# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Begründen im Geometrieunterricht als standardisierte (Grund-)Kompetenz

Verfasserin

Birgit Strobl

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat)

Wien, im Oktober 2010

| | |
|---|---|
| Matrikel-Nummer: | 0512041 |
| Studienkennzahl lt. Studienblatt: | A 190 406 299 |
| Studienrichtung lt. Studienblatt: | Lehramtsstudium UF Mathematik & UF Psychologie und Philosophie |
| Betreuer: | Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz |

# Abstract

Am Beginn der Arbeit wird die gesetzliche Verankerung der seit 1.1.2009 in Kraft getretenen Bildungsstandards vorgestellt. Neben Informationen darüber, was Bildungsstandards und Kompetenzen eigentlich sind, wird auch erklärt, woran sich Bildungsstandards orientieren. Nach den Funktionen und Zielen soll diese Arbeit auch über Standardsüberprüfungen Aufschluss geben. Dazu gibt es wieder die Ausführung des gesetzlichen Rahmens und einen kurzen Einblick in die Baseline-Testungen, die bereits im vergangenen Jahr durchgeführt wurden und der Weiterentwicklung der Standards dienen sollen. Am Ende des Kapitels findet man eine ausführliche Beschreibung des Kompetenzmodells mit Musteraufgaben.

Ähnlich dem Kapitel über Bildungsstandards werden im nächsten Kapitel der gesetzliche Rahmen, Funktionen und Ziele der zentralen schriftlichen Reifeprüfung beschrieben. Dabei stellt die Sicherung von Grundkompetenzen ein zentrales Ziel dar. Exemplarisch wird geschildert, was bei der zentralen schriftlichen Reifeprüfung verlangt werden wird. Im Anschluss daran gibt es einen Einblick in die Pilotphase, die seit Jänner 2010 im Gange ist. Ergebnisse des ersten Pilottests fließen dabei ein.

Im Anschluss daran werden im folgenden Kapitel die Bildungsstandards der zentralen schriftlichen Reifeprüfung gegenübergestellt. Gemeinsamkeiten und Punkte, in denen sich die beiden Konzepte voneinander unterscheiden, werden herausgearbeitet.

Im nächsten Kapitel wird erörtert, was man unter *Begründen* versteht und warum im Mathematikunterricht begründet werden soll. Neben der Argumentationsbasis werden die Schritte des Beweisprozesses beschrieben und analysiert. An Beispielen kommt zum Ausdruck, dass Begründen und Argumentieren auf sehr viele verschiedene Arten möglich ist. Um selbständig einen Beweis führen zu können, bedarf es gewisser Voraussetzungen, die in diesem Abschnitt behandelt werden. Schließlich folgen Methoden, die das Potenzial besitzen, den Lernenden ein Beweisverständnis zu vermitteln. Dazu zählt auch die Arbeit am Computer mittels dynamischer Geometriesoftware.

Nachdem man im letzten Kapitel über die Ursprünge der Geometrie, die schon

sehr lange zurückliegen, informiert wird, folgen eine Einbettung der Geometrie in den Lehrplan und eine Aufzählung der Ziele, die der Geometrieunterricht ganz allgemein verfolgt. Schließlich und endlich werden konkret geplante Unterrichtsstunden zu den einzelnen Klassenstufen entwickelt, die den Lernenden (Grund-)Kompetenzen vermitteln sollen.

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

Auf der Suche nach einem Diplomarbeitsthema war mir in erster Linie wichtig, dass es in engem Zusammenhang mit meinem zukünftigen Beruf als Lehrerin steht. Da es aufgrund des derzeitigen Mangels an Mathematiklehrer(inne)n und der Überzahl an Psychologie- und Philosophielehrkräften sehr wahrscheinlich ist, mehrheitlich Mathematikstunden zu unterrichten, sah ich einen größtmöglichen Nutzen darin, meine Diplomarbeit in Mathematik zu schreiben.

Da die Geometrie mit ihren vielfältigen und umfassenden Möglichkeiten in fast allen Klassen anzutreffen ist, war es mir ein Anliegen, mich damit näher auseinanderzusetzen.

Mit diesen vagen Vorstellungen ging ich zu meinem Diplomarbeitsbetreuer Prof. Götz. Sein Vorschlag, über das Begründen im Geometrieunterricht in Hinblick auf Zentralmatura und Bildungsstandards zu schreiben, ergab für mich das perfekte Thema.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit werde ich Musterstunden zum Thema Geometrie in den einzelnen Klassenstufen vorbereiten (Kapitel 6), die den Schüler(inne)n (Grund-)Kompetenzen vermitteln sollen, die sowohl in den Bildungsstandards verankert sind, als auch bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung von großer Bedeutung sein werden. Dazu ist es notwendig zu wissen, welche Ziele und Funktionen die beiden Konzepte verfolgen bzw. erfüllen sollen. Kapitel 2 und 3 sollen über die beiden Projekte informieren, in Kapitel 4 werden sie miteinander verglichen. Im Speziellen werden der Aufbau, die Ziele, die Überprüfungen und die Bildungstheoretische Orientierung derselben behandelt. Da Begründen und Argumentieren in beiden Konzepten als zu vermittelnde Kompetenzen gesehen werden, wird das Kapitel 5 über diese Grundkompetenzen Aufschluss geben.

Die Abbildungen in dieser Arbeit sind zum Großteil von mir selbst konstruiert. Die Herkunft der übrigen sind im Abbildungsverzeichnis zu finden.

Schließlich möchte ich hier einen Platz einräumen, um mich bei all jenen Menschen zu bedanken, die mich in verschiedenster Art und Weise unterstützt haben und somit zum Gelingen meiner Diplomarbeit beigetragen haben. Einen wesentlichen Beitrag leisteten meine *Studienkolleg(inn)en*, ohne die ich so manchen Stolperstein im Laufe des Studiums nicht gemeistert hätte und ohne die es erst gar nicht so weit gekommen wäre. *Martin* danke ich für die emotionale Unterstützung, für sein offenes Ohr für permanente Diplomarbeitsbelange und fürs Korrekturlesen. Ein großer Dank gilt meinen *Eltern* für die finanzielle Unterstützung, für das Vertrauen in meinen Erfolg und fürs Korrekturlesen. Die größte Unterstützungsarbeit im Zusammenhang mit meiner Diplomarbeit leistete jedoch *Prof. Stefan Götz*. Er hat sich immer für meine Fragen Zeit genommen und ist mir stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Ihm gilt mein besonderer Dank!

Wien, 15.9.2010 B. Strobl

# Kapitel 2

# Bildungsstandards

> Bildungsstandards formulieren Anforderungen an das Lehren und Lernen in der Schule. Sie benennen Ziele für die pädagogische Arbeit, ausgedrückt als erwünschte Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler. Damit konkretisieren Standards den Bildungsauftrag, den allgemein bildende Schulen zu erfüllen haben. Bildungsstandards greifen allgemeine Bildungsziele auf. Sie benennen die Kompetenzen, welche die Schule ihren Schülerinnen und Schülern vermitteln muss, damit bestimmte zentrale Bildungsziele erreicht werden. Die Bildungsstandards legen fest, welche Kompetenzen die Kinder oder Jugendlichen bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Die Kompetenzen werden so konkret beschrieben, dass sie in Aufgabenstellungen umgesetzt und prinzipiell mit Hilfe von Testverfahren erfasst werden können (Klieme 2007, S. 19).

Im August des Jahres 2008 wurde eine Novellierung des österreichischen Schulunterrichtsgesetzes veröffentlicht, das die Einführung von Bildungsstandards vorschreibt (vgl. §17 Abs. 1a Änderung des Schulunterrichtsgesetzes). Auf der Grundlage dieses Gesetzes trat am 1. Jänner 2009 eine Verordnung in Kraft, welche die Funktionen der Bildungsstandards und das Verfahren ihrer Überprüfung beschreibt. Ebenso beinhaltet dieser Gesetzestext Paragrafen, die den Geltungsbereich regeln und den Begriff der Bildungsstandards bestimmen.

Der Gesetzgeber schreibt für die 4. Schulstufe der Volksschule in Deutsch/Lesen/Schreiben und Mathematik und für die 8. Schulstufe der Volksschuloberstufe, der Hauptschule und der allgemein bildenden höheren Schule in Deutsch, Lebende Fremdsprache (Englisch) und Mathematik Bildungsstandards vor.

Im Sinne dieser Verordnung sind *„Bildungsstandards“* konkret formulierte Lernergebnisse in den einzelnen oder den in fachlichem Zusammenhang stehenden Pflichtgegenständen, die sich aus dem Lehrplan der oben genannten Schularten und Schulstufen ableiten lassen. Diese Lernergebnisse basieren auf grundlegenden Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der jeweiligen Schulstufe in der Regel verfügen sollen. Dabei versteht man unter *„Kompetenzen“* längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die von Lernenden entwickelt werden und die sie befähigen, Aufgaben in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsbewusst zu lösen und die damit verbundene motivationale und soziale Bereitschaft zu zeigen (vgl. §2 Abs. 1 u. 2, 1. Verordnung der Bildungsstandards im Schulwesen).

In Österreich entschied man sich für die Einführung von *Regelstandards*, im Unterschied zu Mindeststandards, da so eine größere Bandbreite der Schüler(innen)leistungen im differenzierten Schulsystem erfasst werden kann. Da die Sekundarstufe I aus der allgemein bildenden höheren Schule und drei Leistungsgruppen der Hauptschule besteht, hätte man den Mindeststandard so niedrig setzen müssen, dass er auch für die 2. und 3. Leistungsgruppe der Hauptschule einen Anreiz zur Erreichung darstellt (vgl. Lucyshyn 2007, S. 77).

## 2.1 Funktionen und Ziele

Anlass für die Entwicklung von Bildungsstandards waren unter anderem internationale Leistungsstudien (insbesondere PISA und TIMSS) und deren als unzureichend angesehenen Ergebnisse in vielen Ländern.

Bei der PISA-Studie (Programme for International Student Assessment), einem gemeinsamen Projekt der OECD-Staaten, werden im Drei-Jahresrhythmus Schülerinnen und Schüler im Alter von 15–16 Jahren in den drei Wissensgebieten Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften getestet. Die Ergebnisse der Jahre 2003 und 2006 zeigen, dass Österreichs Schüler(innen) in allen drei Gebieten nur im Mittelfeld erscheinen. Fast jeder dritte Jugendliche zählt in einem Bereich zu einer Risikogruppe. Dies bedeutet, dass diese Schülerinnen und Schüler gegen Ende der Pflichtschulzeit große Probleme haben, einfachste mathematische Fragestellungen in lebensnahen Situationen zu lösen, nur unzureichend sinnerfassend lesen können oder große Mängel im naturwissenschaftlichen Wissen haben. 10% der getesteten Schüler gehören sogar sowohl in Mathematik und in den Naturwissenschaften, als auch im Bereich des Lesens der Risikogruppe an. Im Vergleich zum Jahr 2003 gibt es kaum Veränderungen (vgl. PISA-Ergebnisse 2006).

Bei der internationalen Studie TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) sehen die Ergebnisse ähnlich aus. Bei diesen Testungen werden Schüler(innen) der 4. Schulstufe auf ihr mathematisches und naturwissenschaftliches Wissen geprüft. Im Jahr 1995 nahm Österreich zum ersten Mal an dieser Studie teil und im Jahr 2007 zum zweiten Mal. Lagen Österreichs Schülerinnen und Schüler der 4. Schulstufe in Mathematik im Jahr 1995 noch im oberen Mittelfeld, so liegt das Ergebnis im Jahr 2007 deutlich schlechter und ist somit bestenfalls noch Mittelmaß. Auch die Ergebnisse aus dem naturwissenschaftlichen Bereich verzeichnen einen erheblichen Leistungsrückgang von 1995 auf 2007 (vgl. TIMSS 2007).

Bildungsstandards zielen auf die Erfüllung der *Orientierungs-*, *Förderungs-* und *Evaluationsfunktion*. Bei der Planung und Durchführung von Unterricht sollen sich Lehrer(innen) an den zu vermittelnden Kompetenzen bezüglich der Bildungsstandards orientieren (Orientierungsfunktion) (vgl. §3 Abs. 1 Z1: 1. Verordnung: Bildungsstandards im Schulwesen). Eine *nachhaltige* Ergebnisorientierung stellt eine zentrale Intention dar. Den inputorientierten Lehrplänen wird ein outputorientiertes Steuerungsinstrument zur Seite gestellt. In den Lehrplänen wird geregelt, was im Unterricht behandelt werden soll (Inputsteuerung). Im Gegensatz dazu legen Standards fest, über welche fachbezogenen Fähigkeiten Schülerinnen und Schüler am Ende einer bestimmten Schulstufe verfügen sollen (Outputsteuerung) (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 3).

Bildungsstandards stehen somit in engem Zusammenhang mit dem Lehrplan und der darauf basierenden Unterrichtsarbeit der Lehrer und Lehrerinnen.

Unter Zugrundelegung der Bildungsstandards sollen die Leistungen der Schülerinnen und Schüler beobachtet und analysiert werden. Auf Äußerungen und Fehler der Schülerinnen und Schüler soll bewusst und gezielt geachtet werden. Auf Basis des Vergleichs der zu erlangenden und individuell erworbenen Kompetenzen soll eine bestmögliche individuelle Förderung der Schülerinnen und Schüler sichergestellt werden (Förderungsfunktion).

Eine Standardisierung zielt außerdem auf die Vergleichbarkeit und Messbarkeit der erreichten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler, um sie so innerhalb österreichweiter Anforderungen vergleichbar machen zu können (vgl. Erläuterungen zu den Bildungsstandards).

Standards erfüllen eine empirisch - diagnostische Funktion, die darin besteht, zu verschiedenen Zeiten empirische Befunde zu liefern, wie der Output tatsächlich aussieht (Outputkontrolle) (vgl. Götz & Peschek 2009, S. 163). Durch diese vom Gesetzgeber vorgeschriebenen periodischen Standardsüberprüfungen wird die Evaluationsfunktion erfüllt (vgl. §3 Abs. 1 Z2 u. 3: 1. Verordnung: Bildungsstandards im Schulwesen).

Laut §3 der 1. Verordnung der Bildungsstandards im Schulwesen sollen diese Aufschlüsse über den Erfolg des Unterrichts und über Entwicklungspotentiale des österreichischen Schulwesens liefern. Standardstests liefern für die beteiligten Klassen Informationen darüber, wie die jeweiligen Klassen im österreichweiten Vergleich, sowie im Vergleich zu anderen Klassen mit ähnlichen Rahmenbedingungen bei den einzelnen Testaufgaben abgeschnitten haben. Eine Diagnose dahingehend, ob landesweit besondere Stärken oder Schwächen hinsichtlich bestimmter Ausprägungen der Inhalts-, Handlungs- bzw. Komplexitätsdimension[1] vorliegen, betrifft die Ebene des Bildungssystems. Lehrplanänderungen, neue Unterrichtsmaterialien (Schulbücher) oder Maßnahmen in der Lehrer(innen)fortbildung und -ausbildung sind Möglichkeiten auf die Testergebnisse zu reagieren (vgl. Götz & Peschek 2009).

Bildungsstandards sind somit neue Elemente der Qualitätssicherung und

[1] siehe dazu 2.4

Qualitätsentwicklung im Schulwesen (vgl. Lucyshyn & Specht 2008, S. 319).

## 2.2 Standardsüberprüfungen

Standardsüberprüfungen werden an öffentlichen und mit dem Öffentlichkeitsrecht ausgestatteten Schulen der oben genannten Schularten und Pflichtfächer im Abstand von *drei* Jahren durchgeführt. Durch die gestellten Aufgaben, die sich aus den Bildungsstandards ableiten lassen, wird die Kompetenzerreichung der Schüler(innen) gemessen. Die erworbenen Kompetenzen sollen mit den angestrebten Lernergebnissen verglichen werden (vgl. §4: 1. Verordnung: Bildungsstandards im Schulwesen).

Von der „Outputkontrolle" erwartet man verlässliche Befunde über landesweite, schul- und auch klassenspezifische Stärken und Schwächen österreichischer Schülerinnen und Schüler. Diese wiederum können eine Grundlage für zielgerichtete Bemühungen und Maßnahmen zur entsprechenden Weiterentwicklung des Unterrichts sein (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 3).

Die Ergebnisse von Standardsüberprüfungen müssen den betroffenen Lehrer(innen) und der Schulleitung angemessen und informativ rückgemeldet werden, sodass sie für die Qualitätsentwicklung in den Schulen nutzbringend verwendet werden können (vgl. Erläuterungen zu den Bildungsstandards). Konkrete Maßnahmen zur Qualitätsentwicklung könnten zum Beispiel die Abhaltung pädagogischer Konferenzen oder Fachlehrer(innen)konferenzen, die Ausarbeitung von methodisch-didaktischen Konzepten oder von Konzepten für Weiterbildungsmaßnahmen für Lehrer(innen) und methodisch-didaktischer Erfahrungsaustausch sein (vgl. Bildungsstandards in Mathematik). Die individuellen Ergebnisse der Standardsüberprüfung dürfen nicht auf eine(n) bestimmte Schüler(in) zurückgeführt werden können, außer durch diese oder diesen selbst (vgl. §4: 1. Verordnung: Bildungsstandards im Schulwesen).

Die Kompetenzmessungen decken nicht den gesamten Lehrstoff einzelner Unterrichtsgegenstände ab. Daher können und dürfen sie nicht als Grundlage für die Beurteilung der Leistungen von Schülern und Schülerinnen herangezogen werden. Bildungsstandards richten sich primär an den Lehrer und die Lehrerin, um kompetenzorientierten Unterricht sowie kompetenzorientierte Förderung sicher zu stellen (vgl. Erläuterungen zu den Bildungsstandards). Im Zuge der Überprüfung erhalten die Lehrkräfte Feedback über die Wirkung ihres Unterrichts. Diese Ergebnisrückmeldungen könnten Anreiz für Selbstreflexion und Veränderung sein (vgl. Lucyshyn & Specht 2008, S. 318).

Die mathematischen Standards sind als Regelstandards konzipiert, das heißt, dass durchschnittliche Schülerinnen und Schüler im Stande sein sollten, die entsprechenden Aufgaben „in der Regel" erfolgreich zu lösen (vgl. Götz & Peschek 2009, S. 165). Diese Regelstandards beschreiben Ausprägungen von mathematischen Kompetenzen, welche die Schüler(innen) bis zur 8. Schulstufe entwickelt haben sollen (vgl. Lucyshyn 2007, S. 77).

In der 8. Schulstufe haben bereits im April und Mai 2009 im Rahmen so genannter *Baseline-Testungen* Überprüfungen der Bildungsstandards in den Gegenständen Deutsch, Englisch und Mathematik stattgefunden. An diesem Test haben insgesamt 205 Schulen und 10 843 Schüler(innen) teilgenommen, die nach dem Prinzip einer geschichteten Zufallsstichprobe ausgewählt wurden. Diese Baseline-Testung in der Sekundarstufe I verfolgt Ziele, die auf langfristige Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung im österreichischen Schulwesen ausgerichtet sind. Ausgangsdaten für die ab 2011/2012 regelmäßig stattfindenden, gesetzlich verankerten Standardsüberprüfungen werden damit geliefert. Ergebnisse dazu wird es aufgrund der großen Anzahl von offenen Antwortformaten und der daraus resultierenden Bearbeitungszeit erst im kommenden Jahr geben (vgl. Baseline-Testung).

## 2.3 Bildungstheoretische Orientierung

Orientierung für die Auswahl von Standards gaben neben dem Lehrplan und Erfahrungen und Einschätzungen von Lehrerinnen und Lehrern vor allem der bildungstheoretische Rahmen (vgl. Peschek 2008, S. 636). Letzterer besteht aus zwei einander ergänzenden Anforderungen, der *Lebensvorbereitung* und der *Anschlussfähigkeit*.

Bei der Lebensvorbereitung geht es darum, die Schüler(innen) auf das Leben in unserer Gesellschaft vorzubereiten und ihnen das Rüstzeug mitzugeben, das für eine selbstbestimmte und aktive Teilnahme am Leben in dieser Gesellschaft notwendig ist. Mathematische Standards, die sich an der Lebensvorbereitung orientieren, werden sich nicht auf operative Aspekte der Mathematik beschränken können, sondern müssen sich auf konstruktive (z. B. Modellbilden) und kommunikative Aspekte der Mathematik (Darstellen, Interpretieren, Begründen) konzentrieren, diese reflektieren und vernetzen. Gefordert wird eine flexible Anwendung grundlegenden Wissens und Könnens auf vielfältige, auch weniger vertraute Situationen.

Die Anschlussfähigkeit fokussiert auf mathematisches Wissen und Können als Grundlage für eine weitere mathematische Ausbildung. Sowohl in weiterführenden Schulen als auch in der Berufsausbildung und in späteren Berufen werden aufbauende mathematische Anforderungen auftreten (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 8).

## 2.4 Das Kompetenzmodell

Im Jahr 2007 hat das österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik, welches ihren Sitz an der Universität Klagenfurt hat, die Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schüler(innen) am Ende der 8. Schulstufe herausgegeben.

Im Zentrum dieses Werks steht das Modell für mathematische Kompetenzen.

Unter Kompetenzen versteht man längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen. Mathematische Kompetenzen kann man sich modellhaft als dreidimensionale Konstrukte vorstellen, die sich auf mathematische Tätigkeiten, auf mathematische Inhalte und auf die Art und Komplexität der erforderlichen Vernetzung beziehen (vgl. Peschek 2008). Sie haben somit eine Handlungsdimension (auf welche Art von Tätigkeit sie sich beziehen), eine Inhaltsdimension (auf welche Inhalte sie sich beziehen, also womit etwas getan wird) und eine Komplexitätsdimension (bezieht sich auf die Art und den Grad der Vernetzung).

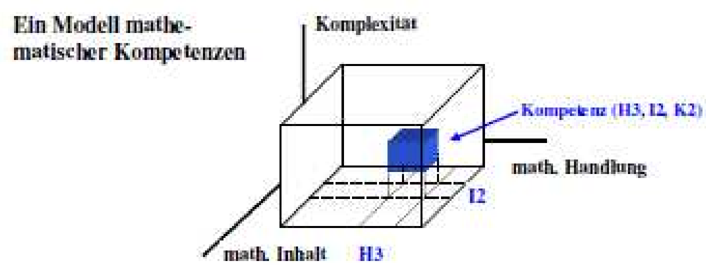


Abbildung 2.1: Kompetenzmodell

Eine spezifische mathematische Kompetenz wird somit durch ein Tripel eines bestimmten Handlungsbereichs, eines bestimmten Inhaltsbereichs und eines bestimmten Komplexitätsbereichs charakterisiert und festgelegt (z. B. (H3,I2,K2))[2] (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 9).

### 2.4.1 Die Handlungsdimension

Auf welche Art von Tätigkeit sich mathematische Kompetenzen beziehen, wird in der Handlungsdimension festgelegt. Für die mathematischen Standards am Ende der 8. Schulstufe wurden folgende vier zentrale Tätigkeiten bzw. Tätigkeitsbereiche identifiziert und als gleich bedeutsame Handlungsbereiche festgehalten:

- H1 Darstellen und Modellbilden
- H2 Rechnen und Operieren
- H3 Interpretieren
- H4 Argumentieren und Begründen

[2]siehe dazu auch 2.4.1–2.4.3

**Darstellen und Modellbilden**

Dem Standardskonzept österreichischer Schüler(innen) am Ende der 8. Schulstufe zufolge versteht man unter **„Darstellen“** die Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform.

**„Modellbilden“** erfordert über das Darstellen hinaus in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen, Annahmen zu treffen und Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 11).

Im Standardskonzept für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schüler(innen) am Ende der 8. Schulstufe werden die Standards exemplarisch durch Beispielaufgaben konkretisiert. Dem Handlungsbereich „Darstellen und Modellbilden“ wird unter anderem folgendes Beispiel zugeordnet.

**Gardasee**

Im Ausschnitt einer Karte ist der Gardasee zu erkennen:

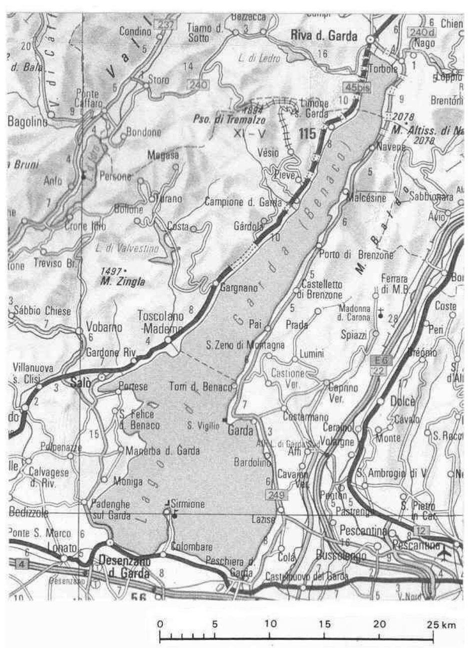


Abbildung 2.2: Gardasee

**Aufgabe:** Schätze mit Hilfe des Maßstabes den Flächeninhalt des Gardasees! (Hinweis: Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir dies bei deiner Schätzung hilft.)

**Lösung:** Der Flächeninhalt des Gardasees beträgt ca...... $km^2$.

Durch die Zerlegung der geometrischen Figur „Gardasee“ in einfache geometrische Figuren, wie z. B. zwei Rechtecke, lässt sich der Flächeninhalt ermitteln. Die Aufgabe erfordert die Auswahl von geeigneten mathematischen Modellen (geometrischen Figuren) sowie passender Mittel wie den Maßstab zur Abschätzung des Flächeninhalts (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 74).

### Rechnen und Operieren

Beim **„Rechnen“** geht es einerseits um die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen und andererseits um die regelhafte Umformung symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte.

**„Operieren“** meint allgemeiner und umfassender die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 11).

Eine Aufgabe zu diesem Handlungsbereich, wie sie auch im Konzept der Standards vorkommt könnte lauten:

**Gerade**
Gegeben ist eine Gerade $g$ und ein Punkt $P$.

**Aufgabe:** Konstruiere eine Gerade $h$, die normal zur Geraden $g$ durch den Punkt $P$ verläuft (vgl Heugl & Peschek 2007, S. 77).

**Lösung:**

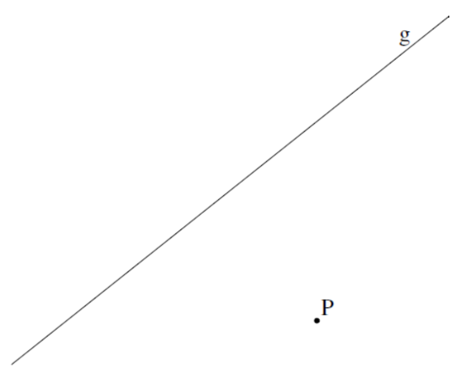


Abbildung 2.3: Gerade

Die Aufgabe erfordert das Konstruieren einer Normalen auf eine gegebene Gerade durch einen gegebenen Punkt, wobei geometrisches Konstruieren eine operative Tätigkeit ist.

#### Interpretieren

Nach Heugl & Peschek 2007, S. 12, versteht man unter **„Interpretieren"**, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten.

**Kegel**
Die angegebene Figur zeigt einen Kegel.

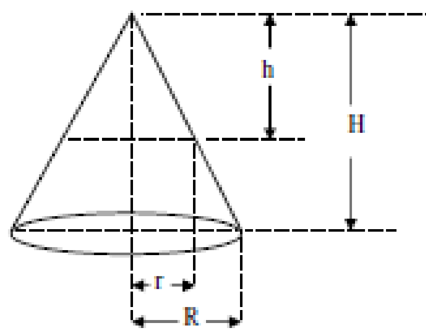


Abbildung 2.4: Kegel

**Aufgabe:** Was wird durch $\frac{\pi}{3}\left(R^2H - r^2h\right)$ berechnet (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 85)?

**Lösung:** ...

Die Lösung der Aufgabe erfordert, in einer symbolischen Darstellung Zusammenhänge zu erkennen und diese im gegebenen Kontext zu deuten und gehört somit dem Handlungsbereich „Interpretieren" an.

#### Argumentieren und Begründen

**„Argumentieren"** meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise / Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften / Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache.

Unter **Begründen** versteht man die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen / Entscheidungen führt (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 12).

**Flächeninhalt**
Claudia findet in einem Schulbuch folgende Grafik eines Trapezes $ABCD$:

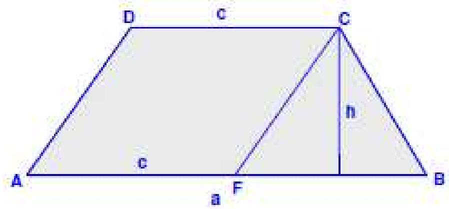


Abbildung 2.5: Trapez

Darunter wird eine Formel für den Flächeninhalt angegeben:

$$A = c \cdot h + \frac{(a - c) \cdot h}{2}$$

**Aufgabe:** Erkläre die angegebene Formel (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 91)!

Diese Aufgabe verlangt die mathematische Begründung (Argumentationskette) einer Formel.

Dieser letzte Handlungsbereich wird im Rahmen meiner Diplomarbeit einen zentralen Stellenwert einnehmen.

### 2.4.2 Die inhaltliche Dimension

Die Inhalte wurden unter Bedachtnahme auf den derzeit gültigen Lehrplan ausgewählt und nach innermathematischen Gesichtspunkten zu folgenden vier Inhaltsbereichen zusammengefasst:

- I1 Zahlen und Maße
- I2 Variable, funktionale Abhängigkeiten
- I3 Geometrische Figuren und Körper
- I4 Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Dem Inhaltsbereich 3 wird im Rahmen meiner Arbeit eine besondere Aufmerksamkeit zukommen. Dieser Bereich sieht für den Mathematikunterricht eine Auseinandersetzung mit grundlegenden geometrischen Begriffen, einfachen geometrischen Figuren und Körpern und deren Eigenschaften und Darstellung vor (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 13).

### 2.4.3 Die Komplexitätsdimension

Mathematische Anforderungen, bzw. die zu ihrer Bewältigung erforderlichen Kompetenzen können sich nicht nur hinsichtlich der erforderlichen Handlungen und hinsichtlich des mathematischen Inhalts, sondern auch in Bezug auf die zu bewältigende Komplexität unterscheiden. Die Komplexitätsdimension bezieht sich auf die Anzahl und Verknüpfung der Denkschritte, die zur Bearbeitung einer Aufgabe erforderlich sind (vgl. Lucyshin 2007, S. 76). Man entschied sich für die Sekundarstufe I in dieser Dimension für drei Abstufungen (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 14).

Problemstellungen der erste Stufe *„K1 Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten“* erfordern lediglich die direkte Anwendung eines Begriffes, Satzes oder Verfahrens bzw. die Ausführung einer elementaren mathematischen Tätigkeit.

Bei Aufgabenstellungen des Komplexitätsniveaus *„K2 Herstellen von Verbindungen“* wird eine geeignete Kombination und Vernetzung mehrerer mathematischer Begriffe, Sätze oder Tätigkeiten gefordert.

Andere Aufgaben, die ein Nachdenken über Eigenschaften und Zusammenhänge, die am gegebenen mathematischen Sachverhalt nicht unmittelbar erkennbar sind, erfordern (Reflektieren), fallen in den Komplexitätsbereich 3 *„Einsetzen von Reflexionswissen und Reflektieren“*. Reflektieren umfasst das Nachdenken über eine mathematische Vorgehensweise, über Vor- und Nachteile von Darstellungen/Darstellungsformen bzw. über mathematische Modelle im jeweiligen Kontext, sowie das Nachdenken über Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen.

Reflexionswissen ist ein Wissen über Mathematik, das sich anhand entsprechender Nachdenkprozesse entwickelt. Reflexionswissen kann sichtbar werden durch Dokumentation von Lösungswegen, durch entsprechende Entscheidungen oder durch entsprechende Argumentationen und Begründungen (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 14). Von der Komplexität zu unterscheiden ist der Begriff der *Schwierigkeit*. Ob etwas als schwierig empfunden wird, hängt sehr wesentlich von den Vorkenntnissen und Vorerfahrungen des einzelnen Schülers/der einzelnen Schülerin ab und ist somit individuumsbezogen (vgl. Lucyshin 2007, S. 76).

# Kapitel 3

# Zentralmatura

Am 17. November 2009 wurde vom Nationalrat ein Gesetz verabschiedet, das die Einführung einer standardisierten, kompetenzorientierten (schriftlichen) Reifeprüfung („Zentralmatura") in der AHS ab dem Schuljahr 2013/2014 und für die BHS ab dem Schuljahr 2014/2015 vorschreibt. Wie auch bei den Bildungsstandards sollen die zentralen Aufgabestellungen bei den abschließenden Prüfungen zu einer stärkeren und nachhaltigeren Ergebnisorientierung der Planung und Durchführung von Unterricht führen.

Die Vorarbeiten auf dem Weg zu einer standardisierten Reifeprüfung, wie zum Beispiel die Entwicklung von Aufgabenbeispielen und die Information und Betreuung der Pilotschulen, werden vom BIFIE (Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens) in Zusammenarbeit mit dem fachdidaktischen Kompetenzzentren (AECC) an der Universität Klagenfurt (Mathematik und Deutsch) und dem Fachdidaktikzentrum für Naturwissenschaften West der Universität Innsbruck unter Einbeziehung von Praktikerinnen und Praktikern geleistet (vgl. BIFIE, Neue Reifeprüfung).

Am 13.7.2008 wurde zwischen dem Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (vertreten durch das BIFIE) und dem AECC-M (Austrian educational competence centre for mathematics), dem österreichischen Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik, ein Werkvertrag abgeschlossen, in dem das AECC-M mit der Konzeption, Vorbereitung, Durchführung, Begleitung, Unterstützung und Evaluation eines Schulversuchs „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik" an AHS betraut worden ist. Dabei soll die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik anhand zentral gestellter Aufgaben erfolgen (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 3).

## 3.1 Funktionen und Ziele

Anlass für die Entwicklung einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik gaben unter anderem die Kritikpunkte an der traditionellen Reifeprüfung. Zum einen ist die *mangelnde Vergleichbarkeit* zu nennen. Die traditionelle schriftliche Reifeprüfung (sRP) wird von den jeweiligen Lehrerinnen und Lehrern individuell unterschiedlich gestaltet und die Leistungen der Maturant(inn)en sehr unterschiedlich bewertet. Dadurch sind die Anforderungen und Bewertungen der sRP bei verschiedenen Lehrer(inne)n kaum miteinander vergleichbar. Ein gemeinsames geteiltes mathematisches Wissen und Können ist dadurch ebenso wenig identifizierbar. In engem Zusammenhang damit steht die Objektivität der Beurteilung, die im Rahmen der traditionellen Reifeprüfung nicht, bzw. nur unzureichend gegeben ist.

Ein zentraler Kritikpunkt ist weiters die deutliche *Dominanz des Operativen* und einer rezeptartigen Reproduktion. Sowohl bei Schularbeiten als auch bei der traditionellen sRP werden vorrangig kurzfristig verfügbare mathematische Fähigkeiten abgeprüft. Seltener werden Kompetenzen, also längerfristig verfügbare Fähigkeiten und Dispositionen, verlangt.

Diesen Kritikpunkten der traditionellen sRP soll in einer zentralen sPR Rechnung getragen werden. Bei einer sRP, bei der die Aufgaben zentral gestellt werden, wird ein Teil der Leistungsanforderungen vereinheitlicht. So wird eine bundesweite objektive Leistungsanforderung geschaffen.

Durch die zentrale Bewertung der Arbeiten könnte auch eine Objektivität bezüglich der Beurteilung erreicht werden. Diese ist durch klassenfremde Begutachter(innen), durch Zweitbegutachter(innen) oder auch durch kontrollierte Begutachtungen durch die Klassenlehrer(innen) auf der Basis von genauen Korrekturanleitungen[1] möglich.

Bei der neuen sRP in Mathematik werden grundlegende mathematische Fähigkeiten geprüft, die allen Schüler(inne)n längerfristig verfügbar sein sollen. Diese Kompetenzen werden im Projekt der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung als *„Grundkompetenzen“* bezeichnet. Somit ist das wesentliche Ziel einer zentralen sRP aus Mathematik die Sicherung mathematischer Grundkompetenzen für alle österreichischen Maturant(inn)en (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 3).

## 3.2 Bildungstheoretische Orientierung

Für die Identifizierung von Grundkompetenzen, die bei der sRP einen zentralen Stellenwert einnehmen werden, sind neben dem Lehrplan für den Mathematikunterricht an der AHS vor allem bildungstheoretische Überlegungen leitend.

