DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Welche Risiken oder Chancen bieten Anleihen, Aktien und Optionen?

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasserin:	Sonja Weissenböck
Matrikel-Nummer:	0351297
Studienrichtung (lt. Studienblatt):	A190 406 482 UF Mathematik und UF Bewegung und Sport
Betreuer:	Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Wien, am

Inhaltsverzeichnis

1 Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Univ.-Prof. Dr. Peter Raith für die ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Er unterstützte mich nicht nur bei dieser Arbeit, sondern während meines gesamten Studiums. Er hat mich gefordert, motiviert und mir mit wertvollen Ratschlägen geholfen.

Ein besonderer Dank gebührt meiner Familie, die mir diese Ausbildung ermöglichte, mich immer unterstützte und an mich glaubte. Meine Eltern haben meine Talente seit ich klein war gefördert und mir Rückhalt gegeben um meinen Weg gehen zu können. Mein Bruder Harry hat mich mit seinem positiven Wesen, auch wenn ich einmal verzweifelt war, wieder aufgeheitert.

Vielen Dank auch meinem Freund Florian, der immer für mich da war und mich sowohl beim Schreiben meiner Diplomarbeit als auch vor schweren Prüfungen aufgebaut und motiviert hat.

Ich bedanke mich bei meinen Studienkollegen/Studienkolleginnen für die wunderschöne gemeinsame Zeit und die gegenseitige Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Der Dank richtet sich außerdem an meine Freunde, mit denen ich den Großteil meiner Studienzeit verbracht habe. Sie unterstützten mich vor Prüfungen, leisteten mir in Lernpausen Gesellschaft, feierten mit mir Erfolge und verschönerten meinen Alltag.

Vielen Dank!

2 Vorwort

Ich wurde schon sehr oft von Schülern/Schülerinnen gefragt: „Warum muss ich Mathematik lernen? Wo kann ich das jemals brauchen? “. Die Finanzmathematik ist eine Antwort dafür. Sehr viele Finanzmodelle würden ohne der Mathematik nicht existieren.
In meiner Diplomarbeit werden verschiedene finanzmathematische Modelle zu Anleihen, Aktien und Optionen vorgestellt und allgemeine mathematische Grundlagen zur Analyse von Anlageformen erklärt. Ich habe englisch- und deutschsprachige Literatur verwendet und einige Selbstversuche gestartet, um die Modelle zu erproben.
Ich habe mich für diese Thematik entschieden, weil ich die Anwendung der Mathematik auf die Finanzwelt schon zu Schulzeiten interessant fand, ich im Unterricht jedoch sehr wenig darüber lernte.
Die Inhalte sind nicht nur für Personen, die sich beruflich mit Anlageformen beschäftigen, sondern ebenfalls für jene, die privat in Aktien oder Optionen investieren wollen, interessant.
In dieser Arbeit wird des Öfteren nur die männliche Form verwendet, dies soll keine Diskriminierung sein, sondern dient lediglich dem besseren Lesefluss. Wenn die weibliche Form nicht explizit angeführt wurde, sind selbstverständlich trotzdem beide Geschlechter gemeint.

3 Wertpapiere

3.1 Einführung

Ich möchte lediglich einen groben Überblick über jene Wertpapiere geben, auf die ich später näher eingehen werde.
Was sind Wertpapiere?
Ein Wertpapier ist eine Urkunde, die bestimmte Rechte an einem Unternehmen verbrieft. Zur Geltendmachung dieser Rechte ist zumindest der Besitz der Wertpapiere notwendig.
Man unterscheidet zwischen festverzinslichen Wertpapieren und variabel verzinslichen Wertpapieren.

Festverzinsliche Wertpapiere erwirtschaften für die Dauer ihrer Laufzeit einen festen Zinssatz. Zu dieser Kategorie gehören beispielsweise Anleihen, Aktien, Genussscheine, Pfandbriefe und Renten.

Variabel verzinsliche Wertpapiere erwirtschaften hingegen unterschiedliche Renditen in Abhängigkeit vom Marktumfeld und der Situation des Unternehmens, also keinen festen Zinssatz. Inhaber solcher Wertpapiere profitieren von Kurssteigerungen des Wertpapiers und von der Gewinnsituation des Unternehmens. Die Auszahlung erfolgt durch eine Dividendenzahlung. Andererseits trägt man auch einen Teil des unternehmerischen Risikos, es kann also je nach Marktsituation zu Kursverlusten kommen. Aktien und Fonds sind zum Beispiel variabel verzinsliche Wertpapiere.

vgl. [40] und [41]

In der Regel sind Wertpapiere frei handelbar und können auch von Kleinanlegern erworben werden.

„Ein Wertpapier verbrieft seinem Besitzer gewisse Rechte, z.B.:

- Anleihe (Schuldtitel): Recht auf Zinszahlung und Kapitalrückzahlung,
- Aktie (Substanzwert): Anteiliger Besitz an Unternehmen mit Anspruch auf Gewinn (Dividende) und Mitsprache (Aktionärsversammlung),
- Optionsschein (Warrant): Recht auf Kauf/Verkauf einer Sache zu vorbestimmten, festen Bedingungen (z.B. fixer Strike-Preis)“

[Fulmek, M.: *Finanzmathematik.*Skriptum zur Vorlesung im SS 2008, Universität Wien, 2008, S.90]

4 Anleihen

4.1 Was sind Anleihen?

Wenn der Staat, Banken oder Unternehmen große Geldmengen brauchen, besteht die Möglichkeit eine Anleihe herauszugeben. Damit werden bei vielen verschiedenen Anlegern Kredite aufgenommen, der gesamte Kreditbetrag wird also in Anteile gestückelt. Anleihen haben eine festgelegte Laufzeit und sind meist fest verzinst, manchmal gibt es jedoch auch variabel verzinsliche Anleihen. Der Herausgeber ist verpflichtet den Nennbetrag sowie die festgelegte Verzinsung am Ende der Laufzeit zurückzuzahlen.

vgl. [1] S.1 [38]

4.2 Allgemeine Informationen zu Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wird ein kurzer Überblick über Differentialgleichungen gegeben, die im nachfolgenden Kapitel verwendet werden.
Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung zwischen einer gesuchten Funktion und einigen ihrer Ableitungen. Es gibt „gewöhnliche Differentialgleichungen“ und „partielle Differentialgleichungen“.

