DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Mathematica im Mathematikunterricht am Beispiel
„Schnittpunkte verschiedener Kurven“

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin :	Merve Dosdogru
Matrikel-Nummer:	0103887
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Informatik und Informatikmanagement
Betreuer:	Univ. Doz. Dr. Günter Hanisch

Wien, am 26.05.2010

Danksagung

Mein allererster Dank ist an meine Eltern, Nevin und Muhsin Dosdogru, gerichtet, die mich nicht nur finanziell, sondern auch in jeglicher Art und Weise in meinem Studium unterstützt haben, und mir diese Ausbildung ermöglicht haben. Ich möchte mich an dieser Stelle auch bei meinen Schwestern, meinem Freundeskreis und bei allen jenen Menschen bedanken, die mir während meines Studiums immer zur Seite gestanden sind.

Ganz speziell möchte ich meinem Betreuer, Univ. Doz. Dr. Günter Hanisch, für seine Unterstützung danken. Er stand mir mit wertvollen Ratschlägen stets hilfreich zur Seite und er nahm viel positiven Einfluss auf die Arbeit.

Zuletzt gebührt mein Dank Üzeyir Yıldız für seine guten Anregungen.

Abbildungsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Mathematik als Wissenschaft

„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“

Galileo Galilei

Im Jahr 1604 behauptet Johannes Kepler [1571-1630] in einem Aufsatz für einen Kalender, dass „alle Menschen sich aus der Mathematik ernähren.“ Im Jahr 1996 beschäftigte sich das Wall Street Journal mit der Mathematik. Themen dieses Artikels waren Haarshampoos, Softdrinks und die olympischen Spiele.[1] Die Mathematik spielt durch die Jahrtausende eine immer größere Rolle in unserem Leben.

Mathematische Anwendungen erleichtern das Leben vieler Menschen. Dies ist möglich, weil Mathematik Tag für Tag die Grenzen zu anderen Wissenschaften überschreitet und wesentlich wichtige Beiträge zur Weiterentwicklung in vielen Wissensgebieten leistet.

Mathematik ist die Grundlage aller modernen Naturwissenschaften. In vielen Bereichen von Technik, Wirtschaft und Wissenschaft sind mathematische Methoden etabliert. Eine im Alltag oft benutzte mathematische Anwendung ist die Verschlüsselung elektronischer Kommunikation.[2] Als der englische Mathematiker Turing [1912-1954] den deutschen Geheimcode knackte, hat er ganz wesentlich zum Ausgang des 2. Weltkrieges beigetragen. Heute sind es vor allem Passwörter als Zugangsberechtigungen und Geheimzahlen zu EC-

---

[1] vgl. WERNER Bodo. Mathematik studieren. Stand Mai 2007.
Url: http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/curricula/warumstudium.html [05.01.2010, 21.10 Uhr]
[2] vgl. BEHRENDS Ehrhard. Mathematik. Stand September 2005.

Karten oder im Homebanking, deren Sicherheit auf mathematischer Verschlüsselung basiert.[3]

Mathematische Methoden sind in den letzten Jahren in andere Bereiche vorgedrungen, wie z.B. in die Biologie. Dies gilt auch für die organische Chemie und die Pharmazie. So konnte die Sequenzierung des menschlichen Genoms, die durch das Human Genome Project für das Jahr 2010 geplant war, bereits in den Jahren 2003-2004 abgeschlossen werden, da den Molekularbiologen mathematische Algorithmen zur Verfügung standen.[4]

Fast jede Berufsgruppe muss ein gutes Grundwissen in Mathematik haben. Dies ist auch der Hauptgrund, warum Mathematik weltweit in jeder Stufe der schulischen Ausbildung eine wichtige Rolle spielt. An fast allen Schulen und in fast jeder Klassenstufe wird Mathematik als Pflichtfach unterrichtet.[5]

In technischen Berufen spielt die Mathematik eine grundsätzliche Rolle, da Mathematik eine Basis für alle technischen Entwicklungen ist. Heutzutage werden Produkte und Abläufe mathematisch modelliert, simuliert und bestmöglich gestaltet. Mathematik wird überall gebraucht, von der Optimierung der Fasern in Rußfiltern bis zu der Auslastung von Produktionsplänen. Man kann sich vorstellen, dass Optimierungsaufgaben eine große Bedeutung für alle Betriebe haben. Mit Hilfe von Crash-Simulationen im Rechner müssen in der Automobilindustrie nicht mehr hunderttausende Autos gegen die Wand fahren. Ohne Mathematik wäre die erste Mondlandung nicht möglich gewesen, ebenso ist sie heute wichtig in Raumstationen und Satelliten. Die neuesten Ergebnisse in der Differenzial- und Integralrechnungen sowie der Vektoranalysis helfen Wissenschaftern dabei, in der Raumfahrt Routen und Kräfteverhältnisse zu berechnen. Großen Wert haben auch moderne Numerik, dynamische Systeme und die Kontrolltheorie. Das deutsch-indonesische Tsunami-Frühwarnsystem

---

Url: http://www.mathematik.de/ger/information/wasistmathematik/wasistmathematik.html [05.01.2010, 21.42 Uhr]

[3] vgl. WERNER Bodo. Mathematik studieren. Stand Mai 2007. Url: http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/curricula/warumstudium.html [05.01.2010, 22.02 Uhr]

[4] vgl. Projektgruppe Jahr der Mathematik. Mathematik als Wissenschaft. Url: http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/b__Downloads/06__Presse/Dossier__Wissenschaft.pdf [05.01.2010, 23.00 Uhr]

[5] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5. Siehe Vorwort

und die neuesten Großraumflugzeuge gehören zu den aktuellen Anwendungen, die ohne moderne Mathematik nicht möglich gewesen wären. Zusammengefasst kann man sagen, dass die Angewandte Mathematik die Basis des technischen Fortschritts ist.[6]

Die Gewissheit der Mathematik unterscheidet sie von den meisten anderen Gebieten, weil sie exakte Definitionen und Beweise besitzt. Viele Wissenschaften nutzen daher auch mathematische Fertigkeiten und Denkweisen, um von dieser Sicherheit und Gewissheit zu profitieren.[7]

Dazu ein Zitat des berühmten Schweizer Mathematikers Paul BERNAYS:

> *„Wenn der Menschengeist sich beschwert oder herabgedrückt fühlt durch das viele Rätselhafte im Dasein, durch den Eindruck unserer weit gehenden Unwissenheit in so vielen Bereichen, der Mangelhaftigkeiten der sprachlichen Wiedergabe und Verständigung, dann wendet er sich wohl gern dem Gebiet der Mathematik zu, in welchem ein deutliches und genaues Erfassen von Gegenständlichkeit sich findet und Gewinnung von Einsicht durch angemessene Begriffe in so befriedigender Weise erreicht wird. Hier fühlt der menschliche Geist sich heimisch, hier erlebt er den Triumph, dass die Verwendung und Verbindung von ganz elementaren Vorstellungen, wie sie uns aus dem Kinderspiel vertraut sind, bedeutsame, überraschende und weittragende Resultate zutage bringt. An Konkretes als Ausgangspunkt anknüpfend, betätigt sich das mathematische Denken in anschaulicher Fixierung und Vergegenwärtigung seiner Gegenstände, und von da führt es durch Begriffsbildungen und gedankliche Verflechtung von Feststellungen zu Ergebnissen, die wiederum sich auf das Konkrete anwenden lassen und sich hier in imponierender Weise als erfolgreich erweisen.“*

Um dieser komplexen Aufgabe im Schulunterricht leichter nachkommen zu können, listet der österreichische Lehrplan verschiedene Aspekte der Mathematik auf:

---

[6] vgl. Projektgruppe Jahr der Mathematik. Was Mathematik bewegt? Url: http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/02__Mathematik__alles__was__z_C3_A4hlt/-01__Was_20Mathematik_20bewegt.html [13.01.2010, 12.14 Uhr]

[7] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5. Siehe Vorwort

Aspekte der Mathematik[8]

Schöpferisch - kreativer Aspekt:

Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Arbeitstechniken vermittelt, Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden.

Sprachlicher Aspekt:

Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, in dem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden.

Erkenntnistheoretischer Aspekt:

Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.

Pragmatisch – anwendungsorientierter Aspekt:

Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien bzw. Berufsfelder.

Autonomer Aspekt:

Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen - von festgelegten Prämissen ausgehend - stringent abgeleitet werden können; Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern und fördert so den demokratischen Prozess.

Kulturell – historischer Aspekt:

Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung.

---

[8] Lehrplan Mathematik, Seite 1,2

1.2. Lehrplan der AHS-Oberstufe „Mathematik“

„Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen“.[9]

Um dieses Ziel zu erreichen, ist im Lehrplan eine Reihe von didaktischen Grundsätzen verzeichnet und beschrieben. Der letzte dieser didaktischen Grundsätze (die anderen didaktischen Grundsätze, wie Lernen in anwendungsorientierten Kontexten, Lernen in Phasen, Lernen in sozialen Umfeld, Lernen mit medialer Unterstützung, usw., werden hier nicht im Detail erörtert, weil sie in keinem direkten Zusammenhang mit dieser Arbeit stehen) ist direkt mit der Ausrichtung dieser Arbeit verbunden und lautet wie folgt:

Lernen mit technologischer Unterstützung

„Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.“[10]

Dieser im Lehrplan genannte didaktische Grundsatz betont die Notwendigkeit des Einsatzes von Informationstechnologien im Allgemeinen, insbesondere Computer im Unterricht. Die Lehr- und Lernmethoden müssen sich verändern. Ein planmäßiges Vorgehen für den Unterricht hat eine große Bedeutung für das passende und zweckmäßige Nutzen von Programmen. In diesem Grundsatz wird als minimales Lernziel das Kennenlernen derartiger Technologien

[9] Lehrplan Mathematik, Didaktische Grundsätze Seite 2
[10] Lehrplan Mathematik, Lernen mit technologischer Unterstützung Seite 3

bestimmt. Dafür ist es nötig, die Computeralgebra-Systeme beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten zu verwenden. Auf diese Weise soll darauf gezielt werden, einen dauernden Einsatz der Computerprogramme zu realisieren.
Für die Lehrenden ist es eine große Herausforderung, den vorgeschriebenen Grundsatz des Lehrplans in der Schule um zu setzen.

1.3. Ziel dieser Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, mathematische Aufgaben aus dem Bereich der analytischen Geometrie mit *Mathematica* zu berechnen und sie so darzustellen, dass sie direkt in den Mathematikunterricht übernommen werden können.

Alle Aufgabenstellungen und Materialen verstehen sich als Vorschläge und sollen den Einsatz von Mathematica im Thema „Berechnung der Schnittpunkte verschiedener Kurven“ im Mathematikunterricht der Oberstufe einer allgemeinbildenden höheren Schule ermöglichen.

Ebenfalls wird in dieser Arbeit auf das notwendige Grundwissen über *Mathematica* eingegangen, da diese Information für die Schüler und die Lehrperson erforderlich ist, die keine Kenntnis über dieses Computeralgebra-System haben.

Um das Verwenden dieser Beispiele im Schulalltag zu erleichtern, werden die mathematischen Hintergründe zu den Themen in einem eigenen Abschnitt beschrieben.

2. Mathematica im Mathematikunterricht

2.1. Was versteht man unter Computeralgebra?

„Die Verarbeitung symbolischer mathematischer Ausdrücke auf einem Computer bezeichnet man als Computeralgebra oder Formelmanipulation. Beide Begriffe werden synonym verwandt, wobei die Bezeichnung „Formelmanipulation“ aus nachfolgend genannten Gründen den Sachverhalt besser trifft. Der Begriff „Computeralgebra“ könnte leicht zu dem Missverständnis führen, dass man sich nur mit der Lösung algebraischer Probleme beschäftigt. Die Bezeichnung „Algebra“ steht aber hier für die verwendeten Methoden zur symbolischen Manipulation mathematischer Ausdrücke, d.h. die Algebra liefert im Wesentlichen das Werkzeug zum Auflösen von Ausdrücken und zur Entwicklung von Algorithmen. Es lassen sich jedoch nur solche Probleme behandeln, deren Bearbeitung nach endlich vielen Schritten die gewünschte Lösung liefert. […] Dabei versteht man unter einem „endlichen Algorithmus“ eine Vorschrift, die ein Problem in endlich vielen Schritten exakt löst.“[11]

Computeralgebra-Systeme (CAS) sind Rechenwerkzeuge, die die Ausführung algebraischer Rechenkalküle automatisieren. CAS können Terme vereinfachen, Funktionen symbolisch differenzieren und integrieren, Graphen zeichnen, Gleichungen und Gleichungssysteme lösen, Matrizen bearbeiten usw. Kurz: Sie helfen bei den meisten Inhalten, die heute im Fach Mathematik an den Schulen gelehrt werden.

[11] BENKER Hans. Mathematik mit dem PC, 1994. S. 2-3

2.2. Einsatz der Computer-Algebra-Systeme im Mathematikunterricht

Zu Beginn der 80er Jahre wurde Seymour Paperts Buch „Mindstorms-Kinder, Computer und Neues Lernen“ in der deutschen Übersetzung publiziert. Zahlreiche Mathematikdidaktiker und Mathematikdidaktikerinnen bemerkten durch Paperts Erfahrungsbericht, dass der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht für einen modernen und zeitgemäßen Unterricht unverzichtbar sei.[12]

Mitte der achtziger Jahre hat das BMUK die höheren Schulen mit PCs ausgestattet. Zu Beginn der neunziger Jahre hat Österreich als das erste Land in der Welt für alle Gymnasien die Generallizenz für ein Computeralgebra-System, nämlich DERIVE, erlangt.[13]

Daraufhin wurde 1993 ein Unterrichtsprojekt vom BMUK in drei Bundesländern gestartet. Im Rahmen dieses Unterrichtsprojekts wurden die Auswirkungen des Einsatzes von Computeralgebra auf den Regelunterricht auf breiter Basis erforscht. Nebenbei wurden auf der einen Seite Materialen zum Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht erstellt, auf der anderen Seite wurden auch umfangreiche begleitende Methodenuntersuchungen von Robert Nocker sowie vom Zentrum für Schulversuche durchgeführt.[14]

Eine ausführliche Darstellung über die behandelten Inhalte, die verwendeten Methoden und die unterschiedlichen didaktischen Konzepte wurden im Sonderheft des International DERIVE Journal mit dem Titel „The Austrian Project“ publiziert [ed. Aspetsberger, Fuchs 1996]. Auch im umfangreichen Beitrag „Computeralgebra-Systeme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen in Österreich“ [Heugl 1995] findet sich eine eingehende Beschreibung dieses Themas.[15]

[12] vgl. FUCHS. Computer im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Gedanken, 1996. S. 21
[13] vgl. HEUGL, KLINGER, LECHNER. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, 1996. S. 15
[14] vgl. FUCHS. Computer im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Gedanken, 1996. S. 25
[15] vgl. FUCHS. Computer im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Gedanken, 1996. S. 25

Über dieses österreichische Computeralgebraprojekt wurden zwei Berichte erstellt. Der erste Bericht wurde von Grogger (1995) publiziert, der die Ergebnisse der Schülerbefragung beinhaltet. Die zweite Untersuchung wurde von Svecnik (1995) durchgeführt und sie umfasst die Ergebnisse der Lehrerbefragung im Vergleich zu den Schülermeinungen. Zusammenfassend lässt sich zu den Ergebnissen der betreffenden Berichte Folgendes sagen: [16]

An der Schülerbefragung haben 549 Schüler und Schülerinnen teilgenommen, die aus 33 Versuchsklassen in 17 Schulen stammen. Eine deutlich stärkere Zunahme der Freude am Mathematikunterricht bei jenen Schülern und Schülerinnen wurde beobachtet, die auch zu Hause jederzeit mit dem CAS arbeiten können gegenüber denen, die diese Möglichkeit nicht nutzen oder nicht haben. Nach der Ergebnisse der Schülerbefragung wollen 84% aller befragten Schüler und Schülerinnen den Einsatz von *Derive*. Die Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe I geben ihre Zustimmung stärker als die Sekundarstufe II, dass sie mit dem Einsatz von *Derive*

- den Mathematikunterricht besser verstehen und interessanter finden,
- sich mit mathematischen Problemen beschäftigen wollen,
- sich interessieren, wie *Derive* arbeitet.

Die Schüler und Schülerinnen der Sekundarstufe II zeigen weniger Begeisterung gegenüber dem Einsatz des CAS, dennoch hat die Freude am Mathematikunterricht zugenommen. Die Ergebnisse der Schülerbefragung zeigen, dass gute Noten sich fördernd auf die Einstellung zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht auswirken. Gute Schüler und Schülerinnen wollen häufiger auch bei Hausübungen und bei Prüfungsarbeiten mit dem CAS arbeiten. Die Schülerbefragung ergibt einen deutlich unterschiedlichen Zugang der beiden Geschlechter zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht.

- Die männlichen Schüler zeigen gegenüber ihren Mitschülerinnen ein deutlicheres Ansteigen der Freude an Mathematik.
- Die männlichen Schüler wünschen häufiger das CAS auch zu Hause und bei Prüfungen einzusetzen.

[16] vgl. HEUGL, KLINGER, LECHNER. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, 1996. S. 293 ff.

- Die männlichen Schüler fühlen sich durch *Derive* stärker gefördert und sie teilen mit, dass Mathematik durch das CAS verständlicher und interessanter wird.
- Sie nehmen den Umgang mit *Derive* als weniger belastend gegenüber ihren Mitschülerinnen wahr.

In einem Teil der Befragung wurden offene Fragen gestellt und die Schüler und Schülerinnen hatten die Möglichkeit ihre Meinungen niederzuschreiben. 40% aller befragten Schüler und Schülerinnen bemerkten den Nutzen im Einsatz von *Derive* hinsichtlich Arbeitserleichterung und Zeitersparnis nachdrücklich. Des Weiteren wurden nach Häufigkeit geordnet:

- die Möglichkeit der grafischen Darstellung,
- das Ausrechnen und Umformen von Termen,
- die Infinitesimalrechnung,
- die Hilfe beim Erkennen und Vermeiden von Fehlern.

An der Lehrerbefragung haben 27 Lehrer davon 8 Frauen teilgenommen. Die Ergebnisse der Lehrerbefragung lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: [17]

Die Lehrer und Lehrerinnen sind der Meinung, dass sich durch die Nutzung von *Derive* als Rechenwerkzeug die Chance ergibt, das erworbene Wissen zu vertiefen, also auch mehr mathematisches Grundwissen zu vermitteln. Denn der Zeitaufwand für aufwändiges mechanisches Rechnen hat deutlich abgenommen. Mit der Abnahme des Zeitaufwands wird es nun auch möglich, aufwändigere Rechenoperationen durchzuführen. Es wird nicht erwartet, dass weniger interessierte oder weniger begabte Schüler mehr profitieren. Die befragten Lehrer und Lehrerinnen verneinten, dass die Schüler nun nicht mehr über die mathematischen Hintergründe nachdenken müssen.

Die Ergebnisse der Lehrerbefragung zeigen, dass die Lehrer und Lehrerinnen betonten, dass

- mit der Möglichkeiten der grafischen Darstellung des CAS ein Einstieg in ein neues Kapitel motivierend sein kann.

[17] vgl. HEUGL, KLINGER, LECHNER. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, 1996. S. 295 ff.

- die Möglichkeit besteht, in kurzer Zeit viele Beispiele bearbeiten zu können und dadurch formale Gesetzmäßigkeiten besser zu erkennen. Die Möglichkeiten in der Phase des Übens werden auch angedeutet.
- Lehrer und Lehrerinnen stellen den in der Schülerbefragung signifikant sichtbar gewordenen geschlechtsspezifischen Unterschied zwischen Schülerinnen und Schülern nicht so deutlich fest.
- Die befragten Lehrer und Lehrerinnen meinen, dass der Einsatz von *Derive* die Möglichkeit bietet, den Unterricht motivierender und interessanter zu gestalten.

Mit der Computeralgebra wurde der Computer ein neues Werkzeug, der numerische, graphische und symbolische Fähigkeiten anbietet. Im Hinblick auf dieser Entwicklung befassen sich die meisten didaktischen Publikationen zum Thema „Computer im Mathematikunterricht" mit dem Einsatz von Computeralgebra-Systemen. Der größte Teil dieser Publikationen betrifft DERIVE, es werden aber auch Unterrichtsmodelle für Computeralgebra-Systeme wie MATHEMATICA [Koepf 1993] oder MAPLE [Fuchs 1995] dargestellt.[18]

Karin Maria Kammleithner ist in ihrer Diplomarbeit auf das Thema „Taschenrechnereinsatz im Mathematikunterricht" näher eingegangen. Sie beschrieb, dass mehrere Wissenschafter die Auswirkung des Taschenrechners auf die Rechenfertigkeit der Schüler und der Schülerinnen untersuchten. Weiteres führt sie zwei dieser Untersuchungen an: Alexander Wynands Untersuchung in Dortmund von 1979 bis 1982 und den Schulversuch von Lothar Flade & Werner Walsch im Raum Meißen und Merseburg von 1979 bis 1983.[19] *„Aus der Schüleruntersuchung zieht Alexander Wynands letztendlich folgenden Schluss: Der Taschenrechnereinsatz (ab der 7.Klasse) hat keineswegs zwangsläufig negative Auswirkung auf die Rechenfertigkeit der Schüler."*[20] *„Am Ende des Schulversuchs stellen Lothar Flade & Werner Walsch fest: Es ist möglich, in der Schule ab Klasse 7 Taschenrechner zu verwenden,…. Die Verwendung von Taschenrechnern eröffnet den Schülern*

[18] vgl. FUCHS. Computer im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Gedanken, 1996. S. 25-26
[19] vgl. KAMMLEITHNER. Taschenrechnereinsatz im Mathematikunterricht, 1991. S. 31

gute Möglichkeiten, vor allem in den Fächern Mathematik, Physik, Chemie und ESP höhere Leistungen(bessere Ergebnisse) zu erreichen."[21]

Stoutemyer erzählte in seinem Buch[22], dass das Auftreten der Taschenrechner Beängstigung hervorgerufen hat, weil er die Rechenfähigkeiten der Schüler und der Schülerinnen bezüglich der Grundrechenarten vermindern würde. Bei der Diskussion über dem Einsatz des Taschenrechners wurde als ein wichtiger Vorteil angeführt, dass der Taschenrechner das Lehren des Rechnens vereinfacht und verbessert. Andere sind der Meinung, dass der Taschenrechner die Möglichkeit unterstützt, früher zu anderen und aufwändigeren Kapiteln weiterzugehen, z.B. durch den Wegfall des Logarithmenbuchs in der Oberstufe konnte viel Zeit gespart werden. Wegen der letzten Begründung sind Taschenrechner heute überall zu finden und spielten eine sehr große Rolle im Mathematikunterricht.[23]

Vom traditionellen Taschenrechner wurden der graphische Taschenrechner sowie der algebraische Taschenrechner (wie z.B. TI-92 und ihre Nachfolger) entwickelt, der das Computeralgebra-System DERIVE quasi im Taschenformat anbietet. Erst diese Entwicklung hat den Einsatz der Computeralgebra-Systeme im Unterricht ermöglicht, weil jeder Schüler und jede Schülerin in den Schulklassen über einen DERIVE-tauglichen Rechner verfügt.

Die Computeralgebra-Systeme haben eine zentrale Stellung im technologiegestützten Mathematikunterricht. Der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht verursacht eine starke Veränderung in der Unterrichtskonzeption und zwingt neue Methoden einzusetzen. Thesen von W. Dörfler zum Einfluss von Technologie auf die Mathematik[24] haben an dieser Stelle eine große Bedeutung. Aufgrund ihrer guten Formulierung möchte ich hier diese Thesen zitieren:

---

[20] a.a.O. S. 35
[21] a.a.O. S. 37
[22] vgl. STOUTEMYER. A radical proposal for computer algebra in education, 1984. S. 40-53.
[23] vgl. STOUTEMYER. A radical proposal for computer algebra in education, 1984. S. 40-53.
[24] DÖRFLER W. Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. 1991

- *Sieht man Kognition als funktionales System, das Mensch und Werkzeuge und den sonstigen materiellen und sozialen Kontext umfasst, so können neue Werkzeuge Kognition qualitativ verändern und neue Fähigkeiten generieren. Lernen ist dann nicht nur Entwicklung von vorhandenen Fähigkeiten, sondern systemische Konstruktion funktionaler kognitiver Systeme.*
- *Computer und Computersoftware ist demnach als Erweiterung und Verstärkung unserer Kognition anzusehen.*
- *Es kommt zu einer Verschiebung der Tätigkeit vom Ausführen zum Planen und Interpretieren.*
- *Es ändert sich nicht nur die Form sondern auch der Inhalt der Tätigkeit.*
- *Denkprozesse erfolgen oft vorteilhaft anhand gegenständlicher Vorstellungen, Repräsentationen, Modellierungen der jeweiligen Problemsituation. Gute Softwaresysteme bieten eine Vielzahl graphischer und symbolischer Elemente an, so dass der Benutzer interaktiv verschiedenste kognitive Modelle am Bildschirm erstellen kann.*
- *Der Computer als Medium für Prototypen: Allgemeinbegriffe werden mittels prototypischer Repräsentanten kognitiv verfügbar gemacht. Der Computer bietet nicht nur eine größere Vielfalt an Prototypen an, sondern insbesondere auch solche, die ohne ihn nicht verfügbar wären.*
- *Modularität des Denkens: Der Computer kann als Speicher und Prozessor für viele verschiedene Module verwendet werden und fördert somit das modulare Denken und Arbeiten*
- *Die Verfügbarkeit der Module erspart natürlich nicht das konzeptionelle und operative Verständnisses der entsprechenden Prozesse und Operationen, aber ihre Realisierung und Ausführung kann man getrost dem Computer überlassen.*

Die Einsatzmöglichkeiten eines Computeralgebra-Systems im Unterricht sind nach der Funktionalität und dem Leistungsumfang einzelner Systeme vielfältig. Es ist schwer auf einigen Seiten darzustellen, mit welchen Problemen ein CAS zurechtkommen kann. Ich werde hier einige wenige ausgewählte Bereiche beschreiben, für die der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht von Relevanz ist.

2.2.1. Unterstützung der Visualisierung

Im traditionellen Mathematikunterricht vergeudet das Zeichnen von Funktionsgrafen viel kostbare Unterrichtszeit. Das Zeichnen der Grafen dient nicht mehr zur Unterstützung der Anschauung. Nachdem die Schüler und die Schülerinnen bereits ein paar Funktionen selbst auf ein Papier grafisch dargestellt haben, lernen sie in der Tätigkeit des Zeichnens nichts mehr dazu. Der langwierige Zeichenprozess ist nicht der einzige Weg um dieses Ziel zu erreichen. Ein Geometrieprogramm ermöglicht sowohl in unvergleichlich kürzerer Zeit genauere Zeichnungen darzustellen, als auch mehrere verschiedene Grafen, welche man miteinander vergleichen kann. Die Grafen, welche mit einem Computeralgebra-Programm erstellt wurden, haben den Vorteil, dass viele praktische und vielseitige Veränderungen vorgenommen werden können, wie z.B. die Veränderung von Parametern. GeoGebra, eine weitverbreitete Dynamische-Geometrie-Software, ermöglicht auch das Verschieben von Tangenten.[25]

In diesem Zusammenhang möchte ich weitere Gesichtspunkte erwähnen, die Weigand beschrieb:

„Der Computer kann dazu beitragen, dem Aufbau von Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff entgegenzuwirken, indem es möglich wird, den Aufbau von Tabellen, Diagrammen und Graphiken schrittweise zu verfolgen, Eingabedaten beliebig zu verändern und mehrere Darstellungen bzw. Darstellungsformen gleichzeitig auf dem Bildschirm betrachten zu können. […] Durch den sequentiellen Bildaufbau kann die Eindeutigkeit funktionaler Zuordnungen sowie die dynamische Sichtweise einer Funktion verdeutlicht werden.“ [26]

2.2.2. Übernahme von Routinetätigkeiten

Der Einsatz der Computer im Mathematikunterricht ist bei der Ausführung aufwändiger numerischer Routineberechnungen sinnvoll. Computeralgebra-Programme bewältigen viele Probleme schneller als ein Mensch, sogar als ein

[25] vgl. WOLF. Wachstumsmodelle mit GeoGebra 3.2. Diplomarbeit 2009. S. 14
[26] WEIGAND. MU 5, Der Funktionsbegriff im Algebraunterricht, 1994. S. 46.

