308]

9.1 Vorgeschichte

Die Entdeckung der Kegelschnitte ist von den Griechen überliefert. Die Hauptquelle stellt Eutokios, ein Kommentator des Archimedes, dar. Am Anfang stand das berühmte Problem der Würfelverdopplung. Von Hippokrates von Chios wurde es in das äquivalente Problem der Bestimmung der beiden mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Strecken umgeformt. Man hatte nun folgende Proportion zu lösen:

$s : x = x : y = y : 2s$

Menaichmos löste dieses Problem so:

Um x und y so zu bestimmen, dass die Proportion $a : x = x : y = y : b$ gilt, denken wir und $OZ = x$ und $ZP = y$ bereits bestimmt und in einem Koordinatensystem aufgetragen. Aus der Proportion erhalten wir zunächst $x^2 = ay$. Also muss P auf einer Parabel mit dem Scheitel O liegen

---

[306] Alten, 57
[307] Kaiser, Nöbauer, 19
[308] Kaiser, Nöbauer, 19

Weiters erhält man aus der Proportion xy = ab. Also muss P auf einer Hyperbel mit den Asymptoten OZ und OK liegen.
Daher kann man P als Schnitt zweier Kurven finden und umgekehrt folgt die Proportion aus den Gleichungen der beiden Kurven.

Die Hauptentdeckung von Menaichmos war, dass diese Kurven als rechtwinkelige Schnitte an geraden Kreiskegeln auftreten. [309]

Sowohl Aristaios, als auch Euklid schrieben ein Buch über die Kegelschnitte. Leider sind beide nicht erhalten. Wir wissen davon nur aus verschiedenen Zitaten. Auch Archimedes bezog sich immer wieder auf Resultate aus Euklids Werk.[310]

9.2 Die „Konika“

Das Hauptwerk von Apollonios und gleichzeitig im Bereich der Kegelschnitte ist die „Konika“. Diese Schrift ist zum Großteil erhalten. Nur das letzte von acht Büchern ist verloren gegangen. Es gilt als eines der bedeutendsten überlieferten mathematischen Werke des Altertums und brachte Apollonios den Beinamen „der große Geometer“. [311]

Apollonios gibt in diesem Werk eine einheitliche Zusammenfassung der damaligen Kenntnisse über die Kegelschnitte und ergänzt sie durch eigene Resultate. Besonders hervorzuheben ist, dass er nun alle Kegelschnitte als Schnitte am selben Kreiskegel definiert. In diesem Werk treten auch die Bezeichnungen Ellipse, Hyperbel, Parabel, Tangenten, Hyperbelasymptoten, Pol und Polare auf. Des Weiteren werden die Brennpunkteigenschaften der Mittelpunktskegelschnitte untersucht und kongruente und ähnliche Kegelschnitte betrachtet. Die Methoden von Apollonios erinnern schon an die Verwendung von Koordinaten, so dass er als Vorläufer der analytischen Geometrie angesehen werden kann.[312]

Er beschreibt selbst in der Einleitung den Inhalt seiner Bücher:

[309] Kaiser, Nöbauer, 152f.
[310] Kaiser, Nöbauer, 154
[311] Kaiser, Nöbauer, 156
[312] Kaiser, Nöbauer, 20

„Von den acht Büchern nun enthalten die vier ersten die allgemeinen Grundlagen dieser Disziplin. Das erste von diesen enthält die Erzeugung der drei Kegelschnitte und der gegenüberliegenden Schnitte, sowie deren Haupteigenschaften, vollständiger und allgemeiner behandelt, als es von den Früheren dargestellt worden ist. Das zweite Buch behandelt dasjenige, was sich auf die Durchmesser und die Achsen der Schnitte bezieht, die Asymptoten und anderes, was von allgemeiner und wesentlicher Bedeutung ist. Was ich aber Durchmesser, und was ich Achse nenne, das wirst du aus diesem Buch erfahren. Das dritte Buch enthält viele und merkwürdige Theoreme, die nützlich sind für die Behandlung der körperlichen Örter, und von denen die meisten schön und neu sind. […] Das vierte Buch lehrt, auf wie viele Arten sich Kegelschnitte unter sich und mit einer Kreisperipherie schneiden können, und anderes mehr, was beides nicht von meinen Vorgängern behandelt ist: in wie vielen Punkten ein Kegelschnitt oder ein Kreis und gegenüberliegende Schnitte sich mit gegenüberliegenden Schnitten schneiden.
Die übrigen vier Bücher enthalten weitergehende Betrachtungen. Das fünfte handelt nämlich ausführlicher über Maxima und Minima; das sechste über kongruente und ähnliche Kegelschnitte; das siebente über Theoreme, die auf Diorismen Bezug haben; das achte behandelt abgegrenzte Aufgaben über Kegelschnitte.“[313]

Apollonios wählte im Unterschied zu seinen Vorgängern, einen neuen Ausgangspunkt für die Diskussion der Kegelschnitte.[314] Er erweiterte die drei Kreiskegel von Menaichmus auf beliebige Kreiskegel, wobei Parabel, Hyperbel und Ellipse durch beliebige Schnitte an diesen erzeugt werden. Er behandelt die Kegelschnitte sehr allgemein. Durch diese Vorgehensweise führt er die Kegelschnitte als gemeinsame Kurvenklasse ein.[315]

9.3 Symptome der Kegelschnitte

Die Kurven selbst beschrieben die Griechen durch ihre „Symptome“. Unter dem Symptom einer Kurve versteht man eine Bedingung, die einen Punkt charakterisiert, der auf der Kurve liegt.[316]

[313] Kaiser, Nöbauer, 156
[314] Kaiser, Nöbauer, 156
[315] Greiseder, 38
[316] Kaiser, Nöbauer, 153

Nun stellt sich die Frage, wie Apollonios die Symptome, also die charakteristischen Eigenschaften der Kegelschnitte bewiesen hat.