- „gewöhnliche Differentialgleichungen“: Die gesuchte Funktion hängt nur von einer einzigen Veränderlichen ab.
- „partielle Differentialgleichungen“: Die gesuchte Funktion hängt von mehreren Veränderlichen ab und somit kommen partielle Ableitungen vor.

Wir werden nur auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen etwas näher eingehen. Als Ordnung der Differentialgleichung wird die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung genannt. Die Ableitung

$$\frac{dB(t)}{dt} = B(t) \cdot i$$

hat also beispielsweise Ordnung 1 und die Ableitung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = \cos x$$

hat Ordnung 2.
Eine implizite Differentialgleichung n-ter Ordnung hat folgende Gestalt:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad \text{beziehungsweise} \quad F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

wobei F eine reelle Funktion von $n+2$ reellen Veränderlichen. Die ebenfalls reelle Funktion $y(x)$ wird als ein Integral beziehungsweise eine Lösung dieser Differentialgleichung bezeichnet, falls sie auf I n-mal differenzierbar ist es gilt:

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in I.$$

Bei einer expliziten Differentialgleichung n-ter Ordnung tritt die höchste vorkommende Ableitung isoliert auf einer Seite auf und hat folgende Form:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$$

In der Regel besitzen Differentialgleichungen unendlich viele Lösungen, sie können jedoch auch nur eine oder keine Lösung haben.
vgl. [14] S.41-42

4.2.1 Die einfachste Form der Differentialgleichung

Satz 1. $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$ *genau dann, wenn* $\exists c$ *mit* $x(t) = c\mathrm{e}^{at}$.

Beweis. ($\Leftarrow$) *Falls* $x(t) = c\mathrm{e}^{at}$, *dann ist* $\frac{dx(t)}{dt} = c\mathrm{e}^{at}a = ax(t)$.

($\Rightarrow$) *Es gelte* $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$. *Wir definieren* $y(t) := x(t)\mathrm{e}^{-at}$. *Dann ist*

$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathrm{e}^{-at} + x(t)\mathrm{e}^{-at}(-a) = \mathrm{e}^{-at}(\frac{dx(t)}{dt} - ax(t)) = 0.$

Wegen des Mittelwertsatzes $\exists c$ *mit* $y(t) = c$. *Daher ist* $x(t) = c\mathrm{e}^{at}$. □

4.3 Allgemeines zu Zinsen

4.3.1 Aufzinsen und Abzinsen

Wird zum Zeitpunkt t_0 [1] der Betrag $B(t_0)$ mit einem fixen Zinssatz i verzinst, so ergibt sich nach einem Jahr

$$B(t_0 + 1) = B(t_0) \cdot (1 + i),$$

[1] Einheit der Zeit sind Jahre

wobei der Faktor $1 + i$ *Aufzinsungsfaktor* heißt.
Wird wieder zum Zeitpunkt t_0 der Betrag $B(t_0)$ investiert und mit einem fixen Zinssatz i jährlich verzinst, so ergibt sich nach n Jahren zum Zeitpunkt t_0 + n der Geldwert

$$B(t_0 + n) = B(t_0) \cdot (1 + i)^n \qquad \textit{(Aufzinsungsformel).}$$

Bei einem Zinssatz von $R\%$ pro Jahr und halbjährlicher Verzinsung ergibt sich

$$B_{\text{halbjährlich}}(t_0 + n) = B(t_0) \cdot (1 + i/2)^{2n},$$

wobei $i = R/100$. Wenn man die Perioden immer weiter verkürzt, erhält man durch den Limes die kontinuierliche Verzinsung

$$B_{\text{kontinuierlich}}(t_0 + n) = \lim_{m\to\infty} B(t_0) \cdot (1 + i/m)^{mn} = B(t_0) \cdot \exp(i \cdot n).$$

Der Wert B des Bankkontos ist bei der kontinuierlichen Verzinsung eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dB(t)}{dt} = B(t) \cdot i$$

mit einer Anfangsbedingung zum Zeitpunkt t_0. In dieser Differentialgleichung muss die Zinsrate r nicht konstant sein.

Man kann auch umgekehrt fragen, mit welchem Startkapital man nach n Jahren bei jährlicherVerzinsung von R% einen Kontostand von $B(t_0 + n)$ erreicht. Durch Umformung der Aufzinsungsformel erhält man

$$B(t_0) = \frac{B(t_0 + n)}{(1 + i)^n} = \left(\frac{1}{1 + i}\right)^n B(t_0 + n) \qquad \textit{(Abzinsungsformel)}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{1+i}$ *Abzinsungsfaktor* heißt.

Mit Hilfe dieser Formeln kann nun auch der Zinssatz i berechnet werden, wenn eine bestimmte Einlage $B(t_0)$ in n Jahren auf $B(t_0 + n)$ anwachsen soll:

$$i = \left(\frac{B(t_0 + n)}{B(t_0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Es kann des weiteren berechnet werden wie viele Jahre n es dauert, bis eine bestimmte Einlage $B(t_0)$ bei einer Verzinsung von $R\%$ pro Jahr auf den Wert $B(t_0+n)$ angewachsen ist:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{B(t_0+n)}{B(t_0)}\right)}{\ln(1 + i)},$$

dabei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus, d.h. den Logarithmus mit der eulerschen Zahl als Basis.

vgl. [2] S.4; [1] S. 4-5

4.3.2 Hilfreiches Computerprogramm

Tabellenkalkulationsprogramme wie Excel oder Open Office-Calc eignen sich sehr gut zum Erstellen von tabellarischen Rechnungen.
Zur Veranschauung ein kurzes Beispiel, welches problemlos mit Excel erstellt werden kann:
Auf ein Konto, das zu 4,5% pro Jahr verzinst wird, wird am Anfang jedes Jahres ein Betrag von € 5000 eingezahlt. Abbildung 1 zeigt welche Formeln man in dem Programm eingeben muss, um die Entwicklung des Kontostands von Jahr zu Jahr beobachten zu können (Abbildung 2).