Mathematiker oder eine Mathematikerin. Es ist nicht selten, dass ein Mathematiker oder eine Mathematikerin ein Problem erst in einigen Monaten gelöst hat, wofür ein Computeralgebra-Programm einige Minuten braucht.

Heugl, Klinger und Lechner[27] stellen sich die Frage, inwiefern CAS in numerischer Hinsicht über die Möglichkeiten eines Taschenrechners hinausgehen. Sie rücken dabei vor allem drei Aspekte ins Blickfeld:

- CAS erlauben es erstens, *Rechnungen mit Symbolen* auszuführen.
- Zweitens steuern CAS im Unterschied zum Taschenrechner selbst die *Genauigkeit* an numerischen Approximationen.
- Drittens lassen sich beinahe alle *Umformungen*, auch mühelos in der Umgebung des CAS durchführen.

Im Weiteren betonen sie den Kernpunkt für den Einsatz von CAS als numerisches Hilfsmittel im Rahmen des Mathematikunterrichts, dass auf der einen Seite notwendige und wesentliche 'Handkalkülfertigkeiten' nicht verlorengehen, aber auf der anderen Seite entsprechende 'Strategiekalkülfertigkeiten' aufgebaut werden.

Der Einsatz von CAS bietet die Möglichkeit mehr Aufgaben zu stellen, bei denen der algorithmisch-kalkülmäßige Anteil nicht mehr der Hauptteil ist, sondern wo das Erfassen, Verstehen und Interpretieren von Daten bzw. Formelausdrücken im Zentrum stehen.[28]

Als ein Beispiel für diesen positiven Aspekt wird in der Diplomarbeit von Wolf[29] das Thema „Kurvendiskussion“ benannt, wie sie sowohl in der AHS, als auch in der BHS durchgeführt wird. Wolf sagt, dass in diesem Thema Schüler und Schülerinnen im Prinzip nach dem Schema Differenzieren, Nullstellen, Extremwerte, Extremwertentscheidung, Monotonieverhalten, Wendepunkte und Krümmungsverhalten ohne wichtige geistige Leistungen vorgehen. Auch die Berechnung von Funktionswerten, als eine im Mathematikunterricht oft wiederholte Ausübung, stellt eine rein technische Arbeit dar. Schüler und

[27] vgl. HEUGL, KLINGER, LECHNER. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, 1996. S. 26.
[28] vgl. CYRMON. Algebraprogramme und Tabellenkalkulation im Unterricht, 1993. S. 12.

Schülerinnen reflektieren die technische Arbeit nicht ausreichend. Nach dem Einbinden des Computers ist es möglich, die Ergebnisse verschiedener Aufgaben zu vergleichen, Bedeutung und Sinnhaftigkeit der Aufgaben zu reflektieren. *„Das heißt, es entstehen neue Schwerpunktsetzungen, Lehr/Lernziele, etc., weil nun der Rechner dem Schüler die „Rechenarbeit“ zumindest teilweise abnimmt und sie meist schneller als der Mensch erledigt. Man kann also durch den Computer nun Lehr/Lernziele behandeln, die bisher aus Zeitgründen meist beiseitegelassen wurden.“*[30] Der Einsatz fertiger Software erfordern einerseits verbesserte Unterrichtsvorbereitungen, die mit den neuen Hilfsmitteln des computerunterstützten Unterrichts umgehen können, als auch neue Beispielmaterialien.

Computeralgebra-Systeme stellen nun einen großen Teil der Mathematik „auf Knopfdruck“ zur Verfügung, darunter viele Methoden der Mathematik, die noch bis vor kurzem als „sehr schwierig“, oder „mühsam“ betrachtet wurden. Mit Hilfe der mathematischen Softwaresysteme ist das symbolische Rechnen mit Formeln, ja sogar auch teilweise das Beweisen der meisten mathematischen Sätze möglich, die in den höheren Schulen bzw. in den unteren Semestern an den Universitäten in Mathematik unterrichtet werden.[31]

2.2.3. Hilfe bei der Modellbildung

Das didaktisch interessante Einsatzgebiet von CAS liegt sicher in ihrem Einsatz bei der Modellbildung. Der Computer bietet vielfältige Möglichkeiten für Simulationen, wie z.B. bei exponentiellen Prozessen oder bei ökologischen Systemen, durch die man sowohl die betreffenden Realsituationen besser verstehen als auch allgemeine Einsichten in Modellbildungsprozesse gewinnen kann.[32]

Eine ausführliche Beschreibung über die Rolle des Computers bei einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht findet man im Buch

---

[29] WOLF. Wachstumsmodelle mit GeoGebra 3.2. Diplomarbeit 2009. S. 11.
[30] CYRMON. Algebraprogramme und Tabellenkalkulation im Unterricht, 1993. S. 13.
[31] vgl. HEUGL, KLINGER, LECHNER. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, 1996. S. 10

„Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systeme“ [Heugl, Klinger, Lechner, 1996].

„Modellbildung ist ein zentrales Thema jedes anwendungsorientierten Mathematikunterrichts. Dem Schüler sollen neben einer geeigneten Arbeitsumgebung Grundmodelle zur Verfügung stehen.“[33]

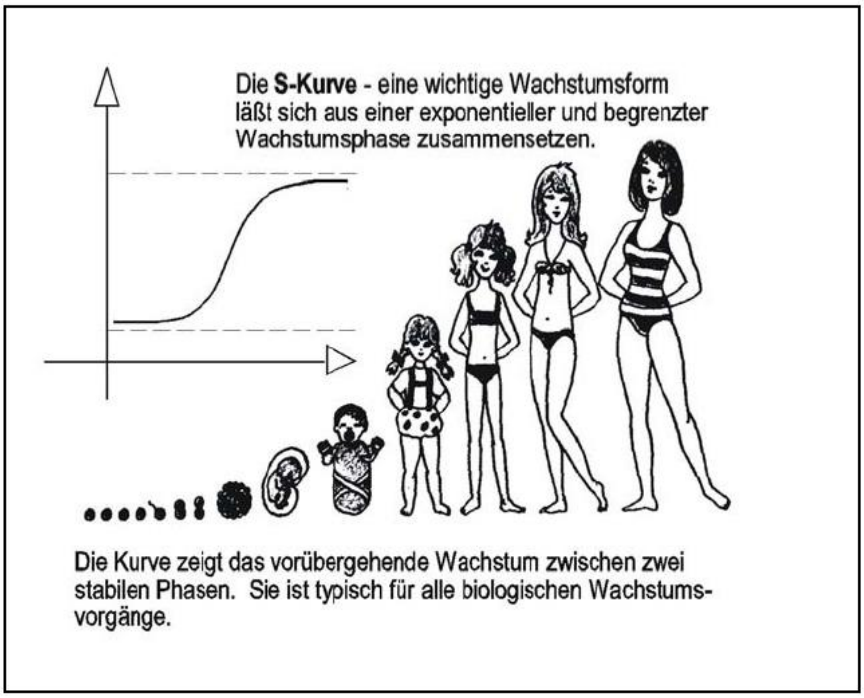


Abbildung-1 Logistisches Wachstum[34]

Zu Beginn dieses Jahrhunderts hat Felix Klein die Reformen des Mathematikunterrichts vorgestellt, deren wesentliches Ziel die Schulmathematik anwendungsorientierter und praxisnäher zu gestalten war. Seit etwa 1970 spielten diese Reformen wieder eine entscheidende Rolle, nämlich als Reaktion auf die New-Math-Bewegung. Die Schüler und Schülerinnen sollten einsehen, dass Mathematik zum Verständnis der Wirklichkeit beitragen kann und dadurch die Bedeutung dieser Wissenschaft erfahren. Die Schüler und Schülerinnen sollten auch Probleme besser beschreiben und verstehen, Strategien entwickeln, um die Probleme lösen zu können, die bisher nicht gelöst wurden. In diesem Zusammenhang gelten „Anwendungsaufgaben“ als Nutzung von

[32] vgl. POSTEL, KIRSCH, BLUM. Mathematik lehren und lernen, 1991. S. 76
[33] HEUGL, KLINGER, LECHNER. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen, 1996. S. 54.
[34] a. a. O. S. 54

Regeln und Formeln oder als Algorithmen, die im Zuge eines Spiraldurchlaufs entwickelt werden. Ein andere Bedeutung von „Anwendung“ wäre: Bereitstellung von realen Situationen, in denen Probleme zu lösen sind.[35]

In diesem Buch [a.a.O., S. 123] wurde unter dem Titel „Problemlösen mit Hilfe von CAS“ die Rolle des Computers bei einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht deutlich gemacht. Hier wird als eines der wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts die *Schulung des Problemlösens* bezeichnet.

Nach den Autoren gibt es viele interessante Probleme, bei denen die Modellbildung den Schülern und Schülerinnen nicht zumutbar ist, wo aber das Untersuchen von Sonderfällen und das Interpretieren lohnende Ziele sind, vor allem auch dann, wenn durch solche Aufgaben ein Beitrag für einen fächerübergreifenden Unterricht geleistet werden kann. Häufig sind solche Aufgaben im traditionellen Mathematikunterricht nicht zugänglich, weil der Rechenaufwand für Schüler und Schülerinnen zu komplex ist. Mit dem CAS als Rechenhilfe können solche Modelle in der Zukunft dennoch bearbeitet werden.

2.3. Das Computer-Algebra-System Mathematica

Im Folgenden wird Mathematica vorgestellt. Nachdem die ersten Schritte mit Mathematica dokumentiert werden, werden jene Funktionen vorgestellt, welche für die Aufgaben im vierten Kapital relevant sind.

Die Software Mathematica ist eines der mächtigen Werkzeuge im Mathematikunterricht und ein wichtiges Computeralgebra-System wie etwa Derive, Maple und MuPAD. Das Computeralgebra-Programm Mathematica enthält unterschiedliche Aspekte mit entscheidenden Bedeutungen. Diese Aspekte sind:

- Mathematica als numerische Rechenmaschine
- Mathematica als Werkzeug für symbolische Mathematik
- Mathematica als Visualisierungswerkzeuge für mathematische Objekte,

[35] vgl. a. a. O. S. 117-118

- Mathematica als Programmiersprache und
- Mathematica als mathematisches Dokumentenverarbeitungssystem.

Mathematica wurde erst im Jahre 1988 von der Firma Wolfram Research veröffentlicht. Das Computeralgebra-System Mathematica ist eine verbesserte Version von SMP, das Stephen Wolfram[36] erstellt hat. Mathematica wird von seiner Firma `Wolfram Research` dauernd weiterentwickelt und vermarktet.
Die erste Version von Mathematica war für den Apple Macintosh im Juni 1988 erhältlich. Ab Anfang 1992 sind Versionen für eine Vielzahl von Computersystemen vorhanden, unter anderen: Microsoft Windows, Linux, Mac OS, NeXT. Seine aktuelle Version lautet 7.0.1. In einigen Computersystemen ist Mathematica als Standard-Software enthalten.[37]

Mathematica besteht aus zwei voneinander unabhängigen Komponenten, der Benutzeroberfläche und dem Kernel. Die Aufgaben der Benutzeroberfläche „Mathematica Notebook“ sind die Eingaben an den Mathematica Kernel zu geben und die Resultate zu formatieren. Außerdem kann man im Matematica Notebook Input, Output, Grafiken, Formeln, und Text miteinander vermischen. Der Kernel hingegen führt mathematische Berechnungen durch, die von einfachen arithmetischen Berechnungen angefangen, über symbolische Umformungen, bis sehr komplexen Programmsystemen reichen können. Dazu können wir als dritte Komponente die Zusatzpakete anschließen. Zusatzpakete sind Packages für zusätzliche Funktionen, die nicht im Kernel enthalten sind.

Benker[38] betont in seinem Buch „Mathematik mit dem PC“ die stark entwickelte Grafikfähigkeit von Mathematica. Weiters schreibt er:

> *„Die meisten Versionen unterstützen grafische Animationen, d.h. dynamisches Verhalten oder die Veränderung einer Grafik bei Variation von Parametern können veranschaulicht werden. Mathematica hat sich in den*

---

[36] Stephen WOLFRAM Wissenschaftler, Erfinder von Mathematica, Autor und Geschäftsführer der Firma Wolfram Research. Er ist 1959 in London geboren, er wurde in Eton, Oxford und Caltech ausgebildet. Er veröffentlichte seine erste wissenschaftliche Arbeit im Alter von 15 und bei der Vollendung des 20. Lebensjahres hatte er seinen Doktortitel in der theoretischen Physik von Caltech. 1979 begann er den Bau von SMP-das erste moderne Computer-Algebra-System. Für detaillierte Information siehe: http://www.stephenwolfram.com/about-sw/

[37] vgl. WOLFRAM S. Mathematica Ein System für Mathematik auf dem Computer, 1992. S. 0

[38] BENKER Hans. Mathematik mit dem PC, 1994. S. 14-15

letzten Jahren zu dem am meisten verbreiteten Programmsystem entwickelt. Davon zeugen auch die vielen Bücher, die vierteljährlich erscheinende Fachzeitschrift „MATHEMATICA- Journal“ (mit neuen Packages) und jährliche Fachtagungen.“

2.3.1. Benutzeroberfläche

Nach dem Start von Mathematica wird das folgende Fenster sichtbar:

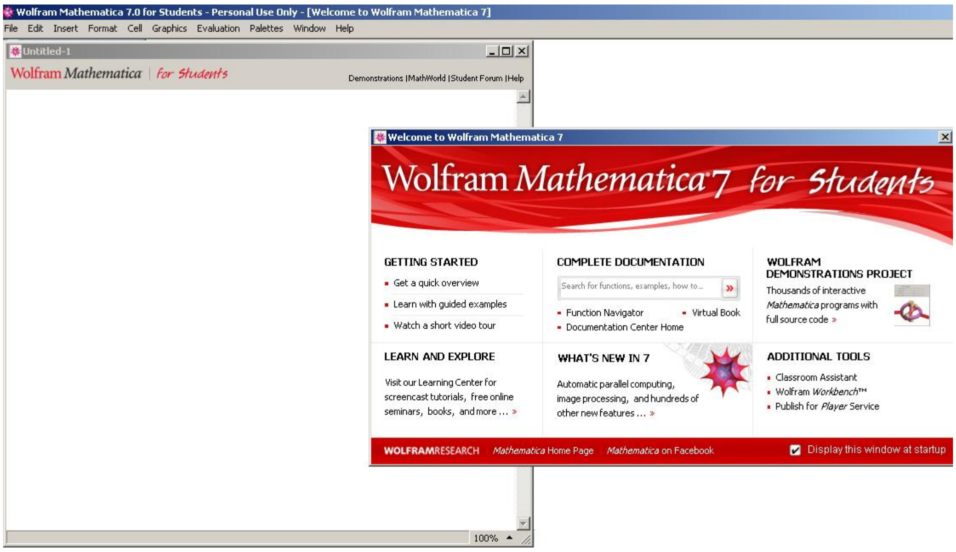


Abbildung-2: Benutzeroberfläche von Mathematica 7.0.1

In der linken Seite wird das Mathematica Notebook geöffnet, das als Eingabefenster dient. Die Basic Math Assistent befindet sich unter der Menü „Palettes“, die im Mathematikunterricht für die Formeleingabe öfters verwendet wird. Rechts befindet sich das Willkommensfenster, welches Suche von Funktionen und unterschiedliche viele Beispiele nach den Themen ermöglicht. Dieses Fenster verweist auf ein kurzes Video-Tutorial.

2.3.2. Arithmetische Berechnungen

Wir können uns Mathematica als einen hervorragenden Taschenrechner vorstellen, das auch mit Zahlen beliebiger Präzision (Berechnungen mit den Zahlen bis 10^{10000}sind fehlerlos) umgehen kann. Zusätzlich befindet sich in Mathematica eine umfassende Sammlung höherer mathematischer Funktionen von elliptischen Integralen, komplexen Bessel-Funktionen, über hypergeometrischen Funktionen bis hin zu ganzzahliger Faktorisierung.[39]

Ein wichtiger Hinweis: die Namen aller Kommandos, vordefinierte Funktionen und Konstanten beginnen mit einem Großbuchstaben. Das Argument einer Funktion wird in eckige Klammern eingeschlossen. Nach dem Eingeben der Zahlen (Input) zu Mathematica Notebook, führt Mathematica die Berechnungen durch Drücken *Shift* + *Enter* aus. Der Kernel führt die Berechnungen mit dieser Kommandokombination durch, dann erscheinen die Lösungen in einem eigenen Bereich (Output).

Mit einfachen Berechnungen beginnen wir die arithmetischen Fähigkeiten von Mathematica zu entdecken. Grundrechnungen werden wie gewohnt mit der Eingabe „+, -, *, /" ausgeführt. Statt * wird Multiplikation durch ein Leerzeichen ausgeführt, wie auch in der Mathematica-Ausgabe beschrieben wird. Wir tippen den Input 2*3 + 4 ein, dann drücken wir *Shift* + *Enter;* Mathematica antwortet mit dem Ergebnis 10.

```
In[1]:= 2*3+4

Out[1]= 10
```

Die nächste Berechnung zeigt, dass Mathematica mit dem Zeichen ^ Potenzen rechnet:

```
In[2]:= 2^100

Out[2]= 1 267 650 600 228 229 401 496 703 205 376
```

Für die numerische Ausgabe benutzt man das Kommando N[ ], wobei [*%%*] das Zeichen für die vorletzte Ausgabe und [%] für die letzte Ausgabe ist:

```
In[3]:= N[%]

Out[3]= 1.26765 × 10^30
```

Folgendes Beispiel steht für die numerische Berechnung von $\sqrt{3}$ mit 50 Stellen:

```
In[4]:= N[Sqrt[3], 50]

Out[4]= 1.7320508075688772935274463415058723669428052538104
```

[39] vgl. WOLFRAM S. Mathematica Ein System für Mathematik auf dem Computer, 1992. S. x

Ebenso einfach ist es die 4.Potenz einer komplexen Zahl zu berechnen:

```
In[5]:= (5 + 2 I) ^4

Out[5]= 41 + 840 ⅈ
```

Mathematica kann mit den grundlegende Konstanten und Funktionen problemlos arbeiten, wie z.B. der eulerschen Zahl, trigonometrischen Funktionen, Logarithmus (hier ist Log gemeint, was den natürlichen Logarithmus bedeutet. Ln existiert nicht in Mathematica). Dabei sind einige Zeichen für mathematische Konstanten reserviert:

	Input Format	Output Format
Eulersche Zahl :	E	ⅇ
Imäginäre Einheit :	I	ⅈ
Kreiszahl :	Pi oder π	π

```
In[6]:= Log[π]

Out[6]= Log[π]
```

In dem Beispiel müssen wir N anwenden, damit die numerische Auswertung von Log[π] berechnet werden kann.

```
In[7]:= N[Log[π]]

Out[7]= 1.14473
```

Die Genauigkeit des Resultats möchten wir jetzt steigern:

```
In[11]:= N[Log[π], 20]

Out[11]= 1.1447298858494001741
```

Mathematica kann sowohl Gleichungen als auch Gleichungssysteme lösen. Gleichungen werden in Mathematica mit Hilfe von „==“ eingegeben, das einfache „=“ verwendet man für die Wertzuweisung. Der Befehl *Solve* steht für das Lösen einer Gleichung oder auch eines Gleichungssystems. Nach der Eingabe der Gleichung muss noch die Variable angegeben werden, nach der das Gleichungssystem gelöst werden soll.

Ältere Mathematica-Versionen waren weder analytisch noch numerisch in der Lage, die vergleichsweise primitive Gleichung Sin[x]==Cos[x] zu lösen, die die exakte Lösung Pi / 4 hat. Genau genommen gibt es unendlich viele Lösungen: Pi / 4 + n Pi. Mathematica ist grundsätzlich nicht in der Lage, mit solchen Lösungsvielfalten zu arbeiten; findet aber doch die zwei Lösungen Pi / 4 und -3 Pi /4.[40]

```
In[12]:= Solve[Sin[x] == Cos[x], x]

Solve::ifun :
  Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce
          for complete solution information. >>
```

Out[12]= $\left\{\left\{x \to -\frac{3\pi}{4}\right\}, \left\{x \to \frac{\pi}{4}\right\}\right\}$

```
In[13]:= Solve[Exp[x] - Sin[x] == 0, {x}]

Solve::tdep :
  The equations appear to involve the variables to be solved for in an essentially non-algebraic way. >>
```

Out[13]= $\text{Solve}\left[e^{x} - \text{Sin}[x] == 0, \{x\}\right]$

Solve findet für die obige Gleichung keine Lösung, wohl aber *FindRoot.* In dem Befehl FindRoot muss ein erster Startwert für die gesuchte Variable angegeben werden. Eine Lösung liegt in der Nähe -6:

In[19]:= $\text{FindRoot}\left[e^{x} - \text{Sin}[x] == 0, \{x, -6\}\right]$

Out[19]= $\{x \to -6.28131\}$

Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Berechnung der Schnittpunkte verschiedener Kurven durch das Lösen von Gleichungssystemen. In einem Gleichungssystem weist man häufig x einen bestimmten Wert zu. In dem letzten Beispiel wird als Lösung des Gleichungssystems *{x→-6.28131}* ausgegeben. Die gleiche Schreibweise benutzt man bei der Substitutionsregel. Die Substitutionsregel funktioniert mit „ */. x→…*“

```
3 x - 5 /. x → 7

16
```

Hier wurde für *x* der Wert 7 in den Ausdruck *3x-5* eingesetzt. Das Ergebnis ist 16.

Folgendes Beispiel zeigt, wie der numerische Wert von $\int Cos(Cos(x))$ berechnet werden kann.

```
In[21]:= NIntegrate[Cos[Cos[x]], {x, 0, π}]

Out[21]= 2.40394
```

---

40 KOFLER M. Mathematica (Einführung und Leitfaden für den Praktiker); 1992. S. 96

Mathematica hat spezielle Befehle für viele Arten exakter Berechnungen mit ganzen Zahlen. Mit dem Kommando *FactorInteger* erhält man die Faktoren einer ganzen Zahl.

```
In[25]:= FactorInteger[11645987760]

Out[25]= {{2, 4}, {3, 3}, {5, 1}, {11, 1}, {490151, 1}}
```

Mit *?* bzw. *??* kann man jederzeit eine kurze Beschreibung des Kommandos zusammen mit einem Verweis ins Handbuch erhalten, in dem oft auch Beispiele zu finden sind.

```
In[26]:= ?FactorInteger
```

FactorInteger[*n*] gives a list of the prime factors of the integer *n*, together with their exponents.
FactorInteger[*n*, *k*] does partial factorization, pulling out at most *k* distinct factors. >>

Mathematica verwendet Listen, um mehrere Elemente zu gruppieren. Listen werden durch geschweifte Klammern zusammengefasst. Die Grundrechenarten erfolgen elementweise in Listen. Deshalb kann man sich „Listen von Zahlen“ als Vektoren und „Listen von Listen“ als Matrizen vorstellen:

```
In[1]:= u = {-2, -1, 0}

Out[1]= {-2, -1, 0}

In[2]:= v = u * 3

Out[2]= {-6, -3, 0}
```

Das Skalarprodukt der Vektoren bekommt man mit Hilfe eines Punkts zwischen den Listen:

```
In[3]:= v.u

Out[3]= 15
```

Die nächste Berechnung ist das Kreuzprodukt der definierten Vektoren u und v:

```
In[4]:= Cross[u, v]

Out[4]= {0, 0, 0}
```

Eine Matrix wird als Liste von Listen definiert:

```
In[5]:= w = {{1, -1, 2}, {3, 1, 6}, {3, -3, 1}}

Out[5]= {{1, -1, 2}, {3, 1, 6}, {3, -3, 1}}
```

Der Befehl *//MatrixForm* liefert die Matrix in der bekannten Schreibweise.

```
In[6]:= % // MatrixForm

Out[6]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Befehl *Table* erzeugt Wertetabellen und ist damit eine andere Möglichkeit zum Erstellen einer Matrix:

```
In[7]:= t = Table[a*b, {a, 2}, {b, 2}]

Out[7]= {{1, 2}, {2, 4}}
In[8]:= % // MatrixForm

Out[8]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Mathematica hat spezielle Befehle zur Berechnung anderer klassischer Berechnungen an Matrizen. *IdentityMatrix[n]* liefert eine Einheitsmatrix der Größe *n* und *Inverse[m]* berechnet die Inverse. n-te Potenz einer Matrix, Transponierte, Eigenwerte und Eigenvektoren können auch mit speziellen Befehlen berechnet werden. Hier wird die Determinante von Matrix t berechnet:

```
In[9]:= Det[t]

Out[9]= 0
```

Dies ist ein Beispiel zur Matrizen-Multiplikation. Mit einem Punkt zwischen den Matrizen erzielt man das Ergebnis:

```
In[10]:= matrix1 = {{a, b}, {c, d}, {e, f}}
         matrix2 = {{x, y, z}, {p, q, r}}
         matrix1 . matrix2 // MatrixForm

Out[10]= {{a, b}, {c, d}, {e, f}}

Out[11]= {{x, y, z}, {p, q, r}}

Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} b\,p+a\,x & b\,q+a\,y & b\,r+a\,z \\ d\,p+c\,x & d\,q+c\,y & d\,r+c\,z \\ f\,p+e\,x & f\,q+e\,y & f\,r+e\,z \end{pmatrix}$$

2.3.3. Symbolische Berechnungen

Mathematica kann nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit Symbolen arbeiten:

```
In[3]:= 2 a + 3 b - 5 a + 2 b - (-4 a) + 7 b

Out[3]= a + 12 b
```

Permutations liefert die sechs möglichen Permutationen der Elemente x, y und z:

```
In[5]:= Permutations[{x, y, z}]

Out[5]= {{x, y, z}, {x, z, y}, {y, x, z}, {y, z, x}, {z, x, y}, {z, y, x}}
```

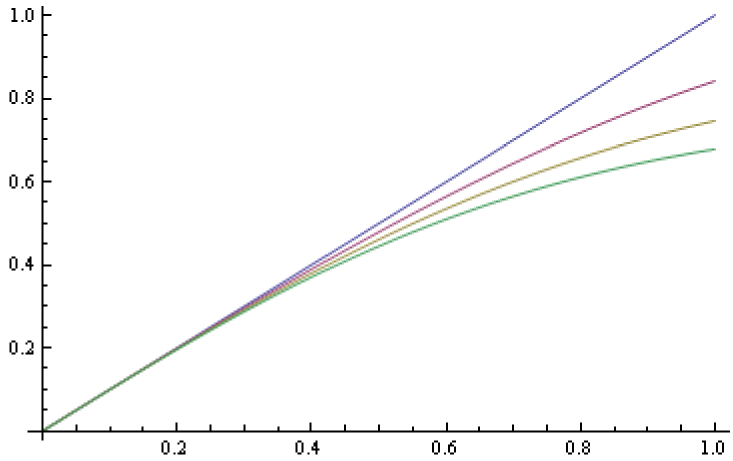
Simplify liefert das vereinfachte Ergebnis:

```
In[11]:= Simplify[a + 3 b - 5 a + 2 b - (-8 a) + 7 b]

Out[11]= 4 (a + 3 b)
```

NestList[Sin, x, 3] erzeugt eine Liste sukzessiv verschachtelter Sinus-Funktionen. Damit man die verschachtelten Sinus-Funktionen darstellen kann, wird *Plot* mit der Kombination des Kommandos *Evaluate* verwendet. Später werden vielfältige Anwendungen von Plot-Kommando demonstriert werden.

```
In[16]:= NestList[Sin, x, 3]

Out[16]= {x, Sin[x], Sin[Sin[x]], Sin[Sin[Sin[x]]]}

In[17]:= Plot[Evaluate[%], {x, 0, 1}]
```

Out[17]=



Map gibt die angegebene Funktion für jedes Element in einer Liste zurück.

