universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Weyl Darstellung der metaplektischen Operatoren und die fraktionale Fourier Transformation der Gaussfunktion

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Verfasser: Jasminko Đuzelović
Matrikel-Nummer: 0405971
Studienrichtung: Diplomstudium Mathematik, A405
Betreuer: Prof. Dr. Hans G. Feichtinger

Wien, Mai 2010

Weyl Darstellung der metaplektischen Operatoren und die fraktionale Fourier Transformation der Gaussfunktion

Jasminko Đuzelović

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die ersten Definitionen der metaplektischen Gruppe $\mathrm{Mp}(d)$ finden sich in den Arbeiten von Segal [22] und Shale [23]. Die Ergebnisse dieser Arbeiten wurden dann - in einer abstrakteren Sichtweise - von Weil [24] weiter entwickelt. Die Theorie der metaplektischen Gruppe ist gegenwärtig in verschiedensten Bereichen der Mathematik und der Physik verbreitet (siehe unter anderem de Gosson [13, 19], für Anwendungen in der Quantenmechanik). Ich möchte hier *nur einige* Namen nennen die zur Entwicklung dieser Theorie beigetragen haben: Buslaev [4], Reiter [21], de Gosson [11], Feichtinger [7], [12],[13], Leray [18], Wallach [25].

Nützlichkeit der metaplektischen Gruppe $\mathrm{Mp}(d)$ zeigt sich auch in der Time-Frequency Analysis, zum Beispiel in Zusammenhängen mit der Theorie der Gabor Frames (siehe Gröchenig [14], Gabor Analysis Anwendungen).

Das Bestreben dieser Diplomarbeit ist es, die metaplektische Darstellung vom Standpunkt des *Weyl Calculus der Pseudodifferential Operatoren* zu untersuchen. Die Resultate dieser Untersuchungen führen zu der quadratischen Fourier Transformation, die einfach einen Spezialfall der metaplektischen Operatoren darstellt. Ich habe einige Resultate meiner Arbeit von de Gosson [12, 13] übernommen, wobei [12, 13] mit Anwendungen in der mathematischen Physik (Quantenmechanik) und einer anderen Zugangsweise motiviert ist.

Der Zugang den ich in dieser Diplomarbeit gewählt habe, ist dank der symplektischen Cayley Transformation deutlich direkter. Vereinfacht gesagt, die Betonung liegt auf dem Zusammenhang zwischen der symplektischen Gruppe und der Fourier Transformation. Beispielsweise assoziiert die metaplektische Gruppe zu der Fourier Transformation

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\omega\cdot x} f(x)dx$$

die standard symplektische Rotation

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf mathematisch etwas anspruchsvollerem Niveau kann die metaplektische Gruppe $\mathrm{Mp}(d)$ auf zwei verschiedenen Wegen definiert werden. Hier eine kurze Zusammenfassung dieser möglichen Zugänge zur metaplektischen Gruppe:

- Die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(d)$ besitzt Überdeckungsgruppen der Ordnung $q = 2, 3, ..., +\infty$. Die Überdeckungsgruppe $\mathrm{Sp}_2(d)$ mit der Ordnung

2, kann mit der Gruppe der unitären Operatoren wirkend auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ identifiziert werden. Diese Gruppe ist die *metaplektische Gruppe*, bezeichnet mit $\mathrm{Mp}(d)$.

- Ein anderer Zugang zur metaplektischen Gruppe $\mathrm{Mp}(d)$ ist durch direkte Konstruktion: eine Familie von unitären Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ kann durch erzeugende Funktionen der symplektischen Matrizen konstruiert werden. Auf diesem Wege wird eine Gruppe erzeugt, die metaplektische Gruppe $\mathrm{Mp}(d)$; -das ist auch der Zugang den ich in dieser Diplomarbeit gewählt habe.

Der konstruktive Zugang stellt auch eine Brücke zwischen der klassischen- und der Quantenmechanik her. Diese erlaubt auch eine Verbindung zwischen den quadratischen Hamilton Operatoren und der Schrödinger Gleichung (siehe de Gosson [13]). Ein weiterer Vorteil der Wahl dieses konstruktiven Zuganges in meiner Arbeit, sind die Bezüge zur Time-Frequency Analysis. Dadurch ist man in der Lage, metaplektische Operatoren mit Objekten und Begriffen aus der Time-Frequency Analysis in Beziehung zu stellen, wie zum Beispiel der Time-Shifts, modulations Operatoren, und symplektischen Matrizen. Das wiederum erlaubt eine explizite Darstellung der Spreading Funktion von metaplektischen Operatoren. Diese explizite Darstellung der Spreading Funktion erweist sich als sehr praktisch für Zusammenhänge mit der fraktionalen Fourier Transformation, was weitere interessante Betrachtungen erlaubt.

Meine Arbeit ist wie folgt strukturiert : Nach Einführung der relevanten Grundbegriffe, wird die Theorie der metaplektischen Gruppe vom Standpunkt der quadratischen Fourier Transformation betrachtet. Als ein wichtiges Resultat in diesem Abschnitt zeigt sich die Tatsache, dass jeder metaplektische Operator in genau zwei quadratische Fourier Transformationen faktorisiert werden kann. An dieser Stelle gebe ich eine sehr kurze Verbindung zu entsprechendem Gebiet der Maslov Indizes. Danach werden die Elemente der metaplektischen Gruppe $\mathrm{Mp}(d)$ vom pseudodifferentionellen Standpunkt untersucht. Aus der Weyl Darstellung der metaplektischen Operatoren folgt, dass jeder metaplektische Operator -zu dem eine entsprechende symplektische Matrix $\mathcal{A}$ assoziiert wird (wobei $\mathcal{A}$ nur Eigenwerte ungleich Null besitzt)- als

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\det(\mathcal{A}-I)} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(\mathcal{A}z)\rho(-z)dz,$$

für eine *günstige Wahl* von $\sqrt{\det(\mathcal{A}-\mathcal{I})}$, dargestellt werden kann.

Hier ist ρ eine Abbildung die von der Time-Frequency Ebene auf den Raum der unitären Operatoren abbildet, und durch

$$\rho(z) = e^{\pi i\omega\cdot x} T_x M_\omega, \;\; \textit{für} \;\; z = (x,\omega)$$

definiert ist. Diese konkrete Form der Translations- und Modulationsoperatoren unterscheidet sich einwenig von der gewöhnlich vorkommenden Form, bietet aber gerade durch diese Form Vorteile für die Zusammenhänge zwischen den metaplektischen- und den Objekten der Time-Frequency Analysis. Weiters führt diese Darstellung dazu, dass ein metaplektischer Operator in der Form

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathcal{A}-I)}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi M_{\mathcal{A}} z^2} \rho(z)dz$$

dargestellt werden kann. Dabei ist $M_{\mathcal{A}}$ ist eine reelle symmetrische Matrix die als symplektische Cayley Transformation vom $\mathcal{A}$ bezeichnet wird. Es zeigt sich dass die Spreading Funktion des metaplektischen Operators $\widetilde{\mathcal{A}}$, mit $\det(\mathcal{A} - I) \neq 0$, einfach ein *Chirp* ist, gegeben durch

$$\eta_{\widetilde{\mathcal{A}}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathcal{A} - I)}} e^{i\pi M_{\mathcal{A}} z^2}.$$

Chirp ist ein Begriff der mehr bei den Ingenieuren verbreitet ist, weil im einfachsten Fall die Abbildung $x \mapsto e^{i\alpha x^2}$ einen "*linear frequency sweep*" darstellt. Die entsprechenden mathematischen Zugänge dazu können zum Beispiel unter dem Begriff *Charakter zweiten Grades* betrachtet werden. Um sich einen einführenden Überblick über diese Begriffe zu verschaffen, kann das entsprechende Unterkapitel im Kapitel 4 dieser Diplomarbeit benutzt werden. Für tiefergreifende Betrachtungen siehe zum Beispiel Reiter [21].

Notation. Die in dieser Diplomarbeit gewählte Notation ist eine Standardnotation in dem betrachtetem Gebiet. Im Prinzip folge ich de Gosson [13], Folland [8] und Gröchenig [14]. Die Elemente von $\mathbb{R}^{2d} \equiv \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ werden bezeichnet mit $z = (x, \omega)$, und das symplektische Produkt von z mit z' ist durch

$$\sigma(z, z') = \omega \cdot x' - \omega' \cdot x$$

gegeben, wobei $\cdot$ das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt ist. Ist M eine symmetrische Matrix, und u ein Vektor, werde ich oft einfach Mu^2 für $Mu \cdot u$ schreiben.

Kapitel 2

Fundamentales über symplektische Räume

Ich folge und zitiere hier de Gosson [13].

2.1 Symplektische Vektorräume

In diesem Abschnitt werden nur reelle und endlichdimensionale Vektorräume betrachtet. Das Kapitel beginnt mit der Betrachtung der symplektischen Form und des symplektischen Raumes, womit dann die Begriffe der symplektischen Basis eingeführt werden können.

2.1.1 Grundlegendes

Eine Abbildung $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ auf einem Vektorraum E wird *symplektische Form* auf E genannt, wenn gilt:

• ω ist in jedem Argument linear:

$$\omega(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2, z') = \alpha_1 \omega(z_1, z') + \alpha_2 \omega(z_2, z'),$$
$$\omega(z, \alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2') = \alpha_1 \omega(z, z_1') + \alpha_2 \omega(z, z_2'),$$

für alle $z, z', z_1, z_1^{'}, z_2, z_2'$ in E und $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2'$ in $\mathbb{R}$;

• ω ist antisymmetrisch (oder schiefsymmetrisch):

$$\omega(z, z') = -\omega(z', z),$$

für alle z, z' in E

• ω ist nicht ausgeartet :

$$\omega(z, z') = 0 \ \forall z \in E \ \Leftrightarrow \ z' = 0.$$

Definition 1 *Ein Paar (E, ω) bestehend aus einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum E und einer symplektischen Form auf E, wird reeller symplektischer Vektorraum (im folgendem nur symplektischer Raum) genannt. Die Dimension von (E, ω) ist die gleiche wie die Dimension von E.*

Beispiel 2 *$(\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$ ist ein klassisches Beispiel für einen reellen und endlich-dimensionalen symplektischen Vektorraum. σ ist also eine symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2d}$, und ist durch*

$$\sigma(z, z') = \sum_{j=1}^{d} \omega_j x_j' - \omega_j' x_j$$

*definiert, wobei $z = (x_1, ..., x_d; \omega_1, ..., \omega_d)$ und $z' = (x_1', ..., x_d'; \omega_1', ..., \omega_d')$. $(\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$ wird auch **standard symplektischer Raum** genannt, und σ wird standard symplektische Form genannt. Ist $d = 1$, so ist offensichtlich*

$$\sigma(z, z') = -\det(z, z').$$

Definition 3 *Sei (E, ω) ein symplektischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B}$, gegeben durch*

$$\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_d\} \cup \{f_1, ..., f_d\},$$

*wobei e_i und f_j aus E sind, wird **symplektische Basis** des symplektischen Raum (E, ω) genannt, wenn folgende Eigenschaften gelten:*

$$\omega(x_i, x_j) = 0 = \omega(f_i, f_j), \ \text{und}\ \omega(x_i, f_j) = \delta_{ij} \ \text{für}\ 1 \leq i, j \leq d.$$

δ_{ij} ist der Kronecker Index: $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$).

Jede symplektische Basis ist auch eine Basis im gewöhnlichem Sinn, denn die zu erfüllenden Eigenschaften in der Definition der symplektischen Basis, sichern gerade die lineare Unabhängigkeit der Vektoren e_i, f_j für $1 \leq i, j \leq d$.

Beispiel 4 *Betrachten wir die Vektoren $e_1, ..., e_d$ und $f_1, ..., f_d$ in $\mathbb{R}^{2d}$, gegeben durch*

$$e_i = (c_i, 0), \ f_i = (0, c_i).$$

Hier ist (c_i) die kanonische Basis auf $\mathbb{R}^d$; (für $d = 1$ haben wir $e_1 = (1, 0)$ und $f_1 = (0, 1)$). Diese Vektoren bilden auf dem standard symplektischem Raum $(\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$ eine symplektische Basis

$$\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_d\} \cup \{f_1, ..., f_d\}.$$

*Wie man leicht sehen kann sind die Eigenschaften $\sigma(e_i, e_j) = 0 = \sigma(f_i, f_j)$, und $\sigma(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq d$ erfühlt. Die so konstruierte symplektische Basis wird **kanonische symplektische Basis** genannt.*

Eine kurze Wiederholung:

Definition 5 *Bezeichnen wir zwei Gruppen mit G und G', und weiters eine Abbildung $h : G \to G'$. Dann heißt h*

1. *Homomorphismus, wenn $h(xy) = h(x)h(y)$ für alle $x, y \in G$;*
2. *Monomorphismus, wenn h ein Homomorphismus und injektiv ist;*
3. *Epimorphismus, wenn h ein Homomorphismus und surjektiv ist;*
4. *Isomorphismus, wenn h ein Homomorphismus und bijektiv ist;*

5. *Endomorphismus, wenn h ein Homomorphismus und $G = G'$ ist;*

6. *Automorphismus, wenn h ein Isomorphismus und $G = G'$ ist.*

Definition 6 *Die Gruppe aller Automorphismen s auf $(\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$, für die gilt*

$$\sigma(sz, sz') = \sigma(z, z'), \text{ für alle } z, z^{'} \text{ in } \mathbb{R}^{2d},$$

*wird die **standard symplektische Gruppe** genannt, und mit $\mathrm{Sp}(d)$ bezeichnet.*

Folgende Definition bietet eine *Diffeomorphe-Sichtweise* einer linearen symplektischen Transformation:

Definition 7 *Seien (E, ω) und (E', ω') zwei symplektische Räume. Ein Diffeomorphismus $f : (E, \omega) \to (E', \omega')$ wird Symplektomorphismus genannt, wenn das Differential $d_z f$ eine lineare symplektische Abbildung von E nach E' ist, für alle $z \in E$.*

Die Kettenregel zeigt dass die Komposition $g \circ f$ zweier Symplektomorphismen $f : (E, \omega) \to (E', \omega')$ und $g : (E', \omega') \to (E'', \omega'')$, wieder ein Symplektomorphismus ist, von (E, ω) nach (E'', ω''). Betrachtet man den Fall

$$(E, \omega) = (E', \omega') = (\mathbb{R}^{2d}, \sigma),$$

so ist ein Diffeomorphismus f auf $(\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$ genau dann ein Symplektomorphismus, wenn die Jakobimatrix von f in $\mathrm{Sp}(d)$ ist.

Zusammenfassend:

f ist ein Symplektomorphismus auf $(\mathbb{R}^{2d}, \sigma) \iff Df(z) \in \mathrm{Sp}(d)$ für jedes $z \in (\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$.

Definition 8 *Die Menge aller linearen Symplektomorphismen eines symplektischen Raumes (E, ω) bildet eine Gruppe. Diese wird die **symplektische Gruppe** von (E, ω) genannt, und wird bezeichnet mit $\mathrm{Sp}(E, \omega)$.*

Proposition 9 *Sind (E, ω) und (E', ω') zwei symplektische Räume der gleichen Dimension $2d$, dann sind die symplektischen Gruppen $\mathrm{Sp}(E, \omega)$ und $\mathrm{Sp}(E', \omega')$ isomorph.*

Beweis. (siehe de Gosson [13]) ■

Korollar 10 *Die standard symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(d)$ ist isomorph zur symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(E, \omega)$ für jeden $2d$-dimensionalen symplektischen Raum.*

Für praktische Zwecke ist es sehr nützlich in Koordinaten zu operieren, und die Elemente der standard symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(d)$ durch Matrizen darzustellen. Beispielsweise sieht die standard symplektische Form σ auf $\mathbb{R}^{2d}$ in der Matrix Darstellung wie folgt aus:

$$\sigma(z, z^{'}) = (z^{'})^T \mathcal{J} z = \mathcal{J} z \cdot z^{'}.$$

Dabei ist $\mathcal{J}$ die so genannte standard symplektische Matrix, und ist gegeben durch

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

wobei 0 und I für eine $d \times d$ Nullmatrix und eine $d \times d$ Identitätsmatrix stehen. $\mathcal{J}$ erfühlt folgende Eigenschaften:

$$\mathcal{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -I,$$

und

$$\mathcal{J}^{-1} = -\mathcal{J} = \mathcal{J}^T.$$

Es ergibt sich dass wegen

$$\det(\mathcal{A}^T \mathcal{J} \mathcal{A}) = \det \mathcal{A}^T \det \mathcal{A} \det \mathcal{J} = (\det \mathcal{A})^2 \det \mathcal{J} = \det \mathcal{J}$$

die Determinante von $\mathcal{A}$ eines der beiden Werte ± 1 annehmen kann. Genauer folgt

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d) \Rightarrow \det \mathcal{A} = 1.$$

(siehe de Gosson [13]).

Bemerkung 11 *Die standard symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(d)$ *ist abgeschloßen unter der Transposition. Es gilt*

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d) \Leftrightarrow \mathcal{A}^T \mathcal{J} \mathcal{A} = \mathcal{J}.$$

Da die Inverse $\mathcal{A}^{-1}$ *in* $\mathrm{Sp}(d)$ *ist, ergibt sich* $(\mathcal{A}^{-1})^T \mathcal{J} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{J}$, *und weiters*

$$(\mathcal{A}^{-1})^T \mathcal{J} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{J} \quad \overset{(\textit{Inverse auf beiden Seiten})}{\Leftrightarrow} \quad \mathcal{A} \mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}^T = \mathcal{J}^{-1}.$$

Das heißt

$$\mathcal{A} \mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}^T = \mathcal{J}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{A} \mathcal{J} \mathcal{A}^T = \mathcal{J},$$

womit also auch die Transponierte $\mathcal{A}^T$ *in* $\mathrm{Sp}(d)$ *ist. Damit folgt*

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d) \Longleftrightarrow \mathcal{A}^T \mathcal{J} \mathcal{A} = \mathcal{J} \Longleftrightarrow \mathcal{A} \mathcal{J} \mathcal{A}^T = \mathcal{J}.$$

Bemerkung 12 *Betrachten wir*

$$\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d) \ \textit{in einer Block-Matrix Form} \ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei also A, B, C, D $d \times d$ *Matrizen sind. Man kann zeigen dass die Bemerkung 11 und die folgenden äquivalenten Aussagen äquivalent sind:*

$$i): \qquad A^T C \ \textit{und} \ B^T D \ \textit{sind symmetrisch, und} \ A^T D - C^T D = I,$$

$$ii): \qquad AB^T \ \textit{und} \ CD^T \ \textit{sind symmetrisch, und} \ AD^T - BC^T = I.$$

Eigenschaft ii) impliziert gerade die Form der Inversen Matrix von $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der symplektischen Matrizen haben folgende Eigenschaften:

Proposition 13 *Sei* $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$.