	A	B	C	D	E	F
1	Zeitraum	Einzahlung	Anfangs-kapital	Zinssatz	Zins	Endkapital
2	1	5000	=B2	0,045	=D2*C2	=C2+E2
3	2	5000	=F2+B3	0,045	=C3*D3	=C3+E3
4	3	5000	=F3+B4	0,045	=C4*D4	=C4+E4
5	4	5000	=F4+B5	0,045	=C5*D5	=C5+E5
6	5	5000	=F5+B6	0,045	=C6*D6	=C6+E6

Abbildung 1: Eingaben in Excel

Zeitraum in Jahren	Einzahlung in €	Anfangs-kapital in €	Zinssatz	Zins in €	Endkapital in €
1	5000	5000,00	4,5%	225,00	5225,00
2	5000	10225,00	4,5%	460,13	10685,13
3	5000	15685,13	4,5%	705,83	16390,96
4	5000	21390,96	4,5%	962,59	22353,55
5	5000	27353,55	4,5%	1230,91	28584,46
...	...	...	...	...	...

Abbildung 2: Ausgabe in Excel

In diesem Fall konnte so also der Kontostand nach fünf Jahren berechnet werden. Dieser kann auch auf folgende Art ermittelt werden:

Die erste Einzahlung wird fünfmal verzinst, deshalb

$$1,045^5 \cdot € \; 5000 = € \; 6230,91.$$

Zeitpunkt	Einzahlung in €	Zinssatz	Wert der Einzahlung in 5 Jahren in €
heute	5000	4,5%	$1,045^5 \cdots 5000 = 6230{,}91$
in 1 Jahr	5000	4,5%	$1,045^4 \cdots 5000 = 5962{,}59$
in 2 Jahren	5000	4,5%	$1,045^3 \cdots 5000 = 5705{,}83$
in 3 Jahren	5000	4,5%	$1,045^2 \cdots 5000 = 5460{,}13$
in 4 Jahren	5000	4,5%	$1,045 \cdots 5000 = 5225{,}00$
		Summe in €	28584,46

Tabelle 1: Beschreibung

Die zweite Einzahlung wird viermal verzinst, deshalb

$$1,045^4 \cdot € \ 5000 = € \ 5962,59.$$

So verzinsen wir alle Einzahlungen bis zum Ende des 5.Jahres und erhalten die Summe:

$$1,045^5 \cdot € \ 5000 + 1,045^4 \cdot € \ 5000 + 1,045^3 \cdot € \ 5000 + 1,045^2 \cdot € \ 5000 + 1,045 \cdot € \ 5000$$

Dazu kann ebenfalls eine Tabelle in Excel/Open Office erstellt werden (siehe Tabelle 1).

Diese Summe kann aber auch durch folgende Formel vereinfacht werden:

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad (a \neq 1)$$

Beweis. Multiplikation mit $a - 1$:

$$(a-1) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n) =$$
$$= a - 1 + a^2 - a + a^3 - a^2 + ... + a^n - a^{n-1} + a^{n+1} - a^n) =$$
$$= -1 + a^{n+1} = a^{n+1} - 1$$
$$\text{Daher ist } 1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

□

An welcher Stelle kann diese Formel nun genau verwendet werden, wenn wir auf die Summe zurückkommen?

$$\begin{aligned} &1,045^5 \cdot 5000 + 1,045^4 \cdot 5000 + 1,045^3 \cdot 5000 + 1,045^2 \cdot 5000 + 1,045 \cdot 5000 \\ &= 1,045 \cdot 5000 \cdot (1,045^4 + 1,045^3 + 1,045^2 + 1,045 + 1) \\ &= 1,045 \cdot 5000 \cdot \frac{1,045^5 - 1}{1,045 - 1} \\ &= 28584,46. \end{aligned}$$

vgl.[1] S. 6-7

4.4 Laufzeit einer Anleihe

Anleihen können unterschiedlich lange angelegt werden. Man unterscheidet zwischen kurz-, mittel- und langfristigen Anleihen.

- kurzfristige Anleihen: haben eine Laufzeit bis zu 4 Jahren

- mittelfristige Anleihen: haben eine Laufzeit zwischen 4 und 8 Jahren

- langfristige Anleihen: haben eine Laufzeit mit mehr als 8 Jahren

vgl.[13] S.19

4.5 Ein Euro heute ist nicht gleich einem Euro morgen

Die Menge Geld die mir heute zur Verfügung steht, kann ich gewinnbringend anlegen. Von heute aus gesehen ist also die gleiche Geldmenge zu einem späteren Zeitpunkt weniger wert. Zahlungen können also nur dann direkt miteinander verglichen werden, wenn dies zum gleichen Zeitpunkt geschieht. Werden Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten getätigt, können sie nur dann miteinander verglichen werden, wenn sie auf- beziehungsweise abgezinst werden.

vgl.[1] S. 9

4.6 Rendite einer Anleihe

Definition 1. „Die Rendite einer Anleihe ist gleich demjenigen Zinssatz, mit dem man alle zukünftigen Zahlungen abzinsen muss, damit deren Summe gerade gleich dem heutigen Kurswert der Anleihe ist. Der Kaufpreis setzt sich zusammen aus dem Kurswert und dem Stückzins.“

[Adelmeyer, M.; Warmuth, E.: *Finanzmathematik für Einsteiger*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 2003, S. 16]

Die Rendite kann mittels folgender Formel berechnet werden:

$$\text{Rendite pro Jahr} = \frac{\text{Zinsbetrag} + (\text{Rückzahlung} - \text{Kurswert})}{\text{Kurswert}} \cdot \frac{365}{\text{Laufzeit in Tagen}} \cdot 100$$

Beispiel 1. *: Ein Investor investiert am 16.01.2008 € 10.000 in eine Anleihe mit 3,5% Jahreskupon und einer Laufzeit von einem Jahr (bis 16.01.2009). Der Kaufkurs beträgt 100,45% und der Rückzahlungswert 100%.*
Kupon: 3,5%, Nominalwert: € 10.000, Kaufkurs: 100,45%, Rückzahlungswert: 100%, Laufzeit: 365 Tage.

$$\textit{Rendite pro Jahr} = \frac{350 + (€\ 10.000 - €\ 10.045)}{€\ 10.045} \cdot \frac{365}{365} \cdot 100 = 3.04\%$$

Die Berechnung der Rendite kann wiederum mit einfachen Computerprogrammen erfolgen (Excel beziehungsweise Open Office-Calc eignen sich sehr gut).
Außerdem gibt es dafür bereits hilfreiche Online-Renditen-Rechner, zum Beispiel unter `http://www.zinsen-berechnen.de/bondrechner.php` oder
`http://www.offerio.de/anleihe-rendite-rechner.php`. Das sind jedoch nur zwei Rechner von mittlerweile vielen.