```
In[18]:= Map[f, {a, b, c}]

Out[18]= {f[a], f[b], f[c]}
```

Einer Funktion kann der Wert *f* zugewiesen werden und nachher kann diese Funktion nach x integriert werden:

```
In[19]:= f = x^3 + 2 x
```

Out[19]= $2x + x^3$

```
In[20]:= Integrate[f, x]
```

Out[20]= $x^2 + \frac{x^4}{4}$

Weiteres können wir die letzte Ausgabe mit dem „%“ praktisch differenzieren:

```
In[21]:= Ableitung = D[%, x]
```

Out[21]= $2x + x^3$

Dieses „Ableitung“ kann Mathematica noch vereinfachen:

```
In[22]:= Simplify[Ableitung]
```

Out[22]= $x\left(2 + x^2\right)$

2.3.4. Als Visualisierungswerkzeug

Mathematica kann sowohl zwei- und dreidimensionale Grafik als auch Kontur- und Dichtediagramme erzeugen. Funktionen sowie Datenlisten können gezeichnet werden, wobei viele Optionen zur Steuerung der Grafikausgabe angeboten werden. Zum Beispiel stellt Mathematica in drei Dimensionen-Grafik Schattierung, Farbe, Beleuchtung, Oberflächenglanz und andere Parameter zur Verfügung. In vielen Mathematica-Versionen können auch animierte Grafiken erstellt werden. Mathematica verfügt über eine grafische Sprache, diese ermöglicht die grafische Darstellung von primitiven Objekten, wie zum Beispiel Würfeln, Polygonen und Kreisen, die miteinander kombiniert werden können.[41]

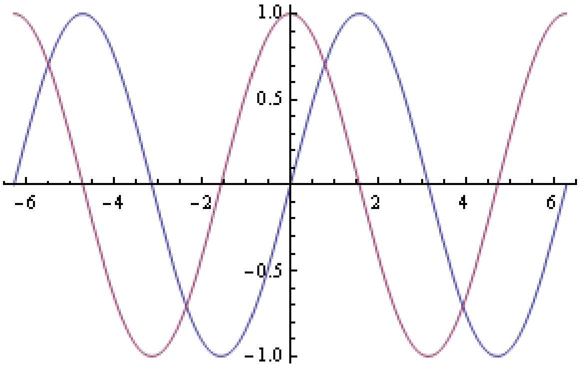
[41] vgl. WOLFRAM S. Mathematica Ein System für Mathematik auf dem Computer, 1992. S. xi

Weitgehende Informationen über Befehle und ihre Optionen kann man sowohl in „Mathematica; Ein System für Mathematik auf dem Computer“ von Stephen Wolfram[1992] als auch im Documentation Center von Mathematica erhalten.
Mathematica stellt eine Vielzahl verschiedener Möglichkeiten zum Erstellen von Grafiken zur Verfügung. Folgende Beispiele demonstrieren die hauptsächlichen Befehle und ihre Optionen. Der erste dieser Befehle ist *Plot*, der eine oder mehrere Funktionen auf einem reellen Intervall darstellt.

Dies ist der Graph der Funktionen Sin[x] und Cos[x], wobei der Wertebereich für die Variable x {-2 Pi, 2 Pi} ist:

```
In[1]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi}]
```

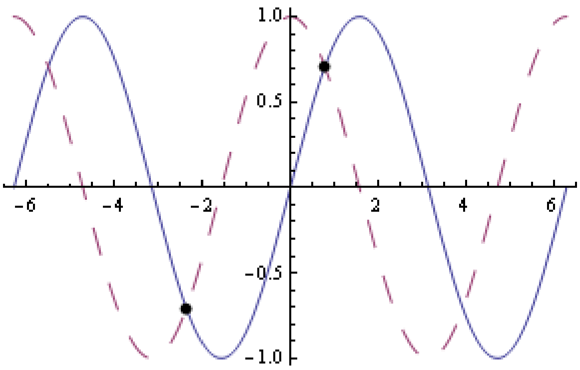
Out[1]=



Mathematica umfasst unterschiedliche Grafik-Optionen, die viele Möglichkeiten zum Festlegung vom Aussehen einer Grafik bieten. Letztes Beispiel wird durch einige Optionen erstellt:

```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi},
 PlotStyle → {Dashing[{}], Dashing[{1/20}]}, Epilog → {PointSize[1/50],
   Point[{-3 Pi/4, Sin[-3 Pi/4]}], Point[{Pi/4, Sin[Pi/4]}]}]
```

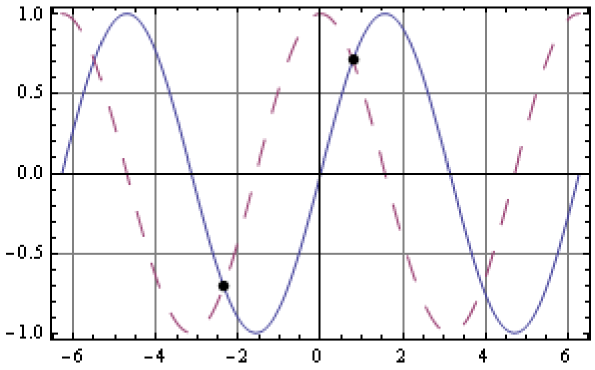
Out[2]=



Dies ist eine andere Version:

In[3]:= `Show[%, Frame → True, GridLines → Automatic]`

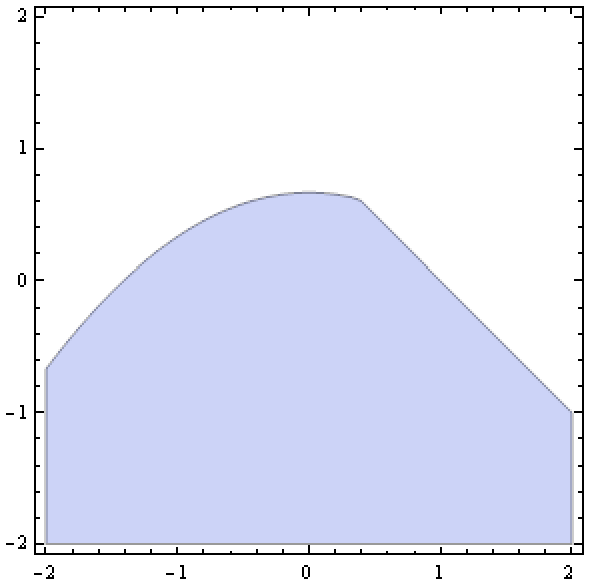
Out[3]=



RegionPlot zeigt den Bereich, wo die Aussagen richtig sind:

In[6]:= `RegionPlot[x^2 + 3 y < 2 && x + y < 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

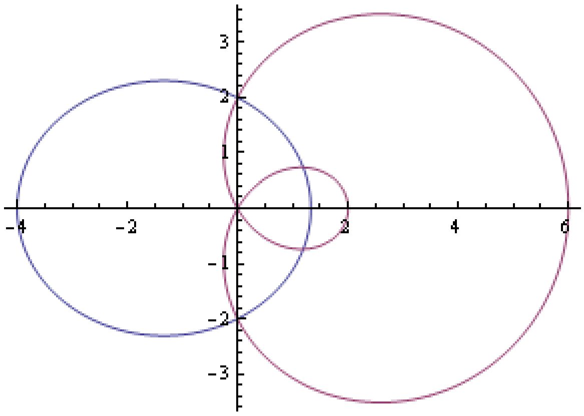
Out[6]=



PolarPlot erzeugt eine Polar-Kurve des Radius *r* als Funktion des Winkels *t*. In folgendem Beispiel wurden Polar-Kurven von $4/(2+Cos[t])$ und $4Cos[t]-2$ dargestellt, wobei der Wertebereich von t {0, 2Pi} ausgewählt wird.

```
In[7]:= PolarPlot[{4/(2 + Cos[t]), 4 Cos[t] - 2}, {t, 0, 2 Pi}]
```

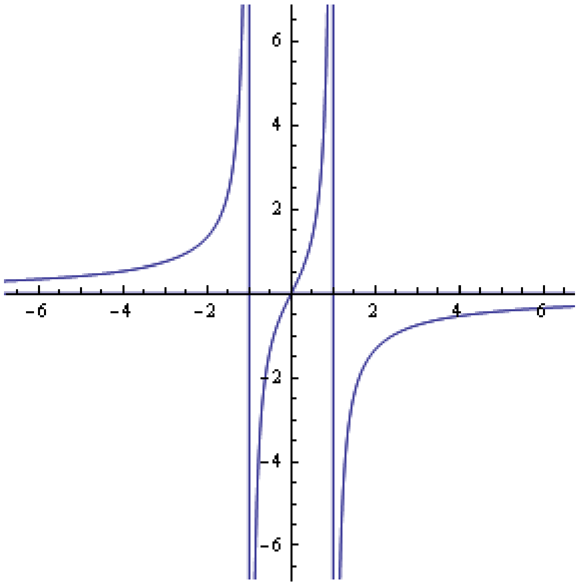
Out[7]=



Mathematica kann auch parametrische Kurven erstellen. Hier wurden mehrere parametrische Kurven zusammengezeichnet, und zwar von $Tan[u]$ und von $Tan[2u]$ sind.

```
In[9]:= ParametricPlot[{Tan[u], Tan[2 u]}, {u, 0, 2 Pi}]
```

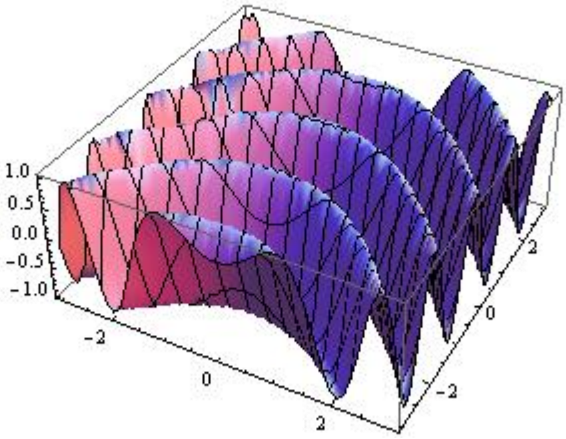
Out[9]=



Plot3D erstellt eine dreidimensionale Grafik einer Funktion von 2 Variablen. Dies ist eine dreidimensionale Zeichnung der Funktion $Sin[x^2 + 4y]$. Es gibt viele Optionen für dreidimensionale Grafik. Einige Optionen für dreidimensionale Grafiken sind analog zu denen für den zweidimensionalen Fall.

```
In[19]:= Plot3D[Sin[x^2 + 4 y], {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

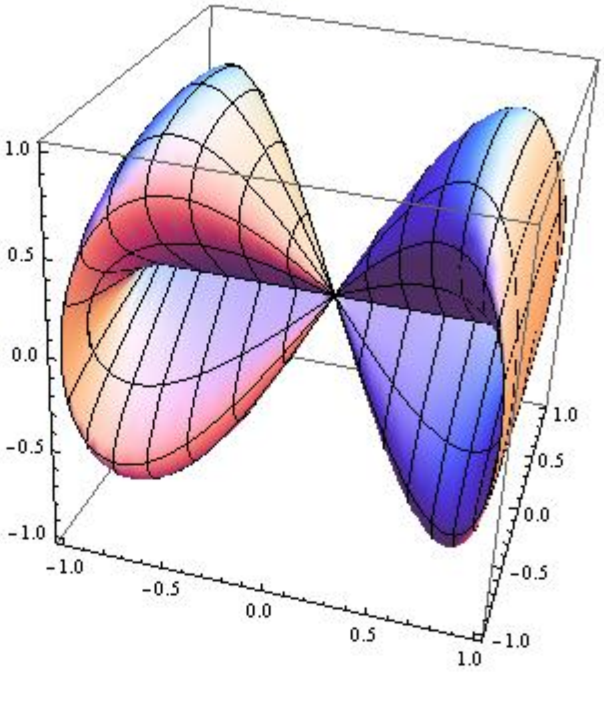
Out[19]=



ParametricPlot3D erstellt eine parametrische Grafik einer dreidimensionalen Kurve. Dieses Kommando erzeugt eine Oberfläche statt einer Kurve. Es kann auch die Oberfläche mehrerer Kurven erstellen, wie es im Beispiel dargestellt ist. Hier sind die Funktionen $Sin[t]$, $Sin[t]Sin[2u]$ und $Cos[u]Sin[2t]$ dargestellt.

```
In[27]:= ParametricPlot3D[{ Sin[t], Sin[t] Sin[2 u], Cos[u] Sin[2 t]},
          {t, -Pi / 2, Pi / 2}, {u, 0, 2 Pi}]
```

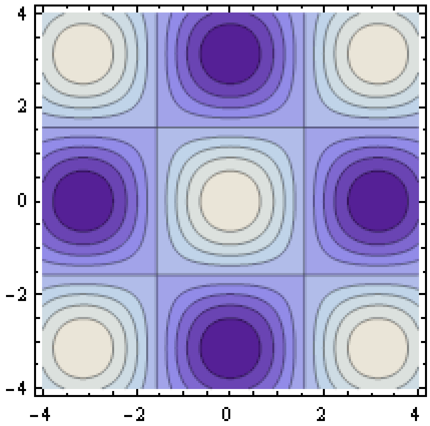
Out[27]=



ContourPlot liefert ein Schichtenliniendiagramm, d.h. eine „topographische Karte" einer Funktion. Die Schichtenlinien verbinden Punkte der Oberfläche, die dieselbe Höhe haben:

```
In[4]:= ContourPlot[Cos[x] Cos[y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```

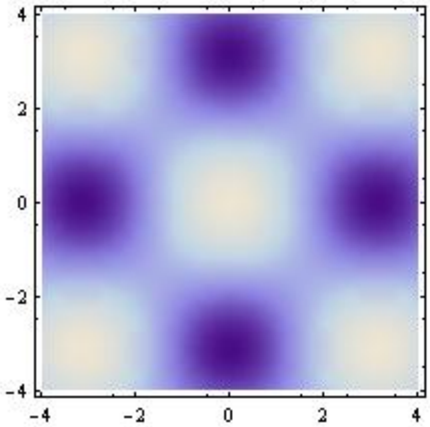
Out[4]=



Dichtediagramme, die mit dem Kommando *DensityPlot* erzeugt werden, zeigen die Werte Ihrer Funktion in einem regelmäßigen Punktearray, wobei hellere Bereiche höher liegen:

```
In[5]:= DensityPlot[Cos[x] Cos[y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```

Out[5]=



2.3.5. Als Programmiersprache

Mathematica ist ein umfangreiches System. Dieses Computeralgebra-System fördert das Schreiben von Mathematica-Programmen, um spezielle Probleme mit Mathematica zu lösen. Mathematica unterstützt verschiedene Arten der Programmierung. Eine davon ist die prozedurale Programmierung, die im Prinzip mittels *do, for* usw. geschrieben wird. Eine weitere ist funktionale und regelbasierte Programmierung, die effizienter und einfacher zu verstehen ist. [42]

[42] vgl. WOLFRAM S. Mathematica Ein System für Mathematik auf dem Computer, 1992. S. xx

Folgende einfache Programmierbeispiele[43] sollen kurz in die Verwendung von Mathematica als Programmiersprache einführen.

```
Do[Print["Hallo Welt"], {5}]
```

```
Hallo Welt
Hallo Welt
Hallo Welt
Hallo Welt
Hallo Welt
```

```
liste = {};
Do [liste = Append[liste, Prime[n]], {n, 1000, 1005}]
liste
```

```
{7919, 7927, 7933, 7937, 7949, 7951}
```

Statt der allgemeinen Schleifen *for*, *do* und *while* können auch spezialisierte Operationen wie *Table*, *Map*, *Nest* oder *Apply* verwendet werden:

```
Table[Prime[i], {i, 1000, 1005}]
```

```
{7919, 7927, 7933, 7937, 7949, 7951}
```

```
Map[Prime, Range[1000, 1005]]
```

```
{7919, 7927, 7933, 7937, 7949, 7951}
```

```
Nest[Sin, x, 3]
```

```
Sin[Sin[Sin[x]]]
```

```
NestList[Sin, x, 3]
```

```
{x, Sin[x], Sin[Sin[x]], Sin[Sin[Sin[x]]]}
```

Das letzte Beispiel zeigt, dass die *If-Anweisung* eine ähnliche Funktion hat, wie in anderen Programmiersprachen.

```
wuerfel[] := Random [Integer, {1, 6}]

If[wuerfel[] == wuerfel[],
  Print["Pasch"],
  Print["Kein Pasch"]]
```

```
Kein Pasch
```

[43] Zentrum für Astronomie, Universität Heidelberg. Kompaktkurs Mathematica. S. 8-9
Url: http://www.ari.uni-heidelberg.de/lehre/WS06/IAA06/Exercises/mathematica-kompaktkurs.pdf
[13.03.2010, 16:50 Uhr]

2.3.6. Als Dokumentenverarbeitungssystem[44]

Mathematica dient auch als Dokumentenverarbeitungssystem mit zwei verschiedenen Interfaces: Die textorientierte Schnittstelle und die Notebook-Schnittstelle. Mit einer textorientierten Schnittstelle führt man den Dialog direkt mit dem Kernel von Mathematica durch Eintippen von Text auf der Tastatur. Diese Schnittstellenart findet man auf einigen Computersystemen, die z.B. unter dem Betriebssystem Unix laufen.

Es ist wichtig zu beachten, dass zwar die textorientierte Schnittstelle den Zugriff auf die meisten Funktionen vom Kernel ermöglicht, aber Grafiken und dynamische Interaktivitäten von der Notebook-Schnittstelle nicht zulässt.

Eine andere Schnittstellenart ist die Notebook-Schnittstelle, die eine spezielle grafische Benutzeroberfläche ist. *Notebooks* sind interaktive Dokumente, in denen man sowohl Mathematica-Input als auch gewöhnlichen Text und Grafik miteinander kombinieren kann. *Notebooks* bieten die Möglichkeit mittels eines Zeigegeräts wie etwa einer Maus eine Auswahl anzuzeigen. In einem *Notebook* werden alle Materialen als Folge von Zellen organisiert. Wenn die Eingabe an Mathematica übergeben wird, erzeugt Mathematica automatisch eine neue Zelle für den Output. Notebooks-Zellen können hierarchisch in Gruppen angeordnet werden. Mit Hilfe dieser Gruppenanordnung kann man verwandtes Material kennzeichnen. Die Zellstruktur eines Notebooks wird durch eine eckige Klammer am rechten Bildschirmrand angezeigt.

Notebook-Schnittstellen bieten verschiedene Hilfen, um den Aufwand bei der Eingabe von Mathematica-Input zu vermindern. Eine Standard-Hilfe ist die Vervollständigung von Befehlen.

[44] vgl. WOLFRAM S. Mathematica Ein System für Mathematik auf dem Computer, 1992. S. 44 und 61ff.

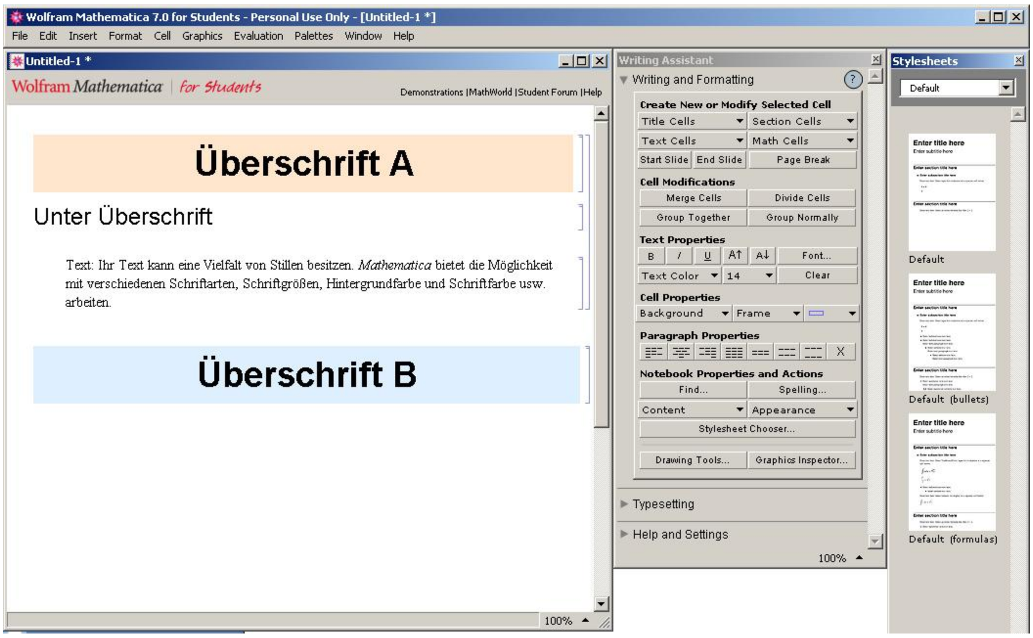


Abbildung-3: Text Erzeugen im Mathematica

In der Notebook-Schnittstille können die Dokumente mit der Wahl eines „Stylesheets“ in verschiedenen Formaten erzeugt werden. „*Stylesheets*“ besitzen eine Vielfalt von Schriftarten, Hintergrundfarben, Strichdicken, Beschriftungen usw. Diese Stylesheets sind an die eigenen Bedürfnisse anpassbar. Weiters kann man in einer einzelnen Zelle mehrere Stile mischen.

Mit der Verwendung von Überschriften erhält man eine Gliederung seines Dokuments. Es ist auch möglich, eine Zellengruppe zu schließen. Dann wird nur die Überschrift sichtbar.

Die Dokumente können in verschiedenen Formatierungen erzeugt werden, z.B Bildschirm, Präsentation oder Ausdruck.

2.4. Vor- und Nachteile von Mathematica

Heute spielen Computeralgebra-Systeme eine zunehmende Rolle für die Schule, Ausbildung und Studium. Die Beispiele für die häufigsten verwendeten Computeralgebra-Systeme sind DERIVE, MAPLE, MuPAD, Mathcad, wxMaxima und MATHEMATICA. Wenn die Mächtigkeit dieser Programme an den verschiedenen mathematischen Gebieten verglichen wird, ist es offensichtlich, dass es kein perfektes Programm gibt. Jedes Programm hat seine eigenen Vor- und Nachteile. Einige Programme sind in symbolischer Berechnung stärker, z.B. Mathematica, MuPad und Maple. Wiederum kann man die Programme Matlab, Octave bei numerischen Berechnungen oder bei linearen Systemen lieber verwenden.

Die Vorteile von Mathematica

- Mathematica ist ein leistungsfähiges Programm und bietet wirklich umfassende mathematischen Möglichkeiten an.
- Der Benutzer oder die Benutzerin kann mit Hilfe von Palettes auf die mathematischen Symbole zugreifen, z.B. Integrale, Summen, Limites, Brüche. Auch Matrizen, griechische Buchstaben, Sonderzeichen für Mengen u.ä. sind durch Klicken verfügbar.[45]
- Man hat die Möglichkeit seine Arbeit zu dokumentieren und mit der Verwendung von „*Writing* Assistant“ eine Vielfalt von Stylesheets erzeugen.
- Mathematica stellt Listen nur unter Verwendung von geschweiften Klammern dar. Als ein Gegenbeispiel gibt es in Maple vier verschiedene Datentypen (Listen, Mengen, Felder und Tabellen). Mathematica hat also ein moderneres, einfacheres und einheitliches Listenkonzept zur Darstellung von Daten.[46]
- Mathematica bietet unübertroffene Grafikmöglichkeiten.[47]
- Ein konkurrenzloses Angebot von Zusatzpaketen zu den unterschiedlichsten mathematischen Anwendungen wird zur Verfügung gestellt.[48]
- Verfügt über moderne einheitliche Syntax für die Kommandos.[49]

[45] vgl. Url: http://haftendorn.uni-lueneburg.de/computer/cas/cas.htm#mathematica [21.03.2010, 21.45 Uhr]
[46] vgl. Benker H. Mathematik mit dem PC, 1994. S. 240
[47] a.a.O.
[48] a.a.O.
[49] a.a.O.

Nachteile von Mathematica:

- Die Syntax von Funktionen und Befehlen ist schwieriger gegenüber anderen CAS wie z.B. Derive.
- Mathematica ist ein kommerzielles Produkt. Für Schulen und Hochschulen gibt es Rahmenabkommen zum Kauf von Lizenzen, so genannte *Classroomlizenzen*. [50]
- Weitere Nachteile sind: [51]
- Mathematica ist eine große Software, aus diesem Grund benötigt es einen großen Hauptspeicher (Besonders die notebook-orientierte Version).
- Es läuft langsam bei einem kleinen Speicher.
- Die Größe der Ergebnisse, der Zwischenergebnisse, die Rechenzeit sind meist nicht vorher zu bestimmen.
- Bei einer Rechnung ist ein Hauptproblem von Mathematica die Größe der auftretenden Zwischenergebnisse; so treten bei „kleinen" Ausgangsgrößen und einem „kleinen" Endergebnis leicht Zwischenresultate auf. Diese Zwischenresultate sind größer als die maximal darstellbare Zahl in traditionellen Computersprachen.

Einige Beispiele, welche die Leistungsfähigkeit von Mathematica überschreiten, sind etwa:[52]

- Arithmetik mit Zahlen $\geq 10^{10000}$
- Entwickeln von Polynomen mit mehr als 100000 Termen
- Faktorisieren von Polynomen in 3 Variablen mit einigen hundert Termen
- 100000-fache Rekursion
- numerische Inversion einer 150×150-Matrix

[50] Siehe für die detaillierte Informationen: http://www.additivenet.de/software/mathematica/lehrerschule.shtml [22.03.2010, 14.00 Uhr]
[51] vgl. Einführung in Mathematica. S. 1 Url: http://www.mathe.tu-freiberg.de/~sonntag/skripte/math_lehrg.pdf [22.03.2010, 15.00 Uhr]
[52] vgl. Einführung in Mathematica. S. 2 Url: http://www.mathe.tu-freiberg.de/~sonntag/skripte/math_lehrg.pdf [22.03.2010, 15.00 Uhr]

3. Mathematische Hintergründe zu „Schnittpunkte verschiedener Kurven“

Ziel dieses Kapitels ist es, die mathematischen Hintergründe zu „Schnittpunkte verschiedener Kurven“ zu beschreiben. Die Berechnung von Schnittpunkten ist eine typische Aufgabenstellung der Analytischen Geometrie. Da der Schnitt- oder Berührungspunkt von zwei Kurven die gemeinsame Lösung der Gleichungen dieser beiden Kurven ist, benötigen die Schüler und Schülerinnen Kenntnisse über Gleichungssysteme. Meiner Ansicht nach muss daher die Lehrperson diese mathematischen Hintergründe erneut vermitteln, bevor die Beispiele im vierten Teil behandelt werden.

3.1. Lineare Gleichungen

„Lineare Gleichungen werden benötigt, um praktische Probleme (Technik, Wirtschaft, Natur...) oder auch Fragestellungen im alltäglichen Leben mathematisch darstellen bzw. modellieren und lösen zu können.“[53]

Aus der Volksschule kennen alle Schüler und Schülerinnen Aufgaben wie diese: $17 + \square = 31$. In den Kästchen soll man die richtige Zahl hineinschreiben. Das Kästchen nennt man einen *Platzhalter*, weil es den Platz für eine bestimmte Zahl frei hält. Üblicherweise werden in der Mathematik statt dem Kästchen Buchstaben (z.B. x, y, z…) als Platzhalter für die unbekannten Zahlen verwendet. Ein solcher Ausdruck $17 + x = 31$ wird als *Gleichung mit einer Unbekannten* bezeichnet.[54]

[53] SCHREINER. Von der linearen Gleichung bzw. Ungleichung zur linearen Optimierung im Mathematikunterricht unter Einsatz des Computers. Diplomarbeit der Universität Wien, 2009. S. 15.
[54] vgl. REICHEL, LITSCHAUER, GROSS. Lehrbuch der Mathematik 1, 1999. S. 30.

Um den Wert der Unbekannten zu finden, muss man die Gleichung lösen. Alle Elemente der Definitionsmenge der Gleichung werden gesucht, welche die Gleichung erfüllen. Die Lösungen werden mit Hilfe der Lösungsmethoden berechnet, wie zB das Probieren, das graphische oder numerische Näherungsverfahren.[55]

Die Menge aller Lösungen, welche die Gleichung erfüllen, definiert man als Lösungsmenge.