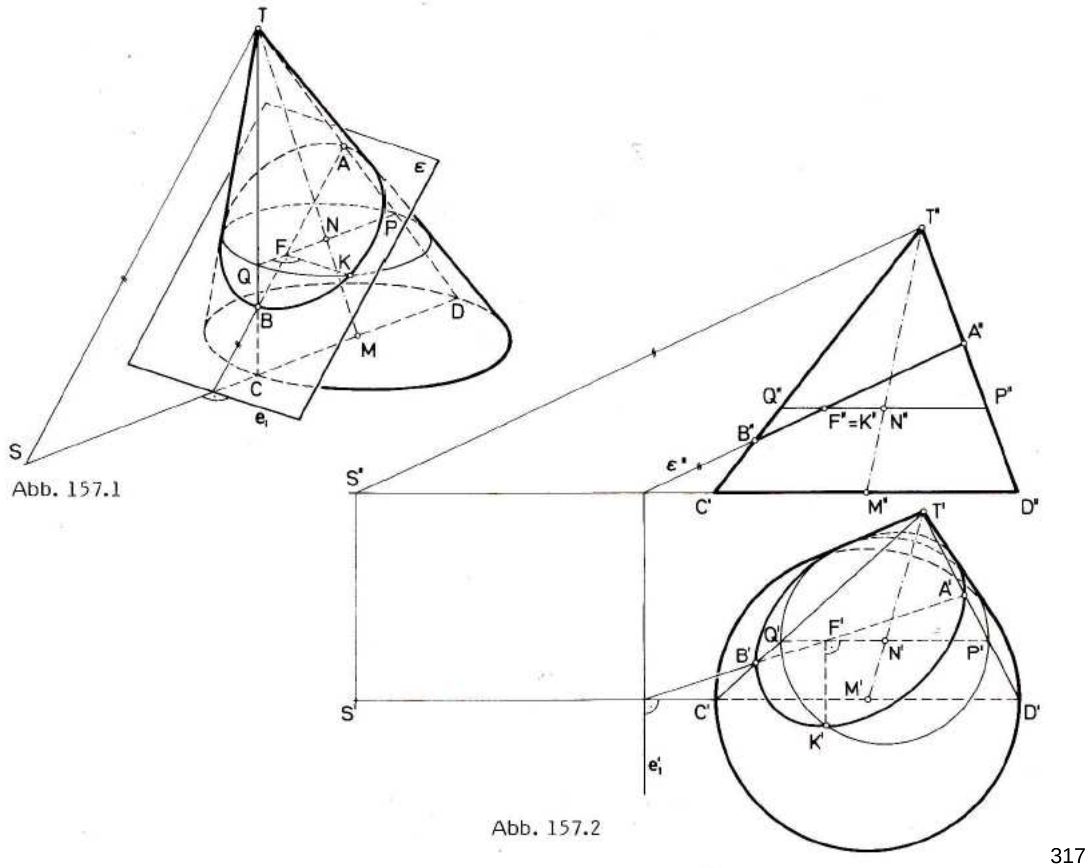


Abb. 157.1

Abb. 157.2

[317]

Apollonios betrachtet einen gegebenen schiefen Kreiskegel mit der Spitze T. Die Verbindungsstrecke von T mit dem Mittelpunkt M des Grundkreises sei als Achse des Kegels definiert. Der Kegel wird von einer Ebene ε geschnitten. Deren Spur wird in der Grundkreisebene mit e_1 bezeichnet. Auf e_1 steht der Durchmesser CD des Grundkreises normal. Somit ist eine Ebene TCD bestimmt.

Wir wählen AB als x- Achse und eine Parallele zu e_1 als y- Achse des Kegelschnitts.

Sei K ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts. Durch diesen wird eine Ebene parallel zum Grundkreis gezeichnet, die den Kegel in einem Kreis mit dem Mittelpunkt N schneidet. Die Schnittpunkte des Kreises mit den Erzeugenden TD und TC werden mit P und Q bezeichnet.

Nach Konstruktion steht FK im Kreis QKP senkrecht auf dem Durchmesser PQ.

Also gilt nach dem Höhensatz: $FK^2 = FQ \cdot FP$

Nun zeichnen wir durch T eine parallele Ebene zur Ebene ε. Diese geht durch TS.

[317] Kaiser, Nöbauer, 157

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔFQB, ΔSCT und der Dreieck ΔFPA, ΔSDT erhalten wir die Proportionen: $FQ : FB = SC : ST$ und $FP : FA = SD : ST$.

