DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Vernetzte Systeme in der AHS-Oberstufe

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer.nat.)

Verfasserin / Verfasser:	Sandra Maria Reiner
Matrikel-Nummer:	0403707
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	A 190 406 884 (UF Mathematik, UF Informatik)
Betreuerin / Betreuer:	MMag. Dr. Andreas Ulovec

Wien, im Mai 2010

Danksagung

Ich möchte mich rechtherzlich bei meinen Betreuer Herrn MMag. Dr. Andreas Ulovec für die Betreuung während der Diplomarbeit bedanken. Durch seine Anregungen und Unterstützung konnte ich ein interessantes Thema für mich entdecken.

Ebenfalls sehr verbunden bin ich meinem Freund. Er hat mich täglich aufs Neue motiviert und durch Gespräche in meinen Tun bestätigt.

Den größten Dank möchte ich an meine Eltern richten. Sie haben mich stets unterstützt und mir mein Studium ermöglicht.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Meine Diplomarbeit orientiert sich am Zusammenspiel von den zwei Unterrichtsfächern Mathematik und Informatik. Ich finde es sehr interessant zusehen wie man diese miteinander verbinden kann.

Im Laufe meines Studiums habe ich didaktische Lehrveranstaltungen, welche sich genau mit dieser Vereinigung beschäftigen besonders interessant gefunden. Als Herr MMAg. Dr. Ulovec mir das Thema in einer Besprechung vorschlug, war ich sofort begeistert. Die Systeme hatten mich Wort wörtlich sofort in ihr Netz verstrickt.

Ich habe mich entschieden dieses Thema auf die achte Klasse AHS zu beziehen. In dieser Klasse sollten SchülerInnen Kenntnisse über Differenzen- und Differenzialgleichungen besitzen.

Ich beschäftige mich zuerst mit dem Begriff des Systems. An Hand von Beispielen möchte ich zeigen, was vernetzte Systeme sind und dieses mittels verschiedener Aspekte untersuchen.

Zuletzt werfe ich einen Blick auf die vier Wachstumsarten und zeige wie ein Game of Life aussehen kann.

Lehrplan

Es stellt sich die Frage wann und wo kommen vernetzte Systeme in der Schule vor? In welchen Schulfächern trifft man auf sie? Nur durch die Beantwortung dieser Fragen stellt sich die Legitimation in der Schule für dieses Gebiet.

Ich habe die Lehrpläne der AHS Oberstufe für die Fächer Mathematik, Physik, Biologie, Geographie und Informatik untersucht.

Lehrplan Mathematik 8. Klasse AH

Im Lehrplan der achten Klasse AHS findet sich unter der Überschrift „Dynamische Prozesse“ folgender Absatz:

„-Beschreiben von Systemen mit Hilfe von Wirkungsdiagrammen, Flussdiagrammen, Differenzengleichungen oder Differentialgleichungen
-Untersuchen des dynamischen Verhaltens von Systemen“[1]

Im Laufe der Diplomarbeit widme ich mich den zwei Diagrammarten und sowohl der Differenzengleichung als auch der Differentialgleichung. Auch wird der Begriff System definiert und untersucht. Das Verhalten der Systeme wird qualitativ und quantitativ unter die Lupe genommen. Eine genaue Definition dieser Begriffe und welche Punkte darunter zu verstehen sind, wird in einem späteren Kapitel behandelt.

Lehrplan Physik 5. & 6. Klasse AHS

Es benötigt nicht nur die Mathematik um Berechnungen und Diagramme zu erstellen, sondern auch Wissensgebiete um Themen zu finden, die aufbereitet werden können. Vernetzte Systeme befinden sich in der Physik in diesem Abschnitt:

[1] Lehrplan Oberstufe AHS; ; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf Stand 5. März 2010

„-mit Hilfe der Bewegungslehre (Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung: Energieumsatz und Kräfte, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Impuls und Drehimpuls, Modell der eindimensionalen harmonischen Schwingung) Verständnis für Vorgänge, beispielsweise im Verkehrsgeschehen oder bei den Planetenbewegungen, entwickeln.“[2]

Als Beispiel kann die Bewegungslehre oder Schwingungen angesehen werden. Es kann der Fall eines Steines beobachtet werden und welche Kräfte darauf wirken.

Lehrplan Biologie

In der fünften und in der sechsten Klasse finden sich Anknüpfungspunkte für vernetzte Systeme. Diese dienen wie im Unterrichtsfach Physik als Grundsteine für Beispiele.

Fünfte Klasse:

„Biodiversität
.. -am Beispiel Tiere: An Hand ausgewählter Beispiele …und deren Ausbildung in unterschiedlichen Organisationsebenen und Lebensräumen erarbeiten“[3]

Hier findet sich zum Beispiel das Thema „Räuber-Beute-Modell“ wieder, das ich später mittels Game of Life darstellen möchte. Das heißt, ich möchte aus einem einfachen Modell eine Simulation erstellen. Diese wird interpretiert und es ist möglich für Probleme Lösungsansätze zu finden.

---

[2] Lehrplan AHS Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11862/lp_neu_ahs_10.pdf Stand 5. März 2010

[3] Lehrplan AHS Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11885/lp_neu_ahs_30.pdf Stand 5. März 2010

Sechste Klasse

„Ökologie und Umwelt
Vertiefung und Erweiterung des Wissens über Ökosysteme (Stoff- und Energiekreisläufe, Umweltfaktoren, Sukzession, Konvergenzerscheinungen); Umweltprobleme und deren Ursachen am Beispiel Klimawandel diskutieren und Lösungsmöglichkeiten“[3]

Unter diesem Punkt kann man zum Beispiel Wachstum bei unterschiedlichen Umweltfaktoren finden. Diese können Vergiftung als negativer oder beispielsweise Regen als positiver Faktor sein.

Lehrplan Geographie

Unter all diesen Punkten verstecken sich vernetzte Systeme, welche die SchülerInnen interpretieren können.

5. und 6. Klasse AHS

„Die soziale, ökonomisch und ökologisch begrenzte Welt…Gliederungsprinzipien der Erde nach unterschiedlichen Sichtweisen ..Landschaftsökologische Zonen der Erde …Bevölkerung und Gesellschaft… Die Menschen und ihre wirtschaftlichen Bedürfnisse… Nutzungskonflikte an regionalen Beispielen“ [4]

7. Klasse

„Österreich – Raum – Gesellschaft – Wirtschaft..“[5]

8. Klasse

„Lokal –regional – global: Vernetzungen – Wahrnehmungen – Konflikte..“[6]

---

[4] Lehrplan AHS Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11858/lp_neu_ahs_06.pdf Stand 3. März 2010

[5] Siehe 4

Lehrplan Informatik

5. Klasse AHS

Systeme können mittels der Informatik dargestellt und analysiert werden. Dies findet sich im Lehrplan der fünften Klasse AHS wieder.

„Verfahren zur Problemlösung
Zyklisches Phasenmodell der Problemlösung: Definitionsphase, Entwurfsphase, Implementationsphase, Dokumentationsphase; Verbesserung gefundener Lösungen. Exemplarische Anwendung auf praktische Problemstellungen aus möglichst vielen persönlichen, beruflichen und gesellschaftlichen Lebensbereichen sowie aus verschiedenen Unterrichtsgegenständen (in Form von Beispielen)…
…Einführung in ein Betriebssystem
Arbeiten mit Anwendersoftware, insbesondere Textverarbeitung, Dateiverwaltung, Tabellenkalkulation.“[7]

Systeme können Probleme sein, die mittels der Analyse gelöst werden. Es ist möglich sie zu definieren, Diagramme zu erstellen, sie mittels Programmen zu implementieren und zu dokumentieren und danach einen bestmöglichen Weg zur Verbesserung zu finden.
Der zweitenzitierte Abschnitt gibt das Werkzeug für die Darstellungen der Systeme dar. Diese werden auch im praktischen Abschnitt der Diplomarbeit zu finden sein.

Fazit

Die Biologie, die Geographie, die Physik, die Informatik und die Mathematik sind in dieses Themengebiet eingeflochten. Die ersten Drei bieten uns Themengebiete, in denen vernetzte Systeme zu finden sind. Die Informatik ist ein Werkzeug um sie visuell darzustellen. Mit der Mathematik können Berechnungen angestellt werden.

---

[6] Siehe 4

[7] Lehrplan AHS Oberstufe; http://www.bmukk.gv.at/medienpool/7037/Informatik_Oberstufe.pdf Stand 3. März 2010;

Wenn all diese Gegenstände ineinander greifen, ist es ein spannendes Thema für den Unterricht. Es lässt sich fächerübergreifend besprechen und ausarbeiten. Ich habe versucht Beispiele aus all diesen Fächern zu finden.

Definitionen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, wo wir die vernetzten Systeme im Lehrplan antreffen. Es stellt sich die Frage: Was sind sie eigentlich? Wo kommen sie vor und warum sollen SchülerInnen über sie Kenntnis erlangen? Was ist ein System?

Was sind Systeme?

Bei dem Themengebiet vernetzte Systeme handelt es sich in erster Linie um Systeme. Hierbei stellt sich die Frage, was diese sind und wie man sie definieren kann. Für H. Bossel müssen sie gewisse Merkmale aufweisen.

- Es sollte ein ersichtlicher Systemzweck existieren.
- Die Zusammensetzung aus Systemelementen und Wirkungsverknüpfungen muss gegeben sein.
- Die Systemidentität ist zu gewährleisten. Es darf zu keiner Teilung kommen.[8]

Als Beispiel eines Systems kann man eine Hose sehen. Sie erfüllt einen Systemzweck (=Wärme) und besteht aus Systemelementen (=Hosenbein, Knöpfe, Reißverschluss und Hosenbund). Beim Entfernen von Stoffteilen und Reißverschluss würde sie die Identität aufgeben und die Hose könnte ihren Besitzer nicht mehr wärmen.

J. W. Forrester begründet seinen Systembegriff auf „eine Anzahl von miteinander in Beziehung stehenden Teilen, die zu einem gemeinsamen Zweck miteinander operieren.“[9] Darunter versteht er sowohl Objekte als auch Menschen,[10]
wie zum Beispiel eine Familie. Diese würde auch die drei Punkte von Bossel erfüllen. Der Zweck einer Familie könnte Schutz und das Überleben sein. Die Elemente sind

[8] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 35

[9] Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 9

[10] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 9

die verschiedenen Mitglieder mit ihren unterschiedlichen Rollen und Aufgaben. Durch eine Teilung kann es zum Kollaps des sozialen Gebildes kommen.

In dieser Arbeit werde ich die Definition von Bossel verwenden.

Hier ein illustriertes System:

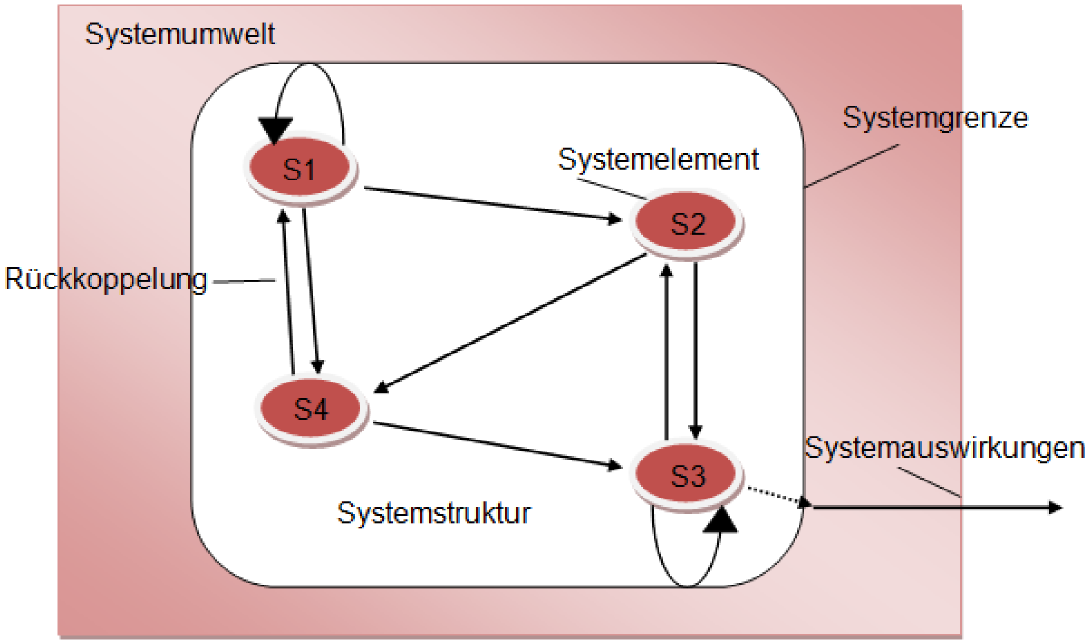


Abbildung 1: Ein System

Dieses System besteht aus verschiedenen Komponenten: Systemumwelt, Rückkoppelung, Systemgrenze, Systemauswirkungen, Systemelemente und Systemstruktur.

Unter Systemumwelt versteht man alles, was außerhalb des definierten Systems liegt bzw. alles, was außerhalb der Systemgrenze liegt. Es ist jedoch manchmal schwierig diese Grenze genau zu finden. [11] Die Grenze kann wie ein Sieb gesehen werden. Durch dieses kann es zum Austausch mit gewissen Elementen außerhalb des Systems kommen.[12]

---

[11] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 37

[12] Vgl. Bossel; Modellbildung und Simulation

Als Beispiel wäre die Systemgrenze im sozialen Bereich einer Familie anzusehen. Es reicht nicht einfach den Aufbau auf die Familienmitglieder zu beschränken. Andere Faktoren wie der Arbeitsplatz oder die Ausbildung der Kinder spielen ebenfalls eine Rolle.

Nach Bossel gibt es drei Kriterien, die diese Suche erleichtern sollen:

- „..wo die Kopplung zur Umgebung sehr viel schwächer ist als die Binnenkopplung im System.“[13]
  = Schwache Koppelungen finden

- „..wo vorhandene Umweltverkopplungen nicht funktionsrelevant sind“[14]
  = Systemelemente entfernen, ohne welche das System auch funktioniert

- „..wo Umwelteinflüsse auf das System nicht durch das System selbst bestimmt oder durch Rückkoppelung von Systemauswirkung verändert werden können.“ [15]
  = Außeneinwirkungen, die nicht vom System selbst beeinflussbar sind aus dem System ausschließen[16]

Aktionen im System sind nicht unbemerkt von der Umwelt. Diese Tätigkeiten werden Systemauswirkungen genannt. [17]

Die Systemstruktur kennzeichnet den Aufbau eines Systems. Das heißt, sie gibt an, aus wie vielen Elementen ein System besteht, ob es Rückkoppelungen gibt und wo die Grenze gezogen wird.[18]

---

[13] Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 38

[14] Siehe 13

[15] Siehe 13

[16] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 38

[17] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 36

[18] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 36

Eine Rückkoppelung bringt, wie es die Abbildung 1 zeigt, eine Änderung des Systems mit sich. Hierbei nimmt eine Zustandsgröße Einfluss auf eine Zustandsveränderung. Diese Veränderungen sind nur sehr schwer vorhersehbar.[19]

Das System kommuniziert durch sogenannte Verhaltensgrößen mit seiner Umgebung. Bei einer Änderung des Systemzustands ohne Außenwirkung kommt es zu Zustandsänderungen. Aus diesen kann ein Beobachter den Zustand des gesamten Systems ablesen.[20]

Ein wichtiger Begriff ist die Dimensionalität des Systems. Diese beschreibt die Anzahl der Differential- oder Differenzengleichungen, die nötig sind um die Zustandsänderung zu beschreiben.[21]

Offene vs. geschlossene Systeme

Eine weitere Unterscheidungsform von Systemen ist die Frage der Art. Diese gibt Anhaltspunkt über das Verhalten.

Nach Forrester können Systeme in offene und geschlossene eingeteilt werden. Beim offenen System gibt es Inputs und Outputs. Die Outputs geben dem System Feedback auf Inputs, haben jedoch keinerlei Auswirkungen auf diese. Es hat somit kein Gedächtnis und ändert sein Verhalten nie.[22]

Als offenes System kann ein Schallplattenspieler angesehen werden, wenn er eine Schallplatte mit einem Riss abspielt. Obwohl nur mehr ein Quietschen zu hören ist, wird er erst aufhören, wenn er auf der letzten Rille angelangt ist.

---

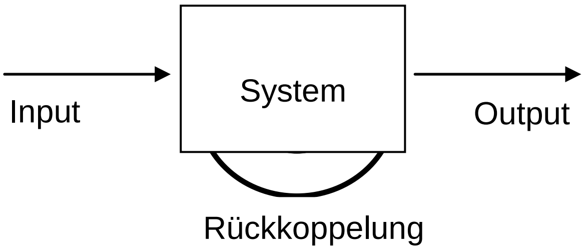
[19] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 42

[20] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 38-39

[21] Vgl. Bossel; Systeme, Dynamik, Simulation; S. 39

[22] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 15

Geschlossene Systeme haben ein Gedächtnis. Sie reagieren auf vergangene Handlungen. Sie merken sich die letzten Handlungen und ziehen durch Rückkoppelungen Konsequenzen daraus.[23]



Sie lassen sich in zwei Arten kategorisieren, in das sogenannte negative und das positive Feedbacksystem. Das erste fungiert zielsuchend und führt zu Instabilität. Aus diesem Grund wenden wir uns dem positiven Feedbacksystem zu. Es behandelt die Themen Wachstum und Rückgang. Mit den Wachstumsartenwerde ich mich in einem späteren Kapitel mittels Beispiele beschäftigen.[24]

Ein geschlossenes System wäre ein CD-Player. Falls er Schäden an einer CD erkennt, stoppt er das Abspielen. Er zieht somit Konsequenzen.

Was sind vernetzte Systeme?

Eine allgemeine Definition für den Begriff gibt es nicht. Man kann darunter sehr viel verstehen, denn die vernetzten Systeme umgeben uns jeden Tag ob im sozialen Leben oder in der Berufswelt. Viele Teilelemente stehen miteinander in Verbindung und arbeiten zusammen. Als Beispiel kann man die Natur wählen. In ihr gibt es verschiedene Tier- und Pflanzenarten, die zusammen einen Lebensraum bilden.[25]
Nun eine Skizze eines vernetzten Systems:

---

[23] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 15

[24] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 15

[25] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S 9

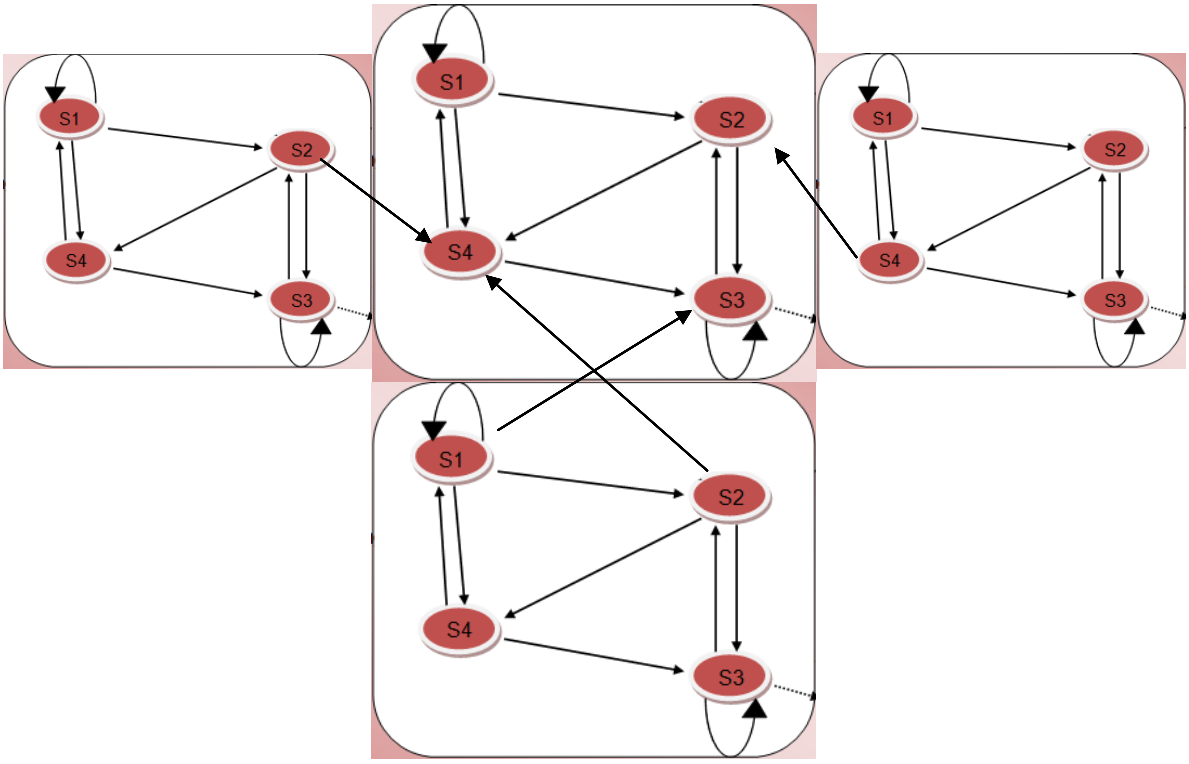


Abbildung 2: Vernetztes System

Wo befinden sich vernetzte Systeme im Alltag?

Durch meine Erfahrung mit SchülerInnen habe ich gelernt, dass ein Thema erst richtig interessant wird, wenn man den Grund erfährt, warum man es erlernt. Dies empfinde ich im Mathematikunterricht als besonders wichtig. SchülerInnen sollen für das Leben lernen und nicht für die Schule

Das Betrachten von Systemen und auch von vernetzten Systemen im speziellen kann viele Vorteile bringen. Ein Beispiel ist die Populationsentwicklung eines Waldes. Für Jäger ist es wichtig zu wissen wie viel Wild in ihrem Gebiet ist. Diese Anzahl stellt sich aus den natürlichen Feinden der Tiere, aus Klimafaktoren und aus der Infrastruktur zusammen. Alle diese Faktoren lassen sich mittels qualitativen und quantitativen Auswertungsarten darstellen.

Meine Behauptung im vorigen Kapitel war, dass diese Art von Systemen uns immer und überall begleiten. Doch hier stellt sich die Frage, wann und wo wir auf sie treffen?

Sehen wir uns dazu Beispiele an:

Nehmen wir an, dass die Schule ein vernetztes System ist. Dazu muss ich im ersten Schritt zeigen, dass sie ein System ist.
Der Systemzweck ist die Bildung der SchülerInnen. Die Schule besteht aus mehreren Systemelementen wie LehrerInnen, Kinder, Noten, Eltern, Angestellte der Schule und so weiter. Als Wirkungsverknüpfungen kann man das Lernen sehen oder die soziale Interaktion, die sowohl im Unterricht als auch im sonstigen Schulalltag stattfindet. Die Systemidentität könnte heißen, ohne Lehrer kann das Kind nicht das benötigte Wissen erlangen. Die Systemgrenze ist das Leben aller Systemelemente im Bezug auf den Schulalltag.
Somit wäre gezeigt, dass die Schule ein System ist.

Nur - warum ist sie auch ein vernetztes System? Es gibt In- und Outputs an andere Systeme, wie zum Beispiel an die Familien der Kinder und auch an die der LehrerInnen weiter. Es ist mit diesen anderen Systemen verknüpft und reagiert auf sie, genau wie die anderen Systeme auf die Schule reagieren.

Als weiteres Beispiel kann man den Straßenverkehr sehen:
Sein Zweck ist die Fortbewegung, mit den Elementen Busse, LKWs, PKWs und deren Fahrer. Als Verknüpfung kann das Fahren angesehen werden. Die Identität ist ebenfalls gegeben.
Die In- und Outputs wären die Benutzung des Straßenverkehrs oder die Fahrtkosten.

Der Begriff der vernetzten Systeme findet sich nicht nur in der Mathematik, sondern auch die Informatik hat eine eigene Definition dafür. Hier wird der Begriff aus einem ganz anderen Kontext interpretiert.
Es geht vor allem um Datenbank-, Echtzeit und Software-Systeme. Das Themengebiet umfasst Aspekte zur Leistungssteigerung von Rechensystemen und Verteilung von Anwendungsproblemen.[26]
Um diese Aspekte werde ich mich im Laufe der Diplomarbeit nicht kümmern.

[26] Vgl. Verteilte Systeme; Vorwort

Qualitativ vs. Quantitativ

Nach der Definition von vernetzten Systemen stellt sich die Frage, wie man diese auswertet. Dabei bieten sich drei Möglichkeiten. Entweder wird das System nur mündlich wie im Kapitel zuvor beschrieben, Gleichungen erstellt oder es werden Diagramme entwickelt.[27]

Die Auswertungsarten unterteilen sich in zwei Kategorien: Qualitativ und Quantitativ. Sie unterscheiden sich durch die Fragestellungen: Was will ich erreichen? Wie will ich an das Ziel kommen? Was brauche ich dieses Ziel zu erreichen?[28]

Bei einer qualitativen Analyse wird Wert auf den Aufbau und auf die Geschehnisse im System gelegt. Alles was dazu von nöten ist, ist ein Bleistift und ein Blatt Papier.[29] Was lernen SchülerInnen an der qualitativen Art der Analyse beziehungsweise was sind die Vorteile? Hierbei werden die Systeme als Ganzes betrachtet. Der Außenstehende kann Einsicht nehmen und sehen, wie die Elemente miteinander verbunden sind. Jede Situation kann verschieden ausgelegt werden. So ist es auch möglich dies zu modellieren. Oft weiß man keine beziehungsweise keine exakten Zahlen zu einem System. Dies ist jedoch kein Hindernis. Ohne dieses Wissen kann immer noch modelliert werden.[30]

Bei der quantitativen Analyse hingegen sieht man sich Rechenergebnisse an und zieht seine Ergebnisse aus Simulationen. Zahlen sind unbedingt von nöten. Als hilfreich wird ein Computer angesehen um Rechnungen und auch Diagramme zu erstellen.[31]

---

[27] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 140

[28] Vgl. Ossimitz; Computer- Mensch-Mathematik; S. 201

[29] Vgl. Ossimitz; Computer- Mensch-Mathematik; S. 202

[30] Vgl. Ossimitz; Computer- Mensch-Mathematik; S. 201

[31] Vgl. Ossimitz; Computer- Mensch-Mathematik; S. 201

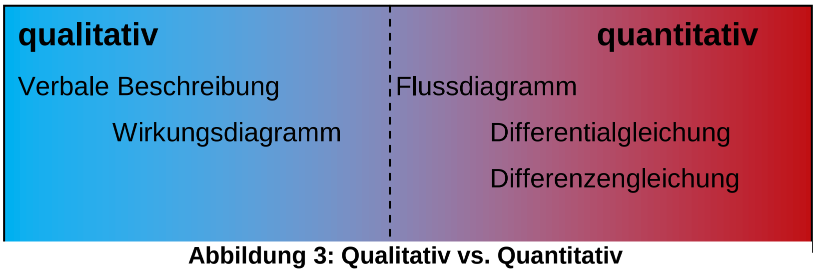


Abbildung 3: Qualitativ vs. Quantitativ

Der verbale Teil ist eindeutig qualitativ. Hier wird versucht Beschreibungen und Zusammenhänge zu finden. Diese sollen einen Überblick geben. Die Art der Beobachtung hat den großen Nachteil, dass der Betrachter bei größeren Systemen schnell an Überblick verliert.

Ich behandle zwei verschiedene Arten der Darstellungsform um die vernetzten Systeme grafisch darzustellen.

- Das Wirkungsdiagramm
- Das Flussdiagramm nach Forrester

Das Wirkungsdiagramm ist ein Vertreter der qualitativen Analyse, weil hier mehr Wert auf die Zusammenhänge gelegt wird. Auch sind keine aufwendigen Hilfsmittel zu Erstellung notwendig. [32]

Das Flussdiagramm hingegen sieht sich als quantitative Analyse mit einer gewissen Nähe zur qualitativen. Es werden Schlüsse aus dem Verhalten des Systems gezogen. Diese können mittels Computerprogrammen erstellt werden.[33]

An beiden kann man ablesen, wie die einzelnen Faktoren aufeinander reagieren und für mögliche Probleme Lösungsansätze entwickeln. Auch ist erkennbar, wie die einzelnen Elemente miteinander verknüpft sind.

---

[32] Vgl. Ossimitz; Materialien zur Systemdynamik; S. 24

[33] Vgl. Ossimitz; Computer- Mensch-Mathematik; S. 202

Unter Gleichungen verstehe ich Differential- und Differenzengleichungen. Diese sind eindeutig als quantitativ zu sehen. Es sind Berechnungsarten. Um die Berechnung zu erleichtern, werden Programme eingesetzt.[34]

Verbale Beschreibung

Die Definition eines Systems wurde schon im vorangegangenen Kapitel beschrieben. Nehmen wir an, die zu beobachtenden vernetzten Systeme sind nach den drei Punkten von Bossel tatsächlich als solche zu erkennen, müssen sie weiter untersucht werden. Diese sechs Punkte könnten als Leitfaden dafür dienen.

- Wenn möglich ist eine Problemstellung zu finden. Dies liegt immer im Auge des Betrachters. Zum Beispiel ein Kind sieht die Welt immer mit anderen Augen als ein Erwachsener.

- Es muss festgelegt werden, aus welchen Elementen die Systeme bestehen, wo die Systemgrenzen zu ziehen sind und wie die Elemente miteinander verbunden sind.

- Wenn möglich sollen Faktoren gefunden werden, die sich gegenseitig beeinflussen. Abhängigkeit oder Rückkoppelungen zwischen den Elementen sind zu finden.

- Es ist festzulegen wie lange die Systeme beobachtet werden, wie der Anfangswert gesetzt wird und wie groß die Zeitschritte sind um eine sinnvolle Beschreibung durchzuführen.

- Die Frage nach der Art der Systeme ist zu beantworten und ob es sich hierbei um ein lineares, exponentielles, begrenztes oder logistisches Wachstum handelt.[35]

---

[34] Vgl. Ossimitz; Computer- Mensch-Mathematik; S. 202

[35] Vgl. Ossimitz, Materialien zur Systemdynamik; S. 21

- Zum Schluss ist die Zielsetzung der Beobachtung darzustellen.

Als Beispiel wähle ich einen Wald. In diesem befinden sich die unterschiedlichen Systeme.

Aufgabenstellung:

Beschreibe das vernetzte System eines Waldes. Wähle selbst, aus welchem Blickwinkel du deine Beobachtungen anstellst und welche Problemstellung es in diesem Gebiet gibt. Suche sechs Komponenten, die miteinander in Verbindung stehen. Ziehe die Systemgrenze und erläutere das Wachstum deines selbstgewählten Systems.

Lösung:

Die Elemente sind die Hasen-, Fuchspopulation, die Beschaffenheit des Waldes, das Klima, Jäger und Förster.