1. *Ist* λ *ein Eigenwert von* $\mathcal{A}$, *so ist auch* $\overline{\lambda}$ *und auch* $1/\lambda$ *(und damit auch* $1/\overline{\lambda}$*) ein Eigenwert von* $\mathcal{A}$.

2. *Ist* k *das Vielfache* des *Eigenwertes* λ *der Matrix* $\mathcal{A}$, *so ist* k *auch das Vielfache des Eigenwertes* $1/\lambda$.

3. *Die Matrix* $\mathcal{A}$ *und die Matrix* $\mathcal{A}^{-1}$ *haben die gleichein Eigenwerte.*

Beweis. *ad (1.)* : Betrachten wir das charakteristische Polynom $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det(\mathcal{A}{-}\lambda I)$ der Matrix $\mathcal{A}$; Dieses erfühlt die Beziehung

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^{2n} P_{\mathcal{A}}(1/\lambda).$$

Da für reelle Matrizen die Eigenwerte als konjugierte Paare auftreten, folgt die erste Eigenschaft. Wegen $\mathcal{A}^T J \mathcal{A} = J$ haben wir $\mathcal{A} = -J(\mathcal{A}^T)^{-1}J$, und weiters

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{A}}(\lambda) &= \det(-J(\mathcal{A}^T)^{-1}J \ - \ \lambda I) \\ &= \det(-(\mathcal{A}^T)^{-1}J \ + \ \lambda I) \\ &= \det(-J + \lambda\mathcal{A}) \\ &= \lambda^{2n} \det(\mathcal{A}{-}\lambda^{-1} I). \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^{2n} P_{\mathcal{A}}(1/\lambda).$$

ad (2.) : Sei $P_{\mathcal{A}}^{(j)}$ die $j$te Ableitung des Polynoms $P_{\mathcal{A}}$. Besitzt der Eigenwert λ_0 das Vielfache k, dann ist $P_{\mathcal{A}}^{(j)}(\lambda_0) = 0$ für $0 \leq j \leq k-1$ und $P_{\mathcal{A}}^{(k)}(\lambda) \neq 0$. Wegen $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^{2n} P_{\mathcal{A}}(1/\lambda)$ ergibt sich auch $P_{\mathcal{A}}^{(j)}(1/\lambda) = 0$ für $0 \leq j \leq k-1$ und $P_{\mathcal{A}}^{(k)}(1/\lambda) \neq 0$.

ad (3.) : Eigenschaft 3. folgt aus der Eigenschaft 2. . ■

2.2 Freie symplektische Matrizen und ein Faktorisierungsergebnis

Freie symplektische Matrizen sind sehr effiziente mathematische Objekte in vielen praktischen Betrachtungen. In dieser Diplomarbeit ermöglichen die freien Matrizen einen konstruktiven Zugang zur metaplektischen Gruppe.

Definition 14 *Sei* $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ *eine symplektische Matrix. Wir definieren*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \ \textit{ist frei} \quad \Longleftrightarrow \quad \det B \neq 0.$$

Bemerkung 15 *(i)Jede symplektische Matrix kann als Produkt von genau zwei freien symplektischen Matrizen dargestellt werden.*

(ii) Die freien symplektischen Matrizen bilden eine dichte Teilmenge der standard symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}(d)$.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der freien symplektischen Matrizen, eine die zu einem wichtigen *faktorisierungs Resultat* führt, ist dass die freie symplektische Matrizen durch eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ erzeugt werden können.

Betrachten wir genauer was das bedeutet:

Sei

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

eine freie symplektische Matrix,

und weiters

$$W(x, x') = \frac{1}{2} DB^{-1}x^2 - B^{-1}x \cdot x' + \frac{1}{2} B^{-1}Ax' \cdot x'$$

eine *quadratische Form.*

Es gilt

$$\partial_x W(x, x') = DB^{-1}x - (-B)^T x^{'},$$

und

$$\partial_{x'} W(x, x') = -B^{-1}x + B^{-1}Ax^{'}.$$

Setzen wir jetzt

$$\omega = \partial_x W(x, x') \text{ und } \omega' = -\partial_{x'} W(x, x'),$$

so ergibt sich die Relation

$$(x, \omega) = \mathcal{A}(x^{'}, \omega^{'}) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} (x^{'}, \omega^{'})^T.$$

Wir sehen also dass die gestellten Bedingungen und die daraus folgende Relation an die freie symplektische Matrix $\mathcal{A}$ und die betrachtete Funktion $W(x, x')$, eine direkte Beziehung zwischen $\mathcal{A}$ und $W(x, x')$ erzwingen.

Die quadratische Form $W(x, x')$ erzeugt also durch die Relation $(x, \omega) = \mathcal{A}(x', \omega')$ die freie Matrix $\mathcal{A}$, was auch der Grund dafür ist dass $W(x, x')$ *freie erzeugende Funktion von* $\mathcal{A}$ genannt wird.

Ist $\mathcal{A}$ eine durch W erzeugte freie symplektische Matrix, so bezeichnet man diese Matrix mit $\mathcal{A}_W$.

Betrachten wir wieder die Relation $(x, \omega) = \mathcal{A}(x^{'}, \omega^{'})$. Wir haben weiters die Beziehung

$$x = Ax^{'} + B\omega^{'}, \ \omega = Cx^{'} + D\omega^{'}.$$

Die Matrizen DB^{-1} und $B^{-1}A$ sind symmetrisch. Ist W eine quadratische Form vom Typ

$$\widetilde{W}(x, x') = \frac{1}{2} Px \cdot x - Lx \cdot x' + \frac{1}{2} Qx' \cdot x',$$

wobei $P = P^T$, $Q = Q^T$, und $\det L \neq 0$, dann ist die Matrix

$$\mathcal{A}_{\widetilde{W}} = \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix}$$

eine *freie symplektische Matrix* deren erzeugende Funktion gegeben ist durch

$$\widetilde{W}(x, x') = \frac{1}{2} Px \cdot x - Lx \cdot x' + \frac{1}{2} Qx' \cdot x'.$$

Beispiel 16 *Betrachten wir* $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. *Es gilt dass* $\det B = \det I \neq 0$, *also ist* $\mathcal{J}$ *nach Definition eine freie symplektische Matrix. Die erzeugende Funktion in diesem Fall ist gegeben durch*

$$W(x, x') = -x \cdot x'.$$

Da die Inverse einer freien symplektischen Matrix $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$$

gegeben ist , folgt dass die Inverse von $\mathcal{A}$ auch eine freie symplektische Matrix ist. Weiters gilt dass $\mathcal{A}_W^{-1} = \mathcal{A}_{W'}$ und auch $W'(x, x') = -W(x', x)$.

Proposition 17 *Für jedes* $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ *gibt es zwei erzeugende Funktionen* W *und* W', *so dass gilt* $\mathcal{A} = \mathcal{A}_W \mathcal{A}_{W'}$.

Ein geometrischer Beweis dieser Behauptung ist In [13] zu finden.

Solange man mit erzeugenden Funktionen arbeitet, ist es wichtig zu wissen dass jede freie symplektische Matrix $\mathcal{A}_W$ in der Form

$$\mathcal{A}_W = \mathcal{V}_{-DB^{-1}} \mathcal{M}_{B^{-1}} \mathcal{J} \mathcal{V}_{-B^{-1}A} \tag{2.1}$$

faktorisiert werden kann, wobei hier

$$\mathcal{V}_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix} \quad , \mathcal{M}_L = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & (L^T)^{-1} \end{pmatrix}$$

für $P = P^T$ und $\det L \neq 0$ (dass DB^{-1} und $B^{-1}A$ tatsächlich symmetrisch sind, folgt aus $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$). Von (2.1) und der Proposition 17 folgt dass die Matrizen $\mathcal{V}_P$, $\mathcal{M}_L$ und $\mathcal{J}$ die standard symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(d)$ erzeugen.

Es folgt ein technisches Resultat das sich als sehr nützlich erweisen wird in der Betrachtung der Spreading Funktion der metaplektischen Operatoren:

Lemma 18 *Für komplexe* $d \times d$ *Matrizen* A, B, C, D, *die* $AC = CA$ *erfüllen, gilt*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Beweis. *(folgend Folland [8], Appendix A)*
Angenommen A *ist invertierbar. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1} \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen auf der rechten Seite der Gleichung sind Block-Dreiecksmatrizen. Damit folgt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)(\det(D - CA^{-1}B)) = \det(AD - ACA^{-1}B).$$

Es gilt $ACA^{-1} = C$, *und somit sind wir fertig. Wenn* A *nicht invertierbar ist, dann ist* $A + \epsilon I$, *für entsprechend klein gewähltes* $\epsilon > 0$, *invertierbar. Somit kommutiert* $A + \epsilon I$ *immer noch mit* C, *und wir können das gerade verwendete Argument für invertierbares* A *wieder anwenden, indem wir eben nur* A *durch* $A + \epsilon I$ *ersetzen und* ϵ *gegen* 0 *gehen lassen.* ■

Kapitel 3

Metaplektische Operatoren

3.1 Quadratische Fourier Transformation

Wie in Kapitel 2 schon betrachtet, wird die standard symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(d)$ durch freie Matrizen

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(d) \quad , \quad \det B \neq 0.$$

erzeugt. Zu jeder solchen Matrix wird eine erzeugende Funktion

$$W(x, x') = \tfrac{1}{2} \left\langle DB^{-1}x, x \right\rangle - \left\langle B^{-1}x, x' \right\rangle + \tfrac{1}{2} \left\langle B^{-1}Ax', x' \right\rangle$$

assoziiert, und wir haben gesehen dass dabei folgende Relationen gelten:

$$(x, \omega) = \mathcal{A}(x', \omega') \Longleftrightarrow \omega = \partial_x W(x, x') \ , \ \omega' = -\partial_{x'} W(x, x').$$

Andererseits, zu jeder quadratischen Form vom Typ

$$\begin{gathered} W(x, x') = \tfrac{1}{2}\langle Px, x\rangle - \langle Lx, x'\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Qx', x'\rangle \\ \textit{mit} \quad P = P^T \ , \ \ Q = Q^T \ , \ \textit{und} \quad \det L \neq 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

kann eine freie symplektische Matrix assoziiert werde, nämlich

$$\mathcal{A}_W = \begin{pmatrix} L^{-1}Q & L^{-1} \\ PL^{-1}Q - L^T & PL^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter, und führen weitere Objekte ein die uns der metaplektischen Gruppe näher bringen werden.

Betrachten wir einen Operator $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ gegeben wie folgt:

$$(\text{für } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) : \ \widehat{\mathcal{A}}_{W,m} f(x) = \left(\tfrac{1}{2\pi i}\right)^{d/2} \Delta(W) \int_{\mathbb{R}^d} e^{iW(x,x')} f(x') dx'. \tag{3.3}$$

Die im Integranden auftauchende Funktion $W(x, x')$ erzeugt eine freie symplektische Matrix $\mathcal{A}_W$. Das ist der Grund warum wir zu jedem solchen Operator $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ auch eine freie symplektische Matrix $\mathcal{A}_W$ assoziieren.

Weiters gilt für den Operator $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$, dass $\arg i = \pi/2$, und der Faktor $\Delta(W)$ ist durch

$$\Delta(W) = i^m \sqrt{|\det L|} \tag{3.4}$$

gegeben. Die ganze Zahl m korrespondiert gewissermaßen zur Wahl von $\arg \det L$:

$$m\pi \equiv \arg \det L \mod 2\pi. \tag{3.5}$$

Die Darstellung (3.3) des eingeführten Operators $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ kann auch in etwas modifizierten Art in folgender Form dargestellt werden

$$\widehat{\mathcal{A}}_{W,m} f(x) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{d/2} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{\mu} \Delta(W) \int_{\mathbb{R}^d} e^{iW(x,x')} f(x')dx', \tag{3.6}$$

wobei

$$\mu = 2m - d. \tag{3.7}$$

Definition 19

(i) Der Operator $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ wird "quadratische Fourier Transformation" genannt. Zu jedem solchen Operator wird eine freie symplektische Matrix A_W assoziiert.

(ii)Die "Klasse modulo 4" der ganzen Zahlen m, wird "Maslov index" des Operators $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ genannt. *Die quadratische Fourier Transformation, die zum Fall $A_W = J$ und $m = 0$ korrespondiert, wird mit $\widehat{J}$ bezeichnet.*

Wie schon in einem Beispiel vom Kapitel 2 gesehen, ist die Erzeugende Funktion der standard symplektischen Matrix J durch

$$W(x, x') = -(x \cdot x')$$

gegeben. Daraus folgt dass

$$\widehat{J} f(x) = \left(\tfrac{1}{2\pi i}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot x'} f(x')dx' = i^{-d/2} F f(x) \tag{3.8}$$

für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, wobei F die gewöhnliche Fourier Transformation ist. Aus der Darstellung der inversen Fourier Transformation folgt, dass die Inverse $\widehat{J}^{-1}$ von $\widehat{J}$ durch

$$\widehat{J}^{-1} f(x) = \left(\tfrac{i}{2\pi}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot x'} f(x')dx' = i^{d/2} F^{-1} f(x)$$

gegeben ist.

Betrachten wir jetzt die Operatoren $\widehat{V}_{-P}$ und $\widehat{M}_{L,m}$, gegeben durch

$$\widehat{V}_{-P} f(x) = e^{\frac{i}{2}(Px \cdot x)} f(x) \quad , \quad \widehat{M}_{L,m} f(x) = i^m \sqrt{|\det L|} f(Lx). \tag{3.9}$$

Wir haben folgendes wichtiges faktorisierungs Ergebnis:

Proposition 20 *Sei W eine quadratische Form wie in (3.1).*

(i) Es gilt

$$\widehat{\mathcal{A}}_{W,m} = \widehat{V}_{-P} \widehat{M}_{L,m} \widehat{J} \widehat{V}_{-Q}; \tag{3.10}$$

(ii) Die Operatoren $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ können zu unitären Operatoren von $L^2(\mathbb{R}^d)$ nach $L^2(\mathbb{R}^d)$ fortgesetzt werden, und das Inverse von $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ ist durch

$$\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}^{-1} = \widehat{\mathcal{A}}_{W^*,m^*}, \text{ wobei } W^*(x, x') = -W(x', x) \ , \ m^* = d - m \tag{3.11}$$

gegeben.

Beweis. *siehe de Gosson [13]* ■

Die Operatoren $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ bilden also eine Untergruppe von der Gruppe $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^d))$ der unitären Operatoren wirkend auf $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definition 21 *Die Untergruppe von $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^d))$, die durch die Operatoren der quadratischen Fourier Transformation $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$ erzeugt ist, wird "metaplektische Gruppe"genannt und mit* $\mathrm{Mp}(d)$ *bezeichnet. Die Elemente von* $\mathrm{Mp}(d)$ *werden metaplektische Operatoren genannt .*

Jedes $\widehat{\mathcal{A}} \in \mathrm{Mp}(d)$ ist somit ein Produkt $\widehat{\mathcal{A}}_{W_1,m_1} \cdots \widehat{\mathcal{A}}_{W_k,m_k}$ von metaplektischen Operatoren, die wiederum zu freien symplektischen Matrizen assoziiert werden.

Satz 22 *Jeder Operator $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{Mp}(d)$ kann als Produkt von genau zwei quadratischen Fourier Transformationen dargestellt werden : $\widetilde{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_{W,m}\widehat{\mathcal{A}}_{W',m'}$. Diese Fakrorisierung ist nicht eindeutig. Zum Beispiel gilt $I = \widehat{\mathcal{A}}_{W,m}\widehat{\mathcal{A}}_{W^*,m^*}$ für jede erzeugende Funktion W.*

Beweis. siehe [11, 13, 18]. ■

Ein metaplektischer Operator kann also durch verschiedene Faktoren als Produkt $\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}\widehat{\mathcal{A}}_{W',m'}$ dargestellt werden.

Es folgt eine wichtige Beziehung zwischen der metaplektischen Operatoren und der Wigner Transformation.

Zur Erinnerung, für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (oder allgemeiner $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) ist die *Wigner Transformation* Wf durch

$$Wf(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\omega\cdot y} f(x + \tfrac{1}{2}\omega)\overline{f(x - \tfrac{1}{2}\omega)}dy$$

gegeben. (Für $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sollte das Integral in der distributionellen Sichtweise interpretiert werden). Für jedes $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ haben wir die so genannte "symplektische kovariante Darstellung"

$$Wf(\mathcal{A}^{-1}(x,\omega)) = W(\widetilde{\mathcal{A}}f)(x,\omega), \tag{3.12}$$

wobei $\widetilde{\mathcal{A}}$ der metaplektische Operatoren der zu $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ korrespondiert ist.

Ein mathematisches Objekt das in einer engen Verbindung mit der Wigner Funktion steht, ist die Short-Time Fourier Transformation, bekannt aus der Signal Theorie und der Time-Frequency Analysis:

Definition 23 *Für $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist die Short-Time Fourier Transformation (STFT) eine Abbildung $V_\phi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die durch*

$$V_\phi\psi(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\omega\cdot x'}\psi(x')\overline{\phi(x' - x)}dx'$$

gegeben ist. Die STFT wird auch die gefensterte Fourier Transformation, mit dem Fenster $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ genannt.

Die STFT steht mit der Cross-Wigner Transformation

$$W(\psi,\phi)(z) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\omega\cdot y}(x+\frac{1}{2}y)\overline{\phi(x-\frac{1}{2}y)}dy$$

durch die Darstellung

$$W(\psi,\phi)(z) = (\frac{2}{\pi})^{\frac{d}{2}} e^{2i\omega\cdot x} V_{\phi^{\vee}_{\sqrt{2\pi}}} \psi_{\sqrt{2\pi}}(z\sqrt{\frac{2}{\pi}})$$

in einer Beziehung, wobei $\psi_{\sqrt{2\pi}}(x) = \psi(x\sqrt{2\pi})$ und $\phi^{\vee} = \phi(-x)$. Ebenso gilt

$$V_{\phi}\psi(z) = (\frac{2}{\pi})^{-\frac{d}{2}} e^{-i\pi\omega\cdot x} W(\psi_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}, \phi^{\vee}_{\sqrt{2\pi}})(z\sqrt{\frac{\pi}{2}}).$$

3.2 Weyl Darstellung der metaplektischen Operatoren

3.2.1 Symplektische Fourier Transformation

Dieses Unterkapitel beginnt mit einer Einführung der Fourier Transformation von Funktionen (oder Distributionen) definiert auf einem symplektischen Raum $(\mathbb{R}^{2d}, \sigma)$.