Die Multiplikation dieser Proportionen ergibt: $(FQ \cdot FP) : (FB \cdot FA) = (SC \cdot SC) : ST^2$

Auf der rechten Seite steht nun ein Verhältnis, das für jeden Punkt K des Kegelschnitts fest bleibt. Wir bezeichnen es daher mit α. Nun ersetzen wir $FQ \cdot FP$ noch durch FK^2 und erhalten: $FK^2 = \alpha(FA \cdot FB)$

Bezeichnen wir FA mit x und FB mit x_1, so erhalten wir als Symptom der Ellipse:

$y^2 = \alpha \cdot x \cdot x_1$. Das ist die Zweiabzissenform des Archimedes.

Bezeichnen wir die Strecke AB mit a und setzen $p = \alpha a$, so erhält das Symptom der Ellipse die Gestalt $y^2 = x \cdot \left(p - \frac{p}{a}x\right)$.

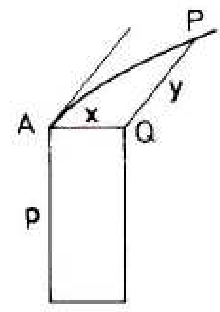
Analog leitet Apollonios die Symptome der Hyperbel $y^2 = x \cdot \left(p + \frac{p}{a}x\right)$ und der Parabel $y^2 = px$ ab. [318]

9.4 Namensgebung

Bei Problemen, die auf algebraische Gleichungen zweiten Grades führen, wird die Sprechweise der „Flächenanlegung“ benützt.

<u>Parabel</u>:

Das Symptom $y^2 = px$ wird so interpretiert: Das Rechteck mit der Seitenlänge x und der Fläche y^2 wird mit der zweiten Seite an die Strecke p angelegt. Dabei kommt es dieser gleich. In Anlehnung an das griechische Wort „gleichkommen“ nennt Apollonios diesen Kegelschnitt „Parabel“.

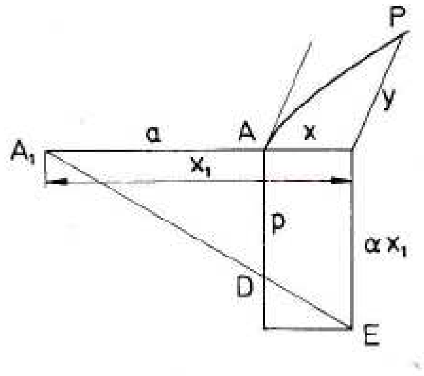


<u>Hyperbel</u>:

Das Symptom für die Hyperbel $y^2 = x \cdot \left(p + \frac{p}{a}x\right)$ kann als Anlegung der zweiten Seite eines Rechtecks mit der Seite x und der Fläche y^2 an die Strecke p aufgefasst

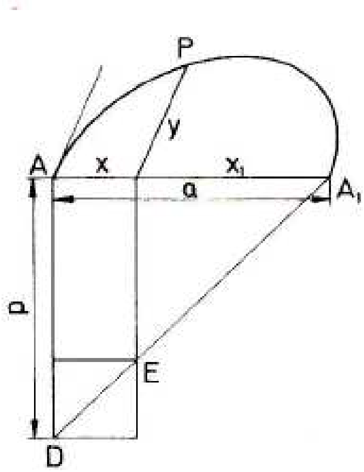
[318] Kaiser, Näbauer, 156- 158

werden. Die zweite Seite übertrifft dabei die Strecke p um die Länge $\frac{p}{a}x$. Somit liegt ein „überschießendes“ Rechteck vor. Aus dem griechischen Wort „Überschuss“ leitet sich nun die Bezeichnung „Hyperbel ab.



Ellipse:

Auch die Gleichung $y^2 = x \cdot \left(p - \frac{p}{a}x\right)$ der Ellipse kann mit Hilfe der Flächenanlegung interpretiert werden. Bei der Anlegung des Rechtecks mit der Seite x und der Fläche y^2 an die Strecke p fehlt ein Stück. Die zweite Seite ist um $\frac{p}{a}x$ kürzer als die Strecke p. Es liegt also ein „Defekt“ vor und aus dem entsprechenden griechischen Wort erhält Apollonios den Namen „Ellipse“. [319]



Einfluss auf Lehrpläne und Schulbücher

In der siebten Klasse der AHS ist im Lehrplan vorgesehen, dass sich Schülerinnen und Schüler eingehend mit den Kegelschnitten beschäftigen. Neben der Beschreibung von Kegelschnitten durch Gleichungen, soll auch das Schneiden von Kegelschnittslinien mit Geraden und das Ermitteln von Tangenten beherrscht werden.

Die historische Entwicklung der Kegelschnitte wird im Schulbuch „Lehrbuch der Mathematik 7“ zum Abschluss des Kapitels „Nichtlineare analytische Geometrie“ behandelt. Neben Hippokrates von Chios und dem delischen Problem, wird auch Menaichmos erwähnt. Ihm wird die Umwandlung des delischen Problems in den Schnitt der Parabel $y^2 = 2ax$ mit der Hyperbel $y = \frac{2a^2}{x}$ zugeschrieben. Im Abschnitt über die Scheitelgleichung werden auch Apollonios und seine Bedeutung für die Namensgebung der einzelnen Kegelschnitte erwähnt.[320]

[319] Kaiser, Nöbauer, 158
[320] Lehrbuch der Mathematik 7, 207f.