4.7 Renditengleichung

Definition 2. „Die Rendite einer Anleihe ist die Lösung i der Gleichung:

$$\text{Kurswert} + \text{Stückzins}$$
$$= \frac{1}{(1+i)^{\text{Restlaufzeit}}} \left(\text{Kuponzahlung} \cdot \frac{(1+i)^{\text{aufgerundete Restlaufzeit}} - 1}{i} + \text{Rückzahlung} \right).$$

Der Kuponzins, die Restlaufzeit und die Rendite i beziehen sich dabei alle auf dieselbe Periode. Aufgerundet wird auf die nächste ganze Periode."

[Adelmeyer, M.; Warmuth, E.: *Finanzmathematik für Einsteiger*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 2003, S. 17]

Beispiel 2. *: Ausgehend von den Angaben des vorigen Beispiels berechnen wir die Rendite nun mit Hilfe der Renditengleichung:*
Kupon: 3,5%, Nominalwert: € 10.000, Kaufkurs: 100,45%, Rückzahlungswert: 100%, Laufzeit: 365 Tage, Stückzinsen beim Kauf: € 0, Stückzinsen bei der Rückgabe: € 0, Kursgewinn:€ 45, Kuponzahlung: 35.

$$€\ 10.045 + €\ 0 = \frac{1}{(1+i)^1} \cdot \left(€\ 350 \cdot \frac{(1+i)^1 - 1}{i} + €\ 10.000\right)$$

$$10.045 \cdot i \cdot (1+i) = 350 \cdot ((1+i) - 1) + 10.000 \cdot i$$

$$10.045 \cdot i^2 + 10.045 \cdot i = 350 \cdot i + 10.000 \cdot i$$

Investitions-volumen	Zins-kupon	Markt-zins	Rest-laufzeit	Kurs der Anleihe	Nominalwert der Anleihe	Kurswert der Anleihe
€ 10.000	4%	4%	5 Jahre	100%	€ 10.000	€ 10.000

Tabelle 2: Zinskupon und Marktzins stimmen überein

$$10.045 \cdot i^2 - 305 \cdot i = 0$$
$$i = \frac{305}{10.045} = 0,0304 = 3.04\%$$

4.8 Risiken von Anleihen

Obwohl Anleihen zu den relativ sicheren Anlageformen zählen, sind auch sie leider nicht risikolos. Zu den Risiken einer Anleihe gehören unter anderem das Zinsänderungsrisiko, das Liquiditätsrisiko, das Bonitätsrisiko, das Kündigungsrisiko, das Inflationsrisiko, das Währungsrisiko, das Auslosungsrisiko, das Transferrisiko, das Steuerrisiko, das Abschreibungsrisiko und das Kreditrisiko (auch Ausfallsrisiko genannt).

4.8.1 Das Zinsänderungsrisiko

Der Zinssatz der für eine vergleichbare Anlage bezahlt wird, ist ausschlaggebend für den Wert einer Anleihe. Wenn sich der Zinssatz ändert, ändert sich auch der Wert der Anleihe. Im folgenden erkläre ich drei mögliche Entwicklungen des Wertes der Anleihe:
Der Anleger investiert zum Zeitpunkt t_0 eine gewisse Summe $B(t_0)$ mit einem fixen Zinssatz i über einen Zeitraum von n Jahren. Wenn er die Anleihe nach halber Laufzeit $\frac{n}{2}$ bereits verkaufen will, hängt der Erlös von der Kursänderung ab.

1. Es gibt keine Zinsänderung. In diesem Fall entspricht der Wert der Anleihe dem ursprünglichen Wert und bei einem Verkauf bekommt der Anleger 100% des für diesen Zeitpunkt erwarteten Betrags bezahlt.
   Beispiel A: Ein Investor bezahlt € 10.000 für eine Staatsanleihe, die zehn Jahre lang läuft und eine jährlichen Zinszahlung von 4% (die entspricht dem aktuellen Marktzins) hat. Will der Anleger die Anleihe nach fünf Jahren verkaufen und der Marktzins zu diesem Zeitpunkt ebenfalls 4% beträgt, liegt die Anleihe bei 100% ihres Nominalwertes[2]. Siehe Tabelle 2

2. Der Zinskurs steigt um $k\%$ an. Der Zinssatz zum Zeitpunkt $t_{\frac{n}{2}}$ liegt also bei $(i+k)\%$. Die zum Zeitpunkt t_0 gekaufte Anleihe hat noch immer einen Zinskupon von $i\%$, während eine „aktuelle“ also zum Zeitpunkt $t_{\frac{n}{2}}$ gekaufte Anleihe mit $(i + k)\%$ deutlich mehr wert ist. Bei einem Verkauf muss dieser Unterschied berücksichtigt werden. Da der Zinskupon nicht verändert werden kann,

[2]ist der Geldbetrag, auf den ein Wertpapier lautet

Investitions-volumen	Zins-kupon	Markt-zins	Rest-laufzeit	Kurs der Anleihe	Nominalwert der Anleihe	Kurswert der Anleihe
€ 10.000	4%	5%	5 Jahre	95%	€ 10.000	€ 9.500

Tabelle 3: Verkauf nach fünf Jahren (Marktzins höher als Zinskupon)

Investitions-volumen	Zins-kupon	Markt-zins	Rest-laufzeit	Kurs der Anleihe	Nominalwert der Anleihe	Kurswert der Anleihe
€ 10.000	4%	2,5%	5 Jahre	107,5%	€ 10.000	€ 10.750