Es ist ein Waldgebiet von einem Hektar zu beobachten. Dieser ist eingezäunt.

Die Problemstellung lautet: Jäger haben genau einzuschätzen wie viele Füchse sie pro Jahr erlegen dürfen. Diese Zahl ist abhängig von der Anzahl ihres Futters - also der Hasen. Die Zahl der Hasen wiederrum ist davon abhängig, wie viel Forstarbeiten im Wald getätigt werden und wie viel Extrafutter der Hasenpopulation zu kommt.

Die Jäger füttern Hasen und dezimieren eine gewisse Anzahl von Füchsen.
Der Förster pflanzt und schlägt Bäume. Seine Anwesenheit im Wald erschwert die Jagd und kann durch gewisse Waldarbeiten das Futter der Hasen minimieren.
Hasen brauchen bei Futtermangel die Hilfe der Jäger. Dieser Mangel ist vom Klima und von der Aktivität der Förster abhängig. Durch das Extrafutter kann es zu einer Explosion der Zahl kommen.
Füchse fressen Hasen und werden von Jägern erlegt. Die Geburtenrate ist abhängig von der der Hasen. Es wird jedes Jahr ein gewisser Prozentsatz an Füchsen erlegt. Dieser ist von ihrer Anzahl und der Anzahl der Hasen abhängig.

Das System wird 10 Jahre lang beobachtet. Zu Beginn der Messung gibt es 100 Hasen und 30 Füchse. Jedes Jahr wird eine neue Messung durchgeführt.
Bei den Hasen handelt es sich um ein exponentielles Wachstum. Die Füchse sind von ihrem Futter abhängig. Bei unbegrenztem Nahrungsvorrat würde es sich bei ihnen ebenfalls um ein exponentielles Wachstum handeln.

Die Zielsetzung aus der Sicht der Jäger ist herauszufinden, wie viel Futter Hasen benötigen um eine gewisse Prozentzahl Füchse zu schießen.

Ein weiterer Punkt, der bei der verbalen Beschreibung von vernetzten Systemen wichtig ist, ist das analytische Denken. SchülerInnen sollen über ihr Tun nachdenken. Dieses Themenfeld ist sehr komplex. Viele Dinge greifen bei Vernetzungen ineinander. Somit ist es grundlegend genau zu analysieren und exakte Beschreibungen anzugeben.

Die Vorteile der Beschreibung für SchülerInnen sind, dass es sehr einfach für sie ist und nicht viel Vorbereitung kostet. Die verbale Beschreibung kann ein interessanter Einstieg in das Thema vernetzte Systeme sein. Es legt den Grundstein für Berechnungen und Simulationen.[36]

Nun werfe ich einen Blick auf die zwei Diagrammarten. Durch sie kann man das Thema besser betrachten und Lösungsansätze herausarbeiten.

Das Wirkungsdiagramm

Es besteht aus Pfeilen mit den Symbolen „+“ und „-“. Diese sollen zeigen, ob sich eine Operation positiv oder negativ auf ein anderes Ereignis auswirkt. Die Pfeilspitze zeigt in die Richtung der Auswirkung.[37]

---

[36] Vgl. Ossimitz; Materialien zur Systemdynamik; S. 19

[37] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 128

Bei einem positiven Pfeil spricht man von gleichsinniger Wirkung.[38]

Zum Beispiel:
Je mehr es regnet, desto mehr Wasser wird in einem Fluss sein. Je weniger es regnet, desto weniger Wasser wird in einem Fluss sein.

Bei einem negativen Pfeil spricht man von einer gegensinnigen Wirkung.[39]

Zum Beispiel:
Je mehr Stunden ich arbeite, desto weniger Freizeit werde ich haben.
Je weniger Geld ich ausgebe, desto mehr Geld habe ich auf meinem Konto.

Dabei kann man einen gerichteten Weg beobachten. [40]Wobei wie in der Mathematik üblich eine gerade Anzahl von „-" das Gesamtergebnis aus„+" ändert. Bei einer ungeraden Anzahl bleibt das „-" erhalten.

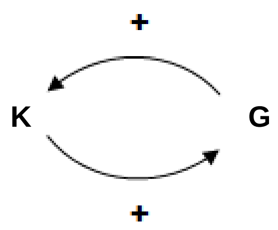


Abbildung 4: Eskalierende Rückkoppelung

An diesen Beispielen kann man eine Rückkoppelung erkennen.
Die Steigerung der Kunden eines Betriebes führt dazu, dass mehr Geld zur Verfügung steht. Durch dieses Geld können mittels Werbung mehr Kunden angeworben werden.

Die zwei Systemelemente wirken auf sich selbst positiv zurück. Dies nennt man die **eskalierenden Rückkoppelung**.[41]

---

[38] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 128
[39] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 128
[40] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 128
[41] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 129

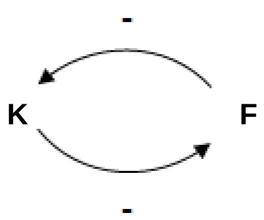


Abbildung 5: Eskalierende Rückkoppelung 2

Es werden viele Kunden geworben. Dadurch haben die Mitarbeiter weniger Freizeit, weil sie mehr arbeiten müssen. Dadurch, dass die Mitarbeiter weniger Freizeit haben und ihre Projekte zeitgerecht abschließen, bekommen sie durch den guten Ruf der Firma mehr Kunden.

Es liegt ebenfalls eine **eskalierende Rückkoppelung** vor. Wir sehen, falls Handlungen sich gegenseitig intensivieren, spricht man von einer eskalierenden Rückkoppelung.[42]

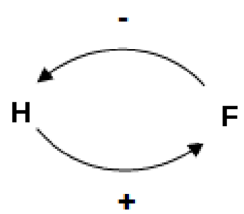


Abbildung 6: Stabilisierende Rückkoppelung

Wenn es zu einer Erhöhung der Hasenpopulation kommt, erhöht sich dank der gesteigerten Anzahl von Futterressourcen auch die Fuchspopulation.

Wenn sich diese erhöht und somit mehr Nahrung braucht, reduziert sich die Anzahl der Hasen.
Hier spricht man von einer **stabilisierten Rückkoppelung**.

Es müssen nicht immer nur zwei Komponenten miteinander verbunden sein. Dies sieht man an der folgenden **eskalierenden Rückkoppelung**.[43]

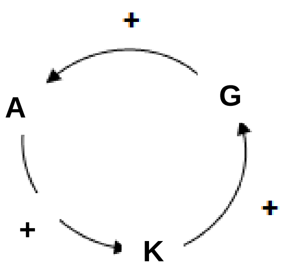


Abbildung 7: Eskalierende Rückkoppelung 3

Kunden wünschen sich eine immer schnellere Internetverbindung. Durch den Ausbau der Leitungen werden immer mehr Kunden geworben. Durch die gesteigerte Anzahl an Kunden hat die Firma mehr Geld und dieses wird in den Ausbau der Leitungen investiert um noch mehr Kunden zu lukrieren.

[42] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 129
[43] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 130

Die Frage stellt sich, was können SchülerInnen aus einem Wirkungsdiagramm erfahren?

- Sie lernen den Aufbau eines Systems kennen.
- Sie sehen, wie die Elemente miteinander verbunden sind.
- Wie diese Beziehungen aufeinander wirken.
- Sie lernen eskalierende und stabilisierende Rückkoppelungen kennen.[44]

Aufgabenstellung 1

Erstelle ein Wirkungsdiagramm zum Thema Wald. Benutze dabei die verbale Beschreibung vom vorigen Kapitel. Formuliere danach dein Diagramm aus.

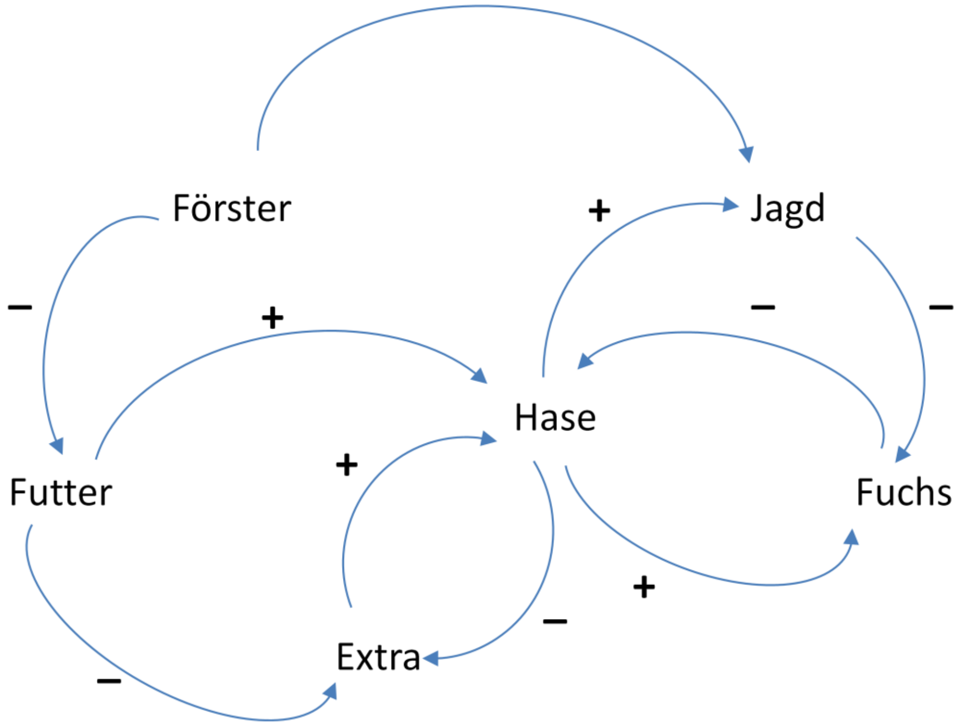


Abbildung 8: Wirkungsdiagramm Wald

Hasen → **Jagd** → **Fuchs** ⇄ **Hase**

Je mehr Hasen, desto mehr Jagden müssen veranstaltet werden. Je mehr Jagden, desto weniger Füchse gibt es. Je weniger Füchse, desto mehr Hasen.

---

[44] Vgl. Ossimitz; Computer-Mensch-Mathematik; S. 202

Dadurch haben die verblieben Füchse mehr Futter und erhöhen ihre Zahl. Was wieder zu einer Reduktion der Hasen führen wird.

Förster → **Jagd**

→ **Futter** → **Hasen** ⇄ **Extra** → **Futter**

Je mehr Förster in einem Wald arbeiten, desto weniger kann gejagt werden, weil die Tiere so aufgeschreckt sind und umso weniger Futter finden. Je weniger Futter, desto weniger Hasen. Je weniger Hasen desto mehr Extrafutter. Je weniger Futter, desto mehr Extrafutter durch die Jäger. Dies führt zu mehr Hasen. Sobald es zu einer Geburtenexplosion gekommen ist, gibt es wieder weniger Extrafutter.

Aufgabenstellung 2

Erstelle ein Wirkungsdiagramm zum Thema Schule. Es soll aus den Komponenten Lernen, Eltern, SchülerIn, Noten, Lehrer, Freizeit und Klassengröße bestehen. Füge sowohl stabilisierende als auch eskalierende Rückkoppelungen ein. Danach beschreibe das Modell.

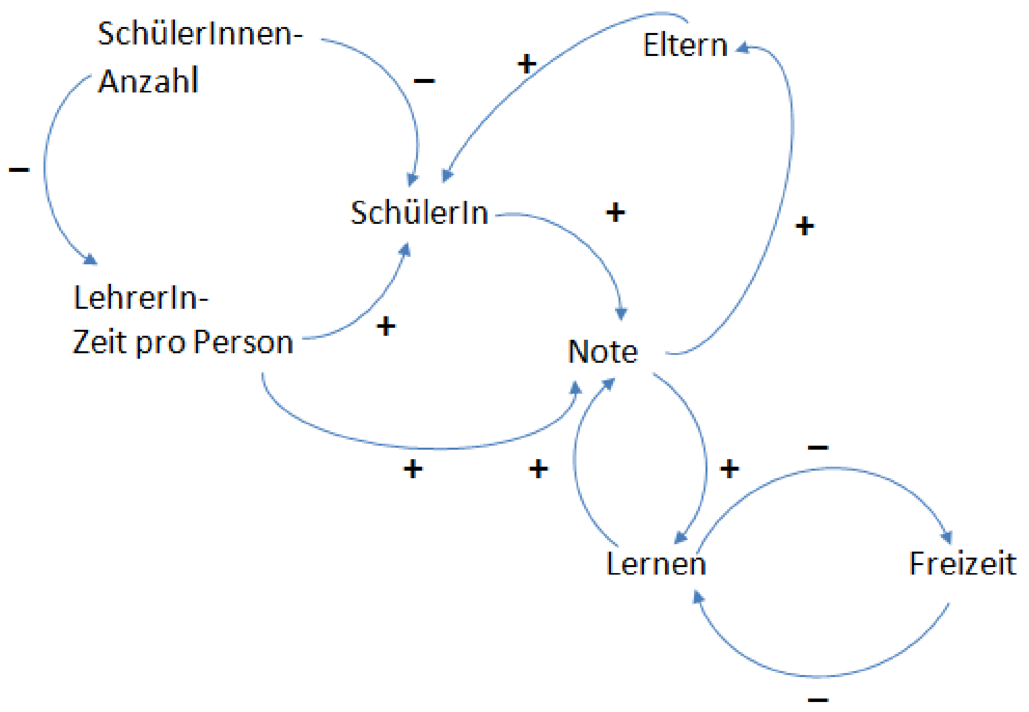


Abbildung 9: Wirkungsdiagramm Schule

SchülerInnen Anzahl ⟶ LehrerIn Zeit pro Person ⟶ SchülerIn ⟶ Note

Die SchülerInnenanzahl einer Klasse beeinflusst die Zeit, die ein Kind mit seiner Lehrperson hat. Je weniger Jugendliche in einer Klasse sind, desto mehr Aufmerksamkeit bekommen sie. Je mehr Aufmerksamkeit desto mehr kann ein/e SchülerIn lernen. Je mehr sie/er lernt, umso bessere Noten werden vergeben.

Note ⟶ Eltern ⟶ SchülerIn ⟶ Note

Je besser die Noten werden, umso glücklicher werden die Eltern eines Kindes sein. Wenn Eltern mit ihrem Kind zufrieden sind, wird auch das Kind mehr Selbstbewusstsein tanken. Je mehr Selbstbewusstsein umso bessere Noten.

Lernen ⇄ Note

Lernen ⇄ Freizeit

Je mehr gelernt wird, desto bessere Noten erhält ein/e SchülerIn. Bessere Noten führen zu einem Erfolgserlebnis und spornen zum weiteren Lernen an. Jedoch, je mehr gelernt wird, desto weniger Freizeit hat ein Kind und umgekehrt.

Flussdiagramm

Unter dem Begriff Flussdiagramm kann man verschiedene Typen unterscheiden. Ich habe die Flussdiagramme nach Forrester gewählt.

Sein Ansatz war „Feedback-Systeme sind trügerisch“.[45] Deshalb entwickelte er eine Diagrammform um die einzelnen Schritte in den Systemen sichtbar zu machen und Beziehungen und Schleifen zu veranschaulichen.[46]

Forrester definiert: „Das Flussdiagramm sollte Zustands-, Fluss- und Hilfsgleichungen und ihre Verkettung untereinander aufzeigen“.[47]

Ein einfaches Flussdiagramm sieht folgendermaßen aus:

---

[45] Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 140

[46] Vgl. Forrester; Grundzüge einer Systemtheorie; S. 140

[47] Siehe 44

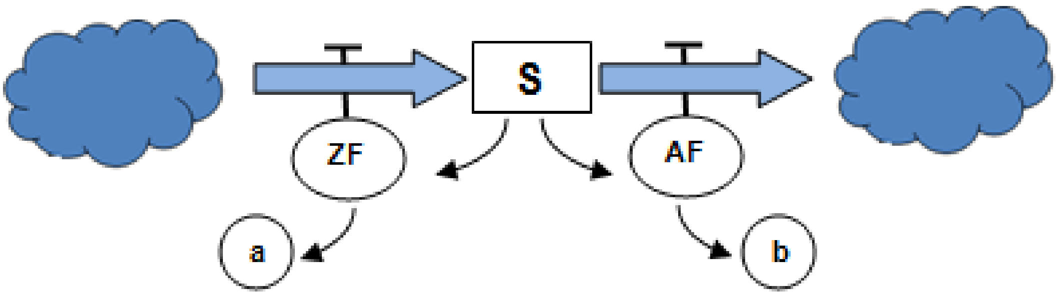


Abbildung 10: Flussdiagramm

Die zwei Wolken symbolisieren den Beginn und Schluss des Diagrammes und sind gleichzeitig die Grenzen des Modells. Hier muss keine genaue Definition getroffen werden, woher und wohin die Daten fließen.[48]

Das Flussdiagramm besteht aus einem Rechteck. Dies wird **Bestandsgröße** genannt. Es gibt den Bestand des gewählten Objektes zu einem selbstgewählten Zeitpunkt an.[49]

Die blauen Pfeile sind die sogenannten **Flusspfeile**. Wie bei einem richtigen Fluss stellen sie die Zu- beziehungsweise Abflüsse zu der Bestandsgröße dar. Die Abkürzungen ZF und AF in den Kreisen stellen die **Flussraten** dar. Sie sind mittlere Änderungsraten und geben an, wie viel die Bestandsgröße in einem Zeitintervall zunimmt beziehungsweise abnimmt.[50] Sie wirken wie ein Wasserhahn und bestimmen den Zu- und Abfluss.[51]

Für den Fall, dass die Flussraten von der Bestandsgröße abhängen, wird das Diagramm mit **Wirkungspfeilen** versehen.[52]

In den kleinen Kreisen befinden sich die **Hilfsgrößen**. Bei ihnen handelt es sich meist um Proportionalitätsfaktoren. Für den Fall, dass es zum Beispiel Konstanten sind, muss dies explizit angegeben werden.[53]

SchülerInnen können aus den Flussdiagrammen lernen:

---

[48] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 131

[49] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 132

[50] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 131

[51] Vgl. Forrester; Grundzüge der Systemtheorie; S. 142

[52] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 131

[53] Vgl. Ulovec; Mathematik verstehen 8; S 131

- Sie müssen differenziert denken um den Unterschied zwischen Bestands- und Flussgrößen zu verstehen und zu erkennen.
- Durch die Erstellung des Diagramms werden sie aufgefordert genau und übersichtlich zu arbeiten.

Beispiele:

Aufgabenstellung 1: Stausee

Wie würde ein Flussdiagramm zum Thema Stausee aussehen mit der Bestandsgröße Wasserstand, den Flussraten Zufluss und Abfluss und den konstanten Hilfsgrößen a und b?

Woher das Wasser kommt und wohin es fließt wird außer Acht gelassen.

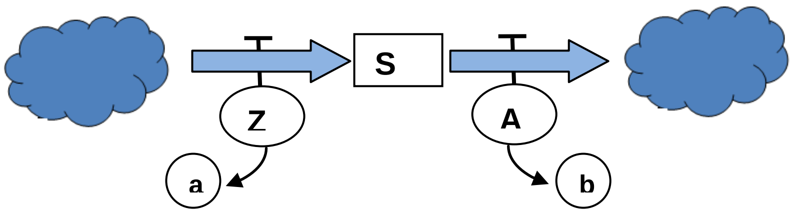


Abbildung 11: Flussdiagramm Stausee

Aufgabenstellung 1.2: Von der Quelle zum Kunden

Modifiziere das vorhergegangene Beispiel. Das Wasser kommt nicht immer auf dem direkten Weg von der Quelle in den Wasserhahn. Als Bestandsgrößen werden Stausee, Wasseraufbereitung und Kunde gewählt. Die Annahmen für die Flussraten sind wie folgt.

- Die Zuflussrate SZ konstant zu S
- Die Abflussrate SA ist proportional zu S und W
- Die Abflussrate SWA ist proportional zu S und W
- Die Zuflussrate WZ ist konstant zu W
- Die Abflussrate WA ist proportional zu W

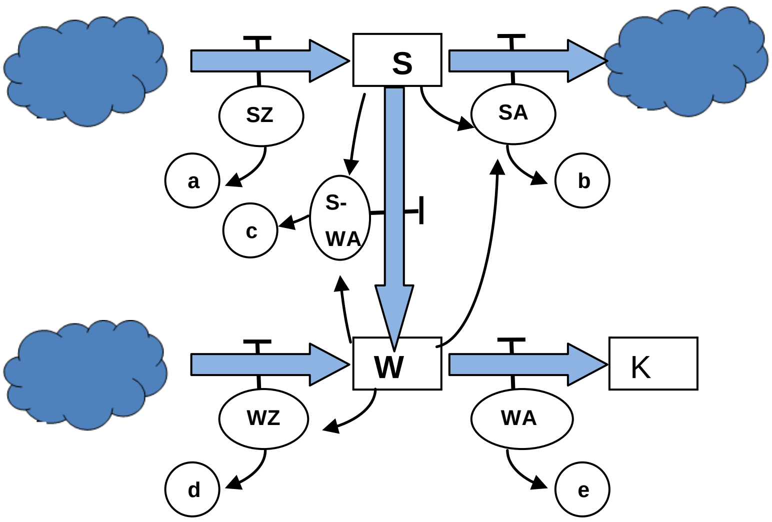


Abbildung 12: Flussdiagramm von der Quelle zum Kunden

Flussdiagramme sind mit verschiedenen Programmen erstellbar.

Differenzengleichung

Ich definiere zum Beginn des Kapitels den Begriff Differenzengleichung. Danach gehe ich darauf ein, wie sie genau aufgebaut ist und wie man sie lösen kann. Zum Schluss sehe ich mir das Waldbeispiel aus der Sicht der Differenzengleichung an.

Definition

Eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen den Werten einer Folge $(a_k)_{k=1,2,3,...}$ an jene $n+1$ aufeinanderfolgenden Stellen $a_{k.},...,a_{k+n}$ herstellt, heißt Differenzengleichung (DG) der Ordnung n.

Definition

Man bezeichnet die DG als autonom, wenn n nicht explizit auftritt, als linear, falls die Folge linear ist.

Es wird noch zwischen inhomogen und homogen unterschieden:

$x_{n+k} + a_1(n)x_{k+n-1} + ... + a_k(n)x_n = a(n)$ ………. inhomogen

$x_{n+k} + a_1(n)x_{k+n-1} + ... + a_k(n)x_n = 0$ ………. homogen

Definition:

Eine Funktion y heißt Lösung einer Differenzengleichung, wenn ihre Funktionswerte $x(n) = x_n$ die Differenzengleichung $F(n, x_{n+k}, ... x_n) = 0$ erfüllen. Die Lösung einer Differenzengleichung erhält man mittels Rekursion. Es wird nach einer „expliziten Darstellung des n-ten Folgegliedes x_n gesucht.

Lineare Differenzengleichung 1. Ordnung

Der Begriff Differenzengleichung leitet sich aus dem Wort Differenz ab. Dies hilft auch bei der Definition der linearen DG. „Die Differenz $x_{n+1} - x_n = \Delta x_n$, daher die Zu- oder Abnahme vom n-ten zum $(n+1)$-ten“ Folgeglied, „ist eine lineare Funktion.“[54]

Allgemein hat die lineare Differenzengleichung 1. Ordnung folgende Gestalt:

$$x_{n+1} = a_n \cdot x_n + b_n$$

In den vorigen Kapiteln habe ich mich mit dem Leben in einem Waldgebiet beschäftigt. Ich werde nun die Angabe ein wenig verändern und lege mein Augenmerk auf zwei Populationen. Der Fokus wird auf die Jäger und die Hasen gelegt. Es wird angenommen, dass es keine Räuber in diesem Wald mehr gibt. Dabei werde ich zwei Fälle beobachten.

In diesen Beispielen ist auch jeweils eine graphische Lösung integriert. Diese wird mittels Excel gelöst. Nähere Erklärungen wie diese Ergebnisse zustande kommen und welche Alternativen zu der Darstellungsform noch existieren, folgen in dem Kapitel Simulation.

[54] Reichel, Lehrbuch der Mathematik 7, S. 209

Beispiel 1 Jäger-Hasen[55]

Die Jäger meinen es gut mit den Nagetieren. Sie füttern die Tiere im Winter, wenn keine Nahrung vorhanden ist. Dies führt zu einer Geburtensteigerung um 60%. Zu Beginn dieses Vorgangs gab es 50 Hasen im Wald. Im Herbst beginnt die Jagdsaison. Dabei werden immer 20 Tiere erlegt.

a) Wie viele Tiere gibt es nach 3 Jahren im Wald?
b) Stelle eine Gleichung auf, welche die Anzahl der Hasen nach n Jahren angibt.
c) Ermittle das Beispiel graphisch. Dabei soll eine Entwicklung der Population in 20 Jahren erkenntlich sein. Gib ebenfalls an, wie viele Hasen es in 20 Jahren gibt.
d) Warum ist diese Angabe wenig sinnvoll?

Lösung

a) Um die Anzahl der Tiere nach 3 Jahren zu ermitteln, gehe ich Schritt für Schritt vor. Zuerst ermittle ich, wie viele Tiere es nach einem, zwei und schließlich drei Jahren gibt.

$$x_1 = 50 \cdot 1{,}6 - 20 = 60$$
$$x_2 = (50 \cdot 1{,}6 - 20) \cdot 1{,}6 - 20 = 50 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}6 - 20 = 76$$
$$x_3 = (50 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}6 - 20) \cdot 1{,}6 - 20 = 50 \cdot 1{,}6^3 - 20 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}6 - 20$$
$$= 50 \cdot 1{,}6^3 - 20 \cdot (1{,}6^2 + 1{,}6 + 1) = 101{,}6 \approx 101$$

Nach 3 Jahren gibt es rund 101 Hasen in diesem Wald

b) Diese Anzahl nach n Jahren lässt sich aus dem vorhergehenden Beispiel ableiten.

$$x_n = 50 \cdot 1{,}6^n - 20 \cdot (1{,}6^{n-1} + ... + 1{,}6^2 + 1{,}6 + 1 = 50 \cdot 1{,}6^n - 20 \cdot \frac{1 - 1{,}6^n}{1 - 1{,}6}$$

[55] Vgl. Reichel, Lehrbuch der Mathematik 7, S. 216

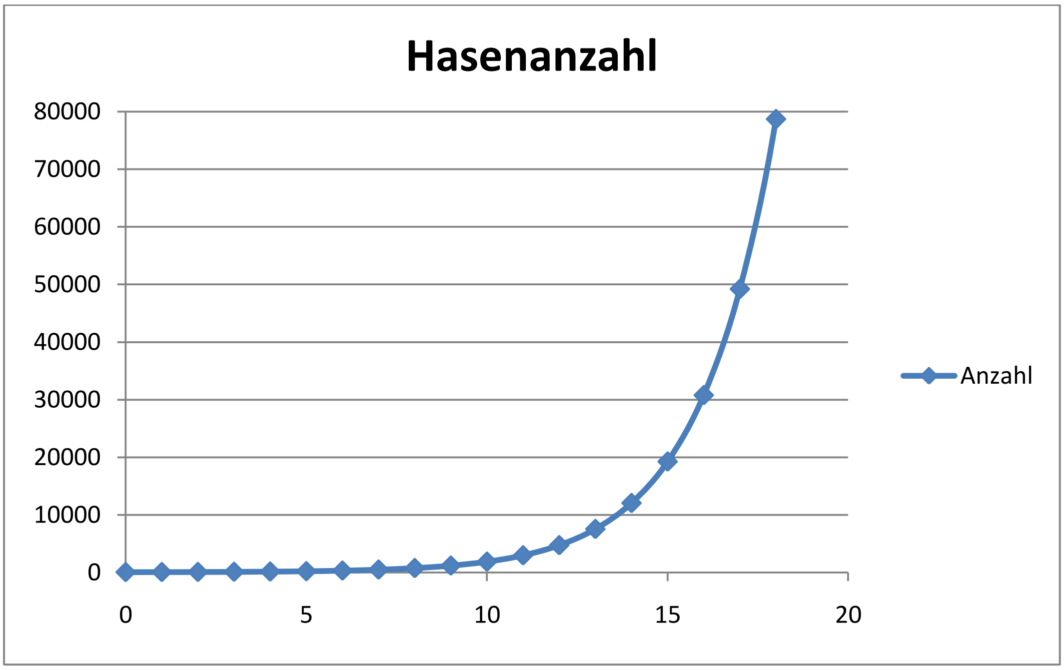


Abbildung 13: Differenzengleichung Beispiel 1

Die x-Achse beschreibt das Zeitintervall. Auf der y-Achse ist die Anzahl der Hasen abgebildet. Diese steigt unaufhörlich.

18	78739
19	125963
20	201521
21	322414
22	515842

Im Wald gibt es in 20 Jahren genau 201520 Hasen.

c) Laut dieser Angabe würde die Anzahl der Hasen immer weiter ansteigen. Die Abschussrate von 20 Hasen fällt bei 201520 Hasen nicht mehr ins Gewicht. Bei genauerer Beobachtung fällt auf, dass nach ein paar Jahren nicht mehr genügend Lebensraum für diese Tiere vorhanden ist. Es würde zu Futtermangel kommen, oder die Jäger müssen die Anzahl der zu erlegenden Tiere erhöhen.

In diesem Beispiel erkennt man ein exponentielles Wachstum.

Beispiel 2 Jäger Hasen[56]

Die Jäger ziehen nun Konsequenzen aus der starken Vermehrung der Hasen. Es wird eine steigende Jagdquote eingeführt. Diese hängt von der Anzahl der Jahre ab. Sie steigt immer um 40%. Zu Beginn werden 20 Hasen erlegt. Die Population besteht aus 101 Hasen und wächst pro Jahr um 60% Prozent.

a) Wie viele Hasen gibt es nach vier Jahren?
b) Beschreibe die Angabe mittels einer Differenzengleichung.
c) Stelle dieses Beispiel graphisch dar. Es soll die Entwicklung in den nächsten 30 Jahren erkenntlich sein.

Lösung

a) Wie im vorhergehenden Beispiel gehe ich Schritt für Schritt vor.

$$x_1 = 101 \cdot 1{,}6 - 20 = 141{,}6 \approx 141$$

$$x_2 = (101 \cdot 1{,}6 - 20) \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4 = 101 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4 =$$
$$= 198{,},56 \approx 198$$

$$x_3 = (101 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4) \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4^2 =$$
$$= 101 \cdot 1{,}6^3 - 20 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4^2 = 278{,}5 \approx 278$$

$$x_4 = (101 \cdot 1{,}6^3 - 20 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4^2) \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4^3 =$$
$$= 101 \cdot 1{,}6^4 - 20 \cdot 1{,}6^3 - 20 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}6^2 - 20 \cdot 1{,}4^2 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4^3 =$$
$$= 101 \cdot 1{,}6^4 - 20 \cdot (1{,}6^3 + 1{,}6^2 \cdot 1{,}4 + 1{,}6 \cdot 1{,}4^2 + 1{,}4^3) = 390{,}71 \approx 390$$

Nach vier Jahren gibt es 390 Hasen im Wald.

b) Um diese Aufgabe zu lösen betrachte ich die vorhergehenden Rechnungen. Ich drücke x_2 und x_3 mittels Variablen aus:

$$x_2 = x_1 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4$$

$$x_3 = x_2 \cdot 1{,}6 - 20 \cdot 1{,}4^2$$

[56] Reichel, Lehrbuch der Mathematik 7, S. 216

Beim Vergleich fällt auf, dass jeweils der Vorgänger mit 1,6 multipliziert wird und bei 1,4 der Exponent ident mit dem Index von x ist.