Äquivalenzumformungen werden benutzt, um eine Gleichung in eine einfachere Gleichung mit der gleichen Lösungsmenge überzuführen. Eine Äquivalenzumformung ist die Addition oder Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten. Wenn man auf beiden Seiten mit dem gleichen Term multipliziert oder durch den gleichen Term dividiert, erhält man wieder eine äquivalente Gleichung. Bei der Multiplikation oder der Division muss vorausgesetzt werden, dass der Term nicht den Wert 0 hat. Äquivalenzumformungen führen nicht immer zur Lösung. Nach dem Typ der Gleichung kann es nötig sein, beide Seiten einer Gleichung zu quadrieren oder auf beiden Seiten die Quadratwurzel zu ziehen. Beide Umformungen sind keine Äquivalenzumformungen.[56]

Eine Gleichung vom Typ ax + b = 0 mit a, b$\in \Re$, a≠0 besitzt in $\Re$ im Allgemeinen genau eine Lösung, nämlich $x = -\frac{b}{a}$. Wenn die Definitionsmenge von $\Re$ verschieden ist, kann die Lösungsmenge der linearen Gleichung die leere Menge sein.[57]

3.2. Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Eine Gleichung der Bauart $ax + by = c$, wobei a, b, c$\in \Re$, a und b nicht zugleich null sind, heißt lineare Gleichung mit zwei Variablen x und y. Im Fall $c = 0$ heißt die Gleichung homogen, im Fall $c \neq 0$ inhomogen.[58]

[55] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 72.
[56] vgl. a.a.O. S. 73.
[57] vgl. a.a.O. S. 73-74.

Die Lösungen einer Gleichung mit zwei Variablen bestehen aus Zahlenpaaren (x | y). Durch Probieren können unendlich viele Zahlenpaare gefunden werden, die diese Gleichung erfüllen. Um eine genaue Lösung zu erhalten, braucht man zusätzliche Bedingungen gestellt, die auch erfüllbar sind. Durch Hinzunahme zusätzlicher Bedingungen entsteht ein lineares Gleichungssystem.

Während eine lineare Gleichung ax + b = 0 genau eine Lösung (Punkt) in $\Re$ besitzt, hat eine lineare Gleichung ax + by = c eine Menge von Punkten als Lösungen im $\Re^2$, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Die Punktmenge wird als *Gerade* im zweidimensionalen Vektorraum bezeichnet. Die Lösungen einer linearen Gleichung ax + by + cz = d wird im dreidimensionalen Vektorraum *Ebene* genannt.[59]

3.2.1. Algebraisches Lösen linearer Gleichungssysteme

Alle algebraische Verfahren, um ein lineares Gleichungssystem zu lösen, beruhen darauf, aus den n Gleichungen mit n Unbekannten eine Gleichung mit einer Unbekannten zu machen. Es gibt dabei drei algebraische Verfahren:

Das Gleichsetzungsverfahren (Komparationsverfahren)

Beispiel: Löse mittels des Gleichsetzungsverfahrens für G = $\Re \times \Re$!

I: x + y = -1

II: 3x + 2y = -5

Lösung:

I`: y = -1– x

II`: y = $\frac{-5-3x}{2}$

Die Gleichungen I und II werden nach y aufgelöst. Da die beiden linken Seiten dieser umgeformten Gleichungen übereinstimmen, müssen auch die rechten

[58] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 150.

[59] vgl. SCHREINER. Von der linearen Gleichung bzw. Ungleichung zur linearen Optimierung im Mathematikunterricht unter Einsatz des Computers. Diplomarbeit der Universität Wien, 2009. S. 17.

Seiten übereinstimmen; somit können die rechten Seiten der Gleichungen einander gleichgesetzt werden. Dadurch reduziert sich die Aufgabe auf das Lösen einer Gleichung mit einer Variablen[60]:

$$\frac{-5-3x}{2} = -1 - x$$

$$-5 - 3x = -2 - 2x$$

$$x = -3$$

Durch Einsetzten des Wertes von x in eine der gegebenen Gleichungen erhält man den Wert von y:

$$\text{I}': y = -1 - (-3) = 2$$

$$L = \{(-3 \mid 2)\}$$

Das Einsetzungsverfahren (Substitutionsverfahren)

Das Gleichsetzungsverfahren beruht - kurz gesagt - darauf, Gleiches gleichzusetzen. Ebenso kann man in Gleichungen Gleiches durch Gleiches ersetzen. Darauf beruht ein zweites Verfahren, welches das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen auf das Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen zurück führt.[61]

Wir lösen das vorige Beispiel durch das Einsetzungsverfahren:

Lösung:

I`: $y = -1 - x$

II: $3x + 2y = -5$

Eine der Gleichungen (hier die Gleichung I) wird in die Hauptform y = kx + d umgeformt, und die so erhaltene Gleichung wird in die anderen Gleichung eingesetzt. Dadurch entsteht eine lineare Gleichung mit einer Variablen, nämlich x:

$$3x + 2(-1-x) = -5$$

$$3x - 2 - 2x = -5$$

$$x - 2 = -5$$

$$x = -3$$

[60] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 157.
[61] a.a.O. S. 157.

Aus dieser Gleichung wird der Wert von x errechnet, das Einsetzen des Wertes von x in eine der gegebenen Gleichungen liefert den Wert von y:

I`: y = -1 – (-3) = 2

L = {(-3 | 2)}

Das Additionsverfahren (Gauss`sches Eliminationsverfahren)

Beispiel: Löse mittels des Additionsverfahrens für G = $\Re \times \Re$!

I: x + y = -1

II: 3x + 2y = -5

Lösung:

I`: -2x - 2y = 2

II: 3x + 2y = -5

Die Gleichung I wird mit -2 multipliziert, damit die Koeffizienten der Variablen y in den Gleichungen I` und II betragsgleich werden, aber verschiedene Vorzeichen erhalten. Beim Addieren der beiden Gleichungen wird eine Unbekannte (hier y) eliminiert. Daraus folgt eine lineare Gleichung, welche nur noch die Variable x enthält:

$$\begin{array}{l} -2x - 2y = 2 \\ \underline{3x + 2y = -5} \\ x = -3 \end{array}$$

I`: y = -1 – (-3) = 2

L = {(-3 | 2)}

Alle Verfahren lassen sich in analoger Weise durchführen: Beim Gleichsetzungsverfahren und Einsetzungsverfahren können beide angegebenen Gleichungen nach x aufgelöst werden. Beim Eliminationsverfahren kann man statt y genauso die Variable x entfernen.

3.2.2. Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme

Wie kann man das oben gelöste Beispiel geometrisch interpretieren? Wir gehen wieder von unserem Beispiel aus:

I: $x + y = -1$

II: $3x + 2y = -5$

Es ist bekannt, dass die zu findenden Lösungen für x und y beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen müssen.

Jene Punkte $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *im* $\Re^2$*, die die Gleichung x +y = -1 erfüllen, liegen auf einer Geraden (eben auf der Geraden mit Gleichung x +y = -1). Jene Punkte* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*, die die Gleichung 3x + 2y = -5 erfüllen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung 3x + 2y = -5. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems enthält alle Punkte, die auf beiden Geraden liegen. Wenn die beiden Geraden nicht parallel sind, so gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt, nämlich den Schnittpunkt der beiden Geraden. Dieser Schnittpunkt ist in diesem Beispiel der Punkt (-3|2).*[62]

Es ist nützlich, die Lösung des linearen Gleichungssystems mit Mathematica darzustellen. Nachdem die Gleichungen grafisch dargestellt werden, wird es offensichtlich, dass die Geraden einen Schnittpunkt haben.

Mit der Darstellung können wir gleich beginnen. Hier verwenden wir das *Plot*-Kommando (das *Plot*-Kommando ist nicht die einzige Möglichkeit, z.B. kann auch *ImplicitPlot* verwendet werden. Vor der Verwendung muss man dieses Kommando mit *Needs* laden. Siehe Kapitel 4.3.3.), deswegen müssen wir die Gleichungen umformen, d.h. nach y auflösen:

```
Solve[{x + y == -1}, {y}]
```

```
{{y → -1 - x}}
```

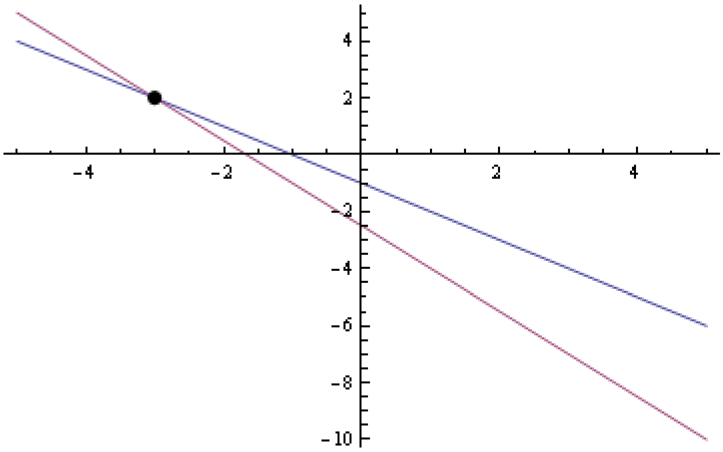
```
Solve[{3 x + 2 y == -5}, {y}]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{2}(-5 - 3x)\right\}\right\}$$

[62] AICHINGER, MAYR. Unterlagen zur Vorlesung Algebra, 2007. S. 19

Die Gleichungen finden Sie unten grafisch dargestellt, mit der Markierung des Schnittpunktes, da dieser bereits berechnet wurde.

```
Plot[{-1 - x , 1/2 (-5 - 3 x)}, {x, -5, 5},
 Epilog → {PointSize[1/50], Point[{-3, 2}]}]
```



Das obige Gleichungssystem war eindeutig lösbar und die Lösungsmenge besteht aus einem Punkt. Die Gleichungssysteme sind aber nicht immer eindeutig lösbar. Beim Lösen eines Gleichungssystems in der Grundmenge $G = \Re \times \Re$ können drei verschiedene Lösungsfälle eintreten. Der Hauptfall ist, dass die Geraden einander in einem Punkt schneiden. Außer dem Hauptfall kann das Gleichungssystem entweder unlösbar sein, d.h. die Lösungsmenge ist leer. Es sei denn, das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar, demzufolge ist die Lösungsmenge unendlich.

Folgende Beispiele demonstrieren diese Sonderfälle:

Beispiel[63]: Suchen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems!

I: x + 3y = -1

II: -3x - 9y = 2

Lösung: Die Gleichung I multipliziert man mit 3, dann erhält man 3x + 9y = -3. Nach dem Prinzip vom Additionsverfahren addiert man beide Gleichungen, dann entsteht eine Gleichung 0 = -1. Diese Aussage ist immer falsch, daher hat das Gleichungssystem keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer. Das sieht man auch mit Hilfe von Mathematica:

[63] AICHINGER, MAYR. Unterlagen zur Vorlesung Algebra, 2007. S. 20.

```
Solve [{x + 3 y == -1, -3 x - 9 y == 2}, {x, y}]
```

```
{}
```

Um dies grafisch darzustellen werden die Gleichungen umgeformt:

```
Solve [{x + 3 y == -1}, y]
```

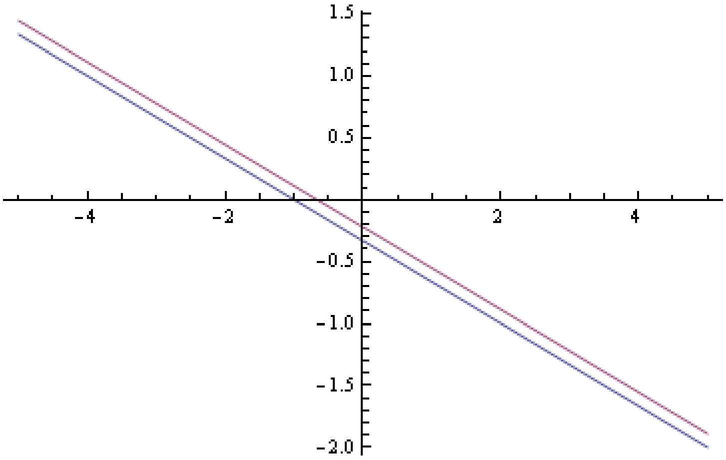
$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{3}(-1 - x)\right\}\right\}$$

```
Solve[{-3 x - 9 y == 2}, y]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{9}(-2 - 3 x)\right\}\right\}$$

Diese umgeformten Gleichungen kann man mit dem *Kopieren-Einfügen* praktisch in die Input-Zeile einfügen. Da das Gleichungssystem unlösbar ist, haben die beiden Geraden keinen gemeinsamen Punkt. Wie die Zeichnung zeigt, sind sie zwei parallele Geraden.

$$\text{Plot}\left[\left\{\frac{1}{3}(-1 - x),\ \frac{1}{9}(-2 - 3 x)\right\},\ \{x,\ -5,\ 5\}\right]$$



Beispiel[64]: Löse für $G = \Re \times \Re$!

I: 2x + 4y = 9

II: -x - 2y = -4,5

Lösung: Die Gleichung II multipliziert man mit 2, dann ist die umgeformte Gleichung -2x - 4y = -9. Beim Addieren von beiden Gleichungen erhält man die Gleichung 0 = 0. Jeder Punkt (x | y), der die erste Gleichung erfüllt, ist auch eine Lösung des Systems, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen für dieses Gleichungssystem. In diesem Fall sagt man, dass die Geraden identisch sind.

[64] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 154.

Mathematica liefert kein Ergebnis für dieses Gleichungssystem:

```
Solve[{2 x + 4 y == 9, -x - 2 y == -4.5}, {x, y}]
```

```
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>
{{x → 4.5 - 2. y}}
```

Um das Ergebnis grafisch zu überprüfen, werden die Gleichungen umgeformt:

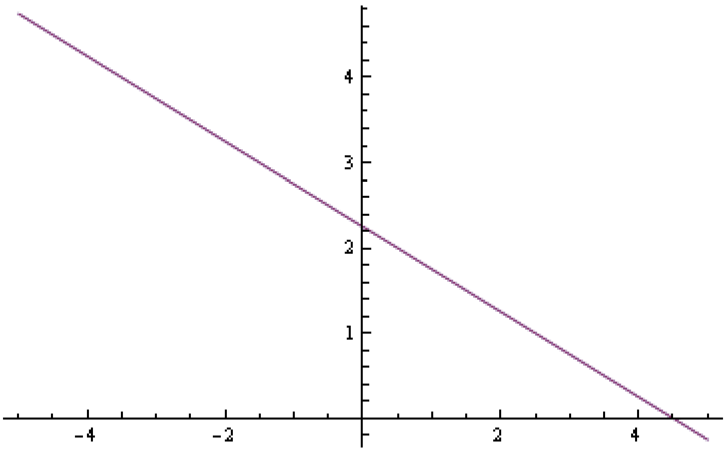
```
Solve[{2 x + 4 y == 9}, y]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{4}\,(9 - 2\,x)\right\}\right\}$$

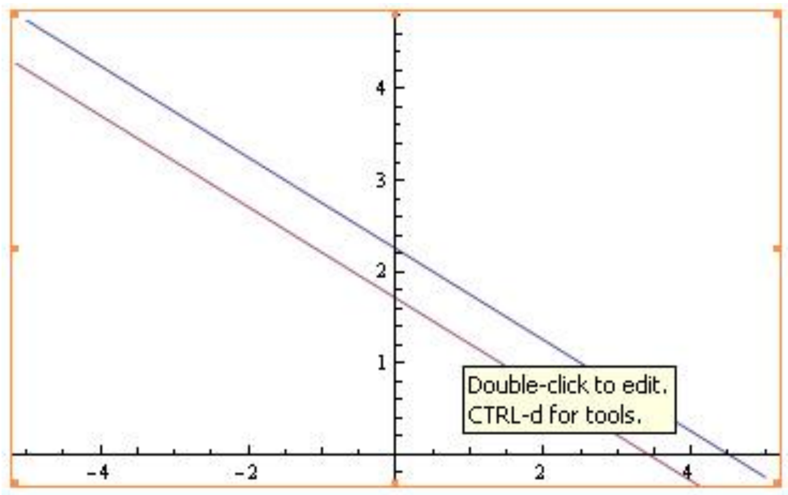
```
Solve[{-x - 2 y == -4.5}, y]
```

```
{{y → -0.5 (-4.5 + 1. x)}}
```

$$\text{Plot}\left[\left\{\frac{1}{4}\,(9 - 2\,x),\ -0.5\text{`}\,(-4.5\text{`} + 1.\text{`}\,x)\right\},\ \{x,\ -5,\ 5\}\right]$$



Im Bildschirm erscheint nur eine Gerade. Wenn man auf die Gerade doppelklickt und die Gerade verschiebt, dann sieht man, dass unterhalb noch eine Gerade versteckt ist.



Im „Mathematik Lehrbuch 5“[65] wurden die Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Variablen beschrieben, was das Merken der einzelnen Fälle erleichtert:

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen ist für $G = \Re \times \Re$ *genau dann*

- *eindeutig lösbar, wenn die homogenen Gleichungen nicht proportional sind,*
- *unlösbar, wenn die homogenen, nicht aber die inhomogenen Gleichungen proportional sind,*
- *mehrdeutig lösbar, wenn die inhomogenen Gleichungen proportional sind.*

Meiner Ansicht nach ist es hier notwendig daran zu erinnern, dass eine Gleichung in der Form ax + by = c homogen heißt, wenn c = 0 ist. Im Fall c ≠0 heißt die Gleichung inhomogen.

3.3. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen mit einer Variablen sind ähnlich wie lineare Gleichungen, haben jedoch zusätzlich einen quadratischen Anteil (oder ein quadratisches Glied), der ihr Charakteristikum für den zweiten Grad ist. Ihre allgemeine Form lautet:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \Re;\ a \neq 0$$

Eine quadratische Gleichung kann keine, eine, zwei oder ganz $\Re$ als Lösungsmenge in $\Re$ besitzen.[66]

Im Allgemeinen kann man verschiedene Lösungsmethoden verwenden, wenn die Koeffizienten b oder c den Wert 0 haben. Allerdings kann man die „Große Lösungsformel“ in jedem Fall verwenden, auch wenn z.B. b und c nicht gleich Null sind. Je nach dem Fall kann man die günstigste Lösungsmethode wählen, wie in den Beispielen demonstriert wird.

[65] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 155.
[66] vgl. SCHILLY H. Gleichungen & Ungleichungen, Gleichungssysteme, 2006. S.3

Beispiel zum Fall b = 0: Löse die Gleichung $5x^2 - 80 = 0$ in $\Re$! [67]

Lösung: Solche Gleichungen können nach einer der beiden folgenden Methoden gelöst werden:

I. Methode: $5x^2 - 80 = 0 \mid :5$

$x^2 - 16 = 0 \quad \mid +16$

$x^2 = 16 \quad \mid \sqrt{}$

$x_1 = 4,\ x_2 = -4$

II. Methode: $5x^2 - 80 = 0 \mid :5$

$x^2 - 16 = 0 \quad \mid +16$

$(x - 4)(x + 4) = 0$

$x - 4 = 0 \vee x + 4 = 0$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

Die Methode I ist beidseitiges Wurzelziehen und sie liefert nur eine - die positive Lösung - x_1. Die negative Lösung erhält man aus der Überlegung: „Sowohl a als auch –a ergeben beim Quadrieren a²". Die Methode II ist die Zerfällungsmethode und verwendet die Formel $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$. Mit dieser Zerfällungsmethode spaltet man die angegebene quadratische Gleichung in zwei lineare Gleichungen auf, deren Lösungen die Lösungen der quadratischen Gleichung sind. Zerfällen ist eine Äquivalenzumformung im Gegensatz zum beidseitigen Wurzelziehen.[68]

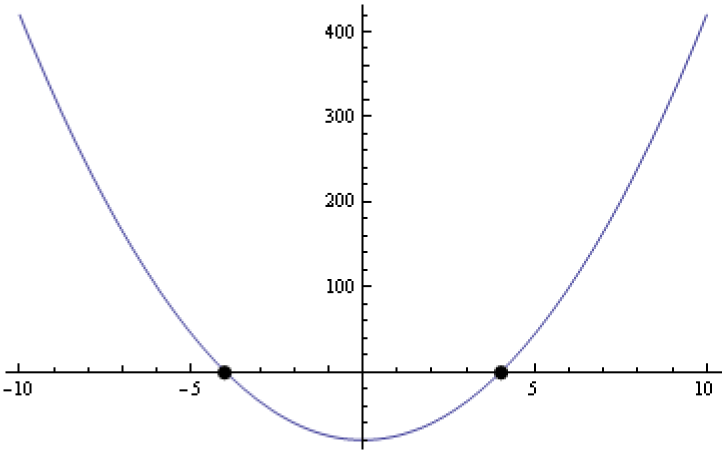
[67] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 75.

Lösung mit *Mathematica*:

```
Solve[ 5 x^2 - 80 == 0, x]
```

```
{{x → -4}, {x → 4}}
```

```
Plot[ {5 x^2 - 80}, {x, -10, 10},
 Epilog → {PointSize[1/50], Point[{-4, 0}], Point[{4, 0}]}]
```



Aus der Zeichnung wird sofort ersichtlich: Die zugehörige Funktion $y = 5x^2 - 80$ besitzt zwei Nullstellen, d.h. zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.

Beispiel zum Fall c = 0: Löse die Gleichung $3x^2 + 6x = 0$! [69]

Lösung: Dieses Beispiel wurde wieder mit zwei üblichen Lösungsmethoden gelöst.

I. Methode: $3x^2 + 6x = 0 \quad | :x$

$3x + 6 = 0 \quad | -6$

$3x = -6 \quad | : 3$

$x = -2 \Rightarrow L = \{-2\}$

II. Methode: $3x^2 + 6x = 0$

$x \cdot (x + 6) = 0$

$x = 0 \vee 3x + 6 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -2 \Rightarrow L = \{0; -2\}$

Bei der I. Methode dividiert man die quadratische Gleichung durch x, dann erhält man eine lineare Gleichung, die nur eine Lösung hat. Bei der II. Methode zerfällt man die quadratische Gleichung in zwei lineare Gleichungen durch das Herausheben von x. Diese Methode liefert beide Lösungen. Herausheben der

[68] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 75.

[69] a.a.O. S. 76.

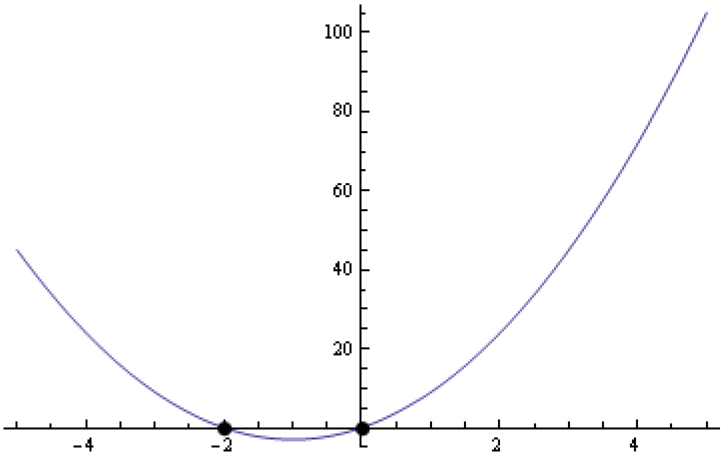
Variablen ist eine Äquivalenzumformung im Gegensatz zum beidseitigen Dividieren.[70]

Lösung mit *Mathematica*:

```
Solve[3 x^2 + 6 x == 0, x]
```

```
{{x → -2}, {x → 0}}
```

```
Plot[{3 x^2 + 6 x}, {x, -5, 5},
 Epilog → {PointSize[1/50], Point[{-2, 0}], Point[{0, 0}]}]
```



„Die allgemeine Vorgehensweise ist die, dass Zeile für Zeile Äquivalenzumformungen gemacht werden. Dabei ist zu beachten, dass die Lösungsmenge exakt dieselbe bleibt. Ist das nicht zu 100% gewährleistet, muss eine Fallunterscheidung gemacht werden, am Schluss durch eine Probe die Lösung verifiziert oder der Schritt vollständig verworfen werden. Die Basisschritte sind gleichzeitiges addieren oder subtrahieren, multiplizieren oder dividieren von Werten auf beiden Seiten der Gleichungen. Dabei ist zu beachten, dass zum Beispiel nicht durch 0 dividiert oder mit der Variablen multipliziert werden darf. Hier folgt eine Auswahl von Umformungen, die keine Äquivalenzumformungen sind:

- *Division durch 0 ist nicht definiert*
- *Multiplizieren mit der Variablen kann zusätzliche (falsche!) Lösungen erzeugen*
- *Wurzelziehen kann die Lösungsmenge verkleinern*

[70] vgl. a.a.O. S. 76.

- *Multiplizieren mit 0 lässt beide Seiten 0 werden. Das ist dann zwar immer richtig, hat aber keinen Sinn, weil die Information der Gleichung verloren geht."*[71]

Beispiel zum Fall a, b und c ≠ 0: Löse die Gleichung $3x^2 - 18x - 48 = 0$!

Lösung: Dieses Beispiel wird mit der Methode des Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat gelöst. Diesen „Trick" kann man zum Lösen der allgemeinen quadratischen Gleichung verwenden. [72]

$$3x^2 - 18x - 48 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0 \quad | +16$$

$$x^2 - 6x = 16 \quad | +9$$

$$(x - 3)^2 = 25$$

$$x - 3 = \pm 5 \quad | +3$$

$$x = 3 \pm 5$$

$$x_1 = 8 \qquad x_2 = -2$$

In diesem Verfahren wird die linke Seite zu einem vollständigen Quadrat ergänzt und dann als Quadrat angeschrieben. Der nächste Schritt ist das Wurzelziehen unter Beachtung beider Vorzeichen. Nach der Auswertung von beiden möglichen Fällen bekommt man zwei Lösungen. Die Möglichkeit, eine geeignete Ergänzungszahl zu finden, besteht darin, die gegebene Gleichung mit der bekannten Formeln $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ bzw. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zu vergleichen. Also spielt „der Koeffizient b" eine entscheidende Rolle, um eine geeignete Zahl zu finden.

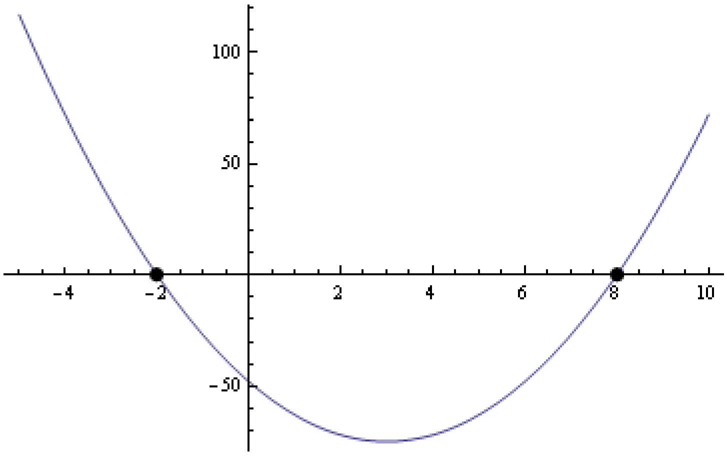
[71] SCHILLY H. Gleichungen & Ungleichungen, Gleichungssysteme, 2006. S.4-5
[72] vgl. a.a.O. S. 77.

Lösung mit *Mathematica*:

```
Solve[3 x^2 - 18 x - 48 == 0, x]
```

```
{{x → -2}, {x → 8}}
```

```
Plot[{3 x^2 - 18 x - 48}, {x, -5, 10},
 Epilog → {PointSize[1/50], Point[{-2, 0}], Point[{8, 0}]}]
```



Bei Schwierigkeiten die geeignete Ergänzungszahl zu finden, ist die „Große Lösungsformel" immer anwendbar:

Große Lösungsformel: ax² + bx + c = 0 $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$

Diese Gleichung kommt so zustande, dass die Gleichung ax² + bx + c = 0 zuerst vereinfacht und dann auf ein vollständiges Quadrat ergänzt wird. Anschließend kann auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden und nach einigen Umformungen erhält man die große Lösungsformel[73]:

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a}}$$

Die Zahl D = b² - 4ac wird als Diskriminante der Gleichung ax² + bx +c = 0 definiert. Aus D erhält man die möglichen Lösungsfälle: Wenn D > 0 ist, so hat die Gleichung zwei Lösungen. Wenn D = 0 ist, so gibt es eine Lösung der Gleichung und wenn D < 0 ist, dann hat die Gleichung keine (reelle) Lösung.

[73] SCHILLY H. Gleichungen & Ungleichungen, Gleichungssysteme, 2006. S.4

Im Fall D < 0 erhält man wegen der Wurzel aus einer negativen Zahl zwei komplexe Lösungen. Da es keine (reelle) Lösung gibt, besitzt die zugehörige Funktion keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Kleine Lösungsformel: *Wegen a≠0 kann man diese Gleichung stets durch a dividieren und erhält als Ergebnis die sogenannte normierte quadratische Gleichung:*[74]

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Beispiel: **(1)** Löse die Gleichung (2x – 3)² = 4x – 7 mittels der Großen Lösungsformel in G = $\Re$ und führe eine Kontrolle aus! **(2)** Gib eine Grundmenge an, in der die Gleichung unlösbar ist! [75]

Lösung:[76]

(1) 4x² - 12x + 9 = 4x -7

4x² - 16x + 16 = 0

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{8} = \frac{16 \pm 0}{8} \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$$

Die Gleichung hat in $\Re$ eine Lösung, die x = 2 ist. Genauer sagt man: Die Gleichung hat in $\Re$ die Doppellösung $x_{1,2} =$ 2.

Kontrolle: Linke Seite: 4·2² - 12· 2 + 9 = 1

Rechte Seite: 4·2 – 7 = 1

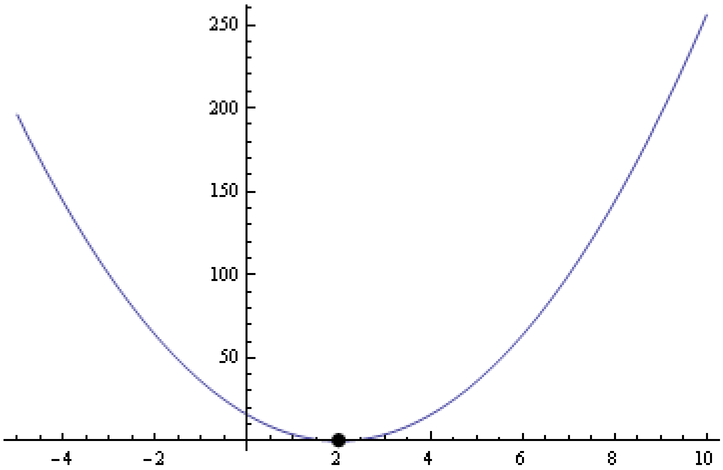
(2) Unlösbar wäre die Gleichung z.B. in $\mathbb{N}_u$.

---

[74] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 12.
[75] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 78
[76] a.a.O.

Lösung mit *Mathematica*:

```
Solve[(2 x - 3)^2 == 4 x - 7, x]

{{x → 2}, {x → 2}}

Plot[{(2 x - 3)^2 - 4 x + 7}, {x, -5, 10},
 Epilog → {PointSize[1/50], Point[{2, 0}]}]
```



Die Funktion (2x – 3)² = 4x – 7 wird umgeformt, dann erhält man die zugehörige Funktion y = 4x² - 16x + 16. Wie in der Zeichnung ersichtlich, besitzt diese Funktion eine einzige Nullstelle, d.h. einen Schnittpunkt mit der x-Achse.

Der Satz von VIETA[77] ist eine weitere und bekannte Hilfe beim Lösen quadratischer Gleichungen. Mit ihm kann man, eine quadratische Gleichung in lineare Terme zerlegen, also in Form der Produktgleichung $(x-x_1)(x-x_2)=0$ darstellen. Bei der Herleitung des Satzes verwendet man nicht die Gleichung ax² + bx + c = 0, sondern dividiert sie durch a. Hier stehen x_1 und x_2 für die beiden Lösungen der Gleichung:[78]

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$
$$x^2+px+q=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2$$
$$x^2+px+q=-(x_1+x_2)x+x_1x_2$$
$$\Rightarrow -p=x_1+x_2$$
$$\Rightarrow q=x_1x_2$$

Beispiel: Stelle die quadratische Gleichung x² - 5x + 6 = 0 in der Form $(x-x_1)(x-x_2)$ dar! [79]

[77] Franziscus VIETA (1540-1603), französischer Advokat und Mathematiker.
[78] vgl. SCHILLY H. Gleichungen & Ungleichungen, Gleichungssysteme, 2006. S. 4
[79] vgl. MALLE, RAMHARTER, ULOVEC, KANDL. Mathematik verstehen 5, 2005. S. 163

Lösung: Weil x_1 und x_2 die Lösungen der Gleichung sind, ermittelt man sie zuerst mit Hilfe der Lösungsformel:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = 2$$

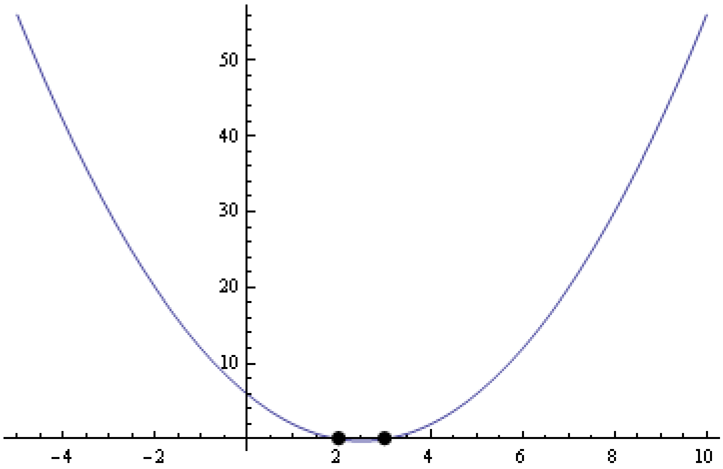
Die gegebene Gleichung lässt sich in der Form (x – 3)(x – 2) = 0 darstellen.

Lösung mit *Mathematica*:

```
Solve[x^2 - 5 x + 6 == 0, x]
```

```
{{x → 2}, {x → 3}}
```

```
Plot[{x^2 - 5 x + 6}, {x, -5, 10},
 Epilog → {PointSize[1/50], Point[{2, 0}], Point[{3, 0}]}]
```



3.4. Analytische Gleichungen

Die durch Schnitt eines geraden Doppelkegels mit einer Ebene entstehenden (ebenen) Kurven werden als Kegelschnitte bezeichnet. Unter der Bezeichnung Kegelschnitte werden Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel zusammengefasst. Alle Kegelschnitte können durch eine algebraische Gleichung 2. Grades vom allgemeinen Typ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

beschrieben werden. Die Art und Lage des Kegelschnittes hängt von der konstanten Koeffizienten A, B, C, D und E in der Gleichung ab.

Anhand dieser Koeffizienten kann die Art des Kegelschnittes festgestellt werden: [80]

Ellipse: $B^2 < 4AC$

Hyperbel: $B^2 > 4AC$

Parabel: $B^2 = 4AC$

Beweis: [81]

Um festzustellen, ob die Gleichung (1) eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel darstellt, untersucht man das Verhalten gegenüber dem Unendlichen.

Die Hyperbel hat 2 ins Unendlich gehende Richtungen (die der Asymptoten), die Parabel hat eine solche Richtung (die Achse). Die Ellipse dagegen liegt ganz im Endlichen.

Zur Bestimmung der Steigung der durch die Gleichung (1) dargestellten Kurve bei unbegrenzt wachsender Abszisse dividiert man zunächst die Gleichung durch x^2 *und erhält* $A + B\frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})^2 + \frac{D}{x} + E\frac{y}{x}\frac{1}{x} + \frac{F}{x^2} = 0.$

Strebt $\frac{y}{x} = tg\alpha$ *bei wachsendem x einem bestimmten Grenzwert zu, dann ist*

$$lim\left(A + B\frac{y}{x} + C(\frac{y}{x})^2 + \frac{D}{x} + E\frac{y}{x}\frac{1}{x} + \frac{F}{x^2}\right) = 0.$$

Für $x \to \infty$ *werden die Glieder mit den Koeffizienten D, E, F gleich 0. Daher sind die Richtungen nach dem Unendlichen durch die Wurzeln der quadratischen Gleichung* ***A + B tgα + C tg²α = 0*** *bestimmt:*

$$tg\alpha = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

Es gibt demnach 2 Richtungen ins Unendliche, keine oder nur eine, je nachdem $B^2 - 4AC$ *größer, kleiner oder gleich 0 ist. Daher ist die Gleichung 2.Grades eine Ellipse, wenn* $B^2 < 4AC$*; eine Hyperbel, wenn* $B^2 > 4AC$ *und eine Parabel, wenn* $B^2 = 4AC$.

[80] vgl. TOMASITZ D. Zur Geschichte der Kegelschnitte als Thema im Mathematikunterricht, 2008. Diplomarbeit der Universität Wien. S. 125

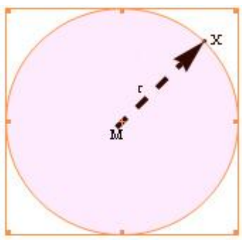
Obwohl jede allgemeine Gleichung 2. Grades $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ sich in eine bekannte Kegelschnittsgleichung überführen lässt, können die Schüler und Schülerinnen meist den Zusammenhang zwischen Kegelschnitten und Gleichungen 2.Grades nicht erkennen. So schrieb Tomasitz in seiner Diplomarbeit über dieses Thema:

> *„In der Praxis wird aber der Schüler meist nur mit der bekannten Parabelgleichung in erster Hauptlage konfrontiert (2.Hauptlage als Funktion 2.Grades). Ebenso ist es schade, dass es sehr viele Schüler gibt, die keinen Zusammenhang zwischen Parabeln und quadratischen Funktionen sehen, weil ja im Allgemeinen eine solche Funktion im Mathematikunterricht vollkommen anders als eine Parabel behandelt wird (Berechnen der Nullstellen, des Extremwertes, etc.)...Man soll ein Kapitel nicht vollkommen isoliert betrachten, sondern sollte versuchen, Beziehungen mit anderen Bereichen herzustellen, um möglicherweise dadurch das Verständnis und Interesse gegenüber der Mathematik zu erhöhen.…“* [82]

3.4.1. Die Gleichung eines Kreises

Definition: *Die Menge aller Punkte X (der Ebene), die von einem gegebenen Punkt M den Abstand r haben, ist die Kreislinie k mit Mittelpunkt M und Radius r:*

$$k[M;r] = \{ X \mid \overline{XM} = r \}$$



Die abgeschlossene Kreisscheibe ist die Punktmenge
$\{ X \mid \overline{XM} \le r \}$ *(„Inneres“ plus „Rand“*
Die offene Kreisscheibe ist die Punktmenge
$\{ X \mid \overline{XM} > r \}$ *(„Inneres“ ohne „Rand“).* [83]

---

[81] TOMASITZ D. Zur Geschichte der Kegelschnitte als Thema im Mathematikunterricht, 2008. Diplomarbeit der Universität Wien. S. 125-126

[82] TOMASITZ D. Zur Geschichte der Kegelschnitte als Thema im Mathematikunterricht, 2008. Diplomarbeit der Universität Wien. S. 125-126

[83] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 165

Kreisgleichung in Koordinatenform:[84]

Der Kreis $k[M(x_M \mid y_M); r]$ wird angegeben. Laut Definition der Kreisgleichung haben alle Punkte X von M den Abstand r. Wegen $\overrightarrow{MX} = X - M$ gilt: $(X - M)^2 = r^2$. Für alle Punkte X(x | y) einer Kreislinie gilt daher:

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}\right)^2 = r^2$$

Durch Quadrieren und Zusammenfassen ergibt sich die allgemeine Kreisgleichung:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Legt nun jede Gleichung der Form Ax² + Ay² + 2Bx + 2Cy + D = 0, A≠0 einen Kreis fest? Um diese Gleichung in der allgemeinen Kreisgleichung auszudrücken, dividiert man zuerst die Gleichung durch A, dann ergänzt man alle Glieder mit x und y zu einem vollständigen Quadrat:[85]

$$x^2 + y^2 + 2 \cdot \frac{B}{A} \cdot x + 2 \cdot \frac{C}{A} \cdot y + \frac{D}{A} = 0$$

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A}\right)^2 - \frac{D}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - D \cdot A}{A^2}$$

Folgende Ergebnisse lassen sich aus dieser Gleichung ablesen:

- Wenn $B^2 + C^2 - D \cdot A > 0$ ist, dann existiert ein Kreis mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{B}{A} \mid -\frac{C}{A}\right)$.
- Wenn $B^2 + C^2 - D \cdot A = 0$ ist, dann existiert ein Punkt. (r = 0)
- Wenn $B^2 + C^2 - D \cdot A < 0$ ist, dann existiert kein reeller Kreis. (r² < 0, $r \notin \Re$.

3.4.2. Die Gleichung der Ellipse

Definition: *Unter einer Ellipse versteht man den geometrischen Ort aller Punkte, für die die Summe von zwei gegebenen festen Punkten konstant gleich*

[84] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 165
[85] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 166

2a ist. Die beiden festen Punkte sind die Brennpunkte der Ellipse und werden mit F_1 und F_2 bezeichnet.[86]

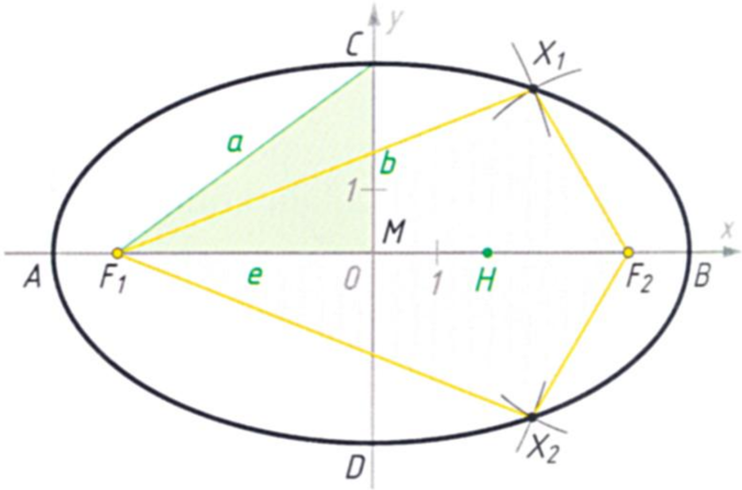


Abbildung-4: Ellipse[87]

Aus der obigen Definition kann man die Gleichung der Ellipse herleiten. Für jeden Punkt P(x | y) einer Ellipse, wobei $F_1(-e\,|\,0)$bzw. $F_2\ (e\,|\,0)$ sind, gilt:

$$2a = \left|\overline{PF_1} + \overline{PF_2}\right| = \left\|\begin{pmatrix} -e-x \\ -y \end{pmatrix}\right\| + \left\|\begin{pmatrix} e-x \\ -y \end{pmatrix}\right\| = \left|\sqrt{(-e-x)^2+(-y)^2} + \sqrt{(e-x)^2+(-y)^2}\right|$$

$$2a = \sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} + \sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2}$$
$$2a - \sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} = \sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2}$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} + (e^2+2ex+x^2+y^2) = e^2-2ex+x^2+y^2$$
$$4a\sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} = 4ex+4a^2$$
$$a\sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} = ex+a^2$$
$$a^2(e^2+2ex+x^2+y^2) = e^2x^2+2exa^2+a^4$$

$$a^2e^2+2a^2ex+a^2x^2+a^2y^2 = e^2x^2+2exa^2+a^4$$
$$x^2(a^2-e^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-e^2)$$

Mit Hilfe des *Satzes von Pythagoras*, setzt man $a^2-e^2=b^2$ (vgl. Abbildung-4), daher erhält man die Gleichung einer Ellipse in erster Hauptlage:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Da Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist, muss man zeigen, dass aus der Ellipsengleichung die Brennpunktsdefinition folgt: [88]

---

[86] Url: http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/ellipse_definition.html [20.04.2010; 14.17 Uhr]
[87] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 182
[88] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 183

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 + 2ex + e^2) + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + 2ex + (e^2 + b^2)} = \sqrt{x^2 \cdot \frac{e^2}{a^2} + 2ex + a^2} = \left|\frac{e}{a} \cdot x + a\right|$$

Aus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt $\frac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow |x| \le a$ und wegen $e < a$ folgt $\frac{e}{a} \cdot |x| \le e < a$.

Daher ist stets $\frac{e}{a} \cdot x + a > 0$ und es ist $\overline{PF_1} = \frac{e}{a} \cdot x + a$

Analog ist $\overline{PF_2} = a - \frac{e}{a} \cdot x$

Insgesamt gilt also – wie behauptet: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = (a + \frac{e}{a} \cdot x) + (a - \frac{e}{a} \cdot x) = 2a.$

Wie die Abbildung-4 zeigt, haben die Brennpunkte und die Punkte der Ellipse folgende Koordinaten: F_1(-e | 0), F_2 (e | 0), A(-a | 0), B(a | 0), C(0 | b) und D(0 | -b). Nach der Brennpunktseigenschaft der Ellipse gilt insbesondere auch $2a = \left|\overline{CF_1} + \overline{CF_2}\right|$. Da das Dreieck $\Delta(F_1CF_2)$ gleichschenklig ist, gilt $a = \left|\overline{CF_1}\right| = \left|\overline{CF_2}\right|$. An dem grünen rechtwinkeligen Dreieck (siehe Abbildung-4) berechnet man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras: $e^2 = a^2 - b^2$

3.4.3. Die Gleichung der Hyperbel

Definition: *Unter einer Hyperbel versteht man den geometrischen Ort aller Punkte, für die die Differenz der Abstände von zwei gegebenen festen Punkten konstant gleich 2a ist. Die beiden festen Punkte sind die Brennpunkte der Hyperbel und werden mit F_1 und F_2 bezeichnet. Ein Punkt P liegt also auf der Hyperbel, wenn die Beziehung $\left|\overline{F_1P}\right| - \left|\overline{F_2P}\right| = 2a$ erfüllt ist. Dieser Sachverhalt ist in der folgenden Abbildung beispielhaft für einen Punkt P angedeutet.*[89]

Aus der obigen Definition kann man die Gleichung der Hyperbel herleiten. Für jeden Punkt P(x | y) einer Hyperbel, wobei $F_1(-e \mid 0)$ bzw. F_2 $(e \mid 0)$ sind, gilt:

[89] Url: http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/hyperbel_definition.html [20.04.2010, 14.45 Uhr]

$$2a = \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \left\|\begin{pmatrix}-e-x\\-y\end{pmatrix}\right| - \left|\begin{pmatrix}e-x\\-y\end{pmatrix}\right\| = \left|\sqrt{(-e-x)^2+(-y)^2} - \sqrt{(e-x)^2+(-y)^2}\right|$$

$$2a = \sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2} - \sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2}$$

$$2a + \sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2} = \sqrt{e^2+2ex+x^2+y^2}$$

$$4a^2 + 4a\sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2} + (e^2-2ex+x^2+y^2) = e^2+2ex+x^2+y^2$$

$$4a\sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2} = 4ex - 4a^2$$

$$a\sqrt{e^2-2ex+x^2+y^2} = ex - a^2$$

$$a^2(e^2-2ex+x^2+y^2) = e^2x^2 - 2exa^2 + a^4$$

$$a^2e^2 - a^4 = e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2$$

$$a^2(e^2-a^2) = x^2(e^2-a^2) - a^2y^2$$

Mit Hilfe des *Satzes von Pythagoras*, setzt man $e^2 - a^2 = b^2$ (vgl. Abbildung-5), daher erhält man für die Gleichung einer Hyperbel in erster Hauptlage:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da Quadrieren im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung ist, muss man hier auch die Umkehrung zeigen:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+e)^2+y^2} = \sqrt{(x^2+2ex+e^2) + \left(\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2 - b^2\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) + 2ex + (e^2-b^2)} = \sqrt{x^2\cdot\frac{e^2}{a^2} + 2ex + a^2} = \left|\frac{e}{a}\cdot x + a\right|$$

Aus $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt $\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow |x| \geq a$ und wegen $e > a$ folgt $\frac{e}{a}\cdot|x| \geq e > a$.

Daher ist stets $\frac{e}{a}\cdot x + a > 0$ und es ist $\overline{PF_1} = \frac{e}{a}\cdot x + a$

Analog ist $\overline{PF_2} = \frac{e}{a}\cdot x - a$

Insgesamt gilt also – wie behauptet: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = (\frac{e}{a}\cdot x + a) - (\frac{e}{a}\cdot x - a) = 2a$.

Auf Grund von analogen Rechnungen wird die Hyperbelgleichung in zweiter Hauptlage erhalten:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad -a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$$

Man kann die Gleichungen der Asymptoten mit Hilfe der Zwei-Punkte-Form bestimmen, die als $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ geschrieben wird. Die erste Asymptote der Hyperbel geht durch den Mittelpunkt M(0|0) und durch den Punkt P(a | b). Also: $\frac{0-y}{0-x} = \frac{0-b}{0-a}$.

Durch Umformungen erhält man folgende Gleichung: $u_1 : y = \frac{b}{a}x$

Aufgrund analoger Rechnungen ergibt sich die Gleichung der zweiten Asymptote: $u_2 : y = -\frac{b}{a}x$

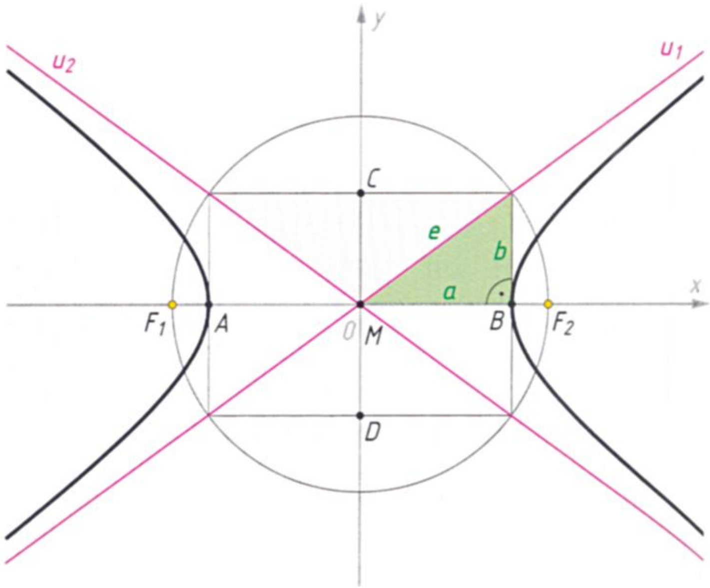


Abbildung-5: Hyperbel[90]

Wie aus der Zeichnung abgelesen werden kann, haben die Brennpunkte und die Scheitel folgende Koordinaten: F_1(-e | 0), F_2(e | 0), A(-a | 0), B(a | 0), C(0 | b) und D(0 | -b). Weil der Radius des Kreises den Wert e hat, ist gleich die Hypotenuse des grünen Dreiecks auch dem Wert e. An diesem rechtwinkeligen Dreieck berechnet man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras: $e^2 = a^2 + b^2$

[90] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 188

3.4.4. Die Gleichung der Parabel

Definition: *Unter einer Parabel versteht man den geometrischen Ort aller Punkte, die zu einem festen Punkt den gleichen Abstand haben wie zu einer festen Geraden. Der feste Punkt heißt Brennpunkt und wird in der folgenden Abbildung mit F bezeichnet. Die Gerade nennt man Leitlinie. In der folgenden Abbildung wird der Zusammenhang beispielhaft für einen Punkt P angedeutet.*[91]

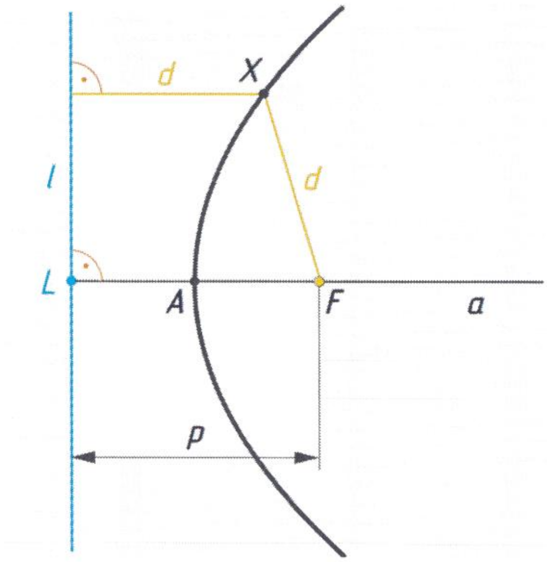


Abbildung-6: Parabel[92]

So gewinnt man die Gleichung der Parabel in erster Hauptlage aus der Definition:

$$\overline{XF} = \overline{Xl}$$

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = x + e$$

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = x^2 + 2ex + e^2$$

$$y^2 = 4ex$$

p ist ein Parameter und wegen p = 2e erhält man die Gleichung: $y^2 = 2px$

Aus der Parabelgleichung folgt die Brennpunktsdefinition:[93]

Aus $y^2 \geq 0$ folgt, dass auch $2px \geq 0$. Da $p > o$ muss also $x \geq 0$ sein.

[91] Url: http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/parabel_definition.html [20.04.2010, 14.52 Uhr]
[92] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 191
[93] ZWERENZ C. Zugänge zu den Kegelschnitten und ihre fachdidaktische Analyse, 2000. Diplomarbeit der Universität Wien. S. 29.

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$y^2 = 2px \Rightarrow \overline{PF} = \sqrt{(x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} =$$

$$= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2}$$

$$\overline{Pl} = x + \frac{p}{2} \Rightarrow \overline{Pl} = \overline{PF}$$

In analoger Weise erhält man die Gleichung der Parabel in zweiter, dritter und vierter Hauptlage:

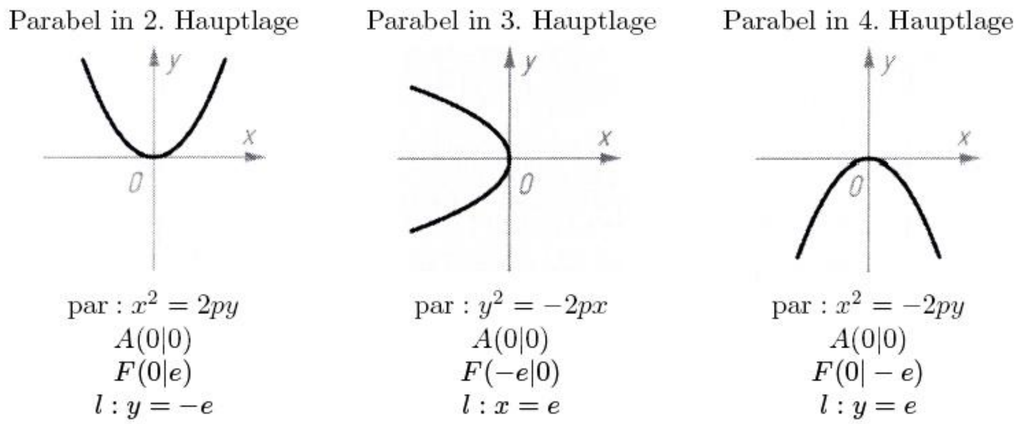


Abbildung-7: Parabel in zweiter, dritter und vierter Hauptlage[94]

3.5. Schnitt- und Berühraufgaben

3.5.1. Lagebeziehung Kegelschnitt und Gerade

Eine Gerade g kann bezüglich eines Kegelschnitts k drei verschiedene Lagen annehmen, und zwar:

- *Die Gerade g kann den Kegelschnitt in zwei Punkten, den Schnittpunkten, schneiden:* $g \cap k = \{S_1; S_2\}$. *Die Gerade ist eine Sekante.*
- *Die Gerade g kann den Kegelschnitt in einem Punkt, dem Berührpunkt, berühren:* $g \cap k = \{T\}$. *Die Gerade ist eine Tangente.*

[94] ERLACHER E. Kegelschnitte, 2007. S. 7. Url: http://www.mathe-online.at/materialien/evelina/files/workshops07_kegelschnitte.pdf [23.04.2010, 14.43 Uhr]

- *Die Gerade kann an dem Kegelschnitt vorbeigehen: $g \cap k = \{\ \}$. Die Gerade ist eine Passante.*[95]

Sonderfälle: Obwohl eine Gerade keine Tangente ist, kann sie in zwei Fälle den Kegelschnitt in einem Punkt schneiden:

a) Wenn die Gerade parallel zu einer der beiden Asymptoten einer Hyperbel ist, dann hat mit der Hyperbel genau einen Schnittpunkt S.

b) Wenn die Gerade parallel zur Parabelachse verläuft, dann hat mit der Parabel genau einen Schnittpunkt S.

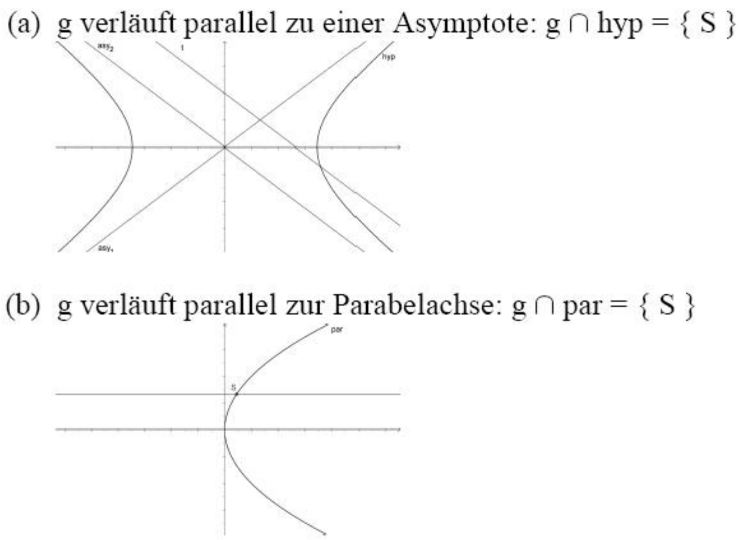


Abbildung-8: Sonderfälle[96]

Beispiel: Ermittle die Lage der Geraden g bezüglich der Ellipse ell und berechne gegebenenfalls die Koordinaten der gemeinsamen Punkte! [97]

ell: $9x^2 + 25y^2 = 225$; g: $4x + 5y = 25$

Lösung: Setz man y aus der Geradengleichung in die Ellipsengleichung ein, so erhält man:

$4x + 5y = 25 \;|\; -4x \quad \Rightarrow \quad 5y = 25 - 4x \;|\; :5 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{25-4x}{5}$

ell: $9x^2 + 25\left(\dfrac{25-4x}{5}\right)^2 = 225 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 625 - 200x + 16x^2 = 225 \;|\; -225$

$\Rightarrow 25x^2 - 200x + 400 = 0 \;|\; :25 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$

---

[95] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 194
[96] DENNINGER M. CiMU Analytische Geometrie, 2005. S. 46 Url: http://mone.crillovich-cocoglia.at/cimu/uz/Klasse7/AnalytischeGeometrie.pdf [24.04.2010, 16.14 Uhr]
[97] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 198

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = 4$$

x = 4 $\Rightarrow$ y = $\frac{25 - 4 \cdot 4}{5} = \frac{9}{5}$

$\Rightarrow$ S: (4 | 9/5) und er ist ein Berührpunkt.

Lösung mit *Mathematica*:

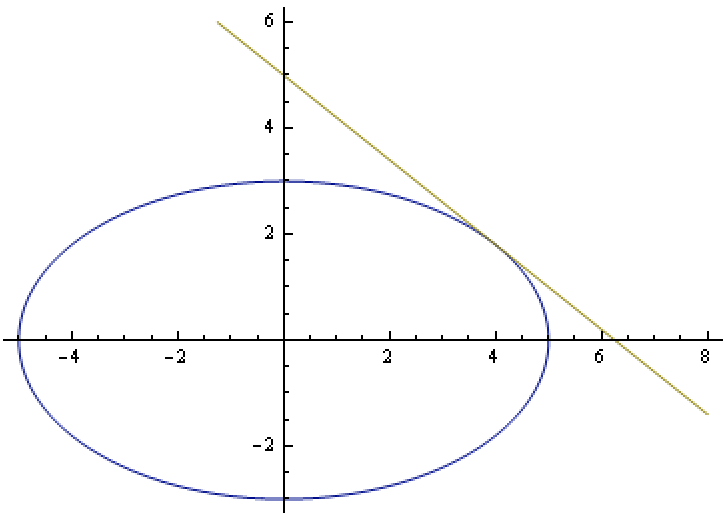
```
Solve[{9 x^2 + 25 y^2 == 225, 4 x + 5 y == 25}, {x, y}]
```

$\left\{\left\{x \to 4, y \to \frac{9}{5}\right\}, \left\{x \to 4, y \to \frac{9}{5}\right\}\right\}$