Das Kernstück der bildungstheoretischen Orientierung der zentralen sRP bildet, wie auch bei den Bildungsstandards der 8. Schulstufe, die *Lebensvorbereitung*.

Lebensvorbereitung in weiterführenden Schulen meint die Befähigung zur Kommunikation mit Expert(inn)en und der Allgemeinheit. Die Schüler(innen) sollten in der Lage sein, sich Meinungen von Expert(inn)en einzuholen, diese zu verstehen, Expertisen verständlich zu erklären und Vorschläge für die Bewertung und Integration von Expert(inn)enmeinungen zu entwickeln. Eine solche

[1] siehe dazu auch 1. Pilottest

Kommunikationsfähigkeit wird als entscheidendes Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten und daran gebundener Kompetenzen gesehen.

Für die Verständigung mit Expert(inn)en sind fundierte Kenntnisse bezüglich grundlegender (mathematischer) Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete notwendige Voraussetzungen. Dies wird im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik als „Grundwissen“ bezeichnet. Zusätzlich zum Grundwissen soll den Schülerinnen und Schülern in höheren Schulen Reflexionswissen vermittelt werden, um Expert(inn)enmeinungen zu beurteilen und in den jeweiligen Problemkontext zu integrieren.

Im Mathematikunterricht können neben dem numerischen Taschenrechner auch andere elektronische Medien zum Einsatz kommen. Dadurch werden komplexere Operationen auf das Medium ausgelagert und eine Schwerpunktverlagerung vom Operieren zum Nutzen von Grundwissen und zum Reflektieren ist möglich. Elektronische Medien unterstützen auch die Visualisierung abstrakter Objekte und Beziehungen[2].

Der Mathematikunterricht an weiterführenden Schulen sollte bildungstheoretisch nicht als bloße Weiterführung des Mathematikunterrichts der Pflichtschule – nur mit anderen Inhalten – begründet werden. Neben neuen Inhalten, die die Kommunikation mit Expert(inn)en erleichtern, und einem verstärkten Einsatz von Computertechnologie sind es vor allem höhere Ansprüche hinsichtlich Reflexion und Kommunikation, die den Mathematikunterricht an höheren Schulen von jenem in der Pflichtschule unterscheidet.

Die sRP wird auf ein reflektiertes Grundwissen und dessen flexible Nutzung (vor allem in Kommunikationssituationen) fokussieren.

## 3.3 Das Projekt

An ausgewählten Pilotschulen wird im Schuljahr 2011/2012 die Neue Reifeprüfung als Schulversuch durchgeführt. Orientiert am zentralen Ziel der Sicherung von Grundkompetenzen werden dabei grundlegende mathematische Fähigkeiten getestet, die allen Schülerinnen und Schülern langfristig verfügbar sein sollen. Die zentrale sRP wird vier Stunden dauern und sich in zwei Teile gliedern.

Der *erste Teil* fokussiert auf Grundkompetenzen, wobei weder Eigenständigkeit noch die Fähigkeit zur selbständigen Anwendung des Wissens und Könnens erforderlich sind.

Die Aufgaben im *zweiten Teil* zielen ebenfalls auf Grundkompetenzen ab, sie erfordern jedoch eine selbständige Anwendung derselben in weniger vertrauten Situationen. Auch weitgehende Reflexionen und umfassendere, übergreifende und aufwändigere Problemstellungen als im ersten Teil werden gefordert (vgl. BIFIE, Neue Reifeprüfung in Mathematik).

[2] siehe dazu auch 5.7 Beweisen mittels dynamischer Geometriesoftware

Ähnlich wie bei den Bildungsstandards werden vier Inhaltsbereiche unterschieden:

- Algebra und Geometrie
- Funktionale Abhängigkeiten
- Analysis
- Wahrscheinlichkeit und Statistik

Zu jedem dieser Inhaltsbereiche wurden *Grundkompetenzen* identifiziert. In der Trigonometrie, die dem Inhaltsbereich „Algebra und Geometrie“ angehört, werden folgende Grundkompetenzen gefordert:

- Definitionen von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ im rechtwinkeligen Dreieck kennen und einsetzen können,
- Rechtwinkelige Dreiecke mithilfe dieser Definitionen auflösen können,
- Definitionen von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ für $\alpha > 90°$ kennen und einsetzen können.

Eine typische Aufgabe zu diesem Inhalts- und Kompetenzbereich, wie sie auch im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung vorkommt (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 17), lautet folgendermaßen:

**Schatten**
Die Sonnenstrahlen treffen unter einem Winkel von $\alpha$ auf die Erdoberfläche und bewirken, dass ein Kirchturm der Höhe $h$ einen Schatten der Länge $s$ wirft.

**Aufgabenstellung:** Geben Sie eine Formel an, mit der man bei bekanntem Einfallswinkel $\alpha$ und bekannter Schattenlänge $s$ die Höhe $h$ des Kirchturms ermitteln kann!

Diese Aufgabe kann man dem ersten Teil einer schriftlichen Reifeprüfung zuordnen, da sie keine selbständige Anwendung in weniger vertrauten Situationen erfordert.

Anders ist dies bei folgender Aufgabe, die dem zweiten Teil angehört (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 21).

**Trapez:**
Gegeben sei die Formel für die Fläche des Trapezes:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

**Aufgabenstellung:** Erläutern Sie, wie man aus der angegebenen Formel Flächenformeln für drei andere bekannte ebene Figuren erhalten kann!

Der zentralen sRP im Mai 2012 im Schulversuch geht eine Pilotphase voraus, die seit Jänner 2010 im Gange ist. Diese umfasst unter anderem die Betreuung und Beratung der Pilotschulen durch regionale Arbeitsgruppen. Durch die Kooperation mit den Lehrerinnen und Lehrern sollen Grundkompetenzen und prototypische Aufgaben ausgehandelt, weiterentwickelt und konkretisiert werden. Im Rahmen dieser Pilotphase gibt es vier Pilottests an betreuten und vier Vergleichstests an nicht betreuten Schulen (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 53).

In der Woche vom 1.–5. März 2010 wurde der erste Pilottest an den Pilotschulen und in den Vergleichsschulen in den beiden Folgewochen zu den Inhalten der 5. Klasse durchgeführt. Beteiligt daran haben sich 20 Pilotschulen mit 49 Klassen und 994 Schüler(inne)n (vgl. Ergebnisse, 1. Pilottest). Außerdem wurden auch acht Vergleichsschulen mit 21 Klassen und 369 Schüler(inne)n getestet (vgl. Ergebnisse, 1. Pilottest in den Vergleichsschulen).

In allen Klassen wurden zwei verschiedene Testhefte *A1* und *B1* ausgegeben mit jeweils zehn Aufgaben zu den Inhalten des Lehrplans der 5. Klasse AHS. Zwei der zehn gestellten Aufgaben beider Testhefte gehören dem Bereich der Trigonometrie an.

Die Aufgabe „**Winkelbeispiele**“ des ersten Pilottests lautet wie folgt:

In der folgenden Tabelle sind in jeder Zeile zwei Bedingungen für einen Winkel angegeben.

**Aufgabenstellung**: Geben Sie in jeder Zeile einen konkreten Wert für den Winkel so an, dass beide in dieser Zeile angegebenen Bedingungen erfüllt sind (vgl. Testheft *A 1*)!

| Bedingungen | | Winkelbeispiel |
|---|---|---|
| $\sin(\alpha) > 0$ | $\cos(\alpha) > 0$ | $\alpha =$ |
| $\sin(\beta) = 0$ | $\cos(\beta) < 0$ | $\beta =$ |
| $\sin(\gamma) = 0{,}5$ | $\cos(\gamma) > 0$ | $\gamma =$ |
| $\sin(\delta) > 0{,}5$ | $\cos(\delta) < 0$ | $\delta =$ |

Abbildung 3.1: Winkelbeispiele

Die Lehrerinnen und Lehrer erhielten eine Korrekturanleitung zu den beiden Testheften mit Hilfe derer sie die Arbeiten der Schülerinnen und Schüler korrigieren mussten.

Im Falle der Aufgabe „Winkelbeispiele“ sieht die Korrekturanleitung so aus:

**Lösung**:

| Bedingungen | | Winkelbeispiel | weitere Lösungen für $\alpha < 360°$: |
|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha) > 0$ | $\cos(\alpha) > 0$ | $\alpha = 42°$ | $0° < \alpha < 90°$ |
| $\sin(\beta) = 0$ | $\cos(\beta) < 0$ | $\beta = 180°$ | |
| $\sin(\gamma) = 0{,}5$ | $\cos(\gamma) > 0$ | $\gamma = 30°$ | |
| $\sin(\delta) > 0{,}5$ | $\cos(\delta) < 0$ | $\delta = 112°$ | $90° < \delta < 150°$ |

Abbildung 3.2: Korrekturanleitung

**Bemerkung:** Die Aufgabe gilt auch dann als richtig gelöst, wenn mehrere geeignete Winkel bzw. ein geeignetes Intervall angegeben werden (vgl. Korrekturanleitung *A 1*).

Dieser erste Pilottest wurde in der Regel ohne besondere Vorbereitung durchgeführt und ist daher als eine Erhebung der Ist-Situation gedacht. Die Ergebnisse der Pilot-und Vergleichsschulen sehen sehr ähnlich aus und die Testergebnisse stützen die Annahme der Projektgruppe, dass die österreichischen Schüler(innen) bei den Grundkompetenzen zum Teil beträchtliche Defizite aufweisen. Die Aufgabe „Winkelbeispiele“ wurde zum Beispiel von nur 21% der 508 Schüler(innen), die das Testheft *A 1* erhielten, richtig gelöst (vgl. Ergebnisse, 1. Pilottest). Auch in den Vergleichsschulen konnten diese Aufgabe nur 27% der 194 Schüler(innen) richtig lösen (vgl. Ergebnisse, 1. Pilottest in den Vergleichsschulen).

Die Auswertungen der Tests, die die Klassenlehrer(innen) durchführten, werden von den Mitarbeiter(inne)n überprüft und die Ergebnisse mit den jeweiligen Klassenlehrer(inne)n besprochen und im Hinblick auf zielführende unterrichtliche Maßnahmen diskutiert. Drei weitere Pilottests mit entsprechender Vor- und Nachbereitung sollen im Oktober 2010 (zu den Inhalten der 5. und 6. Klasse), im Oktober 2011 (zu den Inhalten der 5., 6. und 7. Klasse) und im Februar 2012 (zu den Inhalten der 5.–8. Klasse) durchgeführt werden.

# Kapitel 4

# Bildungsstandards – Zentralmatura

Eine Gemeinsamkeit der *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schüler(innen) am Ende der 8. Schulstufe* und der *standardisierten (kompetenzorientierten) schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik* liegt schon in den Wurzeln bzw. in der Projektentwicklung. Das österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik wurde unter anderem mit der Konzeption und Explizierung der Standards bzw. Grundkompetenzen und der Entwicklung prototypischer Aufgaben für beide Projekte betraut.

Ein zentrales Ziel einer standardisierten Reifeprüfung ist eine stärkere Objektivität, wodurch Bildungsabschlüsse besser vergleichbar werden. Standardsüberprüfungen am Ende der 8. Schulstufe zielen ebenfalls auf die österreichweite Vergleichbarkeit und Messbarkeit der erreichten Kompetenzen der Schüler(innen). Die Aufgabenstellungen bei den abschließenden Prüfungen sollen also zu einer nachhaltigen Ergebnisorientierung der Planung und Durchführung von Unterricht führen. Durch die Einführung von Standards und die Etablierung von Kompetenzen soll also gewährleistet werden, dass Objektivität, Transparenz und Vergleichbarkeit erhöht werden.

Im Zentrum beider Konzepte steht die Sicherung von *mathematischen Kompetenzen*, die im Falle der Zentralmatura als *Grundkompetenzen* bezeichnet werden. Dadurch soll bei Schüler(inne)n sowohl am Ende der 8. Schulstufe, als auch bei der Reifeprüfung ein gemeinsam geteiltes Wissen und Können gewährleistet werden. Gegenstand von Standardsüberprüfungen und schriftlichen Reifeprüfungen sind jene kognitiven Fähigkeiten, die *allen* Schüler(inne)n *längerfristig* verfügbar sein sollen ((Grund-)Kompetenzen), und die befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben.

Eine Grundlage für die Identifizierung von (Grund-)Kompetenzen gab die *Bildungstheoretische Orientierung* unter Bedachtnahme auf den derzeit gültigen Lehrplan. In beiden Konzepten werden die Inhalte unter Berücksichtigung der derzeit gültigen Lehrpläne nach innermathematischen Gesichtspunkten zu vier

Inhaltsbereichen zusammengefasst. Bildungstheoretische Orientierungen zu den einzelnen Inhaltsbereichen und die Lehrpläne sind leitend für die Auswahl der Inhalte und der daran gebundenen Kompetenzen.

Bei der Identifikation und Festlegung von Standards ist die *Lebensvorbereitung* ein entscheidendes Orientierungsprinzip. In der Pflichtschule versteht man darunter die Ausstattung der Schüler(innen) mit jenem Wissen und Können, das für eine selbstbestimmte und aktive Teilnahme am Leben in unserer Gesellschaft wichtig ist. An weiterführenden Schulen ist dies die Kommunikation mit Expert(inn)en, für die Grund- und Reflexionswissen erforderlich ist. Bildungstheoretisch zeichnet sich der Mathematikunterricht an höheren Schulen (AHS-Oberstufe bzw. BHS) im Vergleich zur Pflichtschule durch höhere Anforderungen hinsichtlich Reflexion, Kommunikation und einem verstärkten Einsatz von Computertechnologie aus. Die *Anschlussfähigkeit*, ein zweites Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten und Kompetenzen, meint in der AHS-Unterstufe, der Hauptschule und der KMS die Vorbereitung auf eine weiterführende Schule oder auf die mathematische Anforderungen in einer späteren Berufsausbildung oder im Beruf.

Die Anschlussfähigkeit ist natürlich auch in der AHS-Oberstufe und BHS von großer Bedeutung. In der AHS sollen die Lernenden ein mathematisches Niveau erreichen, das für bestimmte Studienrichtungen an den Universitäten und Fachhochschulen vorausgesetzt wird. Die Ausbildung an Berufsbildenden höheren Schulen zielt desweiteren auch auf Berufe, in denen mathematisches Wissen angewandt werden muss. Man denke dabei nur an höhere technische Lehranstalten oder Handelsakademien.

Im Kompetenzmodell der Bildungsstandards wird explizit zwischen Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsbereich unterschieden (siehe Abschnitt 2.4).

Handlungs- und Komplexitätsbereiche werden im Konzept der Zentralmatura nicht so konkret herausgearbeitet, implizit kommen sie jedoch sowohl in der allgemeinen Bildungstheoretischen Orientierung als auch in der zu den einzelnen Inhaltsbereichen und in den prototypischen Aufgaben zum Ausdruck.

Ein entscheidender Unterschied zwischen der Zentralmatura und den Bildungsstandards liegt in der *Leistungsbeurteilung*. Der zentralen schriftlichen Reifeprüfung müssen die Festlegungen der Beurteilungsstufen bzw. Noten der Leistungsbeurteilungsverordnung zugrunde gelegt werden. Auf der anderen Seite dürfen Bildungsstandards bzw. die Ergebnisse der Standardsüberprüfungen nicht zur Leistungsbeurteilung herangezogen werden. Der Lehrplan regelt was im Unterricht behandelt werden soll und liegt der Unterrichtsarbeit zugrunde. Er beinhaltet konkret formulierte Bildungsziele und zu vermittelnde Lehrinhalte auf den einzelnen Schulstufen. Grundlage für die Leistungsbeurteilung ist also einzig und allein der Lehrplan. Die Leistungsbeurteilungsverordnung bezieht sich wie man in folgendem Ausschnitt sehen kann daher auf den Lehrplan:

> Mit „Sehr gut“ sind Leistungen zu beurteilen, mit denen der Schüler die nach Maßgabe des Lehrplanes gestellten Anforderungen in der Erfassung und in der Anwendung des Lehrstoffes sowie in der Durchführung der Aufgaben in weit über das Wesentliche hinausgehendem Ausmaß erfüllt und, wo dies möglich ist, deutliche Eigenständigkeit beziehungsweise die Fähigkeit zur selbständigen Anwendung seines Wissens und Könnens auf für ihn neuartige Aufgaben zeigt (Leistungsbeurteilungsverordnung §14).

Im Gegensatz zum Lehrplan regeln Bildungsstandards, über welche fachbezogenen Kompetenzen Schüler(innen) am Ende der 8. Schulstufe verfügen sollen. Sie decken jedoch nicht den gesamten Lehrstoff einzelner Unterrichtsgegenstände ab und können daher nicht zur Leistungsfeststellung herangezogen werden.

So wie bei den Bildungsstandards wird auch im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung geregelt, was Schüler(innen) am Ende der AHS bzw. bei der Matura können sollen.

Bei den Standardsüberprüfungen am Ende der achten Schulstufe werden Aufgaben gestellt, die durchschnittliche Schüler(innen) in der Regel lösen können. Es wird also *nicht* davon ausgegangen, dass alle Schüler(innen) in der Lage sind, den Großteil der Aufgaben zu lösen: Regelstandards.

Anders ist dies bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung. *Alle* Schüler(innen) müssen zumindest „[...] alle Anforderungen in der Erfassung und in der Anwendung des Lehrstoffes sowie in der Durchführung der Aufgaben in den wesentlichen Bereichen überwiegend erfüllen [...], um die Prüfung zu bestehen“ (Leistungsbeurteilungsverordnung §14). Die Anforderungen für ein Genügend würden dafür sprechen, dass es sich bei den gestellten Aufgaben bei der Zentralmatura um Mindeststandards handelt. Durch die weiteren Beurteilungsstufen ergibt sich hier eine Mischform aus Regel- und Mindeststandards.

Durch einen Unterricht, der sich an den zu vermittelnden Kompetenzen orientiert, die im Bildungsstandardskonzept gefordert werden, wird einerseits ein guter Grundstein für weiterführende Schulen gelegt. Aus der Aufgabenstellung ist ersichtlich, dass es erforderlich ist, den Stoff zu verstehen in dem Sinne, dass er in einer neuen Situation erkannt bzw. angewendet werden kann, da keine rezeptartige Reproduktion gefragt ist. Inhalte die auf diese Weise wirklich verstanden werden, sind auch langfristig verfügbar, was eine gute Voraussetzung für einen Unterricht, der die Lernenden auf die Zentralmatura vorbereitet, darstellt. Abgesehen von der Anschlussfähigkeit hat man nicht nur für die Schularbeit bzw. für die Matura gelernt, sondern auch für das Leben (Lebensvorbereitung), da wie das Wort „Kompetenzen“ schon sagt, das Wissen und die kognitiven Fähigkeiten eben *längerfristig* verfügbar sein sollen. Auch nach der Schulzeit bzw. nach dem Mathematikunterricht sollte man von der Mathematik, die man jahrelang im Unterricht erlebt hatte, einen Nutzen ziehen können. Es zeigt sich also, dass die alte Lehrplanforderung nach der „Sicherung des Unterrichtsertrags“ hier sowohl durch die Einführung der Bildungsstandards als auch der kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung nicht nur kräftig unterstützt, sondern sogar erweitert wird.

# Kapitel 5

# Begründen

Die Begriffe „Beweisen", „Begründen" und „Argumentieren" werden in der Literatur sehr unterschiedlich verwendet und definiert. Auf der einen Seite schreiben Lorbeer & Reiss, dass Beweisen eine Form des Begründens sei (vgl. Lorbeer & Reiss 2009, S. 22).

Auf der anderen Seite bedeutet Begründen jedoch auch, eine Aussage durch logisches Zurückführen auf gesicherte Sätze und Definitionen in ein deduktives System einordnen (vgl. Goldberg 2002, S. 9). Ein Beweis besteht ebenfalls aus einer Kette deduktiver Schlüsse, die von den Voraussetzungen zur Behauptung führt und dabei nur bekannte bzw. zuvor gezeigte Aussagen als Argumente in den deduktiven Schlüssen verwendet (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert 2009, S. 34).

Ebenso versteht man unter Begründen, andere und sich selbst durch logisches Verbinden einzelner Argumente von der Richtigkeit einer Aussage zu überzeugen. Begründen bedeutet somit Überzeugen durch geeignete Argumente (vgl. Goldberg 2002, S. 9).

Kennzeichnend für das Begründen eines Sachverhaltes ist das Herstellen von Beziehungen zu anderen Sachverhalten (vgl. Bürger 1998, S. 586). Zum Finden eines Beweises müssen mehrere Argumente betrachtet und kombiniert werden (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert 2009, S. 34). Beweisen und Begründen kann somit nur bedingt bzw. gar nicht voneinander getrennt werden.

Aus diesen im Grunde ähnlichen Definitionen ist ersichtlich, dass die Begriffe „Beweisen" und „Begründen" in der Literatur oft für die selbe Tätigkeit verwendet werden.

Deshalb werde auch ich in meiner Diplomarbeit die beiden Begriffe als identisch betrachten und verwenden.

Begründungen und Beweise bestehen wiederum aus einer Argumentationskette, die zu bestimmten Schlussfolgerungen und Entscheidungen führt.

Das Beweisen, Begründen und Argumentieren ist sowohl im Lehrplan der AHS (Unter- und Oberstufe), der Kooperativen Mittelschule bzw. der Hauptschule als auch in den Bildungsstandards verankert. Auch bei der standardisieren schriftlichen Reifeprüfung sollen diese Kompetenzen einen zentralen Stellenwert einnehmen.

Im derzeit gültigen Lehrplan der AHS-Unterstufe und der Hauptschule (vgl. Lehrplan für AHS-Unterstufe, S. 1) bzw. Kooperativen Mittelschule wird im Abschnitt *Bildungs- und Lehraufgabe* gefordert, dass Schülerinnen und Schüler in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeit durchführen sollen.

Der Abschnitt *Unterrichtsziele und Unterrichtsinhalte* erläutert die mathematische Grundtätigkeit des Argumentierens und exakten Arbeitens als präzises Beschreiben von Sachverhalten, Eigenschaften und Begriffen (Definieren); Arbeiten unter bewusster Verwendung von Regeln; Begründen (Beweisen); Arbeiten mit logischen Schlussweisen; Rechtfertigen von Entscheidungen (etwa der Wahl eines Lösungsweges oder einer Darstellungsform) (vgl. Götz & Sattlberger 2009, S. 98).

Der aktuelle Lehrplan der AHS-Oberstufe schreibt im Bereich der *mathematischen Kompetenzen* vor, dass die Schülerinnen und Schüler kritisch-argumentativ arbeiten sollen, wobei damit Aktivitäten gemeint sind, die mit Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen und Begründen zu tun haben. Das Beweisen heuristisch gewonnener Vermutungen ist ein Schwerpunkt dieses Tätigkeitsbereichs. Im Bereich der *Aspekte der Mathematik* wird gefordert, dass die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt, sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden soll (Lehrplan 2004, S. 1).

Wie schon oben erwähnt findet man im Konzept der Bildungsstandards im Handlungsbereich „Begründen und Argumentieren“ eine sehr genaue Beschreibung der zugehörigen Kompetenzen. Laut Heugl und Peschek sind charakteristische Tätigkeiten z. B.:

- Mathematische Argumente nennen, die für oder gegen die Verwendung eines bestimmten mathematischen Begriffs, eines Modells oder einer Darstellung(sform), für oder gegen einen bestimmten Lösungsweg bzw. eine bestimmte Lösung, für oder gegen eine bestimmte Interpretation sprechen

- die Entscheidung für die Verwendung eines bestimmten mathematischen Begriffs, eines Modells, eines Lösungswegs, für eine Darstellung(sform), eine bestimmte Lösung oder eine bestimmte Sichtweise/Interpretation argumentativ belegen

- mathematische Vermutungen formulieren und begründen (aufgrund deduktiven, induktiven oder analogen Schließens)

- mathematische Zusammenhänge (Formeln, Sätze) herleiten oder beweisen

- zutreffende und unzutreffende mathematische Argumentationen bzw. Begründungen erkennen; begründen, warum eine Argumentation oder Begründung (un-)zutreffend ist (vgl. Heugl & Peschek 2007, S. 12).

Auch in der Komplexitätsdimension wird das Argumentieren und Begründen zweifach genannt. Die höchste Komplexitätsstufe „Einsetzen von Reflexionswissen und Reflektieren“ meint unter anderem das Nachdenken über (vorgegebene) Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen bzw. soll Reflexionswissen durch Dokumentation von Lösungswegen, durch entsprechende Entscheidungen, oft aber auch durch entsprechende Argumentationen und Begründungen sichtbar werden (vgl. Götz & Sattlberger 2009, S. 100).

## 5.1 Warum soll im Mathematikunterricht begründet werden?

Eine Begründung bestätigt zunächst, dass eine Behauptung gilt (*Verifizierungsfunktion*). Sie zeigt weiter auf, warum eine Behauptung gilt und insbesondere unter welchen Voraussetzungen sie gilt (vgl. Weigand 2009 et al., S. 37).

Für den Mathematikunterricht ist zum einen die *zusammenhangstiftende Funktion* zu nennen. Durch die Begründung soll erkannt werden, dass etwas aus etwas anderem hergeleitet werden kann (vgl. Malle 2002, S. 4). Wenn Schüler(innen) Handlungen bzw. Gedankenschritte begründen sollen, so sind sie gezwungen, Zusammenhänge und Beziehungen durchzudenken, ihre Überlegungen zu präzisieren und darzustellen, wodurch diese Überlegungen stärker ins Bewusstsein rücken. Argumentieren kann dadurch zu überlegtem Arbeiten und zu präziserem Denken führen.

Das Überdenken von Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen und das Darstellen von Überlegungen, als wesentliche Elemente des Begründens, können Einsichten und Verständnis fördern (vgl. Bürger 1998, S. 585). Beweise können helfen, neues Wissen in den theoretischen Kontext der Mathematik einzubinden, sie können erklären, warum eine Behauptung wahr ist, und sie können zum Entdecken von neuem mathematischen Wissen beitragen. Dadurch können Schüler(innen) durch einen Beweis einen Sachverhalt tiefer durchdringen. Dies hilft ihnen wiederum neue Probleme leichter zu lösen und es wird ihnen deutlicher, welche Zusammenhänge in der Mathematik bestehen (vgl. Reiss 2009, S. 5).

Eine Begründung soll außerdem eine *Überzeugungsfunktion* erfüllen. Beim Begründen will man eine andere Person oder sich selbst von der Richtigkeit einer Annahme, eines Rechenweges, einer Erläuterung oder einer Vermutung überzeugen. Je schlüssiger und nachvollziehbarer die vorgebrachten Argumente sind, desto erfolgreicher ist man (vgl. Jaschke 2009, S. 50). Wenn Schüler(innen) aufgefordert werden, einzelne mathematische Handlungen zu begründen, dann kann für sie damit ein Absichern bzw. eine Kontrolle der Richtigkeit der Handlung verbunden sein, denn beim Begründen erfolgt ein Offenlegen von Gedanken, woran Lehrer(innen) Denkweisen und auch Missverständnisse der Schüler(innen) erkennen können (vgl. Bürger 1998, S. 585).

Bürger schreibt ebendort, dass Argumentieren und Begründen Tätigkeiten sind, die für viele Lebens- und Wissensbereiche bedeutungsvoll sind. Insbesondere sind sie für die Mathematik charakteristische Tätigkeiten. Schüler(innen), die keine Fähigkeiten im Argumentieren in mathematischen Bereichen besitzen, sind in einer mathematischen Grundtätigkeit nicht ausgebildet. Dabei ist es eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichts, ein authentisches Bild der Wissenschaft Mathematik zu vermitteln (vgl. Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert 2009, S. 31).

Die Fähigkeit, angemessen argumentieren und begründen zu können, ist nicht nur ein Aspekt der mathematischen Grundbildung, sondern wird allgemein als maßgeblich für die Entwicklung wissenschaftlichen Denkens angesehen. Dieses ist hierbei durch das Verknüpfen von Argumenten und den logischen Aufbau von Argumentationsketten gekennzeichnet (vgl. Hellmich, Hartmann & Reiss 2002, S. 231).

Ebenso wie Hellmich, Hartmann und Reiss hebt auch Goldberg 2002 hervor, dass Begründen und Argumentieren wichtige Aspekte der Mündigkeit eines Menschen seien (S. 11).

Präzises Argumentieren ist auch außerhalb der Mathematik bzw. des Mathematikunterrichts gefragt, sodass hierbei ein wertvoller Beitrag zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler geliefert wird (vgl. Sattlberger & Götz 2007, S. 130).

Nicht nur Mathematiker(innen), sondern auch Theolog(inn)en, Philosoph(inn)en und andere Wissenschaftler(innen) müssen argumentieren, wobei ihnen die Kenntnisse mathematischer Schlussweisen nützen. Außerdem profitiert jedermann, wenn er argumentierend sprechen, wenn er bei schriftlichen Ansuchen Gründe geltend machen, wenn er überzeugen kann. Man erhöht dadurch sein Durchsetzungsvermögen und seine Wirkung, vor allem in den Bereichen Justiz, Politik und Verwaltung (vgl. Stangler 1989, S. 5).

Für den Unterricht bedeutet dies, dass Beweise nicht auf ihre Verifizierungsfunktion reduziert werden dürfen, da an der Gültigkeit einer Aussage häufig ohnehin kein Zweifel besteht. Vielmehr müssen auch die anderen Funktionen, insbesondere die *Erklärungsfunktion*, zum Tragen kommen. Beweise und das Beweisen müssen so gestaltet sein, dass sie zum Verständnis der Aussage beitragen (vgl. Weigand et al. 2009, S. 38).

## 5.2 Argumentationsbasis

Jede Begründung bedarf einer Argumentationsbasis, eines Fundaments, auf das man sich bei seiner Argumentation stützt (vgl. Malle 2002, S. 5). Man versteht darunter die Gesamtheit der Definitionen und Sätze, auf die man sich in seinen Begründungen beruft. Will man eine Aussage $A$ begründen, ist es im Allgemeinen notwendig, dass Aussagen $B$, $C$,... vorliegen, die als richtig angesehen werden und aus denen auf die Richtigkeit von $A$ geschlossen werden kann.

Eine Menge von Aussagen, die als richtig angesehen werden, zusammen mit den Schlussweisen, die als zulässig anerkannt werden, bezeichnet man als Argumentationsbasis (vgl. Ratzinger 1992, S. 45). Argumentationsbasen können von verschiedener Art sein. In der höheren Mathematik bestehen sie meist aus

Definitionen und Sätzen. Auf niedrigerer Ebene können sie aber auch aus Handlungen, Bildern (Anschauung), Realitätserfahrungen oder Ähnlichem bestehen. Häufig kann man eine Behauptung anhand verschiedener Argumentationsbasen begründen (vgl. Malle 2002, S. 5–6). Es kann durchaus sinnvoll sein, mehrere Beweise für einen Satz, für eine Behauptung zu führen, wenn dadurch unterschiedliche Beziehungen dieses Satzes zu anderen Sätzen, Definitionen und Begriffen deutlich werden (vgl. Weigand et al. 2009, S. 37).

In der höheren Mathematik ist meist klar, welche Argumentationsbasis zugrundeliegt, dies ist in der Schule jedoch nur selten der Fall. Bis zur 8. Schulstufe liegt fast nie eine klare Argumentationsbasis vor, was eine beträchtliche Schwierigkeit für die Lernenden darstellt. Sie sind meist unsicher, worauf man sich berufen kann und worauf nicht. Etwa ab dem 9. Schuljahr sollte immer stärker gefordert werden, anhand von klar vorgegebenen Argumentationsbasen zu argumentieren. Diese Argumentationsbasen können vorher mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam erarbeitet und systematisch zusammengestellt werden (vgl. Malle 2002, S. 5–6). Auch Koth empfiehlt, vor dem Ausführen von Begründungsaufgaben Definitionen und Sätze zu wiederholen und zu systematisieren. Sie sieht auch eine Möglichkeit darin, eine Kopie mit der entsprechenden Argumentationsbasis, die bestimmten zu lösenden Problemstellungen zugrunde liegt, zu verteilen. Für Aufgaben zu den Schnitt- und Lagebeziehungen in Dreiecken könnte die Argumentationsbasis aus folgenden Definitionen und Sätzen bestehen:

- **Definition**: Höhenlinie, Schwerlinie, Mittelsenkrechte, Winkelsymmetrale

  **Satz:** Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt, dem Umkreismittelpunkt.

- **Definition**: Ähnlichkeit

  **Satz:** In ähnlichen Dreiecken stehen entsprechende Längenstücke im selben Verhältnis.

  **Satz:** Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen.

Eine **Aufgabe** dazu: Zeichne ein beliebiges Dreieck $ABC$ und ziehe durch jeden Eckpunkt die Parallele zur jeweils gegenüberliegenden Seite! Du erhältst das „parallele Umdreieck“ $A_1B_1C_1$. Die Seiten dieses Dreiecks sind doppelt so lang wie die des gegebenen Dreiecks. Begründe warum die Höhenlinien des Dreiecks $ABC$ einander in einem Punkt schneiden! Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Höhenlinien des Dreiecks $ABC$ und den Mittelsenkrechten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ (vgl. Reichel & Humenberger 2008, S. 212)!

Dass die Höhen des Dreiecks $ABC$ genau die Mittelsenkrechten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ sind, ist unmittelbar einsichtig. Setzt man nun den Satz, dass sich die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, voraus, kann man daraus auf die Existenz des Höhenschnittpunktes schließen.

Diese vorgegebene Argumentationsbasis dient als Grundlage und kann von den Schülerinnen und Schülern durch gelöste Begründungsaufgaben erweitert werden. Auf diese gelösten Begründungsaufgaben können sie sich in den folgenden Aufgabenstellungen beziehen (vgl. Koth 2002, S. 47).

Begründungen und Argumentationen unterscheiden sich in ihrer Exaktheit. Von Exaktheit kann jedoch nur in Bezug auf eine bestimmte Argumentationsbasis gesprochen werden. Was in Bezug auf eine Argumentationsbasis exakt erscheint, kann in Bezug auf eine andere wiederum durchaus nicht exakt sein. Exaktheit hat mit der Explikation der Argumente zu tun. Eine Begründung ist umso exakter, je detaillierter die einzelnen Begründungsschritte ausgeführt werden und je deutlicher dabei der Bezug zur Argumentationsbasis ersichtlich wird (vgl. Malle 2002, S. 6). Im Unterricht ist es sinnvoll, zunächst solche Argumentationsbasen zu verwenden, die dem mathematischen Wissen, den Vorstellungen und vor allem dem Verständnis der Schüler(innen) entsprechen (vgl. Bürger 1998, S. 587).

## 5.3 Der Weg zum Beweis

Beweisen lernt man nicht allein durch das Studieren fertiger mathematischer Beweise. Wenn Schüler(innen) in die Lage versetzt werden sollen, *selbst* mathematische Beweise zu verfassen, was sowohl im Lehrplan als auch in den Bildungsstandards verankert ist, darf der Schwerpunkt im Unterricht nicht auf dem fertigen Beweis liegen, sondern der Prozess des Beweisens sollte im Zentrum stehen. Um dies umzusetzen, braucht man zunächst eine Vorstellung davon, welche Arbeitsweisen und Phasen den Beweisprozess eigentlich auszeichnen (vgl. Ufer & Heinze 2009, S. 43).

Auf dem Weg zum Beweis ergeben sich Vermutungen, die an Beispielen überprüft werden, und nach und nach kristallisieren sich Ideen für den Beweis heraus. Mögliche Argumente werden exploriert und Lösungsschritte identifiziert. Schließlich wird eine logisch konsistente Argumentationskette herausgearbeitet. All diese Schritte sind Teil eines Prozesses, an dessen Ende der Beweis steht (vgl. Reiss 2009, S. 5).

Zu Beginn eines Beweisprozesses steht das *Vertrautwerden* mit den vorkommenden Begriffen und Objekten. Die Problemsituation wird strukturiert und potentiell hilfreiche Aussagen werden gesammelt. In der Geometrie können eine Skizze angefertigt und die Voraussetzungen eingeordnet werden. Durch das Einzeichnen von Hilfslinien können weitere Informationen über die Problemsituation gewonnen werden.

Sollen die Schüler(innen) den *Satz von Thales* beweisen, der besagt, wenn der Punkt $C$ eines Dreiecks $ABC$ auf einem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$ liegt, dann hat das Dreieck bei $C$ einen rechten Winkel, so empfiehlt es sich zunächst, eine Skizze unter Berücksichtigung der Voraussetzungen anzufertigen. Zeichnet man dann eine Hilfslinie vom (Halb-)Kreismittelpunkt zum Eckpunkt $C$ ein, so kann man erkennen, dass zwei gleichschenkelige Dreiecke entstehen.