Definition 24 *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ ist die symplektische Fourier Transformation von f durch*

$$f_{\sigma}(z_0) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i\sigma(z_0,z)} f(z)dz$$

definiert, und wird mit $f_{\sigma} = \mathcal{F}f_{\sigma}$ bezeichnet.
(σ ist dabei natürlich die standard symplektische Form auf $\mathbb{R}^{2d}$).

Sei $\mathcal{F}$ die gewöhnliche Fourier Transformation für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ die durch

$$\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i z\cdot z'} f(z')dz'$$

definiert ist. Es gilt folgende wichtige Beziehung zwischen der symplektischen Fourier Transformation und der gewöhnlichen Fourier Transformation:

$$\mathcal{F}_{\sigma} f(\mathcal{J}z) = \mathcal{F}f(z).$$

Weil die gewöhnliche Fourier Transformation $\mathcal{F}$ zu einem unitären Operator von $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ nach $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ fortgesetzt werden kann, und -durch Dualität- ebenso zu einem Operator von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ nach $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$, so besitzt auch die symplektische Fourier Transformation $\mathcal{F}_{\sigma}$ diese Eigenschaft. Zusammenfassend:

> Die symplektische *Fourier Transformation F_{σ} ist ein unitärer Operator auf $L^2(\mathbb{R}^{2d})$, der zu einem Automorphismus auf dem Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ der temperierten Distributionen ausgedehnt werden kann.*

Aus der Relation zwischen $\mathcal{F}_{\sigma}$ und $\mathcal{F}$, folgt dass $\mathcal{F}_{\sigma}$ eine Involution ist:

$$\mathcal{F}_{\sigma}^{-1} = \mathcal{F}_{\sigma}, \text{ oder } \mathcal{F}_{\sigma}^2 = I.$$

Proposition 25 *Für jedes $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ gilt*

$$\mathcal{F}_\sigma(f \circ \mathcal{A}) = (\mathcal{F}_\sigma f) \circ \mathcal{A}.$$

Beweis. Weil $\sigma(\mathcal{A}z, z') = \sigma(z, \mathcal{A}^{-1}z')$ ergibt sich

$$\mathcal{F}_\sigma f(\mathcal{A}z) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i\sigma(z,\mathcal{A}^{-1}z')} f(z')dz'.$$

Diese Darstellung ist (nach einer Variablensubstitution, und der Tatsache dass Determinante einer symplektischen Matrix gleich 1 ist), nichts anderes als

$$\mathcal{F}_\sigma f(\mathcal{A}z) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i\sigma(z,z'')} f(\mathcal{A}z'') \left|\det \mathcal{A}\right| dz'' =$$

$$= (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i\sigma(z,z'')} f(\mathcal{A}z'')dz'',$$

womit die Behauptung gezeigt ist. ■

3.2.2 Pseudodifferential Operatoren

Es folgen einige Grundbegriffe über pseudodifferential Operatoren.
(Dabei folge und zitiere ich Gröchenig [14].)

Die Theorie der pseudodifferential Operatoren hat ihre Wurzeln nicht nur in der Mathematik, sondern insbesondere in der Physik und Ingeniuerwissenschaften.

In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen betrachtet man Gleichungen der Form

$$Af(x) = \sum_{|\alpha| \le N} \sigma_\alpha(x) D^\alpha f(x) = g(x).$$

Dabei bezeichnet N den Grad des differential Operators A, und $\{\sigma_\alpha : |\alpha| \le N\}$ stellt die Menge der nicht-konstanten Koeffizienten dar, für die man für gewöhnlich annimmt, dass sie glatt sind (also $\mathcal{C}^\infty$).

Die inverse Fourier Darstellung (siehe Appendix) zeigt dass

$$D^\alpha f(x) = \int \widehat{f}(\omega)(2\pi i\omega)^\alpha e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega.$$

Somit kann A ausgedrückt werden durch

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \le N} \sigma_\alpha(x)(2\pi i\omega)^\alpha \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x,\omega)\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega.$$

In dieser Darstellung ist

$$\sigma(x,\omega) = \sum_{|\alpha| \le N} \sigma_\alpha(x)(2\pi i\omega)^\alpha,$$

und wird das *Symbol* von A genannt. Um allgemeinere Symbole definieren zu können, ist folgende Definition nötig:

Definition 26 *Für eine (messbare) Funktion σ oder eine temperierte Distribution (siehe Appendix) auf $\mathbb{R}^{2d}$, wird der Operator*

$$K_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x,\omega)\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i x\cdot\omega}d\omega$$

ein pseudodifferential Operator mit Symbol σ genannt.

Diese Definition bildet also die *Symbole* der Time-Frequency Eben auf die (pseudodifferential) Operatoren. Um K_σ von anderen Typen der pseudodifferential Operatoren zu unterscheiden, wird die Abbildung $\sigma \to K_\sigma$ als *Kohn-Nirenberg* Zuweisung, und σ als Kohn-Nirenberg Symbol genannt.

Bemerkung 27 *Bei der Lösung der partiellen Differentialgleichungen der Art*

$$Af(x) = \sum_{|\alpha|\leq N} \sigma_\alpha(x)D^\alpha f(x),$$

ist es wichtig eine Darstellung für den inversen Operator von A

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_\alpha(x,\omega)\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i x\cdot\omega}d\omega$$

zu finden. In Sinne der Definition des pseudodifferential Operators und einiger Resultate aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, ergibt sich die Notwendigkeit den möglichen Zusammenhang zwischen A^{-1} und den pseudodifferential Operator

$$K_{\frac{1}{\sigma}} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(x,\omega)^{-1}\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i x\cdot\omega}d\omega$$

zu untersuchen. Dieser Weg hat sehr tiefführende und interessante Ergebnisse hervorgebracht. Man kann zeigen dass A^{-1} "fast gleich" $K_{\frac{1}{\sigma}}$ ist (siehe: L. Hörmander: The Weyl Calculus of pseudodifferential operators; J. J. Kohn and L. Nirenberg: An algebra of pseudo-differential operators).

Beispiel 28 *Ist das Symbol nur von x abhängig, also zum Beispiel $\sigma(x,\omega) = m(x)$, dann ist*

$$K_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} m(x)\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i x\cdot\omega}d\omega = m(x)f(x).$$

K_σ stellt also einen multiplikations Operator dar. Genauer,

$$\text{wenn } \sigma(x,\omega) \equiv c, \text{ dann ist } K_\sigma = cI.$$

Andererseits, wenn $\sigma(x,\omega) = \mu(\omega)$, dann ergibt sich

$$K_\sigma f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\omega)\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i x\cdot\omega}d\omega = \mathcal{F}^{-1}(\mu\widehat{f})(x).$$

K_σ ist also ein so genannter Fourier Multiplikator.

3.2.3 Weyl Operatoren

Es folgt die Definition des Weyl Operators der *mit einem Symbol korrespondiert.*
(Dabei folge und zitiere ich de Gosson [13]).

Definition 29 *Sei $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$.*
(i) Der zu einem Symbol a korrespondierende Weyl Operator ist ein

$$\widehat{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}),$$

definiert durch

$$\widehat{A}\psi(x) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} a_\sigma(z_0)\widehat{T}(z_0)\psi(x)dz_0.$$

(ii) Die symplektische Fourier Transformation $a_\sigma = F_\sigma a$ zum Symbol a wird "gedrehtes Symbol von $\widehat{A}$" genannt ("twisted symbol of A").
Folgende Bezeichnungen werden dafür verwendet:
$\widehat{A} \stackrel{Weyl}{\longleftrightarrow} a$ oder $a \stackrel{Weyl}{\longleftrightarrow} \widehat{A}$ (die "Weyl Korrespondents").

Eine nützliche Schreibweise um

$$\widehat{A}\psi(x) = (\frac{1}{2\pi})^d \int a_\sigma(z_0)\widehat{T}(z_0)\psi(x)\, d^{2d}z_0$$

darzustellen ist die folgende:

$$\widehat{A} = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} a_\sigma(z)\widehat{T}(z)dz$$

wobei die rechte Seite als *Bochner integral* interpretiert werden sollte (das heißt Integral mit Werten im einem Banach Raum).

Aus der Relation $\mathcal{F}_\sigma^{-1} = \mathcal{F}_\sigma$ folgt dass das gewöhnliche Weyl Symbol a und deren gedrehte Version a_σ, in einem explizitem Zusammenhang durch die Darstellungen

$$a_\sigma(z) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i\sigma(z,z')}a(z')dz',$$

$$a(z) = (\frac{1}{2\pi}) \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i\sigma(z,z')}a_\sigma(z')dz'$$

stehen.

3.2.4 Der Kernsatz von L. Schwartz

Der Weyl Operator kann auch für allgemeine Symbole definiert werden. Um zu sehen wie das funktioniert, ist es nützlich den "Kern"des Wayl Operator mit einem Symbol $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^{2d})$ zu betrachten. Zuerst ein dafür wichtiges Theorem aus der Funktionalanalysis (ein Beweis kann aus *F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels* entnommen werden):

Satz 30 ***Der Kernsatz von L. Schwartz:*** *Die stetigen linearen Transformationen*

$$\widehat{A} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

sind genau die Operatoren mit dem Kern $K_{\widehat{A}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$.

Die Wirkung so eines Operators auf eine Funktion $\psi \in S(R_x^d)$ wird bezeichnet mit

$$\widehat{A}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_{\widehat{A}}(x,y)\psi(y)dy,$$

wobei das Integral, für feste x, interpretiert als die "distributionelle Klammer" (distributional bracket)

$$\widehat{A}\psi(x) = \langle K_{\widehat{A}}(x,\cdot), \psi(\cdot)\rangle$$

werden sollte. Das folgende Theorem zeigt dass die Weyl Operatoren einfach eine spezielle Art der pseudodifferential Operatoren sind:

Satz 31 *Für $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ und $\widehat{A} \overset{Weyl}{\longleftrightarrow} a$ gilt*

(i) Der Kern von $\widehat{A}$ ist gegeben durch

$$K_{\widehat{A}}(x,y) = (\frac{1}{2\pi})^d \int e^{i\omega\cdot(x-y)} a(\frac{1}{2}(x+y),\omega)d\omega,$$

und damit

$$\widehat{A}\psi(x) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\omega\cdot(x-y)} a(\frac{1}{2}(x+y),\omega)\psi(y)d\omega dy$$

für $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$.

(ii) Umgekehrt kann $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ in der Form

$$a(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\omega\cdot y} K_{\widehat{A}}(x+\frac{1}{2}y, x-\frac{1}{2}y)dy$$

dargestellt werden.

Beweis. siehe de Gosson[13] ■

Der erste Teil des letzten Theorems zeigt dass der Weyl Operator in vergleichsweise einfachen Termen des *Grossmann-Royer* Operators

$$\widetilde{T}(z_0)\psi(x) = e^{2i\omega_0\cdot x - x_0}\psi(2x_0 - x)$$

dargestellt werden kann. Genaueres über den *Grossmann-Royer* Operator findet man im Kapitel 5 von de Gosson [13].

Schwartzsches Kern Theorem (siehe auch Gröchenig [14], Kapitel 14) besagt dass jeder lineare Operator $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ der stetig in der schwach $*$-Topologie ist, in der Form

$$L = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \eta_L(x,\omega)e^{\pi i\omega\cdot x}T_x M_\omega dx d\omega \tag{3.13}$$

dargestellt werden kann, wobei η_L (die *Spreading Funktion*) eine temperierte Distribution ist, die tatsächlich die symplektische Fourier Transformation des Kohn–Nirenberg Symbols des Operator L ist, wenn gilt:

$$\ell = \mathcal{F}_\sigma \eta_L = \eta_L \circ \mathcal{J}^{-1}$$

Das Integral (3.13) sollte im distributionellen Sinne betrachtet werden.

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ von jedem Operator $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{Mp}(d)$ wieder in
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ stetig abgebildet wird, stellt sich natürlicherweise die Frage:

Was ist die Spreading Funktion eines metaplektischem Operator?

Vor der Antwort auf diese Frage wird zuerst die symplektische Cayley Transformation einer symplektischen Matrix eingeführt. Die symplektische Cayley Transformation ist eine Art der Cayley Transformation für Matrizen, wie sie in Howe [16] in seinen Untersuchungen über die *oscillator Gruppe* betrachtet werden kann, aber auch im Folland [8] Kapitel 5.

3.2.5 Die symplektische Cayley Transformation

Seien alle Eigenwerte von $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ ungleich Null, also

$$\det(\mathcal{A} - I) \neq 0$$

und bezeichnen wir die Menge solcher $2d \times 2d$ symplektischer Matrizen mit $\mathrm{Sp}^*(d)$.

Definition 32 *Die symplektische Cayley Transformation von $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}^*(d)$ ist durch die Matrix*

$$M_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\mathcal{J}(\mathcal{A} + I)(\mathcal{A} - I)^{-1} \tag{3.14}$$

gegeben.

Einige Eigenschaften der symplektischen Fourier Transformation können im folgendem Resultat zusammengefasst werden:

Proposition 33

(i) Für $A \in \mathrm{Sp}^*(d)$ gilt $M_{\mathcal{A}} = (M_{\mathcal{A}})^T$, und die symplektische Cayley Transformation ist eine injektive Abbildung von $\mathrm{Sp}^*(d)$ nach $\mathrm{Sym}(2d, R)$, wobei $\mathrm{Sym}(2d, R)$ die symmetrischen $2d \times 2d$ Matrizen repräsentiert. Die Inverse Abbildung der Cayley Transformation ist dann durch die Darstellung

$$\mathcal{A} = (M_{\mathcal{A}} - \tfrac{1}{2}\mathcal{J})^{-1}(M_{\mathcal{A}} + \tfrac{1}{2}\mathcal{J})$$

gegeben.

(ii) Es gilt $M_{\mathcal{A}^{-1}} = -M_{\mathcal{A}}$ und

$$M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'} = \mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}' - I)^{-1}. \tag{3.15}$$

(iii) Für die Matrizen A, A', AA' die nur Eigenwerte ungleich Eins besitzen, ist die symplektische Cayley Transformation von AA' durch

$$M_{\mathcal{A}\mathcal{A}'} = M_{\mathcal{A}} + (\mathcal{A}^T - I)^{-1}\mathcal{J}(M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'})^{-1}\mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1} \tag{3.16}$$

gegeben.

Beweis. Durch die Relation

$$\mathcal{A}^T\mathcal{J}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{J}\mathcal{A}^T = \mathcal{J}$$

sind die Eigenschaften (i) und (ii) leicht ersichtlich. Zeigen wir (3.16); Betrachten wir

$$M_{\mathcal{A}} + M = M_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}. \tag{3.17}$$

Dabei ist die Matrix M durch

$$M = (\mathcal{A}^T - I)^{-1}\mathcal{J}(M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'})^{-1}\mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1}$$

gegeben, und diese Darstellung besitzt im Sinne von(3.15) folgende Form

$$M = (\mathcal{A}^T - I)^{-1}\mathcal{J}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1}.$$

Wegen $\mathcal{A}^T = -\mathcal{J}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{J}$ und $(-\mathcal{A}^{-1} + I)^{-1} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - I)^{-1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
M &= (\mathcal{A}^T - I)^{-1}\mathcal{J}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} \\
&= -\mathcal{J}(-\mathcal{A}^{-1} + I)^{-1}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} \\
&= -\mathcal{J}\mathcal{A}(\mathcal{A} - I)^{-1}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} \\
&= -\mathcal{J}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} - \mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1}.
\end{aligned}$$

Weil $M_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\mathcal{J} + \mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1}$ ist, haben wir

$$\begin{aligned}
&M_{\mathcal{A}} + M = \\
&\mathcal{J}(\tfrac{1}{2}I + (\mathcal{A} - I)^{-1} - (\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} - (\mathcal{A} - I)^{-1}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1});
\end{aligned}$$

Es gilt weiters

$$(\mathcal{A}-I)^{-1}-(\mathcal{A}-I)^{-1}(\mathcal{A}'-I)(\mathcal{A}\mathcal{A}'-I)^{-1} = (\mathcal{A}-I)^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{A}'-I-\mathcal{A}'+I)(\mathcal{A}\mathcal{A}'-I)^{-1})$$

und somit

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} - I)^{-1} - (\mathcal{A} - I)^{-1}(\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} &= (\mathcal{A} - I)^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{A}' - \mathcal{A}')(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} \\
&= \mathcal{A}'(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1}).
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich die gewünschte Darstellung

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{A}} + M &= \mathcal{J}(\tfrac{1}{2}I - (\mathcal{A}' - I)(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1} + \mathcal{A}'(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1}) \\
&= \mathcal{J}(\tfrac{1}{2}I + (\mathcal{A}\mathcal{A}' - I)^{-1}) \\
&= M_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}.
\end{aligned}$$

■

Es folgt wieder ein faktorisierungs Resultat. Diese sich wiederholende Möglichkeit der Faktorisierung ist typisch für den konstruktiven Zugang zur metaplektischen Gruppe den ich in dieser Diplomarbeit gewählt habe:

Proposition 34 *Jedes $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ kann geschrieben werden als Produkt $\mathcal{A}_W\mathcal{A}_{W'}$ von zwei freien symplektischen Matrizen, die zur Menge $\mathrm{Sp}^*(d)$ gehören.*

Beweis. Betrachten wir zwei freie symplektische Matrizen $\mathcal{A}_W$ und $\mathcal{A}_{W'}$ so dass $\mathcal{A} = \mathcal{A}_W\mathcal{A}_{W'}$. Wie wir im Kapitel über die symplektische Matrizen und entsprechendes faktorisierungs Resultat schon gesehen haben, ist die Darstellung $\mathcal{A} = \mathcal{A}_W\mathcal{A}_{W'}$ immer möglich, weil zu jedem $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ zwei erzeugende Funktionen W und W' existieren, so dass sich die entsprechende Operator Darstellung $\mathcal{A} = \mathcal{A}_W\mathcal{A}_{W'}$ immer realisieren lässt. Mit der Darstellung (2.1) ergibt sich

$$\mathcal{A} = \mathcal{V}_{-DB^{-1}}\mathcal{M}_{B^{-1}}\mathcal{J}\mathcal{V}_{-(B^{-1}A+D'B'^{-1})}\mathcal{M}_{B'^{-1}}\mathcal{J}\mathcal{V}_{B'^{-1}A'}.$$