In „Mathematik verstehen 7“ wird der geschichtliche Hintergrund der Kegelschnitte sehr genau beleuchtet. Zu Beginn wird detailliert auf das delische Problem der Würfelverdopplung eingegangen. Der Lösungsweg von Hippokrates von Chios wird so dargestellt:

Hippokrates stellte fest, dass das Problem gelöst sei, wenn sich zu einer Strecke a zwei Strecken x und y konstruieren lassen für die gilt:

$a : x = x : y = y : 2a$

Man bezeichnet die Strecken x und y als „mittlere Proportionale von a und 2a“. Aus diesen Proportionsgleichungen folgt $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ax$ und daraus folgt

$x^4 = a^2y^2 = a^2 2ax = 2a^3x$ bzw. $x^3 = 2a^3$. Besitzt also der ursprüngliche Würfel die Kantenlänge a, dann ist x die Kantenlänge des gesuchten Würfels mit doppeltem Volumen.

Danach wird auf Menaichmos und seine Lösung des Problems durch den Schnitt zweier Parabeln eingegangen.

Bei Apollonios wird vor allem auf sein bedeutendes Werk „Konika“ und die Namensgebung hingewiesen. Die Namensgebung wird auch fast genauso wie in Kapitel 9.4 beschrieben und erklärt.[321]

In beiden Schulbüchern werden, wie im Lehrplan vorgesehen, die Gleichungen der Kegelschnitte, Schnitte mit Geraden und Tangenten an Kegelschnitte behandelt. Der Aufbau ist sehr ähnlich. Begonnen wird mit der Ellipse, danach folgt die Hyperbel und zum Schluss steht die Parabel am Programm.

[321] Mathematik verstehen 7, 190- 192

10 Diophant von Alexandria

Diophant war ein bedeutender Zahlentheoretiker. Seine Lebensdaten sind nicht genau bekannt. Anhand der Widmung seiner Arithmetika an den „sehr verehrten Dionysios“ ist anzunehmen, dass er um 250 n. Chr. lebte und wirkte. Denn Dionysios der Große war ein alexandrinischer Bischof, der von 247 bis 264 wirkte. Auf Grund dieser Verbindung könnte er Christ gewesen sein und in Alexandria gelebt haben.
Über das Privatleben von Diophant erfährt man etwas aus seiner Grabinschrift. Diese wurde als algebraisches Rätsel geschrieben. Demnach war er verheiratet und hatte einen Sohn.[322]

10.1 „Arithmetika“

Sein Hauptwerk nennt sich „Arithmetika“. Es ist das einzig erhaltene Werk zur Algebra aus dieser Zeit.[323] Allerdings ist es nicht vollständig erhalten. In seiner Bedeutung kann es sich durchaus mit den großen Werken der klassischen Zeit messen. Aber dieses Werk ist anders, als die Werke der bisherigen griechischen Mathematik. Ursprünglich vermutete man, dass nur sechs der dreizehn Bücher der „Arithmetika“ erhalten sind. Doch dann wurden weitere vier in arabischer Übersetzung gefunden.

Die „Arithmetika“ ist kein Buch über theoretische Arithmetik im Sinne der Pythagoreer. Für die Pythagoreer war Arithmetik die Theorie der Zahlen, die eine Disziplin ohne fixe Methoden war und Prophezeiungen benötigte. Die Arithmetik des Diophant passt eher zur rechnerischen Arithmetik und zur Logistik.[324] Denn die Bücher bestehen aus einer Sammlung von Aufgaben mit Lösungen. Dabei handelt es sich um „bestimmte“ und „unbestimmte“ Gleichungen. „Unbestimmte“ Gleichungen sind Gleichungen, die freie Parameter enthalten. Als Lösungen sind nur positive rationale Zahlen zugelassen. Man kann allerdings nicht von einer systematischen Theorie sprechen. Denn für verschiedene Typen von Gleichungen werden verschiedene Lösungsmethoden verwendet.

[322] Alten, 57f.
[323] Stewart, 64
[324] Dahan- Dalmedico, 75

Die Methoden von Diophant stammen vermutlich aus der babylonischen Algebra. Dies wird angenommen, weil sich bei Diophant auch Aufgaben finden, die von den Babyloniern behandelt wurden. Auch bei der Wahl der Methoden geht Diophant wie die Babylonier vor. Ähnlichkeiten zeigen sich auch bei Diophant und dem arabischen Mathematiker al- Khwarizmi.[325]

Diophant war vermutlich der erste Mathematiker, der Symbole für die Unbekannte und ihre Potenzen, für Gleichheit, Subtrahieren usw. systematisch verwendete.[326]
Den Beginn der „Arithmetika" bildet eine Erklärung der verwendeten Symbolik. Die ersten sechs Potenzen einer Variablen x erhielten eigene Namen und Symbole.

x^2	Δ^{υ}	Quadratzahl
x^3	K^{υ}	Kubikzahl
x^4	$\Delta^{\upsilon}\Delta$	Quadratquadratzahl
x^5	ΔK^{υ}	Quadratkubikzahl
x^6	$K^{\upsilon}K$	Kubikkubikzahl

Die Unbestimmte x wird mit „Zahl" bezeichnet und durch ein s- ähnliches Zeichen symbolisiert.