Als Nächstes muss eine *Vermutung* gefunden werden. Dazu können mehrere Einzelfälle betrachtet werden, um Gemeinsamkeiten zu erkennen und dadurch eine Vermutung zu generieren. Bei geometrischen Beweisen muss klar sein, welche Aspekte variiert werden können und welche Eigenschaften invariant gehalten werden sollen.

In dieser Phase des Findens einer Vermutung können dynamische Geometrie-Systeme (DGS) hilfreich sein, wenn die Konstruktion der Einzelfälle mit anderen Mitteln zu aufwändig oder komplex ist und von der eigentlichen Explorationsarbeit ablenken würde. Um die Schüler(innen) zum Beispiel auf den *Satz von Thales* hinzuführen, eignet sich der Einsatz von DGS folgendermaßen: An einem gegebenen Dreieck sollen die Schüler(innen) die Lage des Punktes $C$ verändern und beobachten, wo der Innenwinkel beim Punkt $C$ größer und wo er kleiner wird. Schließlich sollen diese Punkte gesucht und markiert werden, an denen der Innenwinkel genau $90°$ beträgt. Auf der Suche nach Gemeinsamkeiten lässt sich leicht erkennen, dass alle Punkte $C$ mit dem Innenwinkel $90°$ auf einem (Halb-)Kreis über der Strecke $\overline{AB}$ liegen. Per Zugmodus können die Schüler(innen) überprüfen, ob der Winkel mit dem Punkt am Halbkreis tatsächlich „immer“ ein rechter ist, indem sie den Punkt $C$ entlang des Halbkreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ bewegen.

Nun wird die gefundene Vermutung formuliert und kritisch betrachtet. Dazu werden im Falle des *Satzes von Thales* Extremfälle betrachtet. Wie verändert sich die Situation bzw. gilt die Vermutung auch noch, wenn man zum Beispiel den Abstand von $A$ und $B$ verkürzt oder verlängert?

Ist eine Vermutung gefunden und formuliert, kann man dazu übergehen, eine Beweisidee zu generieren. Für den groben Aufbau eines Beweises gilt, dass er aus Zwischenbehauptungen besteht, die als plausibel erkannt werden, sowie mathematischen Konzepten und Sätzen, die einen inhaltlichen oder logischen Zusammenhang zwischen diesen Zwischenbehauptungen herstellen. Für das Finden einer Beweisidee ist es von Bedeutung Wissen zu aktivieren, das in diesem Zusammenhang brauchbar sein könnte. Auch die Identifikation von mathematischen Konzepten, die zur Beschreibung der Situation hilfreich sein können, ist in dieser Phase von Bedeutung.

Beim Beweis des *Satzes von Thales* muss man z. B. erkennen, durch welche Hilfsstrecke zwei gleichschenkelige Dreiecke entstehen. Es ist erforderlich zu wissen, dass der Abstand vom Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ zu den Punkten $A$, $B$ und $C$ gleich groß ist. Darüber hinaus muss Wissen über die Eigenschaften des allgemeinen Dreiecks (z. B.: Winkelsumme beträgt $180°$) und des gleichschenkeligen Dreiecks (z. B.: Basiswinkel sind gleich groß) verfügbar sein.

Diese Phase besteht somit aus dem Aktivieren, Ordnen und Auswählen von Wissen mit dem Ziel der Konstruktion einer Beweisidee, die aus Zwischenbehauptungen und tragfähigen Argumenten, die diese Zwischenbehauptungen verbinden, besteht.

Zum Schluss wird der Beweis formuliert. Dies erfolgt durch eine Auswahl geeigneter Argumente und deren Organisation in einer deduktiven Kette. Die zuvor generierte Beweisidee mit ihren Zwischenbehauptungen liefert eine grobe Orientierung zur Abfassung einer Argumentationskette (vgl. Ufer & Heinze 2009, S. 43).

## 5.4 Arten des Begründens

Beweise in der Schule kann man nicht an den streng-formalen Beweisen der Fachwissenschaft messen. Sie müssen vielmehr oftmals didaktisch so reduziert werden, dass grundlegende mathematische Beweisideen für Schülerinnen und Schüler verständlich und nachvollziehbar werden. Für den schulischen Bereich kann man folgende Argumentationsmöglichkeiten identifizieren:

- **Sprachliche Argumentation**

  Die Schenkel des in Figur 5.1 gezeichneten Winkels $\gamma$ stehen paarweise normal auf den Schenkeln des Winkels $\alpha$. Der Winkel $\gamma$ ist also ein Normalwinkel zu $\alpha$. Er ist jedoch nicht gleich groß, sondern supplementär zu $\alpha$. Begründe diese Behauptung!

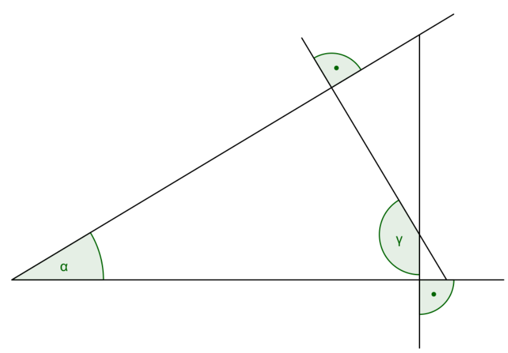


Abbildung 5.1: Normalwinkel

  Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander normal stehen, heißen Normalwinkel. Normalwinkel sind gleich groß oder supplementär. Der Winkel $\gamma$ ist ein Supplementärwinkel zu $\alpha$. Dies folgt direkt aus der Innenwinkelsumme eines allgemeinen Vierecks. Die vier Schenkel schließen ein Viereck ein, wobei zwei Winkel des Vierecks rechte Winkel sind. Daraus folgt, dass sich $\alpha$ und $\gamma$ auf $180°$ ergänzen (vgl. Reichel, Litschauer & Groß 2000, S. 165).

- **Algebraische Argumentation**

  Folgende Behauptungen lassen sich durch die Verwendung von Variablen begründen:

Verdoppelt man die Seitenlänge eines Quadrats, so vervierfacht sich sein Flächeninhalt. Verdoppelt man die Seitenlänge eines Würfels, so wird sein Volumen achtmal so groß. Begründe diese Behauptungen (vgl. Weigand et al. 2009, S. 169)!

Wählt man für die Seitenlänge des Quadrats die Variable $a$, so gilt für den Flächeninhalt $A = a^2$. Verdoppelt man nun die Seitenlänge, so hat das neue Quadrat die Seitenlänge $2a$ und für den Flächeninhalt gilt $A = (2 \cdot a)^2 = 4 \cdot a^2$. Somit ist der Flächeninhalt viermal so groß wie der ursprüngliche. Analog dazu kann man für das Volumen des Würfels argumentieren. Das Volumen für den Würfel mit Seitenlänge $a$ ist $V = a^3$. Ein Würfel mit doppelter Seitenlänge $2 \cdot a$ hat das Volumen $V = (2 \cdot a)^3 = 8 \cdot a^3$. Somit ist gezeigt, dass sich das Volumen verachtfacht, wenn man die Seitenlänge eines Würfels verdoppelt.

Allgemein gilt, dass sich die Flächeninhalte um den Faktor $k^2$ verändern, wenn man die Seitenlängen um den Faktor $k$ vergrößert/verkleinert. Die Rauminhalte verändern sich dann mit dem Faktor $k^3$.

- **Zeichnerische Argumentation** (durch geeignete Visualisierung)

  Bei folgender Herleitung der Flächenformel für den Kreis aus der Umfangsformel steht die Argumentation anhand einer Zeichnung im Vordergrund. Man zerlegt die Kreisfläche mit Radius $r$ in eine gerade Anzahl gleich großer Kreissektoren wie in Abbildung 5.2.

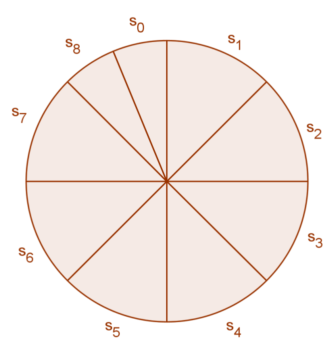


Abbildung 5.2: Kreisfläche

Nun legt man die Kreisausschnitte so nebeneinander, wie es Abbildung 5.3 zeigt.

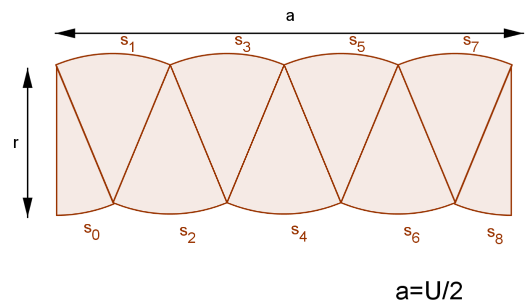


Abbildung 5.3: Fläche des Kreises anders angeordnet

Die so entstandene Figur wird von zwei Radien und von gleich großen und gleich vielen Kreisbogenstücken begrenzt. Jeder der beiden aus Kreisbogenstücken zusammengesetzten Teile des Umfangs der Figur in Abbildung 5.3 hat die Länge des halben Kreisumfangs. Setzt man die Zerlegung der Kreisfläche in Teile fort, so nähert sich die Figur in Abbildung 5.3 einem Rechteck, dessen eine Seite gleich dem halben Kreisumfang $\frac{u}{2}$ und dessen andere Seite gleich dem Radius $r$ ist. Der Flächeninhalt beträgt somit:

$$A = \frac{u}{2} \cdot r$$

Setzt man nun für $u$ die Formel für den Kreisumfang $u = 2 \cdot r \cdot \pi$ ein, so erhält man die Flächenformel für den Kreis:

$$A = r \cdot \pi \cdot r = r^2 \cdot \pi.$$

- **Kontextargumentation**

  Eine $2,85\,m$ lange, $2,4\,m$ hohe und $1\,cm$ dicke Holzplatte soll in einem Raum aufgestellt werden. Kann diese Platte durch eine Türöffnung mit $1,3\,m$ Breite und $2,1\,m$ Höhe transportiert werden? Erkläre, warum dies (nicht) möglich ist (vgl. Achleitner, Ratzberger-Klampfer & Weikinger 2008, S. 54)!

- **Operative und induktive Argumentation**

  Durch induktive Argumentation kann man begründen, dass die Winkelsumme in einem $n$-Eck $(n-2) \cdot 180°$ beträgt.

  In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel stets 180°. Hängt man an das Dreieck an einer Seite ein weiteres Dreieck an, so entsteht ein Viereck. Dadurch erhöht sich die Innenwinkelsumme um 180° und beträgt somit 360°. Durch das Anhängen eines Dreiecks an einer Seite eines $n-$Ecks erhält man (im Allgemeinen) ein $(n+1)-$Eck. Damit erhöht sich die Winkelsumme bei Ergänzung um jede weitere Ecke um 180°. Ausgehend vom Dreieck erhält man für die Winkelsumme im $n-$Eck $S(n) = (n-2) \cdot 180°$ (vgl. Krauter 2005, S. 61).

- **Widerlegen von Aussagen durch Gegenbeispiele**

  Bei folgender Aufgabe wird durch die Angabe von zwei verschiedenen Möglichkeiten für die Lösung die Frage nach der Eindeutigkeit verneint.

  **Aufgabe:** Gegeben sind der Flächeninhalt $A$ eines Parallelogramms und die Länge $a$: $A = 65\,cm^2$ und $a = 7,3\,cm$. Berechne die Länge der Höhe $h_a$! Sind dadurch die Längen der anderen Seite $b$ und der Höhe $h_b$ eindeutig festgelegt? Begründe deine Entscheidung (vgl. Weigand et al. 2009, S. 110)!

  Die Höhe $h_a$ erhält man, indem man die Flächenformel für das Parallelogramm umformt und die gegebenen Werte für $A$ und $a$ einsetzt: $h_a = \frac{A}{a} = \frac{65}{7,3} \approx 8,9\,cm$. Die Längen von $b$ und $h_b$ sind durch $a, h_a$ und $A$ nicht eindeutig festgelegt. Aus der Flächenformel des Parallelogramms $A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ ist ersichtlich, dass der Flächeninhalt von einer Seite und der zugehörigen Höhe abhängt. Die Längen von $b$ und $h_b$ müssen also die Gleichung $b \cdot h_b = 65$ erfüllen. Dafür gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Außerdem muss $b \geq h_a \approx 8,9\,cm$ gelten. Somit sind die beiden Längen nicht durch die Angabe eindeutig festgelegt. Als Begründung würde es reichen, jeweils zwei unterschiedliche Werte für $b$ und $h_b$ anzugeben, für die der Flächeninhalt $65\,cm^2$ beträgt und $b \geq h_a$ erfüllt ist. Sowohl für $b = 10\,cm$ und $h_b = 6,5\,cm$, als auch für $b = 20\,cm$ und $h_b = 3,25\,cm$ ist dies erfüllt.

Argumentationsprozesse sind im Unterricht an fast allen Inhalten beteiligt und durch geeignete Aufgaben können diese Prozesse motiviert, eingeleitet und gefestigt werden. Somit bietet auch die Geometrie eine große Anzahl an Möglichkeiten, vielfältige Argumentationsformen zu üben. Dazu gehören:

### Ergebnisse, Behauptungen und Lösungswege begründen

Es kann untersucht werden, ob und warum eine dargestellte Berechnung richtig oder falsch ist oder welche Überlegungen einer bestimmten Lösungsstrategie zugrunde liegen. Auch das Überprüfen durch Nachrechnen kann eine schüler(innen)gerechte Argumentationstätigkeit sein (vgl. Jaschke 2009, S. 51).

**Aufgabe:** Im Unterricht wird Paul gefragt, wie der Satz des Pythagoras lautet. Er antwortet $a^2 + b^2 = c^2$. Begründe, warum die Lehrerin damit nicht zufrieden ist!

In diesem Zusammenhang ist wichtig, dass die notwendige Voraussetzung des

Satzes von Pythagoras, nämlich die Rechtwinkeligkeit des zugrundeliegenden Dreiecks, mit in die Argumentationen einfließt. Außerdem fehlt die Erklärung der Variablen $a$, $b$ und $c$ (vgl. Jaschke 2009, S. 52).

**Aufgabe:** Andreas und Natalie meinen, dass der Satz des Pythagoras in jedem Dreieck gilt. Sie fertigen folgende Skizze an:

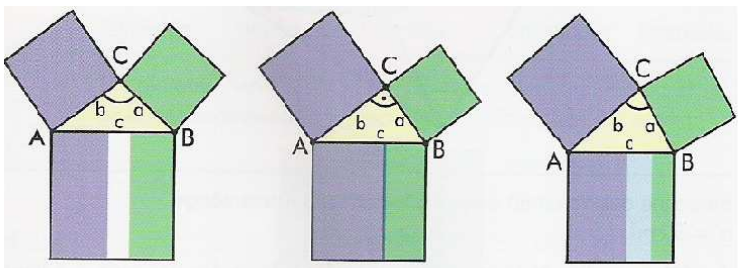


Abbildung 5.4: Pythagoras

Beschreibe, was in den Skizzen dargestellt wird! Haben Andreas und Natalie Recht? Begründe (vgl. Dorfmayr, Mistlbacher & Nussbaumer 2009, S. 54)!

**Aufgabe:** Wer hat Recht? Begründe deine Antwort (vgl. Keller-Ressel, Sidlo & Wintner 2005, S. 83)!


Abbildung 5.5: Ähnlichkeit

Bei dieser Aufgabe muss entschieden werden, welche Aussagen richtig und welche falsch sind. Bei der Argumentation stützt man sich auf die Definitionen der Ähnlichkeit und der Kongruenz von Figuren.

### Sätze und Formeln herleiten und begründen

Durch folgende Aufgabe, bei der man den Satz von Pythagoras aus dem Kathetensatz herleitet, erfährt man etwas über den Zusammenhang der beiden Sätze.

**Aufgabe:** Zeichne ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck $ABC$ und errichte die Höhe $h$! Aufgrund des Kathetensatzes gilt: $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$. Setze in die Summe $a^2 + b^2$ ein und zeige durch algebraisches Umformen, dass gilt: $a^2 + b^2 = c^2$ (vgl. Reichel, Litschauer & Groß 2002, S. 163)!

### Verallgemeinerungen vornehmen

Der Satz von Pythagoras gilt nicht nur für Quadrate. Dieser fundamentale Satz lässt sich auch auf regelmäßige $n$-Ecke und Halbkreise übertragen.

**Aufgabe:** Von drei Dreiecken $D_1$, $D_2$ und $D_3$ sind folgende Größen bekannt:

$$D_1 : a = 3\,cm, h_a = 3\,cm$$
$$D_2 : b = 4\,cm, h_b = 4\,cm$$
$$D_3 : c = 5\,cm, h_c = 5\,cm.$$

Berechne die Flächeninhalte der drei Dreiecke $D1, D2$ und $D3$ und suche nach Auffälligkeiten zwischen den Ergebnissen! Finde eine Erklärung mithilfe des Satzes von Pythagoras!

Bei den gegebenen Seiten der drei Dreiecke handelt es sich um ein Pythagoreisches Zahlentripel. Man konstruiert ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Seiten $a = 3\,cm$, $b = 4\,cm$ und $c = 5\,cm$ und auf jede dieser Seiten die gegebene Höhe. Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke über den Seiten $a$ und $b$ ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks über der Seite $c$. Um dies zu zeigen, eignet sich eine algebraische Argumentation. Im Dreieck mit den Seiten $a = 3\,cm$, $b = 4\,cm$ und $c = 5\,cm$ gilt $a^2 + b^2 = c^2$, es ist daher rechtwinkelig (Umkehrung des Satzes von Pythagoras). Dividiert man die Gleichung durch 2, so erhält man $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2}$. Der Angabe kann man entnehmen, dass $a = h_a$, $b = h_b$ und $c = h_c$ ist. Daraus ergibt sich die Gleichung $\frac{a \cdot h_a}{2} + \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Somit ist gezeigt, dass der Satz von Pythagoras nicht nur für Quadrate über den Dreiecksseiten eines rechtwinkeligen Dreiecks, sondern auch für Dreiecke gilt, wobei die Dreiecksseiten, die den Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks entsprechen, gleich den zugehörigen Höhen sein müssen (vgl. Jaschke 2009, S. 52).

Nun setzen wir voraus, dass die Dreiecke $D_1$, $D_2$ und $D_3$ zueinander ähnlich sind. Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten und es gilt somit $A_a : A_c = a^2 : c^2$ und $A_b : A_c = b^2 : c^2$, wobei $A_a, A_b$ und $A_c$ die Flächeninhalte über den jeweiligen Dreiecksseiten sind. Addiert man nun die beiden Gleichungen, so erhält man $\frac{A_a + A_b}{A_c} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$. Durch Multiplikation der Gleichung mit $c^2 \cdot A_c$ kommt man auf die Form $(A_a + A_b)\, c^2 = A_c \cdot (a^2 + b^2)$. Aus $a^2 + b^2 = c^2$ folgt $A_a + A_b = A_c$. Somit ist gezeigt, dass der Satz von Pythagoras nicht nur für Quadrate über den Dreiecksseiten, sondern auch für ähnliche Dreiecke über den Dreiecksseiten gilt. Daraus kann man folgern, dass Analoges für beliebige regelmäßige $n$-Ecke gilt (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 140).

### Fallunterscheidungen durchführen

Eine Fallunterscheidung ist zum Beispiel beim Beweis vom Peripheriewinkelsatz zu treffen. Dieser besagt:

*Der Kreis $k$ um den Umkreismittelpunkt $U$ wird durch die Sehne $\overline{AB}$ ungleich dem Durchmesser des Kreises in zwei Bögen $b_1$ und $b_2$ zerlegt, wobei $b_1$ und $U$ in derselben Halbebene bezüglich der Geraden $AB$ liegen. Durchläuft $C$ den Bogen $b_1$, so erscheint die Sehne $\overline{AB}$ von $C$ aus immer unter dem gleichen spitzen Winkel $\gamma$. Die Winkel bei $C$ heißen Umfangswinkel. Erscheint die Sehne $\overline{AB}$ von $U$ aus unter dem Winkel $\psi$, so gilt $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \psi$.*

Die Fallunterscheidung bezieht sich zum einen auf die Lage der Sehne $\overline{AB}$. Ist diese genau der Durchmesser des Umkreises, so handelt es sich bei dem Dreieck $ABC$ um ein rechtwinkeliges und *Der Satz von Thales* muss bewiesen werden. Andererseits unterscheidet man bei allgemeinen Dreiecken die Fälle, dass der Umkreismittelpunkt $U$ im Dreieck $ABC$ liegt und den Fall, dass er außerhalb des Dreiecks liegt (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 32 und Abbildung 5.6). Andererseits müsste noch unterschieden werden, ob $c$ auf $b_1$ oder $b_2$ läuft. Das Zweite steht hier aber nicht zum Beweis an.

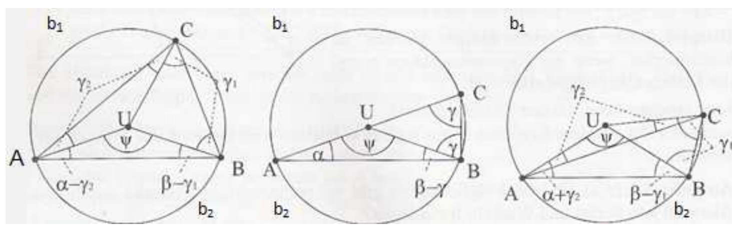


Abbildung 5.6: Peripheriewinkelsatz

### Durch ein Gegenbeispiel eine Behauptung widerlegen

Ein Beispiel reicht nicht aus, um eine Behauptung zu beweisen, jedoch um eine Aussage zu widerlegen, genügt ein solches.

**Aufgabe:** Anna behauptet, dass sich der Satz von Pythagoras auch auf Vierecke übertragen lässt, und es gilt: $a^2+b^2 = c^2+d^2$. Für den Fall, dass $a = 11cm$, $b = 2cm$, $c = 10cm$ und $d = 5cm$, stimmt diese Formel tatsächlich. Was meinst du dazu?

Durch das Anführen eines Gegenbeispiels, das zeigt, dass dies nicht immer gilt, ist die Behauptung von Anna widerlegt, z. B. ein Trapez mit $a > c$ und $b = d$ (vgl. Jaschke 2009, S. 53).

### Modellierende Annahmen rechtfertigen

Modellierungen beziehen sich immer auf die Realität. Offene außermathematische Anwendungsaufgaben stehen dann im Zusammenhang mit mathematischen Inhalten. Im ersten Schritt einer Modellierung müssen Vereinfachungen vorgenommen und Annahmen gemacht werden.

**Aufgabe:** In Abbildung 5.7 sieht man das Stadttor von Friedberg mit einem Teil der Stadtmauer. Das Bauwerk befindet sich im Zentrum und soll nun, um seinem Namen auch heute noch gerecht zu werden, an der Stadtgrenze in derselben Größe neu errichtet werden. Die Firma „Mitterbauer" wird mit diesem Projekt beauftragt. Vom Boden bis zum obersten Ende misst das Tor $5\,m$. Die Breite des Tores beträgt $3,5\,m$ und die Tiefe $1\,m$. Die Breite des Tores mit dem Stadtmauerteil kommt auf $5,5\,m$. Wie viel $m^3$ Steine wird die Firma „Mitterbauer" für den Bau des Tores ungefähr benötigen, wenn davon ausgegangen wird, dass der Mörtel in etwa 10% des Volumens einnimmt? (Die Rundung des Torbogens muss aufgrund von minimalen Abweichungen nicht berücksichtigt werden und kann durch eine Gerade ersetzt werden.) Begründe dein Vorgehen!

Abbildung 5.7: Stadttor

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen zu Beginn Vereinfachungen vorgenommen werden: die Vorderseite des Bauwerks wird in einfache geometrische Flächen unterteilt. Dadurch entstehen z. B. ein Trapez und mehrere Rechtecke. Weiters müssen die Maße der Toröffnung aufgrund der gegebenen abgeschätzt werden. Man berechnet schließlich das Volumen eines Prismas mit trapezförmiger Grundfläche und addiert sie zu den Volumina der Quader.

### Passender Einsatz von Algorithmen oder Formeln begründet einschätzen oder die Richtigkeit von Formeln nachweisen

Algorithmen und Formeln sind keine mathematischen Wahrheiten an sich. Die Gültigkeit dieser in einer gegebenen Situation muss nachgewiesen werden. Dazu greift man in der Schulmathematik meist auf bereits bewiesene Sätze oder Verfahren zurück (vgl. Jaschke 2009, S. 53).

Die Länge des Kreisbogens $b$ berechnet man mit der Formel $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$ ($\alpha$ in Grad).

**Aufgabe:** Begründe die Richtigkeit der Proportion $b : u = \alpha : 360°$! Leite daraus die Formel für die Bogenlänge $b$ ab (vgl. Reichel, Litschauer & Groß 2002, S. 191).

## 5.5 Grundlagen der Beweiskompetenz

Für das Begründen im Mathematikunterricht ist *fachliches Basiswissen* eine notwendige Voraussetzung. Ohne Wissen über geometrische Grundlagen kann man den Höhensatz beispielsweise nicht beweisen. Ein breites fachliches Wissen vermittelt die nötige Sicherheit für korrekte Argumentationen und eigenständiges Explorieren wird dadurch überhaupt erst möglich.

Beweisen ist für viele Schüler(innen) ein notwendiges Übel, das für diese wenig Bedeutung besitzt, da der bewiesene Zusammenhang ohnehin durch Aufgaben konkretisiert wird. Es ist eine pragmatische Wahrheit, dass erst dann Inhalte wahrgenommen werden, wenn sie auch für die Schularbeit relevant sein werden. Da Behauptungen oft mehr oder weniger offensichtlich sind, wird die Notwendigkeit eines Beweises nicht immer erkannt. Dadurch entsteht bei Schüler(inne)n kein Beweisbedürfnis (vgl. Jaschke 2009, S. 51). Sie akzeptieren das Nachmessen oder das Überprüfen anhand einer Zeichnung als Beleg für die Allgemeingültigkeit einer Aussage und sehen nicht die Notwendigkeit eines Beweises der Aussage (vgl. Weigand et al. 2009, S. 44).

Zur Beweiskompetenz zählen neben kognitiven Komponenten auch der Wille und die *Motivation*, zu einer Problemlösung zu kommen. Dies gilt ganz besonders für mathematische Beweise. Wenn das Interesse der Schüler(innen) geweckt ist und wenn sie für die Arbeit motiviert sind, sind gute Erfolge wahrscheinlicher.

Beweisen setzt nicht nur ein ausreichendes Faktenwissen voraus, sondern auch *Wissen um Argumentationsmuster* und gültige Schlussfolgerungen (vgl. Reiss 2009, S. 6). Grundsätzliche Argumentationsstrategien, wie beispielsweise die Strategie, durch geeignete Visualisierungen oder durch die Verwendung von Variablen Verallgemeinerungen vorzunehmen, kann man nicht einfach voraussetzen, sondern sie müssen im Mathematikunterricht erst erlernt werden.

Der Sprache kommt beim Begründen eine große Bedeutung zu. Eine Unterscheidung muss zwischen der *natürlichen Sprache* und der *mathematischen Fachsprache* vorgenommen werden. Aussagen und Probleme der Wissenschaft lassen sich im Allgemeinen nicht mehr in der natürlichen Sprache formulieren, sondern werden in einer Sprache ausgedrückt, die zwar noch gewisse Züge mit der natürlichen Sprache gemein hat, sich aber in vielen Aspekten von ihr unterscheidet. Mathematische Sachverhalte werden also in einer eigenen Fachsprache, in Symbolen, Bildern und Diagrammen ausgedrückt. Diese Sprache zeichnet sich dadurch aus, dass sie präziser, eindeutiger, flexibler und allgemeiner ist. Die natürliche Sprache hingegen ist aufgrund ihrer Kontextabhängigkeit eher für konkrete Anwendungen geeignet. Dennoch verwenden beide Sprachen in vielen Fällen dieselben Wörter, die jedoch nicht unbedingt die selbe Bedeutung haben müssen. Das Wort *„ähnlich“* hat im Satz *Zwei Dreiecke sind einander ähnlich,* *wenn sie in entsprechenden Winkelgrößen übereinstimmen* eine andere Bedeutung als im Satz *Das Kind sieht seiner Mutter ähnlich.* In der Mathematik ist der Begriff genormt und darf nur unter bestimmten Voraussetzungen verwendet werden, was in der Umgangssprache nicht der Fall ist (vgl. Mormann 1981, S. 63–65). Problematisch kann das Wort *„ein“* sein, das in der Umgangssprache häufig für *genau ein* verstanden und benutzt wird (vgl. Goldberg 2002, S. 9). Ein Ziel des Unterrichts ist es, bei den Schüler(inne)n eine mathematische Fachsprache zu entwickeln und die fachsprachlichen Begriffe in der Erlebnis- und Erfahrungswelt der Schüler(innen) zu verankern. In der Geometrie geht es dabei um ein kritisches Hinterfragen von Begriffen wie Symmetrie, Ähnlichkeit, Punkt, Gerade, Dreieck, Kreis, Würfel oder Prisma. Die Umgangssprache wird im Mathematikunterricht durch die Auseinandersetzung mit der Umwelt und dem Beschreiben von Umweltphänomenen kritisch hinterfragt und präzisiert. Dies führt zu einer Ausbildung von Fachbegriffen und zu einer Fachsprache. Es soll sich eine Wechselbeziehung zwischen der natürlichen Sprache und der mathematischen Fachsprache ausbilden, die Voraussetzung für das Begründen von Sachverhalten ist (vgl. Weigand et al. 2009, S. 22).

Grundlegend ist außerdem das Wissen, dass aus einem (!) zutreffenden Beispiel noch keine allgemeine Gültigkeit abgeleitet werden kann, aber dass das Finden eines Gegenbeispiels ausreicht, um Behauptungen zu widerlegen (vgl. Jaschke 2009, S. 51). Den Schüler(inne)n muss bewusst sein, dass man immer nur endlich viele Beispiele rechnen oder konstruieren bzw. in der Geometrie nie genau messen kann. Aus diesem Grund muss eine allgemeingültige Aussage stets allgemein bewiesen werden (vgl. Heske 2002, S. 53).

Um im Unterricht eine entsprechende Beweiskultur zu etablieren, muss man *bewusst* Begründungstätigkeiten einplanen, durchführen und überprüfen. Dem Begründen muss ein gewisser Platz eingeräumt und in der Unterrichtsplanung darauf Bedacht genommen werden. Die didaktischen Vorbereitungen und Reflexionen sollen das Ziel verfolgen, das kompetenzorientierte Potenzial eines Inhalts zu erhellen. Mathematische Sachverhalte müssen daher in weitaus größerer Tiefe durchschaut und vernetzt werden. Ein kompetenzorientierter Unterricht, wie er sowohl bei den Bildungsstandards als auch bei der Zentralmatura gefordert wird, erfordert von den Lehrkräften viel didaktische Arbeit, Fantasie und Geschick. Darauf werde ich im folgenden Kapitel näher eingehen (vgl. Jaschke 2009, S. 51).

## 5.6 Methodische Überlegungen

Beweisen lernt man nicht, indem man fertige mathematische Beweise auswendig lernt. Die Fähigkeit mathematische Sachverhalte zu begründen muss erst erlernt werden und stellt für Schüler(innen) oft ein großes Problem dar. Gerade deshalb ist es wichtig, dass die Lernenden nicht nur häufig aufgefordert werden Sachverhalte zu begründen und Beweise vorgeführt bekommen, sondern dass auch methodische und didaktische Anstrengungen von Seiten der Lehrperson unternommen werden, die zu einem erhöhten Beweisverständnis der Schüler(innen) führen können.

Dies kann unter anderem durch *geeignete Begründungsaufgaben* erfolgen. Dabei ist wichtig, dass man nicht mit schwierigen Beweisen beginnt, sondern mit einfachen Aufgaben, bei denen die Schüler(innen) zum Begründen aufgefordert werden (vgl. Ulovec 2002, S. 12). Ein zu abrupter Einstieg in die Problemsituation ohne die Möglichkeit sich hinlänglich mit der Aussage vertraut zu machen kann zu Problemen in der Begründung führen (vgl. Scheungrab 2009, S. 63).

Schon bei der Aufgabenstellung können Begründungstätigkeiten durch entsprechende Zusätze initiiert werden. Mögliche *Argumentationsaufforderungen*, die in der Aufgabenstellung enthalten sind, wären zum Beispiel „Begründe dein Vorgehen!“, „Widerlege diese Behauptung durch ein Gegenbeispiel!“, „Überprüfe, ob...“, „Veranschauliche diesen Zusammenhang durch eine geeignete Zeichnung!“, oder „Gilt das immer? Überprüfe, indem du Variablen verwendest!“. Formulierungen wie diese lassen die Schülerinnen und Schüler wissen, dass eine Begründung erforderlich ist, und außerdem wird oft ein Hinweis auf die mögliche, bzw. geforderte Art der Begründung gegeben (vgl. Jaschke 2009, S. 51).

Es ist nicht immer einfach, in jeder Situation eine entsprechende Begründungsaufgabe parat zu haben, aber oft kann man aus einer traditionellen Rechen- oder Verfahrensaufgabe eine Begründungsaufgabe machen, indem man zusätzlich verlangt, das *Vorgehen zu begründen*. Dazu sind häufig nur geringfügige textliche Änderungen vonnöten. Manchmal genügt es die Aufforderung „Begründe!“ anzuhängen (vgl. Malle 2002, S. 7).

Um eine gewisse Flexibilität bei Begründungen zu erreichen, sind Schüler(innen) von Anfang an im Unterricht und bei den Hausübungen zum Argumentieren und Kommunizieren anzuregen. Auch in Leistungserhebungen wie Schularbeiten, Tests und Wiederholungen soll man sie daran gewöhnen. Der mathematische Formalismus bei der Bearbeitung der Aufgaben sollte dabei auf altersgemäßem Niveau erfolgen, der über die Jahrgangsstufen hinweg ansteigt. Eine Überbetonung formaler Aspekte wäre kontraproduktiv und würde die Aufgeschlossenheit der Schülerinnen und Schüler für eine begründende Mathematik beeinträchtigen. Außerdem könnten dadurch inhaltliche Aspekte in den Hintergrund gedrängt werden (vgl. Scheungrab 2009, S. 62).

Beweisen bzw. Begründen von Aussagen sollte somit eine *Grundhaltung* im Mathematikunterricht werden. Das Wissen um Fakten und Regeln ist ein unverzichtbarer Bestandteil mathematischer Kompetenz. Genauso wichtig aber ist, sich immer wieder zu fragen, warum Fakten und Regeln so und nicht anders lauten. Begründen ist nicht ein Thema, das zu einer bestimmten Klassenstufe und zu bestimmten Inhalten gehört. Vielmehr sind sinnvolles Begründen, logisch korrektes Argumentieren und mathematisches Beweisen Aktivitäten, die durch die ganze Schulzeit ihren angemessenen Platz im Unterricht bekommen sollten (vgl. Sattlberger & Götz 2007).

Selbst in einem in diesem Sinne guten Unterricht werden nicht alle Schüler(innen) in der Lage sein, eigenständige Beweise zu entwickeln. Trotzdem ist es notwendig, *Anlässe zum Argumentieren und Begründen* zu bieten. Mathematische Beweise verlangen eigenständiges Arbeiten der Schüler(innen). Es geht nicht darum, einen Satz vorzugeben und einen möglichst eleganten Beweis zu formulieren. Wichtig ist, dass die Lernenden die Möglichkeit zum Explorieren und Probieren haben und dadurch zu selbständigem Arbeiten angeleitet und in den Prozess der Beweisführung eingeführt werden (vgl. Reiss 2009, S. 7).

Das eigenständige Arbeiten und Lernen der Schüler(innen) setzt eine eher *zurückhaltende Rolle des Lehrers/der Lehrerin* voraus. Er/Sie sollte sich mehr wie ein(e) Berater(in) verhalten, der/die bei Bedarf unterstützend eingreift, als wie ein(e) Vermittler(in) von Wissen (vgl. Lorbeer & Reiss 2009, S. 23). Kooperative und kommunikative Unterrichtsmethoden, durch die ein Austausch von Ideen und Begründungen innerhalb der Klasse möglich werden, sind günstig, um die Argumentationsfähigkeit der Schüler(innen) zu verbessern (vgl. Jaschke 2009, S. 51). Dabei muss einer Phase des (freien) Austausches eine der Konsolidierung folgen.