Tabelle 4: Verkauf nach fünf Jahren (Marktzins niedriger als Zinskupon)

erfolgt die Anpassung über den Kurs der Anleihe. Der Unterschied zwischen aktuellem Marktzins und Zinskupon der Anleihe beträgt $k\%$ multipiziert mit der Restlaufzeit $\frac{n}{2}$ Jahre ergibt die prozentuellen Zinseinbußen. Die Anleihe ist zu diesem Zeitpunkt also nur noch 100% - $k\% \cdot \frac{n}{2}$ wert.
Beispiel B:Ausgehend von dem vorigen Beispiel gehen wir wieder davon aus, dass ein Investor € 10.000 für eine Staatsanleihe bezahlt, die zehn Jahre lang läuft und eine jährlichen Zinszahlung von 4% (die entspricht dem aktuellen Marktzins) hat. Will der Anleger die Anleihe nach fünf Jahren verkaufen und der Marktzins in diesem Fall auf 5% gestiegen ist, so ist der Wert um 1% pro Jahr für die Restlaufzeit gesunken. Siehe Tabelle 3

3. Der Zinskurs fällt um $g\%$. Der Zinssatz zum Zeitpunkt $t_{\frac{n}{2}}$ liegt also bei $(i-g)\%$. Die zum Zeitpunkt t_0 gekaufte Anleihe hat noch immer einen Zinskupon von $i\%$, während eine zum Zeitpunkt $t_{\frac{n}{2}}$ gekaufte Anleihe mit $(i-g)\%$ weniger wert ist. Bei einem Verkauf bekäme man also mehr als zum Zeitpunkt t_0 erwartet wurde. Die Anleihe ist nach halber Laufzeit auf 100% + $g\% \cdot \frac{n}{2}$ angestiegen.
Beispiel C:Ausgehend von dem vorigen Beispiel gehen wir wieder davon aus, dass ein Investor € 10.000 für eine Staatsanleihe bezahlt, die zehn Jahre lang läuft und eine jährlichen Zinszahlung von 4% hat. Will der Anleger die Anleihe nach fünf Jahren verkaufen und der Marktzins auf 2,5% gefallen ist, so ist der Wert um 1,5% pro Jahr für die Restlaufzeit gesstiegen. Der Kurs der Anleihe liegt nun bei 107,5%. Siehe Tabelle 4

Das Steigen beziehungsweise Fallen des Marktzins während der Laufzeit sind, wie man in *Beispiel A* und *B* deutlich erkennen konnte, ein Risiko beziehungsweise eine Chance für Besitzer von Anleihen. Zusammengefasst kann gesagt werden, dass sich der Ertrag einer Anleihe aus folgenden drei Komponenten zusammensetzt:

- Zinsertrag
- Zinseszinsertrag

Zinsniveau	**steigt**	**fällt**
Zinsertrag	unverändert	unverändert
Zinseszinsertrag	steigt	fällt
Kursänderung	Kurs fällt	Kurs steigt

Tabelle 5: Auswirkungen eines steigenden beziehungsweise fallenden Zinsniveaus

- Kursänderung

Das Zusammenspiel dieser drei Komponenten beschreibt Tabelle 5

vgl. [25] S. 115-118, [39]

4.8.2 Das Liquiditätsrisiko

Unter dem Liquiditätsrisiko versteht man die Gefahr, dass der Verkauf der Anleihe nicht zum jeweiligen Marktpreis realisiert werden kann, sondern lediglich zu einem geringeren Preis (mit Kursabschlägen).
Zur Abschätzung des Liquiditätsrisiko ist ein wichtiger Indikator der „bid-ask-spread“ der Börsenhändler. Er gibt Auskunft über die Differenz zwischen Nachfragepreis („bid-price“) und Angebotspreis(„ask-price“). Je größer diese Spanne ist, desto geringer ist in der Regel die Marktaktivität.
vgl. [3] S. 37-38, [25] S. 120, [34]

4.8.3 Kreditrisiko

„Kreditrisiko definiert sich allgemein als das Risiko, dass vereinbarte Zahlungen nicht, nicht vollständig oder nicht rechtzeitig von einem Zahlungsverpflichteten eingehen.“ [Wenninger, C.: *Markt- und Kreditrisiken für Versicherungsunternehmen*: Quantifizierung und Management. Deutscher Universitäts-Verlag, 1. Auflage, Wiesbaden, 2004]
Aus diesem Grund gibt es Agenturen, die die Kreditwürdigkeit der Herausgeber von Anleihen prüfen. Sie vergeben Bewertungen, die zum Beispiel bei der Agentur „Standard&Poor“ vereinfacht wie folgt aussehen:

- AAA (Triple-A-Anleihen): Bestnote

- AA

- A

- BBB
- BB: Ab der Bewertung BB gelten die Anleihen als riskant
- B
- CCC
- CC
- C: schlechteste Bewertung

Anleihen die eine der drei schlechtesten Noten CCC, CC oder C erhalten, zählen zu den „Junk-Bonds“. Je schlechter eine Anleihe bewertet wird, desto höher muss sie verzinst werden. „Der Begriff des Kreditrisikos umfasst sowohl das Ausfallsrisiko als auch das Bonitätsrisiko.“ [Daldrup, A.: *Konzeption eines integrierten IV-Systems zur ratingbasierten Quantifizierung des regulatorischen und ökonomischen Eigenkapitals im Unternehmenskreditgeschäft unter Berücksichtigung von Basel II.* , Cuvillier Verlag, Göttingen, 2007, S. 10]

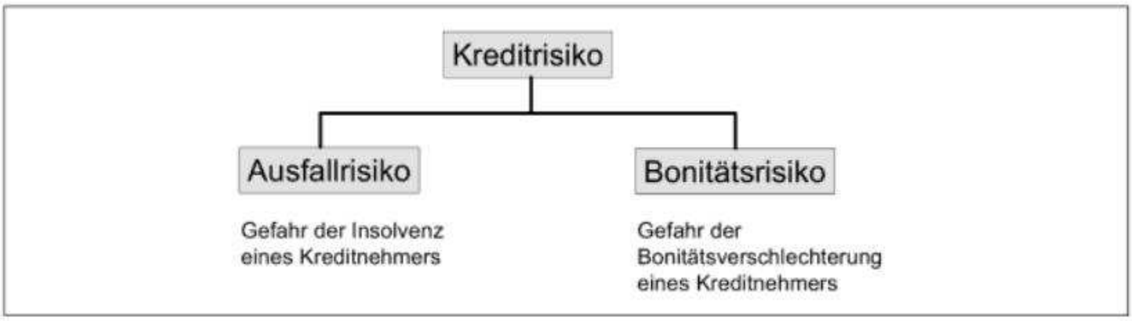

Abbildung 3: Kreditrisiko als Oberbegriff von Ausfalls- und Bonitätsrisiko entnommen aus [4] S. 10