```
<< Graphics`ImplicitPlot`;
```

General::obspkg :
Graphics`ImplicitPlot` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. >>

```
ImplicitPlot[{9 x^2 + 25 y^2 == 225, 4 x + 5 y == 25},
 {x, -5, 8}, {y, -5, 6}]
```



3.5.2. Tangenten an Kegelschnitte[98]

Die Steigung k der Tangente in einem Punkt eines Kegelschnitts wird durch implizites Differenzieren berechnet. Die Gleichung einer Tangente lautet $y - y_T = k(x - x_T)$, wobei die Koordinaten des Berührpunktes T $(x_T \mid y_T)$ ist.

[98] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 194

So stellt die folgende Gleichung die Tangente der Ellipse in erster Hauptlage dar:

$$b^2 \cdot 2x + a^2 \cdot yy' = 0$$

$$\Rightarrow y' = k = -\frac{b^2 x_T}{a^2 y_T}, y_T \neq 0$$

daher $y - y_T = -\frac{b^2 x_T}{a^2 y_T}(x - x_T)$

$$\Rightarrow a^2 y \cdot y_T - a^2 y_T \cdot y_T = b^2 x_T \cdot x_T - b^2 x_T x = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow a^2 y \cdot y_T + b^2 x_T x = a^2 y_T \cdot y_T + b^2 x_T \cdot x_T = a^2 b^2$$

$$\Rightarrow a^2 y \cdot y_T + b^2 x_T x = a^2 b^2$$

Durch Aufspalten der entsprechenden Kegelschnittsgleichung, bei der Ellipsengleichung und der Hyperbelgleichung x² in $x \cdot x_T$ in und y² in $y \cdot y_T$ und bei der Parabelgleichung 2x in $x + x_T$, erhält man Spaltform der Tangentengleichungen für Kegelschnitte in erster Hauptlage:

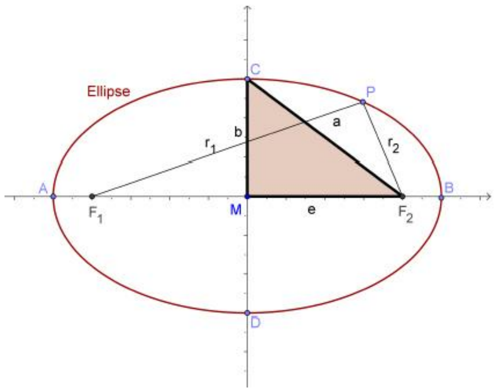
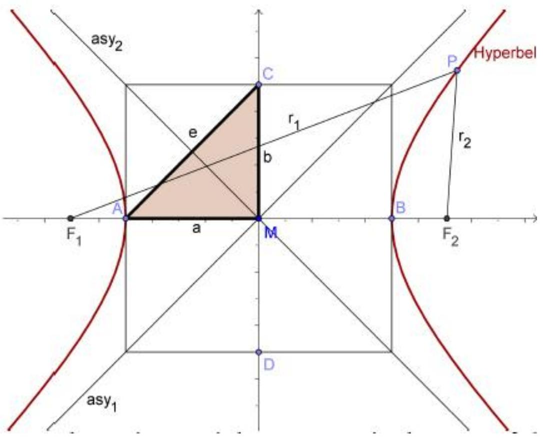
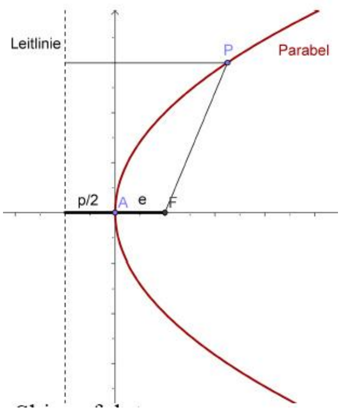
Ellipse:	$a^2 y \cdot y_T + b^2 x_T x = a^2 b^2$
Hyperbel:	$-a^2 y \cdot y_T + b^2 x_T x = a^2 b^2$
Parabel:	$y \cdot y_T = p(x_T + x)$

3.5.3. Konfokale Kegelschnitte

Definition: *Zwei Kegelschnitte heißen konfokal, wenn sie gemeinsame Brennpunkte haben.*[99]

[99] DENNINGER M. CiMU Analytische Geometrie, 2005. S. 44 Url: http://mone.crillovich-cocoglia.at/cimu/uz/Klasse7/AnalytischeGeometrie.pdf [24.04.2010, 16.14 Uhr]

In der folgenden Tabelle werden die Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte zusammengefasst:

Zeichnung[100]	**Brennpunktseigenschaft**
	$e^2 = a^2 - b^2$
	$e^2 = a^2 + b^2$
	$e = p / 2$

[100] DENNINGER M. CiMU Analytische Geometrie, 2005. Url: http://mone.crillovich-cocoglia.at/cimu/uz/Klasse7/AnalytischeGeometrie.pdf [24.04.2010, 16.14 Uhr]

Beispiel: Eine Ellipse und eine Hyperbel haben dieselben Brennpunkte und gehen durch den Punkt X. Berechne die Größe des Schnittwinkels der beiden Kurven! [101]

F_1(-4 | 0), F_2 (4 | 0), X (-24 | 21)

Lösung:
Ellipsengleichung lautet: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Brennpunktseigenschaft der Ellipse: $e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow$

$$16 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 16 + b^2$$

In die Ellipsengleichung eingesetzt:

$\Rightarrow b^2x^2 + (16 + b^2)\, y^2 = (16 + b^2)\, b^2$

X (-24 | 21) $\in$ Ellipse: $\Rightarrow b^2 (-24)^2 + (16 + b^2)\, 21^2 = (16 + b^2)\, b^2 \quad | \; b^2 = u$

$$\Rightarrow u\,(-24)^2 + (16 + u)\, 21^2 = (16 + u)\, u$$

$$\Rightarrow u^2 - 1001u - 7056 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{1001 \pm \sqrt{1001^2 - 4\cdot(-7056)}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = 1008 = b^2 \\ b = \pm 12\sqrt{7} \end{array} \text{ und } u_2 = -7$$

$a^2 = 16 + b^2 \Rightarrow a = \pm 32$

Hyperbelgleichung lautet: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Brennpunktseigenschaft der Hyperbel: $e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$

$$16 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 16 - b^2$$

$\Rightarrow b^2x^2 - (16 - b^2)\, y^2 = (16 - b^2)\, b^2$

X (-24 | 21) $\in$ Hyperbel: $\Rightarrow b^2 (-24)^2 - (16 - b^2)\, 21^2 = (16 - b^2)\, b^2 \quad | \; b^2 = u$

$$\Rightarrow u\,(-24)^2 - (16 - u)\, 21^2 = (16 - u)\, u$$

$$\Rightarrow u^2 + 1001u - 7056 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{-1001 \pm \sqrt{1001^2 - 4\cdot(-7056)}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = 7 = b^2 \\ b = \pm\sqrt{7} \end{array} \text{ und } u_2 = -1008$$

[101] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 203

a² = 16 - b² $\Rightarrow$ $a = \pm 3$

Ellipsengleichung: $1008x^2 + 1024y^2 = 1008 \cdot 1024$

Hyperbelgleichung: $7x^2 - 9y^2 = 63$

Winkel:

Die Steigung der Tangente der Ellipse t im Punkt X (-24 | 21):

$$k = -\frac{b^2 x_T}{a^2 y_T} = \frac{1008 \cdot (-24)}{1024 \cdot 21} = -\frac{9}{8}$$

Bzw. die Steigung der Tangente der Hyperbel t im Punkt X (-24 | 21):

$$k = -\frac{b^2 x_T}{a^2 y_T} = \frac{7 \cdot (-24)}{9 \cdot 21} = -\frac{8}{9}$$

Die Normalvektoren: $\overrightarrow{n_{ell}} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_{hyp}} = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen beiden Normalvektoren: $\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -9 \end{pmatrix}\right|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

4. Beispiele für „Schnittpunkte verschiedener Kurven“ mit Mathematica

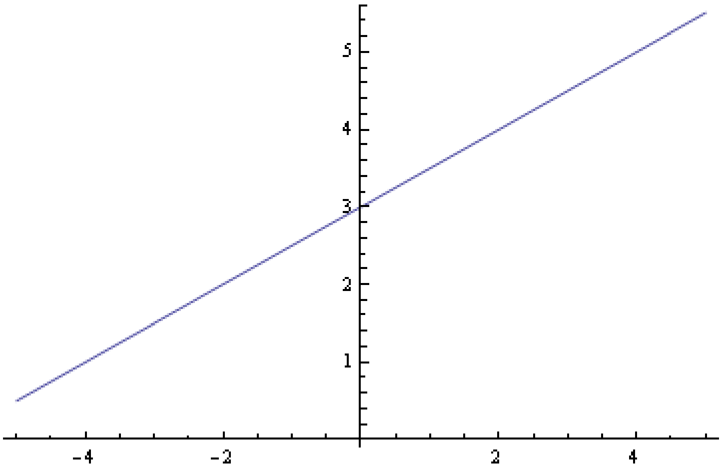
Die Gerade ist so wichtig, dass sie in sehr unterschiedlichen Kontexten und verschiedenen Darstellungsformen vorkommt. Durch die folgenden Gleichungen kann man eine Gerade beschreiben[102]:

- Die Hauptform der Geradengleichung: $y = k \cdot x + d$
    - k ist die Steigung
    - k und d sind reelle Zahlen
- Die allgemeine Geradengleichung: $c = a \cdot x + b \cdot y$
    - a, b und c sind reelle Zahlen
- Die Parameterdarstellung der Geraden: $X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$
    - X ist ein variabler Punkt auf der Geraden
    - A,B sind feste Punkte auf der Geraden
    - $\overrightarrow{AB}$ ist der Richtungsvektor von g
    - t ist ein Parameter

[102] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 244

4.1. Darstellung von Geraden

```
g[x_] := 1/2 x + 3

Plot[g[x], {x, -5, 5}]
```



Mathematica benutzt voll ausgeschriebene englische Wörter als Namen von Befehlen, die mit großen Anfangsbuchstaben geschrieben werden. Um eine Gerade mit dem Kommando *Plot* darzustellen, wird die Hauptform der Geradengleichung eingegeben.

Hier wird eine Kurvenfunktion g definiert. Bei einer Funktionsdefinition werden die Parameter (hier nur x) mit einem Unterstrich in eckiger Klammer angegeben. *Plot* soll einen Funktionsgraph von g im Intervall [-5,5] erzeugen. Nach dem Drücken „*SHIFT+ENTER*" Tasten erscheint die oben dargestellte Grafik. Mit dieser Tastenkombination führt Mathematica das Kommando aus und markiert die nächste Eingabezelle.

4.2. Bestimmung der Schnittpunkte zweier Geraden

<u>Beispiel 1:</u> Die Gleichungen der beiden Funktionen sind g: y= ½ x + 3 und h: y= 2 x – 3. Berechne den Schnittpunkt und überprüfe das Ergebnis grafisch![103]

[103] vgl. http://mathenexus.zum.de/html/analysis/funktionen_lineare/weiterfuehrendes/LinFkt_SchneideGeraden.htm

Lösung 1: Der Schnittpunkt S liegt auf beiden Geraden. Das bedeutet: Das Einsetzen der Koordinaten des Schnittpunktes S in die Kurvenfunktionen liefert ein Gleichungssystem (vgl. Kapital 3.2):

in die Geradengleichung von g: $y_S = ½ x_S + 3$

in die Geradengleichung von h: $y_S = 2 x_S - 3$

In dem Gleichungssystem steht die gleiche Variable auf der linken Seite von beiden Geradengleichungen. Somit gilt: $½ x_S + 3 = 2 x_S - 3$.

```
f[x_] := 1/2 x + 3;
g[x_] := 2 x - 3;
Solve[f[x] == g[x], x]
{{x → 4}}

f[4]
5
```

Das Standardkommando für die Lösung von Gleichungen lautet *Solve*. Als Lösungsmenge ergibt sich x = 4. Das heißt, dass die x-Koordinate des Schnittpunkts den Wert 4 hat. Durch das Einsetzen des x-Werts in eine der beiden Funktionsgleichungen, z.B. in f, erhält man die y-Koordinate des Schnittpunktes S.

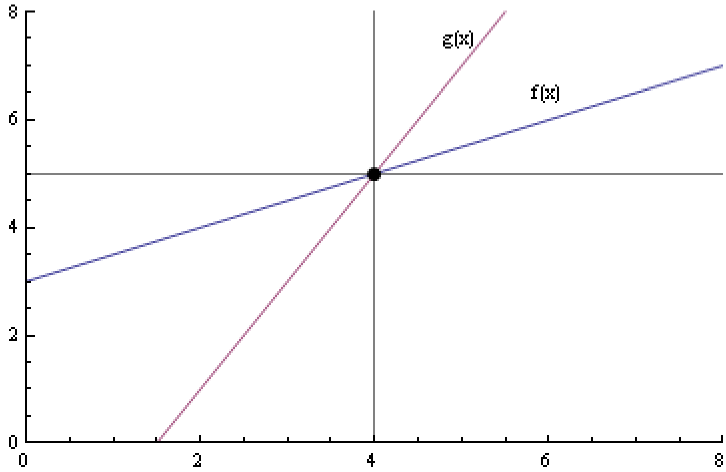
Mit dem *Plot* Kommando können mehrere Funktionen gleichzeitig dargestellt werden. Dafür müssen die Funktionen in einer Liste angegeben werden. Folgendes Beispiel zeigt die Verwendung der grafischen Optionen von *Plot*: *PlotRange*-Option, *GridLines*-Option und *Epilog*-Option.

Mathematica berechnet den y-Bereich zur Darstellung der Kurve selbständig. Die *PlotRange*-Option bietet eine Möglichkeit den Bereich selbst einzustellen.[104]

Mit der Option *GridLines* werden horizontale und vertikale Rasterlinien gezeichnet. In diesem Beispiel wird dies benutzt, um ein bestimmtes Detail (Schnittpunkt von Geraden) deutlicher erkennen zu lassen. Die *Epilog*-Option hat die Bedeutung, dass nach dem Zeichen des Funktionsgraphen noch ein Grafikobjekt (hier mehrere: *Text* und *PointSize)* gezeichnet werden soll.

[104] vgl. KOFLER. Mathematica, 1992. S. 225

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 8},
 PlotRange → {{0, 8}, {0, 8}},
 GridLines → {{4}, {5}},
 Epilog → {
   Text["f(x)", {6, 6.5}],
   Text["g(x)", {5, 7.5}],
   PointSize[1/50], Point[{4, 5}]}]
```



<u>Beispiel 2</u>: Ermittle die Lösungsmenge für G = $\Re \times \Re$ graphisch![105]

$$-3x + 10y = -17$$

$$-3x + 6y = -45$$

<u>Lösung 2</u>: In diesem Beispiel suchen wir die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen.

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist ein Zahlenpaar (x | y), welches sowohl die Gleichung I als auch die Gleichung II erfüllt. Diese Einsicht lässt sich in ein graphisches Lösungsverfahren abwandeln. Dazu stellt man die erste Gleichung durch eine Gerade f und die zweite Gleichung durch eine Gerade g dar und schneidet die beiden Geraden. Im Allgemeinen erhält man so einen Schnittpunkt S; dessen Koordinaten stellen die Lösung der Gleichung dar.[106]

Hier sind die Gleichungen in der allgemeinen Form der Geradengleichung:

c = a x + b y.

[105] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 155 – Aufgabe 416 b)

[106] vgl. GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5, 2004. S. 153;

Es gibt zwei Möglichkeiten dieses Beispiel mit Mathematica zu lösen:

I. Man wandelt die allgemeine Geradengleichung in die Hauptform um und berechnet den Schnittpunkt.

II. Mit dem *Solve*-Kommando kann man die Gleichungssysteme exakt lösen und die Geraden mit dem Kommando *ImplicitPlot* darstellen.

<u>Version 1: Allgemeine Geradengleichung → Hauptform</u>

```
Solve[-3 x + 10 y == -17, y]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{10}(-17 + 3x)\right\}\right\}$$

```
f[x_] := 1/10 (-17 + 3 x)
```

```
Solve[-3 x + 6 y == -45, y]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{2}(-15 + x)\right\}\right\}$$

```
g[x_] := 1/2 (-15 + x)
```

```
Solve[f[x] == g[x], {x}]
```

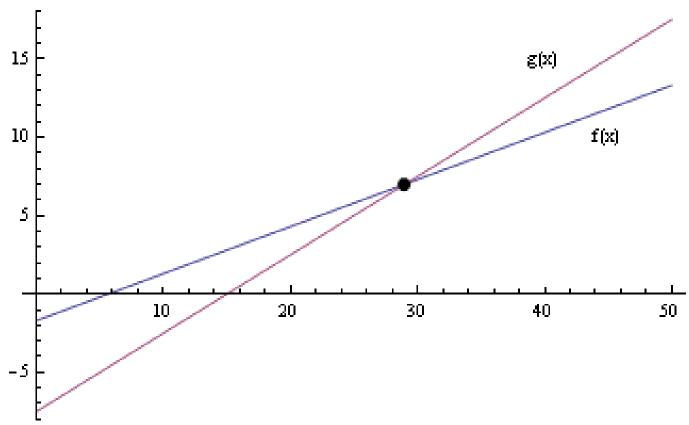
{{x → 29}}

```
f[29]
```

7

Man kann die Gleichung nach y auflösen, um die Gerade in die Hauptform zu bringen. Die Gleichungen müssen mit „==“ formuliert werden, nicht mit „=“. Mit dem Definitionszeichen „:=“ wird die erhaltene Hauptform als Funktion f definiert. Der gleiche Arbeitsschritt wird für die zweite Gleichung wiederholt. Die beiden Gleichungen werden mit dem Kommando *Solve* nach x aufgelöst, dann wird der x-Wert in die Funktion f eingesetzt. Daraus folgen die Koordinaten des Schnittpunkts: (29 | 7).

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 50},
 Epilog → {
   Text["f(x)", {45, 10}],
   Text["g(x)", {40, 15}],
   PointSize[1/50], Point[{29, 7}]}]
```

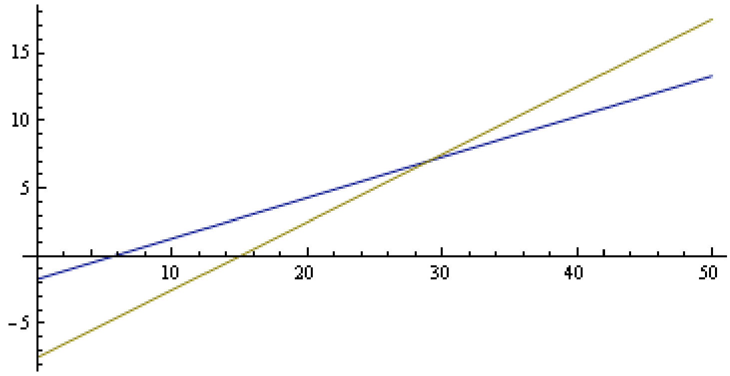


Version 2: Gleichungssysteme lösen mit *Solve*

Mit dem Kommando *Plot* ist es nicht direkt möglich, eine Gerade in der allgemeinen Form darzustellen. Die Gleichung F(x, y) = c (x, y und $c \in \Re$) wird als implizite Funktionen definiert, etwa ax + by = c. Das bedeutet, dass die allgemeine Geradengleichung eine implizite Darstellung eines linearen Zusammenhangs ist. Es gibt ein spezielles Kommando *ImplicitPlot* aus dem Package Graphics`ImplicitPlot`, um Funktionen dieser Art darstellen zu können.

Solve löst das lineare Gleichungs-System, das als Liste eingegeben wird.
Needs lädt das Package. Bevor Spezialkommandos aus dem betreffenden Package verwendet werden können, muss das Package geladen werden.
Bei dem Kommando *ImplicitPlot* wird als erster Parameter eine Liste von Funktionsgleichungen angegeben, damit beide Funktionen gleichzeitig dargestellt werden können. Im zweiten Parameter wird der Wertebereich für eine der beiden Variablen angegeben.

```
Solve[{-3 x + 10 y == -17, -3 x + 6 y == -45}]

{{x → 29, y → 7}}

Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]

ImplicitPlot[{-3 x + 10 y == -17, -3 x + 6 y == -45}, {x, 0, 50}]
```



Beispiel 3: Untersuche, ob die beiden Geraden einander schneiden und berechne gegebenfalls den Schnittpunkt!

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und h: g: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung 3: Dieses Beispiel zeigt, wie die Parameterdarstellungen der Gleichungen zweier Geraden (jeweils in Punkt – Richtungsform) aufgestellt werden können. Mit *Solve* wird der Schnittpunkt berechnet, zur Kontrolle wird das Ergebnis sowohl in die erste Gerade als auch in die zweite Gerade eingesetzt.

Die Definition der beiden Geraden erfolgt nicht direkt, sondern mit Hilfe der Punkte (p_1, p_2) und der Richtungsvektoren (v_1, v_2):

```
p1 = {-4, -6, 5}; v1 = {3, 1, -2};
p2 = {5, -7, 7}; v2 = {1, -1, 2};
gerade1 = p1 + t v1;
gerade2 = p2 + v v2;
lsg = Solve[gerade1 == gerade2, {t, v}][[1]]
```

```
{t → 2, v → -3}
```

Solve liefert eine Doppelliste von Substitutionsvorschriften. Um die Überprüfung des Schnittpunktes zu erreichen, werden die gefundenen Parameterwerte in die Vektorfunktion eingesetzt:

```
gerade1 /. lsg
```

```
{{2, -4, 1}}
```

```
gerade2 /. lsg
```

```
{{2, -4, 1}}
```

ColumnForm bewirkt eine Anzeige von Vektoren in Spaltenform. Durch das Solve-Kommando ist eine zusätzliche Klammerebene { } aufgetreten. Dem Einfügen von *Flatten* dient das Auflösen dieser Klammerebene:

```
ColumnForm[Flatten[%]]
```

```
2
-4
1
```

4.3. Darstellung von verschiedenen Kurven und ihrer Schnittpunkte

4.3.1. Schnittpunkt von Gerade mit Parabeln

Mit dem *Plot* Kommando kann man nicht nur Geraden sondern auch viele verschiedene Kurven darstellen. Folgendes Beispiel[107] zeigt uns, wie es aussieht, wenn eine Gerade eine Parabel schneidet:

Beispiel 3: Die Graphen der beiden Funktionen f: $y = -x^2 + 4x$ und g: $y = k \cdot x$ schneiden einander im Nullpunkt. Berechne für k= 0,5, k=1 und k= 1,5 jeweils den zweiten Schnittpunkt (falls dieser existiert). Überprüfe das Ergebnis grafisch!

Lösung 3:

Als erstes müssen die oben angeführten Funktionen f(x) und g(x) in einer für Mathematica verständlichen Form definiert werden. Bei der Funktionsdefinition ist der Parameter mit einem Unterstrich in eckiger Klammer anzugeben. Bei späterem Aufrufen der Funktion ist dieser Unterstrich nicht mehr notwendig.

In diesem Fall werden für drei verschiedene k Werte drei Varianten von der Funktion g als g1, g2 und g3 definiert. Die Gleichung muss für diese drei Varianten drei Mal gelöst werden. Dazu wird wieder *Solve* eingesetzt. Die Lösung der Gleichungen enthält den gesuchten x Wert. Die y-Werte des Schnittpunktes ergeben sich durch das Einsetzen. Die gesuchten Schnittpunkte sind: (7/2 | 7/4), (3 | 3) und (5/2 | 15/4).