Somit kann man für x_{n+1} schreiben:

$$x_{n+1} = 1{,}6 \cdot x_n - 20 \cdot 1.4^n$$

c)

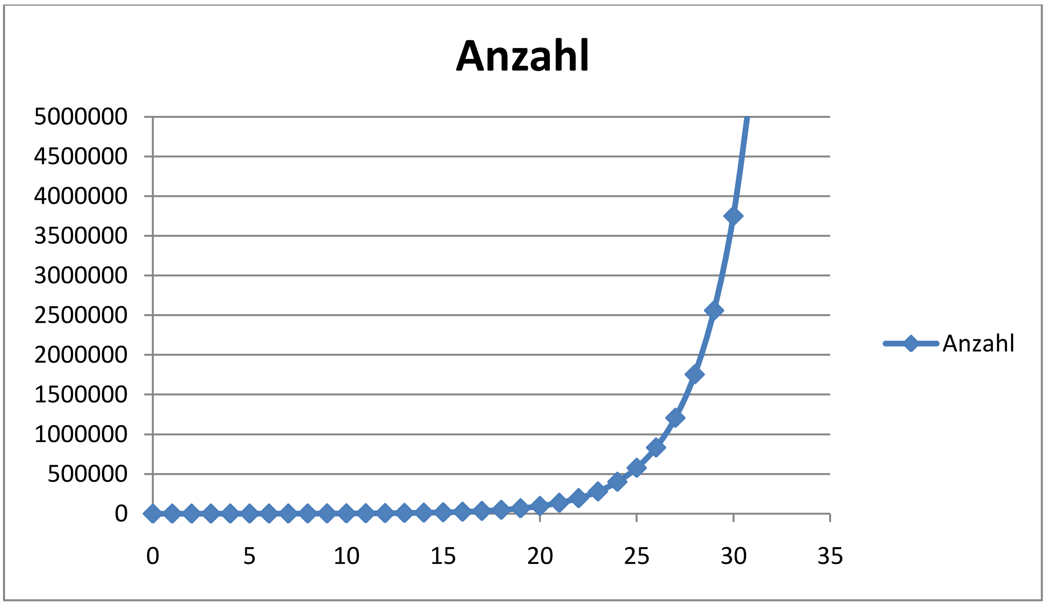


Abbildung 14: Differenzengleichung Beispiel 2

28	1753997
29	2559441
30	3749371
31	5514965
32	8146304

Im dreißigsten Jahr befinden sich rund 3749371 Hasen im Wald.

Differentialgleichung

In diesem Kapitel werde ich Definitionen geben und sie mittels Beispielen darstellen. Dabei versuche ich ihre Anwendungen in der Schule aufzuzeigen und mit den vernetzten Systemen zu verknüpfen.

Definition

Jede Gleichung, die mindestens einen Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ enthält, heißt **Differentialgleichung** (kurz DGL). Sie heißt von n-ter Ordnung, falls die höchste vorkommende Ableitung von der Ordnung n ist.
Das Ergebnis der Gleichung ist nicht die Lösung, sondern „jede Funktion f, für die die vorangegangene Differentialgleichung gilt.“[57] Diese Funktion wird auch Lösungsfunktion genannt.[58]

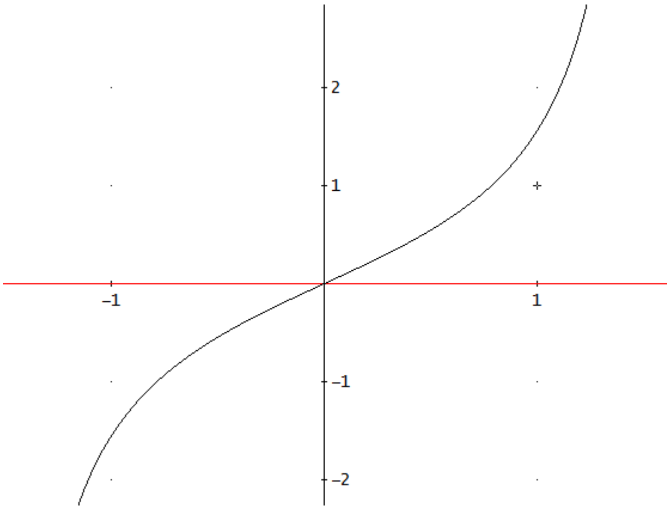
Doch nicht jede Differentialgleichung besitzt eine Lösung beziehungsweise eine eindeutige Lösung. Es ist ebenfalls möglich DGL zu finden, welche nur eine lokale, aber keine globale Lösung haben.

Keine eindeutige Lösung:[59]

$\dot{x} = 2x^{\frac{2}{3}}$ mit $x(0) = 0$

Mit den Lösungen $x(t) = 0$ und $x(t) = t^3$

Die Lösungsfunktion einer nicht eindeutig lösbaren DGL:



In dieser Abbildung kann man erkennen, dass sich die zwei Funktionen, genauer gesagt die zwei Lösungen, schneiden. Daraus folgt, es gibt keine eindeutige Lösung.

Abbildung 15: Keine eindeutige Lösung

[57] Malle, Mathematik verstehen 8, S. 122

[58] Vgl. Malle, Mathematik verstehen 8, S. 122

[59] Vgl. Raith, Vorlesung höhere Analysis

Beispiel einer Differentialgleichung[60]

Löse die DGL $f(x)' = x^2 + 1 \quad x \in R$ sowohl rechnerisch als auch grafisch.

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \qquad \Big| \cdot dx$$
$$dy = (x^2 + 1)dx \qquad \Big| \int$$
$$\int dy = \int (x^2 + 1)dx$$
$$y = \frac{x^3}{3} + x + C$$

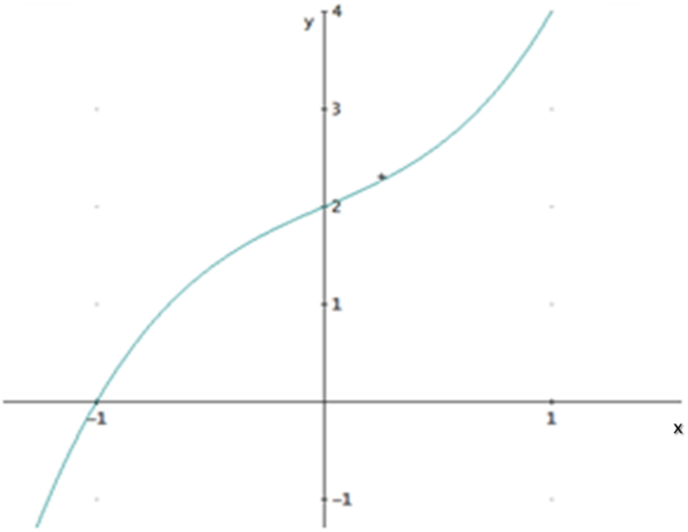


Abbildung 16: Beispiel Differentialgleichung

Anhand des nächsten Beispiels möchte ich die Aufstellung einer Differentialgleichung aufzeigen.

Beispiel Radioaktiven Zerfalls.[61]

Stelle die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls dar.

[60] Vgl. Schärf, Mathematik für höhere technische Lehrveranstaltungen, S. 265

[61] Vgl. Schärf, Mathematik für höhere technische Lehrveranstaltungen, S. 251

Bei Radioaktivität zerfallen instabile Atomkerne in Folgeprodukte. Bei dem Vorgang wird Strahlung abgesondert. Diese ist messbar. Dasselbe geschieht beim radioaktiven Zerfall. Hier wird konstant der gleiche Bruchteil an Atomen zerstört und somit auch idente Bruchteil an Strahlung abgesondert.

Anzahl der existierenden Atome: n

Zerfallsgeschwindigkeit: $\frac{dn}{dt}$

Zerfallskonstante: k

Allgemeine Lösung: $\frac{dn}{dt} = -kn$

In meiner Diplomarbeit beschäftige ich mich hauptsächlich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen. Ich werde diese im Hinblick auf die erste Ordnung untersuchen und ein Räuber-Beute Beispiel präsentieren.
Am Ende des Kapitels möchte ich nur kurz partielle DGL definieren und einen Überblick über die erste und zweite Ordnung geben.

Gewöhnliche Differentialgleichung

Definition
Man nennt die Bestimmungsgleichung einer Funktion einer unabhängigen Variablen gewöhnliche Differentialgleichung, wenn sie eine Ableitung der gesuchten Funktion nach der unabhängigen Variablen enthält. Die Gleichung hat die Form $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ mit $n \geq 1$ bzw. explizit $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Die gewöhnliche Differentialgleichung kann nicht bei jeder Problemstellung angewandt werden. Dazu müssen ein paar Grundvoraussetzungen gegeben sein. Das System sollte:

- deterministisch
  Das heißt, das Früher und Später muss eindeutig durch die jetzige Situation ausdrückbar sein.[62] Die Gesamtheit „aller möglichen Zustände heißt Phasenraum."[63]
  Zum Beispiel bei dem Fall eines Steines. Man weiß, von wo er fallen gelassen wird, wie schnell er fällt und wie lang er für diesen Fall benötigt.[64]

- endlichdimensional
  Als endlichdimensional bezeichnet man ein System, wenn endlich viele Parameter ausreichen um einen Zustand zu definieren.[65]
  Wie bei der Betrachtung eines Bildes sollten endlich viele Sätze ausreichen um das Kunstwerk zu beschreiben.

- differenzierbar
  „Ein Prozess heißt differenzierbar, wenn sein Phasenraum die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit aufweist, und die Veränderung der Zustände mit der Zeit durch differenzierbare Funktionen beschrieben wird."[66]

Ein System, dass diese Punkte nicht erfüllt, ist zum Beispiel das Leben eines Menschen. Man kann zwar die Vergangenheit ermitteln, jedoch die Zukunft bleibt verborgen. Durch die Gegenwart weiß man nicht, wie es im Leben weiter geht.

Differentialgleichung erster Ordnung

Definition

Bei der DGL erster Ordnung tritt mindestens einmal y´ auf, es tritt aber nicht y´´, y´´´,… auf

---

[62] Vgl. Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 9
[63] Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 9
[64] Vgl. Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 9
[65] Siehe 61
[66] Siehe 60

Lineare Differentialgleichungen

Definition

Die Normalform der linearen Differentialgleichung erster Ordnung lautet: $y' + a(x)y = s(x)$. Ist $s(x) \neq 0$, so spricht man von einer linearen inhomogenen Differentialgleichung. Ist $s(x) = 0$, so spricht man von einer linearen homogenen Differentialgleichung. Eine lineare Differentialgleichung kann explizit in der Form $y' = f(x,y)$ oder allgemein durch $F(x,y,y') = 0$ dargestellt werden.

Beispiel einer linearen DGL:[67]

Finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 5x^4 y = 0$ mit $y \neq 0$

Lösung:

$$\frac{dy}{dx} = -5x^4 y \qquad \left| \cdot dx \quad \right| \div y$$

$$\frac{dy}{y} = -5x^4 dx \qquad \left| \int \right.$$

$$\ln|y| = -x^4 + \ln|C| \qquad \text{Es gilt: } x^4 \equiv \ln e^{-x^4}$$

$$\ln|y| = \ln e^{-x^4} + \ln|C| \qquad \left| \div \ln \right.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung $y = Ce^{-x^4}$

Exakte Differentialgleichung

Definition

Eine Differentialgleichung der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ heißt, wenn der Linksterm ein vollständiges Differential ist, exakte Differentialgleichung.

Satz von Schwarz:

$P(x,y)dy + Q(x,y)dy$ ist genau dann ein vollständiges Differential, wenn gilt:

---

[67] Vgl. Schärf, Mathematik 4, S. 265

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Das heißt, die Integrabilitätsbedingung soll erfüllt sein.

Beispiel einer exakten DGL:[68]

Ist die DGL $2ydx + 2xdy = 0$ exakt?

Lösung:

Dazu muss die Integrabilitätsbedingung erfüllt werden.

$P(x, y) = 2y$ daher ist $\frac{\partial P}{\partial y} = 2$

$Q(x, y) = 2x$ daher ist $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$

Daraus folgt $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist erfüllt und es handelt sich um eine exakte Differentialgleichung.

Differentialgleichung zum Waldbeispiel:[69]

Um dieses Beispiel mittels DGL darstellen zu können, habe ich es vereinfacht. Dazu lege ich meinen Fokus auf die Hasen- und Fuchspopulation. Es handelt sich in diesem Beispiel um ein Räuber-Beute Modell. Beide Tierarten sind voneinander abhängig. Die Füchse brauchen Hasen als Futter. Die Anzahl der Beutetiere wird von den Räubern minimiert. Dies hat langfristig den Vorteil, dass es zu keiner Futterknappheit für die Hasen kommen kann.

Wenn es in diesem Wald keine Räuber gäbe, würde die Anzahl der Hasen exponentiell wachsen und zwar mit der Geschwindigkeit $y' = kx$. Wobei das x für die Hasen steht und k für das Wachstum der Population. Dies würde proportional zu ihrer Menge geschehen. Ich bezeichne die Füchse mit y. Da sie die Hasen

[68] Vgl. Schärf, Mathematik für höhere technische Lehrveranstaltungen, S. 263

[69] Vgl. Arnold, Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 26

dezimieren, muss dies in der Rechnung ebenfalls enthalten sein. Wie viele Hasen erlegt werden, ist abhängig von der Menge der Füchse und ihnen selbst.

Daraus folgt die DGL: $y' = kx - axy$

Jetzt stellt sich die Frage, wie die Differentialgleichung bei den Füchsen aussieht. Wenn ihnen die Beutetiere fehlen, gilt $x' = -ly$. Hier ist ein negatives Wachstum zu erkennen, das heißt diese Population würde aussterben. Da es in diesem Wald Hasen gibt, ist die Schnelligkeit des Wachstums proportional zur Menge der Beute.

In diesem Fall ist die DGL: $x' = -ly + bxy$

Partielle Differentialgleichung

Definition

Man nennt die Bestimmungsgleichung einer Funktion mehrerer unabhängiger Variablen partielle Differentialgleichung, wenn die gesuchte Funktion von mehreren Variablen abhängt und damit die in der Differentialgleichung auftretenden Ableitungen partiell sind.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_t = u_x$$

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u_t = u_{xx}$$

Modellbildung

Wenn die Rede von Systemen ist, fällt oft der Begriff Modell. Doch was ist darunter zu verstehen? Gibt es ein allgemein gültiges Modell für alle Systemarten? Wie ist es aufgebaut?

Bei der Erstellung von Modellen bieten sich für die Analyse folgende Vor- und Nachteile.

Vorteile:

- Da bei manchen Systemen, wie zum Beispiel der Natur, eine lange Zeitspanne beobachtet werden muss, bietet das Modell viel Zeitersparnis. Hierbei brauchen die Untersuchungen keine Jahre, sondern können innerhalb kürzester Zeit durchgeführt werden.[70]
- Manche riskanten Forschungen an Lebewesen, wie zum Beispiel die Vergiftung, können mittels Modellen durchgeführt werden. Dadurch können sowohl Kosten als auch Tierquälerei minimiert werden.[71]
- Es können viele Aspekte und unterschiedliche Möglichkeiten mit einbezogen werden. Bei der Betrachtung der zukünftigen Entwicklung eines Systems kann man unterschiedliche Szenarien entstehen lassen.[72]
- Für die Schule sehe ich den Vorteil in zwei Punkten. Im Unterricht kann ein System nicht kontinuierlich beobachtet werden. Ein gut gewähltes Modell kann den SchülerInnen das Themenfeld vernetzte Systeme näherbringen und es spannender gestalten.

Nachteile:

- Original vs. Modell. Ein Modell ist immer eine Nachbildung. Es kann noch so genau sein, aber es ist nur ein Abbild. Deshalb ist es schwer mittels Modellbildung das genaue Verhalten des Systems wiederzugeben.[73]

---

[70] Vgl. Bossel, Modelbilldung und Simulation, S 27

[71] Siehe 70

[72] Siehe 70

[73] Siehe 70

- Bei Systemen in der Natur treten viele unvorhersehbare Ereignisse ein. Diese können die Ergebnisse der Modellbildung nutzlos machen.[74]

Die Eigenschaften eines Modells lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Es soll aus den gleichen Elementen, der gleichen Wirkungsstruktur bestehen und dieselben Reaktionen auf äußere Einwirkungen haben wie das reale System. Jedoch ist es oft nicht möglich das gesamte System abzubilden. Es ist ebenfalls wichtig zu realisieren, dass es sich nur um ein Modell handelt und dies nur zum Teil der Wirklichkeit entspricht. [75]

Die Erstellung eines Modells beginnt mit der Findung des Modellzwecks. Dieser sollte exakt definiert sein. Er sollte anzeigen aus welchen Blickwinkeln das zu betrachtende System beobachtet wird.

Nun wird das System genau beschrieben. Das heißt, es werden die Systemumwelt, Systemgrenze und Systemelemente definiert. Ein ebenfalls wichtiger Punkt ist die Verhaltensbeschreibung. Diese kann auf unterschiedlichste Weise stattfinden. Entweder wird das System einfach eine Zeit lang beobachtet, die Systemstruktur nachgebaut oder es wird bei unbekannter Struktur soweit nachgebaut wie möglich um das wünschenswerte Verhalten zu konstruieren. Das Verhalten soll Aufschluss geben, wie das System früher, jetzt und in Zukunft agieren wird.[76]

All diese Punkte werden in ein Systemkonzept zusammengefasst und in ein Wortmodell umgewandelt. Dies entspricht der verbalen Beschreibung.

Die Wirkungsstruktur wird mittels der qualitativen Arbeitsmittel bearbeitet. Somit werden zuerst ein Wortmodell und danach ein Wirkungsdiagramm erstellt.

Im letzten Abschnitt kommt es zu einer qualitativen Analyse des vorherigen Schrittes.[77]

Dies kann zum Beispiel mittels einer Wirkungsmatrix geschehen. Für die Erstellung sind keine spezifischen Daten notwendig. Sie kann jedoch für die spätere Simulation

---

[74] Siehe 70

[75] Vgl. Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 27-28

[76] Vgl. Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 29

[77] Vgl. Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 41

gewichtet werden. Sie ist eine $n \times n$ große Matrix mit den Elementen. Sie wird ausgefüllt mit den Ergebnissen aus dem Wirkungsdiagramm.[78]

Zusammengefasst erfolgt die Erstellung eines Modells im folgenden Weg:

- **„Definition der Problemstellungen und des Modellzwecks**
- **Systemabgrenzung und Definition der Systemgrenzen**
- **Systemkonzept und Wortmodell**
- **Entwicklung der Wirkungsstruktur**
- **Qualitative Analyse der Wirkungsstruktur“[79]**

Für jedes Thema, ob es aus der Physik, Biologie oder Mathematik kommt, gibt es unterschiedliche Interpretationsarten. Diese erstrecken sich, wie ich bereits angeführt habe, über das verbale Beschreiben bis hin zur Modellbildung am Computer. Hierbei muss man sehr differenziert vorgehen. Vor allem bei der Modellformulierung muss unterschieden werden, wie die Daten später verarbeitet werden.

Zum Beispiel bei der Entwicklung eines Modells über das System des Straßenverkehrs. Für den Fall, dass die Messung der Abgase in einem gewissen Gebiet durchgeführt wird, ist es vonnöten mittels quantitativer Methoden zu bestimmen und zu berechnen, wie viel in einer gewissen Anzahl von Jahren ausgestoßen werden. Die Formulierung bezieht sich nur auf die Daten. Unnötige Aspekte wie die Fahrtkosten können ausgeblendet werden.

Nach der Erstellung eines Modells stellt sich die Frage, ob es auch die reale Welt abbildet und die Ergebnisse relevant sind. Dazu gibt es vier Aspekte, die die Aussagekraft belegen: „Verhaltensgültigkeit, Strukturgültigkeit, empirische Gültigkeit und Anwendungsgültigkeit“[80]

Verhaltensgültigkeit: Wie schon beschrieben wird nur ein Teil des Systems beobachtet. Es wird das Verhalten dieses Abschnittes genau nachgeahmt. Dabei

---

[78] Vgl. Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 60

[79] Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 41

[80] Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 36

werden die Anfangsbedingungen und der Einfluss der Umwelt auf das System berücksichtig. Sollte dies am Ende herausgekommen sein, ist dieser Punkt erfüllt.[81]

Strukturgültigkeit: Wieder wird nur ein Teil beobachtet und in diesem Fall wird ein Auge auf die Wirkungsstruktur geworfen. Diese sollte ident mit dem ausgegangenen System sein.[82]

Empirische Gültigkeit: Die „numerischen und logischen Ergebnisse“ sollen bei beiden gleich sein. Jedoch gibt es Systeme, bei denen aus den unterschiedlichsten Gründen keine Daten vorhanden sind. So müssen die Ergebnisse überzeugen.[83]

Anwendungsgültigkeit: Die Darstellung des Modells soll für den Anwender Ergebnisse erzielen.[84]

Als Vorzeigemodell gilt das von Forrester entwickelte Weltmodell. Es wurde vielfach modifiziert und ausgewertet. Als Ziel kann die Beantwortung der folgenden Fragen gesehen werden: Wie wird es weitergehen? Wohin wird sich die Welt entwickeln?[85]

Das Beispiel, das ich vorstellen möchte, ist ein kleinerer Teil der Welt. Ich möchte mich um einen Garten kümmern.

---

[81] Vgl. Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 36

[82] Siehe 78

[83] Siehe 78

[84] Siehe 78

[85] Vgl. Bossel, Modellbildung und Simulation, S. 49

Beispiel: Der Garten

Im ersten Schritt wenden wir uns der Beschreibung des Grundgerüsts zu.

1. **Das Problem und der Modellzweck:**

Es soll ein kleines Ökosystem dargestellt werden. Ich betrachte einen ansprechenden Garten mit Bäumen und Pflanzen. Die Problemstellung ist, wie weit muss der Mensch eingreifen um dies am besten zu fördern. Es stellt sich die Frage, wie viel gegossen werden muss und ob bzw. wie oft Schädlinge zu bekämpfen sind.

2. **Bestandteile des Systems definieren**

Das System Garten besteht aus Pflanzen, Bäumen, einem Gärtner, Insekten, Schädlingen, Wetter und den Jahreszeiten. Die Grenzen sind am Gartenzaun zu ziehen, denn nur bis dorthin kümmert sich der Gärtner.

3. **Verbale Beschreibung – Wortmodell**

Eine Familie zieht in ein neues Haus und betrachtet den Garten. Dabei stellt sich die Frage nach der Pflege. Diese hängt von verschiedenen Faktoren ab. Das Gießen ist abhängig vom Wetter und den Jahreszeiten. Auch um Schädlinge muss sich gekümmert werden. Positiv wirken Insekten auf die Pflanzenwelt ein.

4. Das Wirkungsdiagramm

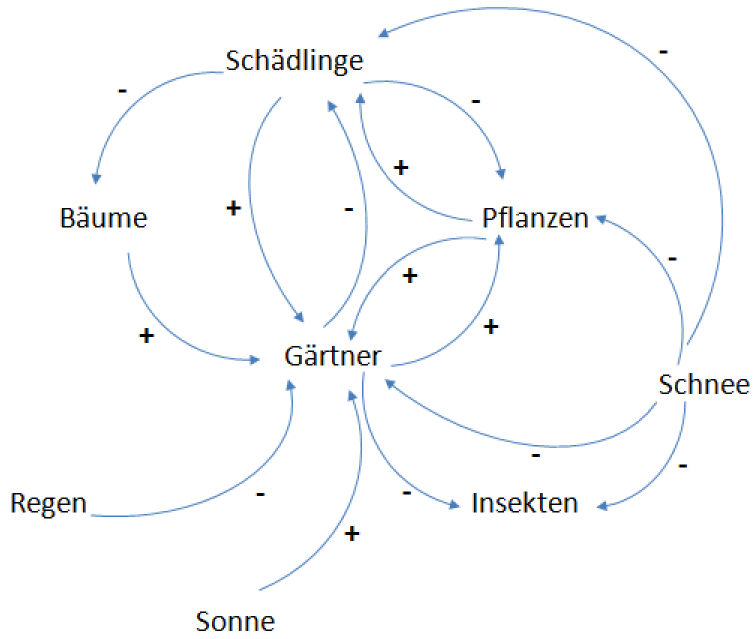


Abbildung 17: Wirkungsdiagramm Garten

Der Gärtner ist der zentrale Punkt des Gartens. Jede Komponente beeinflusst sein Handeln.

Beim Anstieg der Schädlingszahl muss er noch mehr Aktionen gegen diese einleiten. Je mehr er gegen sie tut, desto weniger werden sie sich im Garten tummeln.
Wenn die Anzahl der Schädlinge hoch ist, werden weniger Pflanzen gesund sein. Bei vielen Pflanzen im Garten wird es zu einer Vermehrung dieser kommen.
Bei mehr Pflanzen wird es dazu kommen, dass der Gärtner länger gießen muss. Je mehr Zeit der Gärtner in seine Gewächse steckt, umso besser werden diese gedeihen.
Die Schädlinge haben auch Auswirkungen auf die Bäume. Je mehr es von ihnen gibt, desto weniger Bäume werden gesund sein.
Gesunde Bäume bringen viele Früchte und der Gärtner kann mehr ernten.

Schnee beziehungsweise der Winter haben auf die Natur viele Auswirkungen. Je mehr Schnee in einem Garten liegt, desto weniger Schädlinge werden die kalte Jahreszeit überleben. Dasselbe gilt für die Insekten und die Pflanzen.

Bei einer weißen Landschaft muss der Gärtner weniger draußen arbeiten. Verschwindet sie fängt die Arbeit von vorne an.
Fällt Regen muss der Gärtner weniger gießen. Der umgekehrte Fall ist bei viel Sonnenschein im Sommer. Hierbei muss er mehr gießen.

5. Analyse des Wirkungsdiagrammes mittels der Wirkungsmatrix

	Gärtner	Pflanzen	Bäume	Schädlinge	Insekten	Sonne	Regen	Schnee
Gärtner		+	+	-	-			
Pflanzen	+			+	+			
Bäume	+			-				
Schädlinge	+	-	-					
Insekten		+						
Sonne	+							
Regen	-							
Schnee	-	-	-	-	-			

Computersimulationen

Die heutige Technologie bietet uns die Möglichkeit Modelle mittels Simulationen darstellen zu können. Doch warum sollten SchülerInnen mit diesem Thema in Kontakt kommen? Die Rechtfertigung der Durchführung von einfachen Simulationen in der Schule gibt vor allem die Anwendung dieser in der Arbeitswelt. Sie werden in vielen Sparten verwendet und helfen Vorhersagen und Erkenntnisse zu gewinnen. Sie werden unter anderem in der Wissenschaft, Wirtschaft, Umweltforschung und Technik verwendet.[86]

Die Vor- und Nachteile der Computersimulation decken sich fast mit denen der Modellbildung.

- Ohne das System zu beeinträchtigen können Programme am Computer erstellt werden. Diese sind veränderbar und können somit zu jeder Zeit angepasst werden.

---

[86] Vgl. Bossel; System, Dynamik, Simulation; S. 16

Beispiel: Die Entwicklung eines Naturschutzgebietes bei extremer Veränderung der Wetterverhältnisse. Die Wissenschaftler dürfen keine Experimente unternehmen, sollten aber wissen, wie sich dieser Fall auswirkt und Schritte vorbereiten können.

- Durch die Veränderbarkeit von Programmiercodes ist es möglich die Daten beliebig auszuwerten. Es ist möglich Daten über ein System in verschiedenen Zeitperioden zu erhalten.
  Beispiel: Die Entwicklung der Population in einer Stadt. Um die Auswertung zu präsentieren, kann die Simulation für jeweils 10 Jahre oder länger ausgegeben werden.

- Versuche in einem Labor können mit realem System kostspielig sein. Simulationen sind im Durchschnitt preiswerter.
  Beispiel: Untersuchung der Auswirkung eines Vulkanausbruches. Um diese durchführen zu können, müssen Mitarbeiter an den Ort geschickt werden und es werden langfristige Forschungsarbeiten stattfinden. Die Arbeiten am Computer können von weniger Personen erledigt werden. Die Arbeitszeit wird in diesem Fall kürzer sein.

- Wie bei den Modellen haben Simulationen keine negativen Auswirkungen auf das System oder das erstellte Programm.
  Beispiel: Atomunfall in einem Kraftwerk. Es können ganz ungefährlich Tests durchgeführt werden, ohne dass Arbeiter oder Programmierer verstrahlt werden.[87]

Die Nachteile decken sich ebenfalls mit denen der Modellbildung. An erster Stelle steht die Aussage, dass eine Simulation nur eine Simulation ist. Sie ist nur eine Abbildung, die mögliche Folgen aufzeigen kann. Jedoch sind die Aussagen nie hundert prozentig sicher. Auch können Programmierer Fehler machen, die die Ergebnisse weiter verfälschen.

[87] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 15-16

Wie wird aus einem Modell eine Simulation?

Auf dem Weg vom reinen Wortmodell zur Simulation müssen einige Arbeitsschritte überwunden werden. Dazu müssen Grundvoraussetzungen gegeben sein. Modelle arbeiten wie im vorhergegangenen Kapitel gezeigt mit Wirkungsdiagramm. Um diese in eine Simulation einzubetten, müssen mit ihnen Berechnungen angestellt werden. Das heißt, ihre Daten müssen auswertbar sein. Dazu ist die Entwicklung eines Simulationsmodells unerlässlich.[88]

- **Schritt: „Dimensionale Analyse“[89]**

Eine Dimension kann zum Beispiel bei der Geschwindigkeit km/h sein oder bei der Masse Kilogramm. Um die Daten später zu verarbeiten muss die Dimension feststehen.[90] Diese Analyse erleichtert den nächsten Schritt.

- **Schritt: Kompatibilitätsüberprüfung[91]**

Das System besteht aus verschiedenen Elementen. Beim Wirkungsdiagramm wurden diese verbunden ohne auf die Stimmigkeit ihrer Dimension zu achten. Um die Analyse durchzuführen wird das Diagramm herangezogen. Es ist möglich sowohl qualitative als auch quantitative Modelle zu überprüfen.

Beispiel: Bei einem Sparbuch wird immer wieder Geld eingezahlt, jedoch nie welches abgehoben.