vgl.[1] S.19-20, [30] S.139, [4] S.10

4.8.4 Das Ausfallsrisiko

Das Ausfallsrisiko bezeichnet die Gefahr, dass der Herausgeber der Anleihe seinen Zahlungsverpflichtungen nicht oder nur unvollständig nachkommt. Es besteht also

das Risiko der Insolvenz des Herausgebers.
vgl.[4] S.10

4.8.5 Das Bonitätsrisiko

Das Bonitätsrisiko drückt die Gefahr einer Verschlechterung der Kreditwürdigkeit des Schuldners während der Laufzeit aus. Das Bonitätsrisikos ist also umfassender als das Ausfallsrisiko. Aus diesem Grund gehe ich auf diesen Begriff näher ein.
Es gibt bei Anleihen ein vertragliches Versprechen, so dass der Herausgeber der Anleihe verpflichtet ist, einen exakt festgelegten Zahlungsstrom zu leisten. Leider kann es dennoch vorkommen, dass die Zahlungen nicht oder mit Verspätung erfolgen. Diese Möglichkeit ist jedem Investor bewusst und wird in der Investmententscheidung berücksichtigt, das heißt, sie wird von der erwarteten Zahlung abhängen.

Beispiel 3. *: Zu welchem Preis wird der Markt eine Anleihe aufnehmen, wenn der risikolose Ein-Jahres-Zins 8% beträgt?*
Würde das Bonitätsrisiko mit Null eingeschätzt werden, dann wäre er

$$\frac{€\ 100}{1,08} = €\ 92,59$$

bereit zu zahlen. Hier wäre zugesicherte Rendite gleich erwarteter Rendite.
Gehen die Investoren jedoch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4% davon aus, dass der Herausgeber im nächsten Jahr völlig zahlungsunfähig ist und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6% , dass im nächsten Jahr mittels eines Vergleichs nur mit 50% der ausstehenden Zahlungen gerechnet werden kann, dann ergibt sich eine erwartete Zahlung nach einem Jahr von

$$0,004 \cdot €\ 0 + 0,006 \cdot €\ 50 + 0,99 \cdot €\ 100 = €\ 99,30$$

Wären die Investoren risikoneutral so wären sie in diesem Fall bereit eine Anleihe von

$$\frac{€\ 99,3}{1,08} = €\ 91,94$$

zu bezahlen. Der Markt fordert aber bei der Vermutung eines Risikos eine Prämie, somit wären sie lediglich bereit einen Betrag von € 91,50 zu bezahlen.
Die versprochene Rendite wäre also somit

$$\frac{€\ 100}{€\ 91,5} - 1 = 9,29\%$$

wobei der Markt lediglich mit einer Rendite von

$$\frac{€\ 99,3}{€\ 91,5} - 1 = 8,52\%$$

rechnet. Die realisierte Rendite kann nach den oben erwähnten Annahmen 9,29%, -100% oder -50% betragen.

Leider ist es sehr schwer die Kreditwürdigkeit seines Schuldners nachzuprüfen. Aus diesem Grund gibt es sogenannte „Rating-Agenturen“ , die Kreditwürdigkeitsanalysen durchführen und die Qualität der Schuldner beurteilen und in einer Stufenskala klassifizieren. Die beiden bedeutendsten Agenturen sind „Standard & Poor's“ und „Moody's“. Heutzutage ist es für Herausgeber von Anleihen von großer Bedeutung eine gute Beurteilung von diesen Firmen zu bekommen. Auf internationalen Kapitalmärkten ist ein „Rating“ sogar unumgänglich, denn:

- Je besser die Beurteilung ausfällt, desto günstiger werden die zukünftigen Rückzahlung.

- Viele institutionelle Investoren sind durch das Gesetz dazu verpflichtet nur jene Anleihen in ihr Portfolio aufzunehmen, die eine bestimmte Mindestqualität aufweisen.

- Wenn eine Anleihe gar kein „Rating“ hat, scheint sie nicht auf und wird von den meisten Investoren nicht einmal wahrgenommen. Aus diesem Grund ist selbst ein schlechtes „Rating“ besser als keines.

Die folgende Abbildung 4 gibt einen Überblick über die verwendeten Symbole zur Bonitätsklassifizierung und die Beurteilung der beiden Agenturen „Standard & Poor's“ und „Moody's“. Zur weiteren Differenzierung werden außerdem bei „Standard & Poor's“ die Symbole + und - verwendet, bei „Moody's“ die Zahlen 1,2 und 3. Diese zusätzlichen Zeichen ermöglichen eine weitere Unterscheidung innerhalb der einzelnen Gruppen.
vgl.[25] S. 112-115, [1] S.19-20, , [12] S. 40, [4] S.10

4.8.6 Kündigungsrisiko

Das Kündigungsrisiko beschreibt die Gefahr, dass ein Schuldner, der mit dem Recht auf vorzeitige Rückzahlung ausgestattet ist, das Geld vorzeitig zurückzahlt. Somit hat also der Schuldner die Möglichkeit veränderte Umweltbedingungen zu seinem Vorteil zu nutzen. Bei einer Marktzinssenkung ergeben sich zum Beispiel günstigere Finanzierungsmöglichkeiten als die der bestehende Anleihe. Der Investor hat dadurch den Nachteil, dass er weniger als erwartet ausbezahlt bekommt. Außerdem muss er eine neue Anleihe zu einer geringeren Verzinsung erwerben. Anleihen mit vorzeitigem Kündigungsrecht werden jedoch höher verzinst als Anleihen ohne vorzeitiges Kündigungsrecht.
vgl.[25] S. 118, [27] S. 29 [13]