```
f[x_] := -x^2 + 4 x;
g1[x_] := 1/2*x;
Solve[f[x] == g1[x], x]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to \frac{7}{2}\}\}$

```
f[7/2]
```

$\frac{7}{4}$

```
g2[x_] := x;
Solve[f[x] == g2[x], x]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to 3\}\}$

```
f[3]
```

3

```
g3[x_] := 3/2*x;
Solve[f[x] == g3[x], x]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to \frac{5}{2}\}\}$

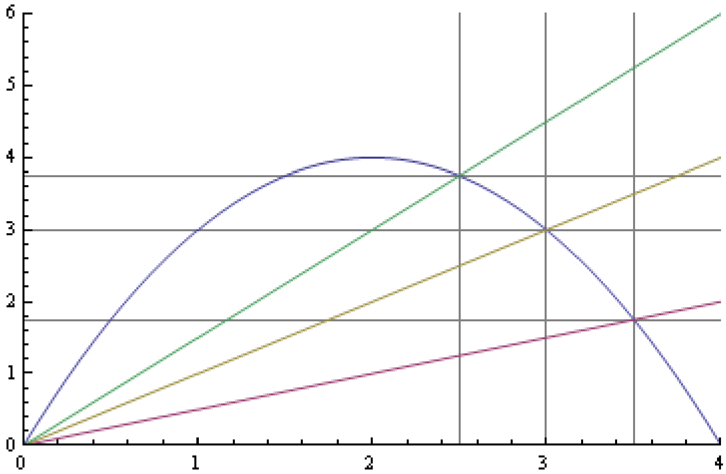
```
f[5/2]
```

$\frac{15}{4}$

[107] DANGL, BINGEL. 2006. S.12-13

Eine Grafik veranschaulicht die gefundene Lösung:

```
Plot[{f[x], g1[x], g2[x], g3[x]}, {x , 0, 4},
 PlotRange → {{0, 4}, {0, 6}},
 GridLines → {{7/2, 3, 5/2}, {7/4, 3, 15/4}}]
```



4.3.2. Schnittpunkte zweier Parabeln

Die Gleichungen von Parabeln fasst man zu einem Gleichungssystem zusammen und man ermittelt dessen Lösungsmenge. Die Lösungsmenge kann eine, zwei oder keine reelle Lösungen haben. Die Anzahl der Schnittpunkte ist aus der Lösungsmenge ablesbar:

- Die Lösungsmenge besteht aus nur einer reellen Lösung. In diesem Fall berühren sich die Parabeln in einem Punkt.
- Die Lösungsmenge besteht aus zwei Lösungen. In diesem Fall schneiden die Parabeln einander in zwei Punkten.
- Die Lösungsmenge hat keine reelle Lösung. In diesem Fall haben die Parabeln keinen gemeinsamen Punkt.

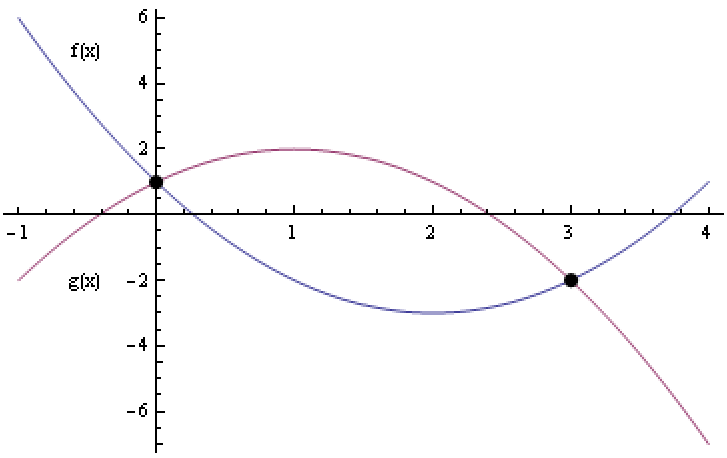
Beispiel: Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier Parabeln, von denen die Schnittpunkte zu bestimmen sind.[108]

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

[108] BRINKMANN Rudolf. Schnittpunkt von Parabel und Parabel. Stand Februar 2009. Url: http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/gr_fkt_01_08.htm

Lösung: Bei der Berechnung des Schnittpunktes von zwei Parabeln, setzt man auch die Funktionsgleichungen gleich. *Solve* bringt die gefundenen Lösungen dieser Gleichungen in x als einelementige Substitutionslisten hervor. Nach dem Einsetzen von x in einen der beiden Funktionsterme, z.B. in f, erhält man die y-Koordinaten der Schnittpunkte: S1 (0 | 1) und S2 (3 | -2):

```
f[x_] :=  x^2 - 4 x + 1;
g[x_] :=  -x^2 + 2 x + 1;
Solve[f[x] == g[x], x]

{{x → 0}, {x → 3}}

f[0]

1

f[3]

-2

Plot[{f[x], g[x]}, {x, -1, 4},
 Epilog → {
   Text["f(x)", {-0.5, 5}],
   Text["g(x)", {-0.5, -2}],
   PointSize[1/50], Point[{0, 1}], Point[{3, -2}]}]
```



Beispiel: Berechnen Sie die Schnittpunkte folgender Parabeln:

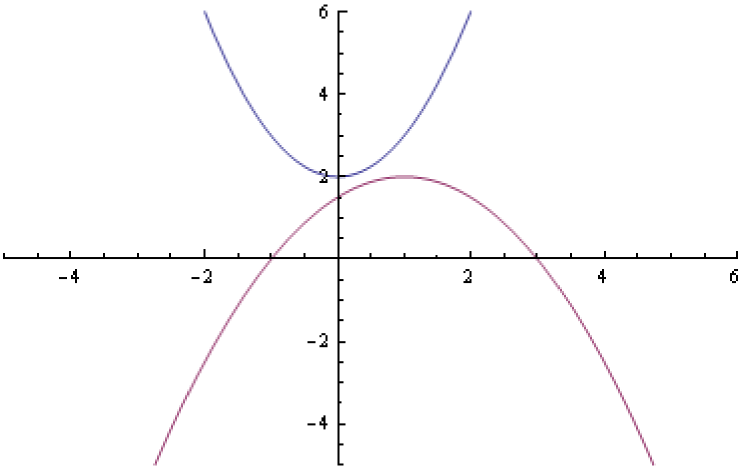
$f(x) = x^2 + 2$ $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

Lösung:

```
Solve[x^2 + 2 == -1/2 x^2 + x + 3/2, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{3}\left(1 - i\sqrt{2}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{3}\left(1 + i\sqrt{2}\right)\right\}\right\}$$

```
Plot[{x^2 + 2, -1/2 x^2 + x + 3/2}, {x, -5, 6},
 PlotRange → {{-5, 6}, {-5, 6}}]
```



In diesem Fall ermittelt *Solve* die Lösungen, die komplexe Zahlen sind. Mathematica bemerkt in dieser Form nicht, dass es um reelle Zahlen geht. Aus der Darstellung der Funktionsgraphen ist leicht zu erkennen, dass die Parabeln keine gemeinsamen Punkte haben.

Mathematica soll obiges Gleichungssystem für die zulässigen Werte lösen. Mit dem Kommando *Reduce* besteht die Möglichkeit, die Lösungsmenge einzugrenzen. Die Gleichung soll nach x aufgelöst werden, wobei x aus der Menge der reellen Zahlen kommen muss. Daher erhält man eine leere Lösungsmenge:

```
Solve[Reduce[x^2 + 2 == -1/2 x^2 + x + 3/2, x, Reals]]
{}
```

4.3.3. Schnittpunkte von Kreis mit Gerade

Um die Koordinaten der Schnittpunkte eines Kreises k mit einer Geraden g zu berechnen, werden die Gleichung des Kreises und der Geraden zu einem Gleichungssystem zusammengefasst und dessen Lösungsmenge ermittelt. Die dabei auftretende quadratische Gleichung kann keine, eine oder zwei reelle Lösungen haben; die Gerade ist demnach Passante, Tangente oder Sekante.[109]

[109] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 169

Beispiel: Gegeben sind der Kreis k: $x^2 + y^2 = 25$ und drei Geraden:

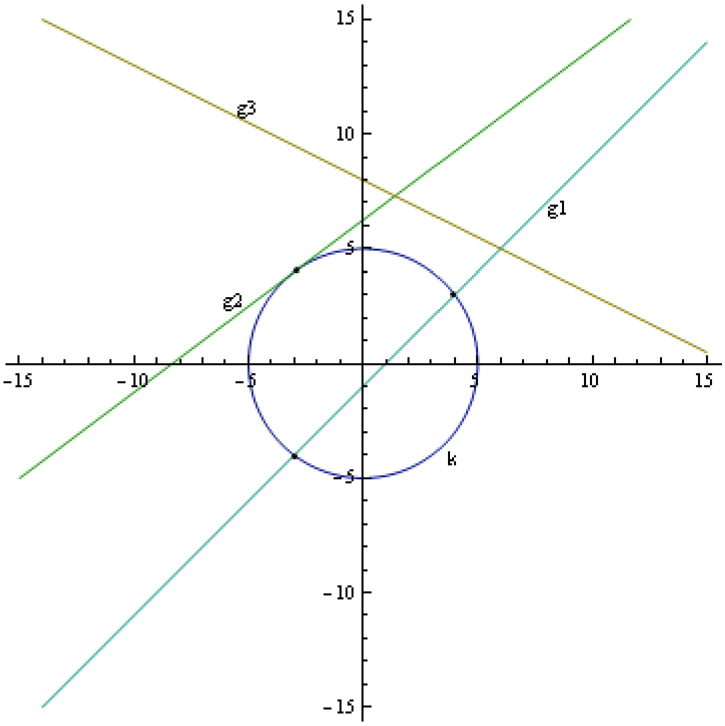
g_1: y = x -1, g_2: y = 3/4x + 6,25 und g_3: y = -0.5x + 8

Ermittle die Lagen der Geraden bezüglich des Kreises (1) durch Zeichnung, (2) durch Rechnung![110]

Lösung: Die Lage der Geraden werden bezüglich des Kreises k durch das Berechnen der Koordinaten gemeinsamer Punkte bestimmt. Die Kreisgleichung ist als implizite Funktion definiert. Die Geradengleichungen sind in der Hauptform. Um alle Funktionen in einem Bild darstellen zu können, müssen wir die Gleichungen in die gleiche Form bringen. Hier wird vorgezogen, die Hauptform in die allgemeine Geradengleichung zu verwandeln. Da *ImlicitPlot* nicht zu den Standardkommandos von Mathematica gehört, muss es vor der ersten Verwendung mit *Needs* geladen werden. Im ersten Parameter dieses Kommandos werden die zu zeichnenden Funktionen angegeben. Weiteres werden in einer Liste zuerst die Variable und danach der Wertebereich angegeben. Als Wertebereich für die x- und y-Werte wird das Intervall (-15,15) ausgewählt.

[110] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 169

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"];
imp = ImplicitPlot[{x^2 + y^2 == 25, x - y == 1, 0.75 x - y == -6.25,
  0.5 x + y == 8}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}]
```



Aus der Figur lässt sich ablesen[111]:

- Die Gerade g_1 schneidet den Kreis; sie ist eine Sekante.
- Die Gerade g_2 berührt den Kreis; sie ist eine Tangente.
- Die Gerade g_3 geht am Kreis vorbei; sie ist eine Passante.

Durch das Berechnen der Koordinaten gemeinsamer Punkte wird erwartet:

- Die Gerade g_1 und Kreis k haben zwei Schnittpunkte. Also das Gleichungssystem hat zwei Lösungen. Die Gerade g_2 und k haben einen Schnittpunkt und das Gleichungssystem hat eine Lösung. Die Gerade g_3 und k haben keinen gemeinsamen Punkt. Das Gleichungssystem liefert keine Lösung.

Mit dem ersten Kommando werden die alten Definitionen gelöscht. g_1 schneidet k in den Punkten S_1(-3|-4) und S_2(4|3). g_2 berührt k im Punkt T(-3|4)

[111] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 169

(Doppellösung). Das dritte Gleichungssystem liefert eine unerwartete Lösung und es ergeben sich als Lösung zwei konjugierte komplexe Zahlen:

```
g1 : Solve [{x^2 + y^2 == 25, x - y == 1}, {x, y}]

{{x → -3, y → -4}, {x → 4, y → 3}}

g2 : Solve [{x^2 + y^2 == 25, 0.75 x - y == -6.25}, {x, y}]

{{x → -3., y → 4.}, {x → -3., y → 4.}}

g3 : Solve [{x^2 + y^2 == 25, 0.5 x + y == 8}, {x, y}]

{{x → 3.2 - 4.57821 i, y → 6.4 + 2.2891 i},
 {x → 3.2 + 4.57821 i, y → 6.4 - 2.2891 i}}
```

Hier soll man wieder das Kommando *Reduce* verwenden. Mit Hilfe dieses Kommandos wird die Lösungsmenge auf die reellen Zahlen eingegrenzt.

```
Solve [Reduce[x^2 + y^2 - 25 == 0.5 x + y - 8, x, y, Reals]]

Reduce::ratnz :
  Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained
         by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

Solve::eqf : x ≤ 4.41083 is not a well-formed equation. >>

Solve[-3.91083 ≤ x ≤ 4.41083]
```

Dieses Kommando gibt eine Fehlermeldung, dass *Reduce* nicht in der Lage ist, das System mit ungenauen Koeffizienten zu lösen. Um die Fehlermeldung zu vermeiden, sollte die Bruchdarstellung von 0.5 verwendet werden. Dann erhält man eine leere Lösungsmenge ohne Fehlermeldung:

```
Solve [Reduce[{x^2 + y^2 == 25, 1/2 x + y == 8}, x, y, Reals]]

{}
```

Daraus folgt, dass g_3 eine Passante zu k ist.

4.3.4. Schnittpunkte zweier Kreise

Beispiel: Berechne die Lage und die Koordinaten eventueller gemeinsamer Punkte der beiden Kreise k_1 [M(4|-2); $\sqrt{10}$] und k_2 [M(-1|3); $\sqrt{20}$]![112]

Lösung: Zuerst werden die Kreisgleichungen in Koordinatenform (siehe Kapitel 3.3.4) definiert. Das Gleichungssystem besteht aus diesen Gleichungen. *Solve* liefert die Lösungen des Gleichungssystems. Die beiden Kreise schneiden einander in den Schnittpunkten S_1(1|-1) und S_2 (3|1).

```
k1 := (x - 4)^2 + (y + 2)^2 == 10
k2 := (x + 1)^2 + (y - 3)^2 == 20
glsys = {(x - 4)^2 + (y + 2)^2 == 10,
   (x + 1)^2 + (y - 3)^2 == 20}
lsg = Solve[glsys]
```

$\{(-4+x)^2 + (2+y)^2 == 10,\ (1+x)^2 + (-3+y)^2 == 20\}$

$\{\{x \to 1,\ y \to -1\},\ \{x \to 3,\ y \to 1\}\}$

4.3.5. Schnittpunkte von Parabeln mit einem Kreis

Die folgenden einfachen Beispiele ermöglichen es, sich an den Umgang mit Mathematica zu gewöhnen. Bei dem Lösen einer Aufgabe sind grundsätzlich mehrere Lösungswege möglich. Das folgende Beispiel wird mit zwei verschiedenen Lösungswegen berechnet. Außerdem zeigt dieses Beispiel das Zusammenwirken mehrerer Mathematica Kommandos. Ein paar Tipps findet man in folgendem Beispiel, wie ein aus einem Kommando resultierendes Zwischenergebnis im nächsten Kommando eingesetzt wird.

Beispiel: Der Kreis $x^2 + y^2 + 6y - 91 = 0$ und die Kurve $y= ax^2 + b$ schneiden einander in P(6| y>0) unter einem Winkel von 90 Grad. Berechnen Sie a und b und überprüfen Sie Ergebnis grafisch!

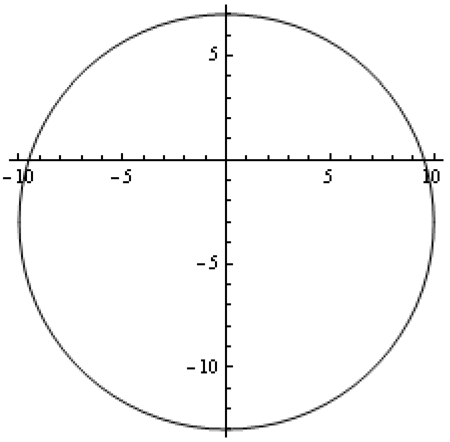
[112] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 170

Lösung 1.Version[113]

```
Remove["Global`*"]
```

löscht alle bisher definierten Symbole.

```
kreis = x^2 + y^2 + 6 y - 91 == 0;
kurve = y == a x^2 + b;
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
gr1 = ImplicitPlot[kreis, {x, -10, 10}]
```



Mit *Solve* wird die y-Koordinate des Schnittpunktes der Kurve mit dem Kreis berechnet:

```
Solve[{kreis, x == 6}, y]
{{y → -11}, {y → 5}}
```

Von den beiden Lösungen ist nur die zweite interessant (weil y>0 gefordert ist). Der Schnittpunkt lautet also (6 | 5).

```
dkreis = Dt[kreis, x]
2 x + 6 Dt[y, x] + 2 y Dt[y, x] == 0
```

Das Kommando *Dt* berechnet die implizite Differentiation der Kreisgleichung, d.h. es wird nicht nur nach x, sondern auch nach y abgeleitet. Das ist wegen der impliziten Form der Kreisgleichung notwendig.

Das Resultat wird mit Solve nach y´ (also Dt[y,x]) aufgelöst, gleichzeitig werden für x und y die Koordinaten des Schnittpunktes eingesetzt. Das Resultat dieser Berechnung ist die Steigung des Kreises an der Stelle (6 | 5). Die Kurve soll

113 KOFLER. Mathematica, 1992. S. 67-68

dort den Kreis rechtwinkelig schneiden. Daher muss die Steigung der Kurve an dieser Stelle den negativen Reziprokwert d.h. +4/3 betragen:

```
Solve[dkreis, Dt[y, x]] /. {x → 6, y → 5}
```

General::ivar : 6 is not a valid variable. ≫

$$\left\{\left\{\text{Dt}[5, 6] \to -\frac{3}{4}\right\}\right\}$$

Es wird deshalb auch die Ableitung der zurzeit noch nicht bekannten Kurvengleichung gebildet. Beim Kommando *Dt* muss dabei angegeben werden, dass a und b Konstanten sind (und daher braucht man sie nicht abzuleiten):

```
dkurve = Dt[kurve, x, Constants → {a, b}]
```

```
Dt[y, x, Constants → {a, b}] == 2 a x
```

```
Solve[2 a x == 4 / 3 /. x → 6, a]
```

$$\left\{\left\{a \to \frac{1}{9}\right\}\right\}$$

Die resultierende Steigung 2 a x wird daraufhin mit 4/3 gleichgesetzt, um a zu berechnen. Mit der Kenntnis von a und den Schnittpunktkoordinaten kann durch einen weiteren *Solve*-Aufruf auch b berechnet werden.

```
Solve[kurve /. {x → 6, y → 5, a → 1 / 9}, b]
```

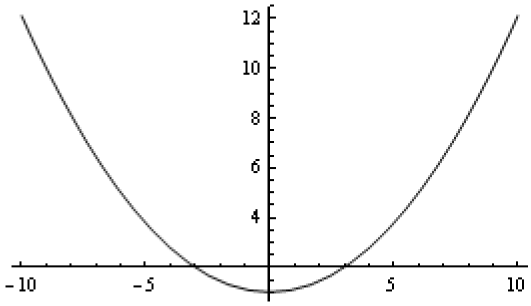
```
{{b → 1}}
```

```
a = 1 / 9; b = 1; kurve
```

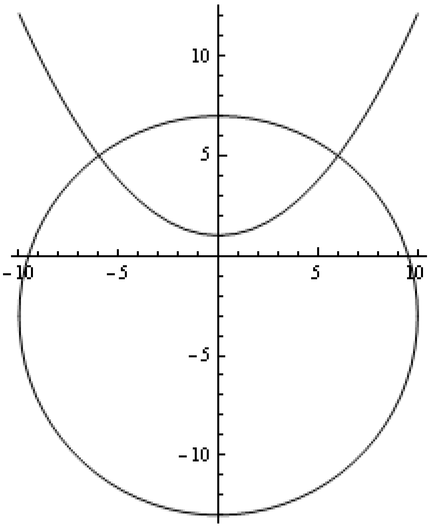
$$y == 1 + \frac{x^2}{9}$$

Nachdem die Gleichung der Kurve angezeigt wurde, wird die gesuchte Kurve dargestellt:

```
gr2 = ImplicitPlot[kurve, {x, -10, 10}]
```



```
Show[gr1, gr2]
```



Das nebenstehende Bild zeigt die beiden Kurven vereint in einem Diagramm. Dazu müssen die Grafiken benannt (in vorliegenden Beispiel gr1, gr2) und mit dem Show-Kommando kombiniert werden.

Lösung 2.Version[114]:

```
Remove["Global`*"]
```

```
kreis = x^2 + y^2 + 6 y - 91 == 0
lsg = Solve[kreis, y];
f1[x_] = y /. lsg[[2]]
```

$-91 + x^2 + 6y + y^2 == 0$

$-3 + \sqrt{100 - x^2}$

```
{6, f1[6]}
```

{6, 5}

```
f2[x_] = y /. lsg[[1]]
```

$-3 - \sqrt{100 - x^2}$

```
{6, f2[6]}
```

{6, -11}

Zuerst bestimmen wir aus der Kreisgleichung einen expliziten Zusammenhang f1[x], auf dessen Graph der Punkt P liegt. Dazu setzen wir wieder *Solve* ein. Die zweite Lösung enthält den gesuchten funktionalen Zusammenhang. Die Koordinaten des Punktes
P ergeben sich durch Einsetzen.

Mit lsg[[n]] wird auf das n-te Element der Liste zugegriffen, die aus den Lösungen des Gleichungssystems besteht.

Die beiden Parameterwerte a und b ergeben sich aus der Bedingung, dass f1[x] und f[x]= ax²+b durch P gehen sollen (erste Bedingung) sowie die Tangenten an die Kurven f1 und f im Punkt P zueinander senkrecht stehen (zweite Bedingung). Da die Ableitung einer Funktion gerade gleich dem Tangens des Tangentenanstiegswinkels ist und α + β = 90° genau für Tan[α] + Tan[β] = -1 gilt, ist diese zweite Bedingung äquivalent zu f_1´[6] f´[6] = -1.

[114] KOFLER, GRÄBE. Mathematica Einführung, Anwendung, Referenz, 2002. S. 102-103

```
f[x_] = a x^2 + b
sys = {f1[6] == f[6], f1'[6] * f'[6] == -1}
```

$b + a x^2$

$\{5 == 36 a + b, -9 a == -1\}$

```
sol = Solve[sys, {a, b}]
```

$\left\{\left\{a \to \frac{1}{9}, b \to 1\right\}\right\}$

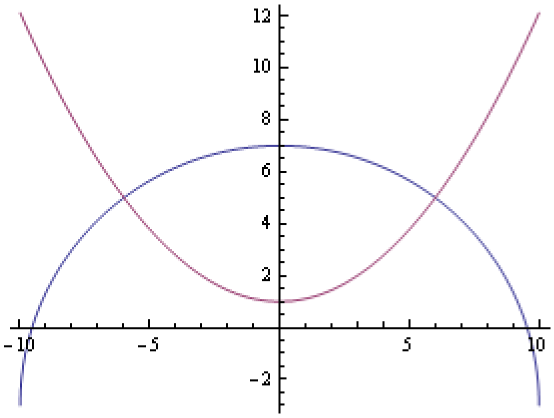
Das Einsetzen der Werte für a und b ergibt die gesuchte Parabel f2.

```
f2[x_] = f[x] /. sol[[1]]
```

$1 + \frac{x^2}{9}$

Ein Bild veranschaulicht wieder die gefundene Lösung:

```
Plot[{f1[x], f2[x]}, {x, -10, 10},
 AspectRatio → Automatic]
```



4.3.6. Kreistangenten

Beispiel: Ermittle die Gleichung der Tangente, die den Kreis k[M(2|-4); 13] im Punkt T(7|y>0) berührt![115]

Lösung:

```
Remove["Global`*"]
```
Alte Definitionen löschen.

```
kreis = (x - 2)^2 + (y + 4)^2 == 13^2
lsg = Solve[kreis, y] /. x → 7
```
Die Kreisgleichung definieren.

$(-2+x)^2 + (4+y)^2 == 169$

```
{{y → -16}, {y → 8}}
```

Den Berührpunkt T hat sowohl der Kreis, als auch die Tangente. Mit *Solve* wird die Kreisgleichung gelöst, wobei die x-Koordinate des Berührpunkts 7 ist und die y-Koordinate gesucht wird. Von den beiden Lösungen nehmen wir die zweite, weil im Beispiel y>0 vorausgesetzt wird. Der Berührpunkt lautet also (7|8).

Die Steigung k der Tangente wird durch implizites Differenzieren der Kreisgleichung ermittelt:

```
dkreis = Dt[kreis, x]
```

```
2 (-2 + x) + 2 (4 + y) Dt[y, x] == 0
```

Mit *Dt* wird das Differential der Kreisgleichung berechnet. Es wird nicht nur nach x, sondern auch nach y abgeleitet.

```
Solve[dkreis, Dt [y, x]] /. {x → 7, y → 8}
General::ivar : 7 is not a valid variable. >>
```

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[8, 7] \to -\frac{5}{12}\right\}\right\}$

Das Ergebnis wird mit *Solve* nach Dt[y,x] aufgelöst, gleichzeitig werden für x und y die Koordinaten des Berührpunktes eingesetzt.