Wie schon oben erwähnt sind *Beweisstrategien* eine wichtige Voraussetzung für das Begründen im Unterricht. Schüler(innen) wissen oft nicht, was sie tun können, dürfen oder müssen. Daher ist es wichtig, ihnen immer wieder nützliche Beweisstrategien bewusst zu machen. Bevor man eine Behauptung bzw. einen Satz zu beweisen versucht, ist es sinnvoll, bereits bekannte Strategien durchzugehen und auf ihre Nützlichkeit in Bezug auf den zu beweisenden Satz zu überprüfen. In diesem Zusammenhang können dies folgende Strategien sein:

- Skizze anfertigen,
- Hilfslinien einzeichnen,
- auf bekannten Satz zurückführen,
- Spezialfälle überprüfen,
- Vorwärtsarbeiten, also von den Voraussetzungen ausgehen um zur Behauptung zu gelangen,
- Rückwärtsarbeiten, das heißt von der Behauptung ausgehen, um sie auf eine bekannte Aussage zurückzuführen,
- Vollständige Induktion,
- Indirekte Beweisführung.

Bevor die Schüler(innen) einen Beweis führen sollen, kann man mit diesen das *Umfeld des zu beweisenden Satzes ausleuchten*. In der Gesamtgruppe wird besprochen, welche bekannten Sätze eventuell hilfreich sein könnten und wie der

Beweis bei ähnlichen Sätzen geführt wurde. Auch die Frage, ob sich der Sinn des Satzes durch Handlungen, Bilder, Zeichen und die Sprache darstellen und erschließen lässt, kann im Vorhinein geklärt werden. Im Rahmen dieser Untersuchungen vertieft sich das Verständnis für die Aussage des Satzes und eventuell entwickelt sich sogar schon eine Beweisidee. Es besteht auch die Möglichkeit, in einem Unterrichtsgespräch die entscheidende Beweisidee herauszuarbeiten und zu fixieren. Den Schüler(inne)n bleibt dann nur noch die konkrete Beweisführung, welche in Einzel- oder Partnerarbeit durchgeführt werden kann.

Um die Beweiskompetenz der Schüler(innen) zu fördern, kann man auch eine *retrospektive Beweisanalyse* durchführen. Ein gefundener Beweis wird dahingehend überprüft, ob alle notwendigen Voraussetzungen benutzt wurden, ob man sogar auf eine verzichten hätte können oder ob Voraussetzungen ergänzt werden müssen. Es kann auch überlegt werden, ob man den Beweis verkürzen oder eleganter darstellen kann (vgl. Heske 2002, S. 54). Ebenso fördert eine *Reflexion auf unterschiedlichen Metaebenen*, die sich durch folgende Fragestellungen auszeichnet, das Beweisverständnis der Schüler(innen) (vgl. Jaschke 2009, S. 51):

- Wie sind wir vorgegangen?
- Warum war diese Vorgehensweise erfolgreich?
- Reichen die gewonnenen Erkenntnisse aus, um die Allgemeingültigkeit der mathematischen Behauptung zu belegen, oder sind weitere Überlegungen notwendig?
- Wie viele Beispiele braucht man, um von einer Regelhaftigkeit sprechen zu können?
- Warum reicht ein Gegenbeispiel aus, um eine Behauptung zu widerlegen?
- Welche Vorteile bringt der Gebrauch von Variablen bei Begründungsaufgaben?

Eine Methode des Beweisens im Unterricht ist die des *„Beweispuzzles“*. Dabei erhalten die Schüler(innen) einen in Papierstreifen zerschnittenen vollständigen Beweis, bestehend aus Argumenten, Behauptungen, Sätzen und Definitionen. Ihre Aufgabe besteht nun darin, die Schnipsel in der richtigen Reihenfolge anzuordnen, also die Puzzleteile zum Beweis zusammenzufügen. Der Beweis zum Satz des Thales kann beispielsweise auf diese Art und Weise erarbeitet werden (vgl. Heske 2002, S. 54).

Es können auch Kärtchen mit typisch fehlerhaften und/oder überflüssigen Argumenten dabei sein. In diesem Fall müssen die Lernenden nicht nur den korrekten Beweis zusammenbasteln, sondern sie sind auch beim Auswählen gefordert. Das Führen eines Beweises anhand eines Beweispuzzles stellt eine Entlastung bei dem Prozess des Auswählens und Ordnens dar. Das Verständnis der

Argumentationslinie im Beweis ist jedoch auch bei dieser Methode das Wesentliche. Diese Arbeitsweise eignet sich sowohl für Einzel- also auch für Partnerarbeitsphasen (vgl. Ufer & Heinze 2009, S. 46).

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Schüler(innen) einen *zweiten Beweis zu einem Satz führen* zu lassen. Nachdem ein Beweis eines Satzes vom Lehrer/von der Lehrerin dargestellt wurde, lässt man die Schüler(innen) einen zweiten Beweis finden. In der Geometrie ist diese Variante besonders geeignet, da es zum Beispiel zum Satz von Pythagoras eine Fülle an Beweisen gibt. Es wird wahrscheinlich notwendig und sinnvoll sein, die Beweisfigur vorzugeben.

Die Beweisfindung kann auch durch ein Arbeitsblatt gelenkt werden. Dieses enthält *Anweisungen* für die Ausführung in Einzelarbeit des jeweils nächsten Schrittes.

Ebenfalls in Form eines Arbeitsblattes können die Lernenden einen *lückenhaften Beweis* vervollständigen. Die Schüler(innen) erhalten einen Beweis, in dem einzelne Zeilen oder Terme entfernt worden sind. Ihre Aufgabe besteht nun darin, diese Lücken zu füllen und dadurch den Beweis zu komplettieren.

Man kann die Schülerinnen und Schüler auch einen *analogen Beweis führen* lassen. Dies bietet sich dann an, wenn die entscheidende Beweisidee eines vorgestellten Beweises auf weitere Sätze im Rahmen einer Satzgruppe übertragbar ist.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Schüler(innen) *Beweise vergleichen* zu lassen. Die Lernenden erhalten zwei verschiedene Beweise zu einem Satz und sollen diese nachvollziehen und hinsichtlich der verwendeten Sätze untersuchen. Sie erhalten die Aufgabe, sich begründet für einen Beweis aufgrund von Kriterien, z. B. der Anschaulichkeit, der Einfachheit und der Eleganz, zu entscheiden.

Sehr unkompliziert ist auch die Möglichkeit, dass Schüler(innen) formale Beweise ausarbeiten, indem sie einzelne vorgegebene *Beweisschritte begründen*.

Außerdem kann man unter den Lernenden auch *fehlerhafte Beweise* verteilen mit der Arbeitsanweisung, diese auf Fehler zu überprüfen. Es muss entschieden werden, ob die Fehler behoben werden können oder ob die Beweisführung irreparabel ist.

Neben diesen schüler(innen)zentrierten Methoden besteht immer auch die Möglichkeit, dass der Lehrer/die Lehrerin einen *Beweis vorträgt* oder dies in einem Schüler(innen)referat passiert. Dies bietet sich dann an, wenn ein Beweis sehr schwierig ist, sodass er von der Mehrheit der Lernenden nicht gefunden werden kann. Außerdem wird dadurch verhindert, dass die Schüler(innen) in einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch nur Stichworte nennen oder sogar beginnen nur herumzuraten. Die Erklärungen im Rahmen des Vortrags können zu einem tieferen Verständnis führen als ein vom Lehrer bzw. von der Lehrerin trichterförmig gelenktes Vorgehen nach der Trial-and-Error-Methode. Wird ein Beweis durch einen Vortrag präsentiert, ist es jedoch wichtig, dass man bei der Darstellung z. B. verschiedenfarbige Schriften benutzt, um Beziehungen und Unterscheidungen klar herauszustellen (vgl. Heske 2002, S. 52).

Goldberg schreibt, wie sich der Umgang mit Beweisen in ihren Klassen bewährt hat. Um im Mathematikunterricht eine Beweiskultur entstehen zu lassen, ist für sie die Atmosphäre von Bedeutung. Die Schüler(innen) müssen zum *fachlichen Streiten* befähigt werden. Dafür brauchen diese Raum und Gelegenheit. Man muss ihnen die Angst nehmen einmal etwas Falsches zu sagen, das heißt, es muss eine Atmosphäre geschaffen werden, in der die Lernenden ihre Erkenntnisse vorstellen und verteidigen wollen. In Stillarbeitsphasen beschäftigt sich jede(r) Schüler(in) mit der gestellten Aufgabe. Ein(e) Schüler(in), der/die sich nicht sicher ist, ob er/sie die Aufgabe richtig lösen kann, kommt an die Tafel und entwickelt die Lösung dort. Danach entspinnt sich in der Klasse eine Diskussion über den an der Tafel skizzierten Lösungsweg. Fehler werden gesucht und richtige Schritte werden verteidigt. Der Lehrer/die Lehrerin greift manchmal lenkend und als Fachexperte/Fachexpertin ein. Dabei ist wichtig, dass die Lernenden zum einen befähigt werden sinnvolle Fragen zu stellen und zum anderen auch den Mut haben diese zu äußern. Diese Fragen sollen dann im Idealfall von den anderen Schüler(innen) aufgegriffen und bearbeitet werden. Verhalten sich die Schüler(innen) zu wenig kritisch und zweifeln zu wenig, bringt sich der Lehrer/die Lehrerin ein. Goldberg empfiehlt außerdem, dass Ergebnisse nicht einfach nur verglichen werden sollen oder dass nicht nur die Lehrerin/der Lehrer entscheidet, welches Ergebnis richtig ist und welches falsch. Es sollte zur Gewohnheit werden, dass die Lernenden entscheiden, welches Ergebnis richtig ist nach erfolgter Argumentation. Haben die Schüler(innen) unterschiedliche Ergebnisse, so werden sie aufgefordert, sachlich zu begründen, bis sie sich selbst sicher sind, welches Ergebnis das richtige ist, und auch die anderen überzeugt haben (vgl. Goldberg 2002, S. 11).

Bei jeder Beweisführung ist wichtig, dass deutlich herausgestrichen wird, was hergeleitet bzw. was bewiesen werden soll. In einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch werden kaum sinnvolle Vorschläge von den Lernenden kommen, wenn ihnen nicht bewusst ist, worauf die Lehrperson hinauswill.

In vielen Fällen ist es sinnvoll zunächst konkrete Probleme zu lösen, bevor nach einer allgemeinen Lösung gesucht wird. Durch den Vergleich zweier ähnlicher Probleme kann man die Suche nach einer allgemeinen Lösung motivieren. Es soll dabei auch thematisiert werden, an welcher Stelle das Problem bereits gelöst ist und ab wo nur noch eine Vereinfachung der Terme stattfindet (vgl. Heske 2002, S. 52).

## 5.7 Beweisen mittels dynamischer Geometriesoftware

Begründen im Geometrieunterricht muss nicht unbedingt in der Klasse an der Tafel passieren. Dynamische Geometriesoftware hat didaktisches Potential, um das Argumentieren und Begründen zu entwickeln und zum Beweis hinzuführen.

Dynamische Geometriesoftware (DGS), wie z. B. *DynaGeo*, *GeoGebra* oder *Geonext*, stellen alle Zirkel-und-Lineal-Operationen zur Verfügung, es können also Punkte, Geraden, Halbgeraden, Strecken, Dreiecke, Vielecke und Kreise sowie Schnittpunkte dieser Objekte in der Ebene gezeichnet und konstruiert werden. Darüber hinaus sind aber auch „Geodreieck-Operationen" wie das Abtragen von Winkeln vorgegebener Größe und das Einzeichnen von Strecken bestimmter Länge möglich. Außerdem findet man in Konstruktionsmenüs auch noch eine Auswahl von häufig benötigten Konstruktionen wie das Zeichnen von Parallelen, (Mittel-)Senkrechten und Winkelhalbierenden sowie Messfunktionen für Streckenlängen und Winkelgrößen. DGS gehen weit über die Möglichkeiten von Zirkel und Lineal hinaus. So ist etwa auch das Arbeiten mit Kongruenzabbildungen, wie z. B. Spiegelungen oder Verschiebungen, möglich. Streckenlängen, Entfernungen, Winkelgrößen und Flächeninhalte können gemessen werden, um eventuelle Gesetzmäßigkeiten leichter sichtbar zu machen (vgl. Weigand et al., S. 62, S. 76–78).

Schüler(innen) verfügen in der Regel noch nicht a priori über die Fähigkeit, im Besonderen das Allgemeine und anhand einer einzelnen Zeichnung im Kopf eine Zugfigur zu sehen. Erst durch eigene Erfahrungen muss diese Kompetenz mittels DGS aufgebaut werden. Für die Umsetzung von visuell-dynamischen Beweisen im Unterricht bieten sich interaktive elektronische Arbeitsblätter an, die aus zum Teil vorgegebenen Konstruktionen und einer integrierten Aufgabenstellung bestehen.
Die Gültigkeit des *Höhensatzes* lässt sich durch folgende Konstruktion in *GeoGebra* in Abbildung 5.8 leicht einsehen.

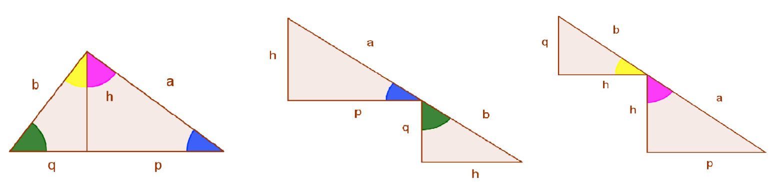


Abbildung 5.8: Höhensatz

Man geht vom linken Dreieck in der Abbildung aus und unterteilt dieses in zwei Teildreiecke. Diese werden so verschoben, dass zwei neue, kongruente Dreiecke (Mitte und rechts) entstehen. Durch den Zugmodus können die Schüler(innen) die Verschiebung selbst durchführen und können so einsehen, dass sich die Längen der Hypotenusenabschnitte $p$ und $q$, der Höhe $h$ und natürlich auch die der Seiten des Ausgangsdreiecks durch die Verschiebung und Drehung nicht ändern. Auch die Winkel sind invariant. Die beiden so entstandenen rechtwinkeligen Dreiecke sind wie schon bemerkt kongruent, da sie in beiden Kathetenlängen übereinstimmen. Weil die Fläche der Teildreiecke in beiden Figuren gleich groß ist, müssen auch die Restflächen gleich groß sein. Und somit gilt $h^2 = p \cdot q$.

Durch den *Zugmodus* kann man das Ausgangsobjekt variieren und so lässt sich die Gültigkeit einer Konstruktion an sehr vielen Einzelfällen überprüfen. Dies ist ein großer Vorteil gegenüber Zeichnungen mit Zirkel und Lineal im Heft. Will man mehrere Einzelfälle betrachten, um einen Sachverhalt zu erschließen, so erweist sich dies ohne Computer als sehr mühsam.
In folgender Abbildung kann man im Algebrafenster den Flächeninhalt des Deltoids ablesen. Verschiebt man die Diagonale $e$ im rechten Winkel zu $f$ nach oben bzw. nach unten, ohne die Länge dabei zu verändern, so erhalten die Längen der Seiten $a$ und $b$ andere Maße. Der Flächeninhalt ist jedoch immer gleich.

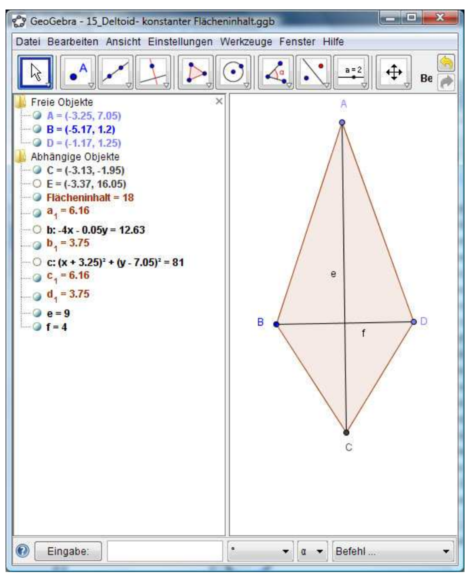


Abbildung 5.9: Deltoid

Diese Erkenntnis führt zur Vermutung, dass der Flächeninhalt nur von den Diagonalen $e$ und $f$ abhängt. Dies wiederum dient als Grundlage für die (Begründung der) Flächenformel $A = \frac{e \cdot f}{2}$ des Deltoids.

Das Variieren der Ausgangsobjekte ermöglicht außerdem das Entdecken von

Gesetzmäßigkeiten, Zusammenhängen, Eigenschaften und Sätzen.
Mit DGS können beispielsweise der Inkreismittelpunkt $I$, der Umkreismittelpunkt $U$, der Höhenschnittpunkt $H$ und der Schwerpunkt $S$ eines Dreiecks konstruiert und die Veränderung ihrer Lage im Zugmodus betrachtet werden. Dabei ergibt sich die Vermutung, dass $U$, $S$ und $H$ stets auf einer Geraden, der sogenannten *Euler-Geraden*, liegen. Im Zugmodus können Zusammenhänge zwischen der Gestalt des Dreiecks und der Lage des Inkreismittelpunktes zur Euler-Geraden entdeckt und mit Symmetrieargumenten begründet werden, dass bei gleichschenkeligen Dreiecken $I$ auch auf dieser Geraden liegt und dass beim gleichseitigen Dreieck alle betrachteten besonderen Punkte zusammenfallen. Abhängig von der Gestalt des Dreiecks kann man herausfinden, wann die Strecke $UH$ ganz im Inneren des Dreiecks liegt, wann $U$ und $H$ außerhalb des Dreiecks liegen und wann sie auf dem Rand des Dreiecks liegen. Durch dynamische Messung lässt sich herausfinden, dass $S$ die Strecke $UH$ im Verhältnis $2:1$ teilt (vgl. Elschenbroich 2002, S. 57).

DGS ermöglicht es nicht nur, im Zugmodus Konstruktionen zu variieren, man kann dabei auch bestimmte Punkte eine Spur bzw. eine Ortslinie zeichnen lassen (Ortslinienfunktion). Diese Funktion visualisiert die Bewegung von konstruierten Punkten beim Variieren von Ausgangsobjekten und ist damit ein Hilfsmittel im Rahmen von Problemlöseprozessen. Dabei kann es erforderlich sein, eine Konstruktion durch Weglassen von Bedingungen beweglich zu machen. Bei folgender Konstruktion eignet sich das Zeichnen einer Ortslinie.

**Beispiel:** Gegeben sind drei parallele Geraden $a$, $b$ und $c$. Es soll ein gleichseitiges Dreieck $ABC$ konstruiert werden, dessen drei Eckpunkte jeweils auf einer der drei gegebenen parallelen Geraden liegen. Dazu wird ein gleichseitiges Dreieck konstruiert, dessen Eckpunkte $C$ auf $c$ und $B$ auf $b$ liegen.

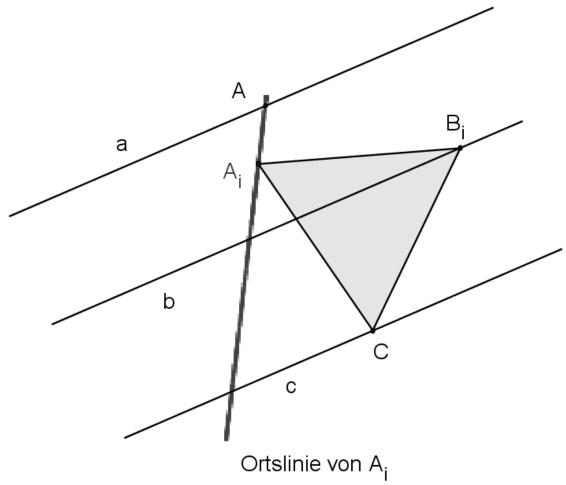


Abbildung 5.10: Ortslinie von $A_i$

Bei festem $C$ wird der Punkt $B_i$ längs $b$ variiert, sodass das Dreieck gleichseitig bleibt, und es wird die Ortslinie des Punktes $A_i$ gezeichnet. Der Schnittpunkt dieser Ortslinie mit der Parallelen $a$ liefert den gesuchten Punkt $A$ (Abbildung 5.10). Da $C$ fest ist und $A$ durch den Schnittpunkt mit der Ortslinie gefunden wird, ist die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks festgelegt (vgl. Weigand et al. 2009, S. 73).

In diesem Zusammenhang stellt die Konstruktion mit DGS eine Zeitersparnis dar, die für Begründungstätigkeiten genutzt werden kann. Die Einsicht in die Problemstellung wird gefördert und ein Konstruktionshinweis wird gegeben. Betrachtet man mehrere Punkte $B_i$ auf $b$ und markiert die dadurch gewonnenen Punkte $A_i$, so sieht man, dass alle Punkte $A_i$ auf einer Geraden liegen, welche die Gerade $a$ im gesuchten Punkt $A$ schneidet.

Der Geometrieunterricht bekommt durch den Einsatz von DGS neue Impulse und Möglichkeiten, dennoch birgt er auch Gefahren und Probleme. In perfekt visualisierten Arbeitsmaterialien liegt die Gefahr, dass Schüler(innen) irrtümlich meinen, sie hätten alles verstanden, weil es im Zugmodus so einfach geht und einsichtig ist. Die zugrundeliegende Mathematik wird durch die Visualisierung aber meist nicht einfacher, sondern wird möglicherweise durch das Unterschätzen und dem Steckenbleiben an der Oberfläche unzugänglicher.

Schüler(innen) können durch eine Flut animierter Bilder in ihrer selbstständigen kognitiven Tätigkeit behindert werden, da sie nicht wie bei einem statischen Bild zum Vorstellen gezwungen sind.

Beim Arbeiten mit DGS besteht die Gefahr einer Beschränkung auf experimentelles Arbeiten. Durch bloßes Feststellen von Invarianten wird die Frage nach dem „Warum“ nicht beantwortet oder kann dadurch noch weiter in den

Hintergrund treten.

Eine Figur und ihre Transformation liefern noch keinen Beweis, sondern nur die *Entdeckung* eventueller Invarianten. Diese kann selbst mit dem Rechner nur für eine endliche Anzahl von Beispielen verifiziert werden und deshalb ist keine Allgemeingültigkeit gesichert. Auch das bloße Messen der Winkelsumme im Dreieck in einem Termfenster beim Variieren des Dreiecks oder nur das Messen der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks und ihr Vergleich mit dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats führen zwar zu einer richtigen Vermutung, aber nicht zu einem Beweis.

Didaktisch entscheidend ist, dass die visuellen Möglichkeiten nicht nur zur Illustration und zur Multimediashow genutzt werden, sondern als Basis für eine erweiterte Eigentätigkeit der Lernenden. DGS ist also ein Werkzeug, das sinnvoll eingesetzt Möglichkeiten eröffnet, besser Mathematik zu lehren und zu lernen in dem Sinne, dass Inhalte besser verstanden, Einsichten in Problemstellungen gewonnen, Invarianten erlebt und Beweisideen entwickelt werden können. Die Aufgabe der Lehrer(innen) besteht nun darin, geeignete Lehr-/Lernmaterialien zu erarbeiten und DGS verantwortungsbewusst im Unterricht einzusetzen (vgl. Elschenbroich 2002, S. 56).

# Kapitel 6

# Geometrie

Der Ursprung des Wortes *Geometrie* liegt im Griechischen und bedeutet *Erdmessung*. Die Geometrie hat eine lange Geschichte und wird auch in (fast) allen Klassenstufen der Schule gelehrt. Dabei bilden die Elemente des Euklid nach wie vor die zentrale Grundlage für die Geometrie an den Gymnasien. In der Oberstufe hat sich die analytische Geometrie in Verbindung mit der linearen Algebra durchgesetzt (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 1).

## 6.1 Die Ursprünge der Geometrie und ihre Entwicklung

Lange bevor die Schrift entwickelt wurde, hat der Mensch geometrische Strukturen wahrgenommen und auch systematisch verarbeitet. Ausgrabungen belegen bereits eine frühe geometrische Praxis. Auf Schmuck-, Kult- und Gebrauchsgegenständen fand man bestimmte Muster und Ornamente. Spezielle Formen wurden bei Ausgrabungen von Bauten gefunden. Auffallend dabei ist der Sinn für Regelmäßigkeit und Symmetrie. Gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Rechteck, Kreis, Quader, Würfel, Zylinder sind anscheinend seit frühester Zeit bekannt (vgl. Mainzer 1980, S. 19).

Bedürfnisse und Tätigkeiten des Alltags regten geometrische Überlegungen an. So kamen beispielsweise beim Anlegen von Gräben und Dämmen, beim Hausbau und bei Feldmessungen elementargeometrische Beziehungen zur Anwendung. Wirtschaft, Handel, Bauwesen und Himmelsbeobachtungen gaben allgemein Anlass zu mathematischen Überlegungen.

Mathematiker aus Babylonien und Ägypten berechneten bereits Flächeninhalte von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken und Volumina von (einfachen) Prismen, um das Fassungsvermögen von quaderförmigen und zylinderförmigen Behältnissen und Speichern zu bestimmen. Auch Näherungsberechnungen von Kegel- und Pyramidenstumpf waren bekannt (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 6). Viele Jahrhunderte vor Pythagoras kannten die Babylonier bereits den unter dem heutigen Namen bekannten *Lehrsatz des Pythagoras*, was ihre Mathematik über die der ägyptischen Zeitgenossen hob. In der babylonischen Mathematik entwickelte sich bereits eine Vorform der Trigonometrie. Dennoch war das Winkelmaß im heutigen Sinne nicht bekannt (vgl. Mainzer 1980, S. 23).

In allen vorgriechischen Kulturen kamen geometrische Elemente in vielfältiger Weise zum Tragen. Unmittelbar einsichtige Beziehungen waren bekannt und wurden in der Praxis benutzt. Erst die Griechen fragten nach einer Begründung. So gelangten sie zu einem axiomatischen Aufbau der geometrischen Theorie, wie sie in den *„Elementen"* des Euklid überliefert wurde (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 6). War die Geometrie bisher eines unter anderen Anwendungsgebieten einer vorwiegend rechnerisch ausgerichteten Mathematik, so wurde sie in der griechischen Antike zum *Kern* und *Hauptgebiet* der *gesamten Mathematik*.

Die Anfänge der griechischen Geometrie bei Thales und den Pythagoreern zeichnen sich nicht so sehr durch neue Entdeckungen und Erfindungen aus. Gab es davor nur rezeptartige Musteraufgaben, so wurden schließlich allgemeine Sätze bewiesen. Die babylonische Rechenregel über Katheten- und Hypotenusenquadrate am rechtwinkeligen Dreieck wurden zum *Lehrsatz des Pythagoras* und die Geometrie zur beweisenden Wissenschaft (vgl. Mainzer 1980, S. 26). Für die frühe Entwicklung der Mathematik bei den Griechen und auch für die Folgezeit gibt es jedoch keine sicheren Mitteilungen.

Als erster griechischer Geometer wird *Thales von Milet* (624–547 v. Chr.) genannt. Folgende von ihm stammende Sätze wurden sinngemäß überliefert:

- Die Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck sind gleich groß.
- Die Scheitelwinkel zwischen zwei einander schneidenden Geraden sind gleich groß.
- Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt.
- Der Durchmesser halbiert den Kreis.
- Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang und halbieren einander.
- Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter.

Dass diese Sätze von Thales gefunden wurden, bedeutet, dass er zumindest der Erste war, der diese Aussagen explizit formulierte. Es könnte auch bedeuten, dass er der Erste war, der Begründungen für ihre Richtigkeit vorgebracht hat. Bei Thales tritt erstmals der Begriff des Winkels auf, der durch den Schnitt zweier Geraden entsteht. Thales, so wird berichtet, habe außerdem die Höhe großer Gebäude mit Hilfe ihres Schattens ermittelt. Dazu hatte er die Tageszeit abgewartet, in der sein eigener Schatten gleich lang war wie er selbst. Daraus ist zu schließen, dass er schon mit Ähnlichkeitsbeziehungen umgehen konnte (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 31–35).

Ein weiterer Mathematiker, der die Geometrie stark geprägt hat, ist *Pythagoras von Samos* (ca. 572 v. C.). Er folgt in der Chronologie auf *Thales*. Sein mathematisches Wissen soll sich Pythagoras bei Thales und auf Reisen nach Babylonien und Ägypten erworben haben. Pythagoras gründete in Unteritalien eine religiös-philosophische Lebensgemeinschaft. Die pythagoreische Philosophie war der Überzeugung, dass alle Eigenschaften der Welt durch ganze Zahlenverhältnisse bestimmt seien (vgl. Mainzer 1980, S. 28–29).

*Hippasos von Metapont (ca. 450 v. Chr.)* entdeckte durch das Studium des Verhältnisses von der Seite $s$ und der Diagonale $d$ eines Pentagramms, für welches $d = s \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gilt, die Existenz der Inkommensurabilität (vgl. Hischer 2000, S. 98, 100). Es kam somit zu der umstürzenden Erkenntnis der Existenz irrationaler Verhältnisse. Und dies führte zur ersten Grundlagenkrise der Mathematik nach Ansicht vieler Forscher (vgl. Scriba & Schreiber 2001, S. 35–36). Nach Auffassung der Pythagoreer umfasste die Arithmetik nur die Theorie ganzer Zahlen und somit reichte sie nicht mehr aus, um die Welt mathematisch zu beschreiben. An ihre Stelle musste daher die Geometrie treten (vgl. Mainzer 1980, S. 30). Bis heute lässt sich nicht mit Gewissheit sagen, was in der Geometrie von Pythagoras selbst und was von seinen Anhängern stammt (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 35).

Etwa 300 Jahre v. Chr. schrieb der griechische Mathematiker *Euklid*, der in Alexandria forschte und lehrte, das Buch *Die Elemente*. Über ihn selbst ist sehr wenig bekannt, doch sein Werk war so folgenreich für die gesamte Mathematik, dass der Name Euklid häufig als Synonym für Mathematik bzw. Geometrie benutzt wurde. Nach wie vor ist er in ständigem Gebrauch in Zusammenhängen wie *euklidischer Raum*, *euklidische Geometrie* und *euklidische Metrik*. In Euklids Hauptwerk *Die Elemente* wurden die Erkenntnisse älterer griechischer Mathematiker zusammengefasst, verbunden und ergänzt. Er präsentierte das damals vorhandene mathematische Wissen in einer systematischen Weise in Form von Definitionen, Axiomen, Postulaten, Sätzen, Beweisen und Problemen (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 49–54).

In den Wissenschaftslehren des Mittelalters wurden insbesondere Algebra und Arithmetik von indischen und arabischen Mathematikern weiterentwickelt. In der Geometrie interessierten sie sich hauptsächlich für die Trigonometrie, da diese für die Astronomie von Bedeutung war. Indische Astronomen verfügten bereits über eine Art von Sinusfunktion. Die Übersetzungen griechischer Geometrietexte und die Fortschritte der Algebra bereiteten den Boden für die Entwicklung der analytischen Geometrie (vgl. Mainzer 1980, S. 79).

Unter dem Einfluss der Indisch-arabischen Kalkül- und Rechentechnik und der technischen Geometrie der europäischen Renaissance begannen mit dem 17. Jahrhundert die Arithmetisierung und Algebraisierung der Geometrie und die Untersuchungen von Kurvengleichungen. Die neuen Erkenntnisse der Algebra und Trigonometrie des 15. und 16. Jahrhunderts wurden durch *Descartes* und *Fermat* auch in der Geometrie wirksam. In der analytischen Geometrie entstanden präzise algebraische Methoden (vgl. Mainzer 1980, S. 14, 92). Das Koordinatensystem, das eine algebraische Behandlung geometrischer Probleme erst ermöglicht, wurde von René Descartes und Pierre de Fermat nahezu gleichzeitig und im Wesentlichen unabhängig voneinander um 1637 begründet (Scriba & Schreiber 2000, S. 300). Fermat ist die allgemeine Idee, Kurven durch die Koordinaten der Punkte der Kurve anzugeben, zuzuschreiben. Bei Descartes sind nur jene Kurven zulässig, die durch algebraische Gleichungen dargestellt werden können. Dennoch ist das Koordinatensystem nach Descartes benannt, denn er war der Erste, der eine ganze, einheitliche Theorie auf Basis von Koordinatensystemen entwickelt hat, nämlich die Kurvenklassifikation nach dem aufsteigenden Grad der Kurven. Dies brachte dem Koordinatensystem und auch der analytischen Geometrie den wirklichen Durchbruch (vgl. Ramharter 2005, S. 25–26).

In der Geometrie entstanden Praxisbezüge zur Astronomie, Geodäsie, Kartographie, Mechanik, Optik und zu den bildenden Künsten. Die Beschäftigung mit den dadurch entstandenen neuen Problemen führte zur Entstehung des Funktionsbegriffs, der Koordinatenmethode, der Differential- und Integralrechnung (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 1). Ebenfalls im 17. Jahrhundert fand *Bonaventura Cavalieri* eine Möglichkeit zur Berechnung von Inhalten mittels Indivisiblen. Indivisiblen sind „unendlich dünne" parallele Schichten, in die man sich eine Fläche oder einen Körper zerlegt denken kann. Ergibt sich durch den Vergleich zweier auf die gleiche Basis gestellter Flächen bzw. Körper, dass ihre Parallelschnitte zur Basis in jeder Höhe über der Basis den gleichen Inhalt haben, so schließt Cavalieri daraus, dass ihre Inhalte insgesamt gleich sind. Die Wurzeln der Differentialrechnung sind ebenfalls in dieser Zeit zu finden (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 314–315).

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts zeichnete sich die Geometrie durch ein wachsendes Interesse an einer anschaulichen, nicht-analytischen Geometrie aus. Diese fand Anwendung in den technischen Zeichnungen der Anatomie, Botanik und Architektur. Mitte des 18. Jahrhunderts herrschte noch die Überzeugung, dass die Formen der räumlichen Anschauung und die der Koordinatengeometrie der Physik den Gesetzen der Euklidischen Geometrie unterliegen (vgl. Mainzer 1980, S. 14). Gegen Ende des 18. Jahrhunderts trat der synthetischen Geometrie Euklids die analytische Geometrie von *Monge* und *Lacroix* zur Seite. Monge vertrat bereits den Standpunkt, wonach die Formeln der analytischen Geometrie keiner Rechtfertigung durch Figurenkonstruktionen bedürfen, sondern durch die analytischen Verfahren alleine gerechtfertigt sind (vgl. Mainzer 1980, S. 134).

Das 19. Jahrhundert brachte eine enorme Umfangs- und Bedeutungserweiterung der Geometrie. Im gesamten 19. Jahrhundert war die Geometrie nach allgemeiner Einschätzung neben der Analysis *das* Hauptgebiet der Mathematik und seinerseits sehr stark verzweigt. Es kristallisierten sich die wesentlichen Richtungen heutiger geometrischer Forschung heraus. Dazu zählen projektive und

$n$-dimensionale Geometrie, Vektorrechnung, nichteuklidische Geometrie, Differentialgeometrie und Topologie (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 2).

In Frankreich führte die Tradition der darstellenden Geometrie zur Ausbildung der projektiven Geometrie *Poncelets*. Philosophische Überlegungen über beliebig dimensionale Räume bei *Herbart* regten *Hermann Graßmann* zu seinen Untersuchungen $n$-dimensionaler „Ausdehnungen" an, die zusammen mit *Cayleys* Untersuchungen wesentlich auf die Entwicklung der linearen Algebra und Vektorgeometrie einwirkten. Die Beschäftigung von *Gauß* mit nicht-euklidischer Geometrie und seiner Weiterentwicklung der Eulerschen Kurven- und Flächentheorie führte schließlich zu seiner Differentialgeometrie zweidimensionaler Flächen, die von Riemann für den $n$-dimensionalen Raum verallgemeinert wurde (vgl. Manzer 1980, S. 134). *Gauß*, *Bolyai* und *Lobatschewski* legten dar, dass es Geometrien gibt, die den Euklidischen Axiomen mit Ausnahme des Parallelenaxioms genügen. Dies sind die „Nicht-euklidischen Geometrien", die man in hyperbolische und elliptische Geometrien untergliedern kann (vgl. Wellstein & Kirsche 2009, S. 2).

Einer der einflussreichsten Mathematiker des ausgehenden 19. und beginnenden 20. Jahrhunderts war *David Hilbert* (1862–1943). Er tat einen wichtigen Schritt im Hinblick auf einen systematischen Aufbau der Geometrie mit seinem Werk „Grundlagen der Geometrie", das 1899 erschienen ist. Anders als bei Euklid enthält das Axiomensystem von Hilbert keine Erklärungen über die Art der Objekte, sondern nur Aussagen über deren gegenseitige Beziehung (vgl. Mainzer 1980, S. 187–188).