- Je mehr Geld ich im Laufe eines Jahres in mein Sparbuch einzahle, desto mehr Geld befindet sich darauf.
- Je mehr Geld ich einzahle, umso mehr Zinsen erhalte ich.

$$Konto_{Neu} = Konto_{Alt} \cdot Zinsen + Geld$$

---

[88] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27

[89] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27

[90] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 149

[91] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27

Jetzt ist zu überprüfen, ob die einzelnen Faktoren kompatibel sind. Dazu wird ein Blick in die Analyse geworfen.

$$Konto_{Neu}(€) = Konto_{Alt}(€) \cdot Zinsen(\%) + Geld(€)$$

(S 154)

- **Schritt: Umwandlung in Zahlenwerten**[92]

Wie schon erwähnt, müssen, um eine sinnvolle Simulation durchführen zu können, Zahlen zur Verfügung stehen. Nur mit diesen ist es möglich Diagramme zu füllen und aussagekräftige Ergebnisse zu ermitteln.
In diesem Schritt wird das Wirkungsdiagramm mit Zahlen beziehungsweise den Werten der einzelnen Elemente versehen.

- **Schritt: Erstellung des Flussdiagrammes**[93]

Die Erstellung wurde bereits am Beginn gezeigt. Das Flussdiagramm ist die Basis für die Computersimulation. Die Erstellung kann auch mit Computerprogrammen geführt werden. Dies möchte ich am Ende des Kapitels zeigen.

- **Schritt: Anweisungen für späteren Programmierer geben**[94]

Sämtliche Bausteine des Flussdiagrammes sollten formalisiert und auch quantifiziert werden.

- **Schritt: Überprüfung und Vereinfachung**[95]

Nachdem das Simulationsmodell aufgebaut ist, wird ein Abgleich mit dem realen System durchgeführt. Dabei sollte eine genaue Überprüfung stattfinden. In diesem Schritt gilt es zu verhindern, dass das Ergebnis falsche Daten ausgibt.
Danach wird nochmals ein Blick auf das Modell gemacht und geschaut, wie man es simplifizieren kann.

[92] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27
[93] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27
[94] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27
[95] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 27

Nach diesen sechs Schritten sollte ein sinnvolles und aussagekräftiges Simulationsmodell erstellt sein.

Nach der Erstellung des Simulationsmodells muss die Simulation programmiert werden. Dies kann auf zwei verschiedene Arten passieren. Entweder wird eine Programmiersprache gewählt und per Hand die Simulation geschrieben oder es wird ein fertiges Programm gewählt. Beides hat natürlich seine Vor- und Nachteile.
Programmieren kann bei aufwändigen Systemen sehr viel Zeit kosten. Diese Zeit hat man in der Schule meist nicht. Es benötigt auch ein gewisses Know-how, welches von den SchülerInnen vorausgesetzt werden muss. Der Vorteil ist die intensive Beschäftigung mit der Materie. Um ein System abzubilden muss man es wirklich verstehen und auch das Systemverhalten begreifen. Beim selbstständigen Programmieren kann ein Außenstehender bei guter Kommentierung verstehen, wie das Programm aufgebaut ist.
Programme haben auch den Vorteil, dass das System erfasst werden muss. Man ist aber an die Möglichkeiten des Programmes gebunden. Abweichungen sind leider nicht möglich.[96] Jedoch nach der Einarbeitung in das Programm ist eine schnelle Abwicklung möglich.

Es kommt auf die Schule an, welche Art ich wählen würde. Bei Schulformen mit wenig Informatikunterricht ist sicher das Programm eine gute Wahl. Klassen mit einem Schwerpunkt auf Programmieren haben sicher mehr davon ihr System selbst zu schreiben.

Ich habe mich mit drei Programmen zum Thema Computersimulation auseinander gesetzt. Bei jedem habe ich versucht ein einfaches vernetztes System zu simulieren.

[96] Vgl. Bossel, System, Dynamik, Simulationen; S. 174

Vensim:

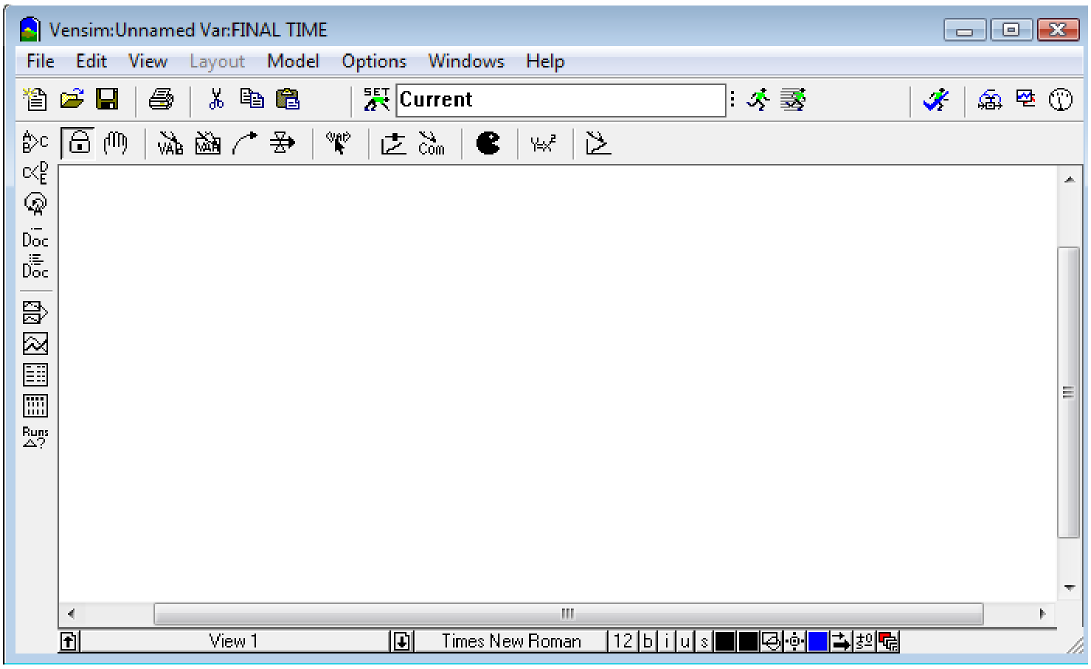


Abbildung 18: Programm Vensim

Was kann das Programm?

Auf der Homepage http://www.simcon.de/vensim/ple wird Vensim folgendermaßen beschrieben:
„Vensim PLE ist eine vollwertige System-Dynamics-Software mit allen für die Modellentwicklung und -analyse wichtigen Werkzeugen. Sie können Feedback-Diagramme und Bestands- und Flussgrößen-Diagramme zur grafischen Veranschaulichung der Variablenzusammenhänge zeichnen. Sie können das Beziehungsgeflecht unter Verwendung der Uses-Tree-, Causes-Tree-, Loop- und Outline-Werkzeuge analysieren. Sie können simulieren und die Ergebnisse sowohl grafisch als auch tabellarisch anzeigen und ausdrucken.“[97]

Das Programm wird auch für die Verwendung an Schulen angepriesen. Für den privaten und schulischen Gebrauch ist es kostenlos.[98]

---

[97] http://www.simcon.de/vensim/ple; Stand 17. Mai

[98] http://www.simcon.de/vensim/ple; Stand 17. Mai

Für die Zwecke der vernetzten Systeme kann es:

- Wirkungsdiagramme erstellen
- Flussdiagramme erstellen
- Eingabe von Differential und Differenzgleichungen
- Auswertungen mittels Diagrammen und Simulationen

Beispiel: Der Kauf eines Neuwagens

Aufgabenstellung:
Die Familie Huber spart auf ein neues Auto. Aus diesem Grund überprüfen sie jeden Monat ihre Bankkonten. Frau Huber bekommt ein Gehalt von 1400 Euro auf ihr Konto. Davon bezahlt sie die Einkäufe für die gesamte Familie. Für ihre Ausgaben stehen ihr 940 Euro zur Verfügung. Herr Huber bezieht ein Gehalt von 2000 Euro. Von seinem Konto werden die Fixkosten von 1500 Euro abgebucht. Beide bekommen einen sehr geringen Zinssatz von 1 % auf ihr Geld. Aus diesem Grund buchen Frau Huber 400 Euro und Herr Huber 500 Euro des übrigen Geldes auf ein Sparbuch mit 4% Zinsen.
Beobachte an Hand einer Simulation, wann sie sich den 50.000 Euro teuren Wagen leisten können.

Zum Beginn wird ein neues Modell aufgerufen. Dazu wird in der Menüleiste **File** und dann **New Model** gedrückt.

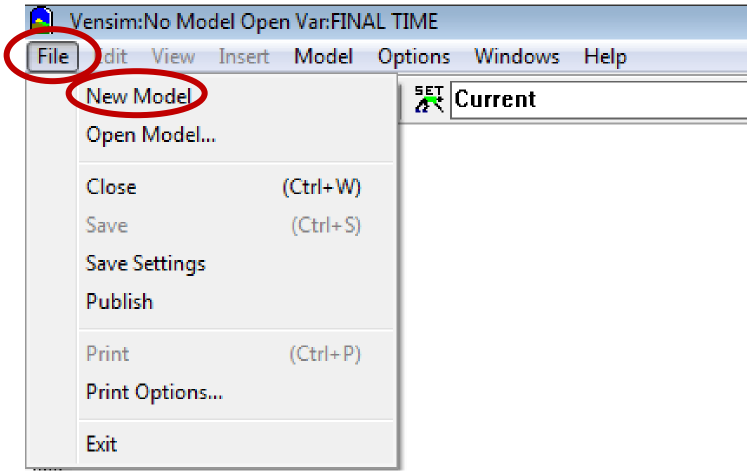


Abbildung 19: Neues Modell

Daraufhin erscheint ein Fenster mit Einstellungen. In dieses kann, wie für Systeme wichtig, die Anfangs- und Endzeit eingegeben werden. Weiters kann unter anderen angegeben werden, welche Zeitschritte und –form benötigt werden. Das Beispiel wird über 100 Jahre betrachtet und in Monatsschritten ausgegeben.

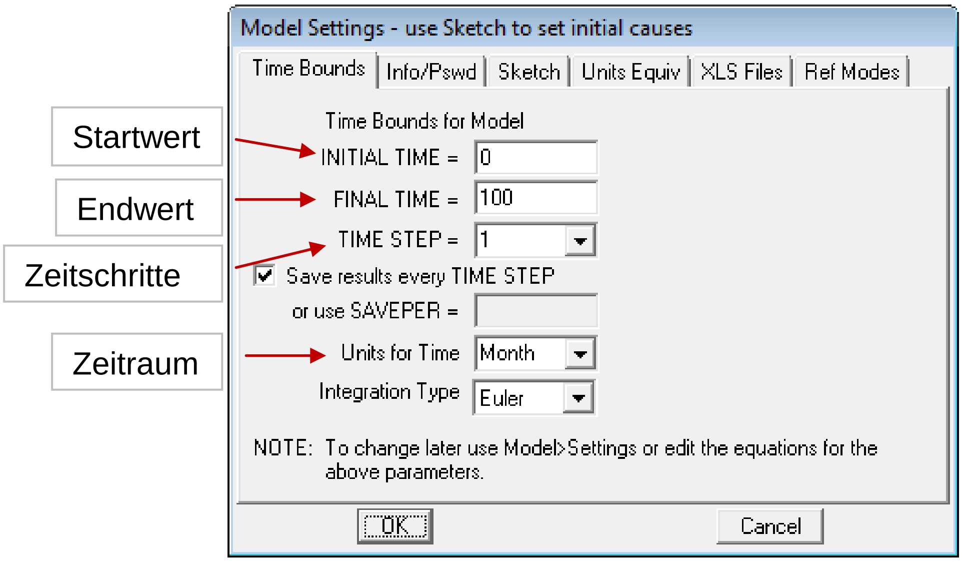


Abbildung 20: Einstellungen

Um ein Wirkungsdiagramm mittels Venim zu erstellen, kann mit dem Button **Variable** diese auf dem Arbeitsblatt aufgezogen werden. Um einen Wirkungspfeil zu zeichnen, wird der Button **Arrow** geklickt. Dann klickt man auf die Variable am Schaft des Pfeiles und auf die Variable an der Spitze.

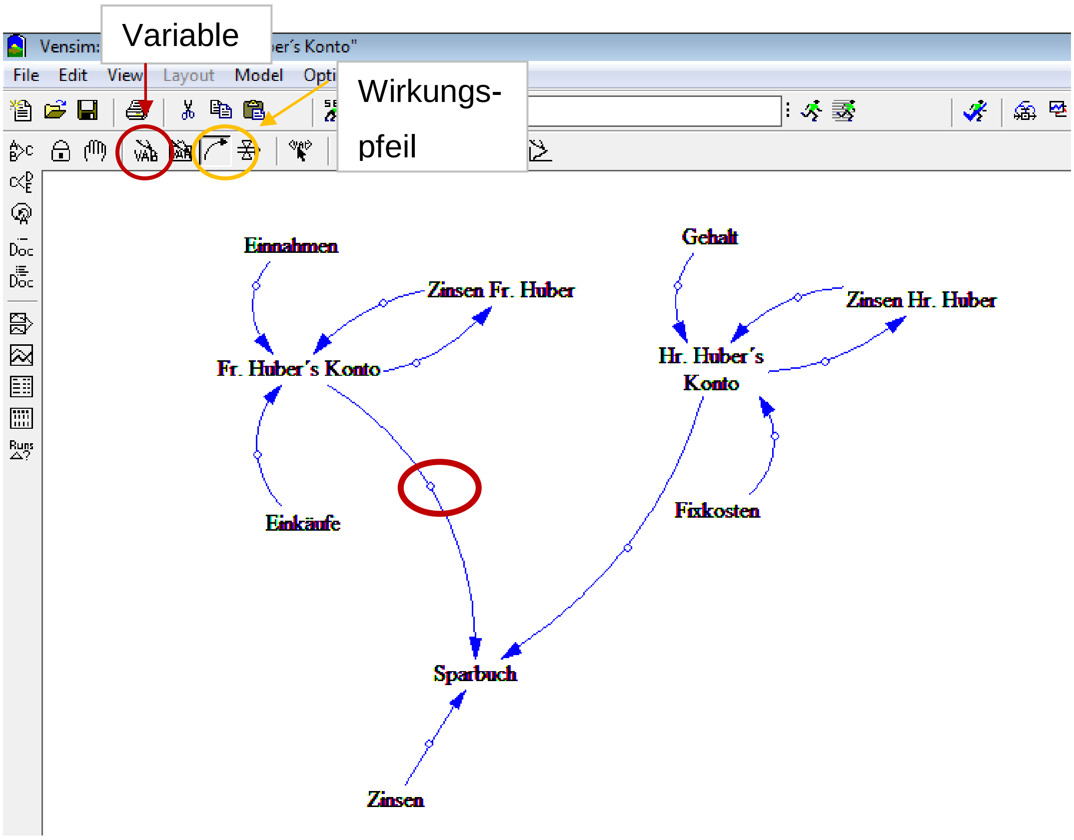


Abbildung 21: Wirkungsdiagramm mit Vensim

Als nächstes kann eingestellt werden, ob die Variablen sich positiv oder negativ verändern. Am Beispiel von Verbrauch pro Monat und Kontostand kann man sehen: Je mehr abgehoben wird, desto weniger befindet sich nach einem Monat auf dem Konto. Um dies durchzuführen dient ein Klick auf das Kügelchen in der Mitte des Pfeiles. Siehe Abbildung 21

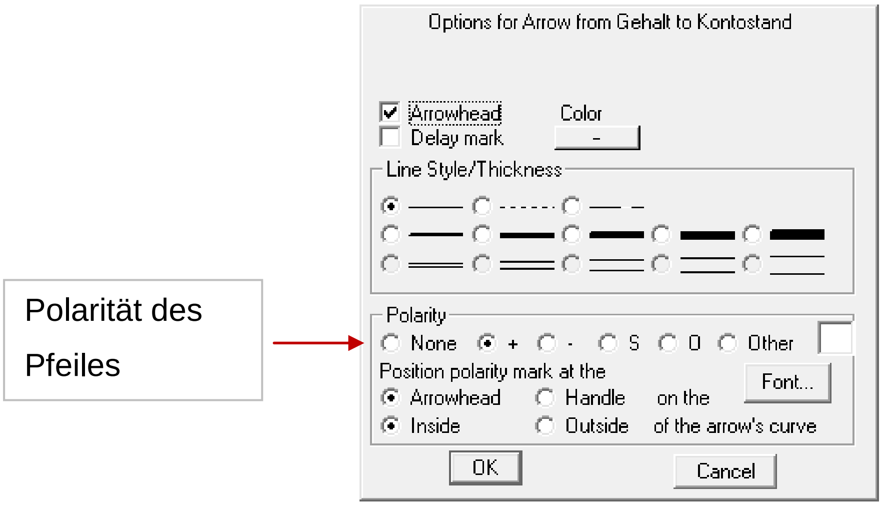


Abbildung 22: Einstellungen Pfeil

In diesem Menü ist außerdem die Art des Pfeiles veränderbar, das heißt seine Breite und wohin die Spitze zeigt.

Somit wäre das Wirkungsdiagramm fertig. Es sind Pfeile zu sehen, an deren Spitzen sich entweder ein Plus oder Minus befindet. Diese geben - wie schon im Kapitel Wirkungsdiagramme beschrieben – an, ob die Wirkung entweder gleichgesinnt oder gegengesinnt ist. Nur im Fall von Verbrauch pro Monat ist der Pfeil gegengesinnt. Das heißt, je mehr Geld ich abhebe umso weniger befindet sich auf dem Konto.

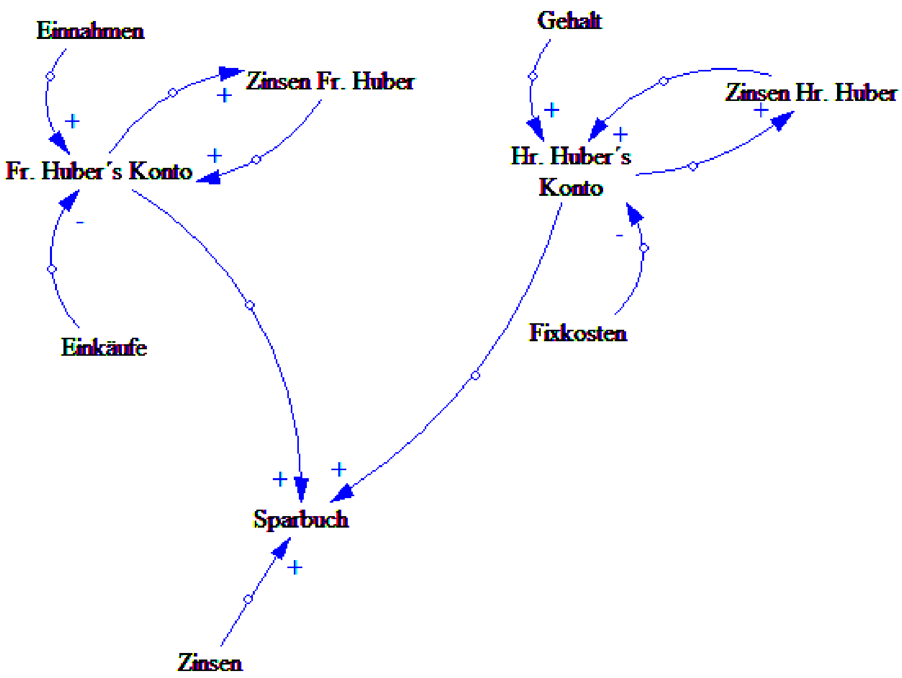


Abbildung 23: Wirkungsdiagramm Vensim

Der nächste Schritt, den ich mit dem Programm zeigen möchte, ist die Möglichkeit ein Flussdiagramm zu machen. Dazu muss bestimmt werden, aus welchen Komponenten es besteht.

- Fr. und Hr. Hubers Konto = Bestandsgröße
- Gehalt = Hilfsgröße/Konstante
- Einkäufe = Hilfsgröße/Proportionalitätsfaktor
- Fixkosten = Hilfsgröße/Konstante
- Zinsen = Hilfsgröße/Proportionalitätsfaktor

- Sparbuch = Bestandsgröße

Zum Erstellen der Bestandsgrößen muss eine **Box Variable** aufgezogen werden. Die Flusslinie findet man im Menü neben dem Wirkungspfeil und Hilfsgrößen sind normale Variablen.

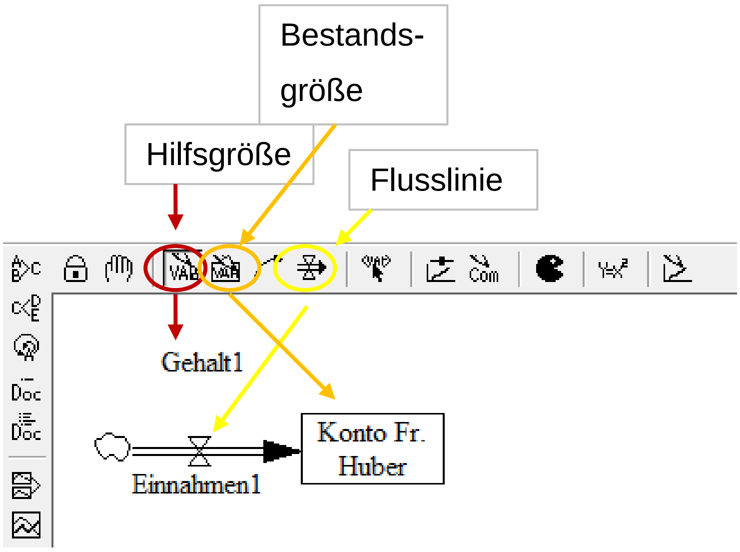


Abbildung 24: Flussdiagrammerstellung

Um einen besseren Überblick über die einzelnen Komponenten zu haben, können diese zum Beispiel in eine Kreis- oder Diamantform gebracht werden. Dies geschieht durch einen Klick mit der rechten Maustaste. Unter Shape kann man die äußerlichen Veränderungen durchführen.

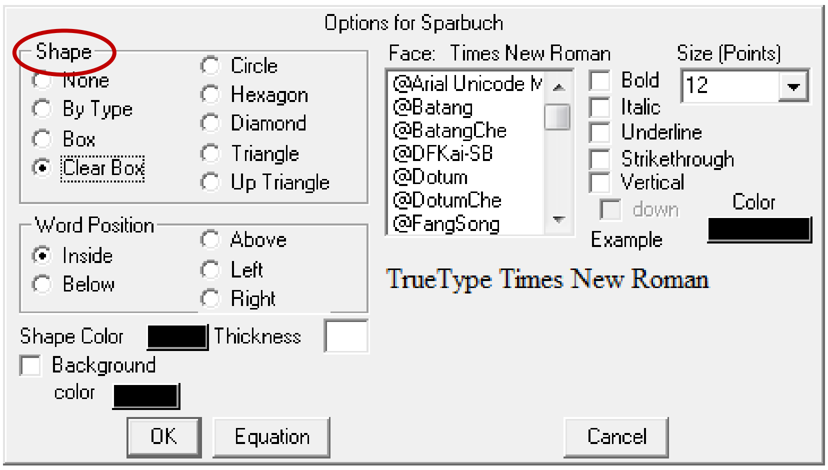


Abbildung 25: Einstellungen Flussdiagramm

Ich habe mich für die Flussraten wie schon im Kapitel Flussdiagramme für eine runde Form und für die Hilfsgrößen um sie besser unterscheiden zu können für eine Diamantform entschieden.

Die einzelnen Komponenten werden bei Bedarf mit Wirkungslinien miteinander verbunden.

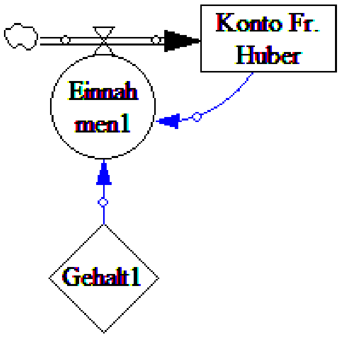


Abbildung 26: Flussdiagrammausschnitt

Das gesamte Beispiel sieht folgendermaßen aus.

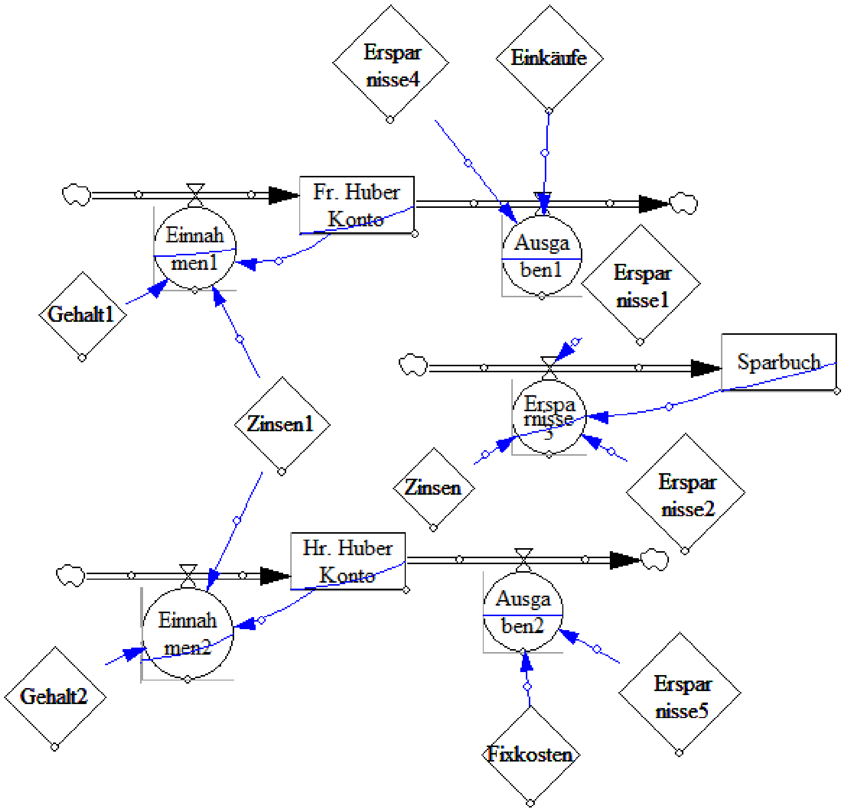


Abbildung 27: Flussdiagramm Vensim

Das Beispiel zeigt die zwei Konten von Frau und Herrn Huber. Die beiden haben denselben Zinssatz. Somit ist nur eine Hilfsgröße notwendig. Die Flussraten Einnahmen werden mit dem Gehalt und den Zinsen verbunden. Da die Zinsen von der Höhe des Kontos abhängen, wird eine Wirkungslinie an die Flussrate gelegt. Die zweite Flussrate Ausgaben zieht vom Konto die Fixkosten bzw. Einkäufe und die Ersparnisse, welche später auf das Sparbuch gelegt werden, ab. Zum Sparbuch werden die zwei Ersparnisse hinzugefügt und die Zinsen verrechnet.

Die Erstellung der Simulation erfolgt durch Hinzufügen der Differenzengleichungen. Dazu wird das Symbol **Equations** gedrückt und das zu öffnende Untermenü bearbeitet.

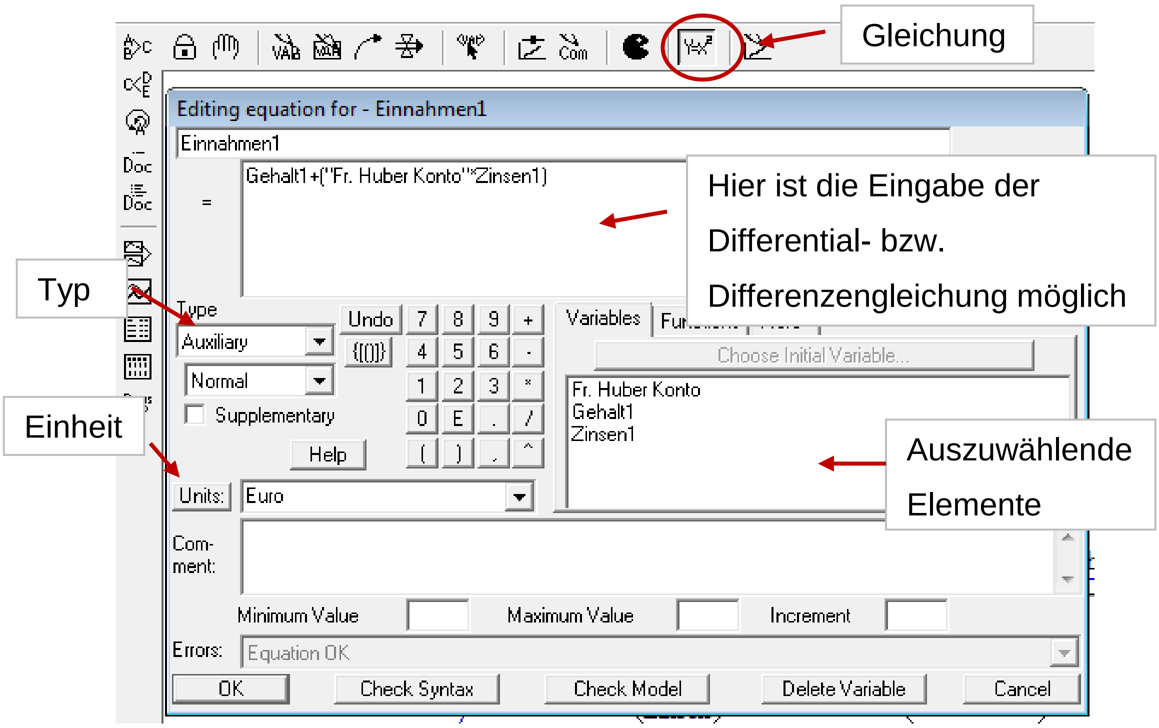


Abbildung 28: Einstellungen Differenzengleichung

Am Beispiel der Flussrate Einnahme1 kann man erkennen, dass zu dem Gehalt die Zinsen vom Konto addiert werden. In diesem Menü kann man unter anderen Gleichungen eingeben, den Typ des Symbols und welcher Einheit er angehört.

Um herauszufinden wann auf dem Sparbuch 50000 Euro liegen, kann man sich des Menüs auf der linken Seite bedienen. Der viert letzte Button gibt einen Graphen aus.

Das Symbol darunter steht für eine waagrechte Auswertung der Bestandsgröße. Das vorletzte Symbol gibt eine senkrechte Tabelle aus.

Diese Grafik zeigt das Wachstum des Sparbuches. Es ist möglich mehrere Funktionen nebeneinander zu legen und somit die Unterschiede zu beobachten.