S&P	Moody	Bonitätsurteil
AAA	Aaa *‚triple A'*	Höchstmögliche Bonitätsstufe, Zins- und Tilgungsleistungen sind extrem gesichert, sehr robust gegenüber negativen gesamtwirtschaftlichen oder branchenspezifischen Entwicklungen
AA	Aa	Bonität deutlich über dem Durchschnitt, Zins- und Tilgungsleistungen sind sehr gut gesichert, robust gegenüber negativen gesamtwirtschaftlichen oder branchenspezifischen Entwicklungen
A	A	Gute Bonität, Zins- und Tilgungsleistungen sind gut gesichert, obgleich gesamtwirtschaftliche oder branchenspezifische negative Entwicklungen sich auf den Schuldner spürbar auswirken können
BBB	Baa	Angemessene Bonität, Fähigkeit zu Zins- und Tilgungsleistungen ist durchschnittlich: Übergang zu spekulativen Papieren, durchaus anfällig gegenüber negativen gesamtwirtschaftlichen oder branchenspezifischen Entwicklungen
BB	Ba	Spekulative Papiere, Zins- und Tilgungsleistungen nur bei positivem gesamtwirtschaftlichem Umfeld gesichert, hohes Maß an Unsicherheit
B	B	Zins- und Tilgungsleistungen auf längere Frist nicht gesichert
CCC	Caa	Schwaches Standing, Zahlungsschwierigkeiten durchaus absehbar
CC	Ca	Hoch spekulative Papiere mit offenkundiger Gefährdung oder bereits mit Zahlungen im Verzug
C	C	Schuldner ist bereits mit Zahlungen im Verzug, sehr geringe Wahrscheinlichkeit dafür, je wieder Investment-Standing zu erreichen
D (nur S&P)		Schuldner ist zahlungsunfähig, alle Zahlungen sind in Verzug

Abbildung 4: Bonitäts-Klassifizierung entnommen aus [25] S. 115

4.8.7 Inflationsrisiko

Inflation verändert die Kaufkraft von Geld und verhält sich wie Verzinsung nur umgekehrt. Wenn die Inflation in einem Jahr zum Beispiel 10% beträgt, dann kosten jene Waren, die zu Beginn des Jahres um € 100 verkauft werden, am Ende des Jahres € 110. Das bedeutet, dass wir nur noch 100/110 der Güter im Vergleich zum Jahresbeginn erwerben können.

Satz 2. *„The Purchasing Power Theorem“*
Wenn die jährliche Inflationsrate i_{inf} ist, dann reduziert sich die Kaufkraft P_0 nach n Jahren auf

$$P_n = P_0 \left(\frac{1}{1 + i_{\text{inf}}} \right)^n .$$

Die Inflation wirkt sich natürlich auch auf den Wert einer Anleihe aus. Wenn die Inflation so ansteigt, dass sie höher als die Verzinsung der Anleihe ist, so kommt es zu einem realen Wertverlust obwohl der nominale Rückzahlungspreis höher als der Ausgabepreis ist. Besondere Bedeutung haben Inflationseffekte wenn man die steuerlichen Aspekte mit einbezieht. Das folgende Beispiel verdeutlicht dies:

Beispiel 4. *„Der aktuelle Zins (flache Zinsstruktur) liege bei 8% und die für die nächste Periode erwartete Geldentwertung mache 4% aus. Ein Investor, der für ein Jahr anlegen will und Zinseinkünfte mit 30% versteuert, kann eine Anleihe mit 7% Jahres-Kupon und drei Jahren Laufzeit zu 97, 42 erwerben. Betrachten wir seine Rendite unter verschiedenen Zins- und Inflationsszenarien:*
Unter der Annahme sich nicht ändernder Zinsen und Inflationsraten erzielt er eine Rendite in Höhe von

nominal, vor Steuer: $$\frac{(98,22+7)}{97,42} = 8,00\%$$

nominal, nach Steuer: $$\frac{(98,22+0,7\cdot 7)}{97,42} = 5,84\%$$

real, vor Steuer: $$\frac{(98,22+7)}{97,42\cdot 1,04} = 3,85\%$$

real, nach Steuer: $$\frac{(98,22+0,7\cdot 7)}{97,42\cdot 1,04} = 1,78\%$$

Unterstellt man hingegen im Jahr der Anlage eine Inflationsrate von 6% statt der angenommenen 4%, so ergäbe sich bei unverändertem Zinssatz eine Rendite in der Höhe von

$$\textit{real, vor Steuer:} \qquad \frac{(98,22+7)}{97,42 \cdot 1,06} = 1,89\%$$

$$\textit{real, nach Steuer:} \qquad \frac{(98,22+0,7 \cdot 7)}{97,42 \cdot 1,06} = -0,15\%$$

Wenn man unterstellt, dass mit gestiegener Inflationsrate auch der Zinssatz auf 10% gestiegen und damit der Kurs entsprechend zurückgegangen wäre, eine Rendite in der Höhe von

$$\textit{real, vor Steuer:} \qquad \frac{(94,79+7)}{97,42 \cdot 1,06} = -1,43\%$$

$$\textit{real, nach Steuer:} \qquad \frac{(94,79+0,7 \cdot 7)}{97,42 \cdot 1,06} = -3,46\%$$

Nach dem „internationalen Fisher-Effekt“ müssten auf den internationalen Geld- und Kapitalmärkten Nominalzinsen, erwartete Inflationsraten und Währungsparitäten sich derart im Gleichgewicht befinden, dass die realen Zinsen überall gleich sind.“

[Schredelseker, K.: *Grundlagen der Finanzwirtschaft*: Ein informationsökonomischer Zugang. Oldenburg Wissenschaftsverlag GmbH, München, 2002, S.119]

vgl. [16] S. 45, [25] S. 118-119 [38]

4.8.8 Währungsrisiko

Bei ausländischen Wertpapieren muss mit Währungsrisiken gerechnet werden.
„Unter Währungsrisiko versteht man die Volität (oder Varianz), welche durch die Umrechnung der lokalen Renditen einer Anlage (beispielsweise des US Aktienmarktes in US-$) in eine bestimmte Referenzwährung (beispielsweise Schweizerfranken) entsteht.“

[Drummen, M.; Zimmermann, H.: *Portfolioeffekte des Währungsrisikos.* in Finanzmarkt und Portfolio Management, Nr. 1, 6. Jg, 1992, S. 82]

Investiert man zum Beispiel in amerikanische Wertpapiere, so verliert diese Anlage an Wert, wenn der Euro gegenüber dem US-Dollar steigt. Fällt hingegen der Euro gegenüber dem US-Dollar, so gewinnen die Wertpapiere an Wert. Das Währungsrisiko kann sich also auch positiv auswirken.