Keime der geometrischen Wahrscheinlichkeits- und Maßtheorie, Graphentheorie und Polyedergeometrie liegen im 19. Jahrhundert, zur vollen Entfaltung kam es dann erst im 20. Jahrhundert. Die Entstehung dieser neuen geometrischen Disziplinen ging einher mit der Auflösung des bis dahin herrschenden Verständnisses der Geometrie als Wissenschaft vom „wahren physikalischen Raum". Schließlich besteht die Geometrie seit dieser Zeit aus einer großen Menge an Fakten über den zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum und einer Vielzahl an ungelösten Fragen auch in anderen Räumen. Andererseits kann man Geometrie heute nicht mehr als Teilgebiet der Mathematik im herkömmlichen Sinne verstehen, sondern als eine Betrachtungsweise, die in fast jedem Teilgebiet der Mathematik anzutreffen ist. So gibt es eine geometrische Zahlentheorie, eine geometrische Funktionstheorie, algebraische Geometrie und geometrische Stochastik. Es gibt geometrische Methoden in der Variationsrechnung, aber auch diskrete und kombinatorische Geometrie sowie Computergeometrie. Dennoch ist der euklidische Raum, auch wenn er nach Erkenntnissen der Physik nur eine grobe Annäherung an die Wirklichkeit ist, ein passendes mathematisches Modell für alle „alltäglichen" Probleme (vgl. Scriba & Schreiber 2000, S. 2).

## 6.2 Das Verhältnis der Geometrie zu anderen Bereichen der Schulmathematik

Die Geometrie steht nicht isoliert neben anderen Disziplinen der Mathematik. Vielmehr werden ihre Probleme oft mit algebraischen oder analytischen Methoden formuliert und bearbeitet (vgl. Scheid 2001, S. 6). Arithmetische und algebraische Gesichtspunkte nehmen im Laufe der Schulzeit zunehmend eine größere Rolle ein.

In (fast) der gesamten Schulzeit werden geometrische Figuren untersucht und zunehmend auch Berechnungen an diesen durchgeführt. Schon in der Volksschule werden Flächeninhalte von Rechtecken berechnet. In der AHS-Unterstufe, Hauptschule und KMS erfahren diese Berechnungen eine Erweiterung auf Parallelogramme, Dreiecke und weitere ebene Figuren bis hin zum Kreis. Durch die Betrachtung der Innenwinkelsumme können Winkelgrößen aus anderen Winkelgrößen von Figuren berechnet werden und auf dieser Grundlage komplexere Problemstellungen gelöst werden. Nach der Behandlung der *Strahlensätze* und der *Ähnlichkeit* geometrischer Figuren kann man unbekannte Längen durch ähnliche Dreiecke und durch die Einbettung in Strahlensatzfiguren berechnen. Der *Satz von Pythagoras* eröffnet weitere Berechnungsmöglichkeiten von Streckenlängen und es ergeben sich vielfältige Anwendungen, die darauf beruhen, Figuren in rechtwinkelige Teildreiecke zu zerlegen. Schon ab der ersten Klasse werden Körper im Raum untersucht und deren Volumina und Oberfläche berechnet. In der ersten Klasse beschränkt sich dies auf den Quader und einfache daraus zusammengesetze Figuren. Später werden dann Prismen und Pyramiden betrachtet, schließlich Kugel, Zylinder und Kegel. Eine Erweiterung der Berechnungsmöglichkeiten ist durch die Trigonometrie gegeben.

Die *Trigonometrie* – im AHS-Lehrplan in der fünften Klasse angesiedelt – ist ein Gebiet der Mathematik, die Zusammenhänge zwischen Geometrie und Algebra herstellt. Das Wort „Trigonometrie" kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Dreiecksmessung". Damit sind weniger unmittelbare Messungen gemeint, sondern Berechnungen unbekannter Größen in Dreiecken. Trigonometrische Überlegungen geben Anhaltspunkte für die „Berechenbarkeit" fehlender Größen. Viele Inhalte des Geometrieunterrichts der Unterstufe werden in der Trigonometrie aufgegriffen und geometrische Objekte und Zusammenhänge werden in wesentlich stärkerem Maße rechnerisch behandelt.

Die *Trigonometrie* ist ein Werkzeug für Anwendungen in der ebenen Geometrie und der Raumgeometrie. Ebenso findet sie Verwendung in der Physik und Architektur. Hinsichtlich der benötigten Größen erweitern sich die Möglichkeiten von Flächen- und Volumsberechnungen erheblich. Die trigonometrischen Funktionen stellen Zusammenhänge zwischen Winkeln und Längen her (vgl. Weigand et al. 2009, S. 239–243).

Auch in der *analytischen Geometrie* stehen Berechnungen im Vordergrund.

Unter *analytischer Geometrie* versteht man im Allgemeinen die Methode des Übersetzens geometrischer Probleme in algebraische, wobei ein Koordinatensystem der „Übersetzung“ dient. Geometrische Sachverhalte werden algebraisch beschrieben und umgekehrt werden algebraische Sachverhalte geometrisch interpretiert (vgl. Scheid 2001, S. 166). In der traditionellen analytischen Geometrie werden Punkte durch Koordinaten eines Koordinatensystems beschrieben. Geometrische Figuren und Sachverhalte werden mit Hilfe von Koordinatengleichungen bzw. Systemen von Koordinatengleichungen beschrieben. Die algebraische Lösung eines geometrischen Problems kann auch koordinatenfrei erfolgen, indem man mit Pfeilvektoren und deren Verknüpfung arbeitet (vgl. Tietze, Klika & Wolpers 2000, S. 61, bzw. S. 94 ff. in dieser Arbeit).

Die *analytische Geometrie* ist im Lehrplan der AHS-Oberstufe in fast allen Klassen verankert. In der fünften Klasse beschränkt sich die analytische Geometrie auf die Ebene. Die Schüler(innen) sollen Operationen wie die Addition und Multiplikation von Vektoren geometrisch veranschaulichen und geometrische Aufgaben unter Einbeziehung der Elementargeometrie lösen können. In der sechsten Klasse wird die analytische Geometrie auf den Raum ausgeweitet. Bekannte Begriffe und Methoden aus der zweidimensionalen analytischen Geometrie werden auf den dreidimensionalen Raum übertragen. Geometrische Aufgaben unter Einbeziehung der Elementargeometrie und der Trigonometrie werden gelöst. In der siebenten Klasse werden die *Kegelschnitte* behandelt. Diese gehören dem Bereich der nichtlinearen analytischen Geometrie an.

Geometrische Berechnungen findet man auch noch in anderen Bereichen der Schulmathematik, wie z. B. bei den komplexen Zahlen. Ebene geometrische Probleme kann man statt in einem kartesischen Koordinatensystem in der komplexen Zahlenebene formulieren. Extremwertaufgaben in der Differentialrechnung haben oft geometrische Fragestellungen. Mit Hilfe der Integralrechnung, die in der achten Klasse angesiedelt ist, lassen sich ebenfalls Flächen- und Volumsberechnungen durchführen (vgl. Lehrplan für die AHS-Oberstufe).

Durch die Integration der Algebra in den Geometrieunterricht kann man Ergebnisse der Geometrie verallgemeinern. Verallgemeinern ist hier in dem Sinne zu verstehen, dass die Vorstellungen der Schüler(innen) von einer konkreten Figur losgelöst werden sollen und dadurch der gedanklich einbezogene Gegenstandsbereich erweitert wird. Die Lernenden sollen z. B. bei der Berechnung von Dreiecksflächeninhalten bedenken, dass dieser nur durch seine Variablen „Seite“ und „zugehörige Höhe“ festgelegt wird. Dieses Verständnis kann durch die Einbeziehung algebraischer Notationen und Operationen erreicht und gefestigt werden (vgl. Mormann 1981, S. 182).

## 6.3 Ziele des Geometrieunterrichts

Der Geometrieunterricht verfolgt eine Reihe von Zielen, wobei man zwischen *allgemeinen Zielen* und *inhaltsspezifischen Zielen* unterscheiden muss. Bei den allgemeinen Zielen sollen die Schüler(innen) Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse erwerben, die über den Geometrieunterricht hinausweisen und für die Teilnahme am gesellschaftlichen und politischen Leben sowie für die Persönlichkeitsentwicklung des Einzelnen von Bedeutung sind.

Ein zentrales Ziel des Geometrieunterrichts ist die *Erschließung der Umwelt*. Die Geometrie trägt dazu bei, die Welt um uns mit mathematischen Begriffen zu ordnen und zu interpretieren. Durch die bewusste Wahrnehmung der Umwelt und durch das Interpretieren von Phänomenen erfährt man mehr über die uns umgebende Welt. Man lernt die Umwelt mit anderen Augen zu sehen. Zwischen der Geometrie und der Umwelt soll sich eine Wechselbeziehung ausbilden. Zum einen hilft die Umwelt, anschauliche Vorstellungen über geometrische Begriffe und Verfahren auszubilden, und andererseits kann man mit Hilfe mathematischer Begriffe die Umwelt analysieren, beurteilen und interpretieren. Folgende Begriffe lassen sich beispielsweise mit Hilfe der Umwelt verdeutlichen:

- in Verpackungen geometrische Körper erkennen,
- Erkennen und Klassifizieren von Symmetrien in Tapetenmustern, Schneekristallen, Bodenfliesen und Kirchenfenstern,
- Erkennen geometrischer Kurven beim Flug eines Basketballs, bei Brückenbögen und Autobahnauffahrten,
- Verdeutlichen von Begriffen wie Kante, Ecke und Fläche an realen Körpern,
- Ausbilden des Winkelbegriffs durch Blick- und Winkelfelder beim menschlichen Sehen.

Die Umwelt ist reich an Phänomenen, Objekten und Vorgängen, die Quelle für geometrische Fragestellungen sein können. Viele Gegenstände können mit geometrischen Begriffe beschrieben werden. Die Frage danach, warum Bodenfliesen meist quadratisch oder sechseckig sind, lässt sich mit der Geometrie beantworten (vgl. Weigand et al. 2009, S. 13–22). Wittmann schreibt, dass die Wissenschaft Mathematik und somit auch die Geometrie nur als integraler Bestandteil der menschlichen Kultur einen Sinn hat und dass ihr Bildungswert nicht in ihr selbst, sondern in ihren Bezügen zu unserer Welt liegt (vgl. Wittmann 1987, S. VI).

Im Geometrieunterricht sollen die Schüler(innen) *logisch schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen* kennen lernen und entwickeln. Diese sind grundlegend für wissenschaftliches Denken und Arbeiten, aber auch wichtig und zentral für die Persönlichkeitsentwicklung des/r Einzelnen, für sein/ihr Handeln in Beruf und Gesellschaft. Das *Argumentieren* und *Verbalisieren* sind dabei notwendige Kompetenzen. Die Geometrie eignet sich also besonders für das Erlernen des Argumentierens und *Begründens*, da gerade geometrisches Arbeiten auf verschiedenen Darstellungsebenen erfolgen kann. Geometrische Problemstellungen können in enaktiver Form (Darstellung durch

Handlungen), in ikonischer Form (Darstellung mittels Bilder) und in symbolischer Form (Darstellung durch Sprache und Zeichen) bearbeitet werden. Dadurch ergeben sich für das Auffinden von Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten, das Aufstellen von Vermutungen und das Begründen unterschiedliche Zugangs- und Argumentationsebenen. Die Bedeutung des Verbalisierens und der Sprache in diesem Zusammenhang wurde bereits im Kapitel 5.5 abgehandelt (vgl. Weigand et al. 2009, S. 13–22).

Der Erwerb von *Problemlösungskompetenz* stellt ein zentrales Ziel des Geometrieunterrichts dar und ist eine Grundlage für eine verständige Erschließung unserer Umwelt. Die Geometrie ist ein Übungsfeld für das Problemlösen und das Erlernen von Strategien des Problemlösens. Sie eignet sich deshalb sehr gut dafür, weil sich viele geometrische Probleme in Modellen, Skizzen und Zeichnungen gut veranschaulichen lassen. Außerdem sind die Handlungsobjekte in der euklidischen Geometrie überschaubar und die erlaubten Handlungen, etwa Operationen mit Zirkel und Lineal, gut nachvollziehbar. Ein Hauptziel des Geometrieunterrichts unter dem Aspekt des Problemlösens ist, bei den Schüler(inne)n die Freude am Problemlösen zu wecken und ihre Fähigkeit zum Lösen geometrischer Probleme zu fördern. Das Problemlösen wird als ein wesentlicher Aspekt eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts gesehen. Es geht nicht nur darum, einzelne geometrische Probleme zu bearbeiten, sondern die Orientierung an inner- und außermathematischen Problemen ist eine Grundlage eines Geometrieunterrichts, der die Schüler(innen) zu vielfältigen Aktivitäten anregt (vgl. Weigand et al. 2009, S. 23–25).

Die Schulung des *räumlichen Vorstellungsvermögens* wird als weiteres Ziel des Geometrieunterrichts gesehen. Wir leben in einer räumlichen Welt. Den Raum wahrzunehmen, sich darin zu orientieren und auch in der Vorstellung damit zu operieren, sind menschliche Qualifikationen von lebenspraktischer Bedeutung (vgl. Franke 2000, S. 29). Wittmann meint sogar, dass ein entsprechender Geometrieunterricht die Wahrnehmungs- und Gestaltungsfähigkeit der Schüler(innen) fördern kann (vgl. Wittmann 1987, S. V).

Diese *allgemeinen Ziele* des Geometrieunterrichts werden durch das Arbeiten und die Auseinandersetzung mit spezifischen geometrischen Inhalten erreicht. Die Schüler(innen) erwerben damit nicht nur allgemeine Kompetenzen, sondern entwickeln auch Kenntnisse über geometrische Begriffe und Verfahren sowie Fähigkeiten und Fertigkeiten im Umgang mit geometrischen Inhalten. *Inhaltsspezifische Ziele* beziehen sich auf Kompetenzen der Schüler(innen) bezüglich zentraler Inhalte im Geometrieunterricht. Für den Geometrieunterricht sind *das Verständnis geometrischer Begriffe und ihrer Eigenschaften, das Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen* und *das Erkennen der Beziehungen zwischen Geometrie und Wirklichkeit* zentrale Ziele. Diese Ziele stehen im Unterricht in enger Wechselbeziehung zueinander. Da durch die Beschäftigung mit spezifischen Inhalten allgemeine Kompetenzen erworben werden, stehen inhaltsspezifische Ziele im Zusammenhang mit den allgemeinen Zielen des Geometrieunterrichts.

Der Geometrieunterricht soll dazu führen, dass die Lernenden ein *Verständnis grundlegender Begriffe* entwickeln. Die Lernenden sollen angemessene Vorstellungen und Kenntnisse über diese Begriffe sowie Fähigkeiten im Umgang mit diesen Begriffen und deren Eigenschaften aufbauen. Die Schüler(innen) sollen Denkstrukturen entwickeln, die das Wissen über den Begriff repräsentieren und die insbesondere die Beziehungen zu bereits gelernten Begriffen enthalten. Das Verständnis dieser Begriffe zeigt sich im Unterricht dann darin, dass die Lernenden im Rahmen von Problemstellungen mit diesen Begriffen operieren können. Eine Forderung an den Geometrieunterricht besteht darin, dass die Schüler(innen) Beziehungen zwischen geometrischen Begriffen, Eigenschaften und Sätzen erkennen. Eine Vernetzung soll auch zwischen den Gebieten der Mathematik erfolgen. Die Geometrie hängt vor allem mit der Algebra eng zusammen. Außerdem soll eine Verbindung der Geometrie zu außermathematischen Gebieten angestrebt werden. Dies kann die Umwelt oder die Lebenswelt der Schüler(innen) sein, aber auch andere Wissenschaften wie die Biologie, Physik, Astronomie und Architektur.

Ein weiteres Ziel des Geometrieunterrichts ist das *Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen*. Dabei geht es um die Begriffsbildung und die Einordnung in ein Begriffsnetz, das Finden und Aufstellen mathematischer Sätze, das Begründen und Beweisen von Sätzen, das inner- und außermathematische Anwenden von Sätzen, das Messen und Berechnen und das Aufstellen und Abarbeiten von Algorithmen.

Der Geometrieunterricht zielt wie schon erwähnt auf das *Erkennen der Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit*. Unser Leben findet in einem uns umgebenden Raum statt, die Schulgeometrie jedoch in erster Linie auf dem zweidimensionalen Zeichenblatt. Die euklidische Geometrie der Ebene lässt sich gut auf einem Zeichenblatt darstellen und erhält dadurch einen überschaubaren Charakter. Das Einbeziehen der dreidimensionalen Geometrie ist jedoch auch ein zentrales Ziel des Unterrichts. Durch die Raumgeometrie können Umweltbezüge aufgezeigt werden. Viele geometrische Objekte gibt es nur im Raum. Begriffe wie „parallel“, „senkrecht“ oder „kongruent“ erfahren im Raum eine Erweiterung gegenüber ihrer Definition in der Ebene. Für den Unterricht ist von Bedeutung, dass eine Beziehung zwischen der Umwelt und der Schulgeometrie und dem zwei- und dreidimensionalen Raum hergestellt wird. Das dazu notwendige Wissen über Raum und Form betrifft das Erkennen und Beschreiben geometrischer Objekte und deren Eigenschaften, das Darstellen von und Operieren mit Figuren und Körpern und deren Anwendung in inner- und außermathematischen Situationen (vgl. Weigand et al. 2009, S. 24–39).

## 6.4 Kompetenzorientierter Geometrieunterricht konkret in der AHS

Folgende geplante Unterrichtsstunden sollen dazu beitragen, dass Schüler(innen) Kompetenzen erwerben, die zum einen von den Bildungsstandards gefordert werden und andererseits auch bei der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung einen hohen Stellenwert haben. Das „Begründen und Argumentieren“ wird im Zentrum jeder Unterrichtseinheit stehen.

Die Stundenbilder der ersten vier Klassen orientieren sich am Kompetenzmodell der Bildungsstandards, wobei der Handlungsbereich *Argumentieren und Begründen* (H4) dominiert.

### 6.4.1 1. Klasse

In dieser Unterrichtsstunde geht es um die Abhängigkeit des Flächeninhalts und des Umfangs von Rechteck und Quadrat von den Seitenlängen.

**Vorangegangene Stunden:** Flächeninhalt und Umfang von Rechteck und Quadrat

**Materialien & Medien:** Overheadprojektor, Overheadfolie, Arbeitsblatt

**Methoden:** Gruppenarbeit, Einzelarbeit

**Ziele:**

- Die Lernenden sollen Beziehungen zwischen geometrischen Begriffen und Eigenschaften, insbesondere die Abhängigkeit des Umfangs und des Flächeninhalts von Quadrat und Rechteck von der Länge der Seiten erkennen.
- Erlernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: Die Art der besagten Abhängigkeit soll argumentativ belegt bzw. bewiesen werden können.
- Die Lernenden sollen daher logisch-schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen kennen lernen und entwickeln.
- Ausbildung einer Wechselbeziehung zwischen Geometrie und Umwelt: Rechtecke werden in idealisierter Form oft in unserer Umgebung wahrgenommen: z. B. Grundstücke bzw. Teile davon.

**1. Phase: Aufwärmübung**

Zu Beginn der Stunde legt der/die Lehrer(in) eine Overheadfolie mit drei einfachen Aufgaben auf, die von jedem/jeder Schüler(in) in Einzelarbeit im Kopf gelöst werden. Wichtige Inhalte der vergangenen Stunden sollen dadurch in Erinnerung gerufen und wiederholt werden. Die Schüler(innen) haben einige Minuten um die Lösungen der folgenden Aufgaben in ihren Schulübungsheften zu notieren.

1. Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?

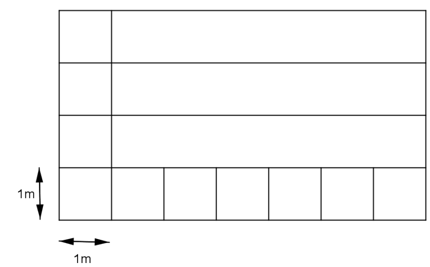


Abbildung 6.1: Rechteck

2. Berechne den Umfang des Quadrats mit der Seitenlänge $a = 3\,cm$!
3. Gib eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang der Figur an!

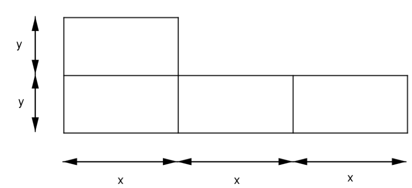


Abbildung 6.2: Flächenformel

Wenn dies beendet ist, tauscht der/ die Lehrer(in) das Angabenblatt gegen die Folie mit den Lösungen. Die Schüler(innen) kontrollieren sich selbst und erhalten dadurch Rückmeldungen über ihre Kompetenzen im jeweiligen Stoffgebiet (vgl. Kraker, Plattner, Preis & Schliegel 2009).

**2. Phase: Gruppenarbeit**

Bevor die Klasse in Gruppen zu jeweils vier Personen aufgeteilt wird, ruft der/ die Lehrer(in) Begründungsmöglichkeiten, wie in Kapitel 5.4, bei den Lernenden in Erinnerung. In der Gesamtgruppe wird besprochen, wie man Behauptungen widerlegen kann und wie man Aussagen begründen kann. Der Möglichkeit durch geeignete Visualisierung oder durch die Verwendung von Variablen stehen dabei im Vordergrund. Dennoch erhalten die Schüler(innen) die Möglichkeit auf individuelle Weise vorzugehen, wie z. B. durch Zeichnen oder Ausschneiden von

Quadraten. Im Anschluss daran erhält jede Gruppe ein Arbeitsblatt mit folgenden Aufgaben:

1. Susi behauptet: Wenn man die Seitenlänge eines Quadrats verdoppelt, verdoppelt sich auch sein Flächeninhalt. Untersucht ob diese Behauptung richtig ist!

2. Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn man

   - (a) die Länge $a$ verdoppelt?
   - (b) die Breite $b$ verdoppelt?
   - (c) die Länge $a$ und die Breite $b$ verdoppelt?

   Besprecht eure Ideen in der Gruppe!

3. Martin behauptet: „Der Umfang eines Rechtecks verdoppelt sich, wenn man die Länge einer Seite verdoppelt.“ Hat Martin Recht? Wenn ja, begründet seine Behauptung! Wenn seine Aussage nicht stimmt findet heraus, wie man dann die Längen der Rechteckseiten ändern muss, damit sich der Umfang verdoppelt!

4. Frau Maier sagt zu ihrem Mann: „Unser rechteckiger Gemüsegarten ist mir zu klein. Der Garten sollte eine doppelt so große Anbaufläche haben.“ Herr Maier antwortet: „Wir haben genug Platz. Wir machen einfach jede Seite doppelt so lang. Und weil ich deinen Wunsch kenne, habe ich auch schon eine neue, im Vergleich zur jetzigen doppelt so lange Beeteinfassung gekauft.“ Schreibt auf, was Frau Bauer ihrem Mann antworten wird, wenn sie sich die Antwort genauer überlegt hat (Neureiter, Fürst, Mürwald & Preis 2010, S. 58–59)!

5. Ein Kleingarten ist $8,4\,m$ lang und hat einen Flächeninhalt von $63,84\,m^2$. Berechnet die Breite des Gartens! Ein anderer Garten ist doppelt so lang und sein Flächeninhalt ist doppelt so groß wie der des ersten. Ist auch seine Breite doppelt so groß? Begründet eure Antwort (vgl. Reichel & Humenberger 2007, S. 234)!

6. Ein Quadrat hat die Seitenlänge $a = 24\,cm$. Wie verändert sich der Umfang, wenn die Seitenlänge halbiert wird? Begründet eure Behauptung (vgl. Hanisch, Benischek, Hauer-Typpelt & Sattlberger 2007, S. 214)!

Bei all den Aufgaben sind die Flächen- und Umfangsformeln von Rechteck und Quadrat grundlegend und dienen gleichzeitig als Argumentationsbasis. Die Aufwärmübungen sollen das Zustandekommen dieser Formeln ins Gedächtnis rufen und zu einem tiefergründigen Verständnis führen, das bei den Aufgaben in der Phase 2 vorausgesetzt wird.

Bei den Begründungen der vorangegangenen Aufgaben stehen den Lernenden verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Sowohl algebraische und zeichnerische Argumentationen als auch das Widerlegen von Aussagen durch ein Gegenbeispiel sind dabei zielführend (vgl. 5.4 Arten des Begründens). Wissen um gültige Argumentationsmuster ist dabei also erforderlich (vgl. auch 5.5 Grundlagen der Beweiskompetenz).

Bei Aufgabe 1 und 3 lässt sich die Behauptung durch Angabe eines Gegenbeispiels widerlegen. Dies kann sowohl rechnerisch als auch durch eine geeignete Zeichnung geschehen. Bei der zweiten Fragestellung der Aufgabe 3 sollen die Lernenden erkennen, dass beide Seitenlängen eines Rechtecks verdoppelt werden müssen damit sich auch der Umfang verdoppelt.

Anhand einer Zeichnung kann man bei Aufgabe 2 begründen, dass sich der Flächeninhalt verdoppelt, wenn man die Seite $a$ *oder* (im ausschließenden Sinn) die Seite $b$ verdoppelt. Ebenfalls ist aus einer geeigneten Zeichnung ersichtlich, dass sich der Flächeninhalt vervierfacht, wenn man beide Seitenlängen verdoppelt.

Bei Aufgabe 4 wird Frau Maier ihren Mann wohl belehren müssen, dass sich die Anbaufläche nicht verdoppelt sondern vervierfacht, wenn man beide Seitenlängen verdoppelt. Und somit passt zwar zur doppelten Anbaufläche keine doppelt so lange Beeteinfassung, aber letztere genügt der Verdoppelung der Seitenlängen.

Die Breite in Aufgabe 5 lässt sich durch eine einfache Äquivalenzumformung der Flächenformel für das Rechteck berechnen. Um zu zeigen, dass man die Breite nicht auch verdoppeln muss, eignet sich eine rechnerische Argumentation. Man nimmt sowohl für den Flächeninhalt den doppelt so großen Wert, als auch für eine der beiden Seitenlängen und setzt diese Werte in die Flächenformel für das Rechteck ein. Man sieht, dass die Gleichung mit diesen Zahlenwerten erfüllt ist.

Bei Aufgabe 6 erkennt man durch die Berechnung des Umfangs mit der Seitenlänge $a$ und der halbierten Seitenlänge $\frac{a}{2}$ am Ergebnis, dass sich der Umfang dadurch halbiert. Für eine allgemeine Begründung ist es sinnvoll, in der Umfangsformel $\frac{a}{2}$ statt $a$ zu verwenden. Dadurch ergibt sich für den Umfang des Quadrats mit halbierter Seitenlänge $U_{\frac{a}{2}} = 2 \cdot a$.

### 3. Phase: Vertiefung in der Gesamtgruppe

Am Ende der Stunde werden von jeder Gruppe ein bis zwei Aufgaben präsentiert. Die anderen Gruppen sind aufgefordert mitzudenken um Fehler zu erkennen und Begründungslücken zu schließen. Andere Ansichten können eingebracht, ihnen kann entgegnet und sie können verteidigt werden.

**Kompetenzen:**

- Einen gegebenen mathematischen Sachverhalt (graphisch) in eine andere Darstellungsform (algebraisch) übertragen um den Flächeninhalt eines Rechtecks zu berechnen. Dazu ist eine unmittelbar aus dem Kontext erkennbare direkte Anwendung von mathematischen Kenntnissen erforderlich: (H1, I3, K1).

- Elementare Rechenoperationen mit konkreten Zahlen durchführen um den Umfang eines Quadrats zu berechnen, wobei Fertigkeiten geringer Komplexität erforderlich sind und eine direkte Anwendung von mathematischen Tätigkeiten verlangt wird: (H2, I3, K1).

- Alltagssprachliche Formulierungen in die Sprache/Darstellung der Mathematik übersetzen um Zusammenhänge zwischen Seitenlängen und Flächeninhalt bzw. Umfang von Quadrat und Rechteck auszudrücken. Dies erfordert das Herstellen von Verbindungen: (H1, I3, K2).

- Unzutreffende Behauptungen bezüglich der besagten Zusammenhänge erkennen und widerlegen und Entscheidungen für eine bestimmte Sichtweise argumentativ belegen. Dies erfordert ein Nachdenken über Zusammenhänge, die aus dem dargelegten Sachverhalt nicht unmittelbar ablesbar sind: (H4, I3, K3).

- Elementare Rechenoperationen durchführen und Umformen der Flächenformel, um Seitenlängen zu berechnen. Dazu genügt eine direkte Anwendung mathematischen Wissens: (H2, I3, K1).

### 6.4.2 2. Klasse

Nun folgen zwei Unterrichtsstunden zum Thema „Winkelsumme“ im Dreieck.

**Vorangegangene Stunden:** Grundbegriffe im Dreieck, Einteilung der Dreiecke, Stufenwinkelsatz, Wechselwinkelsatz, Dreieckskonstruktionen

**Materialien & Medien:** Geodreieck, Buntpapier, Schere, Overheadfolie, Overheadprojektor

**Ziele:**

- Verständnis grundlegender Begriffe: Die Lernenden sollen die Aussage, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt, selbst entdecken und formulieren können. Sie sollen den Begriff des Außenwinkels kennen und anwenden können.

- Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: eine Beweisidee für den Winkelsummensatz im Dreieck entwickeln und einen Beweis für die Aussage führen können. Eine Begründung dafür anführen können, dass der Außenwinkel gleich der Summe der nicht anliegenden Innenwinkel ist.

- Logisch schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen sollen also kennen gelernt und entwickelt werden.

- Erwerb von Problemlösungskompetenz: z. B. beim Finden einer Möglichkeit die Winkelsumme im Viereck zu begründen.

**1. Phase: Einstieg**

Jede(r) Schüler(in) erhält ein Stück Buntpapier mit dem Arbeitsauftrag zwei kongruente Dreiecke zu zeichnen. Anschließend soll jede(r) Schüler(in) die Winkel mit $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ beschriften, messen und die Summe der drei Winkel berechnen.

**2. Phase: Auswertung**

Im „Lehrer(in)-Schüler(in)-Gespräch“ werden nun die Ergebnisse an der Tafel gesammelt. In dieser Phase sollen die Schüler(innen) zu der Vermutung kommen, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° beträgt.
Folgende Fragen sollen bei den Schüler(inne)n ein Beweisbedürfnis wecken:

- Gilt das für alle Dreiecke oder gibt es Gegenbeispiele?
- Kann es sein, dass die Winkelsumme bei ganz großen Dreiecken größer als 180° ist?
- Reicht „messen“ aus, um die Vermutung zu bestätigen?
- Warum beträgt die Winkelsumme im Dreieck nicht $179{,}9°$ oder $180{,}1°$?

Dabei wird Wissen über gültige Argumentationsmuster und Schlussfolgerungen erworben und wiederholt. Die Schüler(innen) sollen unter anderem erfahren, dass es nicht ausreicht, (noch so) viele Einzelfälle zu überprüfen. Für die Allgemeingültigkeit ist eine schlüssige Begründung erforderlich (vgl. 5.5 Grundlagen der Beweiskompetenz). Diese Unterrichtsphase dient in erster Linie dem Finden einer Vermutung (vgl. 5.3 Der Weg zum Beweis).

**3. Phase: Vermutung bestärken**

Nun sollen die Schüler(innen) die beiden Dreiecke ausschneiden und eines davon ins Heft kleben. Beim zweiten werden die Ecken abgerissen. Durch geschicktes Zusammenlegen sollen die Schüler(innen) eine Beweisidee für die gewonnene Vermutung entwickeln. Diese Phase kann in Einzel- oder Partnerarbeit stattfinden.

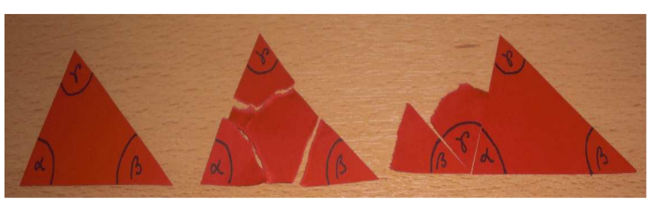

Abbildung 6.3: Winkelsumme im Dreieck

#### 4. Phase: Vorstellen der Ergebnisse

Nun können einzelne Schüler(innen) ihre Ergebnisse vorstellen. Dazu dient eine vorbereitete Overheadfolie, auf der sich ein Dreieck befindet. Abgeschnittene, bewegliche Dreiecksecken eines kongruenten Dreiecks mit beschrifteten Winkeln dienen der anschaulichen Präsentation der Ergebnisse. Schließlich werden die Ideen in der Gesamtgruppe diskutiert.

#### 5. Phase: Entwickeln einer Begründung

An dieser Stelle ist die Vermutung bereits gefunden und formuliert. Nach den Phasen eines Beweisprozesses (vgl. 5.3 Der Weg zum Beweis) kann dazu übergegangen werden eine Beweisidee zu generieren. Zu Beginn wird eine Zeichnung angefertigt, entsprechend der vorangehenden Übung. Hinweisende Fragen über die Vorgehensweise beim Zusammenlegen mit den Buntpapierdreiecken sollen den Schüler(inne)n beim Anfertigen der Zeichnung behilflich sein. Ausgehend von den Ideen der Schüler(innen) wird nun ein begründeter Beweis über die Winkelsumme geführt (Abbildung 6.4).

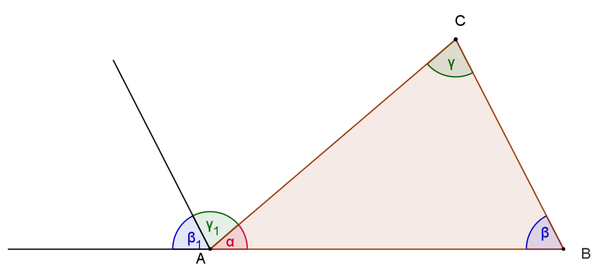


Abbildung 6.4: Winkelsumme im Dreieck

Die Seite $c$ wird über den Punkt $A$ hinaus verlängert und durch den Punkt $A$ wird eine Parallele zur Seite $a$ gezogen. Beim Punkt $A$ entsteht ein gestreckter Winkel. Nun fehlt noch eine Begründung, warum in der Zeichnung $\beta = \beta_1$ und $\gamma = \gamma_1$ ist.

Dazu kann es erforderlich sein, folgendes Wissen zu aktivieren: Wechselwinkelsatz und die Eigenschaft, dass sich Winkelgrößen, wenn man sie verschiebt, nicht verändern (Stufenwinkelsatz), dienen als Argumentationsbasis, auf die man sich in Begründungen beziehen kann (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

Der Winkel $\beta_1$ entsteht durch Verschiebung des Winkels $\beta$. Dadurch ändert sich die Größe des Winkels nicht. Die Winkel $\gamma$ und $\gamma_1$ sind als Wechselwinkel ebenfalls gleich groß (vgl. Reichel & Humenberger 2008, S. 193).

Die Schüler(innen) werden darauf hingewiesen, dass es auch viele andere Möglichkeiten gibt, die Winkel zu einem gestreckten Winkel zusammenzulegen. Man könnte beispielsweise eine Parallele zu Seite $c$ durch den Punkt $C$ ziehen. In diesem Fall erhält man im Punkt $C$ einen gestreckten Winkel. $\alpha_1$ und $\beta_1$

sind als Wechselwinkel gleich groß wie $\alpha$ und $\beta$. Als Hausübung könnten die Schüler(innen) diese Variante beweisen. Dies ist eine Möglichkeit, bei den Schüler(inne)n die Beweiskompetenz zu schulen, da sie in diesem Fall eigenständig einen analogen Beweis führen können (vgl. 5.6 Methodische Überlegungen).

Eine weitere Möglichkeit bestünde darin, die Seite $b$ über den Punkt $C$ hinaus zu verlängern. In diesem Fall benötigt man für die Begründung sowohl den Wechselwinkel- als auch den Stufenwinkelsatz.

An dieser Stelle wäre ein mögliches Stundenende.

**6. Phase: Anwenden und Üben**

Schließlich können die Lernenden das neu gewonnene Wissen in folgender Aufgabe anwenden.

**Aufgabe:** In den abgebildeten Dreiecken (Abbildung 6.5) fehlt jeweils die Gradzahl eines Winkels. Schätze die Winkelgrößen zuerst ab und berechne sie dann (vgl. Steiner 2001, S. 193)!