Ist $\det(\mathcal{A}_W - I) \neq 0$ und $\det(\mathcal{A}_{W'} - I) \neq 0$, dann ist nichts mehr zu zeigen. Ist das nicht der Fall, so betrachten wir eine reelle Zahl λ und folgende Darstellung

$$\mathcal{A}'_W = \begin{pmatrix} A - \lambda B & B \\ C - \lambda D & D \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{A}'_{W'} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' + \lambda A' & D' + \lambda B' \end{pmatrix}.$$

Wegen der Relation $B^T D = D^T B$ und $A^T B = B^T A$ sind $\mathcal{A}'_W$ und $\mathcal{A}'_{W'}$ freie symplektische Matrizen, und es ergibt sich $\mathcal{A}_W \mathcal{A}_{W'} = \mathcal{A}'_W \mathcal{A}'_{W'}$; jetzt kann λ so gewählt werden, dass $\det(\mathcal{A}'_W - I) \neq 0$ und $\det(\mathcal{A}'_{W'} - I) \neq 0$. ■

3.3 Die Operatoren $\mathcal{A}_{(\nu)}$

Wir führen folgende praktische Schreibweise ein

$$\rho(z) = e^{\pi i \omega \cdot x} T_x M_\omega = M_{\omega/2} T_x M_{\omega/2}$$

mit $z = (x, \omega)$. Dabei wird $\rho(z)$ der *Heisenberg–Weyl Operator* der Quantenmechanik genannt, und bildet von der Time-Frequency Ebene in die Menge der unitären Operatoren $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^d))$ ab. Für $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}^*(d)$ und $\nu \in \mathbb{R}$ kann zum Paar $(\mathcal{A}, \nu)$ ein Operator $\mathcal{A}_{(\nu)}$ assoziiert werden, der durch folgende Darstellung

$$\mathcal{A}_{(\nu)} = i^\nu \sqrt{|\det(\mathcal{A} - I)|} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(\mathcal{A}z)\rho(-z) dz$$

gegeben ist, wobei $dz = dx d\omega$. Das Integral sollte wieder als Bochner Integral interpretiert werden. Der Operator $\mathcal{A}_{(\nu)}$ kann durch Verwendung der symplektischen Cayley Transformation in die folgende Weyl Form umgeschrieben werden :

Lemma 35 *Für jedes* $(\mathcal{A}, \nu) \in \mathrm{Sp}^*(d) \times \mathbb{R}$ *gilt*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{(\nu)} = \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A} - I)|}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi M_\mathcal{A} z^2} \rho(z) dz. \tag{3.18}$$

Beweis. Mit der Bezeichnung

$$\begin{aligned} M_\mathcal{A} z^2 &= (\tfrac{1}{2}\mathcal{J} + \mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1}) z \cdot z \\ &= \mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1} z \cdot z \\ &= \sigma((\mathcal{A} - I)^{-1} z, z). \end{aligned}$$

und der Variablentransformation $z \longmapsto (\mathcal{A} - I)^{-1} z$ des Integrals in (3.18), ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi M_\mathcal{A} z^2} \rho(z) dz = i^\nu \sqrt{|\det(\mathcal{A} - I)|} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi\sigma(z, \mathcal{A}z)} \rho((\mathcal{A} - I)z) dz.$$

Wegen $\rho(z + z') = e^{-i\pi(z,z')} \rho(z)\rho(z')$ gilt weiters

$$e^{i\pi(z, \mathcal{A}z)} \rho((\mathcal{A} - I)z) = \rho(\mathcal{A}z)\rho(-z)$$

womit (3.18) folgt. ■

Die Operatoren $\widetilde{\mathcal{A}}_{(\nu)}$, die identifiziert werden mit den metaplektischen Operatoren $\widehat{\mathcal{A}}_{w,m}$ und einer Wahl von ν, sind unitäre Operatoren. Es ergibt sich folgendes Resultat für die Operatoren $\mathcal{A}_{W,\nu}$.

Zuerst folgt aber die *generalisierte Fresnel Darstellung*, da diese auch für den Bewies des eben erwähnten Resultates nützlich sein wird. Diese besitzt die Form

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{i\pi M x^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} M} (|\det M|)^{-1/2} e^{-\pi M^{-1}\xi^2}. \tag{3.19}$$

Die *generalisierte Fresnel Darstellung* gilt für reelle Matrizen M, mit $\det M \neq 0$; $\operatorname{sign} M$ ist die so genannte Signature von M (siehe Folland [8], Appendix A);

Proposition 36

(i) Der Operator $A_{(\nu)}$ ist invertierbar, und es gilt $(A_{(\nu)})^{-1} = (A^{-1})_{(-\nu)}$.
(ii) Für symplektischen Matrizen A, A', und AA' in $\mathrm{Sp}^*(d)$ gilt

$$\mathcal{A}_{(\nu)}\mathcal{A}'_{(\nu')} = (\mathcal{A}\mathcal{A}')_{(\nu+\nu'+\frac{1}{2}\operatorname{sign}(M_{\mathcal{A}}+M_{\mathcal{A}'}))} \tag{3.20}$$

(iii) Der Operator $A_{(\nu)}$ ist unitär: $A_\nu^* = A_\nu^{-1}$.

Beweis. Beginnen wir mit dem Beweis der kompositions Darstellung in (ii). Einfachheit halber schreiben wir $M = M_{\mathcal{A}}$ und $M' = M_{\mathcal{A}'}$. Die Spreading Funktionen von $\mathcal{A}_{(\nu)}$ und $\mathcal{A}'_{(\nu')}$ sind gegeben durch

$$\eta(z) = \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}-I)|}} e^{i\pi M z^2} \quad , \quad \eta'(z) = \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}'-I)|}} e^{i\pi M' z^2} \quad ,$$

und die vom Produkt $\mathcal{A}_{(\nu)}\mathcal{A}'_{(\nu')}$ hat die Form

$$\eta''(z) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi\sigma(z,z')} \eta(z-z')\eta'(z') dz', \tag{3.21}$$

was gerade

$$\eta''(z) = K \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi\sigma(z,z')} e^{i\pi\Phi(z,z')} dz'$$

ist, wobei die Konstante K und die Funktion Φ durch

$$K = \frac{i^{\nu+\nu'}}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}-I)(\mathcal{A}'-I)|}}$$
$$\Phi(z,z') = Mz^2 - 2Mz\cdot z' + (M+M')z'^2$$

gegeben sind. Wegen

$$\sigma(z,z') - 2Mz\cdot z' = (\mathcal{J}-2M)z\cdot z' = -2\mathcal{J}(\mathcal{A}-I)^{-1} z\cdot z'$$

ergibt sich die Gleichung

$$\sigma(z,z') + \Phi(z,z') = -2\mathcal{J}(\mathcal{A}-I)^{-1} z\cdot z' + Mz^2 + (M+M')z'^2$$

und somit

$$\eta''(z) = K e^{i\pi M z^2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i \mathcal{J}(\mathcal{A}-I)^{-1} z\cdot z'} e^{i\pi(M+M')z'^2} dz'. \tag{3.22}$$

Auf das Integral kann jetzt die Fresnel Formula (3.19) angewendet werden, und durch das Einsetzen von $K = \frac{i^{\nu+\nu'}}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}-I)(\mathcal{A}'-I)|}}$ ergibt sich

$$\eta''(z) = |\det[(M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'})(\mathcal{A} - I)(\mathcal{A}' - I)]|^{-1/2} e^{\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} M} e^{2\pi i \Theta(z)}, \tag{3.23}$$

wobei Θ die folgende quadratische Form darstellt

$$\Theta(z) = (M + (\mathcal{A}^T - I)^{-1} \mathcal{J}(M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'})^{-1} \mathcal{J}(\mathcal{A} - I)^{-1}) z^2,$$

was gerade, im Sinne der Proposition 33, $\Theta(z) = M_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$ ergibt. Außerdem gilt

$$M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'} = \mathcal{J}(I + (\mathcal{A} - I)^{-1} + (\mathcal{A}' - I)^{-1})$$

und mit $\det \mathcal{J} = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \det[(M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'})(\mathcal{A} - I)(\mathcal{A}' - I)] &= \det[(\mathcal{A} - I)(M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}'})(\mathcal{A}' - I)] \\ &= \det(\mathcal{A}\mathcal{A}' - I) \end{aligned}$$

womit der Beweis von (ii) abgeschlossen ist.

Zum Beweis von (i): Wegen $\det(\mathcal{A} - I) \neq 0$ gilt auch $\det(\mathcal{A}^{-1} - I) \neq 0$. Die Darstellung (3.22) im Beweis von (ii) zeigt dass die Spreading Funktion von $\mathcal{A}_{(\nu)}(\mathcal{A}^{-1})_{(-\nu)}$ durch

$$\xi(z) = K e^{i\pi M_{\mathcal{A}} z^2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i \mathcal{J}(\mathcal{A}-I)^{-1} z \cdot z'} e^{i\pi (M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}^{-1}}) z'^2} dz'$$

gegeben ist, wobei in diesem Fall

$$K = \frac{1}{\sqrt{|\det(\mathcal{A} - I)(\mathcal{A}^{-1} - I)|}} = \frac{1}{|\det(\mathcal{A} - I)}$$

wegen $\det(\mathcal{A}^{-1} - I) = \det(I - \mathcal{A})$. Es gilt $M_{\mathcal{A}} + M_{\mathcal{A}^{-1}} = 0$, und somit (durch Setzen von $z'' = (\mathcal{A}^T - I)^{-1} \mathcal{J} z$)

$$\begin{aligned} \xi(z) &= \frac{1}{|\det(\mathcal{A} - I)|} e^{i\pi M_{\mathcal{A}} z^2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i (\mathcal{J}(\mathcal{A}-I)^{-1} z \cdot z')} dz' \\ &= e^{i\pi M_{\mathcal{A}} z^2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i z \cdot z''} dz'' \\ &= \delta(z), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die inverse Fourier Darstellung $\int e^{-2\pi i z \cdot z''} dz'' = \delta(z)$ verwendet wurde; δ ist das Weyl Symbol des Identitäts Operators.

Zum Beweis von (iii): Die Produkt Darstellung (3.21) erlaubt es zu zeigen dass die Operatoren $\mathcal{A}_{(\nu)}$ unitär sind. Das Weyl Symbol eines adjungierten pseudodifferential Operators ist das komplex konjugierte des Weyl Symbols dieses Operators. Da Weyl Symbol und die Spreading Funktion sich gegenseitig die symplektische Fourier Transformation darstellen, ist das Symbol a von $\mathcal{A}_{(\nu)}$ somit gegeben durch

$$a(z) = \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A} - I)|}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i \sigma(z, z')} e^{i\pi M_{\mathcal{A}} z'^2} dz'.$$

Somit ist weiters

$$\overline{a(z)} = \frac{i^{-\nu}}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}-I)|}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{2\pi i\sigma(z,z')} e^{-i\pi M_{\mathcal{A}} z'^2} dz',$$

was auch, wegen $M_{\mathcal{A}^{-1}} = -M_{\mathcal{A}}$ und $|\det(\mathcal{A}-I)| = |\det(\mathcal{A}^{-1}-I)|$, als

$$\begin{aligned}\overline{a(z)} &= \frac{i^{-\nu}}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}^{-1}-I)|}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i\sigma(z,z')} e^{i\pi M_{\mathcal{A}^{-1}} z'^2} dz' \\ &= \frac{i^{-\nu}}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}^{-1}-I)|}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{2\pi i\sigma(z,z')} e^{i\pi M_{\mathcal{A}^{-1}} z'^2} dz'\end{aligned}$$

dargestellt werden kann, womit gezeigt wurde dass $\overline{a(z)}$ das Symbol von $(\mathcal{A}_{(\nu)})^{-1}$ darstellt, und somit ist der Beweis abgeschlossen. ■

3.4 Die Spreading Funktion eines metaplektischen Operators

Die bisherigen Resultate werden nun zur Betrachtnung der Spreading Funktion eines metaplektischen Operators herangezogen.

Zuerst wird gezeigt dass der Operator $\mathcal{A}_{(\nu)}$ durch das skalare Vielfache eines metaplektischen Operators darstellbar ist:

Lemma 37 *Für jedes $(\mathcal{A},\nu) \in \mathrm{Sp}^*(d) \times \mathbb{R}$ gibt es eine Konstante $c = c(\mathcal{A},\nu)$, mit $|c| = 1$,so dass gilt $\mathcal{A}_{(\nu)} = c\widehat{\mathcal{A}}_{W,m}$.*

Beweis. Da $\mathcal{A}_{(\nu)}$ unitär ist, genügt es die Darstellung

$$\mathcal{A}_{(\nu)}\rho(z') = \rho(\mathcal{A}z')\mathcal{A}_{(\nu)}, \text{ für jedes } z' \in \mathbb{R}^{2d}$$

zu zeigen (siehe dazu Gröchenig [14], Kapitel 9). Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{(\nu)}\rho(z') &= i^{\nu}\sqrt{|\det(\mathcal{A}-I)|}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(\mathcal{A}z)\rho(-z)\rho(z')dz \\ \rho(\mathcal{A}z')\mathcal{A}_{(\nu)} &= i^{\nu}\sqrt{|\det(\mathcal{A}-I)|}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(\mathcal{A}z')\rho(\mathcal{A}z)\rho(-z)dz\end{aligned}$$

und bei wiederholten Anwendung von

$$\rho(z+z') = e^{-i\pi[z,z']}\rho(z)\rho(z')$$

ergibt sich

$$\rho(\mathcal{A}z)\rho(-z)\rho(z') = \rho(\mathcal{A}z')\rho(\mathcal{A}z)\rho(-z).$$

■

Das folgende Resultat stellt den Zusammenhang zwischen den Operatoren $\mathcal{A}_{(\nu)}$ und den metaplektischen Operatoren:

Satz 38 *(i) Für eine freie symplektische Matrix A_W in $\mathrm{Sp}^*(d)$ gilt*

$$\widehat{(\mathcal{A}_W)}_{w,m} = (\mathcal{A}_W)_{(m-\mathrm{Inert}\,W_{xx})} \tag{3.24}$$

wobei $\operatorname{Inert} W_{xx}$ *der so genannte Inertionsindex der Hesse Matrix der Funktion* $x \longmapsto W(x,x)$ *ist.*

(ii) Jedes $\widetilde{\mathcal{A}} \in \operatorname{Mp}(d)$ *kann als Produkt* $(A_W)_{(\nu)}(A_{W'})_{(\nu')}$ *dargestellt werden, mit*

$$\nu = m - \operatorname{Inert} W_{xx} \quad , \quad \nu' = m' - \operatorname{Inert} W'_{xx} \tag{3.25}$$

wo m *und* m' *die Maslov Indizes von* $(A_W)_{(\nu)}$ *und* $(A_{W'})_{(\nu')}$ *sind, und in weiterem ergibt sich*

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{(\nu'')} \quad , \quad \nu'' = \nu + \nu' + \tfrac{1}{2} \operatorname{sign}(M_{\mathcal{A}_W} + M_{\mathcal{A}'_W}).$$

Beweis. Lässt man $(\mathcal{A}_W)_{(\nu)}$ auf die Dirac Delta Funktion wirken, uns setzt dabei $x = 0$, ergibt sich

$$(\mathcal{A}_W)_{(\nu)}\delta(0) = \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}_W - I)|}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\pi M_{\mathcal{A}_W}(0,\omega')\cdot(0,\omega')} d\omega'$$

Wegen $M_{\mathcal{A}_W} = \frac{1}{2}\mathcal{J} + \mathcal{J}(\mathcal{A}_W - I)^{-1}$ gilt dann

$$M_{\mathcal{A}_W}(0,\omega') \cdot (0,\omega') = [(\mathcal{A}_W - I)^{-1}(0,\omega'), (0,\omega')].$$

Um die rechte Seite der Gleichung auszuwerten, setzen wir

$$(x,\omega) = (\mathcal{A}_W - I)^{-1}(0,\omega').$$

Das ist äquivalent zu

$$\mathcal{A}_W(x,\omega) = (x, \omega + \omega'),$$

und weil $\mathcal{A}_W$ durch W erzeugt wird, ist das nichts anderes als

$$\omega + \omega' = (\partial_x W)(x,x) \text{ und } \omega = -(\partial_{x'} W)(x,x).$$

Benutzt man weiters die explizite Darstellung für W, ergibt sich

$$x = (DB^{-1} + B^{-1}A - B^{-1} - (B^T)^{-1})^{-1}\omega' = W_{xx}^{-1}\omega'$$

und somit $M_{\mathcal{A}_W}(0,\omega') \cdot (0,\omega') = -W_{xx}^{-1}\omega'^2$. Wir haben also

$$(\mathcal{A}_W)_{(\nu)}\delta(0) = \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}_W - I)|}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\pi W_{xx}^{-1}\omega'^2} d\omega'.$$

Auf das Integral kann die Fresnel Formula angewendet werden, was dann

$$(\mathcal{A}_W)_{(\nu)}\delta(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} W_{xx}} \frac{i^\nu}{\sqrt{|\det(\mathcal{A}_W - I)|}} \sqrt{|\det W_{xx}|}$$

ergibt, wobei $\operatorname{sign} W_{xx}$ die so genannte Signatur der symmetrischen Matrix W_{xx} ist. Benutzt man die Identität

$$\det(\mathcal{A} - I) = (-1)^d (\det B) \det(B^{-1}A + DB^{-1} - B^{-1} - (B^T)^{-1}),$$

nimmt die obere Darstellung die Form

$$(\mathcal{A}_W)_{(\nu)}\delta(0) = e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign} W_{xx}} i^\nu \sqrt{|\det B^{-1}|} \tag{3.26}$$

an. Andererseits, eine direkte Rechnung zeigt dass

$$\widehat{(\mathcal{A}_W)}_{W,m}\delta(0) = i^{m-d/2}\sqrt{|\det B^{-1}|},$$

und somit $\nu - \frac{1}{2}\operatorname{sign} W_{xx} = m - \frac{1}{2}d$, was nichts anderes als $\nu = m - \operatorname{Inert} W_{xx}$ ist, weil W_{xx} nicht ausgeartet ist (siehe Definition der symplektischen Form im Kapitel 1). Die Darstellung (3.24) folgt im Sinne des Lemmas 37.

Zeigen wir (ii): Im Sinne von Proposition 34 gibt es $\mathcal{A}_W$ und $\mathcal{A}_{W'}$ in $\mathrm{Sp}^*(d)$, so dass $\widetilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_W)_{(\nu)}(\mathcal{A}_W)_{(\nu')}$. Der Rest ergibt sich durch Proposition 36. ■

Beispiel 39 *Für die gewöhnliche Fourier Transformation $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$\mathcal{F} = i^{d/2}\mu_0(\mathcal{J}).$$

Wie man zeigen kann, ist

$$M_{\mathcal{J}} = -\frac{1}{2}I, \operatorname{Inert} M_{\mathcal{J}} = d, \det(\mathcal{J} - I) = 2^d,$$

und somit (mit (3.25))

$$\mathcal{F} = (4i)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^{2d}} i^{-|z|^2}\rho(z)dz$$

wobei nach Definition $i^{\varphi} = e^{i\frac{\pi}{2}\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.