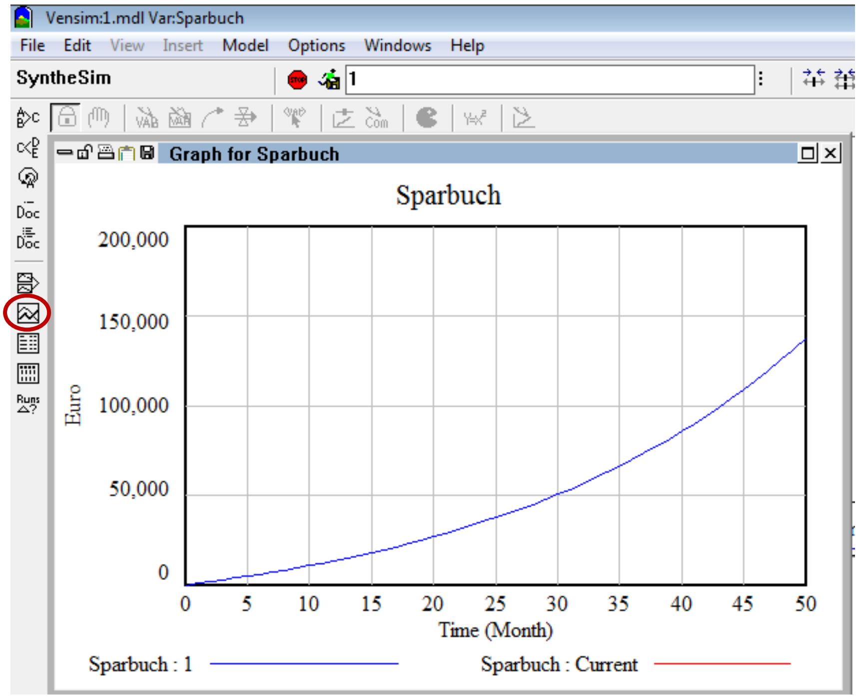


Abbildung 29: Graph Vensim

Die waagrechte Tabelle erleichtert bei mehreren Zeilen einen Vergleich.

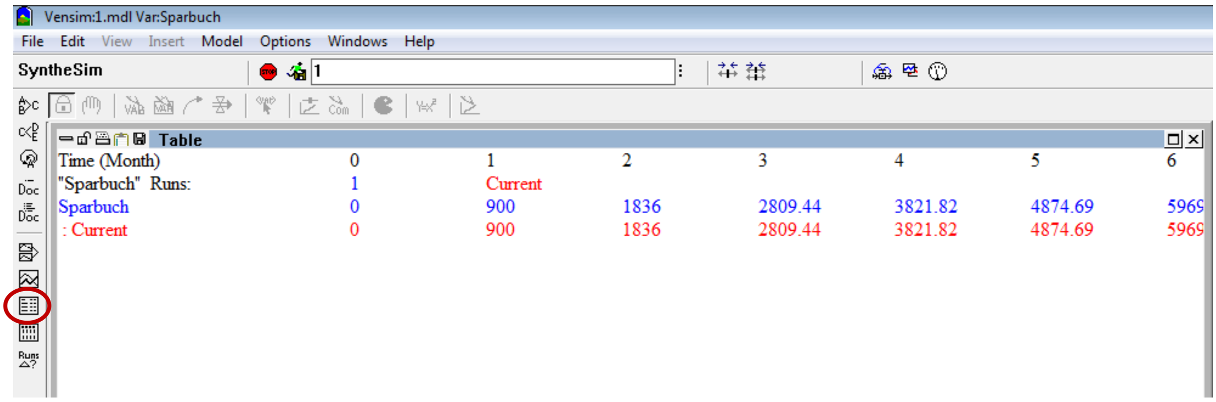
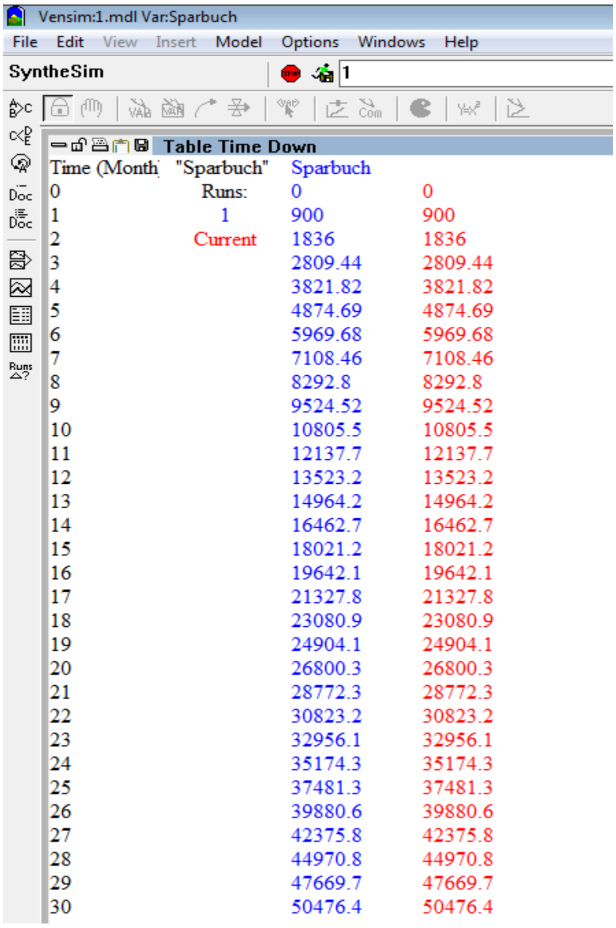


Abbildung 30: Tabelle 1 Vensim



Time (Month	"Sparbuch"	Sparbuch	
0	Runs:	0	0
1	1	900	900
2	Current	1836	1836
3		2809.44	2809.44
4		3821.82	3821.82
5		4874.69	4874.69
6		5969.68	5969.68
7		7108.46	7108.46
8		8292.8	8292.8
9		9524.52	9524.52
10		10805.5	10805.5
11		12137.7	12137.7
12		13523.2	13523.2
13		14964.2	14964.2
14		16462.7	16462.7
15		18021.2	18021.2
16		19642.1	19642.1
17		21327.8	21327.8
18		23080.9	23080.9
19		24904.1	24904.1
20		26800.3	26800.3
21		28772.3	28772.3
22		30823.2	30823.2
23		32956.1	32956.1
24		35174.3	35174.3
25		37481.3	37481.3
26		39880.6	39880.6
27		42375.8	42375.8
28		44970.8	44970.8
29		47669.7	47669.7
30		50476.4	50476.4

Abbildung 31: Tabelle 2 Vensim

Die Werte werden als Tabelle ausgegeben. Auf diesem Diagramm kann man die Lösung des Beispiels ablesen. Die Familie Huber müsste 30 Monate, das heißt zwei Jahre und sechs Monate auf ihr neues Auto sparen.

Resümee

+ Das Programm ist einfach zu bedienen.
+ Es ist vor allem für den Unterricht von vernetzten Systemen zu empfehlen, weil SchülerInnen nur ein Ergebnis bei der Eingabe von Gleichungen erzielen werden, wenn sie den Stoff wirklich verstanden haben.
+ Die Erstellung von Flussdiagrammen und Wirkungsdiagrammen
+ Aus Flussdiagrammen können Simulationen durchgeführt werden.
+ Es gibt die Möglichkeit einzelne Elemente miteinander zu vergleichen.

- Als Nachteil kann man sehen, dass man, wenn nur Berechnungen angestellt werden müssen, in Excel wesentlich schneller vorankommt.
- Es ist ein wenig umständlich, den einzelnen Elementen eine andere Form zu geben um sie besser unterscheiden zu können.

Stella

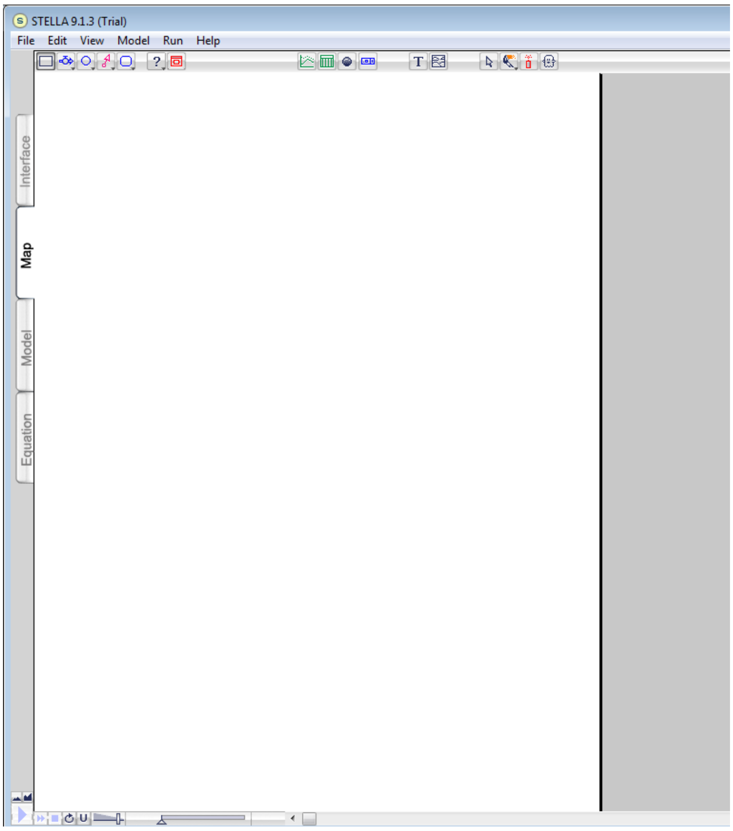


Abbildung 32: Stella

Was kann das Programm?

Stella ist wie Vensim dazu konzipiert dynamische Systeme darzustellen. Auf der Firmen eigenen Homepage http://www.iseesystems.com wird das Programm als praktischer Weg angegeben um Systeme zu visualisieren und um herauszufinden was wirklich hinter diesen steckt.

Es können Modelle erstellt und verschiedene Szenarien durchgeführt werden. Stella kann dafür verwendet werden Simulationen über einen gewissen Zeitraum durchzuführen, einen Schritt zwischen Theorie und Praxis zu machen, Kreativität auszuleben und die Verbindungen in den Systemen zu finden.[99]

---

[99] Vgl. http://www.iseesystems.com/softwares/Education/StellaSoftware.aspx; 1.Mai

Für die Zwecke der vernetzten Systeme werde ich:

- Wirkungsdiagramme erstellen
- Flussdiagramme erstellen
- Eingabe von Differential und Differenzgleichungen
- Auswertungen mittels Diagrammen und Simulationen

Beispiel: Aufschwung einer Gemeinde

Aufgabenstellung:

Ein Ort ist vom Schwund von Gemeindemitgliedern und Verschuldung geplagt. Als Lösung wird die Ansiedlung neuer Firmen gesehen. Dies würde neue Arbeitsplätze und somit einen Aufschwung der Wirtschaft fördern.

Es wird angenommen, dass sich drei Firmen in dem Ort ansiedeln. Diese stellen insgesamt 100 Personen ein. Pro Jahr werden 40 Einwohner mehr eingestellt. Pro Angestellten erhält die Gemeinde 650 Euro Kommunalsteuereinnahmen von den Firmen.

Zu Beginn befinden sich 500 Personen im Ort. Damit könnte der Ort mehr Steuer, welche 666 Euro pro Gemeindemitglied beträgt, lukrieren.

Die Ausgaben des Ortes stellen 300.000 Euro Fixkosten pro Jahr und die Gemeinde gibt ca. 60% des Kapitals für den Aufbau von neuer Infrastruktur aus.

Nimm an, dass pro Jahr ca. 2% der Bevölkerung stirbt, 5% umzieht und 2% durch Geburten wächst.

Die Gemeinde hat 1.000.000 Euro Schulden. Wann wären diese getilgt? Stelle dieses Beispiel in einer Simulation dar.

Das Wirkungsdiagramm wird im Menü mittels des Symbols **Module** erzeugt. Nach einem Doppelklick kann es auf das Arbeitsblatt aufgezogen und mit einem Namen versehen werden. Gleich neben dem Module Symbol befindet sich in der Symbolleiste **Action Connector**. Es dient dazu Wirkungslinien zu ziehen.

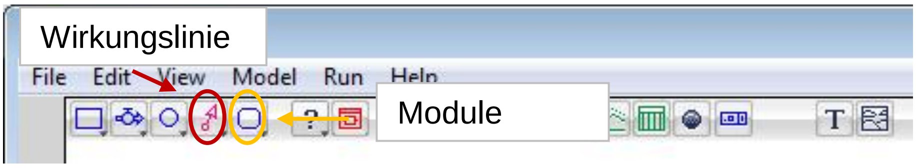


Abbildung 33: Menü

Die Polarität der Pfeile einzugeben ist mittels Klick der rechten Maustaste auf den Schaft des Pfeiles möglich. Das Ergebnis sieht man neben der Spitze.

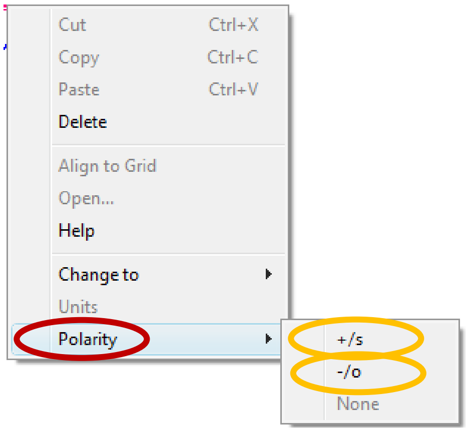


Abbildung 34: Pfeileinstellungen

Das fertige Wirkungsdiagramm sieht folgendermaßen aus.

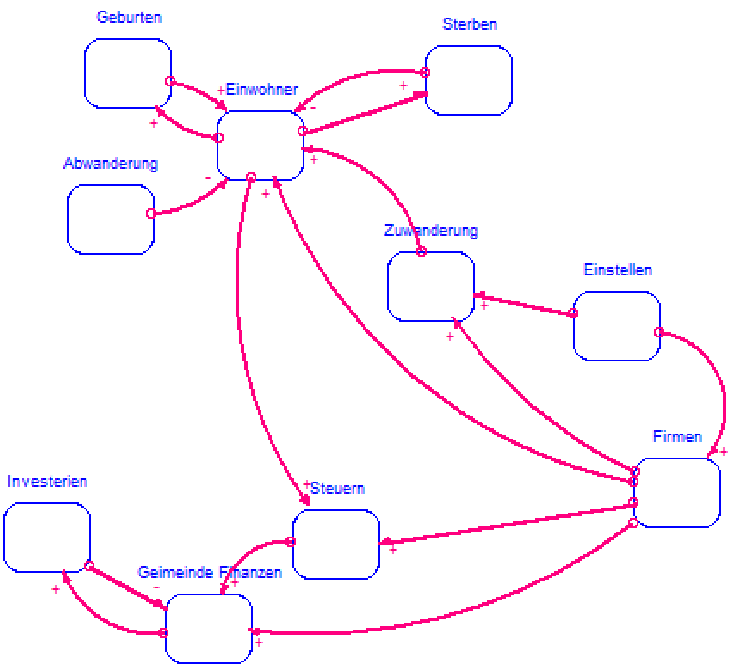


Abbildung 35: Wirkungsdiagramm Stella

Die Komponenten des Diagrammes sind folgendermaßen definiert:

- Einwohner = Bestandsgröße
- Gemeinde Finanzen = Bestandsgröße
- Mitarbeiter der Firma = Bestandsgröße
- Geburt/Sterben/Wegziehen = Hilfsgröße/Proportionalitätsfaktor
- Investieren = Hilfsgröße/Proportionalitätsfaktor
- Fixkosten = Hilfsgröße/Konstante
- Steuern/Kommunalsteuern = Hilfsgröße/Konstante
- Arbeiter = Hilfsgröße/Konstante

Beim Erstellen des Flussdiagramms startet man mit dem Aufziehen der einzelnen Symbole. Es besteht aus den bekannten Wirkungslinien, **Stock** für die Bestandsgröße, daneben befindet sich **Flow** für die Flusspfeile und gleichzeitig für die Flussraten und **Converter** für die Hilfsgrößen.

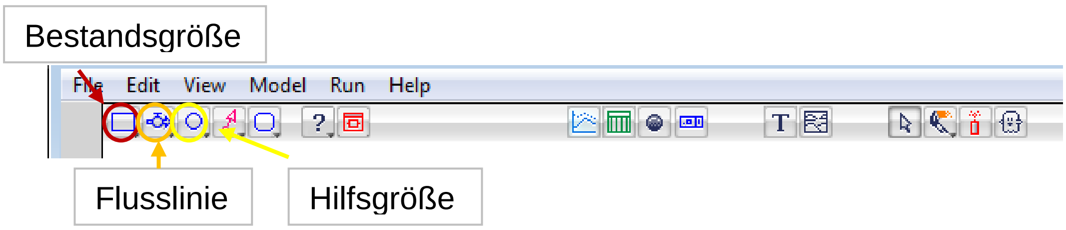


Abbildung 36: Erstellung von Flussdiagramm

Fertig würde das Flussdiagramm folgendermaßen aussehen:

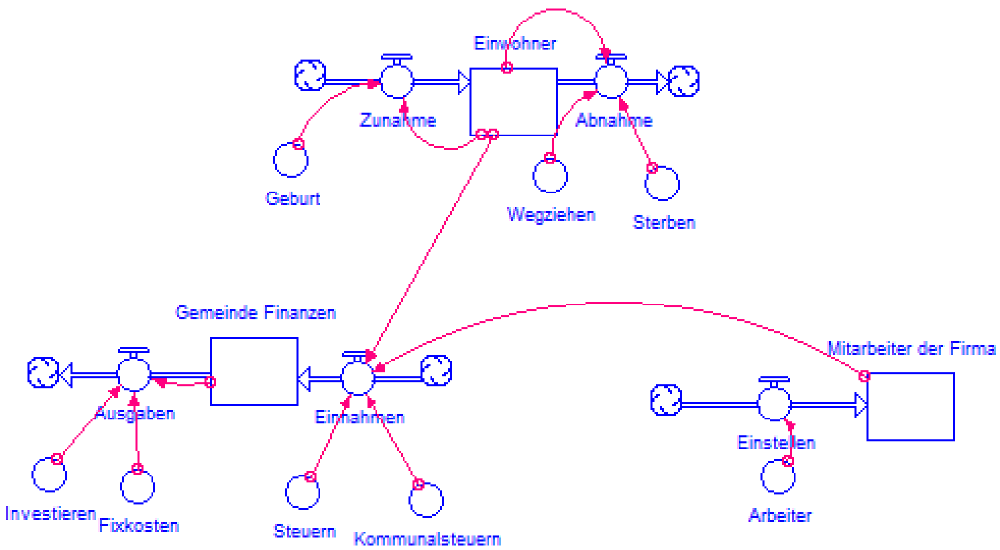


Abbildung 37: Flussdiagramm Stella

Der nächste Schritt beschäftigt sich mit der Eingabe der Gleichungen. Dazu wird mittels Doppelklick auf das jeweilige Symbol ein Fenster geöffnet. Am Beispiel der Flussrate Ausgaben würde dies folgendermaßen aussehen.

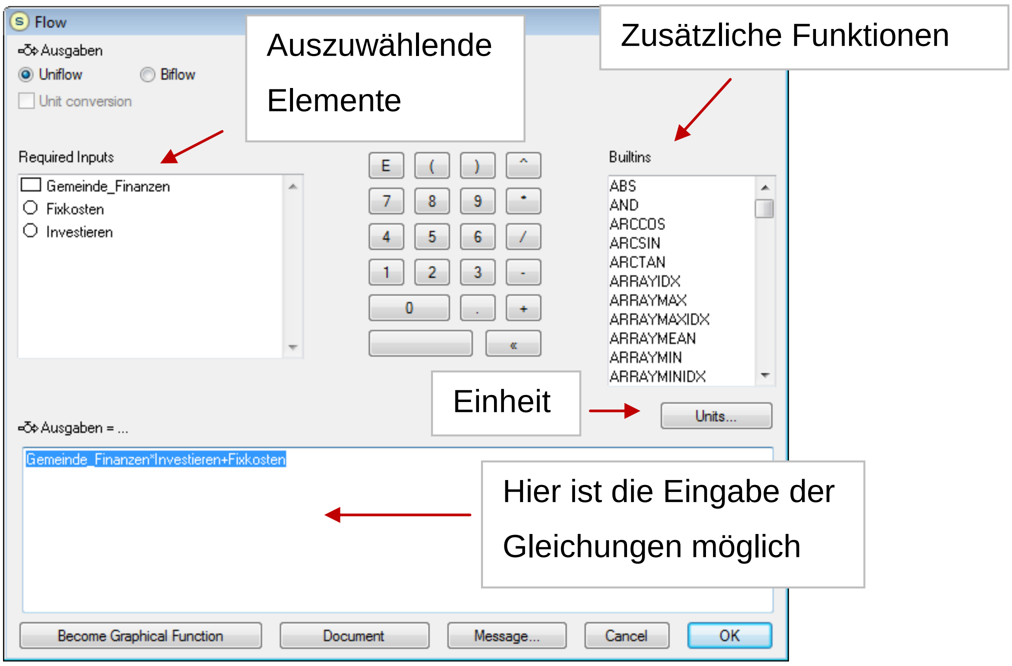


Abbildung 38: Eingabe von Differenzengleichungen

Im Ausgabenbereich können die Gleichungen eingegeben werden. Die Builtins geben zusätzliche Funktionen an. Mittels Units können die Einheiten angegeben werden. In meinem Beispiel habe ich ROUND verwendet um bei der Geburts-, Sterbe- und Abwanderungsrate genaue Werte zu erhalten.

Für eine Überprüfungsmöglichkeit der Gleichungen ist auch gesorgt. Mittels der Navigation an der Seite kann man zu **Equation** wechseln. In diesem Menü werden die Gleichungen der Bestandsgrößen angegeben. Dabei kann man Informationen über den Einfluss und den Ausfluss erhalten und über den Startwert. Die Werte der Hilfsgrößen stehen ebenfalls übersichtlich zur Verfügung.

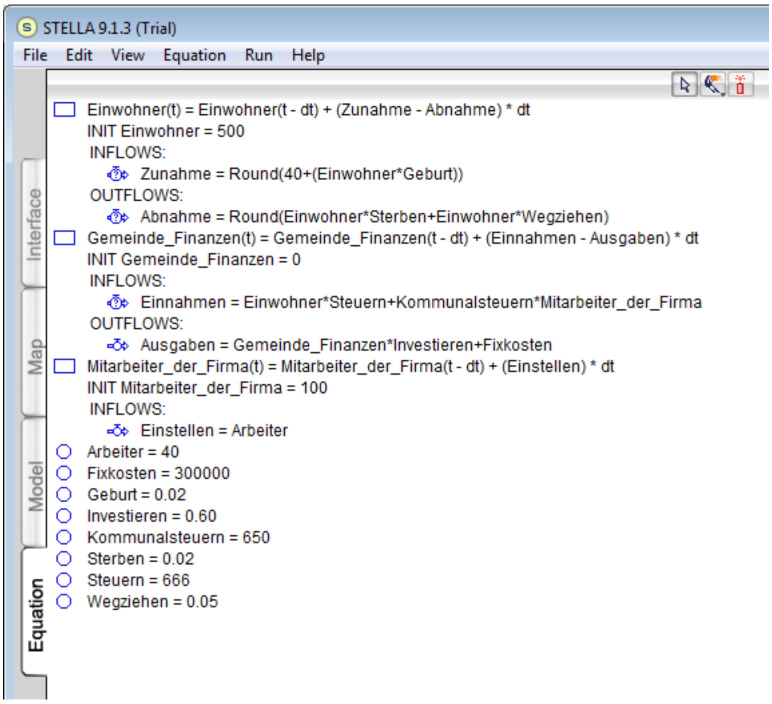


Abbildung 39: Anzeige von Berechnungen

Um das Ergebnis der Aufgabe zu erlangen muss die Simulation gestartet werden. Den Wert der Lösung kann man dann entweder aus der Tabelle oder aus der Grafik herauslesen.

Dazu werden die Symbole **Graph Pad** und **Table Pad** aktiviert.

Abbildung 40: Erstellung von Graphen und Tabellen

Anhand der Graph Pads werde ich die weiteren Schritte veranschaulichen. Nach dem Doppelklick auf dem Symbol klickt man auf den Arbeitsbereich. Durch einen Klick auf die Stecknadel am linken Rand wird das Fenster auf der Fläche fixiert. Danach muss der gewünschte Abschnitt des Flussdiagrammes markiert und in die Grafik gezogen werden. Bevor die Simulation gestartet werden kann, sollte mittels **Run Specs** ein Blick über die Länge der Simulation und die Art der Integrationsmethode geworfen werden. Danach wird das Modell mittels Run aktiviert.

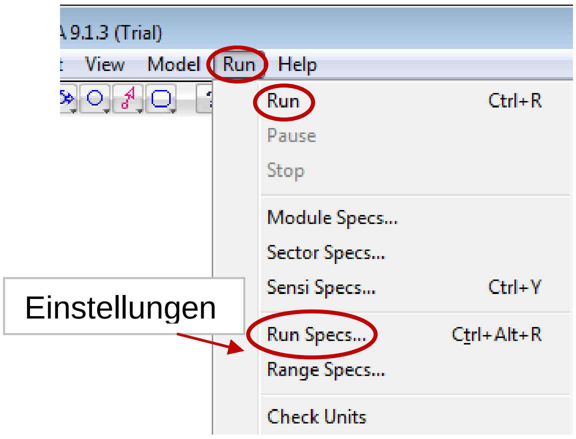


Abbildung 41: Start einer Simulation

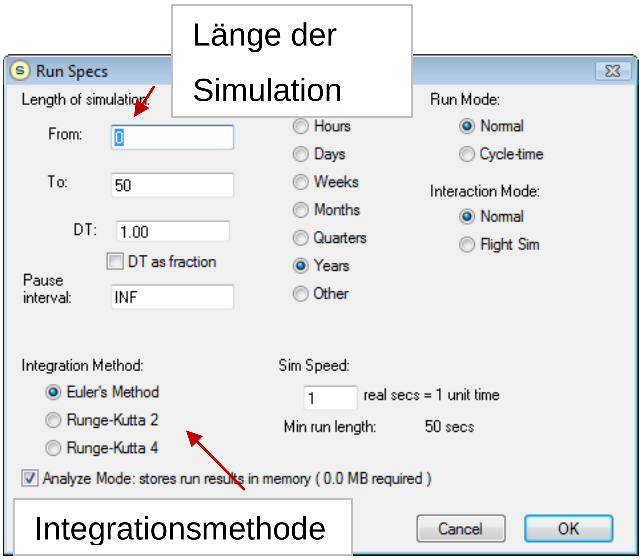


Abbildung 42: Einstellungen Simulation

Nun zu den zwei verschiedenen Auswertungsarten. Bei der Grafik kann man eine Gerade sehen. Diese steigt stetig an und erreicht vor dem achtzehnten Jahr die 1.000.000 Grenze.

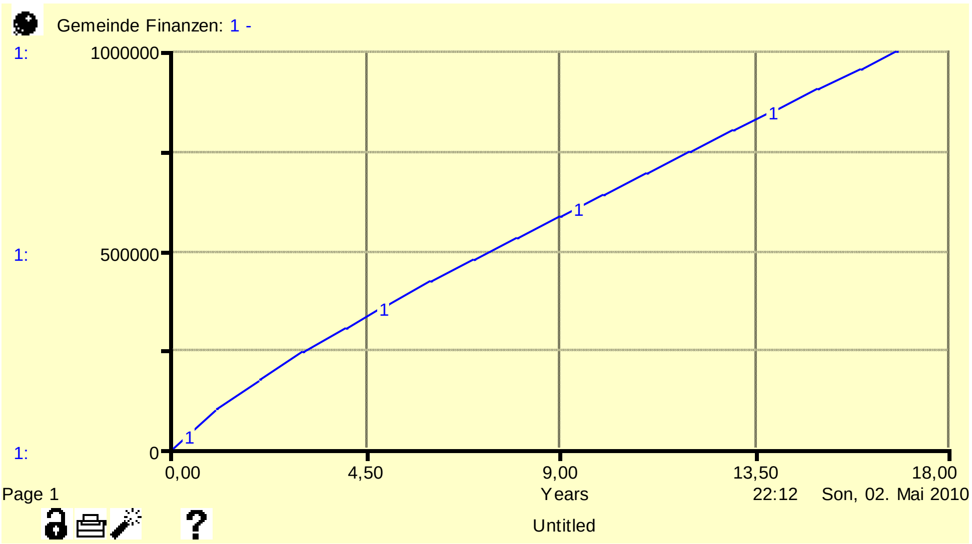


Abbildung 43: Graph Stella

In der Tabelle und auch in der Grafik ist es möglich verschiedene Elemente miteinander zu vergleichen. Im Fall der Tabelle habe ich mich für die Einwohner, Gemeinde Finanzen und die Mitarbeiter der Firma entschieden.

22:12 02.05.2010 Table 1 (Untitled Table)

Years	Einwohner	Gemeinde Finanzen	Mitarbeiter der Firma
0	500,00	0,00	100,00
1	515,00	98.000,00	140,00
2	529,00	173.190,00	180,00
3	543,00	238.590,00	220,00
4	556,00	300.074,00	260,00
5	568,00	359.325,60	300,00
6	579,00	417.018,24	340,00
7	590,00	473.421,30	380,00
8	601,00	529.308,52	420,00
9	611,00	584.989,41	460,00
10	620,00	639.921,76	500,00
11	629,00	693.888,71	540,00
12	638,00	747.469,48	580,00
13	646,00	800.895,79	620,00
14	654,00	853.594,32	660,00
15	661,00	906.001,73	700,00
16	668,00	957.626,69	740,00
17	674,00	1.008.938,68	780,00
18	680,00	1.059.459,47	820,00

Abbildung 44: Tabelle Stella

Die Gemeinde würde nach 17 Jahren 1 Million Euro besitzen.

Resümee:

+ Die Homepage der Firma bietet ein sehr gutes Tutorium an. Dieses hilft um die Funktion des Programmes schnell zu verstehen. Es ist in kleine Kapitel unterteilt und dauert nur wenige Sekunden.
+ Die integrierte Hilfe ist sehr übersichtlich.
+ Die grafische Oberfläche ist überschaubar und hat ein sehr schönes klares Design.
+ Die Simulationen bieten eine gute Auswertungsmöglichkeit. Diese sind simpel zu verwenden und sehr vielfältig.
+ Equation eignet sich gut für den Schulunterricht. Damit können SchülerInnen ihre Eingaben selbst überprüfen und sehen, was wirklich hinter dem Programm steht.
+ Eingabe von Gleichungen ist gut gelöst.

– Das Programm ist eigentlich nicht wirklich dazu konzipiert Wirkungsdiagramme zu erstellen. Ich habe dieses Problem durch die Verwendung von Modulen gelöst.

- Bei Benützung der Symbole um z.B. Wirkungslinien aufzuziehen muss jedes Mal aufs Neue geklickt werden. Der ausgewählte Knopf bleibt nicht weiter aktiv.