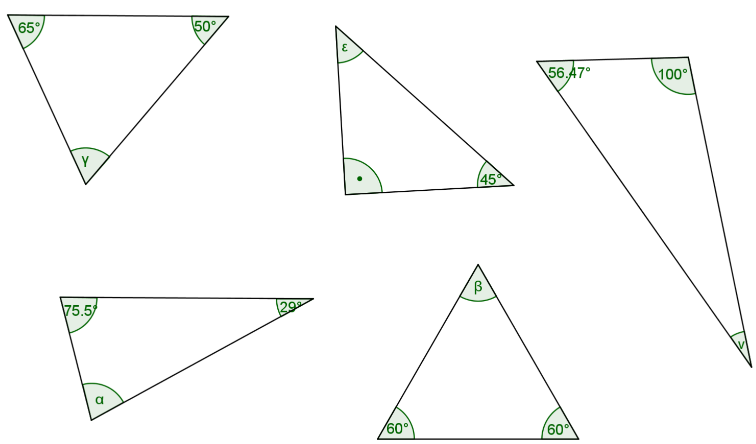


Abbildung 6.5: Winkelberechnungen

In der Folgestunde wird diese Thematik fortgesetzt.

**1. Phase: Wiederholung**

Zu Beginn der Folgestunde werden die Inhalte der vergangenen Stunde wiederholt und eventuelle Schwierigkeiten, die bei der Hausübung aufgetreten sind, besprochen.

**2. Phase: Aussagen bewerten**

Die Lernenden erhalten ein Arbeitsblatt mit Aussagen bezüglich der Winkelsumme im Dreieck, deren Richtigkeit sie beurteilen müssen. Diese Aufgabe soll in Einzelarbeit passieren. Die Buchstaben in der Klammer am Ende der *richtigen* Aussagen ergeben ein Lösungswort.

1. Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln. (E)
2. In ganz kleinen Dreiecken kann die Winkelsumme auch weniger als 180° betragen. (A)
3. Es gibt kein Dreieck mit zwei stumpfen Winkeln. (G)
4. Es gibt kein Dreieck mit drei spitzen Winkeln. (I)
5. In einem gleichseitigen Dreieck hat jeder Winkel 60°. (R)
6. Ein gestreckter Winkel hat 180°. (Ü)
7. Wenn in einem Dreieck gilt $\alpha = 35°$ und $\beta = 46°$, dann muss $\gamma = 99°$ sein. (N)
8. Wenn $\alpha = \beta = 35°$, dann muss $\gamma = 100°$ sein. (T)
9. In einem rechtwinkeligen Dreieck muss die Summe der beiden spitzen Winkel 90° betragen. (D)
10. Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°. (E)

Das Lösungswort lautet: B _ _ _ _ _ _ _ _!

Werden alle Aussagen richtig bewerten, so erhält man als Lösungswort „BEGRÜNDE“. Dies wiederum gibt einen Hinweis auf die folgende Aktivität.

**3. Phase: Aussagen begründen**

Alle richtigen Aussagen von eben lassen sich mit der Winkelsumme im Dreieck und mit grundlegenden Definitionen begründen. Die Eigenschaft der Winkelsumme im Dreieck wird nun in die Argumentationsbasis aufgenommen, da sie in der vergangenen Stunde bereits bewiesen wurde und somit ihre Gültigkeit außer Diskussion steht. Bei Frage 10 besteht eine Schwierigkeit eventuell darin, dass man daran denken muss, dass man ein Viereck in zwei Dreiecke unterteilen kann und die Winkelsumme somit $2 \cdot 180°$ beträgt.

Das Finden von Begründungen der obigen Aussagen soll zuerst in Partnerarbeit erfolgen, wobei die Lernenden ihre Begründungen in Stichworten aufschreiben sollen. Anschließend werden die Lösungen in der gesamten Klasse diskutiert.

**4. Phase: Außenwinkel des Dreiecks**

Bisher wurden die Innenwinkel eines Dreiecks betrachtet. Zu jedem der drei Innenwinkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ des Dreieck gibt es einen zugehörigen Außenwinkel $\alpha_1$, $\beta_1$ und $\gamma_1$. Jeder Außenwinkel ergänzt den zugehörigen Innenwinkel auf 180° (Abbildung 6.6).

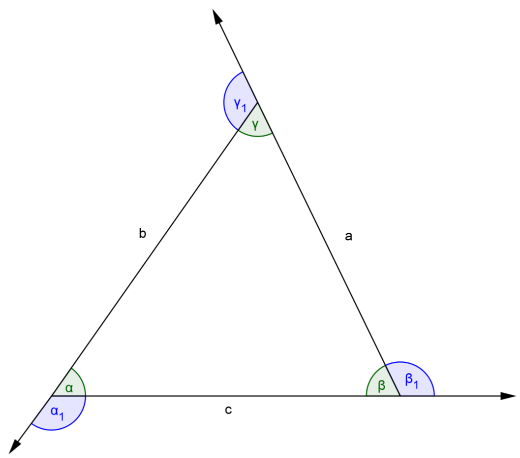


Abbildung 6.6: Außenwinkel

Nach diesem Input durch die Lehrperson folgt eine Aufgabe, welche in Einzelarbeit gelöst werden soll.

**Aufgabe:** Berechne die fehlenden Innen- und Außenwinkel! Trage diese Größen in die Figur (Abbildung 6.7) ein (vgl. Reichel & Humenberger 2008, S. 191–192)!

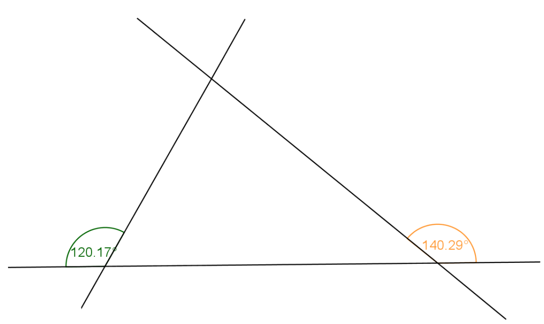


Abbildung 6.7: Fehlende Winkel berechnen

Nun werden die Ergebnisse verglichen und besprochen. Auch hierbei werden die Schüler(innen) aufgefordert zu zeigen, wie sie auf ihre Ergebnisse gekommen sind. Dies erfolgt anhand einer sprachlichen Argumentation (vgl. 5.4 Arten des Begründens), wobei sich die Begründungen einerseits auf die Eigenschaft der Winkelsumme und andererseits auf die des Außenwinkels beziehen (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

### 5. Phase: Begründen in der Gruppe

Folgende Aufgabe soll in Gruppen von ca. vier Personen diskutiert und Lösungsansätze aufgeschrieben werden.
**Aufgabe:** Jeder Außenwinkel des Dreiecks ist gleich groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel. Gib mithilfe der Zeichnung (Abbildung 6.8) den entsprechenden Beweis für den Außenwinkel $\delta$ an! Schreibe eine Begründung in eigenen Worten (Reichel & Humenberger 2008, S. 193)!

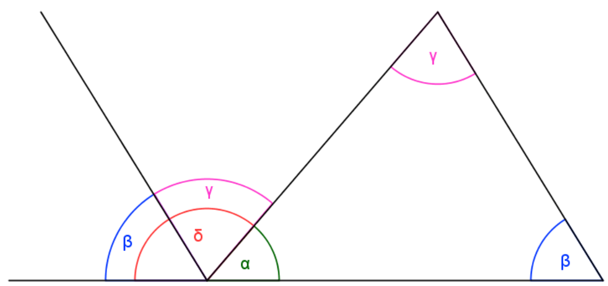


Abbildung 6.8: Außenwinkel und die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel

Um diese Begründungsaufgabe zu lösen ist Basiswissen über Dreiecke erforderlich. Die Schüler(innen) müssen unter anderem den Winkelsummensatz, Stufenwinkelsatz und Wechselwinkelsatz kennen und anwenden können (vgl. 5.5 Grundlagen der Beweiskompetenz). Den Lernenden steht frei, ob sie sich der sprachlichen oder algebraischen Argumentation bedienen. Die Argumentationsbasis besteht aus besagten Sätzen und der Eigenschaft, dass ein gestreckter Winkel 180° beträgt (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

### 6. Phase: Präsentation der Ergebnisse

Im Anschluss daran werden die Lösungsansätze besprochen und eine Person präsentiert ihr Gruppenergebnis an der Tafel. Auf eine schlüssige Begründung wird dabei geachtet. Dabei soll der Rest der Klasse eventuelle (absichtlich eingebaute) Fehler korrigieren oder (absichtlich gelassene) Beweislücken schließen und gegebenenfalls Verbesserungsvorschläge liefern. So erfolgt ein Offenlegen der Gedanken, woraus die Lehrperson Denkweisen und auch Missverständnisse der

Schüler(innen) erkennen kann (vgl. 5.1 Warum soll im Mathematikunterricht begründet werden?).

Eine Möglichkeit der Verständnisüberprüfung dieses Sachverhalts wäre, einen ähnlichen Beweis für einen anderen Außenwinkel als Hausübung zu führen (vgl. 5.6 Methodische Überlegungen).

**Kompetenzen:**

- Elementare geometrische Konstruktionen von Dreiecken und elementare Rechenoperationen (mit konkreten Zahlen) an diesen durchführen, die nur direkte Anwendung von mathematischen Verfahren erfordern: (H2, I3, K1).

- Mathematische Vermutung über die Winkelsumme im Dreieck formulieren und diesen Satz beweisen, wobei das Herstellen von Verbindungen erforderlich ist, da mehrere mathematische Begriffe und Sätze in Verbindung gebrachte werden müssen: (H4, I3, K2).

- Winkelgrößen abschätzen und elementare Rechenoperationen durchführen, wobei der Einsatz von Grundkenntnissen ausreicht: (H2, I3, K1).

- Mathematische Argumente nennen, die die Richtigkeit von Aussagen bezüglich der Winkelsumme im Dreieck belegen. Dabei ist zum Teil erforderlich, Verbindungen herzustellen, da mehrere Sätze und Begriffe miteinander verbunden werden müssen: (H4, I3, K2).

- Graphisch und in Worten gegebene mathematische Sachverhalte in eine algebraische Darstellungsform übertragen (H1) und mathematische Zusammenhänge beweisen, wobei die Herstellung von Verbindungen erforderlich ist, da für die Begründung mehrere Begriffe und Sätze verbunden werden müssen: (H4, I3, K2).

### 6.4.3 3. Klasse

In dieser Unterrichtseinheit geht es um die Ähnlichkeit.

**Materialien:** Arbeitsblätter

**Methoden:** Partnerarbeit, Gruppenarbeit

**Ziele:**

- Verständnis grundlegender Begriffe entwickeln: Die Lernenden sollen den Begriff der Ähnlichkeit in Dreiecken und Vierecken (bzw. Vielecken) definieren können.

- Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: ähnliche Figuren erkennen und ihre Ähnlichkeit begründen können.

- Also logisch schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen kennen lernen und entwickeln.
- Ausbildung einer Wechselbeziehung zwischen Geometrie und Umwelt, wobei die Umwelt hilft, anschauliche Vorstellungen über den geometrischen Begriff der Ähnlichkeit auszubilden.

**1. Phase: Partnerarbeit**

In dieser Phase sollen sich die Schüler(innen) in Partnerarbeit den Begriff der Ähnlichkeit erarbeiten. Die Hälfte der Paare erhält ein Informations- bzw. Arbeitsblatt zur Ähnlichkeit von Dreiecken und die andere Hälfte eines zur Ähnlichkeit von Vierecken.

Das Arbeitsblatt zur Ähnlichkeit von Vierecken enthält folgende Informationen und Aufgaben:

Was fällt dir bei den beiden Bildern unten (Abbildung 6.9) auf? Sind sie gleich? Was ist gleich? Was ist verschieden?

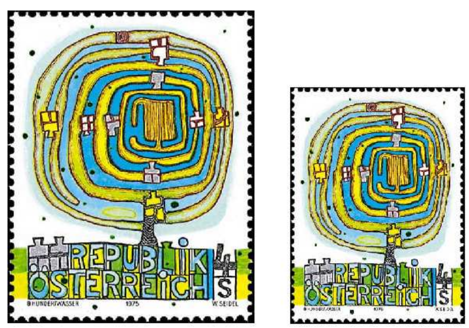


Abbildung 6.9: Briefmarken

Die beiden Briefmarken haben die *gleiche Gestalt*, aber sie sind *nicht* gleich groß. Das bedeutet, sie sind *ähnlich*.

**Definition:** Zwei Vierecke (und auch Vielecke) sind ähnlich zueinander, wenn

1. einander entsprechende Winkel gleich groß sind *und*
2. einander entsprechende Längenstücke zueinander im gleichen Verhältnis stehen.

In der folgenden Abbildung 6.10 sind sowohl die beiden Rechtecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$, als auch die beiden Parallelogramme $EFGH$ und $E_1F_1G_1H_1$ zueinander ähnlich. Man schreibt $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ und $EFGH \sim E_1F_1G_1H_1$.

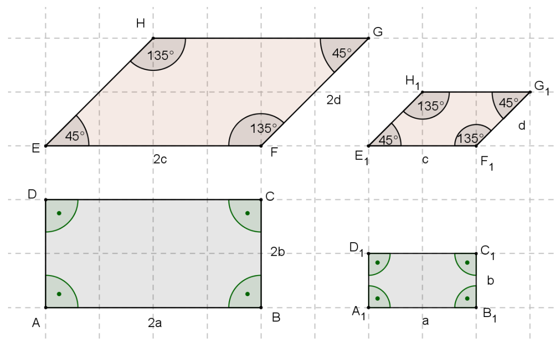


Abbildung 6.10: Ähnliche Vierecke

Warum sind die Figuren nun ähnlich?

Im Rechteck sind alle Winkel rechte und daher sind entsprechende Winkel klarerweise gleich groß. Auch im Parallelogramm sieht man, dass der Winkel beim Punkt $E$ gleich dem Winkel beim Punkt $E_1$ und der Winkel bei $F$ gleich dem Winkel bei $F_1$ ist. Somit entspricht die Abbildung dem ersten Punkt der Definition. Diese Eigenschaft alleine reicht jedoch noch nicht aus, um die Bedingungen der Ähnlichkeit zu erfüllen, denn die Definition erfordert zweitens, dass die entsprechende Längenstücke im gleichen Verhältnis stehen. Die Abbildung 6.11 zeigt ein Gegenbeispiel, in dem zwar entsprechende Winkel gleich groß sind, der zweite Teil der Definition jedoch nicht erfüllt ist. Aber auch ohne Kenntnis der Definition sieht man, dass die beiden Rechtecke unterschiedliche Gestalt/Form besitzen.

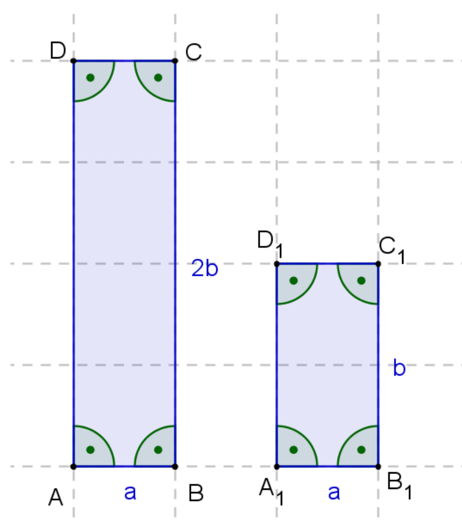


Abbildung 6.11: Nicht ähnlich!

Also müssen noch die Seitenlängen der Vierecke in Abbildung 6.10 untersucht werden: Die Seitenlängen der linken Figur sind jeweils doppelt so lang wie die der rechten. Somit ist auch die zweite Bedingung der Ähnlichkeit von Vierecken erfüllt.

Bei den folgenden beiden Aufgaben müssen die Lernenden ähnliche Vierecke erkennen und ihre Ähnlichkeit begründen, bzw. begründen, warum zwei Vierecke nicht ähnlich sind. Dazu ist eine direkte Anwendung der vorigen Definition zielführend. Eine sprachliche Argumentation ist bei diesen Aufgaben sinnvoll (vgl. 5.4 Arten des Begründens).

**Aufgabe:** Um welche Vierecke handelt es sich in den unten dargestellten Figuren (Abbildung 6.12)? Warum sind die beiden Vierecke nicht ähnlich? Welche Beziehung für ähnliche Figuren ist erfüllt, welche nicht (vgl. Reichel & Humenberger 2009, S. 204)?

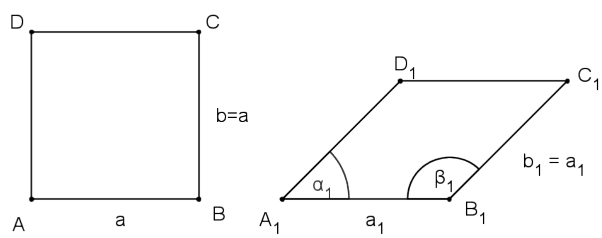


Abbildung 6.12: Ähnlichkeit?

**Aufgabe:** Unter den folgenden sechs Vierecken (Abbildung 6.13) sind drei Paare ähnlicher Vierecke. Gib diese Paare an und begründe ihre Ähnlichkeit!

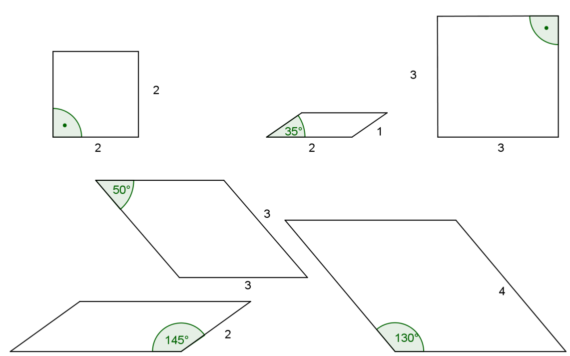


Abbildung 6.13: Ähnliche Paare

**Aufgabe:** Sind die Deltoide $ABCD$ ($\alpha = 35°, \beta = 40°$) und $A_1B_1C_1D_1$ ($\beta = 147{,}5°, \gamma = 40°$) ähnlich? Begründet eure Antwort! Sind die Deltoide mit diesen Angaben eindeutig festgelegt? Wenn nein, warum kann die ursprüngliche Frage dennoch beantwortet werden?

Das Informations- und Arbeitsblatt zur Ähnlichkeit von Dreiecken enthält ähnlich dem der Vierecke folgende Informationen und Aufgaben:

Was fällt dir bei den beiden Bildern unten (Abbildung 6.14) auf? Sind sie gleich? Was ist gleich? Was ist verschieden?

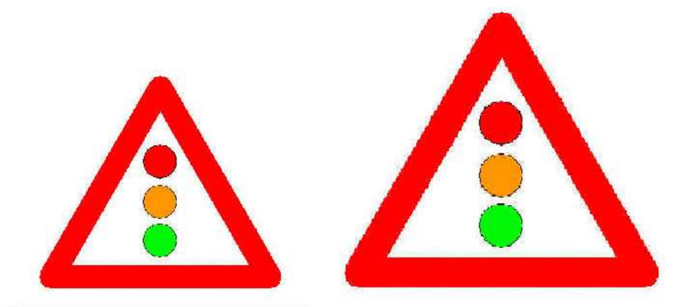

Abbildung 6.14: Vorsicht!

Die beiden Verkehrsschilder haben die gleiche Gestalt, aber sie sind nicht gleich groß. Das bedeutet, sie sind *ähnlich*.

**Definition:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn

1. einander entsprechende Winkel gleich groß sind *oder*
2. einander entsprechende Längenstücke zueinander im gleichen Verhältnis stehen.

In der Abbildung 6.15 sind die Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ ähnlich. Man schreibt $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

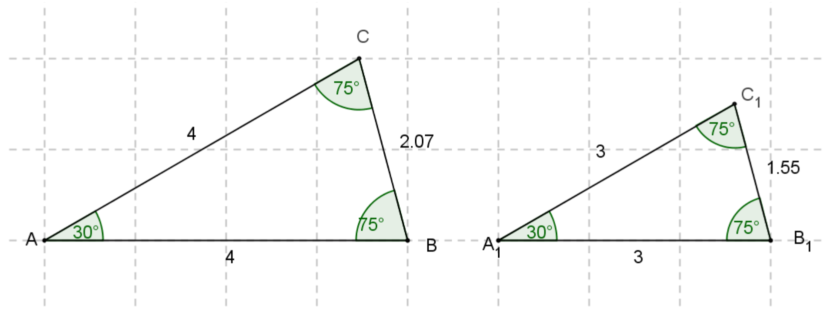


Abbildung 6.15: Ähnliche Dreiecke

Warum sind die beiden Dreiecke nun ähnlich?

Der Winkel bei $A$ ist gleich groß wie der Winkel bei $A_1$. Gleichheit gilt auch für die Winkel bei $B$ und $B_1$, bzw. $C$ und $C_1$. Diese Eigenschaft alleine reicht für die Ähnlichkeit zweier Dreiecke schon aus. Man sieht jedoch auch, dass entsprechende Seiten im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Die Seitenlängen der beiden Dreiecke verhalten sich wie 4:3.

Bei Dreiecken genügt für ihre Ähnlichkeit, dass *eine der zwei Bedingungen erfüllt* ist, denn dann ist aufgrund des Strahlensatzes immer auch die andere Bedingung erfüllt.

Die Begründungen der folgenden Aufgaben stützen sich wieder auf die Definition der Ähnlichkeit von Dreiecken. Außerdem dienen auch der Winkelsummensatz und grundlegende Eigenschaften von Dreiecken, wie die dass die beiden Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck gleich groß sind, als Argumentationsbasis. Diese Eigenschaften sind notwendige Voraussetzungen für die geforderten Begründungen.

**Aufgabe:** Unter den folgenden sechs Dreiecken (Abbildung 6.16) sind drei Paare ähnlicher Dreiecke. Gebt diese Paare an!

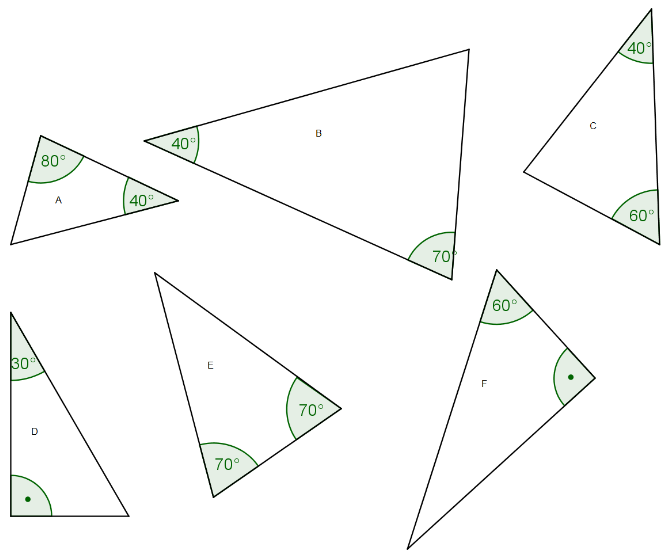


Abbildung 6.16: Paare von Dreiecken

**Aufgabe:** Sind die Dreiecke $ABC$ ($\overline{AB} = \overline{AC} = 4,5\,cm, \alpha = 50°$) und $A_1B_1C_1$ ($\overline{A_1C_1} = \overline{B_1C_1} = 6,5\,cm, \alpha_1 = 65°$) ähnlich? Begründet eure Antwort (vgl. Reichel & Humenberger 2009, S. 205)!

All jene Paare, die mit ihrem Arbeitsblatt fertig sind, kommen zur Kontrolle zum Lehrer(innen)tisch. Auf diesem finden die Schüler(innen) die gelösten Aufgaben.

**2. Phase: Gruppenarbeit**

Sind die Ergebnisse kontrolliert, finden sich jeweils zwei Paare mit unterschiedlichem Arbeitsblatt zusammen. In dieser Phase sollen sich die Lernenden gegenseitig ihr neu erworbenes Wissen erklären. Wichtige Informationen der neuen Gruppenmitglieder werden im Schulübungsheft notiert und die jeweils anderen Aufgaben sollen mit Unterstützung der jeweiligen *Expert(inn)en* gelöst werden. Außerdem soll in der Gruppe herausgefunden werden, worin sich die Ähnlichkeit der Dreiecke von der der Vierecke unterscheidet. Diese kommunikative Unterrichtsmethode, bei der die Rolle der Lehrperson eine eher zurückhaltende ist, soll die Argumentationsfähigkeit der Lernenden verbessern (vgl. 5.6 Methodische Überlegungen).

**3. Phase: Vertiefung**

Am Ende der Unterrichtsstunde werden Unklarheiten in der gesamten Klasse diskutiert und beseitigt.

**Kompetenzen:**

- Entscheidung für eine bestimmte Hypothese (sind zwei Dreiecke bzw. Vierecke ähnlich?) argumentativ belegen. Dabei ist es zum Teil erforderlich, Verbindungen herzustellen (Winkelsummensatz und Definition von Ähnlichkeit in Drei- und Vierecken): (H4, I3, K2).

### 6.4.4 4. Klasse

Nun folgt eine Doppelstunde zur Satzgruppe des Pythagoras.

**Ziele:**

- Ein Verständnis grundlegender Begriffe entwickeln: Höhen- und Kathetensatz in rechtwinkeligen Dreiecken anwenden können und eine Beziehung zwischen Kathetensatz und Satz von Pythagoras erkennen.
- Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: Höhen- und Kathetensatz begründen können und den Zusammenhang zwischen Kathetensatz und Satz von Pythagoras verstehen und herleiten können.
- Also logisch schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen kennen lernen und entwickeln.
- Erwerb von Problemlösungskompetenz, im Sinne eines geometrischen Beweisproblems: Möglichkeiten finden, um den Höhensatz zu beweisen.

**1. Phase: Wiederholung**

Zu Beginn der Stunde wird der Satz von Pythagoras wiederholt. Dabei wird auf eine exakte Formulierung Wert gelegt, denn Argumentieren wie es nicht nur im Verlauf dieser Unterrichtseinheit geplant ist erfordert immer eine korrekte und adäquate Verwendung der mathematischen Fachsprache.

**2. Phase: Erarbeitung des Kathetensatzes**

Der/Die Lehrer(in) zeichnet ein rechtwinkeliges Dreieck $ABC$ an die Tafel und beschriftet es. Die Hypotenusenabschnitte werden mit $p$ und $q$ und die Höhe auf die Hypotenuse mit $h$ bezeichnet.

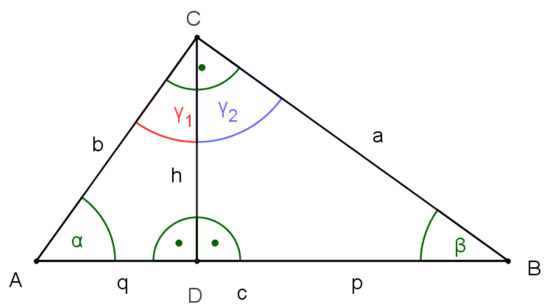


Abbildung 6.17: Kathetensatz

Schließlich wird der Kathetensatz formuliert und ebenfalls an der Tafel festgehalten: *„In jedem rechtwinkeligen Dreieck gilt, dass die Fläche eines Kathetenquadrats gleich dem Produkt des zugehörigen Hypotenusenabschnitts und der Hypotenuse ist“*. Es gilt also:

$$a^2 = p \cdot c$$

und

$$b^2 = q \cdot c.$$

Geometrisch gesehen kann man den Kathetensatz durch folgende Konstruktion interpretieren (Abbildung 6.18).

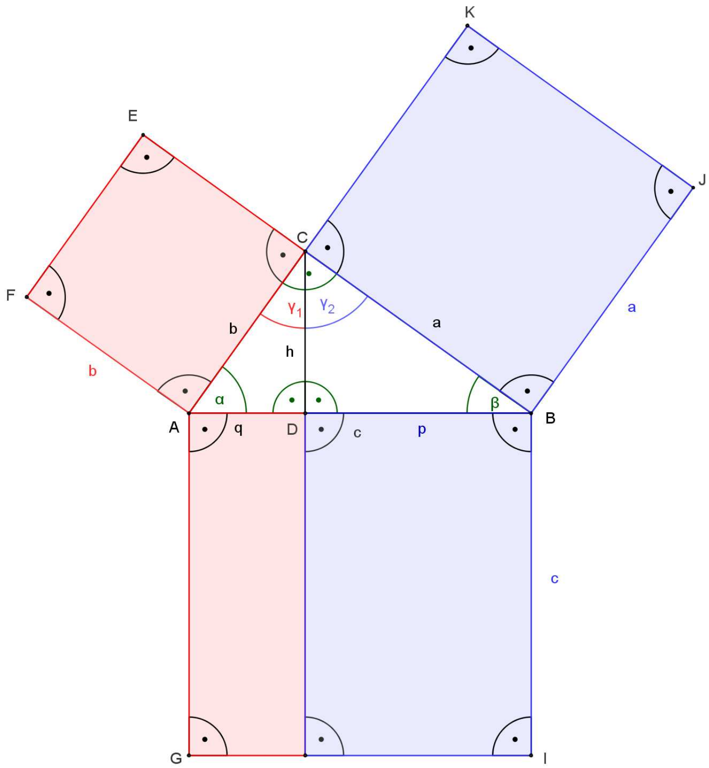


Abbildung 6.18: Geometrische Interpretation

Eine wichtige Voraussetzung – die Lernenden wissen, was hergeleitet bzw. bewiesen werden soll – ist erfüllt (vgl. 5.6 Methodische Überlegungen). Somit kann schließlich nach einer Begründung für diesen Satz gesucht werden. Dazu werden die Lernenden aufgefordert, in der Zeichnung an der Tafel bzw. im Schulübungsheft ähnliche Dreiecke zu finden.

Die Schüler(innen) sollen erkennen, dass die Dreiecke $ABC$, $ACD$ und $CBD$ ähnlich sind. Im fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch wird die Begründung der Ähnlichkeit der Dreiecke erarbeitet. Dazu ist es erforderlich, zu begründen, warum $\gamma_1 = \beta$ und $\gamma_2 = \alpha$ ist. Da nun einander entsprechende Winkel in allen Dreiecken gleich groß sind folgt daraus, dass auch entsprechende Seitenlängen im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Also gilt:

$$a : p = c : a.$$

Durch Umformung erhält man

$$a^2 = p \cdot c.$$

Analog kann man mit Hilfe der Ähnlichkeit den zweiten Teil des Kathetensatzes beweisen. Diesen können die Schüler(innen) in Einzelarbeit im Anschluss oder als Hausübung führen (vgl. 5.6 Methodische Überlegungen).

Das Fundament, auf das man sich bei diesem Beweis stützt, besteht aus der Ähnlichkeit von Dreiecken und dem Winkelsummensatz (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

**3. Phase:** Anwendung

Schließlich sollen die Lernenden den Kathetensatz an folgendem Beispiel in Einzelarbeit anwenden.

**Aufgabe:** Von einem rechtwinkeligen Dreieck $ABC$ sind die Längen einer Kathete und des anliegenden Hypotenusenabschnitts gegeben: $a = 7,6\,m$ und $p = 6,7\,m$. Berechne die Längen der fehlenden Seiten $c$ und $b$ und den Flächeninhalt $A$ des Dreiecks (vgl. Reichel, Litschauer & Groß 2002, S. 161)!

**4. Phase: Erarbeitung des Höhensatzes**

Im Anschluss an den Kathetensatz wird nun der Höhensatz erarbeitet. Der/Die Lehrer(in) schreibt diesen an die Tafel und fordert die Schüler(innen) auf in Einzelarbeit anhand ähnlicher Dreiecke zu begründen, dass $h^2 = p \cdot q$ gilt. Er/Sie gibt außerdem den Hinweis, dass es zielführend ist, die beiden Teildreiecke $CAD$ und $BCD$ (Abbildung 6.17) zu betrachten. Nach einigen Minuten werden die Ergebnisse in der Gesamtgruppe besprochen. Eventuelle Schwierigkeiten werden diskutiert. Ein(e) Schüler(in) präsentiert ihre/seine Lösung an der Tafel.

**5. Phase: Geometrischer Beweis**

Dieser Beweis (Abbildung 6.19) erfolgt in einem Vortrag durch den/die Lehrer(in) und wird in der Folgestunde von den Lernenden noch einmal aufgegriffen und vertieft.

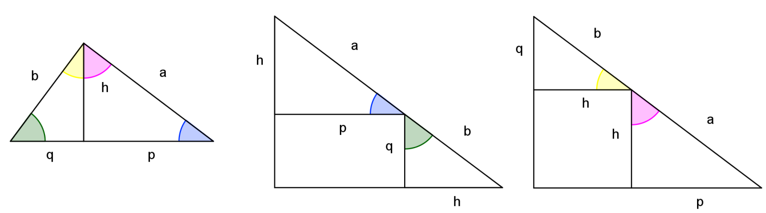


Abbildung 6.19: Geometrischer Beweis

Die Erklärung erfolgt auf Basis der Kongruenz der Dreiecke (Mitte und rechts), die durch Verschiebung der Teildreiecke (links) entstehen (vgl. 5.2 Argumentationsbasis). Die beiden Dreiecke in der Mitte und rechts in der Abbildung sind kongruent, da sie in allen drei Seiten übereinstimmen. Die Teildreiecke nehmen in diesen kongruenten Dreiecken einen Teil der Fläche ein, der in beiden

Dreiecken gleich groß ist. Somit muss auch der Rest der Fläche der beiden kongruenten Dreiecke gleich groß sein. Es gilt daher $h^2 = p \cdot q$.

**6. Phase: Anwendung**

**Aufgabe:** Von einem rechtwinkeligen Dreieck $ABC$ kennt man die Höhe und die Länge eines Hypotenusenabschnittes: $h = 50\,cm$ und $q = 120\,cm$. Berechne die Längen der Seiten und den Flächeninhalt (vgl. Reichel, Litschauer & Groß 2002, S. 161)!

In der Folgestunde wird mit dem Höhen- und dem Kathetensatz im Rahmen einer Gruppenarbeit fortgesetzt.

**1. Phase: Gruppenarbeit**

Nachdem der/die Lehrer(in) den Ablauf der Gruppenarbeit erklärt hat, finden sich die Schüler(innen) in Gruppen von vier Personen zusammen. Jede(r) bekommt ein Arbeitsblatt mit Aufgaben, die in der Gruppe gelöst werden sollen. Zur Wiederholung und Vertiefung findet man am Arbeitsblatt zwei einfache Aufgaben (Aufgabe 1 und 2), in denen unbekannte Größen im Dreieck durch den Höhen- oder Kathetensatz berechnet werden müssen. Außerdem soll im Rahmen dieser Unterrichtsstunde auch der Zusammenhang zwischen dem Satz von Pythagoras und dem Kathetensatz hergestellt und verstanden werden (Aufgabe 3). Diese Herleitung wird durch Anweisungen gelenkt, wodurch diese erleichtert wird. Dabei erfahren die Schüler(innen) über gültige Argumentationsweisen und Schlussfolgerungen (vgl. 5.6 Methodische Überlegungen). Bei Aufgabe 4 muss die Gruppe zum Lehrer(innen)tisch kommen, auf dem sich ein Laptop befindet. Ein in „Geogebra“ anschaulich vorbereiteter Ergänzungsbeweis des Höhensatzes, der in der vergangenen Stunde durchgenommen wurde, steht den Schüler(inne)n zur Verfügung. Mit Hilfe des „Schiebereglers“ kann jede(r) Schüler(in) die Teildreiecke bewegen und so können eventuelle Vorstellungslücken der vergangenen Stunde geschlossen und das Verständnis vertieft werden. Dynamische Geometriesoftware eignet sich in diesem Fall gut, da es für Schüler(innen) schwierig sein kann, anhand einer einzelnen Zeichnung eine Zugfigur zu sehen. Durch das eigenständige Explorieren mit Geogebra kann diese Kompetenz allerdings aufgebaut werden. Dennoch führt diese Übung am Computer alleine nicht zu dem gewünschten Beweisverständnis. Die integrierten Fragestellungen dieser Aufgabe sollen aber dazu beitragen (vgl. 5.7 Beweisen mittels dynamischer Geometriesoftware).

**Arbeitsblatt**

1. Berechne vom rechtwinkeligen Dreieck mit der Höhe $h = 26\,cm$ und dem Hypotenusenabschnitt $p = 13\,cm$ die Länge der Hypotenuse und den Flächeninhalt!

2. In einem rechtwinkeligen Dreieck kennt man die Länge einer Kathete ($b = 7,5\,cm$) und die Länge der Hypotenuse ($c = 12\,cm$). Berechne die Längen der Hypotenusenabschnitte $p$ und $q$!