Kapitel 4

Weil versus Weyl

In diesem Kapitel möchte ich zwei verschiedene Zugänge zu den gleichen metaplektischen Objekten betrachten. Der erste Zugang ist in einer mehr abstrakteren Sichtweise, und baut auf den Untersuchungen der Arbeiten von Weil und Reiter [21] auf. Der zweite Zugang ist einer konstruktiven Natur, der auch Bezüge zur Time-Frequency Analysis und der Quantenmechanik erlaubt. Dieser konstruktive Zugang ist der gleiche der bei de Gosson [13] zu finden ist, und dem in dieser Diplomarbeit das Hauptgewicht zugeordnet wird.

Bei den erwähnten Betrachtungen werde ich die entsprechende Literatur von de Gosson [13] und Reiter [21] zu Hilfe nehmen, dieser hier folgen und daraus zitieren.

Im Falle des abstrakten Zuganges werden eine lokal kompakte abelsche Gruppe G und deren duale Gruppe G^* - die ebenso wieder lokal kompakt ist - betrachtet. Beim konstruktiven Zugang werden diese Objekte durch $G = \mathbb{R}^d = G^*$ und somit $G \times G^* = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^{2d}$ konkretisiert.

4.1 Charakter zweiten Grades

Definition 40 *Ein stetiger Homomorphismus $\chi : G \to T$ auf einer lokal kompakte abelsche Gruppe G, (wobei T die multiplikative Gruppe der komplexe Zahlen ist, mit Werten vom Betrag gleich Eins) wird Charakter von G gennant. Es gilt also*

$$\chi(x, y) = \chi(x)\chi(y), \quad \textit{wobei } x, y \textit{ in } G \textit{ sind.}$$

Die Charaktere der Gruppe G bilden die duale Gruppe G^*, die mit der kompakt-offenen Topologie lokalkompakt ist.

Mit der Schreibweise $\chi(x) = \langle x, x^* \rangle$ kann die Operation der dualen Gruppe G^* additiv geschrieben werden als $\langle x, x_1^* + x_2^* \rangle = \langle x, x_1^* \rangle \langle x, x_2^* \rangle$. Auch folgende Schreibweise kann sehr nützlich sein: $\chi_{a^*} = \langle x, a^* \rangle$, für fixes a^* in G^*.

Definition 41 *Seien G_1, G_2 lokal kompakte abelsche Gruppen, und betrachten wir eine stetige Funktion*

$$F_0 : G_1 \times G_2 \to T,$$

so dass gilt

$$x_1 \mapsto F_0(x_1, x_2) \textit{ ist ein Charakter in } G_1, \quad \textit{für fixes } x_2 \textit{ in } G_2,$$

$$x_2 \mapsto F_0(x_1, x_2) \text{ ist a Charakter in } G_2, \quad \text{für fixes } x_1 \text{ in } G_1.$$

Dann wird F_0 Bicharakter auf $G_1 \times G_2$ genannt.

Definition 42 *Eine stetige Funktion $\psi : G \to T$ für die gilt*

$$\psi(x + y) = \psi(x)\psi(y)B(x, y), \quad \text{für } x, y \text{ in } G,$$

wird ψ Charakter zweiten Grades genannt. Dabei ist $B = B_\psi$ ein Bicharakter auf $G \times G$ ist.

Es ist $B(x, y) = \langle x, y\beta\rangle$ für ein $\beta \in Mor(G, G^*)$ für das weiters gilt $\beta = \beta^*$, und somit $B(x, y) = B(y, x)$.

Die Charakter zweiten Grades bilden unter der Operation der Multiplikation eine abelsche Gruppe, die mit $Ch_2(G)$ bezeichnet wird.

4.2 André Weil versus Hermann Weyl

Aufbauend auf Carl Siegel's Arbeit in der Zahlentheorie, zeigte André Weil einen abstrakten Zugang zu dem was heutzutage metaplektische Darstellung der symplektischen Gruppe genannt wird. Dieser Zugang wird von Reiter in [21] genau beschrieben.

Der konstruktive Zugang hat seine Wurzeln in den Ergebnissen der Arbeit von Hermann Weyl. Dieser wurde aber seit dem - abhängig vom Kontext in unterschiedlicher Form - deutlich modifiziert und entsprechend angepasst. Der konstruktive Zugang den ich hier vergleiche, ist einer wie man ihn in de Gosson [13] sehr anschaulich präsentiert bekommt. Es folgt also ein Vergleich der Objekte eines abstrakten-, mit den entsprechenden Objekten des konstruktiven Zuganges.

4.2.1 Operator $M(\alpha)$ vs Operator $\widehat{M_L}$

Es folgt die Definition eines Operators des abstrakten Zuganges:

Definition 43 *Für $\alpha \in Aut(G)$, definieren wir den Operator $M(\alpha)$ durch*

$$[M(\alpha)f](x) = |\alpha|^{1/2} f(x\alpha), \text{ wobei } x \text{ aus } G \text{ ist, und } f \text{ in } L^2(G) \text{ liegt.}$$

$M(\alpha)$ ist ein unitärer Operator, und für jedes $f \in L^2(G)$ ist die Abbildung $\alpha \to M(\alpha)f$ von $Aut(G)$ in $L^2(G)$ stetig, die injektive unitäre Darstellung $\alpha \to M(\alpha)$ der multiplikativen Gruppe $Aut(G)$ in $L^2(G)$ ist also stetig im Sinne der starken Operator Topologie.

Als den entsprechenden Repräsentanten des konstruktiven Zuganges, betrachten wir den in Kapitel 3 definierten Operator

$$\widehat{M}_{L,m} f(x) = i^m \sqrt{|\det L|} f(Lx),$$

der aus dem Zusammenhang mit der quadratischen Fourier Transformation entsteht. Dabei ist L, mit $\det L \neq 0$, eine symmetrische Matrix. Für unsere Betrachtungen hier ist der Maslov Index nicht von Belangen, wir betrachten also den Operator

$$\widehat{M}_L f(x) = \sqrt{|\det L|} f(Lx).$$

Der Zusammenhang zwischen $M(\alpha)$ und $\widehat{M}_L$

Um den Zusammenhang zu zeigen, starte ich beim Operator $M(\alpha)$.

Es muss zuerst geklärt werde was $|\alpha|$ in der Definition von $M(\alpha)$ überhaupt bedeutet, für $\alpha \in Aut(G)$. Nach Reiter [21] Kapitel 1, wird $|\alpha|$ als *Haar modulus* von α bezeichnet und ist durch den Ausdruck

$$\int\limits_G f(x')dx' = |\alpha| \int\limits_G f(x\alpha)dx, \quad \text{für } f \text{ aus } L^1(G)$$

charakterisiert. Bewegen wir uns einen ersten Schritt in Richtung Operator $\widehat{M}_L$: Wie schon erwähnt ist auf unserem konstruktiven Zugang $G = \mathbb{R}^d$.

Sei eine symmetrische Matrix L, mit $\det L \neq 0$, die auf $\mathbb{R}^d$ für den Automorphismus $\alpha \in Aut(G)$ stehen soll. Es gilt also

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x\alpha)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(Lx)dx,$$

und mit der Substitution $y = Lx$, und damit $dy = |\det L|\, dx$, ergibt sich

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x\alpha)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(Lx)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{1}{|\det L|}dy.$$

Der Ausdruck $\int_G f(x')dx' = |\alpha| \int_G f(x\alpha)dx$ kann also dargestell werden als

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x')dx' = \frac{|\alpha|}{|\det L|}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)dy$$

woraus folgt

$$1 = \frac{|\alpha|}{|\det L|},$$

und daher

$$|\alpha| = |\det L|$$

was äquivalent ist zu

$$|\alpha|^{1/2} = \sqrt{|\det L|}.$$

Wir können also schreiben

$$M(\alpha)f(x) = |\alpha|^{1/2} f(x\alpha) = \sqrt{|\det L|} f(x\alpha) = \widehat{M}_L f,$$

womit eine direkte Verbindung zwischen zwei verschiedenen Zugängen gezeigt ist.

4.2.2 Operator $A(\psi)$ vs Operator $\widehat{V}_{-P}$

Ich definiere wieder den zu betrachtenden abstrakten Operator zuerst:

Definition 44 *Der Automorphismus $A(\psi)$ auf $L^2(G)$ ist definiert durch*

$$A(\psi)f = \psi f, \quad \textit{für } f \textit{ in } L^2(G).$$

$\psi \mapsto A(\psi)$ ist eine injektive unitäre Darstellung der abelschen Gruppe $Ch_2(G)$.

Der entsprechende Operator $\widehat{V_{-P}}$ des konstruktiven Zuganges, der im selben Kontext definiert ist wie der eben betrachtete Operator $\widehat{M_L}$, ist gegeben durch den Ausdruck

$$\widehat{V}_{-P} f(x) = e^{\frac{i}{2} Px \cdot x} f(x),$$

wobei P eine symmetrische Matrix ist.

Der Zusammenhang zwischen $A(\psi)$ und $\widehat{V}_{-P}$

Wir betrachten also jetzt $A(\psi)$ und $\widehat{V}_{-P}$. Wir beachten dabei, dass ψ in $Ch_2(G)$ ist, also gilt definitions gemäß

$$\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)B(x,y),$$

wobei $B = B_\psi$ der im Unterkapitel *Charakter zweiten Grades* definiert ist. Wenn es eine passend Matrix P gibt, dann setzen wir $B(x,y) = e^{\frac{i}{2} Px \cdot y}$. Es ergibt sich somit

$$\widehat{V}_{-P}(x+y) = e^{\frac{i}{2} P(x+y)\cdot(x+y)} = e^{\frac{i}{2}(Px\cdot x + 2Px\cdot y + Py\cdot y)} =$$

$$= e^{\frac{i}{2} Px\cdot x} e^{\frac{i}{2} Py\cdot y} e^{iPx\cdot y} = \psi(x)\psi(y)B(x,y),$$

und somit also

$$\widehat{V}_{-P}(x+y) = \psi(x+y).$$

Also gilt

$$A(\psi)f(x) = \psi f(x) = \widehat{V}_{-P} f(x).$$

4.2.3 Operator W^γ vs Operator $\widehat{JM}_{L^{-1}}$

Definition 45 *Für $Is(G, G^*) \neq \varnothing$ ist der unitäre Operator W^γ auf $L^2(G)$, für $\gamma \in Is(G, G^*)$ durch*

$$W^\gamma f = |\gamma|^{-1/2} \widehat{f} \circ (\gamma^*)^{-1}, \qquad \text{für } f \in L^2(G)$$

definiert.

Dabei ist $\widehat{f}$ die gewöhnliche Fourier Transformation von f, durch $\widehat{f}(x^*) = \int\limits_G f(x)\overline{\langle x, x^* \rangle} dx$ gegeben.

Der Zusammenhang zwischen $M(\alpha)$ und $\widehat{M_L}$

$$M(\alpha)f(x) = |\alpha|^{1/2} f(x\alpha) = \sqrt{|\det L|} f(x\alpha) = \widehat{M}_L f,$$

ergibt auch

$$W^\gamma f = |\gamma|^{-1/2} \widehat{f} \circ (\gamma^*)^{-1} = (\det L)^{-1/2} \widehat{J} f(L^{-1}x) = \widehat{JM}_{L^{-1}},$$

wobei $\widehat{J}$ die quadratische Fourier Transformation der standard symplektischen Matrix J ist (siehe Kapitel 3 dieser Diplomarbeit).

4.2.4 Komentare zu den Weil Operatoren

Die oben betrachteten Operatoren $M(\alpha)$, $A(\psi)$ und W^γ werden Weil Operatoren genannt. Sie gehören zu der Menge der so genannten *Normalisatoren* $\mathbb{B}(G)$ auf der Heisenberg Gruppe $\mathbb{A}(G)$ in $Aut(L^2(G))$. Die Menge $\mathbb{B}(G)$ bildet eine Gruppe, die Weil Gruppe. Sei S ein beliebiger Weil Operatoren $M(\alpha)$, $A(\psi)$ oder W^γ, dann gilt die Darstellung

$$S^{-1}U(z)S = c(z)U(z'),$$

für $c(z)$ in T, z, z' in $G \times G^*$ und $U(z)$ aus $\mathbb{A}(G)$. Weiters versteht man z' als die Projektion von der metaplektischen in die symplektische Gruppe. Für die jeweiligen Operatoren ergibt sich:

$$S = M(\alpha): \; z' = (u\alpha, u^* {\alpha^*}^{-1}), \; c(z) = 1,$$

und für den konstruierten Operator $\widehat{M}_L$ gilt

$$\widehat{M}_L \rightarrow \begin{pmatrix} L^{-1} & 0 \\ 0 & (L)^T \end{pmatrix}, mit \; z' = (Lx, (L^{-1})^T \omega).$$

$$S = A(\psi_G): \quad z' = (u, u^* + u\beta), \quad c(z) = \psi_G(u),$$

und für den konstruierten Operator $\widehat{V}_{-P}$ gilt

$$\widehat{V}_{-P} \rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & I \end{pmatrix}, mit \; z' = (x, Px + \omega).$$

$$S = W^\gamma: \; z' = (u^*\gamma, -u\gamma^{*-1}), c(z) = \left\langle u^*\gamma, -u\gamma^{*-1} \right\rangle = \langle u, u^* \rangle,$$

und für den konstruierten Operator $J\widehat{M}_{L^{-1}}$ gilt

$$\widehat{J\widehat{M}_{L^{-1}}} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & (L^{-1})^T \end{pmatrix}, \text{ mit } z' = \; (Lx, -L^{-1}x).$$

Ich erinnere ein weiteres Mal dass bei den konkreten Betrachtungen hier, also die Betrachtung des konstruktiven Zuganges, immer gilt

$$G = \mathbb{R}^d = G^*,$$

und dass diese Konretisierung der Räume für die entsprechenden Elemente folgende Bedeutung hat

$$(u, u^*) \in G \times G^* = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \equiv \mathbb{R}^{2d} \ni (x, \omega).$$

In Reiter [21] wird gezeigt dass die Weil Gruppe von den Operatoren $M(\alpha)$, $A(\psi)$ und W^γ erzeugt wird. Somit gilt folgende Darstellung für ein jedes S aus $\mathbb{B}(G)$

$$S^{-1}U(z)S = c(z)U(z').$$

Es ergibt sich

$$S^{-1}U(z)S = \psi(z)U(z\sigma), \text{ für } z \text{ in } G \times G^*.$$

Diese Darstellung ist aber nichts anderes als die *symplektische kovariante Darstellung (siehe de Gosson [13])*

$$\widehat{S}\varrho(z)\widehat{S}^{-1} = \varrho(z)(S^{-1}z),$$

wobei S die Projektion auf den metaplektischen Operator $\widehat{S}$ der symplektischen Gruppe $Sp(n)$ ist, und $\varrho(z)$ der Heisenberg-Weyl Operator (beide im Kapitel 3 dieser Diplomarbeit definiert).

4.3 Fraktionale Fourier Transformation

Die Ursprünge der fraktionalen Fourier Transformation (FRFT) finden sich im Jahr 1929 (siehe auch die historischen Bemerkungen in den Arbeit von Bultheel und Sulbaran [3]). Die erste konkrete Arbeit zu diesem Thema scheint aber die Veröffentlichung von Kober [17] im Jahre 1939 zu sein.

Abgesehen von den in dieser Diplomarbeit dargestellten Zusammenhängen der FRFT, sind auch die numerischen Anwendungen sehr erwähnenswert. Diese reichen von *Filter Design* und *Signal Analysis,* über so genannten *Phase Retrieval*, *Pattern Recognition*, bis zur *Optik* (siehe zum Beispiel das Buch [20] von Ozaktas *et al.*, oder die Arbeit von Almeida [2], oder auch die Arbeiten von Alieva und Bastiaans [1]). Es zeigt sich dass die FRFT eigentlich nichts anderes ist als ein Spezialfall der metaplektischen Darstellung. In diesem Abschnitt werden systematisch Wege vorgestellt, die Zusammenhänge der FRFT mit verschiedenen symplektischen Objekten zeigen.

Die eindimensionale FRFT ist eine Familie von unitären Operatoren, abhängig von einem reellen Parameter α, welcher als ein Rotationswinkel in der Time-Frequency Ebene interpretiert werden kann. Beispielsweise, eine FRFT mit dem Winkel $\alpha = \pi/2$ korrespondiert zu der klassischen Fourier Transformation, und eine FRFT mit dem Winkel $\alpha = 0$ korrespondiert zu dem Identitäts Operator.

Der Abschnitt beginnt mit der Definiton der FRFT:

Definition 46 *Die FRFT mit einem Winkel $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ ist gegeben durch*

$$\mathcal{F}_\alpha f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(x, x')f(x')dx, \tag{4.1}$$

wobei der Kern K_α durch die Darstellung

$$K_\alpha(x, x') = \sqrt{1 - i \cot \alpha} \exp\left[i\pi \frac{(x^2 + x'^2)\cos\alpha - 2x \cdot x' \cdot u}{\sin\alpha}\right] \tag{4.2}$$

gegeben ist.

Es zeigt sich dass $(\mathcal{F}_\alpha)^{2\pi/\alpha}$ der Identitätsoperator ist. Bei der richtigen Wahl des Argumenten ist die FRFT $\mathcal{F}_\alpha$ einfach ein zu der Rotation

$$r(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

assoziierter metaplektischer Operator, und die erzeugende Funktion von $r(-\alpha)$ ist gegeben durch

$$W(x,x') = \frac{(x^2 + x'^2)\cos\alpha - 2xx'}{2\sin\alpha},$$

was (bis au den Faktor $i\pi$) genau der Exponent von K_α (definiert in (4.2)) ist.

Die Zuweisung $\alpha \longmapsto \mathcal{F}_\alpha$ (die stetig fortgesetzt werden kann für alle $\alpha \in \mathbb{R}$) ist der Operator der Lösung der Schrödinger Gleichung

$$i\frac{d}{d\alpha}\mathcal{F}_\alpha = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\mathcal{F}_\alpha \quad , \quad \lim_{\alpha\to 0}\mathcal{F}_\alpha = I.$$

Im folgenden sieht man das leicht:

Aus den Gruppen Eigenschaften

$$\mathcal{F}_\alpha\mathcal{F}_{\alpha'} = \mathcal{F}_{\alpha+\alpha'}$$

folgt dass für jede reelle Zahl s gilt

$$(\mathcal{F}_\alpha)^s = \mathcal{F}_{s\alpha}$$

und somit

$$(\mathcal{F}_\alpha)^{2\pi/\alpha} = I$$

so dass $\mathcal{F}_\alpha$ tatsächlich FRFT mit dem Winkel α ist.