Zahlen, die nicht als Koeffizienten von Unbestimmten auftreten, heißen „Einheiten" und werden durch hinzufügen von M° gekennzeichnet.
Diophant führt auch Symbole für die reziproken Werte der Unbekannten ein. Er verwendet für negative Exponenten das Zeichen χ. So schreibt er beispielsweise für $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ in seiner Symbolschrift $\Delta^{\upsilon\chi}$.
Die Gleichheit wird durch die Buchstaben $\iota\sigma$ angegeben. Dies ist die Abkürzung für das Wort isos, das gleich bedeutet.
Diophant betrachtet auch schon negative Größen. Für negative Größen gibt er auch eine Vorzeichenregel an: „*Das Produkt zweier verneinter Größen ist positiv, da Produkt einer verneinten und einer positiven Größe ist negativ*." [327]
Er sucht aber eigentlich nach positiven rationalen Lösungen, obwohl er in seinen Zwischenrechnungen auch negative rationale Zahlen benutzt.[328]

[325] Kaiser, Nöbauer, 22
[326] Alten, 95
[327] Kaiser, Nöbauer, 103f.
[328] Alten, 99

Klammern kommen bei Diophant nicht vor und Multiplikationen und Divisionen beschreibt er verbal.[329]

Die Zahlen selbst werden durch Buchstaben des griechischen Alphabets, die manchmal überstrichen oder mit einem Strich versehen sind, angegeben. Dabei werden die 24 Buchstaben des Alphabets durch drei ältere ergänzt.[330]

Die Notation sieht sehr ungewöhnlich aus und eignet sich auch nicht gut zum Rechnen, aber immerhin zum Zusammenfassen der Schritte in kompakter Form.[331]

Für Diophant besteht eine Notwendigkeit in der Beherrschung der Grundoperationen, um Gleichungen lösen zu können. So schreibt er: „*Nachdem ich dir die Multiplikation der Potenzen und ihrer reziproken werte erklärt habe, ist auch die Division dieser Ausdrücke klar. Für den Anfänger der Wissenschaft ist es nun gut, wenn er sich in der Addition, Subtraktion und Multiplikation algebraischer Ausdrücke übt. Er muss wissen, wie man positive Ausdrücke und negative Ausdrücke mit verschiedenen Koeffizienten zu anderen Ausdrücken hinzufügt, die selbst beide positiv oder auch positiv und negativ sein können, und wie man von Ausdrücken, die Summen oder Differenzen sein können, andere Größen wegnimmt, die ihrerseits Summen oder Differenzen sein können*.“ [332]

10.2 Lineare Gleichungen

Das Lösen von linearen Gleichungen mit einer Unbekannten wird von Diophant sehr genau beschrieben. Er schreibt, man soll die negativen Ausdrücke auf beiden Seiten addieren bis die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung alle positiv sind. Dann soll man wiederum Gleiches von Gleichem solange abziehen bis auf beiden Seiten nur je ein Term übrig bleibt.

Beispiel:

„*Es ist ein rechtwinkeliges Dreieck von der Art zu finden, dass seine Fläche, um eine Kathete vergrößert, gleich einer gegebenen Zahl ist. Die gegebene Zahl ist 7*.“

[329] Alten, 96
[330] Alten, 95
[331] Stewart, 64
[332] Kaiser, Nöbauer, 103f.

Lösung:

„Es werde das rechtwinkelige Dreieck 3x, 4x, 5x angesetzt. Dann müsste $6x^2 + 3x = 7$ sein. Damit die Gleichung rational lösbar wird, müsste das Quadrat des halben Koeffizienten von x, vermehrt um das Produkt aus dem Koeffizienten von x^2 und der Zahl 7, ein Quadrat sein. Das ist aber nicht der Fall.

Es wird also notwendig sein, ein rechtwinkeliges Dreieck derart zu finden, dass das Quadrat der einen halben Kathete, vermehrt um das 7- fache der Fläche, ein Quadrat ist.

Es sei die eine Kathete x, die andere l. Dann muss $3\frac{l}{2}x + \frac{l}{4}$ und somit auch das 4-fache, nämlich $14x + l$, ein Quadrat sein. Damit die Seiten des Dreiecks rational sind, muss auch $x^2 + l$ ein Quadrat sein. Die Differenz der Ausdrücke $x^2 + l$ und $14x + l$ ist $x^2 - 14x$. Wenn $x^2 - 14x$ in Faktoren zerlegt wird, so ist der eine Faktor x, der andere x – 14. Die halbe Differenz dieser Faktoren ergibt quadriert 49.

Wir setzten $14x + l = 49$ und erhalten $x = \frac{24}{7}$.

Ich setzte also die eine Kathete $\frac{24}{7}$, die andere l und multipliziere alles mit 7.