Dynasys

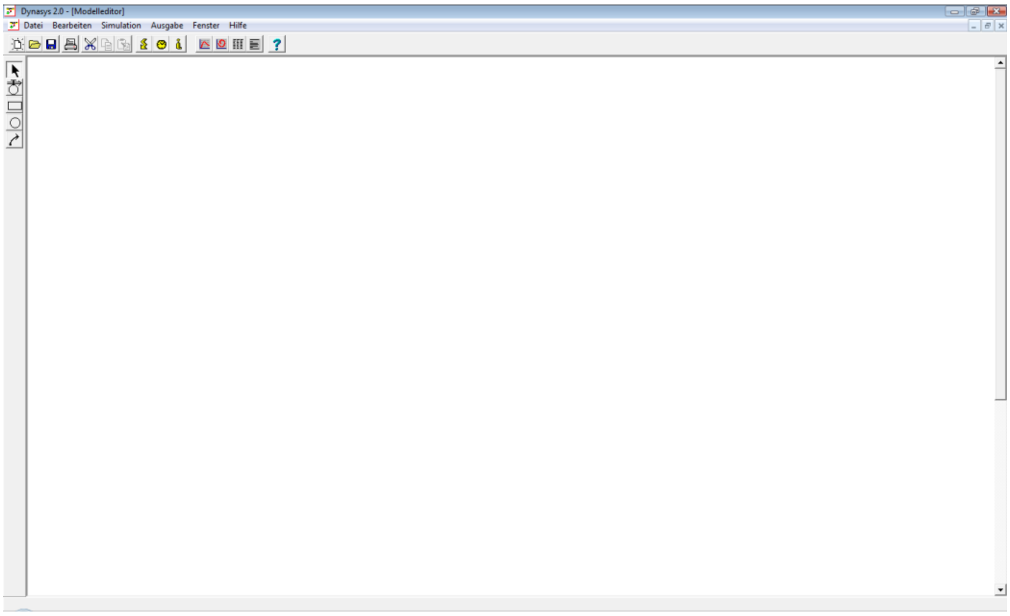


Abbildung 45: Dynasys

Was kann das Programm?

„Mit ihm lassen sich Simulationsmodelle mit Hilfe der Modellbildungsmethoden der System Dynamics auf einfache Weise realisieren. Das Programm wurde für die Anforderungen des Unterrichts konzipiert und ermöglicht eine einfache Umsetzung der Modelle in eine ausführbare Form. Die Ergebnisse der Simulation können sofort graphisch dargestellt und ausgedruckt werden.“…“ Die Ergebnisse der Berechnungen können als Zeitkurven, Phasendiagramme und Tabellen ausgegeben werden. Die Skalierung erfolgt dabei wahlweise automatisch oder manuell. Zusätzlich lassen sich alle Modellgleichungen darstellen.“[100]

Für die Zwecke der vernetzten Systeme ist möglich:

- Flussdiagramme erstellen
- Eingabe von Differential und Differenzgleichungen
- Auswertungen mittels Diagrammen und Simulationen

[100] http://www.hupfeld-software.de/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Dynasys; 2. Mai

Beispiel

Aufgabenstellung

Susanne liest in einem Krimi, dass es bei einer Vergiftung mit 7,9 Gramm Vitamin A langsamer zum Herzstillstand kommt als bei einem 7,9 Gramm Giftgemisch, das dreimal so schnell wirkt, obwohl das Gift eine tägliche Abbaurate von 0,1% hat. Der Körper kann Vitamin A nicht abbauen.

Der Detektiv im Buch meint das Giftgemisch würde schneller töten. Beide haben eine tödliche Wirkung ab 220 Gramm. Hat er damit Recht?

Löse das Beispiel mittels Schaubild und lies aus der Tabelle, wie lange es dauern wird, bis die 220 Gramm erreicht sind.

Das Erzeugen eines Flussdiagrammes ist mittels des waagrechten Menüs möglich. In ihm sind alle vier verschiedenen Bauelemente untergebracht.

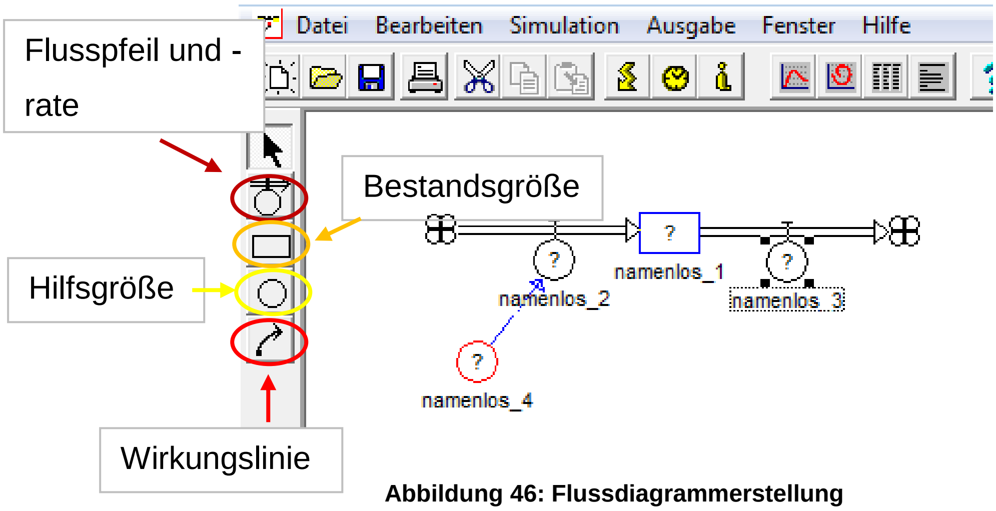


Abbildung 46: Flussdiagrammerstellung

Das fertige Flussdiagramm hat folgende Form.

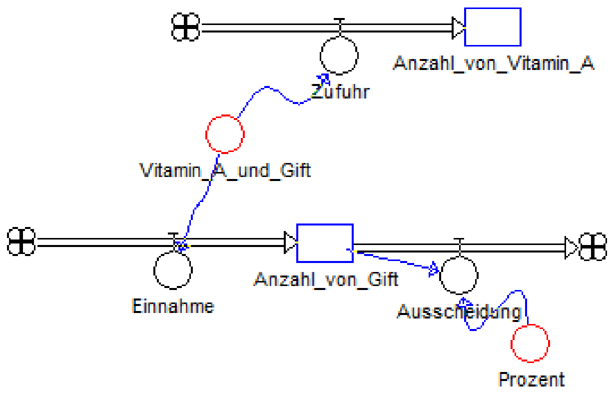


Abbildung 47: Flussdiagramm Dynasys

Durch einen Klick auf das jeweilige Element ist es möglich Gleichungen einzugeben. Am Beispiel der Flussgröße Zufuhr kann man erkennen, dass die Eingänge, der Name, verschiedene Funktionen und die Eingabe angezeigt werden.

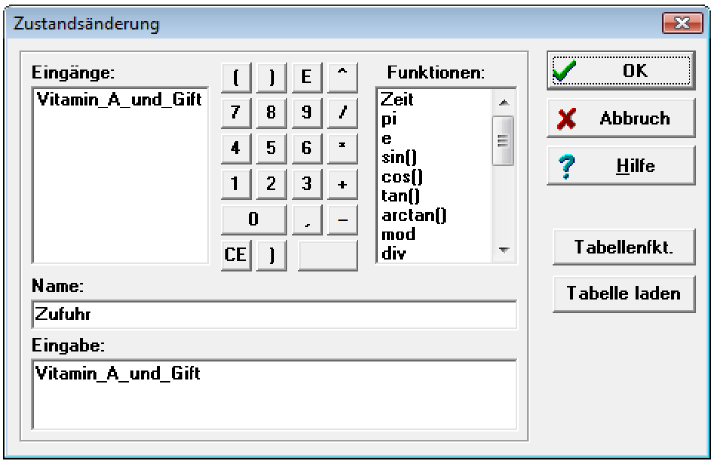


Abbildung 48: Eingabe von Differenzengleichung

Nach der Eingabe aller Gleichungen können diese überprüft werden.

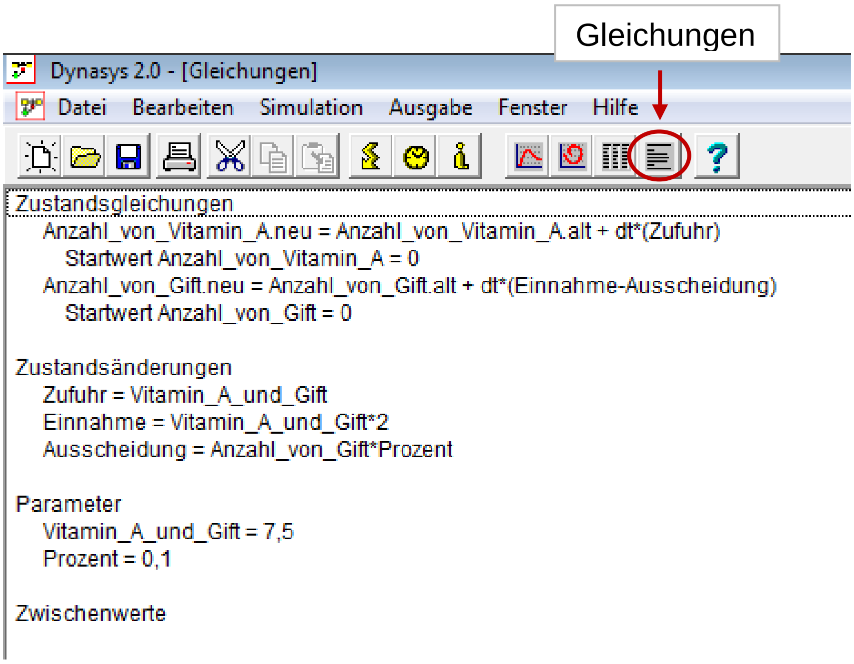


Abbildung 49: Gleichungen

Bevor Auswertungen gemacht werden können, muss im Menü Simulation -> Starten gedrückt werden.

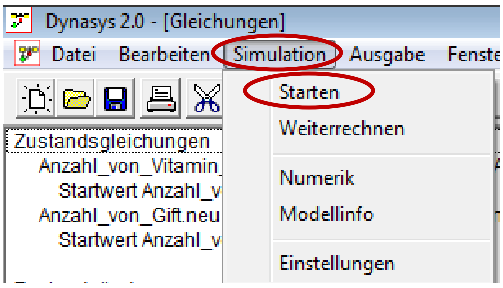


Abbildung 50: Simulation starten

Das Programm bietet die Möglichkeit die Ergebnisse der Simulation entweder mittels Zeitdiagramm, Phasendiagramm oder Tabelle darzustellen.

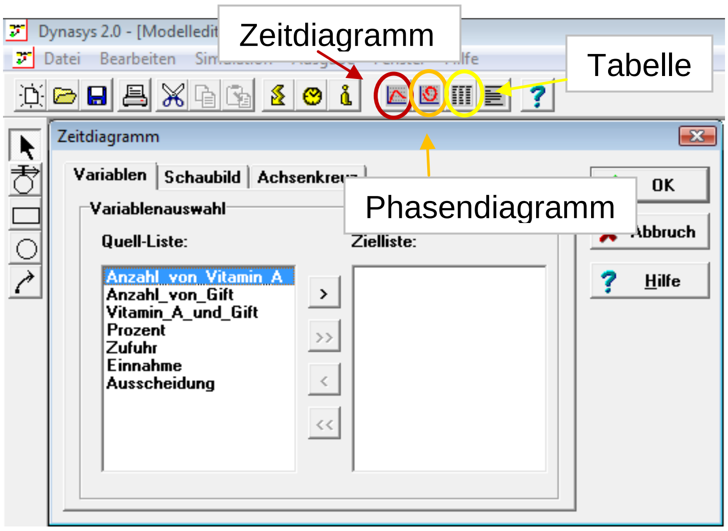


Abbildung 51: Erstellung von Diagrammen und Tabelle

Die Lösung der Aufgabe kann man in dem Zeitdiagramm und in der Tabelle finden.

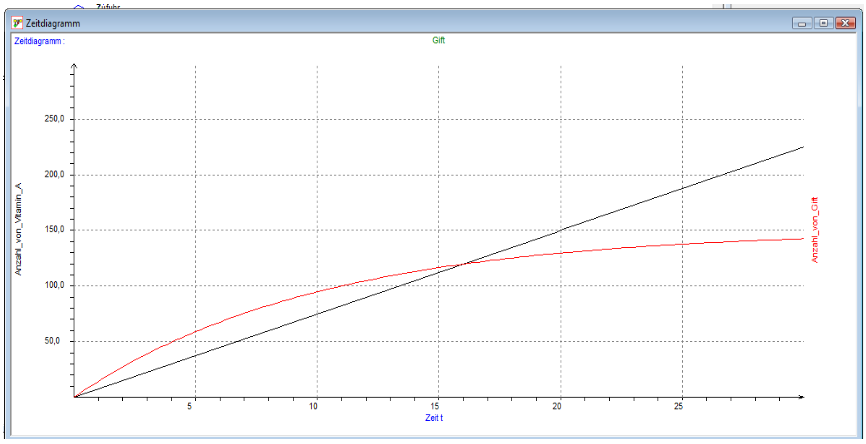


Abbildung 52: Graph Dynasys

Die rote Kurve steht für das Gift. Während dieses am Beginn stark ansteigt, hat es seinen Grenzwert bei 150 g erreicht. Vitamin A wird von nichts gebremst und ist somit tödlicher.

27,70	207,75	140,60
27,80	208,50	140,69
27,90	209,25	140,79
28,00	210,00	140,88
28,10	210,75	140,97
28,20	211,50	141,06
28,30	212,25	141,15
28,40	213,00	141,24
28,50	213,75	141,32
28,60	214,50	141,41
28,70	215,25	141,50
28,80	216,00	141,58
28,90	216,75	141,66
29,00	217,50	141,75
29,10	218,25	141,83
29,20	219,00	141,91
29,30	219,75	141,99
29,40	220,50	142,07
29,50	221,25	142,15
29,60	222,00	142,23
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Abbildung 53: Tabelle Dynasys

Wie man auch in der Tabelle sehen kann erreicht Vitamin A schneller das Ziel. Somit wirkt es schädlicher als das Gift.

Resümee

- Die Homepage von Dynasys bietet gute Beispiele zu verschiedenen Themengebieten
- Beim Download ist ein Handbuch enthalten
- Das Programm ist sehr simpel und leicht verständlich
- Für die Verwendung ist kein Tutorium notwendig

– Die Pfeile verändern sich zackenartig beim Verlängern.
– Es sind keine Leerzeichen bei Beschriftung möglich
– Die Hilfe funktioniert nicht.
– In der getesteten Version sind Beschränkungen bei der Länge der Zeitachse und bei der Tabelle im Bezug auf die Zeit gegeben.

Endresümee zu den drei Computersituationen

Jedes der getesteten Simulationsprogramme hat seine Stärken. Allen ist gemein, dass SchülerInnen sich den vernetzten Systemen aus einem ganz anderen Blickwinkel nähern können und das Themenfeld visualisieren. Die Eingabe der Gleichungen funktioniert bei allen Programmen gleich.

Dynasys ist das wahrscheinlich simpelste Simulationsprogramm. Es bietet dem Benutzer die wenigsten Möglichkeiten Einstellungen zu treffen. Auch ist in diesem Programm die Erstellung von Wirkungsdiagrammen nicht vorgesehen. Für den Fall, dass nur ein kurzer Blick in das Themenfeld geworfen wird oder die Klasse sehr schwach in Informatik ist, ist es ein gutes Werkzeug. Bei interessierten SchülerInnen wäre es aus meiner Sicht nicht ausreichend.

Stella ist das modernste Programm. Die online Tutorien sind aufschlussreich und zeigen auf, dass es viel mehr als das von mir gezeigte Problem lösen kann. Leider ist es beim erstmaligen Testen schwierig jede Funktion sofort zu erkennen, zum Beispiel beim Erstellen der Tabellen. Hierbei muss man das gewünschte Flussdiagramm markieren und in die leere Tabelle ziehen. Nach der Eingewöhnungsphase ist es jedoch sehr zu empfehlen. Hier stellen sich nicht die Probleme mit den zu kleinen Einstellungen. Eine eigenständige Klasse wird Freude an diesem Produkt haben.

Vensim arbeitet stark mit der integrierten Symbolleiste zusammen. Erst nach einem Klick auf das jeweilige Bild kann man Gleichungen eingeben. Dadurch wirkt es etwas klobig. Es ist das einzige Programm mit dem, man von Haus aus Wirkungsdiagramme zeichnen kann.

Für den Schulgebrauch würde ich Vensim empfehlen. Es ist einfach zu verwenden. Man kann damit alle Möglichkeiten ausschöpfen um vernetzte Systeme darzustellen.

Wachstum

In dem nächsten Kapitel beschäftige ich mich mit dem Thema Wachstum. Die Beispiele werden zu Beginn mittels Wirkungs- und Flussdiagramm dargestellt. Danach untersuche ich sie mittels Excel. Dabei wird jeweils eine Tabelle mit den Daten und ein Diagramm erzeugt.

Vernetzte Systeme haben die Möglichkeit zu wachsen. Es ist möglich, dass sie dabei Grenzen haben oder sich bis ins Unendliche weiterentwickeln.

Ich untersuche dabei vier Wachstumsarten:

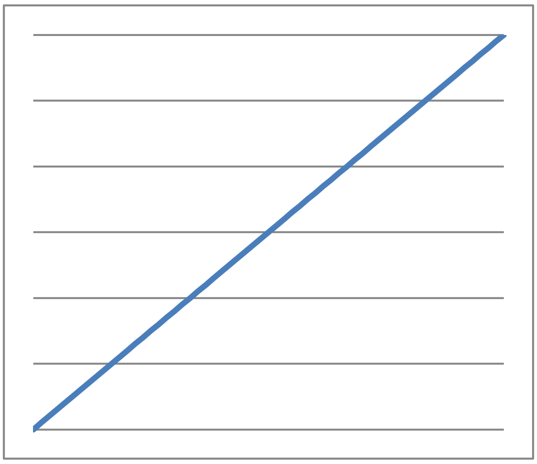


Abbildung 54: Lineares Wachstum

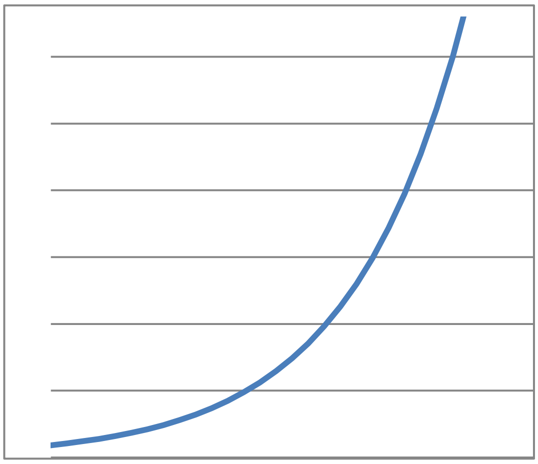


Abbildung 55: Exponentielles Wachstum

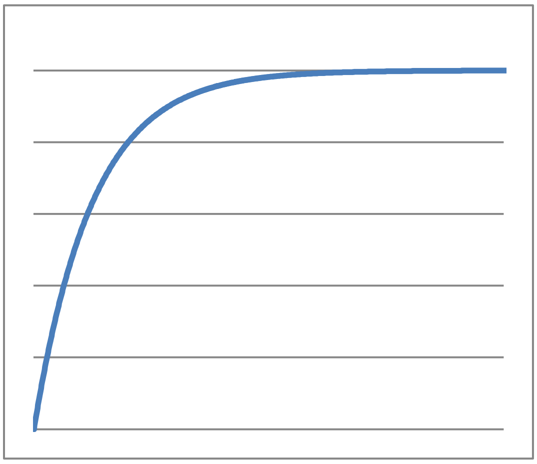


Abbildung 56: Begrenztes Wachstum

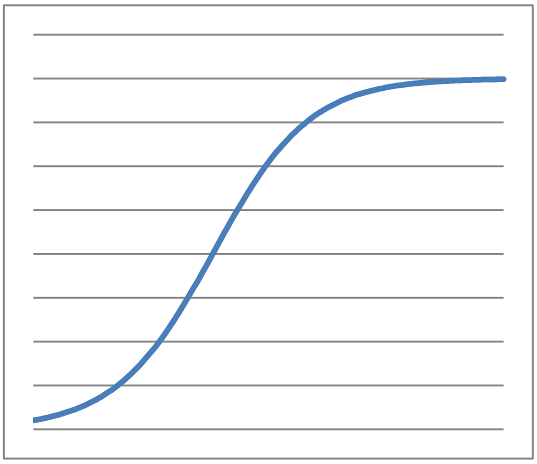


Abbildung 57: Logistisches Wachstum

Lineares Wachstum

Definition

Eine Folge wächst linear, wenn ihre Differenzenfolge mit $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ konstant ist. Man kann auch sagen: $x_{n+1} - x_n = k$ mit $n \in N_0$

Beispiel

Aufgabenstellung

Ein 30 Jahre alter Kühlschrank verbraucht rund 1,20 Kilowattstunde und kostet der Familie pro Kilowattstunde ca. 20 Cent. Darum wird beschlossen einen neuen und stromsparenden Kühlschrank zu kaufen. Dieser würde 6079 Euro kosten und 0,46 Kilowattstunde verbrauchen.

a) Wann hat die Familie die Anschaffungskosten eingespart beziehungsweise ab welchem Zeitpunkt ist der neue Kühlschrank unter Einbeziehung von Anschaffungskosten billiger als der alte.
b) Die Familie beschließt einen billigeren Kühlschrank mit dem gleichen Verbrauch zu kaufen. Nach 2 Jahren soll dieser kostengünstige als der alte sein. Wie teuer müsste der Kühlschrank sein?

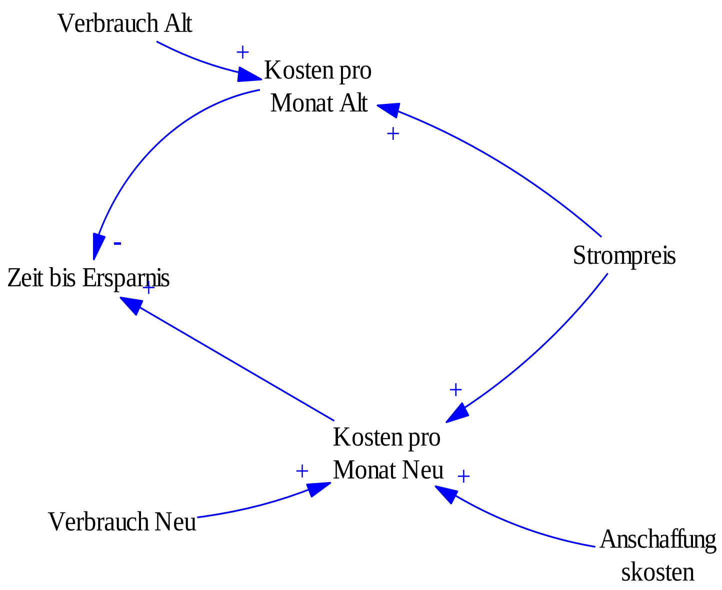


Abbildung 58: Wirkungsdiagramm lineares Wachstum

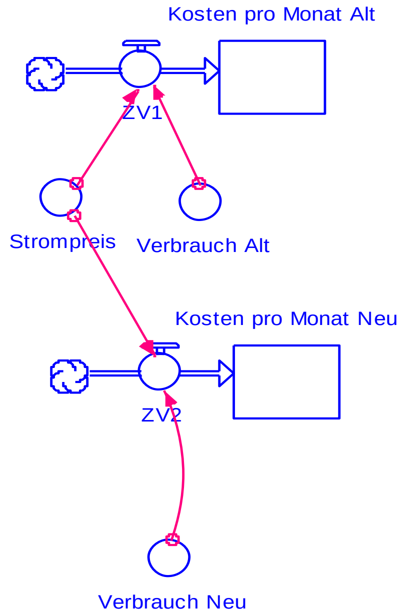


Abbildung 59: Flussdiagramm lineares Wachstum

Antwort a)

Für die Erstellung der Tabelle werden drei Spalten benötigt. In der ersten kann man erkennen, wie viele Wochen vergangen sind. In der zweiten und dritten Spalte kann man sehen, wie viel der alte und der neue Kühlschrank aktuell kostet. Zusätzlich müssen in die erste Zeile des neuen Kühlschrankes noch die Anschaffungskosten eingefügt werden.

A	B	C
Monat	Alter Kühlschrank Kosten	Neuer Kühlschrank Kosten
0	0	1079
1	=1,2*0,2*24*30+B2	=C2+0,46*0,2*24*30
2		
3		
4		

Zur Berechnung des Kostenstandes wird jeweils die vorangegangene Zelle mit dem Strompreis, Preis pro kWh, 24 Stunden und 30 Tagen multipliziert.

Als Veranschaulichung des linearen Wachstums kann man sehr gut erkennen, dass es sich um zwei Gerade handelt. Diese haben eine definierte gleichbleibende Steigung k. Sie treffen sich genau in einem Punkt. Dieser gibt auch die Antwort auf die Aufgabe.

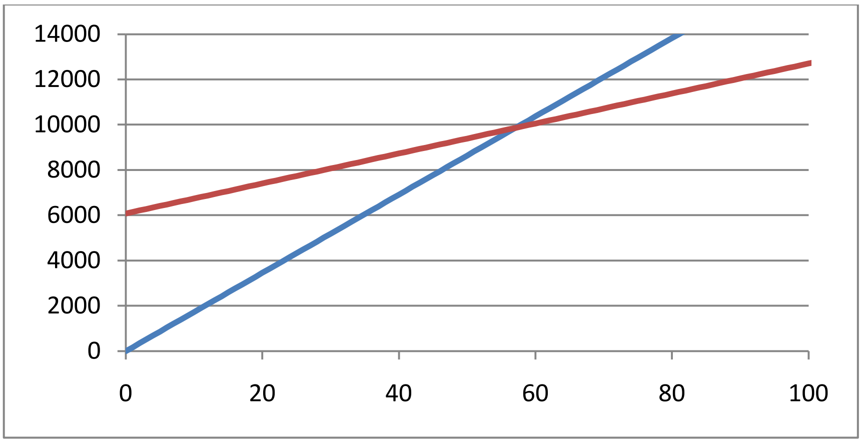


Abbildung 60: Lineares Wachstum Graph zu Antwort a)

Die genaue Lösung erhält man aus der Tabelle

60	10368	10053,4
61	10540,8	10119,64
62	10713,6	10185,88

Es würde somit rund 5 Jahre und 1 Monat dauern, dass sich der neue Kühlschrank rechnet.

Antwort b)

Um diese Frage zu beantworten, benutze ich einen Schieberegler. Mit diesem ist es möglich verschiedene Szenarien durchzuspielen und so das Ergebnis von 24 Monaten zu erreichen.

Den Schieberegler findet man im Menü unter **Entwicklertools -> Einfügen -> Bildlaufleiste**. Im Untermenü Steuerung ist es möglich einen Mini- und Maximalwert, Schrittweite einzugeben und den Regler mit der gewünschten Zelle zu verbinden. Im Fall des Beispiels handelt es sich um den Fixpreis des Kühlschrankes.

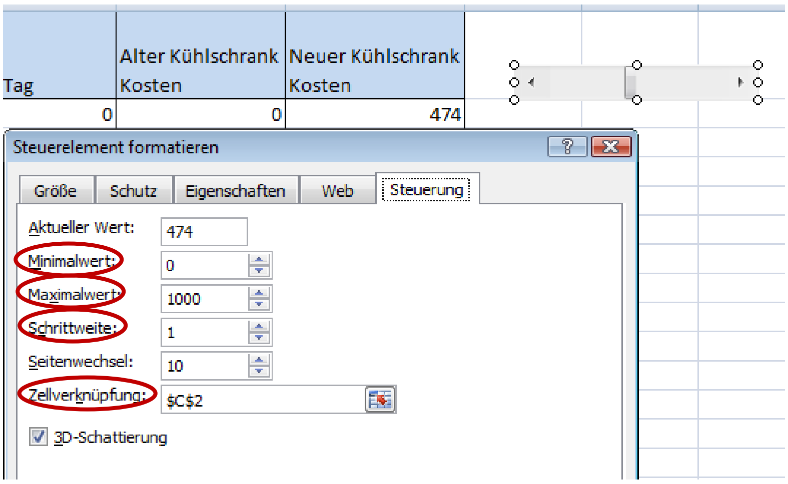


Abbildung 61: Erstellung Schieberegler

Bei einem Kaufwert von 2257 Euro wäre der neue Kühlschrank mit Berücksichtigung der Anschaffungskosten billiger als der alte.

Monat	Alter Kühlschrank Kosten	Neuer Kühlschrank Kosten
0	0	2557
1	172,8	2623,24
…	…	…
23	3974,4	4080,52
24	4147,2	4146,76
25	4320	4213

Exponentielles Wachstum

Definition

Eine Folge von Zahlen wächst exponentiell, wenn ihre Differenzenfolge proportional zum gegenwärtigen Bestand x_n ist.

Man kann auch sagen: $x_{n+1} - x_n = q \cdot x_n$

Beispiel

Aufgabenstellung

In einem Tierpark lebt eine Familie von Erdmännchen. Es wurde in langjährigen Untersuchungen festgestellt, dass sie sich mit dem richtigen Klima und dem richtigen Futter schneller vermehren. Zu Beginn leben 20 Tiere in der Herde.

a) Berechne wie viele Tiere nach 5 Jahren im Tierpark leben. Pro Jahr vermehren sie sich um 10%. Ihre Sterbensrate liegt bei 5%
b) Nach wie vielen Jahren hat sich die Erdmännchenpopulation verdoppelt und vervierfacht?
c) Es werden in einem anderen Zoo Erdmännchen gebraucht. Aus diesem Grund wird der Trick mit dem richtigen Klima und dem Futter verwendet.
   Durch extra Bestrahlungslampen kommen gemessen an der Anzahl 1% mehr Jungtiere auf die Welt. Das Futter bringt nochmal gemessen an der Anzahl 5 % mehr Erdmännchen in die Herde.
d) Um wie viele Tiere mehr gibt es nach 20 Jahren?