Der einfachste Weg um FRFT in höheren Dimensionen zu konstruieren ist den eben betrachteten Operator $\mathcal{F}_\alpha$ zu verallgemeinern. Die Rolle der obigen Rotationsdarstellung $r(-\alpha)$ übernehmen dabei symplektische Matrizen der Form

$$\mathcal{J}_\alpha = \begin{pmatrix} (\cos\alpha)I & (\sin\alpha)I \\ -(\sin\alpha)I & (\cos\alpha)I \end{pmatrix}.$$

Dabei ist I die $d \times d$ Identitätsmatrix. Matrizen dieser Form sind freie symplektische Matrizen für $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, und sie sind für die Winkel $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ durch die Funktion der Form

$$W_\alpha(x,x') = \frac{1}{2\sin\alpha}((|x|^2 + |x'|^2)\cos\alpha - 2x\cdot x')$$

erzeugt. Zu den Matrizen der Form $(\mathcal{J}_\alpha)$ können metaplektische Operatoren $(\widetilde{\mathcal{J}}_\alpha)$ der Form

$$\widetilde{\mathcal{J}}_\alpha f(x) = i^{-d/2-d[\alpha/2]}|\sin\alpha|^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i W_\alpha(x,x')}f(x')dx'$$

assoziiert werden. Der Operator

$$\widetilde{\mathcal{J}}_0 = \lim_{\alpha\to 0}\widetilde{\mathcal{J}}_\alpha$$

stellt den Identitätsoperator dar, und

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{\pi/2} = \widetilde{\mathcal{J}}.$$

Durch gleiche Argument wie eben im Falle der Schrödinger Gleichung, kann gezeigt werden dass

$$(\widetilde{\mathcal{J}}_\alpha)^{2\pi/\alpha} = I$$

erfühlt ist, so dass diese Operatoren tatsächlich die Form der fraktionalen Fourier Transformation aufweisen.

Die bisherigen Ergebnisse erlauben für $\widetilde{\mathcal{J}}_\alpha$ folgende praktische Darstellungsform zu benutzen: die symplektische Cayley Transformation der Rotation

$$\mathcal{J}_\alpha = \begin{pmatrix} (\cos\alpha)I & (\sin\alpha)I \\ -(\sin\alpha)I & (\cos\alpha)I \end{pmatrix}$$

ist für $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ durch

$$M_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cot(\alpha/2)I & 0 \\ 0 & \cot(\alpha/2)I \end{pmatrix}$$

gegeben, und die FRFT $\widetilde{\mathcal{J}}_\alpha$ kann somit in der Weyl Form als

$$\mathcal{J}_\alpha = \left(\frac{1}{2\sin(\alpha/2)(1+\cos^2(\alpha/2))^{1/2}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}|z|^2\cot(\alpha/2)}\rho(z)dz \tag{4.3}$$

geschrieben werden.

Von der kovarianten Darstellung (3.12) folgt folgende Beziehung zwischen der FRFT und der Wigner Transformation:

$$Wf(r(\alpha)(x,\omega)) = W(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha f)(x,\omega). \tag{4.4}$$

Das kann man wie folgt geometrisch interpretieren: ist Wf die Wigner Transformation einer Funktion f in den (x,ω) Koordinaten dargestellt, dann ist $W(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha f)$ die Darstellung von Wf im entsprechenden Koordinatensystem das sich durch die Achsenrotation von x und ω um den Winkel α ergibt .

Bemerkung 47 *Alles bisher Erwähnte kann -bis auf einige Modifizierungen- auf jeden Operator* $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathrm{Mp}(d)$ *angewendet werden, solange seine Projektion* $\mathcal{A}$ *auf die symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(d)$ *sich in einem Bereich der exponential Abbildung* $\exp : \mathfrak{sp}(d) \longrightarrow \mathrm{Sp}(d)$ *befindet.*

4.4 Multiple Winkel der FRFT

In diesem letzten Abschnitt wird die Weyl Form des metaplektischen Operators benutzt um einige Resultate zu verallgemeinern. Ein klassisches Theorem, gegeben durch Williamson [26] (siehe auch [8, 13]), zeigt dass $\mathcal{A} \in \mathrm{Sp}(d)$ existiert, so dass

$$M = \mathcal{A}^T D \mathcal{A} \;\;,\;\; D = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$$

gilt, wobei Λ eine diagonale Matrix ist, deren von Null verschiedene Einträge gerade die Eigenwerte λ_j von JM sind. Die Hamilton Gleichungen

$$\frac{dz}{d\alpha} = \mathcal{J}Mz$$

sind wegen $\mathcal{J}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{J}$ äquivalent zum System

$$\frac{du}{d\alpha} = \mathcal{J}Du \quad , \quad u = \mathcal{A}z.$$

Es ergibt sich $u(\alpha) = e^{\alpha JDu}u(0)$, und weiters $z(\alpha) = \mathcal{A}_\alpha z(0)$ wobei $\alpha \longmapsto \mathcal{A}_\alpha$ durch

$$\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{R}(\alpha)\mathcal{A} \quad , \quad \text{mit } \mathcal{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & B(\alpha) \\ -B(\alpha) & A(\alpha) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dabei sind $A(\alpha)$ und $B(\alpha)$ folgende diagonal Matrizen

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_1\alpha) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\lambda_2\alpha) & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \cos(\lambda_{d-1}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cos(\lambda_d\alpha) \end{pmatrix}$$

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda_1\alpha) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\lambda_2\alpha) & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \sin(\lambda_{d-1}\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sin(\lambda_d\alpha) \end{pmatrix}.$$

Es kann jetzt die Frage "für welche Werte des Winkel α ist der metaplektische Operator $\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ eine fraktionale Fourier Transformation?" betrachtet werden. Eine mögliche Antwort ist im folgendem gegeben:

Satz 48 *Für $\lambda_j\alpha \notin 2\pi Z$ $(j = 1, 2, ..., d)$ ist der Operator $\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha$ durch*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha = \frac{1}{M(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\frac{\pi}{4}C(z,\alpha)}\rho(\mathcal{A}z)dz \tag{4.5}$$

$$M(\alpha) = 2^d \prod_{j=1}^{d} \sin(\lambda_j\alpha/2)(1 + \cos^2(\lambda_j\alpha/2))^{1/2} \tag{4.6}$$

$$C(z,\alpha) = \sum_{j=1}^{d} \cot(\lambda_j\alpha/2)(x_j^2 + \omega_j^2) \tag{4.7}$$

gegeben. Für ein $\nu \in R$ mit $\nu\lambda_j \equiv 1 \bmod 2$ $(j = 1, 2, ..., d)$ ist $(\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha)^{\nu\pi/\alpha} = \widetilde{\mathcal{A}}_{\nu\pi} = I$.

Beweis. Es folgt die Berechnung der symplektischen Cayley Transformation M_α der symplektischen Matrix $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{R}(\alpha)\mathcal{A}$. Es gilt

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}_\alpha} &= \frac{1}{2}\mathcal{J}(\mathcal{A}_\alpha + I)(\mathcal{A}_\alpha - I)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{J}\mathcal{A}(\mathcal{R}(\alpha) + I)(\mathcal{R}(\alpha) - I)^{-1}\mathcal{A}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}^T)^{-1}\mathcal{J}(\mathcal{R}(\alpha) + I)(\mathcal{R}(\alpha) - I)^{-1}\mathcal{A}^{-1}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$M(\alpha) = \frac{1}{2}\mathcal{J}(\mathcal{R}(\alpha) + I)(\mathcal{R}(\alpha) - I)^{-1}$$

(das ist die symplektische Fourier Transformation von $\mathcal{R}(\alpha)$) ergibt sich

$$M_{\mathcal{A}_\alpha} = (\mathcal{A}^T)^{-1}M(\alpha)\mathcal{A}^{-1}$$

und somit

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\alpha = \frac{i^{\nu(\alpha)}}{\sqrt{|\det(\mathcal{R}(\alpha) - I)|}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i\pi M(\alpha)z^2}\rho(\mathcal{A}z)dz.$$

Weiters gilt damit

$$(\mathcal{R}(\alpha) - I)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & (I - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) \\ -(I - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) & I \end{pmatrix}$$

womit die symplektische Cayley Transformation von $\mathcal{R}(\alpha)$

$$M(\alpha) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (I - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) & 0 \\ 0 & (I - A(\alpha))^{-1}B(\alpha.) \end{pmatrix}$$

eine Block-Diagonal Matrix ist. Wegen

$$(I - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cot(\lambda_1\alpha/2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cot(\lambda_2\alpha/2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cot(\lambda_d\alpha/2) \end{pmatrix}$$

und

$$\det(\mathcal{R}(\alpha) - I) = 4^d \textstyle\prod_{j=1}^d \sin^2(\lambda_j\alpha/2)(1 + \cos^2(\lambda_j\alpha/2))$$

folgen die Darstellungen (4.5)–(4.7).

Für ganze Zahlen k_j, ($j = 1, 2, ..., d$) (so dass $\nu\lambda_j = 2k_j + 1$) und mit $\alpha = \nu\pi$, gilt $\cos(\lambda_j\alpha/2) = 0$, und wegen $\det \mathcal{A} = 1$ ergibt sich

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{\nu\pi} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(\mathcal{A}z)dz = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(z)dz = I.$$

■

4.5 Ein technisches Lemma

In diesem Abschnitt wird die Gaussfunktion

$$f(x) = e^{-Ax^2}$$

auf $\mathbb{R}^d$ betrachtet, wobei A eine $d \times d$ komplexe Matrix ist, mit $A = A^T$ und $\operatorname{Re} A > 0$.

Betrachten wir zuerst folgendes:

Betrachtung Sei $f(x) = e^{-Ax^2} = e^{-(X+iY)x^2} = e^{-Xx^2}e^{-Yx^2}$, dann gilt

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow X > 0,$$

wobei $\mathcal{S}$ der Schwartzraum ist.

Beweis. Es gilt

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \text{ mit } g(x) = e^{-Xx^2}.$$

Durch die Multiplikation mit der beschränkten Funktion e^{-Yx^2} bleiben wir immer noch im Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wir haben $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ genau dann, wenn $gR \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ für ein (und somit alle) $R \in GL(n, \mathbb{R}^d)$. Sei jetzt $R \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, so dass

$$R^T X R = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$g(Rx) = e^{-XRx \cdot Rx} = e^{-R^T XRx^2} = e^{-Dx^2} = e^{-\lambda_1 x_1^2} ... e^{-\lambda_n x_n^2}.$$

Durch das Setzen $g_j(x_j) = e^{-\lambda_j x_j^2}$, ergibt sich $g = g_1 \otimes ... \otimes g_n$, und somit ist g in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ wenn $g_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ■

Wir kommen nun zu einem Lemma, das in den weiteren Untersuchungen der FRFT der Gaussfunktion entscheidende Hilfe bieten wird. Damit beim verweisen auf das Lemma keine Verwirrung entsteht, nenne ich es das *FG-Lemma*:

FG-Lemma *Sei $\widehat{f}$ die Fourier Transformation von der Gaussfunktion f*

$$\widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot v} e^{-\pi A v \cdot v} dv.$$

Seien $\lambda_1, ..., \lambda_d$ Eigenwerte von A. Die reellen Anteile aller λ_k sind strikt positiv, und wir haben

$$\widehat{f}(u) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi A u \cdot u}$$

mit

$$(\det A)^{-1/2} = \prod_{k=1}^{d} \lambda_k^{-1/2},$$

wobei $\lambda_k^{-1/2}$ die Quadratwurzel von λ_k^{-1} mit dem positiven reellem Anteil ist.

Beweis. Wir gehen in vier Schritten vor:

Schritt 1.

Sei $d = 1$ und A reell (für $d = 1$ ist A einfach eine Zahl) . Betrachten wir

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi A x^2 - 2\pi i z x} dx,$$

für $A > 0, z \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$I'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) e^{-\pi A x^2 - 2\pi i z x} dx = \frac{i}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(e^{-\pi A x^2}) e^{-2\pi i z x} dx =$$

$$= -\frac{i}{A} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-\pi A x^2}) \frac{d}{dx} e^{-2\pi i z x} dx = -\frac{2\pi z}{A} I(z).$$

Es gilt

$$\frac{d}{dz}[I(z) e^{\pi z^2/A}] = 0,$$

und somit

$$I(z) = C e^{-\pi z^2/A},$$

wobei

$$C = I(0) = \int (e^{-\pi A x^2}) dx = A^{-\frac{1}{2}}.$$

Schritt 2.

Zum allgemeinem Fall der Dimension d : Sei A reell und diagonal. Das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot v} e^{-\pi A v \cdot v} dv = \widehat{f}(u) = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi A u \cdot u}$$

stellt dann ein Produkt von eindimensionalen Integralen dar, wobei jeder von denen nach *Schritt 1.* ausgewertet werden kann.

Schritt 3.

Sei A reell und nicht diagonal. Solange $A = A^T$, gibt es eine Rotation R so dass $R^T A R = D$ diagonal ist. Setzen wir $x = Ry$, so ist für $R^T = R^{-1}$ und mit Schritt 2

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x A x - 2\pi i z x} dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi y D y - 2\pi i z R y} dy =$$

$$= (\det D)^{-1/2} e^{-\pi (R^{-1} z) \cdot D^{-1} (R^{-1} z)} = (\det A)^{-1/2} e^{-\pi z A^{-1} z}.$$

Schritt 4.

Das folgende Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i u \cdot v} e^{-\pi A v \cdot v} dv$$

stellt eine analytische Funktion der Einträge $A_{ij} = A_{ji}$ von A dar, für den Bereich $Re\ A > 0$. Der allgemeine Fall folgt aus Schritt 3 unter analytischen Betrachtungen. ∎

4.6 Fraktionale Fourier Transformation der Gaussfunktion

In diesem Abschnitt wird die FRFT der Gaussfunktion $f = e^{-Ax^2}$ berechnet, wofür das FG-Lemma des letzten Abschnittes verwendet wird. Um dieses Lemma aber anwenden zu können, muss die FRFT der Gaussfunktion die dafür nötige Form besitzen. Der erste Schritt in diesem Abschnitt ist also der FRFT der Gaussfunktion eine für die Anwendung des FG-Lemmas passende Form zu geben.

Die FRFT der Gaussfunktion f ist durch

$$\mathcal{J}_\alpha f(x) = \left(\frac{1}{2\sin(\alpha/2)(1+\cos^2(\alpha/2))^{1/2}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}|z|^2\cot(\alpha/2)}\rho(z)f(x)dz$$

gegeben, wobei

$$\rho(z_0) = e^{\pi i\omega\cdot x}T_x M_\omega = M_{\frac{\omega_0}{2}}T_{x_0}M_{\frac{\omega_0}{2}}$$

der im Kapitel 3 definierte Heisenberg-Weyl Operator ist. Lässt man diesen auf eine Funktion f wirken, so ergibt sich für $\rho(z_0)f(x)$:

$$\begin{aligned}
\rho(z_0)f(x) &= (M_{\frac{\omega_0}{2}}T_{x_0}M_{\frac{\omega_0}{2}}f)(x) = \\
&= M_{\frac{\omega_0}{2}}(T_{x_0}M_{\frac{\omega_0}{2}}f)(x) \\
&= e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot x}(T_{x_0}M_{\frac{\omega_0}{2}}f)(x) \\
&= e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot x}(M_{\frac{\omega_0}{2}}f)(x-x_0) \\
&= e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot x}e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot(x-x_0)}f(x-x_0).
\end{aligned}$$

Bemerkung 49 *Ich möchte hier kurz auf die Reihenfolge der Anwendung der Modulations- und Translationsoperatoren aufmerksam machen: Modulationsoperatoren kommutieren untereinander, und auch Translationsoperatoren kommutieren untereinander - aber diese kommutieren nicht miteinander! Im Jahr1927 zeigte Weyl dass die Modulations- und Translationsoperatoren folgende Relation erfüllen*

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i\omega\cdot x}M_\omega T_x,\ (\omega, x) \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Für $\rho(z_0)f(x)$ gilt also

$$\begin{aligned}
\rho(z_0)f(x) &= e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot x}e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot(x-x_0)}f(x-x_0) \\
&= e^{2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot x+2\pi i(\frac{\omega_0}{2})\cdot x-2\pi i(\frac{\omega_0}{2})x_0}f(x-x_0) \\
&= e^{2\pi i\omega_0\cdot x-\pi i\omega_0 x_0}f(x-x_0) \\
&= e^{2\pi i\omega_0\cdot x}e^{-\pi i\omega_0 x_0}f(x-x_0);
\end{aligned}$$

Und mit der Gaussfunktion $f = e^{-Ax^2}$ ergibt sich

$$\rho(z_0)f(x) = e^{2\pi i\omega_0\cdot x}e^{-\pi i\omega_0 x_0}e^{-A(x-x_0)^2}.$$

Für die weitere Berechnung des Integrals wird der Term

$$\left(\frac{1}{2\sin(\alpha/2)(1+\cos^2(\alpha/2))^{1/2}}\right)^d$$

erstmal ignoriert. Das heißt, für die Berechnung von der FRFT der Gaussfunktion $\mathcal{J}_\alpha f(x)$ wird betrachtet

$$\Upsilon = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}|z_0|^2\cot(\alpha/2)}\rho(z_0)f(x)dz_0.$$

Wir haben

$$\Upsilon = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}|z_0|^2\cot(\alpha/2)}\rho(z_0)f(x)dz_0 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}|z_0|^2\cot(\alpha/2)}e^{2\pi i\omega_0\cdot x}e^{-\pi i\omega_0 x_0}e^{-A(x-x_0)^2}dz_0.$$

Da $z_0 = (x_0, \omega_0)$ ist, haben wir $|z_0|^2 = (\sqrt{x_0^2+\omega_0^2})^2 = x_0^2+\omega_0^2$, und somit

$$\Upsilon = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}(x_0^2+\omega_0^2)\cot(\alpha/2)}e^{2\pi i\omega_0\cdot x}e^{-\pi i\omega_0 x_0}e^{-A(x-x_0)^2}d(x_0,\omega_0)$$

Weiters beachten wir dass

$$-A(x-x_0)^2 = -A(x^2-2xx_0+x_0^2) = -Ax^2+2Axx_0-Ax_0^2,$$

und mit der damit verbundenen Änderung in $e^{-A(x-x_0)^2}$ hat das Integral nun folgende Form

$$\Upsilon = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}(x_0^2+\omega_0^2)\cot(\alpha/2)}e^{2\pi i\omega_0\cdot x}e^{-\pi i\omega_0 x_0}e^{-Ax^2}e^{2Ax\cdot x_0}e^{-Ax_0^2}d(x_0,\omega_0).$$

Die Integrationsvariablen sind x_0 und ω_0, also kann e^{-Ax^2} vor das Integral gesetzt werden. Jetzt wird der Exponent von e als eine quadratische Form in x_0 und ω_0 geschrieben, und damit ergibt sich

$$\Upsilon = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}(x_0^2+\omega_0^2)\cot(\alpha/2)}e^{2\pi i\omega_0\cdot x}e^{-\pi i\omega_0\cdot x_0}e^{2Ax\cdot x_0}e^{-Ax_0^2}d(x_0,\omega_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{2\pi ix\cdot\omega_0+2Ax\cdot x_0}e^{-(Ax_0^2-\frac{i}{4}\cot(\alpha/2)x_0^2-\frac{i}{4}\cot(\alpha/2)\omega_0^2+\pi i\omega_0.x_0)}d(x_0,\omega_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i(-x\cdot\omega_0+\frac{2A}{-2\pi i}x\cdot x_0)}e^{-[A+\frac{i}{4}\cot(\alpha/2)I]x_0^2+\frac{i}{4}\cot(\alpha/2)\omega_0^2-\pi i\omega_0\cdot x_0}d(x_0,\omega_0);$$

Hier sollte die Rolle der Identitätsmatrix I wahrgenommen werden; -diese gibt dem Ausdruck $A+\frac{i}{4}\cot(\alpha/2)$ überhaupt einen Sinn, d.h. die betrachtete Operation wird durch das Einführen der Identitätsmatrix überhaupt erst ermöglicht.