Dann wird die eine Kathete 24, die andere 7, die Hypotenuse 25. Diese Werte multipliziere ich mit y. Dann wird die Summe aus der Fläche und der zweiten Kathete $84y^2 + 7y$, und es entsteht $84y^2 + 7y = 7$. Hieraus ergibt sich $y = \frac{1}{4}$.

Die Dreiecksseiten sind also 6, $\frac{7}{4}$, $\frac{25}{4}$. So ist die Aufgabe gelöst. [333]

10.3 Kubische Gleichung

Beispiel:

„*Ein Kubus soll um 2 größer werden als ein Quadrat*."

Lösung:

Um dieses Problem zu lösen betrachtet Diophant die kubische Gleichung $(x-1)^3 = (x+1)^2 + 2$.

[333] Kaiser, Nöbauer, 104

Für die Lösung dieser Gleichung gibt er ohne Rechnung x = 4 an.

Das ist das erste Mal, dass eine kubische Gleichung in einer rein algebraischen Form behandelt wird. Diese kubische Gleichung ist die einzige überlieferte Gleichung dritten Grades mit einer Unbekannten in der griechischen Arithmetik.[334]

10.4 Gleichungssysteme

Beispiel:

„*Drei Zahlen von der Beschaffenheit sind zu finden, dass die Summen zu je zweien gegebenen Zahlen gleich sind. – Es ist dabei notwendig, dass die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer ist als jede der gegebenen Zahlen*."

Lösung:

In unsere Schreibweise kann man die Aufgabe so übertragen:

$$x + y = a$$

$$y + z = b$$

$$x + z = c$$

Die Nebenbedingung erhält man so: Die Addition der drei Gleichungen ergibt

$$2x + 2y + 2z = a + b + c \quad \rightarrow \quad x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$$

Das muss $> x + y = a$, $> y + z = b$ und $> x + z = c$ sein.

Diophant führt das System auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurück, indem er $x + y + z = s$ setzt.

Dann ist $s = \frac{a+b+c}{2}$ und $x = s - b$, $y = s - c$, $z = s - a$ [335]

Beispiel:

„*Gesucht sind fünf Zahlen von der Art, dass sie zusammen ohne die erste 120 ergeben, ohne die zweite 180, ohne die dritte 240, ohne die vierte 300 und ohne die fünfte 360*."

---

[334] Alten, 96

[335] Gericke, 145

Lösung:

Diese Aufgabe wurde 1484 von Nicolas Chuquet so behandelt:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = s - x_1 = a_1 = 120$$

$$s - x_2 = a_2 = 180$$

$$s - x_3 = a_3 = 240$$

$$s - x_4 = a_4 = 300$$

$$s - x_5 = a_5 = 360$$

Aus $4s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ würde sich hier die Bedingung $\frac{s}{4} > a_i$ für alle i ergeben.

Sie ist für a_4 und a_5 nicht erfüllt.

$x_1 = 180$, $x_2 = 120$, $x_3 = 60$, $x_4 = 0$, $x_5 = -60$

In der Lösung tritt daher 0 und eine negative Zahl auf. Das ist das erste Auftreten einer negativen reinen Zahl als Lösung einer Gleichung im Abendland.[336]

Beispiel:

„*Es sind drei Zahlen (A, B, C) in geometrischer Proportion zu finden, so dass jede, vermindert um eine gegebene Zahl, ein Quadrat ergibt. Die gegebene Zahl sei 12. Wenn die Zahlen in geometrischer Proportion stehen, so ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Quadrat des mittleren (* $A \cdot C = B^2$*). Ich frage nun, welches Quadrat, vermindert um 12, ein Quadrat ist. Das ist leicht, eine solche Zahl ist* $42\frac{1}{4}$*.*“

Lösung:

Zuerst bestimmt Diophant eine Zahl k mit $k^2 - 12 =$ Quadrat.

Man kann den speziellen Ansatz machen $k^2 - 12 = (k-1)^2$ und findet $k = 6\frac{1}{2}$.

Diophant setzt nun $A = k^2$. Dann ist nämlich die erste Bedingung, $A - 12 =$ Quadrat, erfüllt.

Ferner setzt er $C = s^2$.

Dann folgt aus $A \cdot C = B^2$: $B = ks$

Nun müssen $s^2 - 12 = p^2$ und $ks - 12 = q^2$ Quadratzahlen sein.

---

[336] Gericke, 145

Diophant bildet $p^2 - q^2 = s(s-k)$

vergleicht dies mit $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a \cdot b$

und setzt a = s, b = s – k, also $p = \frac{1}{2}(2s-k)$ und $q = \frac{1}{2}k = \frac{13}{4}$

Aus der Gleichung $ks - 12 = q^2 = \frac{169}{16}$

ergibt sich $s = \frac{361}{104}$ und somit $A = 42\frac{1}{2}$, $B = \frac{2346\frac{1}{2}}{104}$, $C = \frac{130321}{10816}$ [337]

Bezug zu Lehrplänen und Schulbüchern

Bereits in der ersten Klasse der AHS und Hauptschule kommen die Schülerinnen und Schüler mit Variablen in Berührung. Sie sollen Gleichungen aufstellen können und auch Lösungen zu einfachen linearen Gleichungen finden können. Lineare Gleichungen finden nun in jedem Jahr in der Unterstufe Platz im Lehrplan.[338]