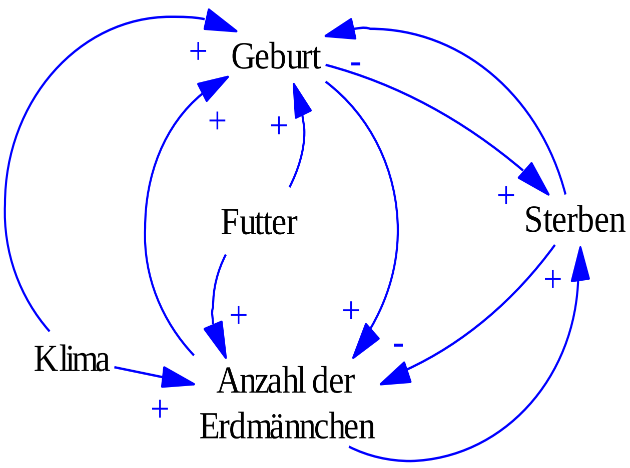


Abbildung 62: Wirkungsdiagramm exponentielles Wachstum

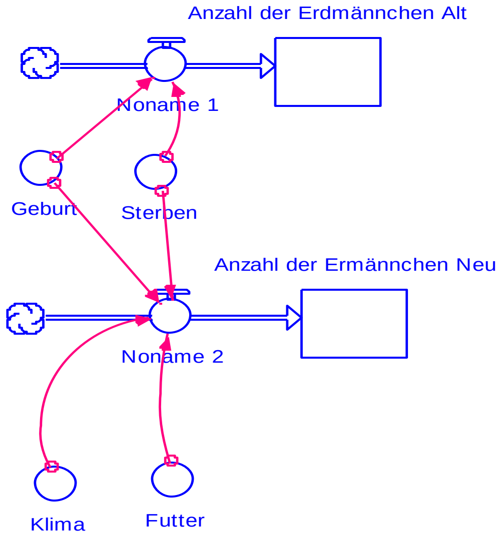


Abbildung 63: Flussdiagramm exponentielles Wachstum

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Jahre	Anzahl der Erdmännchen ohne	Anzahl der Erdmännchen mit	Sterben	Geburten	Klima	Futter
3	0	20	20	5%	10%	1%	5%
	1	=B3+B3*E$3-B3*D$3	=C3+C3*E$3+C3*G$3+C3*F$3-C3*D$3				
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						
	7						
	8						
	9						

Die Tabelle besteht insgesamt aus 6 Spalten. Diese Anzahl soll eine bessere Übersicht gewährleisten. In der ersten befindet sich das Jahr, in den nächsten zwei die Anzahl der Erdmännchen ohne und mit zusätzlicher Behandlung. In den letzten vier Spalten kann man die Sterbensrate, die Geburtenrate, die Wirkung des Klimas und des Futters sehen.

Zu Beginn, das heißt im Jahr 0, gibt es jeweils 20 Tiere. Die Anzahl der toten Tiere ist 5%. Die Geburten sind 10%. Unter Einbeziehung eines speziellen Klimas verdoppelt sich die Anzahl der geborenen Tiere. Beim Futter gibt es nochmals 5% mehr Tiere.

Die natürliche Anzahl der Erdmännchen ergibt sich aus der vorangegangenen Anzahl addiert mit der Geburtenrate mal der Anzahl davon subtrahiert die Sterblichkeitsrate mal der Anzahl, wobei jeweils die Sterblichkeits- und Geburtenrate absolut gesetzt werden. Das heißt in Excel, dass bei dem automatischen Kopieren in einer Spalte immer nur die ausgewählte Zelle benutzt wird.

Die Anzahl der Erdmännchen unter Berücksichtigung von verschiedenen Hilfsmitteln ergibt sich aus der vorangegangenen Anzahl plus der Geburtenrate multipliziert mit der Anzahl plus dem Klima multipliziert mit der Anzahl plus dem Futter mulipliziert mit der Anzahl weniger der Sterblichkeitsrate mulitpliziert mit der Anzahl.

Antwort a)

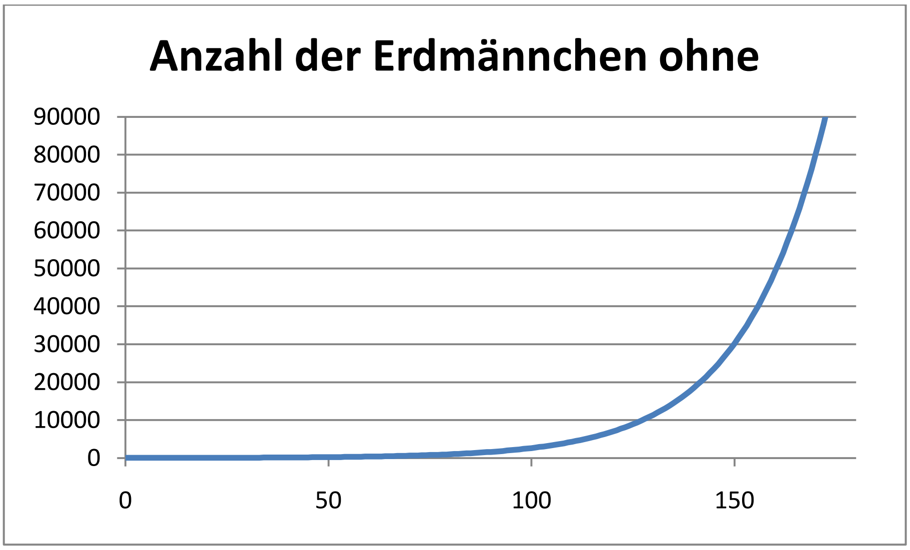


Abbildung 64: Exponentielles Wachstum Graph zu Antwort a)

Jahre	Anzahl der Erdmännchen ohne
0	20
1	21
2	22
3	23
4	24
5	26

Nach fünf Jahren gibt es rund 26 Erdmännchen.

Antwort b)

13	38
14	40
15	42

28	78
29	82
30	86

Nach 14 Jahren hat sich die Population verdoppelt und nach rund 29 Jahren vervierfacht.

Antwort c)

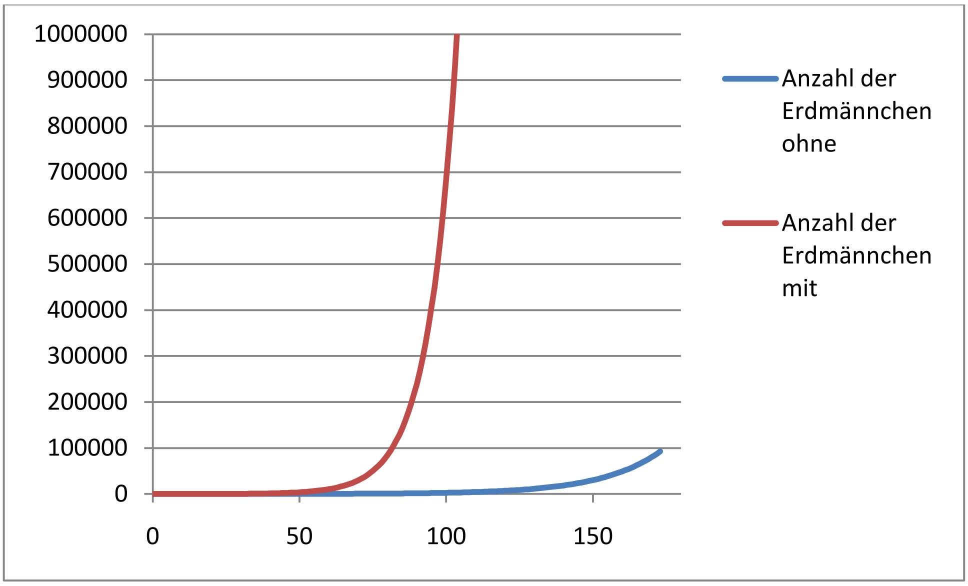


Abbildung 65: Exponentielles Wachstum Graph zu Antwort c)

In diesem Diagramm kann man die Geburtenexplosion sehen. Sowohl bei den Zusätzen als auch ohne verläuft das Wachstum exponentiell.

Antwort d)

19	51	145		
20	53	161	108	Tiere
21	56	179		

Es gibt rund 108 Tiere mehr.

Begrenztes Wachstum

Definition

Zahlenfolge wächst begrenzt, wenn die Glieder ihrer Differenzenfolge $\Delta_n = x_{n+1} - x_n$ proportional zum Abstand des gegenwärtigen Bestands x_n zu einem Sättigungswert S sind.

Man kann auch sagen: $x_{n+1} - x_n = q \cdot (S - x_n)$

Beispiel

Aufgabenstellung

Eine blaue Flüssigkeit wird in einen Behälter mit dem Volumen 100 Liter geleert. In einer Minute fließen jeweils 0,01 Liter hinein.

a) Ab welchem Zeitpunkt erreicht der Wasserstand den Grenzwert?

b) Es kommt eine zweite rote Flüssigkeit ins Spiel. Diese fließt mit der Geschwindigkeit von 0,02 Liter pro Minute in den Behälter. Wie sieht nun der Grenzwert aus?

c) Noch eine dritte gelbe Flüssigkeit wird hinein geleert, und zwar mit 0,05 Liter pro Minute. In welchem Verhältnis stehen die drei Flüssigkeiten?

d) Es werden drei Behälter aufgestellt. Behälter 1 hat das Volumen 80 Liter, Behälter 2 60 Liter und Behälter 3 beinhaltet 30 Liter. Diese sind mit den drei Flüssigkeiten verbunden.

   In den ersten fließt blau mit einer Geschwindigkeit von 0,02 Liter pro Minute, rot mit einer Geschwindigkeit von 0,06 Liter pro Minute und grün mit einer Geschwindigkeit von 0,04 Liter pro Minute.

   In den zweiten fließt blau mit einer Geschwindigkeit von 0,09 Liter pro Minute, rot mit einer Geschwindigkeit von 0,15 Liter pro Minute und grün mit einer Geschwindigkeit von 0,2 Liter pro Minute.

   In den dritten Behälter kommen nur zwei Farben, blau mit einer Geschwindigkeit von 0,03 pro Minute und grün mit einer Geschwindigkeit von 0,10 pro Minute.

   Von welcher Farbe kommt wie viel insgesamt in die drei Behälter?

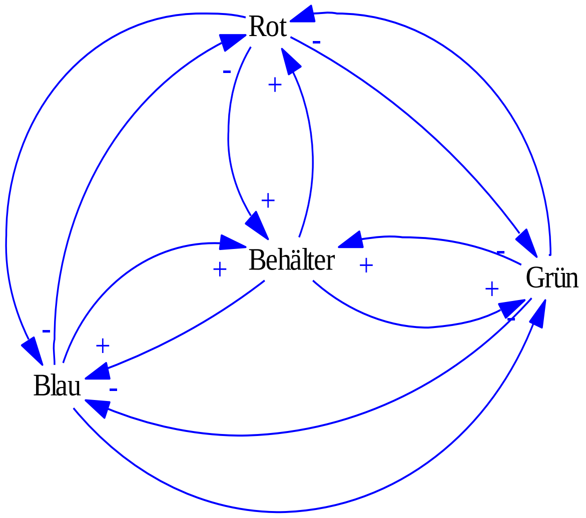


Abbildung 66: Wirkungsdiagramm begrenztes Wachstum

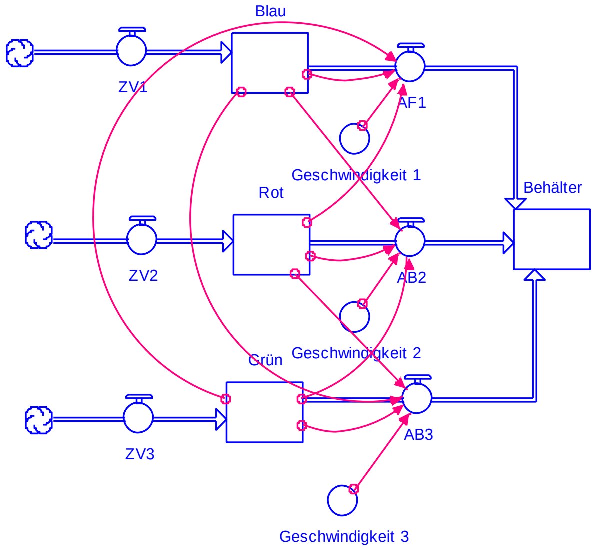


Abbildung 67: Flussdiagramm für einen Behälter begrenztes Wachstum

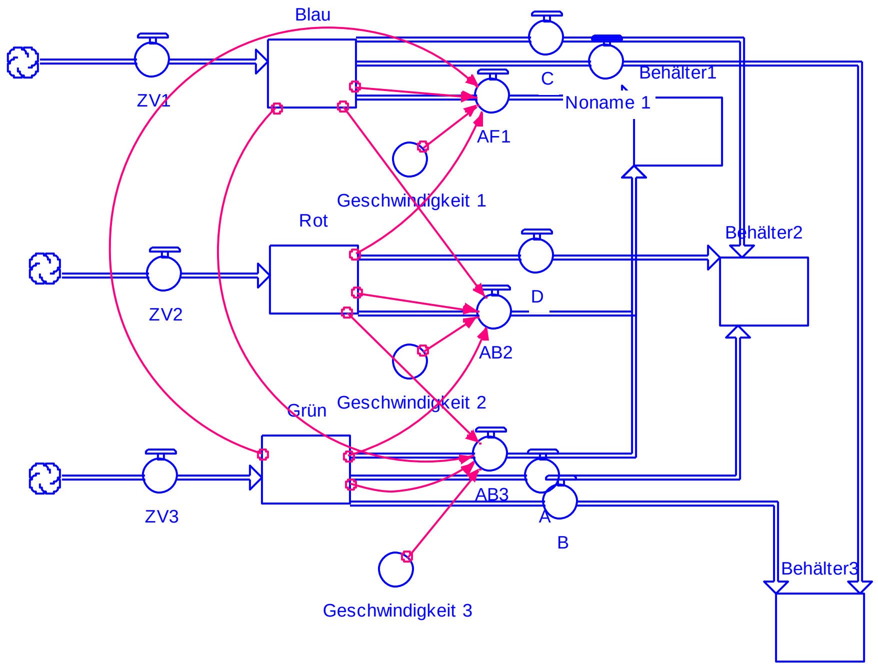


Abbildung 68: Flussdiagramm für drei Behälter begrenztes Wachstum

Antwort a)

	A	B
1	Minute	Flüssigkeit blau
2	0	0,0000000
	1	=B2+0,01*(100-B2)
	2	
	3	
	4	
	5	

Um den Flüssigkeitsstand pro Minute zu ermitteln, wird die Formel von der Definition verwendet. In der Klammer wird die Grenze mit der vorangegangenen Zelle subtrahiert. Das Ergebnis wird mit der Flussgeschwindigkeit multipliziert und dann mit der vorigen Zelle addiert.

Das Diagramm sieht folgendermaßen aus:

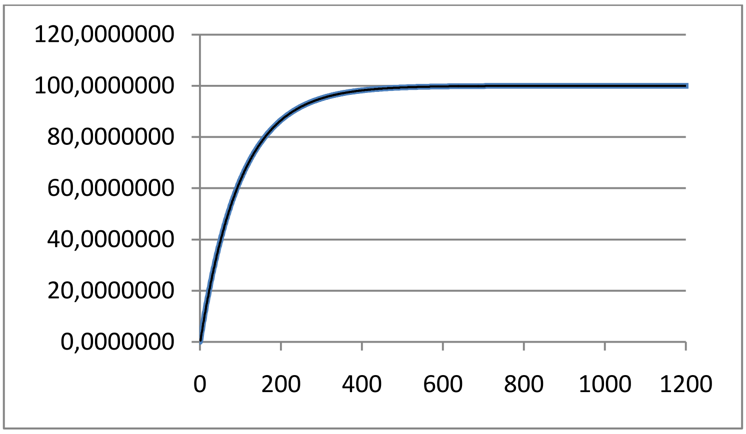


Abbildung 69: Begrenztes Wachstum Graph Antwort a)

458	98,9978814		
459	99,0079026	7,65	Stunden
460	99,0178236		

Ab 459 Minuten beziehungsweise gerundet 7 Stunden und 39 Minuten könnte der Farbeinlauf gestoppt werden.

Antwort b)

	A	B	C
1	Minute	Flüssigkeit blau	Flüssigkeit rot
2	0	0,00	0,00
	1	=B2+0,01*(100-B2-C2)	=C2+0,02*(100-B2-C2)
	2		
	3		
	4		
	5		

Die Formel ist fast ident, außer, dass noch der Inhalt der anderen Farbe zusätzlich subtrahiert wird.

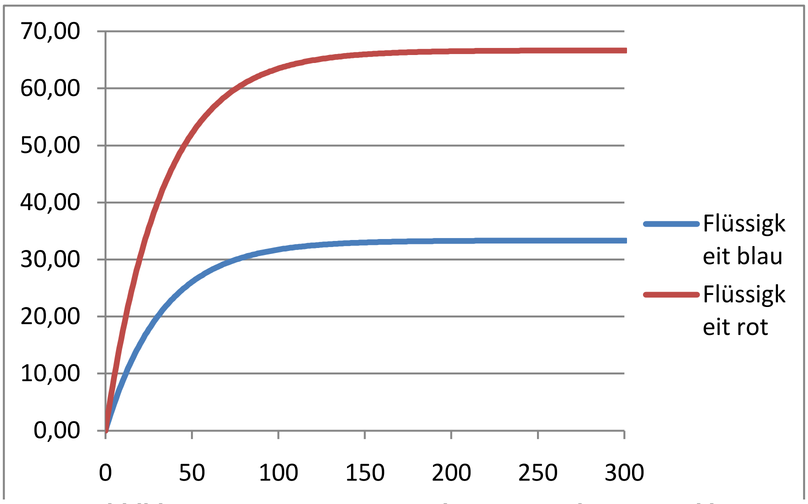


Abbildung 70: Begrenztes Wachstum Graph Antwort b)

Minute	Flüssigkeit blau	Flüssigkeit rot
295	13,27	26,73
296	13,27	26,73
297	13,27	26,73

In den Behälter passen 13,27 Liter der blauen Farbe und 26,37 Liter der roten Farbe.

Antwort c)

	A	B	C	D
1	Minute	Flüssigkeit blau	Flüssigkeit rot	Flüssigkeit grün
2	0	0,00	0,00	0,00
	1	=B2+0,01*(40-B2-C2-D2)	=C2+0,02*(40-B2-C2-D2)	=D2+0,05*(40-B2-C2-D2)
	2			
	3			
	4			
	5			

Die Zusammensetzung der Formel ist fast ident mit den zwei anderen Beispielen, außer, dass noch von der dritten Farbe der Stand abgezogen wird.

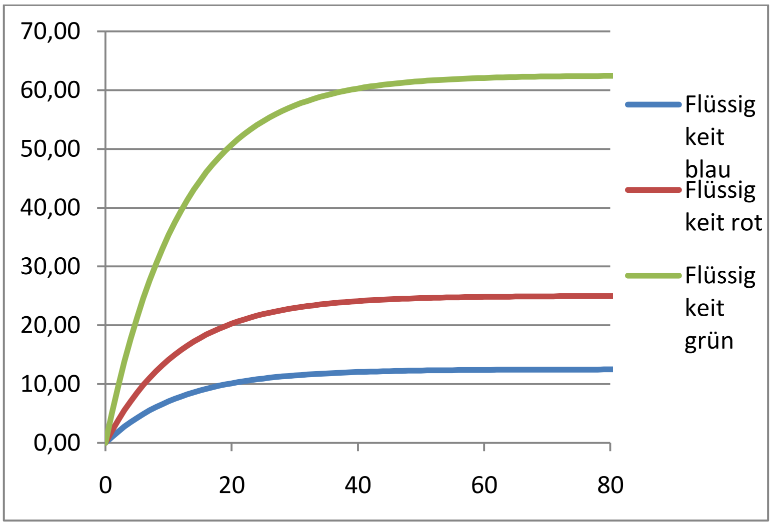


Abbildung 71: Begrenztes Wachstum Graph Antwort c)

Flüssigkeit blau	Flüssigkeit rot	Flüssigkeit grün
12,50	25,00	62,49
12,50	25,00	62,49
12,50	25,00	62,49

Die drei Flüssigkeiten stehen im Verhältnis 12,5 : 25 : 62,49

Antwort d)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	*Minute*	*Behälter 1 blau*	*Behälter 2 blau*	*Behälter 3 blau*	*Farbe blau*	*Behälter 1 rot*	*Behälter 2 rot*	*Farbe rot*	*Behälter 1 grün*	*Behälter 2 grün*	*Behälter 3 grün*	*Farbe grün*
2	*0*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*	*0,00*
	1	*=B2+0,02 * (80-B2-F2-I2)*			*=B3+C3+D3*							
	2											
	3											

Die Tabelle besteht aus der ersten Spalte Minuten. Die nächsten vier Spalten sind für die Farbe Blau bestimmt. Es wir angegeben, wie viel Farbe jeweils in die drei Behälter kommt. Dazu dient die bekannte Formel, das heißt den maximalen Behälterinhalt subtrahiert mit dem vorigen Flüssigkeitsstand der blauen, roten und grünen Farbe; das Ergebnis mit der Flussgeschwindigkeit multipliziert und dann zu dem letzten Farbinhalt addiert.

Der jeweilige Gesamtstand der Farben ergibt sich aus der Addition des Farbenstandes in den Behältern.

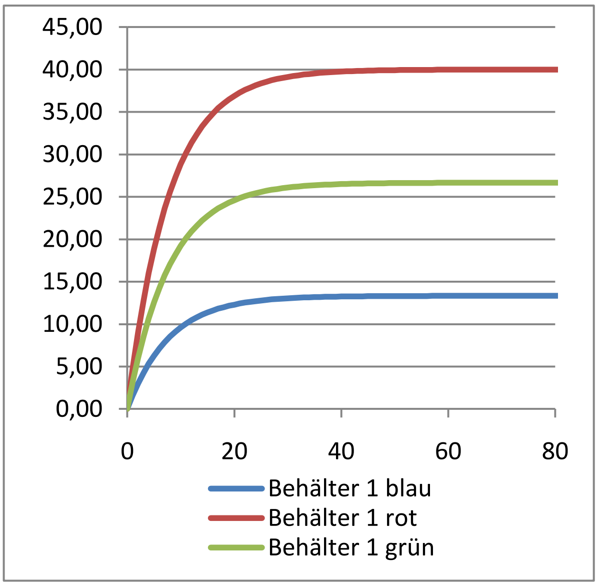


Abbildung 72: Inhalt erster Behälter

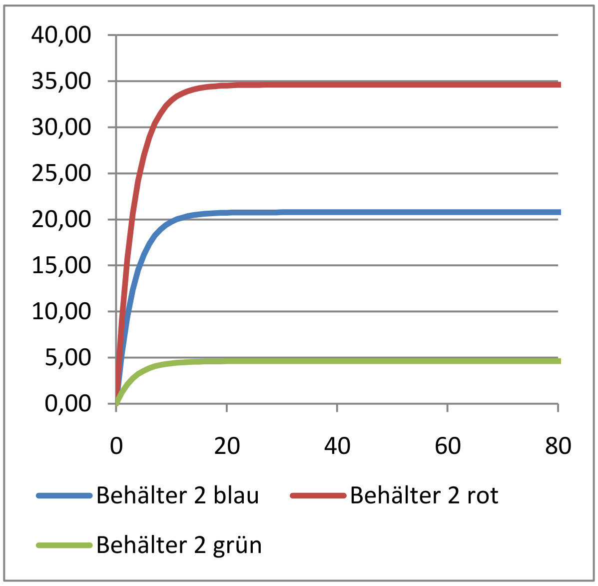


Abbildung 73: Inhalt zweiter Behälter

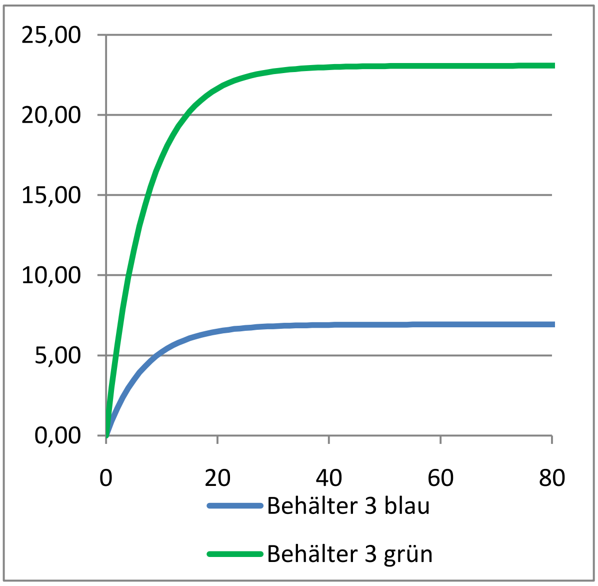


Abbildung 74: Inhalt dritter Behälter

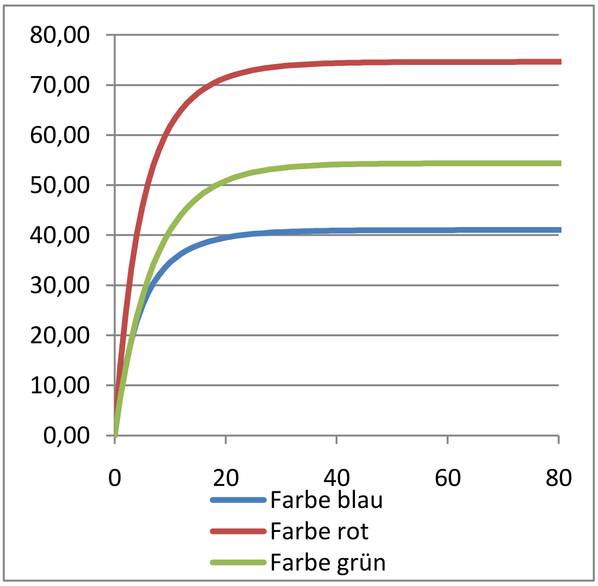


Abbildung 75: Gesamtergebnis

In den ersten und zweiten Behälter passt am meisten rote Farbe, in den dritten kommen wie in der Angabe beschrieben nur blaue und grüne Farbe. Hier ist der Stand der grünen Farbe am höchsten. Zum Schluss kann man erkennen, dass die meistbenötigte Farbe Rot ist.

Logistisches Wachstum

Definition

Eine Zahlenfolge wächst logistisch, wenn die Glieder ihrer Differenzenfolge Δ_n proportional zum Produkt aus dem gegenwärtigen Bestand x_n und dem Abstand des gegenwärtigen Bestandes x_n zu einem Sättigungspunkt S ist.

Man kann auch sagen: $x_{n+1} - x_n = q \cdot x_n \cdot (S - x_n)$

Beispiel

Aufgabenstellung Klima

In einer Wetterstation wird von Jänner bis August die durchschnittliche Tagestemperatur geschätzt. Dabei wird angenommen, dass es bis Ende August jeden Tag um 0,1% wärmer wird. Die Ausgangstemperatur ist 1 Grad. Es kann bis 40 Grad warm werden.

a) Wie viel Grad hat es Ende August?

b) Im Juni wird ein Hoch über das Gebiet erwartet. Die Auswirkungen sind Ausbleiben des Regens und eine Erhöhung der täglichen Durchschnittstemperatur um 2%.

c) Es wird angenommen, dass es im September täglich um 40% kälter wird. Wie kalt wäre es dann zu Weihnachten? Benutze die Daten von Antwort a) Welches Wachstum beobachtest du?

d) In diesem Beispiel sollen auch noch der Sättigungsdruck, Dampfdruck, der Wassergehalt der Luft und der Taupunkt ermittelt werden. Um diese Daten zu bekommen muss die relative Feuchtigkeit angegeben sein. Entnimm diese aus der Tabelle.

Sättigungsdruck $= 6{,}0178 \cdot 10^{\frac{Temperatur \cdot 7{,}5}{Tempertur + 273}}$ hPar

Dampfdruck $= \dfrac{Sättigungsdruck \cdot rel. Luftfeuchtigkeit}{100}$ hPar

$$\text{Wassergehalt} = \frac{\frac{Sättigungsdruck \cdot \cdot 100 \cdot 0{,}018}{8{,}314}}{(273{,}15 + Temperatur) \cdot 1000} \div 100 \cdot rel.Luftfeuchtigkeit \cdot 100 \text{ g/m}^3$$

$$\text{Taupunkt} = \frac{241{,}2 \cdot (\ln Dampfdruck - \ln 6{,}112)}{17{,}5043 - \ln Dampfdruck - \ln 6{,}112} \text{ Celsius}$$

Jänner	**70%**
Februar	**75%**
März	**80%**
April	**75%**
Mai	**75%**
Juni	**70%**
Juli	**60%**
August	**55%**
September	**65%**
Oktober	**70%**
November	**80%**
Dezember	**70%**

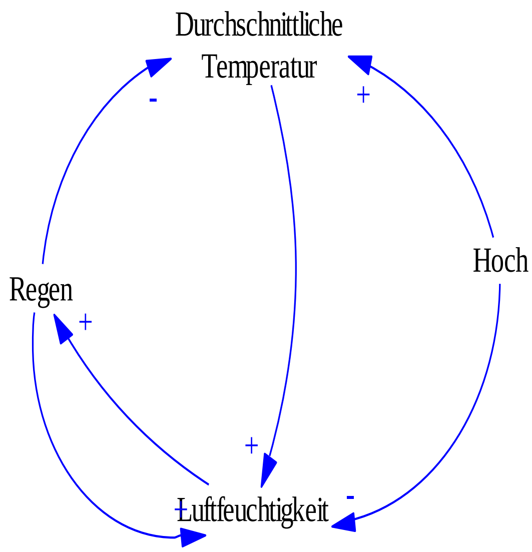


Abbildung 76: Wirkungsdiagramm logistisches Wachstum

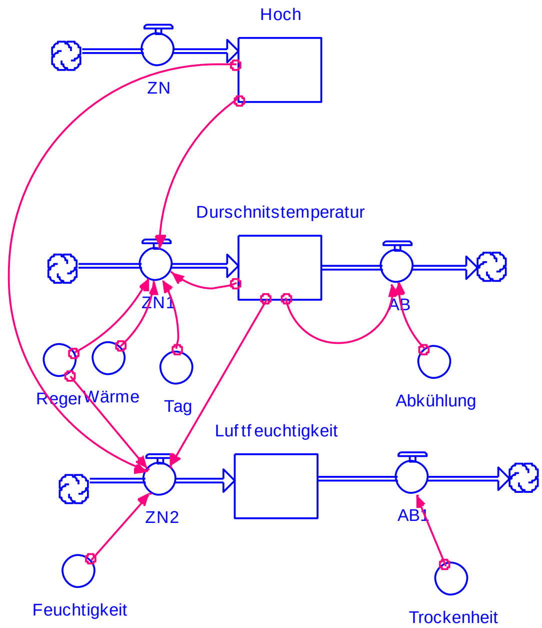


Abbildung 77: Flussdiagramm logistisches Wachstum

Antwort a)

	A	B
1	Tag	Grad
2	0	1,00
	1	=B2+0,0015*B2*(40-B2)
	2	
	3	
	4	

Die Tabelle besteht aus zwei Spalten Tag und Grad. Zu Beginn wird 1 Grad gemessen. Auf den ersten Blick könnte man bei diesem Beispiel denken, es handelt sich um ein exponentielles Wachstum, da die Temperatur jeweils um 0,15% wärmer wird. Jedoch existiert ein Grenzwert. Dieser gibt an, dass es nur bis 40 Grad haben kann. Dadurch kann man erkennen, dass das logistische Wachstum ein Mix aus exponentiellem und begrenztem Wachstum darstellt. Dies spiegelt sich auch in der Formel wider. Vom Grenzwert werden die Grade vom letzten Tag subtrahiert. Das Ergebnis wird mit den Prozenten und dem Wert des letzten Tages multipliziert und schließlich mit der vorherigen Zelle addiert.