Wir führen jetzt die entscheidende Substitution durch (ich erinnere, wir sind dabei dem Integral eine Form zu geben die für das Anwenden des FG-Lemmas passend ist):

$$v = (x_0, \omega_0) \text{ und } u = (\frac{2A}{-2\pi i}x, -x) = (\frac{Ai}{\pi}x, -x),$$

und somit

$$u\cdot v = -x\cdot\omega_0 + \frac{2A}{-2\pi i}x\cdot x_0.$$

Wir setzen jetzt

$$Mv \cdot v = [A + \frac{i}{4}\cot(\alpha/2)I]x_0^2 + \frac{i}{4}\cot(\alpha/2)\omega_0^2 - \pi i \omega_0 \cdot x_0$$

und berechnen diesbezüglich die Matrix M :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx_0}(Mv \cdot v) & \frac{d}{dx_0}(\frac{d}{d\omega_0}(Mv \cdot v)) \\ \frac{d}{d\omega_0}(\frac{d}{x_0}(Mv \cdot v)) & \frac{d^2}{d\omega_0}(Mv \cdot v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + \frac{i}{4}\cot(\alpha/2)I & -\pi i I \\ -\pi i I & \frac{i}{2}\cot(\alpha/2)I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir wissen, dass

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ mit } AC = CA \Rightarrow \det M = \det(AD - CB).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \det M &= (\frac{1}{2})^{2d}\det[i\cot(\frac{\alpha}{2})(A + \frac{i}{4}\cot(\frac{\alpha}{2})I - \pi^2 I] \\ &= 2^{-2d}\det[iA\cot(\frac{\alpha}{2}) - \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2})I - \pi^2 I] \\ &= 2^{-2d}\det[i\cot(\frac{\alpha}{2})A - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))I)]. \end{aligned}$$

Weil A eine symmetrische Matrix ist, gibt es Matrizen R und D so dass $A = RDR^T$ mit $R \in \mathcal{O}(d, \mathbb{R})$ und

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_d \end{pmatrix}$$

wobei λ_j Eigenwerte von A sind. Mit $D = R^T AR$ ergibt sich also

$$\det M = 2^{-2d}\det(\ R[i\cot(\frac{\alpha}{2})D - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))I]R^T\ ) =$$

$$= 2^{-2d}\det(\ (i\cot(\frac{\alpha}{2})D - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))I\ ).$$

Weiters gilt

$$(i\cot(\frac{\alpha}{2})D - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))I =$$

$$= \begin{pmatrix} i\lambda_1\cot(\frac{\alpha}{2}) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & i\lambda_d\cot(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & \pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\lambda_1\cot(\frac{\alpha}{2}) - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2})) & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & i\lambda_1\cot(\frac{\alpha}{2}) - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2})) \end{pmatrix}.$$

Schließlich hat man

$$\det M = 2^{-2d} \prod_{k=1}^{d} [i\lambda_k \cot(\frac{\alpha}{2}) - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))]$$

und man sieht, dass

$$\det M \neq 0 \Leftrightarrow \forall k : i\lambda_k \cot(\frac{\alpha}{2}) \neq (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2})).$$

Für die FRFT der Gaussfunktion gilt jetz also

$$\mathcal{J}_\alpha f(x) \left(\frac{1}{2\sin(\alpha/2)(1+\cos^2(\alpha/2))^{1/2}} \right)^{-d} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{\frac{i}{4}|z|^2 \cot(\alpha/2)} \rho(z) f(x) dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i(-x\cdot\omega_0 + \frac{2A}{-2\pi i} x\cdot x_0)} e^{-[A+\frac{i}{4}\cot(\alpha/2)I]x_0^2 + \frac{i}{4}\cot(\alpha/2)\omega_0^2 - \pi i \omega_0 \cdot x_0} d(x_0, \omega_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i u\cdot v} e^{Mv\cdot v} dv,$$

wobei der Integrand jetzt die für das Anwenden des Lemmas (aus Abschnitt 4.1.) die nötige Form aufweist. Das war unser Ziel, jetzt kann das FG-Lemma angewendet werden, um die Berechnung der FRFT fortzusetzen:

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i u\cdot v} e^{Mv\cdot v} dv = \det(M)^{-\frac{1}{2}} e^{Mv\cdot v}$$

$$= 2^d \prod_{k=1}^{d} [i\lambda_k \cot(\frac{\alpha}{2}) - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))]^{-\frac{1}{2}} e^{Mv\cdot v}.$$

Und konkret für die Gaussfunktion $f(x) = e^{-Ax^2}$ auf $\mathbb{R}^d$ ergibt sich also

$$\mathcal{J}_\alpha f(x) = \left(\frac{1}{2\sin(\alpha/2)(1+\cos^2(\alpha/2))^{1/2}} \right)^{d} 2^d \prod_{k=1}^{d} [i\lambda_k \cot(\frac{\alpha}{2}) - (\pi^2 + \frac{1}{4}\cot^2(\frac{\alpha}{2}))]^{-\frac{1}{2}} e^{Mv\cdot v}$$

mit $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A + \frac{i}{4}\cot(\alpha/2)I & -\pi i I \\ -\pi i I & \frac{i}{2}\cot(\alpha/2)I \end{pmatrix}$, $v = (x_0, \omega_0)$, und λ_j als Eigenwerte von A.

Kapitel 5

Appendix

5.1 Fourier Analysis und TF- Analysis

In diesem Abschnitt folge und zitiere ich Gröchenig [14]

Time-Frequency Analysis ist ein moderner Bereich der Harmonischen Analysis. Dieser verbindet alle solche Bereiche der Mathematik und deren Anwendungen, die für Analysis von Funktionen und Operatoren die Strukturen der Translations- und Modulationsoperatoren (auch Time-Frequency Shifts genannt) benutzen.

In diesem Appendix werden nur die nötigsten Grundlagen der Time-Frequency Analysis vorgestellt.

5.2 Fourier Transformation

Definition 50 *Für* $1 \leq p < \infty$ *ist*

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

die L^p-*Norm der Funktion* f, *und* $L^p(\mathbb{R}^d)$, *oder einfach nur* L^p, *ist der Banachraum aller (äquivalenten Klasse der) messbaren Funktionen* f *mit einer endlichen* L^p-*Norm.*

Für ein stetiges f *in* $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *gilt* $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

$p = 2$ ist ein Spezialfall, weil das innere Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)} dx$$

den Banachraum $L^2(\mathbb{R}^d)$ zu einem Hilbertraum macht.

Definition 51 *Die Fourier Transformation einer Funktion* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *ist definiert durch*

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \omega} dx.$$

Die Fourier Transformation ist ein linearer Operator der auf einem Funktionenraum wirkt. Um das hervorzuheben kann man $\mathcal{F}f$ statt $\widehat{f}$ schreiben.

Für Mathematiker ist die Fourier Transformation eine *natürliche* Transformation die tief in die Struktur von $\mathbb{R}^d$ verankert ist. Mit einer Ingeniuer Interpretation stellt ω die Frequenz dar, und $\widehat{f}(\omega)$ ist als die Amplitude dieser Frequenz ω zu verstehen.

Die Fourier Transformation ist zuerst auf L^1 definiert. Aus der Definition der Fourier Transformation folgt

$$\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 .$$

Lemma 52 ***(Riemann-Lebesque):*** *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fourier Transformation $\widehat{f}$ gleichmäßig stetig, und es gilt*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \left|\widehat{f}(\omega)\right| = 0.$$

Bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty)$ den Banachraum der stetigen Funktionen die im unendlichen verschwinden. Das letzte Lemma verdeutlicht die folgende Eigenschaft der Abbildung der Fourier Transformation:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d, \|.\|_1) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty).$$

Die Fourier Transformation kann auf andere Räume fortgesetzt werden. Das fundamentale Resultat dazu ist das *Plancherel Theorem:*

Satz 53 ***(Plancherel):*** *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$\|f\|_2 = \left\|\widehat{f}\right\|_2 .$$

Als eine Konsequenz der Fortsetzung wird $\mathcal{F}$ zu einem unitärem Operator auf $L^2(\mathbb{R}^d)$, und erfüllt dabei folgende *Parseval Gleichung*

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g} \right\rangle, \quad \text{für alle } f, g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Das *Plancherel Theorem* wird in Signal Analysis wie folgt interpretiert:

Die Fourier Transformation $\mathcal{F}f$ bewahrt die Energie vom Signal f.

Die Inverse Fourier Transformation

Satz 54 *Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i x\cdot\omega} d\omega, \qquad \textit{für alle } x \in (\mathbb{R}^d).$$

Man kann auch sagen

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{F},$$

wobei $\mathcal{I}$ die Reflektion durch

$$\mathcal{I}f(x) = \widehat{f}(-x)$$

gegeben ist.

5.2.1 Translation und Modulation

Definition 55 *Für $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ werden folgende Operatoren definiert*

$$T_x f(t) = f(x - t)$$

und

$$M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t).$$

Hier ist T_x eine Translation in x, und M_ω ist eine Modulation in ω. Operatoren der Form $T_x M_\omega$ oder $M_\omega T_x$ werden Time-Frequency Shifts genannt. Diese besitzen folgende grundlegende Relationen

$$\begin{aligned} T_x M_\omega f(t) &= (M_\omega f)(t - x) \\ &= e^{2\pi i \omega \cdot (t-x)} f(t - x) \\ &= e^{-2\pi i x \cdot \omega} e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t - x) \\ &= e^{-2\pi i x \cdot \omega} M_\omega T_x f(t). \end{aligned}$$

Einige Eigenschaften der Time-Frequency Shifts

Es gilt folgende Isometrie auf L^p (für jedes $1 \leq p \leq \infty$)

$$\|T_x M_\omega f\|_p = \|f\|_p .$$

Weiters gilt

$$(T_x f)\widehat{\ } = M_{-x} \widehat{f},$$

und wir haben auch

$$(M_\omega f)\widehat{\ } = T_\omega \widehat{f}.$$

Das Verhalten der Time-Frequency Shifts unter der Fourier Transformation folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \int f(t - x) e^{-2\pi i t \cdot \xi} dt &= \int f(t) e^{-2\pi i (t+x) \cdot \xi} dt \\ &= e^{-2\pi i x \cdot \xi} \widehat{f}(\xi), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int (M_\omega f)(t) e^{-2\pi i t \cdot \xi} dt &= \int f(t) e^{-2\pi i (x - \omega) \cdot \xi} dt \\ &= T_\omega \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Durch die Kombination der obigen Eigenschaften gewinnt man eine der wichtigsten Darstellungen der Time-Frequency Analysis, nämlich

$$\begin{aligned} (T_x M_\omega f)\widehat{\ } &= M_{-x} T_\omega \widehat{f} \\ &= e^{-2\pi i x \cdot \omega} T_\omega M_{-x} \widehat{f}. \end{aligned}$$

5.2.2 Konvolution

Definition 56 *Eine Konvolution von zwei Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist eine Funktion $f * g$ durch*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

definiert.

Es gilt

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

und

$$(f * g)\widehat{} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Rechnung

$$(f * g)\widehat{}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy) e^{-2\pi i y\cdot\omega} e^{-2\pi i (x-y)\cdot\omega} dx$$

und somit (nach dem Fubini Theorem)

$$\begin{aligned}(f * g)\widehat{}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2\pi i y\cdot\omega} (\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-2\pi i (x-y)\cdot\omega} dx) dy \\ &= \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

5.3 Distributionen Theorie

In diesem Abschnitt folge und zitiere ich G. Hörmann, R. Steinbauer [15].

5.3.1 Glatte Funktionen, Testfunktionen

Definition 57 *(C^∞**-Funktionen**) Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene und nicht leere Teilmenge sind folgende Funktionenräume definiert:*

(i) $\mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $k \in \mathbb{N}: \ \mathcal{C}^k(\Omega) =$

$$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} | f \text{ ist } k\text{−mal stetig differenzierbar}\}, \ \mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d).$$

(iii) $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega) =$

$$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ hat stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung}\}$$

$\mathcal{E}$ ist der *Raum der glatten Funktionen*

$$\mathcal{E} = \mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Definition 58 *(**Konvergenz in** C^k)*

(i) Für eine Folge $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ *und ein* f *in* $\mathcal{C}^k(\Omega)$ *(oder in* $\mathcal{E}(\Omega)$*) gilt*

$$f_l \overset{\mathcal{C}^k}{\underset{l\to\infty}{\to}} f$$

genau dann wenn

$\forall K \Subset \Omega$ *(K kompakte Teilmenge von* Ω *),*$\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n,$ *mit* $|\alpha| \leq k:$ $\partial^\alpha f_l \to \partial^\alpha f$ *gleichmäßig auf* K*,*

$$d.h.: \ \|\partial^\alpha f_l \to \partial^\alpha f\|_{L^p(K)} \to 0.$$

(ebenso: $f_l \overset{\mathcal{E}}{\underset{l\to\infty}{\to}} f \iff B_R(x_0)K \Subset \Omega \ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \partial^\alpha f_l \to \partial^\alpha f$ gleichmäßig auf K.)

Diese Konvergenz wird auch

gleichmäßige Konvergenz in allen Ableitungen

genannt.

Definition 59 *(Der Raum der **Testfunktionen**)*

(i) $k \in N_0 : \mathcal{C}_c^k(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \mid supp(f) \text{ ist kompakt}\}$;

(ii) Die Menge

$$\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \ = \mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid supp(f) \text{ ist kompakt}\}$$

wird der Raum der Testfunktionen *auf* Ω genannt.

Definition 60 *(Der Raum* $\mathcal{D}^k(K)$*): Für* $K \Subset \Omega$, $0 \leq k \leq \infty$ *definieren wir*

(i) $\mathcal{D}^k(K) = \{f \in \mathcal{C}_c^k(\Omega) \mid supp(f) \subseteq K\}$; *Für* $k = \infty$ *wird statt* $\mathcal{D}^\infty(K)$ einfach $\mathcal{D}(K)$ *geschrieben.*

(ii) Sei f_n $(n \in N)$ *und* f *in* $\mathcal{D}(K)$ *[oder* $\mathcal{D}^k(K)$ *mit* $k < \infty$*]. Man sagt, die Folge* (f_n) *konvergiert gegen* f *in* $\mathcal{D}(K)$ *wenn gilt*

$$\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f \quad \text{gleichmäßig auf } K, \ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Definition 61 *(**Konvergenz der Testfunktionen**)*

(i) Für eine Folgen φ_n $(n \in N)$ *und* φ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *gilt* $\varphi_n \overset{n\to\infty}{\to} \varphi$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *wenn*

$$(1) \ \ \exists K \Subset \Omega : supp(\varphi) \subseteq K \text{ und } supp(\varphi_n) \subseteq K \ \forall n \in \mathbb{N},$$

und

$$(2) \ \ \partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi \ \text{ gleichmäßig auf } K \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

5.3.2 Distributionen

Definition 62 ***(Distributionen)***

(i) Eine Distribution u *auf* Ω *ist ein lineares Funktional auf* $\mathcal{D}(\Omega)$ (also u: $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *linear) das die folgenden Stetigkeitseigenschaften besitzt:*

$$\varphi_n \to \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow u(\varphi_n) \to u(\varphi) \text{ in } \mathbb{C}$$

(ii) Der komplexe Vektorraum der Distributionen auf Ω *wird mit* $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet. *Man schreibt manchmal einfach* $\langle u, \varphi\rangle$ *statt* $u(\varphi)$.

Definition 63 ***(Cauchy Folge in*** $\mathcal{D}'(\Omega)$***)*** *Eine Folge* $(\varphi_l)_l$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *heißt Cauchy Folge, wenn*

(i) $\exists K \Subset \Omega : supp(\varphi_l) \subseteq K \ \forall l \in \mathbb{N}$, *und*
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon, \alpha) : \|\partial^\alpha \varphi_k - \partial^\alpha \varphi_l\|_{L^\infty(K)} < \epsilon \quad \forall k, l \geq N(\epsilon, \alpha)$.