In der Oberstufe stehen neben den linearen Gleichungen auch die kubischen Gleichungen und Gleichungssysteme am Programm. Gleichungssysteme werden in der fünften und der sechsten Klasse behandelt. Auf kubische Gleichungen stößt man erstmals in der siebten Klasse.[339]

In „Mathematik verstehen 5“ findet man zum Abschluss des Kapitels „Terme und Formeln“ Historisches zur Variablennotation. Im Zuge dessen werden auch Diophant seine Notation erwähnt.[340]

In „Lehrbuch der Mathematik 5“ wird Diophant bei den diophantischen Gleichungen erwähnt. Dies sind Gleichungssysteme bei denen nur ganzzahlige Lösungen von Interesse sind.[341]

---

[337] Gericke, 146
[338] Lehrplan AHS Unterstufe, Hauptschule
[339] Lehrplan AHS Oberstufe
[340] Mathematik verstehen 5, 71
[341] Lehrbuch der Mathematik 5, 170

11 Schlussbemerkungen

Schlussendlich kann man sagen, dass die zehn vorgestellten Mathematiker der griechischen Antike und ihre Leistungen und Errungenschaften auf dem Gebiet der Mathematik nach wie vor von großer Bedeutung für die Schulmathematik sind. Vor allem im Bereich der Geometrie der AHS Unterstufe sind viele aktuelle Themen bereits im Griechenland der Antike, besonders von Thales, Pythagoras, Euklid und Archimedes, behandelt worden.

Bei der Betrachtung der Aufgabenstellungen in Euklids „Elementen“ oder in Diophants „Arithmetika“ kann man erkennen, dass sich diese oft gar nicht verändert haben.

Die Geschichte der Mathematik findet sehr wohl, wie auch in den Lehrplänen vorgesehen, Eingang in die Schulbücher. Das Ausmaß variiert allerdings. In den Reihen „Das ist Mathematik“ und „Mathematik verstehen“ werden kultur- historische Aspekte zu Beginn bzw. am Ende jedes Kapitels angeführt. In den Reihen „Mathe Buch“ und „Mathematik Lehrbuch“ sind historische Informationen vorhanden, aber nicht zu jedem Kapitel oder zu jeder wichtigen Persönlichkeit der Mathematikgeschichte.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die griechischen Mathematiker und ihre Leistungen sehr viele Möglichkeiten bieten, den Schülerinnen und Schülern einen Einblick in die Mathematikgeschichte zu gewähren oder ihr Interesse für die Mathematik mit einem alternativen Themeneinstieg zu wecken.

In welchen Bereichen, wie oder ob man die Geschichte der griechischen Mathematik in den Unterricht einfliesen lässt, beruht auf dem Interesse der lehrenden Person und deren Engagement. Ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Vorbereitung historischer Informationen für den Unterricht ist meiner Meinung nach das Buch „Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht“ von Hans Kaiser und Wilfried Nöbauer.

12 Abstract

This thesis paper presents some of the ancient Greek mathematicians, their work and the influence of their work on school till today. Important for this thesis are for example Pythagoras, Thales, Euclid, Archimedes, Apollonius and Diophant. The aim is to present the mathematicians in connection to the Austrian high school curricula of the subject of mathematics and to the school books of mathematics which are often used.

The history of mathematics is part of the Austrian curricular and so it should be kept in mind in lessons.

Four different books of mathematics for school and some books of the history of mathematics serve as a basis for this thesis paper. Furthermore the curricula is used.

After a description of the Greek mathematicians, their life and philosophy and their important achievements are presented. Finally the influence of their achievements on the curricular and on the school books is the central point.

13 Literaturverzeichnis

Heinz Wilhelm ***Alten***, ua., 4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen (Springer Verlag, Berlin 2003)

Benno ***Artmann***, Euclid- The creation of mathematics (Springer Verlag, New York 1999)

Johann Jakob ***Burckhardt***, Lesebuch zur Mathematik. Quellen von Euklid bis heute (Räber Verlag, Luzern 1968)

Egmont ***Colerus***, Von Pythagoras bis Hilbert. Die Epochen der Mathematik und ihre Baumeister (Weltbild- Verlag, Augsburg 1989)

Amy ***Dahan- Dalmedico***, Jeanne ***Pfeiffer***, History of Mathematics. Highways and Byways (Mathematical Assosciation of America, Washington DC 2010)

Clemens ***Thaer*** (Hg.), Euclides. Die Elemente. Bücher I – XIII (Deutsch Verlag, Thun 1997)

Anna Maria ***Fraedrich***, Die Satzgruppe des Pythagoras (BI- Wissenschaftlicher- Verlag, Mannheim/ Wien 1994)

Helmuth ***Gericke***, Mathematik in Antike und Orient (Fourier Verlag, Wiesbaden 1996)

Tina ***Greiseder***, Die Geschichte der Kegelschnitte (Salzburg 2000)

Ruth ***Grünfelder***, Euklidische Geometrie- Von der Antike bis zu den AHS- Lehrplänen (Innsbruck 2006)