3. Beweise den pythagoreischen Lehrsatz mit Hilfe des Kathetensatzes!

   (a) Der Kathetensatz lautet:
   In jedem rechtwinkeligen Dreieck $ABC$ gilt:
   ____________________ und ____________________

   (b) Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man: __________

   (c) Hebe nun $c$ heraus: ________________________________

   (d) Nun haben wir den Satz von Pythagoras hergeleitet: _________

4. Kommt in der Gruppe zum Lehrer(innen)tisch und schaut euch am Computer einen dynamischen Beweis vom Höhensatz an!
   Beschreibt nun in eigenen Worten was ihr gesehen habt und beantwortet dabei folgende Fragen (Abbildung 6.19):

   - Warum sind die neuen Dreiecke gleich groß?
   - Welche Abmessungen haben die weißen Rechtecke in den kongruenten Dreiecken?
   - Warum sind die Winkel der Rechtecke rechte Winkel?
   - Warum sind die beiden besagten Rechtecke gleich groß?

Der/Die Lehrer(in) weist die Lernenden darauf hin, dass die Beispiele nicht der Reihe nach gelöst werden müssen, damit es keinen Andrang am Computer gibt. Es wird darauf geachtet, dass keine Wartezeiten entstehen.

**2. Phase: Ausklang**

Die Ergebnisse der beiden ersten Aufgaben werden mündlich verglichen. Bei unterschiedlichen Lösungen sollen die Lernenden ihre Lösungsschritte erklären und begründen wie sie zu ihrem Ergebnis gekommen sind. Aufgabe 3 trägt ein(e) Schüler(in) an der Tafel vor. Aufgabe 4 wird in GeoGebra schrittweise präsentiert und ein(e) Schüler(in) erklärt und begründet die einzelnen Schritte. Die Begründungen sollen sich dabei auf die Fragestellungen in der Aufgabe beziehen. Der Rest der Klasse ist aufgefordert aufmerksam zuzuhören. Eventuelle Einwände sollen vorgebracht und argumentativ diskutiert werden. Dazu kann absichtlich bei der Präsentation einer der Schritte (a) bis (d) in Aufgabe 3 bzw. eine der Fragen in Aufgabe 4 ausgelassen werden.

**Kompetenzen:**

- Einen gegebenen mathematischen Sachverhalt (Kathetensatz) als Gleichung formuliert in eine andere Darstellungsform (graphisch) übertragen, wobei dabei Grundkenntnisse eingesetzt werden: (H1, I3, K1).

- Mathematische Sätze beweisen (Kathetensatz und Höhensatz), wobei es erforderlich ist, über mathematische Vorgehensweisen nachzudenken: (H4, I3, K3).
- Mathematische Zusammenhänge herleiten (Satz von Pythagoras und Kathetensatz), wobei mehrere Verfahren miteinander verbunden werden müssen und die Möglichkeit, Zirkelschlüsse zu produzieren ausgeschlossen werden muss: (H4, I3, K2).
- In Formeln (Höhensatz, Kathetensatz) Zahlen einsetzen und Werte berechnen, wobei mathematische Sätze direkt angewandt werden können: (H2, I3, K1).
- Entscheidung für eine bestimmte Hypothese argumentativ belegen, wobei mehrere mathematische Begriffe und Sätze in Verbindung gebracht werden: (H4, I3, K2).

Die folgenden Stundenbilder zielen ebenfalls darauf, den Schüler(inne)n Grundkompetenzen zu vermitteln. Allerdings anders als bei den Bildungsstandards in der Sekundarstufe 1 sind diese für die AHS-Oberstufe bisher noch nicht genau identifiziert. Im Moment existieren nur Vorschläge für mathematische Grundkompetenzen, die anhand von Musteraufgaben konkretisiert werden. Im Rahmen von Aushandlungsprozessen zwischen der Projektgruppe und Lehrer(inne)n und Schüler(inne)n der Pilotklassen wird es zu entsprechenden Revisionen bei den vorgeschlagenen Grundkompetenzen oder deren Konkretisierung in Aufgaben kommen (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 14).

Die Basis dieser Unterrichtseinheiten bilden die Bildungstheoretische Orientierung des Zentralmaturakonzeptes und die im Moment aktuellen Grundkompetenzen derselben. Im Anschluss an die Grundkompetenzen, die in den einzelnen Stundenbildern angesprochen werden, werde ich Kompetenzen formulieren, die angelehnt an die der Bildungsstandards auch den Handlungs- und Komplexitätsbereich inkludieren. *Der Inhaltsbereich „Algebra und Geometrie“ trifft auf alle vorkommenden Anforderungen zu und wird daher nicht mehr extra angeführt.*

### 6.4.5 5. Klasse

**Thema:** Sinus und Cosinus in rechtwinkeligen Dreiecken

**Ziele:**

- Verständnis grundlegender Begriffe entwickeln: Die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus im rechtwinkeligen Dreieck definieren und anwenden können

- Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: Die Wohldefiniertheit von Sinus und Cosinus anhand der Ähnlichkeit von Dreiecken begründen können. Begründen können, warum durch bestimmte Angaben kein rechtwinkeliges Dreieck bestimmt werden kann.
- Also logisch schlussfolgernde und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen entwickeln.
- Erschließung der Umwelt bzw. mit Hilfe der Umwelt anschauliche Vorstellungen über geometrische Begriffe ausbilden: Schattenlänge in Abhängigkeit von Lichteinfallswinkel und Stablänge.

**1. Phase: Wiederholung**

Zu Beginn werden notwendige Voraussetzungen für das Erlernen der neuen Inhalte besprochen und wiederholt. Dazu gehören der Satz von Pythagoras, die Strahlensätze und die Bedingungen für die Ähnlichkeit von Dreiecken.

Werden zwei Strahlen, die von einem Scheitelpunkt $S$ ausgehen, von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten die folgenden Beziehungen, wobei $A$, $B$, $C$, $D$ die Schnittpunkte sind (Abbildung 6.20):

$$\overline{SA} : \overline{SB} = \overline{SC} : \overline{SD} = \overline{AC} : \overline{BD}$$

.

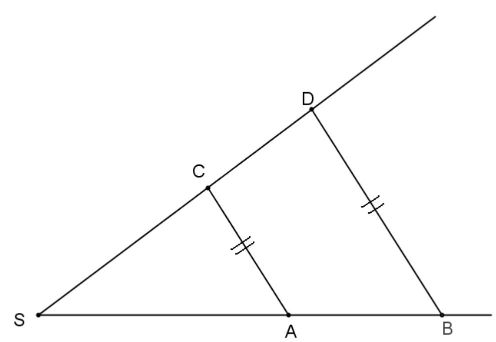


Abbildung 6.20: Strahlensatz

Dreiecke, die in allen Winkeln übereinstimmen, bezeichnet man als ähnliche Dreiecke. Die Dreiecke $SAC$ und $SBD$ aus der Abbildung 6.20 sind zueinander ähnlich. Auf ähnliche Dreiecke können daher die Strahlensätze angewendet werden.

Im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras wird auch wiederholt, dass die Hypotenuse dem rechten Winkel gegenüberliegt und somit die längste Seite des rechtwinkeligen Dreiecks ist (vgl. Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010, S. 34).

Schließlich wird auch noch die Eigenschaft der Winkelsumme im Dreieck wiederholt.

Diese Sätze bilden eine wichtige Grundlage für das Erlernen des neuen Stoffgebietes und dienen gleichzeitig als Argumentationsbasis für Begründungsaufgaben (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

**2. Phase: Einleitung**

In einer lehrer(innen)zentrierten Unterrichtsphase wird den Schüler(inne)n Sinus und Cosinus in rechtwinkeligen Dreiecken nähergebracht.

Ein Stab der Länge 1 wird so aufgestellt, dass er mit der Horizontalen den Winkel $\alpha$ einschließt. Die Sonne scheint *senkrecht* auf den Stab herab. Wie lang ist der Schatten des Stabes?

Bei der grafischen Veranschaulichung entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck. Die Länge des Schattens kann mit den bisher bekannten Rechenoperationen nicht ermittelt werden. Diese Länge wird *Cosinus des Winkels* $\alpha$ genannt und mit $\cos\alpha$ bezeichnet (Abbildung 6.21).

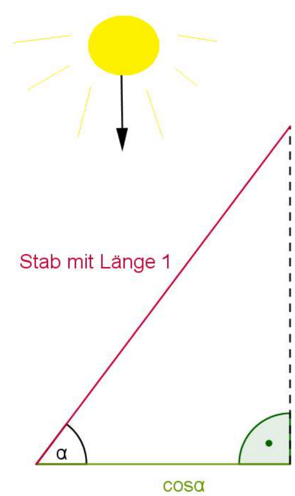


Abbildung 6.21: Cosinus des Winkels $\alpha$

Analog dazu kann der Stab mit *horizontal* einfallendem Licht beleuchtet werden. Er wirft seinen Schatten auf eine senkrechte Wand. Auch diese Schattenlänge lässt sich mit bisher bekannten mathematischen Methoden nicht berechnen. Die Länge wird *Sinus des Winkels* $\alpha$ genannt und mit $\sin\alpha$ bezeichnet.

.

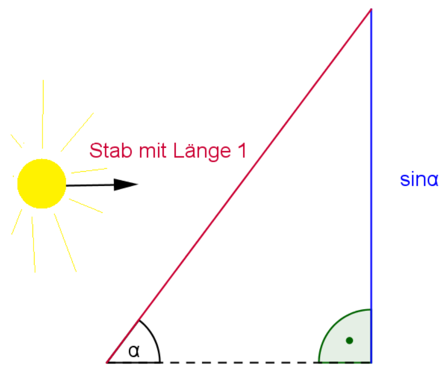


Abbildung 6.22: Sinus des Winkels $\alpha$

In einem *rechtwinkeligen Dreieck*, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat, sei $\alpha$ einer der beiden nicht rechten Winkel. Dann ist:
$\sin\alpha$ die Länge der Kathete, die dem Winkel $\alpha$ *gegenüberliegt* (die Gegenkathete), und
$\cos\alpha$ die Länge der Kathete, die dem Winkel $\alpha$ *anliegt* (die Ankathete).
*Sinus* und *Cosinus* sind Winkelfunktionen, da sie jeder Winkelgröße (nicht nur im Intervall $[0°, 90°]$!) eine reelle Zahl zuordnen.

Betrachtet man nun rechtwinkelige Dreiecke mit Winkel $\alpha$ und unterschiedlicher Hypotenusenlänge, so erhält man ähnliche Dreiecke.

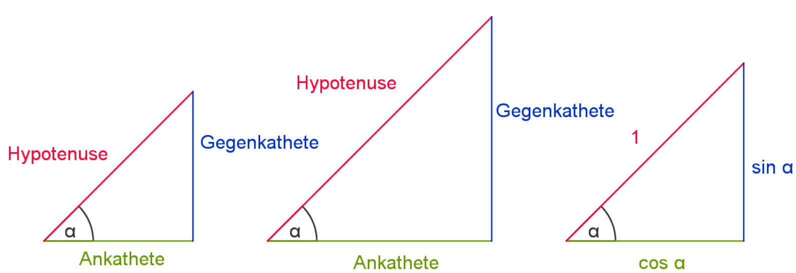


Abbildung 6.23: Ähnliche Dreiecke mit unterschiedlicher Hypotenusenlänge

**3. Phase: Begründen im Rahmen einer Lehrer(innen)-Schüler(innen)-Interaktion**

Die Dreiecke in der Abbildung 6.23 sind ähnlich, da sie in allen drei Winkeln übereinstimmen (Bleier, Lindenberg, Lindner & Stepancik 2009, S. 150). Entsprechende Seitenverhältnisse sind dann gleich in allen zueinander ähnlichen Dreiecken.

In jedem rechtwinkeligen Dreieck mit dem Winkel $\alpha$ gilt also:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Im fragend entwickelnden Unterrichtsgespräch soll diese Begründung für die Wohldefiniertheit von Sinus und Cosinus anhand ähnlicher Dreiecke gefunden werden.

Diese leicht einsehbare Begründung soll verhindern, dass die Formel auswendig gelernt wird. Der Sachverhalt kann besser verstanden und nicht so schnell vergessen werden (vgl. 5.1 Warum soll im Mathematikunterricht begründet werden?).

**4. Phase: Gruppenarbeit**

In Gruppen zu vier Personen sollen die Lernenden folgende Aufgaben lösen.

1. Zeige, dass $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$! Fertige dazu eine geeignete Skizze an!

2. Man kann jedes beliebige Dreieck mithilfe einer Höhe innerhalb des Dreiecks in zwei rechtwinkelige Dreiecke teilen. Daher kann man auch dort sin- und cos-Werte berechnen. Gebt für das in der Skizze gegebene Dreieck (Abbildung 6.24) eine Formel für $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ an (vgl. Brand & Dorfmayr 2009, S. 156)!

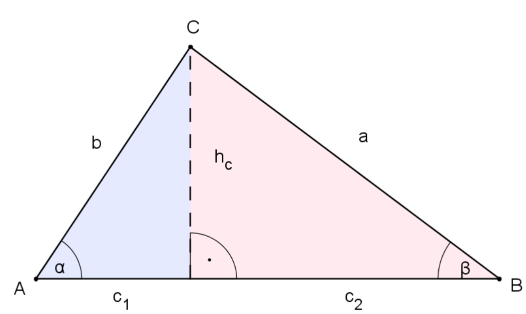


Abbildung 6.24: Formeln für Cosinus und Sinus

3. Von einem rechtwinkeligen Dreieck mit der Hypotenuse $c$ kennt man zwei Bestimmungsstücke. Berechne, wenn möglich, die Längen der unbekannten Seiten, die unbekannten Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks! Einige der Angaben sind falsch, das heißt, sie können kein rechtwinkeliges Dreieck bestimmen, bzw. sind unzureichend. Begründe warum mit diesen Angaben kein rechtwinkeliges Dreieck bestimmt werden kann (vgl. Binder, Denninger & Urban-Woldron 2010, S. 44)!

   (a) $a = 2,5\,cm$, $\beta = 78°$
   (b) $a = 362\,mm$, $\beta = 97,4°$
   (c) $a = 45\,cm$, $h = 57\,cm$
   (d) $a = 65\,cm$, $h = 57\,cm$
   (e) $\alpha = 36,7°$, $\beta = 53,3°$
   (f) $\alpha = 47,34°$, $\beta = 58,06°$
   (g) $b = 46\,cm$ , $c = 122\,cm$
   (h) $b = 8,1\,cm$, $c = 7,4\,cm$

Bei der Nummer 3 sind die Angaben der Aufgaben (a), (d) und (g) korrekt. Somit können die fehlenden Größen durch die Sinus- und Cosinusformel, durch den Satz von Pythagoras und die Eigenschaft der Winkelsumme berechnet werden. Die gegebenen Werte bei Aufgabe (b) bestimmen kein rechtwinkeliges Dreieck, da der Winkel $\beta$ größer als 90° ist und daher die Eigenschaft der Winkelsumme im Dreieck nicht erfüllt sein kann. Bei Aufgabe (c) ist die gegebene Kathete $a$ zu kurz im Vergleich zur ebenfalls gegebenen Höhe (auf die Hypotenuse $c$) h. Es muss $a > h$ gelten. Die Angaben in (e) gelten für unendlich viele (ähnliche) rechtwinkelige Dreiecke. Bei (f) handelt es sich nicht um ein rechtwinkeliges Dreieck, da kein Winkel den Wert 90° annimmt. Bei Aufgabe (h) wäre die Hypotenuse kürzer als eine Kathete und daher ist kein rechtwinkeliges Dreieck festgelegt. Umgekehrt schon, wenn $c$ auch eine Kathete sein „darf“ und $b$ die Hypotenuse.

Fachliches Basiswissen ist für diese Begründungsaufgaben unerlässlich. Es bedarf eines umfassenden Verständnisses und Kenntnisstandes bezüglich Dreiecke und deren Eigenschaften. Die Sätze und Definitionen der Argumentationsbasis, die zu Beginn der Stunde in der ersten Phase wiederholt werden, sind notwendige Voraussetzungen (vgl. 5.5 Grundlagen der Beweiskompetenz).

**5. Phase: Ausklang**

Am Ende der Stunde werden die Ergebnisse verglichen, Schwierigkeiten besprochen, Vorgehensweisen begründet und Standpunkte verteidigt.

**Grundkompetenzen:**

- Definitionen von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ im rechtwinkeligen Dreieck kennen und einsetzen können.

- Rechtwinkelige Dreiecke mithilfe dieser Definitionen auflösen können.

**Grundkompetenzen mit Handlungs- und Komplexitätsbereich:**

- Die Wohldefiniertheit von Cosinus und Sinus begründen, wobei der Einsatz von Grundkenntnissen erforderlich ist: (H4, K1).
- Mathematische Begriffe im jeweiligen Kontext deuten unter direkter Anwendung von Grundkenntnissen: (H3, K1).
- Durchführen von Rechenoperationen (unbekannte Bestimmungsstücke von Dreiecken berechnen). Dabei müssen mehrere Begriffe und Sätze miteinander verbunden werden: (H2, K2).
- Argumente anführen, die für eine bestimmte Entscheidung sprechen (warum liegt kein rechtwinkeliges Dreieck vor?), wobei es erforderlich ist über Zusammenhänge nachzudenken: (H4, K3).

### 6.4.6 6. Klasse

**Thema:** Ebene Koordinatengeometrie – Schwerpunkt eines Dreiecks

**Ziele:**

- Verständnis grundlegender Begriffe entwickeln, wobei Beziehungen zu bereits gelernten Begriffen (z. B. Teilungsverhältnis, Schwerlinie) hergestellt werden. Beziehungen zwischen geometrischen Eigenschaften erkennen: siehe nächster Punkt.
- Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: Formel für den Schwerpunkt begründen und anwenden können, zeigen können, dass der Schwerpunkt die Schwerlinie innerhalb des Dreiecks im Verhältnis 1:2 teilt, zeigen können, dass zwei Dreiecke denselben Schwerpunkt besitzen, wobei die Eckpunkte des einen Dreiecks auf den Seiten des anderen Dreiecks liegen und diese im gleichen Verhältnis teilen.
- Also logisch schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen kennen lernen und entwickeln.

**1. Phase: Wiederholung**

Zum Stundeneinstieg wird in der Gesamtgruppe die *Teilungspunktformel* $T = \frac{A-\lambda \cdot B}{1-\lambda}$, die man durch Umformung von $\overrightarrow{AT} = \lambda \cdot \overrightarrow{BT}$ erhält, wiederholt. Dabei entspricht $\lambda < 0$ dem Teilungsverhältnis zum inneren Teilungspunkt $T$ der Strecke $AB$. Je nach Wissensstand der Klasse müssen auch Grundlagen der Vektorrechnung aus der 5. Klasse bereit gestellt werden. Das Addieren von Vektoren und deren geometrische Veranschaulichung, die Spitze-Minus-Schaft-Regel und die Halbierungspunktformel sind notwendige Voraussetzungen für den folgenden

Beweis und finden bei diesem Anwendung (vgl. 5.5 Grundlagen der Beweiskompetenz). Diese Sätze und Eigenschaften werden als gültig hingenommen, da sie schon bewiesen wurden und daher kann man sich jetzt darauf berufen (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

Nun werden die Schüler(innen) aufgefordert sich die Konstruktion des Schwerpunktes eines Dreiecks ins Gedächtnis zu rufen.

**2. Phase: Herleitung**

Im fragend entwickelnden Unterrichtsgespräch wird nun hergeleitet, dass der Schwerpunkt die Schwerlinien im Verhältnis 1 : 2 teilt.

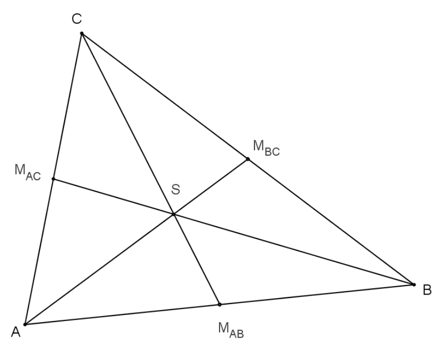


Abbildung 6.25: Schwerpunkt

Aus Abbildung 6.25 ist

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM_{AB}} + \overrightarrow{M_{AB}S}$$

ersichtlich. Andererseits ist

$$\overrightarrow{AS} = r \cdot \overrightarrow{AM_{BC}}$$

und

$$\overrightarrow{M_{AB}S} = t \cdot \overrightarrow{M_{AB}C},$$

wobei $t$ und $r$ Parameter sind, die das Teilungsverhältnis angeben. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$r \cdot \overrightarrow{AM_{BC}} = \overrightarrow{AM_{AB}} + t \cdot \overrightarrow{M_{AB}C}.$$

Nach Anwendung der *„Spitze minus Schaft"-Regel* bekommt man

$$r \cdot (M_{BC} - A) = M_{AB} - A + t \cdot (C - M_{AB}).$$

Durch die Halbierungspunktformel ergibt sich

$$r \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (B + C) - A\right) = \frac{1}{2} \cdot (A + B) - A + t \cdot \left(C - \frac{1}{2} \cdot (A + B)\right).$$

Nun wird die Formel vereinfacht und nach $A$, $B$ und $C$ geordnet.

$$r \cdot \frac{1}{2} \cdot B + r \cdot \frac{1}{2} \cdot C - r \cdot A = A \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right) + B \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right) + C \cdot t$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von $A$, $B$ und $C$ erhält man ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen.

$$A : -r = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} \Rightarrow 2 \cdot r = 1 + t$$

$$B : \frac{r}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \Rightarrow r = 1 - t$$

$$C : \frac{r}{2} = t \Rightarrow r = 2 \cdot t$$

Schließlich werden die beiden Gleichungen aus $B$ und $C$ gleichgesetzt.

$$\begin{aligned} 2 \cdot t &= 1 - t \\ 3 \cdot t &= 1 \\ t &= \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung gezeigt.

### 3. Phase: Partnerarbeit

Da nun gezeigt ist, dass der Schwerpunkt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2 teilt, sollen die Schüler(innen) versuchen in Partnerarbeit die Formel für den Schwerpunkt $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$ herzuleiten. Zu Beginn eines Beweisprozesses steht das Vertrautwerden mit den vorkommenden Begriffen und Objekten und daher ist es vielleicht notwendig in der Gesamtgruppe potenziell hilfreiche Aussagen zu sammeln. Bevor die Lernenden auf sich selbst gestellt sind sollen diese wissen, dass man den Schwerpunkt folgendermaßen ausdrücken kann: $S = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{BC}}$. Um zur gewünschten Formel zu kommen wird im Verlauf des Beweisprozesses auch die *„Spitze minus Schaft“-Regel* und die *Halbierungspunktformel* Anwendung finden (vgl. 5.3 Der Weg zum Beweis).

Nach einigen Minuten soll ein(e) Schüler(in) das Ergebnis oder einen Ansatz an der Tafel präsentieren. Der Rest der Klasse ist aufgefordert mitzudenken um Fehler auszubessern und alternative Ideen einzubringen. Ausgehend von der Schüler(innen)präsentation wird die Herleitung in geordneter Form an der Tafel festgehalten.

$$S = A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM_{BC}}$$

nach soeben.

$$S = A + \frac{2}{3} \cdot (M_{BC} - A)$$

$$S = A + \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{B+C}{2} - A \right)$$
$$S = A + \frac{B}{3} + \frac{C}{3} - \frac{2A}{3}$$
$$S = \frac{A}{3} + \frac{B}{3} + \frac{C}{3}$$
$$S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)\,.$$

**4. Phase: Anwendung**

Ebenfalls in Partnerarbeit sollen die Lernenden folgende Aufgabe lösen, die im Anschluss in der gesamten Klasse besprochen wird:

**Aufgabe:** Die Punkte $P$, $Q$ und $R$ teilen die Seiten eines Dreiecks $ABC$ „reihum“ im Verhältnis $t = \left|\overrightarrow{AP}\right| : \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BQ}\right| : \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CR}\right| : \left|\overrightarrow{CA}\right|$ (Abbildung 6.26). Dann gilt: Die Dreiecke $ABC$ und $PQR$ besitzen denselben Schwerpunkt. Prüft dies am Dreieck $A\,(0/0/0)$, $B\,(16/0/0)$, $C\,(8/24/0)$ für $t = \frac{1}{4}$ nach! Skizze (vgl. Götz & Reichel 2005, S. 19)!

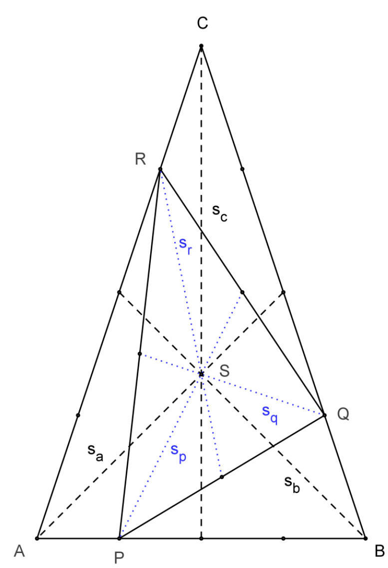


Abbildung 6.26: Identischer Schwerpunkt

Diese Eigenschaft soll in der nächsten Phase begründet werden. Dazu soll also diese schon vorgegebene leicht zu verallgemeinernde Vermutung, dass die besagten Dreiecke denselben Schwerpunkt besitzen, an einem speziellen Fall überprüft werden (vgl. 5.3 Der Weg zum Beweis).

Den Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$ erhält man direkt aus der Formel für den Schwerpunkt. Die Punkte $P$, $Q$ und $R$ berechnet man durch Einsetzen in die Teilungspunktformel. Setzt man diese Punkte dann in die Formel für den Schwerpunkt ein, so sieht man, dass die beiden Dreiecke in diesem speziellen Fall denselben Schwerpunkt haben.

**5. Phase: Begründen**

Unter der Voraussetzung der Existenz des Schwerpunktes soll dieser Sachverhalt aus der vorigen Aufgabe noch allgemein begründet werden. Dazu werden in der Klasse Ideen gesammelt. Die daraus resultierende Vorgehensweise wird besprochen und anschließend sollen die Lernenden in Einzelarbeit versuchen zu zeigen, dass die beiden Dreiecke denselben Schwerpunkt besitzen.

Jede Seite eines Dreiecks $ABC$ wird im selben Verhältnis $\lambda$ durch die Punkte $P$, $Q$ und $R$ geteilt. Diese Teilungspunkte kann man nun durch die Eckpunkte des Dreiecks $ABC$ anhand der Teilungspunktformel ausdrücken. So erhält man $P = \frac{A-\lambda B}{1-\lambda}$, $Q = \frac{B-\lambda C}{1-\lambda}$ und $R = \frac{C-\lambda A}{1-\lambda}$. Setzt man diese Punkte nun in die Formel für den Schwerpunkt ein, dann sieht man, dass das Dreieck $PQR$ den selben Schwerpunkt wie das Dreieck $ABC$ besitzt:

$$S = \frac{1}{3} \cdot (P + Q + R)$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{A - \lambda B + B - \lambda C + C - \lambda A}{1-\lambda} \right)$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{A + B + C - \lambda \cdot (A + B + C)}{1-\lambda} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{(A + B + C) \cdot (1-\lambda)}{1-\lambda} \right)$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)\,.$$

**Grundkompetenzen:**

- Wissen über algebraische Begriffe wie Variable, Formeln, Umformungen angemessen einsetzen und deren Bedeutung kennen.
- Gleichungen aufstellen, umformen und im Kontext interpretieren.
- Vektoren geometrisch interpretieren und verständig einsetzen können.
- Rechenoperationen von Vektoren wie Addition und Multiplikation mit einem Skalar geometrisch deuten können.

**Grundkompetenzen mit Handlungs- und Komplexitätsbereich:**

- Die Herleitung des Teilungsverhältnisses eines Schwerpunktes auf der Schwerlinie innerhalb eines Dreiecks erfordert das Herstellen von Verbindungen, da der Beweis komplex ist, es müssen mehrere Begriffe, Sätze und Verfahren auf geeignete Weise miteinander verbunden werden: (H4, K2).
- Die eigenständige Herleitung der Schwerpunktformel und einer weiteren Schwerpunkteigenschaft erfordert ein Nachdenken über mathematische Vorgehensweisen und somit kommt Reflexionswissen zum Einsatz. Dieses Reflektieren umfasst auch das Nachdenken über die zielführende Verbindung von geeigneten Verfahren, Sätzen und Definitionen: (H4, K3).
- Durchführen von Rechenoperationen wobei konkrete, variable Werte in Formeln eingesetzt werden und somit der Einsatz von Grundkenntnissen erforderlich ist: (H2, K1).

### 6.4.7 7. Klasse

**Thema:** Nichtlineare Analytische Geometrie – Der Kreis

**Methode:** Stationenbetrieb

**Ziele:**

Dieser Stationenbetrieb, der sich über zwei bis drei Stunden erstreckt, wird am Ende der Unterrichtsreihe „Kreis“ durchgeführt und dient der Vertiefung, Festigung und Erweiterung bereits gelernter Inhalte. Er zielt im Allgemeinen auf ein nachhaltiges Verständnis.

- Verständnis grundlegender Begriffe entwickeln: Mittelpunkt und Radius aus einer Kreisgleichung ermitteln
- Erlernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen: Kriterium finden, wann eine Gleichung einen Kreis darstellt und wann nicht sowie die Kreisgleichung begründen können
- Also logisch schlussfolgernde, ordnende und klassifizierende Denk- und Arbeitsweisen entwickeln: z. B. Vorgang zur Bestimmung der Lage einer Geraden/eines Kreises bezüglich eines Kreises beschreiben können

In den beiden letzten Punkten ist die Sprache in diesem Zusammenhang von Bedeutung.

**1. Phase: Vorbereitung**

Zu Beginn wird den Schüler(inne)n der Ablauf des Stationenbetriebes erklärt. Es gibt sieben Stationen zu den Themen der vergangenen Stunden. Jede(r) erhält einen *„Laufzettel“* mit den Namen und Nummern der Stationen. Auf diesem

Zettel sollen die erledigten Aufgaben abgehakt werden. Außerdem ist Platz um Unklarheiten und Fragen zu vermerken. Jede(r) Schüler(in) hat die Freiheit sich die Sozialform in der er/sie jede Station bewältigen möchte selbst zu wählen. Die einzige Einschränkung besteht darin, dass nicht mehr als fünf Personen bei einer Station arbeiten dürfen. Die Lernenden werden darauf hingewiesen, dass sie bei Schwierigkeiten im Schulübungsheft nachschauen können. Alle jene Sätze und Definitionen, die sie für die Begründungen benötigen, sind dort zu finden (vgl. 5.2 Argumentationsbasis). Nachdem die Stationen aufgebaut sind, verteilen sich die Lernenden auf diese, und die Arbeit kann beginnen.

**2. Phase: Stationenbetrieb**

Bei den folgenden Aufgaben der sieben Stationen können sich die Schüler(innen) in den verschiedensten Argumentationsformen üben. Neben der sprachlichen Argumentation kommen auch die algebraische und die durch geeignete Visualisierung zum Einsatz. Außerdem muss auch die Gültigkeit einer Formel nachgewiesen werden (vgl. 5.4 Arten des Begründens).

**Station 1: Kreisgleichung – Stellt jede Gleichung einen Kreis dar?**

**Aufgabe:**

1. Gegeben ist die Gleichung eines Kreises mit $x^2+y^2-5x+10y=0$. Ermittle die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des Kreises (vgl. Götz & Reichel 2003, S. 165)!

2. Nicht jede quadratische Gleichung in $x$ und $y$ stellt einen Kreis dar! Untersuche, ob die beiden Gleichungen einen Kreis liefern und begründe (vgl. Bürger, Fischer & Malle 2000, S. 152)!

   (a) $x^2+y^2+8x-2y-30=0$

   (b) $x^2+y^2-2x+3y+5=0$

**Station 2: Lagemöglichkeiten Kreis – Gerade**

**Aufgabe:**

1. Beschreibe, wie man die Lage einer Geraden bezüglich eines Kreises rechnerisch bestimmen kann!

2. Gegeben sind der Kreis $k$: $x^2+y^2=25$ und drei Geraden: $g_1$: $y=x-1$, $g_2$: $y=\frac{3}{4}\cdot x+6,25$ und $g_3$: $y=-0,5\cdot x+8$. Ermittle die Lagen der Geraden bezüglich des Kreises und bestimme gegebenfalls die Schnittpunkte (vgl. Götz & Reichel 2003, S. 167)!

**Station 3: Kreisgleichung**

**Aufgabe:**

1. Jeder Punkt $X$ des Kreises $k$ mit Mittelpunkt $M$ und Radius $r$ erfüllt die Kreisgleichung $(X-M)^2 = r^2$. Erkläre wie man auf diese Gleichung kommt! Fertige dazu eine Skizze an!

2. Gegeben ist ein Kreis $k[M(2/3); \frac{5}{2}]$. Stelle eine Gleichung auf, die für alle Punkte $X(x|y)$ der Kreislinie $k$ den Zusammenhang zwischen $x$ und $y$ beschreibt (Götz & Reichel 2003, S. 167)!

**Station 4: Lage zweier Kreise I**

**Aufgabe:**

1. Welche Lagebeziehungen können zwischen zwei Kreisen mit verschiedenen Mittelpunkten bestehen? Erläutere diese Beziehungen jeweils an einer Zeichnung!

2. Gib Gleichungen von zwei Kreisen an, die zwei Schnittpunkte haben und berechne diese Schnittpunkte (Bürger, Fischer & Malle 2000, S. 166)!

**Station 5: Schnittpunkte zweier Kreise**

**Aufgabe:**

1. Untersuche die Lage der beiden Kreise $k_1 : x^2+y^2 = 16$ und $k_2 : (x-5)^2+y^2 = 9$ zueinander! Berechne gegebenfalls die Koordinaten gemeinsamer Punkte (vgl. Götz & Reichel 2003, S. 170)!

2. Im Laufe deiner Berechnung erhältst du eine Gleichung in $x$ und $y$. Welche Bedeutung hat diese Gleichung?

**Station 6: Lage zweier Kreise II**

**Aufgabe:**

Gegeben sind die Kreise $k_1$: $(x-9)^2+(y+4)^2 = r_1^2$ und $k_2$: $(x+3)^2+(y-5)^2 = 25$. Für welche Werte von $r_1$ haben die Kreise $k_1$ und $k_2$ keinen, einen oder zwei gemeinsame Punkte? Fertige auch eine Zeichnung dazu an (vgl. Koth 2008, S. 67)!

**Station 7: Puzzle**

**Aufgabe:**

Ordne den Gleichungen die ensprechenden Kreise $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ und $k_5$ in der Abbildung zu!

1. $(x-11)^2+(y-1)^2=1$
2. $x^2+y^2-14\cdot x-8\cdot y+58,75=0$
3. $x^2+y^2=9$
4. $(x-7)^2+(y+2)^2=6,25$
5. $x^2-4\cdot x+y^2-10\cdot y=-26,75$

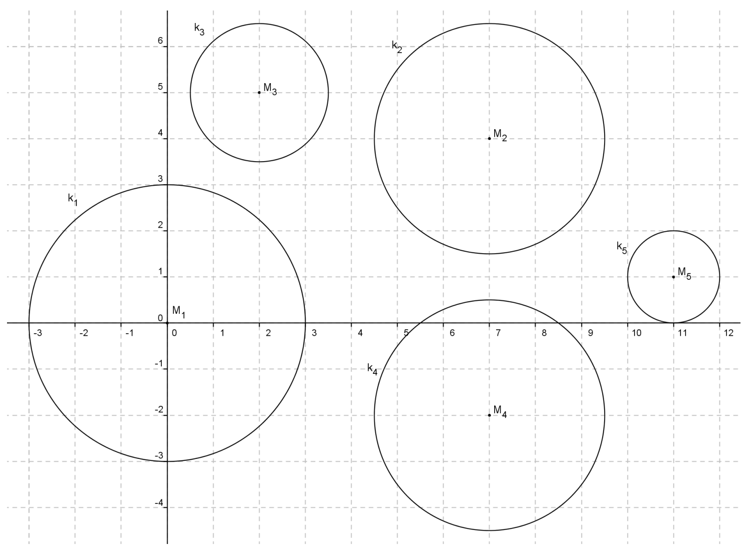


Abbildung 6.27: Kreise

**3. Phase: Ausklang**

Gibt es bei einzelnen Aufgaben Schwierigkeiten, so können die Lernenden immer den/die Lehrer(in) um Hilfe bitten. Zusätzlich haben die Schüler(innen) die Möglichkeit sich die ausführlichen Lösungsschritte der einzelnen Aufgaben von der Lehrperson zu holen. Diese Hilfestellung, die in Ausnahmefällen in Anspruch genommen werden kann, soll dazu dienen, dass der/die Schüler(in) über einzelne Lösungsschritte nachdenken kann. Oft genügt ja ein (gezielter) Hinweis von außen, um die Bewältigung der Aufgabe in Eigentätigkeit der Schüler(innen) zu initiieren.