[115] GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7, 2008. S. 173

```
tangentengleichung = y == k x + d
```

```
y == d + k x
```

```
Solve[tangentengleichung /. {x → 7, y → 8, k → -5 / 12}, d]
```

$$\left\{\left\{d \to \frac{131}{12}\right\}\right\}$$

```
k = -5 / 12; d = 131 / 12; tangentengleichung
```

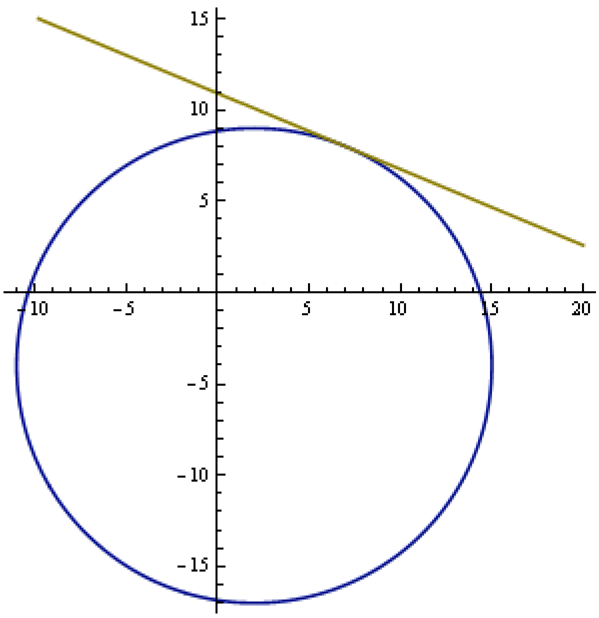
$$y == \frac{131}{12} - \frac{5\,x}{12}$$

Im oberen Bereich wird die Tangentengleichung definiert. Die gefundenen Werte werden in die Gleichung eingesetzt und die Gleichung wird nach d aufgelöst. Die letzte Zeile dient dazu, die Tangentengleichung abzubilden. Man erhält die Zeichnung wieder mit der Hilfe des Kommandos *ImplicitPlot*:

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
```

General::obspkg :
Graphics`ImplicitPlot` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. >>

$$\text{ImplicitPlot}\left[\left\{(x-2)\text{^}2 + (y+4)\text{^}2 == 13\text{^}2,\ y + \frac{5\,x}{12} == \frac{131}{12}\right\},\ \{x, -15, 20\}, \{y, -20, 15\}\right]$$



4.3.7. Weiterführende Beispiele

4.3.7.1. Vektorrechnung, Inkreis im Dreieck[116]

Beispiel: Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-8,0), B(2,2), C(2,-10). Ermitteln Sie die Gleichung des Kreises k durch die Seitenmittelpunkte!

Lösung:

```
Remove["Global`*"]

Remove::rmnsm : There are no symbols matching "Global`*". >>

a = {-8, 0}; b = {2, 2}; c = {2, -10};
m1 = (a + b) / 2

{-3, 1}

m2 = (b + c) / 2

{2, -4}

m3 = (a + c) / 2

{-3, -5}

kreis = (x - mx)^2 + (y - my)^2 == rad^2
```

$(-mx + x)^2 + (-my + y)^2 == rad^2$

```
glsys = {kreis /. ({x, y} → m1 // Thread),
  kreis /. ({x, y} → m2 // Thread),
  kreis /. ({x, y} → m3 // Thread)}
```

$\{(-3 - mx)^2 + (1 - my)^2 == rad^2,$
$(2 - mx)^2 + (-4 - my)^2 == rad^2, (-3 - mx)^2 + (-5 - my)^2 == rad^2\}$

```
Solve[glsys, {mx, my, rad}]
```

$\{\{rad \to -\sqrt{13}, mx \to -1, my \to -2\}, \{rad \to \sqrt{13}, mx \to -1, my \to -2\}\}$

Dieses Beispiel bereitet Mathematica keine Schwierigkeiten. Es werden zuerst die drei Koordinatenpunkte als Listen eingegeben, die Seitenmittelpunkte berechnet und eine Kreisgleichung in allgemeiner Form aufgestellt. Anschließend wird ein Gleichungssystem aus drei Kreisgleichungen gebildet, in die die verschiedenen Seitenmittelpunkte eingesetzt werden.

Das Zusatzkommando *//Thread* ist notwendig, damit die beiden Listenelemente von m1(bzw. m2, m3) separat in x und in y eingesetzt werden.

---
[116] KOFLER. Mathematica, 1992. S. 70

Solve führt bei diesem Gleichungssystem sofort zum korrekten Ergebnis, wobei natürlich nur die erste Lösung mit dem positiven Kreisradius interessant ist. Mit dem untenstehenden Kommando erhält man nur die zweite Lösung:

```
Solve[glsys, {mx, my, rad}][[2]]
```

$\{rad \to \sqrt{13}, mx \to -1, my \to -2\}$

4.3.7.2.Vektorrechnung, Umkreis von einem Dreieck[117]

Beispiel: Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-8 | 0), B(2 | 2), C(2 | -10). Ermitteln Sie die Gleichung des Kreises k durch die Eckpunkte.

Lösung: Der Lösungsweg beginnt damit, dass die Koordinaten der drei Punkte als Mathematica-Listen angeschrieben und in den Variablen A, B und C gespeichert werden. Entgegen den Empfehlungen verwenden wir große Buchstaben als Variablenbezeichnung, was sofort zu Kollisionen im Namensraum mit der Build-in-Funktion C von Mathematica führt.

```
?C
```

C[*i*] is the default form for the *i*th parameter or constant generated in representing the results of various symbolic computations. >>

Um C trotzdem als Variablenbezeichnung zu verwenden, was hier problemlos möglich ist, da wir keine Differenzialgleichungen lösen wollen, soll der Überschreibschutz entfernen. *Unprotect* entfernt das Attribut für die geschützten Symbole.

```
Unprotect[C];
A = {-8, 0}; B = {2, 2}; C = {2, -10};
kreisgleichung = (x - mx)^2 + (y - my)^2 == r^2
```

$(-mx + x)^2 + (-my + y)^2 == r^2$

Der gesuchte Umkreis wird nun als Kreisgleichung mit zu bestimmenden Koordinaten (mx, my) für den Mittelpunkt und zu bestimmenden Radius r angesetzt. Um die drei Unbekannten mx, my und r zu ermitteln, sind drei Gleichungen erforderlich. Diese ergeben sich aus den Bedingungen, dass A, B und C auf dem Kreis liegen sollen. Das folgende Kommando zeigt, wie eine

[117] KOFLER, GRÄBE. Mathematica Einführung, Anwendung, Referenz, 2002. S. 104-105

dieser Gleichungen durch Einsetzen der x- und y-Komponenten eines Punktes aufgestellt werden kann.

```
kreisgleichung /. {x → A[[1]], y → A[[2]]}
```

$(-8-mx)^2 + my^2 == r^2$

Selbstverständlich könnten die beiden anderen Gleichungen entsprechend formuliert werden – aber was wäre, wenn dieser Vorgang nicht für drei, sondern für hundert Punkte durchgeführt werden müsste? Da wäre die manuelle Eingabe der entsprechenden Kommandos viel zu mühsam. Daher zeigen die folgenden Zeilen eine allgemeingültige Lösung: Wir sammeln die Punkte in einer Liste points zusammen und wenden entsprechende Kommandos zur Listenmanipulation an.

Der Zugriff auf die Listenelemente durch *points[[i]][[1]]* wirkt möglicherweise etwas unübersichtlich. *points[[i]]* liefert das i-te Element der Liste points, also beispielsweise B. Dabei handelt es sich abermals um eine Liste, deren erstes Element duch [[1]] angesprochen wird.

```
points = {A, B, C};
gl = Table[kreisgleichung /. {x → points[[i]][[1]], y → points[[i]][[2]]}, {i, 1, 3}]
```

$\{(-8-mx)^2 + my^2 == r^2,\ (2-mx)^2 + (2-my)^2 == r^2,\ (2-mx)^2 + (-10-my)^2 == r^2\}$

Die Lösung dieses Gleichungssystems durch Solve bereitet keine Schwierigkeiten:

```
lsg = Solve[gl]
```

$\{\{r \to -2\sqrt{13},\ my \to -4,\ mx \to -2\},\ \{r \to 2\sqrt{13},\ my \to -4,\ mx \to -2\}\}$

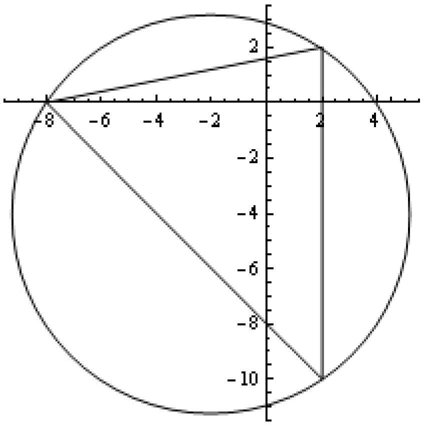
Von den beiden Lösungen ist nur die zweite interessant. (Die erste ist zwar mathematisch korrekt, aber wegen des negativen Kreisradius nicht relevant.)

Die zweite Lösung ergibt:

```
lsg = Solve[gl][[2]]
```

$\{r \to 2\sqrt{13},\ my \to -4,\ mx \to -2\}$

```
dreieck = Line[{A, B, C, A}];
kreis = Circle[{mx, my}, r] /. lsg[[2]];
Show[Graphics[dreieck], Graphics[kreis],
 AspectRatio → 1, Axes → True]
```



Um die Lösung zu visualisieren, wird aus den Punkten A, B, C, A ein Linienzug und aus den Werten mx, my und r ein Kreis gebildet. Diese grafischen Grundelemente werden durch *Graphics* in ein Grafikobjekt verwandelt und durch *Show* angezeigt. Die *AspectRatio*-Option stellt sicher, dass der Kreis als solcher dargestellt und nicht zu einer Ellipse verzerrt wird.

4.3.7.3. Vektorrechnung, Schnitt Kugel-Gerade[118]

Beispiel: Gegeben sind die Kugel k: $x^2 + y^2 + z^2 = 45$ und eine Gerade g durch die Punkte P_1 (9, -15, 18) und P_2 (-3, 15, -6). Gesucht sind:

- Die Schnittpunkte der Geraden g mit der Kugel k.
- Die Gleichung der beiden Tangentialebenen auf die Kugel in den Schnittpunkten und
- Die Gleichung der Schnittgerade der beiden Tangentialebenen.

Lösung[119]: Als erstes wird wieder versucht, das Problem in einige handliche Gleichungen zu fassen. Die Gleichung der Kugel ist ohnedies gegeben, die Geradengleichung in der Form Punkt-Richtungsvektor kann für die drei Komponenten x, y und z ebenfalls leicht aufgestellt werden. Mit *Append* werden alle 4 Gleichungen in einer Liste zusammengefasst.

[118] KOFLER. Mathematica, 1992. S. 71
[119] vgl. KOFLER, GRÄBE. Mathematica Einführung, Anwendung, Referenz, 2002. S. 106-107

```
Remove["Global`*"]

kugel = x^2 + y^2 + z^2 == 45;
gerade = {x == 9 - 12 t, y == -15 + 30 t, z == 18 - 24 t}
```

$\{x == 9 - 12\,t,\ y == -15 + 30\,t,\ z == 18 - 24\,t\}$

```
gleichungen = Append[gerade, kugel]
```

$\{x == 9 - 12\,t,\ y == -15 + 30\,t,\ z == 18 - 24\,t,\ x^2 + y^2 + z^2 == 45\}$

Gesucht sind diejenigen Werte t, für die *gleichungen* eine Lösung hat. Wir finden sie wieder mit dem *Solve*-Kommando.

```
lsg = Solve[gleichungen, {x, y, z}]
```

{}

```
lsg = Solve[gleichungen, t]
```

{}

```
lsg = Solve[gleichungen, {x, y, z, t}]
```

$\left\{\left\{t \to \frac{1}{2},\ x \to 3,\ y \to 0,\ z \to 6\right\},\ \left\{t \to \frac{13}{18},\ x \to \frac{1}{3},\ y \to \frac{20}{3},\ z \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$

Wenn *Solve* zur Lösung von Gleichungssystemen mit mehreren Variablen verwendet wird, ist Vorsicht geboten: Entweder werden im zweiten Parameter alle Variablen als Liste angegeben (siehe oben), oder die restlichen Variablen werden im dritten Parameter angeschrieben und dann von *Solve* eliminiert, also:

```
lsg = Solve[gleichungen, {x, y, z}, t]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{3},\ y \to \frac{20}{3},\ z \to \frac{2}{3}\right\},\ \{x \to 3,\ y \to 0,\ z \to 6\}\right\}$

Die beiden Tangentialebenen werden in der Hesse`schen Normalform (HNF) formuliert, d.h. durch ihre Normalvektoren. Da die Kugel im Koordinatenursprung liegt, sind diese Normalvektoren mit den Ortsvektoren zu den beiden Schnittpunkten ident.

```
n1 = {x, y, z} /. lsg[[1]]
```

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{20}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

```
n2 = {x, y, z} /. lsg[[2]]
```

{3, 0, 6}

```
e1 = Simplify[n1 . ({x, y, z} - n1)]
```

$$\frac{1}{3}(-135 + x + 20 y + 2 z)$$

```
e2 = Simplify[n2 . ({x, y, z} - n2)]
```

$$3(-15 + x + 2 z)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird in Mathematica mit einem Dezimalpunkt „ .“ ausgedrückt. Mit Sqrt [n1 . n1] wird der Betrag (die Länge) des Vektors n1 berechnet.

Die Punkte auf der Schnittgeraden erhalten wir als gemeinsame Lösungen der beiden Ebenengleichungen:

```
g = Solve[{e1, e2} == 0, {x, y}][[1]]
```

$$\{x \to 15 - 2 z, y \to 6\}$$

Die Punkt-Richtungsgleichung der Schnittgeraden lautet also:

(15, 6, 0) + z (-2, 0, 1).

Um die Kugel und deren Tangentialebenen zeichnen zu können, werden die Gleichungen umgeformt:

```
Solve[ x^2 + y^2 + z^2 == 45, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\sqrt{45 - x^2 - y^2}\right\}, \left\{z \to \sqrt{45 - x^2 - y^2}\right\}\right\}$$

$$\text{Solve}\left[\frac{1}{3}(-135 + x + 20 y + 2 z) == 0, z\right]$$

$$\left\{\left\{z \to \frac{1}{2}(135 - x - 20 y)\right\}\right\}$$

```
Solve[3 (-15 + x + 2 z) == 0, z]
```

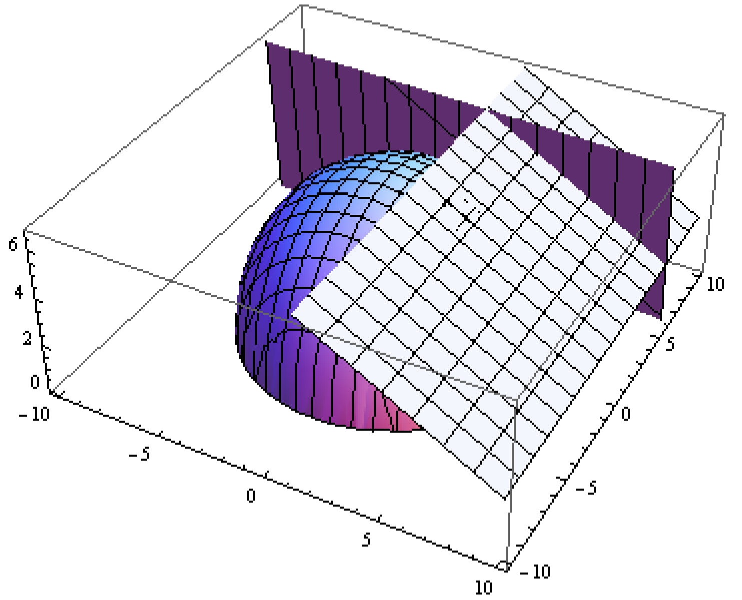
$$\left\{\left\{z \to \frac{15 - x}{2}\right\}\right\}$$

In[2]:= $\texttt{Show}\Big[\texttt{Plot3D}\Big[\sqrt{45 - x^2 - y^2}\ , \{x, -10, 10\}, \{y, -10, 10\}\Big],$

$\texttt{Plot3D}\Big[\frac{1}{2}\,(135 - x - 20\,y), \{x, -10, 10\}, \{y, -10, 10\}\Big],$

$\texttt{Plot3D}\Big[\frac{15 - x}{2}, \{x, -10, 10\}, \{y, -10, 10\}\Big]\Big]$

Out[2]=

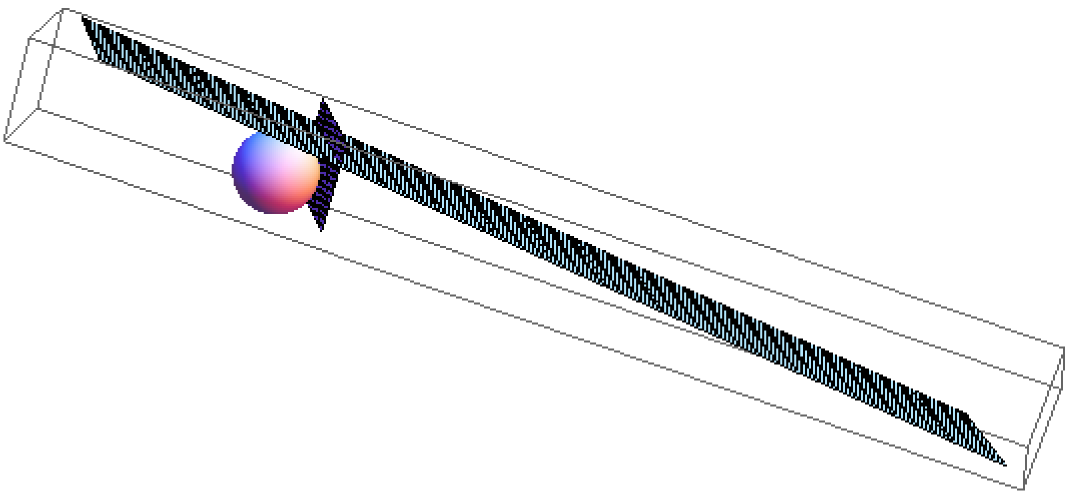


Die obige Zeichnung zeigt nur die obere Halbkugel ($\forall z > 0$). Um eine genauere Zeichnung zu zeichnen, wird die Kombination der Kommandos *Show, Graphics3D* und *Plot3D* verwendet, wobei die Kugel durch den Mittelpunkt (0, 0, 0) und Radius $\sqrt{45}$ definiert wird:

$\texttt{Show}\Big[\texttt{Graphics3D[Sphere[\{0, 0, 0\}, Sqrt[45]]],}$

$\texttt{Plot3D}\Big[\frac{1}{2}\,(135 - x - 20\,y), \{x, -5, 10\}, \{y, -5, 10\}\Big],$

$\texttt{Plot3D}\Big[\frac{15 - x}{2}, \{x, -5, 10\}, \{y, -5, 10\}\Big]\Big]$



5.Zusammenfassung

Die Software Mathematica ist eines der mächtigen Werkzeuge im Mathematikunterricht und ein wichtiges Computeralgebra-System wie etwa Derive, Maple und MuPAD. Mathematica wurde erst im Jahre 1988 von der Firma Wolfram Research veröffentlicht. Das Computeralgebra-Programm Mathematica enthält unterschiedliche Aspekte mit entscheidenden Bedeutungen. Diese Aspekte sind:

- Mathematica als numerische Rechenmaschine
- Mathematica als Werkzeug für symbolische Mathematik
- Mathematica als Visualisierungswerkzeuge für mathematische Objekte,
- Mathematica als Programmiersprache und
- Mathematica als mathematisches Dokumentenverarbeitungssystem.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit soll aufgezeigt werden, wie man Mathematica im Mathematikunterricht anhand des Themas „Schnittpunkte verschiedener Kurven“ einsetzen kann.

Diese Arbeit gliedert sich in vier Abschnitte:

1) Zu Beginn dieser Arbeit wird erläutert, warum Mathematik weltweit in jeder Stufe der schulischen Ausbildung eine wichtige Rolle spielt und warum der EDV-Einsatz im Lehrplan gefordert wird.

2) Nach dieser Einleitung werden zuerst die Möglichkeiten eines Computereinsatzes im Mathematikunterricht verdeutlicht. Die Computeralgebra-Systeme haben eine zentrale Stellung im technologiegestützten Mathematikunterricht. Der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht verursacht eine starke Veränderung in der Unterrichtskonzeption und zwingt neue Methoden einzusetzen.

   Danach erfolgt eine Einführung in das Computer-Algebra-System Mathematica und es werden die Möglichkeiten des Einsatzes von Mathematica dargelegt, wobei die Vor- und Nachteile dieses Systems behandelt werden.

3) Mathematische Hintergründe zu „Schnittpunkte verschiedener Kurven" werden in Kapitel 3 thematisiert. Die Berechnung von Schnittpunkten ist eine typische Aufgabenstellung der Analytischen Geometrie. Da der Schnitt- oder Berührungspunkt von zwei Kurven die gemeinsame Lösung der Gleichungen dieser beiden Kurven ist, benötigen die Schüler und Schülerinnen Kenntnisse über Gleichungssysteme. Auf diesem Grund werden grundlegende Verfahren (Lineare Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen, Quadratische und auch Analytische Gleichungen (Kreis-, Ellipse-, Parabel- und Hyperbelgleichung)) behandelt. Es werden in diesem Kapitel auch die Schnitt- und Berühraufgaben behandelt.

4) In Kapitel 4 werden mathematische Aufgaben für „Schnittpunkte verschiedener Kurven" mit *Mathematica* berechnet und sie so dargestellt, dass sie direkt in den Mathematikunterricht übernommen werden können. Aus den Lehrbüchern ausgewählte Beispiele werden rechnerisch bzw. graphisch mit Hilfe der neuen Version 7.0 von Mathematica gelöst. Dabei sollen alle Aufgabenstellungen und Materialien nur einen Vorschlag zur Vorgangsweise bei der Behandlung des Themas mit dem Programm Mathematica darstellen.

6.Literaturverzeichnis

AICHINGER Erhard, MAYR Peter. Unterlagen zur Vorlesung Algebra, 2007.

ASPETSBERGER K. Bericht über einen Schulversuch. In: TI-Nachrichten 2, 1995, S. 8-9

BEHRENDS Ehrhard. Mathematik. September 2005.

BENKER Hans. Mathematik mit dem PC. Vieweg-Teubner Verlag; 1994

BRINKMANN Rudolf. Schnittpunkt von Parabel und Parabel. Stand Februar 2009.

CYRMON Werner. Algebraprogramme und Tabellenkalkulation im Unterricht. Wien: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, 1993.

DANGL Martin, BINGEL Markus. Der Einsatz von Mathematica im Mathematikunterricht der AHS- Oberstufe. Stand Juli 2006.

DENNINGER Mone. CiMU Analytische Geometrie, 2005. Url: http://mone.crillovich-cocoglia.at/cimu/uz/Klasse7/AnalytischeGeometrie.pdf [24.04.2010, 16.14 Uhr]

DÖRFLER Willi. Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften, Band 21 (S.51–75) Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991, ISBN 3-209-01452-3

ERLACHER Evelina. Kegelschnitte, 2007. Url: http://www.mathe-online.at/materialien/evelina/files/workshops07_kegelschnitte.pdf

FUCHS Karl Josef. Computer im Mathematikunterricht – Erfahrungen und Gedanken. Lehrerfortbildungstagung der ÖMG, Salzburg: 1996.

FUCHS Karl Josef: Computeralgebra-Systeme im Unterricht- Einige konkrete Beispiele. In: Didaktik der Mathematik 3, 1995, S. 228-238

FUCHS Karl Josef: Erfahrungen und Gedanken zu Computern im Unterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 9, 1988, H. 2/3, S. 247-256

GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 5. Wien: öbv; 2004

GÖTZ, REICHEL, MÜLLER, HANISCH. Mathematik Lehrbuch 7. Wien: öbv; 2008

HEUGL Helmut, KLINGER Walter, LECHNER Josef. Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Deutschland: Addison-Wesley Verlag; 1996.

HEUGL Helmut. Computer-Algebra-Systeme im Mathematikunterricht der Allgemeinbildenden Höheren Schulen in Österreich. MU 41, H. 4, 1995.
KAMMLEITHNER Karin Maria. Taschenrechnereinsatz im Mathematikunterricht, 1991. Diplomarbeit der Universität Wien.
KOEPF Wolfram. Eine Vorstellung von MATHEMATICA und Bemerkungen zur Technik des Differenzierens. In: Didaktik der Mathematik 21, 1993, S. 125-139
KOFLER Michael, GRÄBE Hans-Gert. Mathematica Einführung, Anwendung, Referenz. Deutschland: Addison-Wesley Verlag; 2002
KOFLER Michael. Mathematica (Einführung und Leitfaden für den Praktiker). Deutschland: Addison-Wesley Verlag; 1992
LEHRPLAN MATHEMATIK AHS OBERSTUFE. Url: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf [12.10.2010, 20.39 Uhr]
MALLE Günther, RAMHARTER Esther, ULOVEC Andreas, KANDL Susanne. Mathematik verstehen 5. Wien: Österreichisches Bundesverlag, 2005.
MÜLLER Helgrid. Ellipsenkonstruktionen S.3
PAPULA Lothar. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1. Verlag Vieweg+Teubner, 2009.
POSTEL Helmut, KIRSCH Arnold, BLUM Werner. Mathematik lehren und lernen. Hannover: Festschrift für Heinz Griesel, Schroedel Schulbuchverlag, 1991.
PROJEKTGRUPPE JAHR DER MATHEMATIK. Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.). Mathematik als Wissenschaft. Url: http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/b__Downloads/06__Presse/Dossier__Wissenschaft.pdf [05.01.2010, 23.00 Uhr]
PROJEKTGRUPPE JAHR DER MATHEMATIK. Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.). Was Mathematik bewegt? Url: http://www.jahr-der-mathematik.de/coremedia/generator/wj2008/de/02__Mathematik__alles__was__z_C3_A4hlt/01__Was_20Mathematik_20bewegt.html [13.01.2010, 12.14 Uhr]
REICHEL Hans Christian, LITSCHAUER Dieter, GROSS Herbert. Lehrbuch der Mathematik 1. Wien: Verlag öbv & hpt, 1999.

SCHILLY Harald. Gleichungen & Ungleichungen, Gleichungssysteme, 2006.
SCHREINER. Von der linearen Gleichung bzw. Ungleichung zur linearen Optimierung im Mathematikunterricht unter Einsatz des Computers. Diplomarbeit der Universität Wien, 2009.
STOUTEMYER D.R. A radical proposal for computer algebra in education. In: Sigsam Bulletin vol. 18, no.4, 1984. S. 40-53.
TOMASITZ Dean. Zur Geschichte der Kegelschnitte als Thema im Mathematikunterricht, 2008. Diplomarbeit der Universität Wien. S. 125-126
Url: http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/ellipse_definition.html [20.04.2010; 14.17 Uhr]
Url: http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/hyperbel_definition.html [20.04.2010, 14.45 Uhr]
Url: http://did.mathematik.uni-halle.de/lern/parabel_definition.html [20.04.2010, 14.52 Uhr]
Url: http://haftendorn.uni-lueneburg.de/computer/cas/cas.htm#mathematica [21.03.2010, 21.45 Uhr]
Url: http://lehrer.schule.at/helgrid_mueller/darste/grundlagen/022-ellkonst.pdf [21.04.2010; 14.16 Uhr]
Url: http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/gr_fkt_01_08.htm
Url: http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/curricula/warumstudium.html [05.01.2010, 21.10 Uhr]
Url: http://www.mathematik.de/ger/information/wasistmathematik/wasistmathematik.html [05.01.2010, 21.42 Uhr]
Url: http://www2.mediamanual.at/pdf/workshop/mathematica_Dangl_Binder.pdf
Url:http://mathenexus.zum.de/html/analysis/funktionen_lineare/weiterfuehrendes/LinFkt_SchneideGeraden.htm [24.12.2009, 13.14 Uhr]
WEIGAND Hans-Georg. MU 5, Der Funktionsbegriff im Algebraunterricht, chapter Der Beitrag des Computers zur Entwicklung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe I. Friedrich-Verlag; 1994.
WERNER Bodo. Mathematik studieren. Stand Mai 2007.
WOLF Judith Eva Maria. Wachstumsmodelle mit GeoGebra 3.2, 2009. Diplomarbeit der Universität Wien.

WOLFRAM Stephen. Mathematica Ein System für Mathematik auf dem Computer. Deutschland: Addison-Wesley Verlag, 1992.
Zentrum für Astronomie, Universität Heidelberg. Kompaktkurs Mathematica. Url: http://www.ari.uni-heidelberg.de/lehre/WS06/IAA06/Exercises/mathematica-kompaktkurs.pdf [13.03.2010, 16:50 Uhr]
ZWERENZ Cordula. Zugänge zu den Kegelschnitten und ihre fachdidaktische Analyse, 2000. Diplomarbeit der Universität Wien.

7.Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name, Vorname	: Dosdogru, Merve
Geburtsort	: Kahramanmaras / Türkei
Geburtsdatum	: 01.08.1981
Geschlecht	: weiblich
Familienstand	: Ledig
Religion	: Islam

Schulausbildung:

1987-1992	: Volkschule (Kahramanmaras / Türkei)
1992-1999	: Imam Hatip Oberstufe (Kahramanmaras / Türkei)
Sept. 1999 - Jun 2001	: Mathematikstudium an der Marmara Universität (Vorzeitige Beendigung)
Sept. 2001 - Jun 2002	: Deutschkurs an der VWU
Seit Sept. 2002	: Studium Lehramt UF Mathematik, UF Informatik und Informatikmanagement, Universität Wien

Unterrichtserfahrung:

WS 2008	: Fachbezogenes Praktikum im Fach Mathematik
WS 2009	: Fachbezogenes Praktikum im Fach Informatik

Wien, 2010