Hans ***Kaiser***, Wilfried ***Nöbauer***, Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht (Hölder- Pichler- Tempsky Verlag, Wien 1984)

Marek ***Kordos***, Streifzüge durch die Mathematikgeschichte (Klett Verlag, Stuttgart 1999)

Christine ***Polli***, Die geschichtliche Entwicklung des Irrationalen von seiner Entdeckung bis zu Euklid (Innsbruck 2006)

Manuela ***Schaffer***, Paradoxien in der Mathematik (Wien 1997)

Jürgen ***Schönbeck***, Euklid. Um 300 v.Chr. (Birkhäuser Verlag, Basel 2003)

Christoph J. ***Scriba***, 5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen (Springer Verlag, Berlin 2001)

Ian ***Stewart***, Meilensteine der Mathematik (Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg 2010)

Árpád ***Szabó***, Die Entfaltung der griechischen Mathematik (BI- Wiss.- Verlag, Mannheim/ Wien 1994)

Minu ***Vedadinejad***, Der Ursprung der Kegelschnitte mit Blick auf die heutige Zeit (Wien 2003)

Per ***Waldal***, Das Sieb des Eratosthenes. Eine Studie über die natürlichen Zahlen (Akerets Verlag, Dielsdorf 1961)

Lehrpläne

AHS Unterstufe: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf (11.01.2011)

AHS Oberstufe: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf (11.01.2011)

<u>Schulbücher:</u>

AHS Unterstufe:

Anita ***Dorfmayr***, August ***Mistlbacher***, Alfred ***Nussbaumer***, Mathe Buch 1 (Verlag Neues Schulbuch, Wien 2006)
Anita ***Dorfmayr***, August ***Mistlbacher***, Alfred ***Nussbaumer***, Mathe Buch 2 (Verlag Neues Schulbuch, Wien 2006)
Anita ***Dorfmayr***, August ***Mistlbacher***, Alfred ***Nussbaumer***, Mathe Buch 3 (Verlag Neues Schulbuch, Wien 2007)
Anita ***Dorfmayr***, August ***Mistlbacher***, Alfred ***Nussbaumer***, Mathe Buch 4 (Verlag Neues Schulbuch, Wien 2007)

Hans- Christian ***Reichel***, Hans ***Humenberger***, Dieter ***Litschauer***, Herbert ***Groß***, Vera ***Aue***, Das ist Mathematik 1 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2007)
Hans- Christian ***Reichel***, Hans ***Humenberger***, Dieter ***Litschauer***, Herbert ***Groß***, Vera ***Aue***, Das ist Mathematik 2 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2008)
Hans- Christian ***Reichel***, Hans ***Humenberger***, Dieter ***Litschauer***, Herbert ***Groß***, Vera ***Aue***, Das ist Mathematik 3 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2009)
Hans- Christian ***Reichel***, Hans ***Humenberger***, Dieter ***Litschauer***, Herbert ***Groß***, Vera ***Aue***, Das ist Mathematik 4 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2010)

AHS Oberstufe:

Günther ***Malle***, Esther ***Ramharter***, Andreas ***Ulovec***, Susanne ***Kandl***, Mathematik verstehen 5 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2005)
Günther ***Malle***, Esther ***Ramharter***, Andreas ***Ulovec***, Susanne ***Kandl***, Mathematik verstehen 6 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2005)
Günther ***Malle***, Esther ***Ramharter***, Andreas ***Ulovec***, Susanne ***Kandl***, Mathematik verstehen 7 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2006)
Günther ***Malle***, Esther ***Ramharter***, Andreas ***Ulovec***, Susanne ***Kandl***, Mathematik verstehen 8 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2007)

Stefan ***Götz***, Hans- Christian ***Reichel***, Robert ***Müller***, Günter ***Hanisch***, Mathematik-Lehrbuch 5 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2004)

Hans- Christian ***Reichel***, Robert ***Müller***, Günter ***Hanisch***, Lehrbuch der Mathematik 6 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2002)

Stefan ***Götz***, Hans- Christian ***Reichel***, Robert ***Müller***, Günter ***Hanisch***, Lehrbuch der Mathematik 7 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2004)

Stefan ***Götz***, Hans- Christian ***Reichel***, Robert ***Müller***, Günter ***Hanisch***, Lehrbuch der Mathematik 8 (Österreichischer Bundesverlag, Wien 2005)

14 Lebenslauf

Name:	Julia Nigl
Adresse:	Ahornweg 13, 2074 Unterretzbach
Geburtsdatum:	26. Oktober 1987
Geburtsort:	Horn
Religionsbekenntnis:	Römisch- Katholisch
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Eltern:	Manfred Nigl, Gemeindeangestellter
	Andrea Nigl, Angestellte
Geschwister:	Niklas Nigl, Schüler
Familienstand:	ledig

Schulbildung:

1994- 1998: Volksschule Retz

1998- 2002: Unterstufe des BG/ BRG Hollabrunn

2002- 2006: Europaklasse des BG/ BRG Hollabrunn
Matura am 12. Juni 2006 bestanden.

Hochschulbildung:

seit Oktober 2006: Lehramtsstudium Mathematik und Geschichte, Sozialkunde, Politische Bildung an der Universität Wien