**Grundkompetenzen:**

- Gleichungen aufstellen, umformen und im Kontext interpretieren können.
- Quadratische Gleichungen lösen, Lösungen und Lösungsfälle geometrisch interpretieren können.

**Grundkompetenzen mit Handlungs- und Komplexitätsbereich:**

- Aus mathematischen Darstellungen Sachverhalte erkennen, wobei Grundwissen und Grundkenntnisse erforderlich sind: (H3, K1).
- Argumente anführen, die für eine bestimmte Sichtweise sprechen, wobei Grundkenntnisse zum Einsatz kommen: (H4, K1).
- Die Planung von Rechenabläufen und das verbale Beschreiben der Lösungsschritte, wobei Reflexionswissen zum Einsatz kommt insofern, dass über einen Lösungsweg nachgedacht und dieser dann in Worte gefasst werden muss: (H2, K3).
- Planung und Durchführung von Rechenoperationen, wobei grundlegende mathematische Verfahren angewandt werden müssen: (H2, K1).
- Mathematische Formeln (Kreisgleichung) herleiten, wobei es erforderlich ist, über Zusammenhänge nachzudenken, die aus dem dargelegten Sachverhalt nicht unmittelbar ablesbar sind: (H4, K3).
- Alltagssprachliche Formulierungen in die Darstellung der Mathematik übersetzen, wobei über mathematische Vorgehensweisen nachgedacht werden muss, um Kreisgleichungen zu finden, die zwei Schnittpunkte besitzen: (H1, K3).
- Zusammenhänge in Gleichungen erkennen und sie im Kontext deuten, wobei das Herstellen von Verbindungen erforderlich ist: (H3, K2).
- Zwischen Darstellungsformen wechseln (Kreisgleichung–Graph eines Kreises im Koordinatensystem), wobei Grundkenntnisse und -fertigkeiten zur Anwendung kommen: (H1, K1).

### 6.4.8 Zentralmaturaaufgaben

Es gibt ein breites Spektrum mathematischer Kompetenzen, die jedoch nicht alle in gleicher Weise messbar und abprüfbar sind. Eine Unterscheidung kann auf folgende Weise vorgenommen werden:

- Affektive, soziale und auch höhere kognitive Fähigkeiten wie (mathematische) Kreativität und die Fähigkeit zur Reflexion. Solche Leistungen sind durch eine punktuelle Überprüfung allein nicht erfassbar. Prozessbeobachtungen, Beurteilung von Prozessplanungen oder Prozessdokumentationen sind hier typische Evaluationsmethoden.
- Mathematische Kompetenzen, die eher spezifisch und oft nur kurzfristig verfügbar sind. Unterschiedlichste Schwerpunktsetzungen können hier zum Ausdruck kommen. Solche Kompetenzen sind durch Schularbeiten und schriftliche/mündliche Ausarbeitungen punktuell überprüfbar.

- Grundkompetenzen sind, wie schon beschrieben, mathematische Fähigkeiten, die allen Schüler(inne)n längerfristig verfügbar sein sollen und einer schriftlichen Überprüfung und somit auch der zentralen schriftlichen Reifeprüfung zugänglich sind (vgl. Peschek, Fischer, Heugl & Liebscher 2009, S. 7).

Folgende Aufgaben aus der Geometrie bei denen Grundkompetenzen angesprochen werden, könnten z. B. Teil einer zentralen schriftlichen Reifprüfung sein:

**Dreiecke**

Es sind die Koordinaten zweier Dreiecke $ABC$ und $A_1B_1C_1$ gegeben:

1. $A(-1/3)$, $B(4/1)$, $C(3/13)$
2. $A_1(1/-5)$, $B_1(0/3)$, $C_1(-8/2)$

   *Aufgabenstellung:*

   (a) Bestimmen Sie, um welche Dreiecke es sich handelt auf zwei Arten!
   (b) Begründen Sie Ihre Vorgehensweise für das Dreieck $ABC$!

**Grundkompetenzen:**

- Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext interpretieren können.
- Vektoren geometrisch interpretieren und verständig einsetzen können.

**Ellipse oder doch nicht?!**

Von einer „Ellipse“ sind folgende Bestimmungsstücke gegeben ($A$ bezeichnet einen Hauptscheitel, $B$ einen Nebenscheitel, $e$ ist die Brennweite, $\overline{AA'} = 2a$ ist die Hauptachse und $\overline{BB'} = 2b$ die Nebenachse):

1. $A(-4/0)$, $e = 4$
2. $B(0/2)$, $e = \sqrt{6}$
3. $A = (\sqrt{8}/0)$, $B = (0/\sqrt{8})$

   *Aufgabenstellung:*

   (a) Stellen Sie, wenn möglich, die Ellipsengleichung auf!
   (b) Durch welche Angaben ist keine Ellipse im festgelegt? Begründen Sie!

(c) Welche Figuren erhält man anstelle einer Ellipse durch diese Angaben? Welche Bedeutung haben diese Angaben in den anderen Figuren? Ändert sie sich?

**Grundkompetenzen:**

- Gleichungen aufstellen und ihre Parameter im Kontext interpretieren.
- Quadratische Gleichungen (in zwei Variablen) geometrisch interpretieren.

Diese Aufgaben sind einer zentralen schriftlichen Überprüfung zugänglich, da Grundkompetenzen angesprochen werden und diese in weniger vertrauten Situationen angewandt werden müssen. Außerdem sind weitgehende Reflexionen über Vorgehensweisen und Sachverhalte erforderlich. Dennoch ergeben sich Schwierigkeiten bei der Beurteilung. Denn Behauptungen können anhand verschiedener Argumentationsbasen begründet werden. Die Exaktheit einer Begründung kann nur bezüglich einer bestimmten Argumentationsbasis beurteilt werden (vgl. 5.2 Argumentationsbasis).

Die Aufgabe „Dreiecke“ kann auf verschiedene Arten gelöst werden. Als Argumentationsbasis können sowohl das Orthogonalitätskriterium als auch der Satz von Pythagoras bzw. seine Umkehrung herangezogen werden. Auch durch das Berechnen der Winkel zwischen zwei Vektoren lässt sich die Art des Dreiecks feststellen. Da keine Argumentationsbasis vorgegeben ist, kann man sich durchaus in der Begründung auf eine Zeichnung der gegebenen Dreiecke berufen, zumindest wenn die Winkel alle deutlich von 90° verschieden sind.

Bei der Aufgabe „Ellipse oder doch nicht?!“ bestimmen nur die Angaben aus Nummer 2 eine Ellipse im eigentlichen Sinn. Bei Nummer 1 und 3 ist eine Strecke bzw. ein Kreis (Spezialfall einer Ellipse) festgelegt. Bei den Begründungen kann man sich auf die Definition der Ellipse, die Ellipsengleichung und die Beziehung $e^2 = a^2 - b^2$ beziehen.

Die geforderte Ausführlichkeit einer Begründung und eine adäquate Argumentationsbasis wird für Schüler(innen) nicht immer offensichtlich sein. Für Lehrer(innen) ist es daher auch schwierig zu beurteilen, ob eine Begründung zulässig ist oder nicht, denn der Grat zwischen einer richtigen und einer falschen, oder besser: genügenden und lückenhaften Begründung ist ein sehr schmaler.

Etwas einfacher ist die Korrektur bei Aufgaben folgender Art:

**Deltoid**

Christian behauptet, dass folgende Eigenschaften auf *jedes* Deltoid zutreffen!

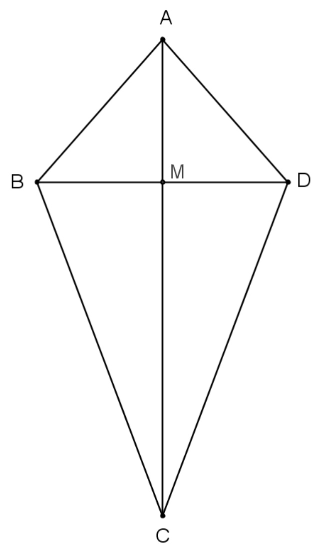


Abbildung 6.28: Deltoid

- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
- $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$
- $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right|}$
- $\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{DA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DC}\right|}$
- $\left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{MD}\right|$
- $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right|$
- $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right|$

*Aufgabenstellung:*

Welche Kriterien treffen tatsächlich auf *jedes* Deltoid zu? Markieren Sie diese mit R (für richtig)! Die anderen sind mit F (für falsch) zu kennzeichnen.

**Grundkompetenzen:**

- Gleichungen zwischen Vektoren geometrisch interpretieren und verständig einsetzen können.

- Algebraische Rechenoperationen zwischen Vektoren auch geometrisch deuten können.

Diese im Multiple-Choice-Format formulierte Aufgabe lässt nur die zwei Antwortmöglichkeiten richtig und falsch zu. Dies stellt eine Erleichterung für die Korrektur dar. Dennoch ist ein Nachdenken und Reflektieren über Christians Argumente erforderlich, da diese auf ihre Richtigkeit überprüft werden müssen.

Bei dieser Aufgabe wird ein Teilaspekt des Begründens angesprochen, bei dem vorgegebene Argumentationen auf ihre Richtigkeit untersucht und beurteilt werden müssen. Grundkompetenzen sind dabei erforderlich, somit könnte diese Aufgabe auch bei der zentralen schriftlichen Reifeprüfung eine Rolle spielen. Die Beurteilungsproblematik wäre damit gelöst. Dennoch sollten von Schüler(inne)n auch eigenständig formulierte Begründungen verlangt werden, um auch andere Aspekte des Begründens abzudecken.

# Kapitel 7

# Conclusio

Durch eine intensive Auseinandersetzung mit den Bildungsstandards und der standardisierten Reifeprüfung in Mathematik lässt sich erkennen, dass beide Projekte ähnliche Ziele verfolgen und Funktionen erfüllen sollen. Der Erwerb von Grundkompetenzen, die Qualitätsentwicklung an den Schulen und erhöhte Vergleichbarkeit stehen dabei im Vordergrund. Das Begründen und Argumentieren sind Kompetenzen, die es in allen Klassenstufen zu erreichen bzw. zu entwickeln gilt und an allen Inhalten umsetzbar sind. Diese Kompetenzen erfordern ein tiefergründiges und grundlegenderes Verständnis, das bei den Lernenden anzustreben ist. Ist dieses erreicht, so ist Nachhaltigkeit wahrscheinlicher. Dass Handlungsbedarf von Nöten ist, zeigen unter anderem die Ergebnisse des ersten Pilottests. Schüler(innen) haben nach aktuellem Stand erhebliche Defizite in den Grundkompetenzen. So wurden beispielsweise von 20 Aufgaben 15 von weniger als 30% der getesteten Schüler(innen) gekonnt. Deutlich wird die Problematik speziell an der Aufgabe „Gleichungssystem mit Parameter“, die von nur 2% der getesteten Schüler(innen) richtig gelöst wurde (vgl. Ergebnisse 1. Pilottest).

**Aufgabe:** Gegeben ist das Gleichungssystem in $x$ und $y$:

$$I: 9x + 6y = 1$$
$$II: 6x + 4y = a$$

*Aufgabenstellungen*
Geben Sie alle Werte $a \in R$ an, für die das Gleichungssystem

- keine Lösung
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen

hat (Testheft A1)!

Somit sind die Intentionen der Standardisierung sehr greifbar und schlüssig. Was jedoch nicht ganz so einfach zu beurteilen ist, die Frage nach der Umsetzung.

Es reicht nicht aus, Standards zu formulieren und diese dann abzuprüfen. Lehrer(innen) mit der Forderung nach kompetenzorientiertem Unterricht und mit den Ergebnissen der Überprüfungen allein zu lassen wäre nicht zielführend. So wie die Bildungsstandards fordern, müssen die Ergebnisse von Überprüfungen angemessen und informativ zurückgemeldet werden, sodass diese für die Qualitätsentwicklung in den Schulen nutzbringend verwendet werden können. Dazu bedarf es einer Veränderung und Unterstützung in vielerlei Hinsicht.

Zum einen haben hier die *Schulbücher* eine tragende Funktion. Zum Teil findet man schon Aufgaben, die ähnlich den Musteraufgaben der Bildungsstandards und die der Zentralmatura sind, bzw. Aufgaben die auf die Erreichung von (Grund-)Kompetenzen zielen (vgl. Götz & Maaß 2009, S. 28). Dennoch wäre es wünschenswert, dass die in den Schulbüchern anzutreffende Dominanz an Aufgaben zum Rechnen und Operieren an Bedeutung verliert und somit unter anderem den Kompetenzen Begründen, Argumentieren und Interpretieren ein noch größerer Platz eingeräumt wird (vgl. Mrkvicka 2010).

Neben adäquaten Schulbüchern und Unterrichtsmaterialien werden Konferenzen und *Fortbildungen* zur Etablierung eines kompetenzorientierten Unterrichts unerlässlich sein. Lehrer(innen) müssen zum Einen ganz grundlegend über die Art und Weise entsprechender Aufgabenstellungen informiert werden. Desweiteren wird es hilfreich sein, Schulungen anzubieten, in denen Lehrer(innen) über alternative Unterrichtsmethoden erfahren, die die Eigentätigkeit der Schüler(innnen) erfordert und fördert. Offenes Lernen, Begründungstagebücher, Projektunterricht und Schüler(innen)präsentationen wären einige Beispiele dafür. Weiters sind in diesem Zusammenhang Fortbildungen, bei denen man lernt, wie man bei Schüler(innen) einen schrittweisen Kompetenzaufbau erreicht, zu nennen. Damit ist gemeint, dass mit einfachen Begründungsaufgaben begonnen wird. Schrittweise erhöht sich die Komplexität der Begründungstätigkeiten, sodass schließlich und endlich ein hoher Grad an Vernetzung und Reflexion gefordert werden kann.

Veränderungsbedarf sehe ich im Konzept der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in der Formulierung der Grundkompetenzen. In der aktuellen Fassung wirken sie wie eine oberflächliche und ungenaue Zusammenfassung des Lehrplans. Erst durch eine intensivere Auseinandersetzung mit den bildungstheoretischen Orientierungen und den Musteraufgaben lässt sich zusammenreimen, welche Grundkompetenzen anzustreben sind. Ein Kompetenzmodell ähnlich dem der Bildungsstandards wäre für einen kompetenzorientieren Unterricht in der AHS-Oberstufe durchaus förderlich. Mit einigen Veränderungen könnte man dieses auf die Grundkompetenzen der Zentralmatura übertragen. Denn jede mathematische Aufgabe (auch in der Oberstufe) bezieht sich auf einen (oder mehrere) bestimmte(n) Inhalt(e) (Inhaltsbereich), mit dem/denen man auf eine bestimmte Art und Weise etwas machen soll (Handlungsbereich). Mathematische Anforderungen unterscheiden sich natürlich auch hinsichtlich der Art ihrer Vernetzung (Komplexitätsbereich). Die Untergliederung in die vier Handlungsbereiche wäre also auch für die Oberstufe denkbar. Dennoch müssten bei der genaueren Ausführung Veränderungen vorgenommen werden, da die charakteristischen Tätigkeiten nicht immer auf die Klassen der Oberstufe zutreffen. So sind Tätigkeiten wie „Maßeinheiten umrechnen und das Durchführen elementarer Rechenoperationen“ für die Oberstufe eher zweitrangig und passieren nebenbei. Der Inhaltsbereich unterscheidet sich selbstverständlich von dem der Unterstufe und eine Untergliederung existiert ohnehin schon. Die Komplexitätsbereiche könnten genauso in ein Kompetenzmodell für die Oberstufe einfließen.

Durch die Standardisierung sehe ich sowohl im Pflichtschulbereich als auch in der AHS-Oberstufe und der BHS eine Einschränkung der dennoch gewünschten Individualität. Sind zwar Freiräume für ebendiese vorgesehen, besteht trotzdem die Gefahr, dass diese für Standardstrainings und für die Vorbereitung auf die schriftliche Matura genützt werden. Denn welche(r) Lehrer(in) möchte schon, dass seine/ihre Klassen bei Überprüfungen der Bildungsstandards schlecht abschneiden, oder noch schlimmer bei der zentralen schriftlichen Reifeprüfung durchfallen? Es wird schwierig sein, ein „teaching to the test“ zu vermeiden, wenn nicht angemessen auf die Ergebnisse reagiert wird und entsprechende Aktionen gesetzt werden. Natürlich gibt es ein „teaching to the test“ vor jeder Schularbeit, aber dabei sind wenigstens die Anforderungen, Inhalte, Komplexitätsstufen auf die jeweilige Klasse (hoffentlich!) gemünzt.

Unklar ist für mich noch, was mit Lehrer(inne)n passiert, wenn deren Klassen regelmäßig schlecht abschneiden. Individuelle Rückmeldungen und Verbesserungsvorschläge wären in diesen Fällen hilfreich (vgl. Götz & Peschek 2009, S. 172). Welche Konsequenzen werden gezogen, wenn die Ansprüche bei der Zentralmatura vom Großteil der Schüler(innen) nicht erfüllt werden können (vgl. Maaß 2009, S. 17)?

Die vorbereitende Pilotphase inklusive der Pilottests wird über die Leistungsfähigkeit und die Kompetenzerreichung der Lernenden Aufschluss geben. Wie die zentrale schriftliche Reifeprüfung konkret aussehen wird kann man zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht genau sagen, da die Pilotphase, die derzeit im Gange ist, noch zu einigen Veränderungen und Anpassungen führen wird.

Einen großen Vorteil in der Standardisierung sehe ich darin, dass unter anderem alteingesessene und festgefahrene Lehrer(innen), die der Pension schon näher sind als der Klasse, noch einmal eine externe „Motivation“ erfahren, um die Schüler(innen) auf ein gewisses standardisiertes Niveau zu bringen.

Begründen und Argumentieren sind keine Tätigkeiten, die erst in der Hochschulmathematik relevant sind, sondern beginnen, wie man sieht, sehr früh. Schon in der ersten Klasse Unterstufe (siehe 6.4.1) können die Lernenden einfache Zusammenhänge begründen, Behauptungen auf ihre Richtigkeit untersuchen und beurteilen. Die Vielfalt an Begründungsmöglichkeiten erlaubt altersadäquate Angebote in jeder Klassenstufe. Zu betonen ist, dass man nie zu früh damit beginnen kann und kein Sachverhalt zu einfach oder zu selbstverständlich ist, um nicht nach einer Begründung zu verlangen.

Problematisch ist die Überprüfbarkeit und Messbarkeit von Leistungen bei denen Schüler(innen) begründen und argumentieren sollen. Wie in Kapitel 6.4.8 ausgeführt kann man Begründungen nur in Hinblick auf eine bestimmte Argumentationsbasis beurteilen. Somit wird es bei Begründungsaufgaben eine Vielzahl an verschiedenen Lösungen geben. Die Begründungen werden sich in ihrer Argumentationsbasis und in der Genauigkeit der Ausführung unterscheiden (vgl. Götz & Sattlberger 2009, S. 102–103).

Damit Schüler(innen) bei Standardsüberprüfungen und bei der Zentralmatura in ihren Begründungen gültige Schlussfolgerungen ziehen und Argumentationsweisen verwenden können, müssen sie von der ersten Klasse an darauf vorbereitet werden. Regelmäßiges Begründen in den verschiedensten Situationen, an beliebigen Inhalten und auf unterschiedlichste Weise soll das gewünschte Resultat bringen (vgl. Götz & Sattlberger 2009, S. 105).

Egal auf welche Art und Weise sich Bildungsstandards und die zentrale schriftliche Reifeprüfung in Mathematik schließlich und endlich durchsetzen und ob sie so durchgeführt werden, wie es im Moment geplant ist, *Begründen* ist auf jeden Fall eine Kompetenz, die mit oder ohne Zentralmatura und Bildungsstandards mehr Aufmerksamkeit erhalten sollte. Eine adäquate Umsetzung kann den Schwerpunkt von einer rezeptartigen Reproduktion auf wirkliches (Nicht-) Verstehen verschieben. Es besteht die Möglichkeit, dass Schüler(innen) interessierter daran sind in die Tiefe zu gehen, und nicht an der Oberfläche hängen bleiben wollen. Sie werden versuchen müssen Inhalte zu verstehen, da sie wissen, dass sie diese in neuen, vielleicht unbekannten Situationen anwenden können müssen. In diesem Sinne ist hier „Verstehen“ gemeint.

Reduziert man im Unterricht lange Rechenoperationen, so bleibt mehr Zeit, um dem Begründen Aufmerksamkeit zu schenken. Dies ist jedoch nicht immer möglich, da Begründungen manchmal auch lange Berechnungen verlangen. Sollte das Begründen im Geometrieunterricht verstärkt Einfluss nehmen, hat dies auch Auswirkungen auf die *Prüfungsmodalitäten*. Der Grund dafür ist, dass die leichte Überprüfbarkeit des Erlernten durch den Fokus auf das Begründen verloren geht.

Ein weiterer Punkt, welcher Beachtung finden muss, ist, wie man mit der unterschiedlichen *Kreativität* der Individuen umgeht. Ein möglicher Lösungsansatz wäre, das Begründen ebenso wie das Operieren im Unterricht unterzubringen und es damit zu einer Routinetätigkeit für die Schüler(innen) werden zu lassen.

Die Ansätze und Konzepte der Bildungsstandards und Zentralmatura bergen Potential für einen Fortschritt im Mathematikunterricht, jedoch wirken diese nicht von selbst und alle Probleme seien somit gelöst. Sehr viel Forschungsarbeit wird bis dahin noch nötig sein!

# Kapitel 8

# Quellenverzeichnis

## Literatur


1. Achleitner, R., Ratzberger-Klampfer, A. & Weikinger, M. (2008). ganz klar: Mathematik 4. Wien: Verlag Jugend & Volk

2. Binder, G., Denninger, F. & Urban-Woldron, H. (2010). $Klar^2$ – Mathematik 5. Wien: Verlag Jugend & Volk

3. Bleier, G., Lindenberg, J., Lindner, A. & Stepancik, E. (2009). Dimensionen Mathematik 5. Wien: Verlag Dorner

4. Brand, C. & Dorfmayr, A. (2009). Thema Mathematik für die 5. Klasse AHS. Linz: Veritas

5. Bürger, H. (1998). Zur Entwicklung allgemeiner mathematischer Fähigkeiten. Argumentieren und exaktes Arbeiten im Mathematikunterricht. In: Mathematik in der Schule 36, 585–589

6. Bürger, H., Fischer, R. & Malle, G. (2000). Mathematik – Oberstufe 3. Wien: öbv&hpt

7. Dorfmayr, A., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2009). Mathebuch 4 – Lehrbuch und Übungsbuch für die 4. Klasse HS und AHS. Wien: Ed. Hölzel

8. Elschenbroich, H.-J. (2002). Visuell-dynamisches Beweisen – Neue Ansätze im Geometrie-Unterricht durch Dynamische Geometrie-Software (DGS). In: mathematiklehren 110, 56–59

9. Franke, M. (2000). Didaktik der Geometrie. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verlag

10. Götz, S. & Reichel, H.-Ch. (Hrsg., 2003). Lehrbuch der Mathematik – 7. Klasse. Wien: öbvhpt

11. Götz, S. & Reichel, H.-Ch. (Hrsg., 2005). Mathematik-Lehrbuch 6. Wien: öbv

12. Goldberg, E. (2002). Streitend das Begründen lernen. In: mathematiklehren 110, 9–11

13. Hanisch, G., Benischek, I., Hauer-Typpelt, P. & Sattlberger, E. (2007). Mathe Fit 1. Linz: Veritas-Verlag

14. Hellmich, F., Hartmann, J. & Reiss, K. (2002). Bedingungen für das Argumentieren und Begründen im Geometrieunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht Klagenfurt, 231–234

15. Heske, H. (2002). Methodische Überlegungen zum Umgang mit Beweisen. In: mathematiklehren 110, 52–55

16. Jaschke, T. (2009). Bewusstes Argumentieren – Begründungsaufgaben zum „Pythagoras". In: mathematiklehren 155, 50–58

17. Keller-Ressl, M., Sidlo, E.-M. & Wintner, H. (2005). Blickpunkt Mathematik 3. Wien: öbvhpt

18. Klieme, E. & Deutschland/Bundesministerium für Bildung und Forschung (2007). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung

19. Koth, M. (2002). Dreiecke erzeugen Dreiecke. In: mathematiklehren 110, 47–51

20. Koth, M. (2008). Vektorrechnung und analytische Geometrie. Schulmathematik 4. Skriptum zur Vorlesung

21. Kraker, M., Plattner, G., Preis, Ch., Schliegel, E. (2009). Expedition Mathematik 1. LehrerInnenmaterial mit CD-ROM. Wien: Dorner GmbH

22. Krauter, S. (2005). Elementargeometrie – Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. München: Spektrum Akademischer Verlag

23. Lorbeer, W. & Reiss, K. (2009). Probleme lösen und Begründungen finden. In: mathematiklehren 155, 22–26

24. Lucyshyn, J. (2007). Bildungsstandards in Österreich. Entwicklung und Implementierung. Pilotphase II (2004–2007). Salzburg

25. Lucyshyn, J. & Specht, W. (2008). Einführung von Bildungsstandards in Österreich – Meilenstein für die Unterrichtsqualität? In: Beiträge zur Lehrerbildung 26 (3), 318–325

26. Mainzer, K. (1980). Geschichte der Geometrie. Mannheim: Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut

27. Malle, G. (2002). Begründen – eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht. In: mathematiklehren 110, 4–8

28. Mormann, T. (1981). Argumentieren, Begründen, Verallgemeinern – Zum Beweisen im Mathematikunterricht. Königstein/Ts.: Scriptor Verlag

29. Mrkvicka, H. (2010). Bildungsstandards als vergebliche Liebes-$\mu$? Eine erste Analyse für den Mathematikunterricht. Universität Wien: Diplomarbeit

30. Neureiter, H., Fürst, S., Mürwald, E. & Preis, C. (2010). Praxishandbuch für „Mathematik". Bildungsstandards – für höchste Qualität an Österreichs Schulen. Herausgegeben vom Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. Graz: Leykam

31. Peschek, W. (2008). Thema: Bildungsstandards: Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht Budapest. Münster: WTM Verlag, 635–638

32. Ramharter, E. (2005). Ist das kartesische Koordinatensystem kartesisch? In: Wissenschaftliche Nachrichten 128, 25–27

33. Ratzinger, W. (1992). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Wien: VWGÖ

34. Reichel, H.-C. & Humenberger, H. (Hrsg., 2007). Das ist Mathematik 1. Wien: öbv

35. Reichel, H.-C. & Humenberger, H. (Hrsg., 2008). Das ist Mathematik 2. Wien: öbv

36. Reichel, H.-C. & Humenberger, H. (Hrsg., 2009). Das ist Mathematik 3. Wien: öbv

37. Reichel, H.-C., Litschauer, D. & Groß, H. (2000). Das ist Mathematik 2. Wien: öbv&hpt

38. Reichel, H.-C., Litschauer, D. & Groß, H. (2002). Das ist Mathematik 4. Wien: öbv&hpt

39. Reiss, K. (2009). Wege zum Beweis — Einen „Habit of Mind" im Mathematikunterricht etablieren. In: mathematiklehren 155, 4–12

40. Sattlberger, E. & Götz, S. (2007). ERBEG – Erklären und Begründen im Mathematikunterricht. In: Didaktik der Mathematik der höheren Schulen der ÖMG, Heft 39, 102–132

41. Scheungrab, C. (2009). Beweisen im Abitur. In: mathematiklehren 155, 62–64

42. Scheid, H. (2001). Elemente der Geometrie. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

43. Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2000). 5000 Jahre Geometrie – Geschichte, Kulturen, Menschen. Heidelberg: Springer Verlag

44. Stangler, P. (1989). Begründen und Beweisen im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schule. Universität Wien: Diplomarbeit

45. Steiner, G.-F. (2001). Mathemaster. Mathematik für die 6. Schulstufe. Wien: Reniets Verlag

46. Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – Didaktik der Analytischen Geometrie und Lineare Algebra. Wiesbaden: Vieweg

47. Ufer, S. & Heinze, A. (2009). ...mehr als nur die Lösung formulieren – Phasen des geometrischen Beweisprozesses aufzeigen. In: mathematiklehren 155, 43-49

48. Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht – Die Rolle des Methodenwissens für das Beweisen in der Geometrie. In: Journal für Mathematik-Didaktik 30, Heft 1, 30–53

49. Ulovec, A. (2002). Einfache Begründungsaufgaben – Eine Auswahl von Begründungsaufgaben aus dem Bereich der Zahlen. In: mathematiklehren 110, 12–14

50. Weigand, H.-G. et al. (2009). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag

51. Wellstein, H. & Kirsche, P. (2009). Elementargeometrie – Eine aufgabenorientierte Einführung. Wiesbaden: Vieweg + Teubner

52. Wittman, E. Ch. (1987). Elementargeometrie und Wirklichkeit – Einführung in geometrisches Denken. Braunschweig: Vieweg & Sohn

## Internet

1. *Baseline-Testung:* http://www.bifie.at/ueberpruefung-bildungsstandards-8-schulstufe, 3.6.2010

2. *BIFIE, Neue Reifeprüfung:* http://www.bifie.at/neue-reifeprüfung, 9.4.2010

3. *BIFIE, Neue Reifeprüfung in Mathematik:* http://www.bifie.at/neue-reifeprüfung-mathematik, 26.4.2010

4. *Bildungsstandards in Mathematik:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool /17203/vo_bildungsstandards_ mat.pdf, 15.3.2010

5. Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 117. Bundesgesetz: *Änderung des Schulunterrichtsgesetzes, §17 Abs. 1a, seit 1.9.2008 in Kraft:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool/17038/schug_nov_08.pdf, 17.3.2010

6. Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 1. Verordnung: *Bildungsstandards im Schulwesen, §1-4, seit 1.1.2009 in Kraft:* http://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2009_II_1/BGBLA_2009_II_1.pdf, 17.3.2010

7. *Ergebnisse, 1. Pilottest:* http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Ergebnisse_Pilottests_1.pdf

8. *Ergebnisse, 1. Pilottest in den Vergleichsschulen*: http://www.uni-klu.ac.at /idm/downloads/Ergebnisse_Pilottest_1_Vergleichsschulen.pdf, 3.6.2010

9. *Erläuterungen zu den Bildungsstandards:* http://www.bifie.at/sites/default /files/Gesetzestext_Bildungsstandards_ Erläuterungen.pdf, 7.3.2010

10. Götz, S. & Maaß, J. (2009). *Das österreichische Standards-Konzept in Bezug zu Lehrplan und Schulbüchern*. In: Mathematik im Unterricht, Newsletter No.3, S. 27–47: http://www.mathematikimunterricht.at /Newsletter/Newsletter_einzeln/Newsletter3/3.pdf

11. Götz, S. & Peschek, W. (2009). *Festlegung von Bildungsstandards – aber was dann? – Versuch über ein Unterstützungssystem.* In: Mathematik im Unterricht, Newsletter No.3, 162–181: http://www.mathematikim unterricht.at/Newsletter/Newsletter_einzeln/Newsletter3/10.pdf

12. Götz, S. & Sattlberger, E. (2009). *„Warum?“ – Einsichten, Argumente und Begründungen im Standards-Modell.* In: Mathematik im Unterricht, Newsletter No.3, 96–121: http://www.mathematikimunterricht.at/Newsletter/Newsletter_einzeln/Newsletter3/7.pdf.

13. Heugl, H. & Peschek, W. (2007). *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07.* Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathe matik-Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads /Standardkonzept_Version_4/07.pdf, 8.3.2010

14. Hischer, H. (2000). *Klassische Probleme der Antike – Beispiele zur „Historischen Verankerung“.* In: Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik – Festschrift für Harald Scheid, Stuttgart/Düsseldorf/Leipzig: Klett, 97–118: http://hischer.de/uds/forsch/publikat/hischer/artikel/scheid60.pdf, 7.6.2010

15. *Korrekturanleitung A1:* http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Pilottest1_KorrAnleitungen_TestheftA1.pdf, 26.4.2010

16. *Lehrplan (2003). Lehrplan für die AHS-Unterstufe:* http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf, 30.9.2010

17. *Lehrplan (2004). Lehrplan für AHS-Oberstufe:* http://www.bmukk. gv.at /medienpool /11859/lp_neu _ahs_07.pdf, 1.4.2010

18. *Leistungsbeurteilungsverordnung §14:* http://www.ris.bka.gv.at/Dokumente /Bundesnormen/NOR12119641/NOR12119641.html, 31.5.2010

19. Maaß, J. (2009). *Bildungsstandards: Schulen und LehrerInnen brauchen Unterstützung.* In: GDM-Mitteilungen 86, 15–19: http://didaktik-der-mathematik.de/pdf/gdm-mitteilungen-86.pdf

20. Peschek, W., Fischer, R., Heugl, H. & Liebscher, M. (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik", Version 9/09.* Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/sRP-M_September_2009 .pdf, 1.4.2010

21. *PISA-Ergebnisse 2006:* http://www.bifie.at/pisa-ergebnisse-2006, 7.4.2010

22. *Testheft A1:* http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Testheft_A1.pdf, 26.4.2010

23. *TIMS-Studie 2007:* http://www.bifie.at/timss-2007-0, 7.4.2010

# Kapitel 9

# Abbildungsverzeichnis

## Literatur


1. S. 38, *Abb. 5.4 Pythagoras*: Dorfmayr, A., Mistlbacher, A. & Nussbaumer, A. (2009). Mathebuch 4 – Lehrbuch und Übungsbuch für die 4. Klasse HS und AHS. Wien: Ed. Hölzel, S. 54

2. S. 38, *Abb. 5.5 Ähnlichkeit*: Keller-Ressl, M., Sidlo, E.-M. & Wintner, H. (2005). Blickpunkt Mathematik 3. Wien: öbvhpt, S. 83

3. S. 40, *Abb. 5.6 Peripheriewinkelsatz*: Wellstein, H. (2009). Elementargeometrie. Eine aufgabenorientierte Einführung. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, S. 32


## Internet


1. S. 12–16, *Abb. 2.1–2.5 Kompetenzmodell, Gardasee, Gerade, Kegel, Trapez:* Heugl, H. & Peschek, W. (2007). Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07. Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik-Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung–Alpen-Adria-Universität Klagenfurt: http://www.uni-klu.ac.at/idm/ downloads /Standardkonzept_Version_4/07.pdf, 8.3.2010, S. 9, S. 73, S. 77, S. 85, S. 91

2. S. 22, *Abb. 3.1 Winkelbeispiele*: Testheft A1: http://www.uni-klu.ac.at/idm /downloads/Testheft_A1.pdf, 26.4.2010

3. S. 23, *Abb. 3.2 Korrekturanleitung*: Korrekturanleitung A1: http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Pilottest1_KorrAnleitungen_TestheftA1.pdf

4. S. 41, *Abb. 5.7 Stadttor*: www.friedberg.at, 20.5.2010

# Kapitel 10

# Lebenslauf

**Persönliche Daten:**

| | |
|---|---|
| Name | Birgit Strobl |
| Geburtsdatum | 07.01.1986 |
| Geburtsort | Oberwart |
| Staatsbürgerschaft | Österreich |

**Ausbildung:**

| | |
|---|---|
| seit 10.2009 | Lehramtsstudium der Mathematik, Psychologie und Philosophie an der Universität Wien |
| 02.2009–07.2009 | Lehramtsstudium der Mathematik, Auslandsstudium an der Universitat Autonoma de Barcelona |
| 10.2006–02.2009 | Lehramtsstudium der Mathematik, Psychologie und Philosophie an der Universität Wien |
| 10.2005–07.2006 | Studium der Rechtswissenschaften, Universität Graz und Wien |
| 09.2000–07.2005 | Bundesbildungsanstalt für Kindergartenpädagogik mit Zusatzausbildung zur Horterzieherin, Oberwart |
| 09.1996–07.2000 | Hauptschule Friedberg |

**Praktika:**

| | |
|---|---|
| 08.2009–09.2009 | Pädagogische Leitung beim Ferienlager in Scheibbs der Wiener Jugenderholung |
| 08.2008–09.2008 | Pädagogische Leitung beim Ferienlager in Scheibbs der Wiener Jugenderholung |
| 03.2008 | Kinderbetreuung beim Ferienlager in Scheibbs der Wiener Jugenderholung |
| 07.2005–09.2005 | Kinderbetreuung als Springerin bei Ferienlagern der Wiener Jugenderholung |
| 07.2000–09.2000 | Berufspraktikum im SOS-Kinderdorf in Pinkafeld |