Satz 64 ***(Stetigkeitskriterium - Halbnormabschätzung)***
Für u: $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *linear, gilt*

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \Longleftrightarrow \forall K \Subset \Omega \ \exists C > 0 \ \exists m \in \mathbb{N}_0 :$$

$$|\langle u, \varphi\rangle| \ \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

Beispiel 65 ***(Einige wichtige Distributionen)***

(i) Stetige Funktionen als Distributionen*:*
Für $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ *wird* $u_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *definiert durch*

$$\langle u_f, \varphi\rangle = \int_\Omega \underbrace{f(x)\varphi(x)}_{\in \mathcal{C}_c(\Omega)!} dx.$$

u_f *ist linear; wir zeigen dass die Halbnormabschätzung gilt: Für* $K \Subset \Omega$ und $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ *ist*

$$|\langle u_f, \varphi\rangle| \leq \int_\Omega |f(x)| \ \ |\varphi(x)| \ dx \ = \int_K |f(x)| \ \ |\varphi(x)| \ dx \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{L^\infty(K)} \int_K |f(x)| \ dx = \|f(x)\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)} \ .$$

Die Halbnormabschätzung ist also mit $m = 0$ *und* $C = \|f(x)\|_{L^1(K)}$ *erfüllt.*

(ii) Die Heaviside Funktion: *H soll (Klasse der* $L^\infty-$*) Funktionen auf* $\mathbb{R}$ *bezeichnen,gegeben durch*

$$H(x) = 0 \text{ für } x < 0 \quad \text{ und } \quad H(x) = 1 \text{ für } x > 0 \ .$$

Es gilt

$$\langle H, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

Für $K \Subset \mathbb{R}$ *ist* $|\langle H, \varphi\rangle| \leq diam(K)\, \|\varphi\|_{L^\infty(K)}$ *, womit die Halbnormabschätzung für* $m = 0$ *und* $C = diam(K)$ erfüllt ist, *und somit ist* $H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Die Dirac Distribution, ("$\delta-$Funktion") am einem Punkt $x_0 \in \Omega$:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0), \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)).$$

Linearität von δ_{x_0} *ist klar, und*

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}$$

zeigt dass $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$; *Die Halbnormabschätzung gilt für* $m = 0$ *und* $C = 1$. *Für* $\Omega = \mathbb{R}^d$ *und* $x_0 = 0$ schreibt man einfach δ *statt* δ_0.

Definition 66 $L^1_{loc}(\Omega)$ *bezeichnet den Raum von (einer Klasse von-) Lebesgue-messbaren Funktionen die auf jeder Teilmenge von* Ω *Lebesque-integrierbar sind. Es gilt* $\mathcal{C}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definition 67 ***(Reguläre Distributionen)*** *Eine Distribution* $\mathrm{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *wird* regular genannt, *wenn es ein* f *in* $L^1_{loc}(\Omega)$ *gibt, so dass* $\mathrm{u}=\mathrm{u}_f$ *gilt. D.h.:*

$$\langle \mathrm{u}, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \langle \mathrm{u}_f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(K).$$

5.3.3 Konvergenz der Distributionen

Definition 68 ***(Folgen Konvergenz in*** $\mathcal{D}'$***)*** *Für eine Folge* (u_l) *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *und* $\mathrm{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *sagt man:*

(i) (u_l) konvergiert *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *(bezeichnet mit* $\mathrm{u}_l \overset{l\to\infty}{\to} \mathrm{u}$*)*
wenn $\lim\limits_{l\to\infty} \langle \mathrm{u}_l, \varphi\rangle = \langle \mathrm{u}, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$;
(ii) (u_l) *ist eine* Cauchy Folge *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *wenn* $(\langle \mathrm{u}_l, \varphi\rangle)_{l\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy Folge in* $\mathbb{C}$ *ist, für alle* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

5.3.4 Distributionen mit kompaktem Träger

In diesem Abschnitt wird ein wichtiger Teilraum von $\mathcal{D}'$ vorgestellt -der Raum der *Distributionen mit kompakten Träger.*

Definition 69 ***(***$\mathcal{E}'$***−Distributionen)*** *Wir bezeichnen den Raum der folgen-stetigen linearen Funktionale auf* $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *mit* $\mathcal{E}'(\Omega)$.

[Für jedes lineares $\mathrm{u} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *gilt*

$$\mathrm{u} \in \mathcal{E}'(\Omega) \Leftrightarrow \varphi_n \underset{\mathcal{E}(\Omega)}{\to} \varphi \text{ in} \Rightarrow \langle \mathrm{u},\varphi_n\rangle \to \langle \mathrm{u},\varphi\rangle \text{ in } \mathbb{C}.]$$

Satz 70 ***(Stetigkeitskriterium - Halbnormabschätzung)***
Für lineares u: $\mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *gilt*

$$\mathrm{u} \in \mathcal{E}'(\Omega) \Leftrightarrow \exists K \Subset \Omega\ \exists C > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0 :$$

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(K)\ (= \mathcal{C}^\infty(\Omega)).$$

[Der Vergleich mit der HN-Abschätzung für den $\mathcal{D}'$-Fall zeigt dass $\forall K$ durch $\exists K$ ersetzt wurde.]

Satz 71 ***(Distributionen mit kompakten Träger $\mathcal{D}'$ sind $\mathcal{E}'$-Distributionen)***

Für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger gibt es genau ein $\widetilde{u} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ mit $\widetilde{u}_{\mathcal{D}(\Omega)} = u$.

5.3.5 Fourier Transformation und Temperierte Distributionen

Definition 72 *Sei $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

(i) *φ heißt eine schnell fallende Funktion, wenn folgende Halbnormabsschätzung gilt*

$$(\Lambda): \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : q_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right| < \infty.$$

(ii) *Der Vektorraum aller schnell fallenden Funktionen auf R^d ist bezeichnet mit $S(R^d)$ und wird der **Schwartzraum** genannt.*

(iii) *Eine Folge (φ_m) in $S(R^d)$ konvergiert gegen $\varphi \in S(R^d)$ ($\varphi_m \overset{m\to\infty}{\underset{\mathcal{S}}{\to}} \varphi$), wenn gilt*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : q_{\alpha,\beta}(\varphi_m - \varphi) \overset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Bemerkung 73 *Für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist die Bedingung (Λ) äquivalent zur folgenden*

$$(\widetilde{\Lambda}): \qquad \forall \gamma \in \mathbb{N}_0^n \ \forall l \in \mathbb{N}_0 \ \exists C > 0 : \ |D^\gamma \varphi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^l} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Es ist offensichtlich dass (Λ) eine Konsequenz von $(\widetilde{\Lambda})$ ist. Andererseits impliziert (Λ)

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}_0^n \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \exists C > 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\beta \varphi(x) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| |x|^{2k} D^\beta \varphi(x) \right| < C,$$

[wobei $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| D^\beta \varphi(x) \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| |x|^{2k} D^\beta \varphi(x) \right| \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (1+|x|)^{2k} D^\beta \varphi(x) \right|$*]*

Wir haben also

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{E}(\mathbb{R}^d).$$

Ein Beispiel einer Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \backslash \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ist $\varphi(x) = e^{-c|x|^2}$ mit $Re(c) > 0$.

Satz 74 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist vollständig (als ein metrischer Raum)*

D.h. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist ein Fréchet Raum (also ein lokalkonvexer und vollständiger topologischer Vektorraum mit einer abzählbaren Nullumgebungsbasis).

Definition 75 *Ein metrischer Raum, bezeichnet mit (X,d), ist eine nicht leere Menge X zusammen mit einer ("Metrik-") Abbildung*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned}(D1)\ d(x,y) &\geq 0,\ und\ \ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\\ (D2)\ d(x,y) &= d(y,x),\\ (D3)\ d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z),\ \forall x,y,z \in X.\end{aligned}$$

Definition 76 *(Norm): Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}(N1) &: \quad \|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,\ v \in V;\\ (N2) &: \quad \|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|, \qquad \alpha \in \mathbb{K}, v \in V;\\ (N3) &: \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|, \qquad v,w \in V.\end{aligned}$$

Definition 77 *(Normierter Raum): Ein normierter Vektorraum, bezeichnet mit $(V, \|.\|)$, ist ein reeller oder komplexer Vektorraum V mit einer Norm darauf.*

Bemerkung 78 *Jeder normierte Raum $(V, \|.\|)$ (bzw jede Teilmenge davon) wird durch $d(x,y) := \|y-x\|$ zum metrischen Raum.*

Definition 79 *In einem metrischen Raum konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen ξ, wenn gilt*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \forall n \geq N : d(x_n, \xi) < \epsilon,$$

$$\textit{oder einfach}\ \ x_n \overset{n\to\infty}{\to} \xi \Leftrightarrow d(x_n,\xi)\ < \epsilon.$$

Definition 80 *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt*

$$\forall \epsilon > 0\ \ \exists N(\epsilon) \forall n,m \geq N : d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Definition 81 *Ein metrischer Raum (X,d) heisst vollständig, wenn für jede Cauchyfolge aus (X,d) in (X,d) konvergiert.*

... Exkurs Ende ...

Satz 82 *Die Fourier Transformation* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *ist eine lineare und stetige Abbildung mit stetiger Inversen* $\mathcal{F}^{-1}$ *durch*

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \qquad (\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$$

gegeben.

Definition 83 *Der Raum der (in allen Ableitungen) schwach wachsenden glatten Funktionen ist definiert durch*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}_0 \exists N \in \mathbb{N}_0 \exists C > 0 \forall x \in \mathbb{R}^d : |\partial^\alpha f(x)| \leq C(1+|x|)^N\}.$$

Satz 84 *1.*

2. *Für einen partiellen Differentialoperator* $P(x, D)$

$$P(x, D) = \sum_{|\gamma| \leq m} a_\gamma(x) D^\gamma \quad (a_\gamma \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^d))$$

   gilt

$$P(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \text{ linear und stetig.}$$

3. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *mit stetiger Einbettung.*

4. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *ist dicht in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

5. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ *mit stetiger Einbettung.*

Bemerkung 85 *Punkt 4. erlaubt die Fourier Transformation auf* $\mathcal{S} \subseteq L^1$ *zu definiert, und wegen*

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \|f\|_{L^1} \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ für } \widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ und jedes } f \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

ergibt sich

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{C}_b.$$

Man kann zeigen: Es ist eine spezielle Eigenschaft des Raumes $\mathcal{S}$ dass er einerseits unter Differentiation, andererseits auch unter der Fourier Transformation invariant ist, d.h. die Fourier Transformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 86 *Für jedes* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *gilt*

$$(D^\alpha \varphi)\widehat{\ }(\xi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$$

und

$$(x^\alpha \varphi)\widehat{\ }(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi),$$

also $\widehat{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 87 *Es gilt* $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *und die Abbildung* $\varphi \to \widehat{\varphi}$ *ist stetig von* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *nach* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Sobald man weiss, dass die Fourier Transformation $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ invariant lässt ist klar, dass auf $\mathcal{S}$ auch die Inversionsformel im Sinne der punktweisen Darstellung gilt:

Lemma 88 ***(Inverse Fourier Darstellung)*** *Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt die inverse Darstellung*

$$\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Temperierte Distributions

Definition 89 *Eine temperierte Distribution auf $\mathbb{R}^d$ ist ein stetiges lineares Funktional u: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$, d.h.*

$$\varphi_k \to 0 \text{ in } \mathcal{S} \Rightarrow \langle u, \varphi_k \rangle \to 0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

Der Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^d$ wird bezeichnet mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Wie im Fall $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{E}'$ gibt es eine *analytische* Darstellung der Stetigkeit der linearen Funktionen auf $\mathcal{S}$, wieder in Termen der Halbnormabschätzung.

Satz 90 *Ein lineares Funktional u: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ ist genau dann auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ stetig, wenn folgende Stetigkeitsbedingung gilt:*

$$\exists C > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \text{ so dass } \forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C Q_N(\varphi) = C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \left\| x^\alpha D^\beta \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Bemerkung 91 *($\mathcal{S}'$ und $\mathcal{D}'$) Weil $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ eine stetige dichte Einbettung in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist (mit den jeweils natürlichen Topologien), gilt*

$$\text{für jedes } u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \text{ dass } u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

und $u \longmapsto u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ ist eine injektive Abbildung von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ nach $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Somit kann $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ als Teilmenge von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ betrachtet werden.

Fourier Transformation auf $\mathcal{S}'$

Für $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ betrachten wir u auch als Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, und für $\widehat{u} \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$ betrachten wir $\widehat{u}$ auch als Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, denn,

für $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$|\langle u, \varphi \rangle| = \left| \int u(x)\varphi(x) d(x) \right| \leq \int |u(x)| \underbrace{|\varphi(x)|}_{\leq \|\varphi\|_\infty} d(x) \leq \|\varphi\|_\infty \int |u(x)| \, d(x) = \|\varphi\|_\infty \|u\|_1,$

womit die Stetigkeitsbedingung aus Satz 91

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \left\| x^\alpha D^\beta \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

für $C = \|\varphi\|_\infty$ und $N = 0$ erfüllt ist.

Da für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ auch $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$, ergibt sich

$$\langle \widehat{\mathrm{u}}, \varphi \rangle = \int \widehat{\mathrm{u}}(\xi)\varphi(\xi)d(\xi) = \int u(x)\widehat{\varphi}(x)d(x) = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \,.$$

Weil $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ ein stetiger Isomorphismus auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist, definiert die Abbildung $\varphi \mapsto \langle u, \widehat{\varphi} \rangle$ ein Element in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Definition 92 *Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ist die Fourier Transformation $\widehat{\mathrm{u}}$ (oder $\mathcal{F}u$) durch*

$$\langle \widehat{\mathrm{u}}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

definiert.

Satz 93 *Die Fourier Transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ist linear und bijektiv, und sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{F}^{-1}$ sind folgenstetig. Es gilt*

$$\widehat{\widehat{\mathrm{u}}} = (2\pi)^n \overset{\vee}{\mathrm{u}}$$

und auch $\mathcal{F}^{-1}\mathrm{u} = (2\pi)^{-n} \, (\widehat{u}\,)^{\vee}$.

Für ein $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ stimmt dann nach Definition $\overset{\vee}{u}$ mit der gewöhnlicher Fourier Transformation von u überein (als L^1-Funktion), d.h. auf L^1 gilt:

"Die gewöhnliche Fourier Transformation und die verallgemeinerte Fourier Transformation
(d.h. die Fourier Transformation in der distributionellen Theorie),
stimmen auf L^1 überein, d.h. die verallgemeinerte Fourier Transformation ist eine *natürliche Verallgemeinerung* der *gewöhnlichen*".

Literaturverzeichnis

[1] Alieva, T. and Bastiaans, M. J. (2003). Wigner distribution and fractional Fourier transform. Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference, ed. B. Boashash; *Elsevier*, Oxford, UK, 145–152.

[2] Almeida L. B. (1994). The fractional Fourier transform and time-frequency representations; *IEEE Trans. Signal Process.* **42**(11), 3084–3091.

[3] Bultheel, A. and Sulbaran, H. M. (2005). An introduction to the Fractional Fourier Transform and friends. *Cubo Matemática Educacional,* **7**(2), 201–221.

[4] Buslaev, V. C. (1978). Quantization and the W.K.B method. *Trudy Mat. Inst. Steklov* **110**, 5–28 [in Russian].

[5] Feichtinger H. G. (1983). Modulation Spaces on locally compact abelian groups*, Technical Report, University of Vienna.*

[6] Feichtinger H. G. and Gröchenig, K. (1992). Gabor wavelets and the Heisenberg group: Gabor expansions and short-time Fourier transform from the group theoretical point of view, Wavelets, *Wavelet Anal. Appl.*, vol. 2, Acad. Press, Boston, 359–397.

[7] Feichtinger, H. G., Hazewinkel. M., Kaiblinger, N., Matusiak, E., and Neuhauser M. (2006). Metaplectic operators on $\mathrm{Mp}(d)$. *Preprint.*

[8] Folland, G. B. (1989). Harmonic Analysis in Phase space. *Annals of Mathematics studies, Princeton University Press,* Princeton, N.J.

[9] de Gosson, M. (1990). Maslov Indices on $\mathrm{Mp}(d)$. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, **40**(3), 537–555.

[10] de Gosson, M. (1992). The structure of q-symplectic geometry. *J. Math. Pures et Appl.* **71**, 429–453.

[11] de Gosson, M. (1997). Maslov Classes, Metaplectic Representation and Lagrangian Quantization. *Research Notes in Mathematics* ***95**,* Wiley–VCH, Berlin.

[12] de Gosson, M. (2005). The Weyl Representation of Metaplectic operators. *Lett. Math. Physics* **72**, 129–142.

[13] de Gosson, M. (2006). Symplectic Geometry and Quantum Mechanics. *Birkhäuser*, Basel.

[14] Gröchenig, K. (2000). Foundations of Time-Frequency Analysis. *Birkhäuser*, Boston.

[15] G. Hörmann, R. Steinbauer, Theory of Distributions, Lecture notes, University of Vienna, 2009, electronically available at http://www.mat.univie.ac.at/~stein/teaching/SoSem09/distr.html .

[16] Howe, R. (1988). The Oscillator Semigroup. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics* **48**, Amer. Math. Soc., 61–132.

[17] Kober, H. (1939). Wurzeln aus der Hankel- und Fourier und anderen stetigen Transformationen. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **10**, 45–49.

[18] Leray, J. (1981). Lagrangian Analysis and Quantum Mechanics, a mathematical structure related to asymptotic expansions and the Maslov index, the *MIT Press*, Cambridge, Mass.

[19] Maslov, V. P. and Fedoriuk, M. V. (1981). Semi-Classical Approximations in Quantum Mechanics. *Reidel*, Boston.

[20] Ozaktas, H. M., Zalevsky, Z., and Kutay, M. A. (2001). The Fractional Fourier Transform, with Applications in Optics and Signal Processing. *John Wiley & Sons.*

[21] Reiter, H. Metaplectic Groups and Segal Algebras.

[22] Segal, I. E. (1959). Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom, I. *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **31**, 1–39.

[23] Shale, D. (1962). Linear Symmetries of free Boson fields. *Trans. Amer. Math. Soc.* **103**, 149–167.

[24] Weil, A. (1964). Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.* **111**, 143–211.

[25] Wallach, N. (1977). Lie Groups: History, Frontiers and Applications, **5**, Symplectic Geometry and Fourier Analysis, *Math Sci Press*, Brookline, MA.

[26] Williamson, J. (1963). On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. *Amer. J. of Math.* **58**, 141–163.

Lebenslauf

Jasminko Đuzelović

Geboren am 29.08.1980, in Tuzla, Bosnien und Herzegowina

Ausbildung

2000: Reifeprüfung an der technischen Mittelschule Zivinice, Bosnien und Herzegowina, Schwerpunkt: Elektrotechnik.

2001: Fachhochschule München, Studiengang Elektro-Informationstechnik.

2004 Oktober: Diplomstudium Mathematik an der Universität Wien.

2007: Abschluss des ersten Studienabschnittes Diplomstudium Mathematik.

Berufe

2002-2003:

Werkstudent bei Siemens, München.

01.09.2003 - 01.09.2004:

Initiativ Gruppe, Interkulturelle Begegnung e.V., München:

-Honorarlehrer;

-Kinder-und Jugendbetreuer;

-Hausaufgabenbetreuung/Ganztagsbetreuung.

2006-2009:

Institut für Erlebnispädagogik Wien:

-Kinder-/Jugend-/ Seniorenbetreuuer.

-Hausaufgabenbetreuung/Ganztagsbetreuung.