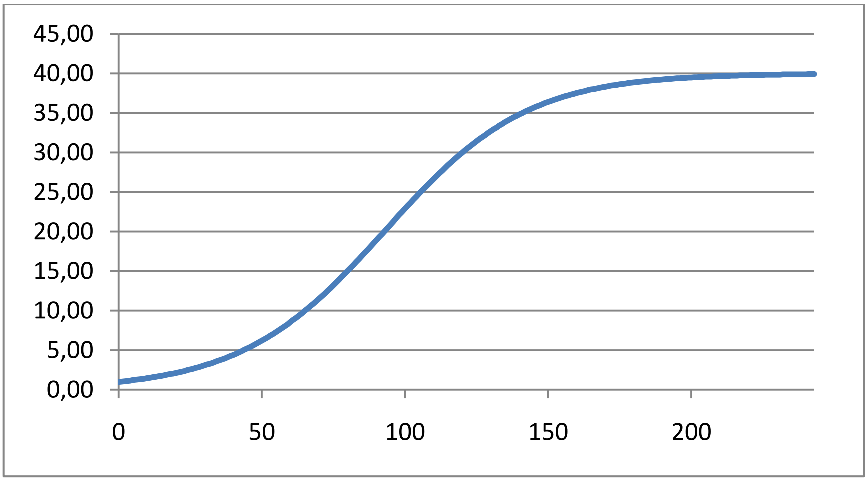


Abbildung 78: Logistisches Wachstum Graph Antwort a)

242	39,91
243	39,91

Am 31. August wird es rund 39,91 Grad haben.

Antwort b)

152	36,78	Erster Juni
153	=B154+0,002*B154*(40-B154)	
154		
…	…	…
180		
181	39,69	Dreißigsten Juni

An dem Beispiel ändert sich nur der Prozentsatz im Juni. Dieser ist auf 0,2% gesetzt.

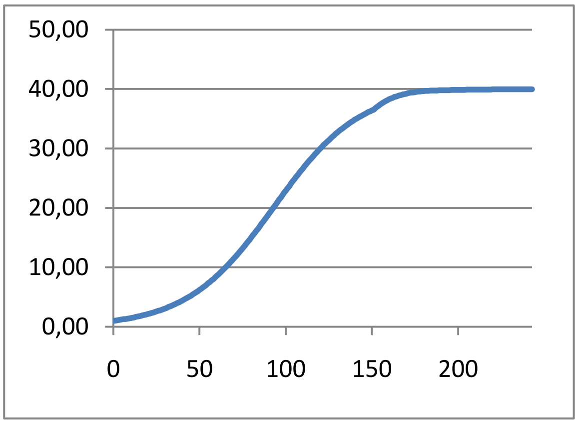


Abbildung 79: Logistisches Wachstum Graph Antwort b)

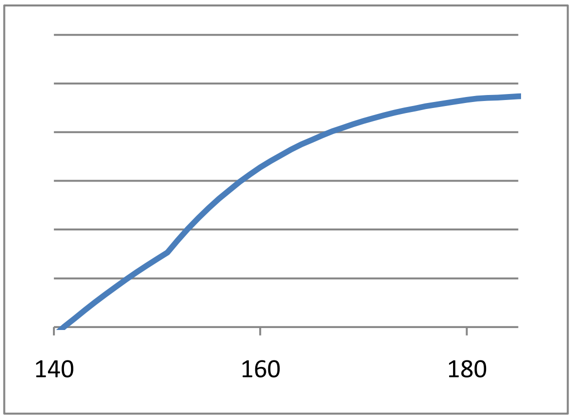


Abbildung 80: Graph mit Juni

Am Diagramm kann man eine kleine Bruchstelle sehen.

Antwort c)

Der Aufbau der Tabelle bleibt immer noch ident.

243	39,91
244	=B245-0,04*B245
245	
246	
247	

Da die Temperaturen um 4% fallen, werden diese mit den vorigen Graden multipliziert und dann von diesen abgezogen. Außer dem Minuszeichen ist die

Formel mit dem exponentiellen Wachstum ident. Aus diesem Grund handelt es sich um eine exponentielle Abnahme, wie man auch aus dem Diagramm ablesen kann.

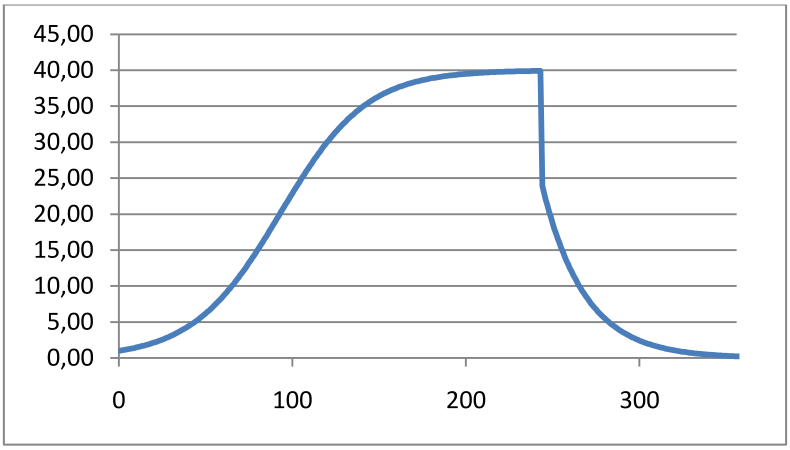


Abbildung 81: Logistisches Wachstum Graph Antwort c)

358	0,36	
359	0,35	Weihnachten

Zu Weihnachten hat es 0,35 Grad.

Antwort d)

Die Tabelle wird um die Spalten relative Luftfeuchtigkeit, Sättigungsdruck, Dampfdruck, Wassergehalt und Taupunkt erweitert.

In die Spalte relative Luftfeuchtigkeit werden die Prozente aus der Tabelle geschrieben. Die anderen vier Punkte setzen sich aus den Formeln zusammen.

A	B	C	D	E	F	G
Tag	Grad	Relative Luftfeuchtigkeit	Sättigungsdruck	Dampfdruck	Wassergehalt	Taupunkt
0	1,00	70%	=6,1078*10^((B2*7,5/(B2+275)))	=D2*C2	=D2*100*0,018/8,314/(273,15+B2)*1000/100*C2*100	=241,2*(LN(E2)-LN(6,112))/(17,5043-(LN(E2)-LN(6,112)))
1	1,04	70%				
2	1,08	70%				
3	1,12	70%				

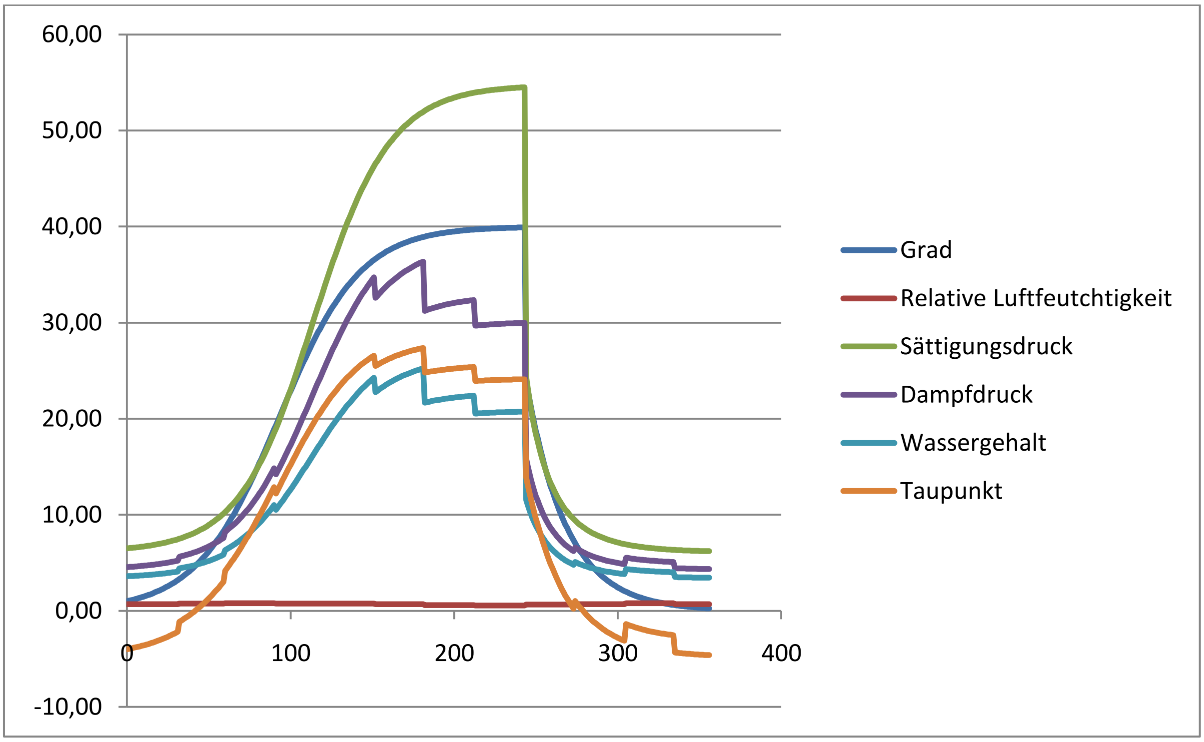


Abbildung 82: Logistisches Wachstum Graph Antwort d)

Der Sättigungsdruck verhält sich bis zum 31. August ident wie die relative Luftfeuchtigkeit. Die restlichen neu eingefügten Komponenten beziehen sich auf die relative Luftfeuchtigkeit und haben somit Zacken in ihren Kurven.

Räuber-Beute Simulation mittels Game of Life[101]

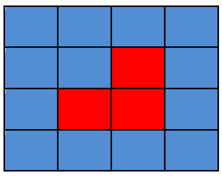
Das Räuber Beute Modell wird auch Lotka-Volterra-System genannt nach den amerikanischen Physiker Alfred Lotka und dem italienischen Mathematiker Vito Volterra. Diese beschäftigten sich mit der Frage, wie man die Biologie und die Ökologie mathematisch beschreiben kann. Sie verwendeten ihr Modell zu Beginn um Berechnungen für Fische in der Adria anzustellen. Es dient dazu das Leben von einer Beute- und einer Räuberpopulation darzustellen, wobei das Raubtier von seinem Futter abhängig ist.[102]

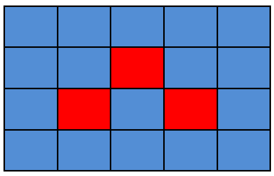
Der Begründer des Game of Life ist John H. Conway. Er war Mathematiker und lehrte an der Universität Cambridge. Sein Game of Life hatte das Ziel zelluläre Automaten zu simulieren.[103]

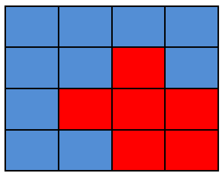
In diesem Fall wird ein Bakterienstamm betrachtet. Dieser wird von einem Medikament „angegriffen".

Das Leben der Bakterien folgt Spielregeln:

- Eine Bakterie kann tot oder lebendig sein.
- Lebt sie und hat zwei oder drei lebendige Nachbarn bleibt sie auch am Leben.
- Für den Fall, dass sie tot ist und drei lebendige Nachbarn hat, wird sie durch diese wiederbelebt.
- In allen anderen Fällen stirbt die Bakterie beziehungsweise bleibt tot.


Zwei Nachbarn lebendig


Drei Nachbarn lebendig


Mittlere Bakterie stirbt

[101] Vgl. Neuwirth; The Active Modeler: Mathematical Modeling with Microsoft Excel

[102] Vgl. Möller; Modellbildung, Simulation, Identifikation, 106-108

[103] Vgl. Prof. Dr. Michael Matthies; Einführung in die Systemwissenschaft, 102

Der Lebensraum der Bakterien ist ein 100x100 großer Torrus. Das heißt, wenn sich eine Bakterie am Beginn des Excelarbeitsblattes befindet, sind ihre nächsten Nachbarn am gegenüberliegenden Rand.

Es werden insgesamt drei Felder der Größe 100x100 benötigt. Im ersten kann man den Spielverlauf erkennen, im zweiten wird berechnet, wie viele Bakterien noch am Leben sind. Das dritte Feld wird benötigt um die nächste Generation anzuzeigen.

Das erste Spielfeld ist zur besseren Orientierung mit einer Nummerierung umgeben. Diese beginnt mit Null und endet mit 100. Da es sich wie erwähnt um einen Torrus oder, für SchülerInnen leichter verständlich, um einen Donut handelt, wird ein Rahmen unter die Nummerierung gelegt. Wie in der Abbildung 83 zu sehen werden Verweise in diesem angebracht. Im Fall er Zelle H5 wird auf die Zelle senkrecht am untere Rand verwiesen.
Lebendige Bakterien sind rot und tote blau eingezeichnet. Diese Einzeichnung erfolgt mittels der bedingten Formatierung.

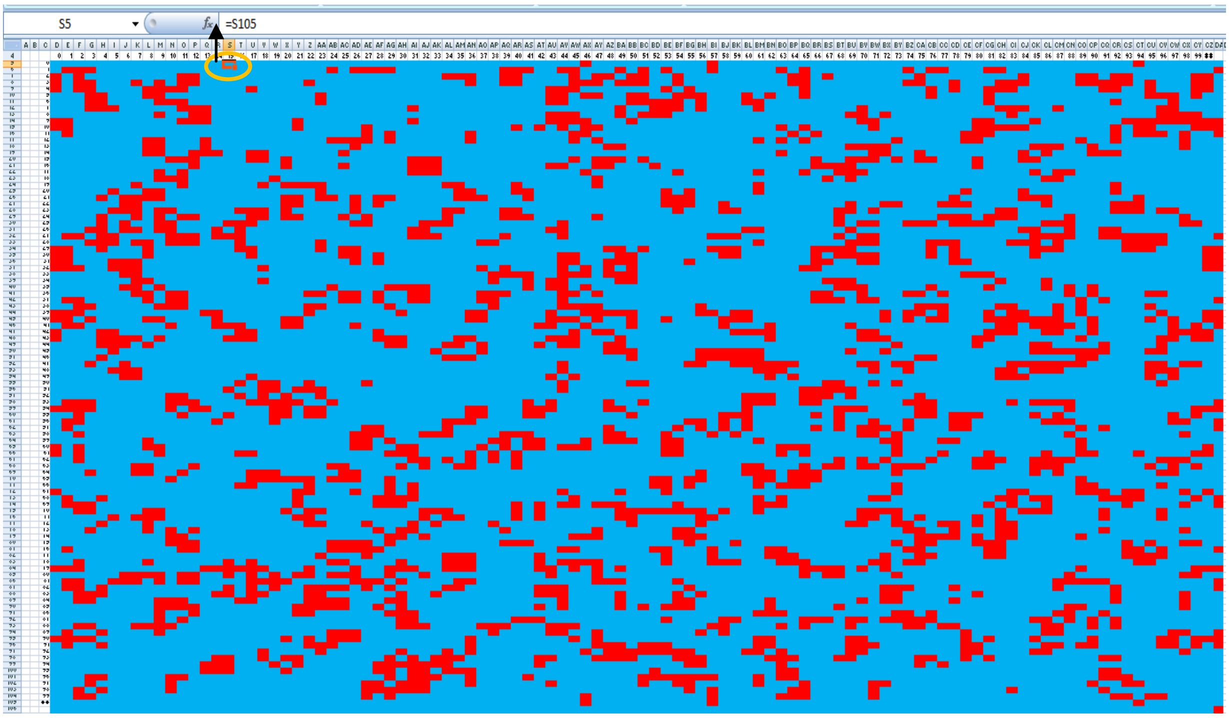


Abbildung 83: Erstes Spielfeld

Im Spielbrett zwei wird die Anzahl der lebenden Nachbarn angezeigt. Dazu wird in die Summe im ersten Spielfeld weniger des eigenen Wertes gerechnet. In diesem Fall hat die Bakterie keinen Nachbarn.

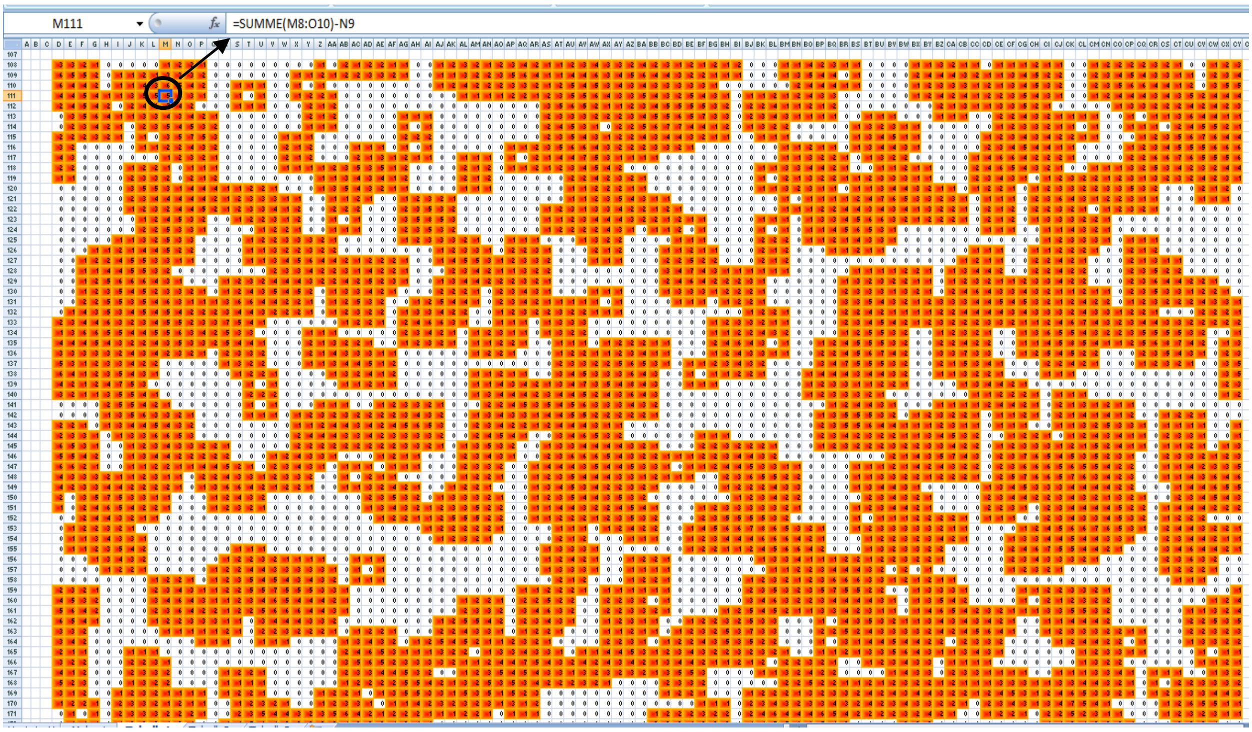


Abbildung 84: Zweites Spielfeld

Die Bakterien mit Nachbarn wurden auch hier mit der bedingten Formatierung farbig gestaltet um einen besseren Überblick zu haben.

Die Spielregeln werden am Beginn des dritten Blattes nochmals definiert. Hier steht 0 für tote Bakterie, 1 für lebende.

Spielregeln:

	tot	lebendig
Nachbarn	0	1
0	0	0
1	0	0
2	0	1
3	1	1
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

Um diese Spielregeln auch ins Spiel einzubinden, wird die Excelfunktion **Bereich verschieben** auf das dritte Feld angewandt.

„Gibt einen Bezug zurück, der gegenüber dem angegebenen Bezug versetzt ist. Der zurückgegebene Bezug kann eine einzelne Zelle oder ein Zellbereich sein. Sie können die Anzahl der zurückzugebenden Zeilen und Spalten festlegen.“[104]

Bereich.Verschieben(Bezug;Zeilen;Spalten;Höhe;Breite) gibt man in das Eingabefeld ein.

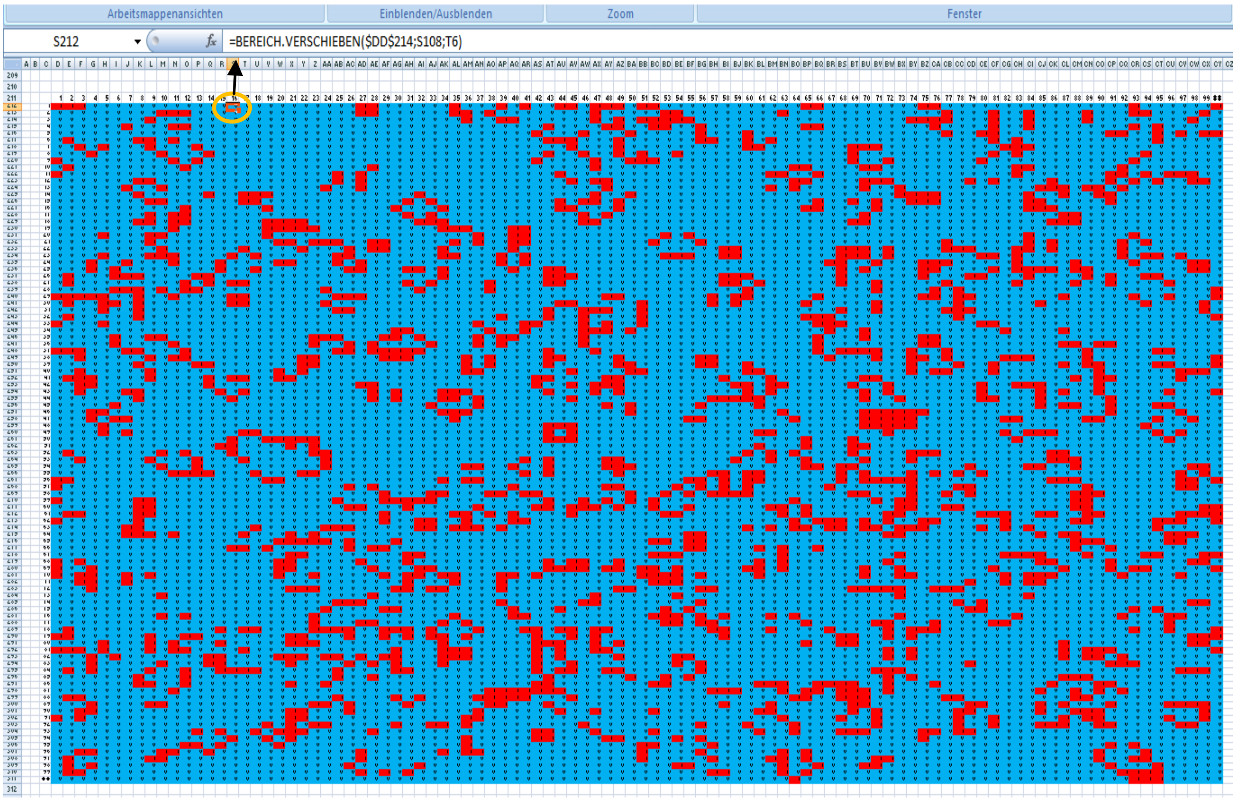


Abbildung 85: Drittes Spielfeld

Die erste Zelle aus der Klammer ist die erste Zelle aus den Spielregeln unter tot und neben den Nachbarn 0. Die zweite befindet sich am zweiten Spielbrett, genau dort, wo sich die markierte Zelle befindet. Der dritte Klammerausdruck ist im ersten Feld ebenfalls an derselben Stelle.

Nachdem dies ausgeführt wurde, ist der erste Lebenszyklus der Bakterien beendet. Um einen nächsten starten zu können, müsste das letzte Spielbrett auf das erste kopiert werden.

[104] Hilfe Microsoft Excel 2007

Um nicht nur einen optischen Vergleich anstellen zu müssen, sollte die Anzahl der lebenden Bakterien gezählt werden.

Anzahl der lebendigen Bakterien:	=SUMMEWENN(E6:CZ105;1)	Bakterien
Prozent der lebendigen Bakterien	=obige Zelle/100	

Makros

In das Beispiel können Makros eingebettet werden um die Bedienung zu erleichtern. Das erste Makro kopiert automatisch das dritte Spielfeld in das erste und erzeugt somit einen neuen Zyklus.

```
Sub OneGeneration()

    Set currentSelection = Selection
    Application.ScreenUpdating = False
    Range("D212:CY311").Select
    Application.CutCopyMode = False
    Selection.Copy
    Range("E6").Select
    Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
        :=False, Transpose:=False
    currentSelection.Select
    Application.CutCopyMode = False
    Application.ScreenUpdating = True

End Sub
```

Abbildung 86: Makro neue Generation

Nach dem Erstellen eines Buttons wird das Kopieren unnötig.

Um das Leben der Bakterien besser zu beobachten, wird ein Button mit der Erstellung von 10 Generationen eingefügt.

```
Sub Generationen(Anzahl)
    For i = 1 To Anzahl
    OneGeneration
    Next i
End Sub


Sub Generationen10()
    Generationen (10)
End Sub
```

Abbildung 87: Makro Erzeugung von einer und zehn Generationen

Da das Eingeben von lebenden Bakterien in das erste Spielbrett sehr aufwendig ist, wird dies vom letzten Makro erledigt. Es werden die Informationen benötigt, welche Dimension und wo der Rand ist und schon erzeugt es Einser und Nullen. Dieses Makro wurde mit einem Button und einem Schieberegler verbunden.

```
Public Const linkerRand = 5
Public Const rechterRand = 104
Public Const obererRand = 6
Public Const untererRand = 105

Sub Zufall()
    Application.Calculation = xlCalculationManual
    Application.ScreenUpdating = False
    Anteil = Range("AD1").Value
    For j = linkerRand To rechterRand
        For i = obererRand To untererRand
            Wert = 0
            If Rnd() <= Anteil Then Wert = 1
            Range(Cells(i, j), Cells(i, j)).Value = Wert
        Next i
    Next j
    Application.Calculation = xlCalculationAutomatic
    Application.ScreenUpdating = True
End Sub
```

Abbildung 88: Makro zufälliges Befüllen des ersten Spielfeldes

Abbildung 89: Buttons zu Makros

Literaturverzeichnis

Verwendete Literatur

Arnold, Vladimir:
Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Auflage, Springer Berlin, 2001

Bossel, Hartmut:
Modellbildung und Simulation, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1992

Bossel, Hartmut:
Systeme, Dynamik, Simulation, Books on Demand GmbH Norderstedt, 2004

Forrester, Jay W.:
Grundzüge einer Systemtheorie, Dr. Th. Gabler, Wiesbaden

Möller, Dietmar:
Modellbildung, Simulation und Identifikation dynamischer Systeme, Springer-Verlag Berlin

Ossimitz, Günther, u.a:
Materialien zur Systemdynamik, Hölder-Pichler_Tempsky Wien, 1990

Ossimitz Günther:
Systemdynamik in der Sekundarstufe II. Ergebnisse eines Entwicklungsprojekts, In Schriftreihe Didaktik der Mathematik Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt Band 21, Computer-Mensch-Mathematik, Hölder-Pichler_Tempsky Wien, 1991, 199-206

Reichel, Hans-Christian, u.a.:
Lehrbuch der Mathematik 7, 2. Auflage, Hölder-Pichler-Tempsky Wien, 1992

Schärf, Julius:
Mathematik 4, 2. Auflage, B. Oldenbourg Verlag Wien, 1974

Ulovec, Andreas, u.a:
Mathematik verstehen 8, 1. Auflage, öbv & hpt Wien, 2007

Internetseiten

http://www.simcon.de/vensim/ple am 18.05.2010, 16:38

http://www.iseesystems.com/softwares/Education/StellaSoftware.aspx am 01.05.2010, 18:26

http://www.hupfeld-software.de/pmwiki/pmwiki.php?n=Main.Dynasys; 02.05.2010, 15:36

Lehrplan Oberstufe AHS Mathematik;
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf am 05.03.2010, 09:30

Lehrplan AHS Oberstufe Geographie;
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11858/lp_neu_ahs_06.pdf am 05.03.2010, 10:09

Lehrplan AHS Oberstufe Physik;
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11862/lp_neu_ahs_10.pdf am 05.03.2010, 11:27

Lehrplan AHS Oberstufe Biologie;
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11885/lp_neu_ahs_30.pdf am 05.03.2010, 12:01

Lehrplan AHS Oberstufe Informatik;
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/7037/Informatik_Oberstufe.pdf am 03.05.2010, 12:30

Prof. Dr. Michael Matthies; Einführung in die Systemwissenschaft, 102, http://www.ivwl.uni-kassel.de/beckenbach/PDFs/Systemtheorie/Mathies_EinfSyswiss.pdf am 15.05.1010, 15:31

Abbildungsverzeichnis

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Zusammenfassung/Abstract

In der Diplomarbeit wird das Thema vernetzte Systeme aufgearbeitet. Nach den Definitionen der Begriffe System und vernetztes System wird ein Überblick über die Ausarbeitungsmöglichkeiten gegeben.

Mittels verschiedener Computersimulationsprogramme wird eine neue Einsicht auf das Thema gewährt. Alle drei Programme werden jeweils mittels eines Beispiels präsentiert. Dasselbe wurde in dem Kapitel Wachstum getan.

Das Hauptziel der Diplomarbeit war es eine Übersicht zu geben und verschiedene Beispiele für den fächerübergreifenden Unterricht zu erarbeiten.

Abstract (in English)

The topic of the diploma is cross-linked systems. After a definition auf the items system and cross-linked system there will be a review about elaboration possibilities.

Different computer simualtion programs give a new view with examples. The same procedure happens in the chapter „Wachstum“.

The aim of the diploma was to give a vision about the topic and to build different examples fort the interdisciplinary teaching.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Vor- und Zuname:	Sandra Maria Reiner
Geburtsdaten:	24. November 1985 Oberpullendorf
Staatsangehörigkeit:	Österreich
Eltern:	Franz und Melitta Reiner

Schulbildung:

2004 - 2010	Studium des Lehramtes Mathematik und Informatik und Informatikmanagement
Seit 2008	Studium des Bakkalaureats Informatikmanagement
1996 - 2004	BORG Oberpullendorf
1992 - 1996	Volksschule Neutal

Beruflicher Werdegang

2009 - 2010	Nachhilfelehrerin bei Schülerhilfe
2007 - 2008	Nachhilfelehrerin bei Institut für Lernhilfe

Sonstige Tätigkeiten

August 2006	Ferialpraktikum SWARCO FUTURIT
August 2005	Ferialpraktikum SWARCO FUTURIT
August 2006	Ferialpraktikum SWARCO FUTURIT