Die Kurse der Wertpapiere richten sich immer nach den Kursen der Heimatbörse. Das Währungsrisiko besteht also auch wenn ausländische Wertpapiere an der heimischen Börse gehandelt werden.
Komponenten die Einfluss auf den Devisenkurs eines Landes haben:

- Inflation des Landes
- Zinsdifferenz im Ausland
- Einschätzung der Konjunkturentwicklung
- weltpolitische Situation
- Sicherheit der Geldanlage
- psychologische Faktoren
- ...

Die Terminmärkte bieten eine Vielzahl von Instrumenten an um die Währungsrisiken einzugrenzen und zu steuern. Dazu gehören zum Beispiel Währungsfutures, Forwards, Optionen und Swaps.

vgl. [25] S.119-120, [13] S. 10-11, [8] S. 81-82

4.8.9 Auslosungsrisiko

Häufig erfolgt die Rückzahlung einer Anleihe in bestimmten Teilbeträgen (Serien), die durch Auslosung, also zufällig, erfolgen. Es besteht also die Unsicherheit, dass die Anleihe zu früh oder zu spät zurückgezahlt wird.
„Unter Auslosungsrisiko versteht man das Risiko, daß die Rückzahlung bestimmter Serien einer Tilgungsanleihe nicht zu fixierten Terminen, sondern zu erwarteten Zeitpunkten erfolgt.“ [Steiner, P.; Uhlir, H.: *Wertpapieranalyse*. Physica-Verlag, 4. Auflage, Heidelberg, 2001, S. 52]
Damit kann sich die Laufzeit und demzufolge die Struktur des ganzen Zahlungsstroms verändern.
vgl. [25] S.120, [28] S. 52

4.8.10 Transferrisiko

Das Transferrisiko impliziert, dass der Schuldner, trotz hervorragender Bonität und Zahlungsbereitschaft, die Zahlungen aufgrund administrativer Maßnahmen (zum Beispiel Divisenverkehrsbeschränkungen) nicht erbringen kann. Die gesamtwirtschaftliche und politische Situation spielt hierbei eine Rolle. Die politische Komponente

spiegelt sich wieder, wenn der Staat die privaten Schuldner daran hindert, ihre Auslandsschulden abzubezahlen. Wenn der Staat gesamtwirtschaftlich in einer schlechten Situation ist, ist es möglich, dass er gar nicht in der Lage ist, die Schuldner mit Devisen zu versorgen.
Die folgende Abbildung 5 stellt die Einordnung des Transferrisikos dar:

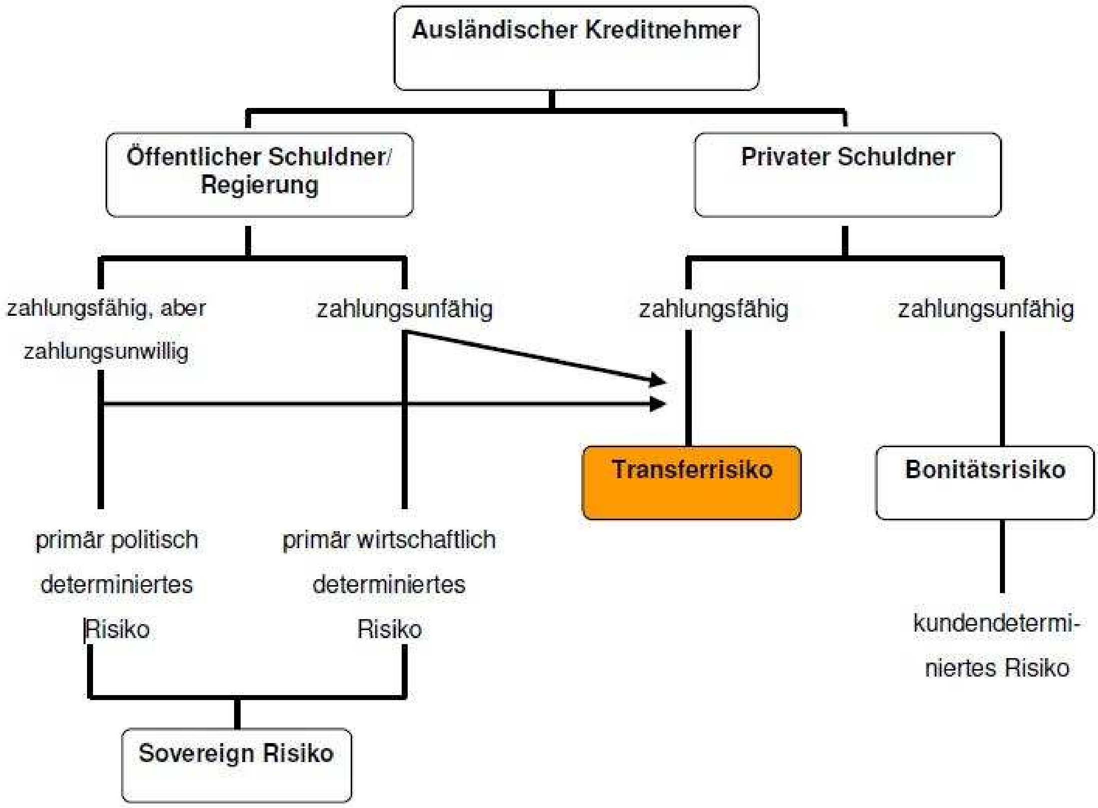

Abbildung 5: Grafische Einordnung des Transferrisikos entnommen aus [10] S. 33

vgl. [25] S.120, [10] S.31-33

4.8.11 Steuerrisiko

Die Gefahr, dass steuerliche Veränderungen auftreten können, nennt man Steuerrisiko. Die Einführung einer Quellensteuer kann zum Beispiel zu einem niedrigeren Nettozufluss als erwartet führen. Zudem reagieren Märkte sehr empfindlich auf geplante Steueränderungen und dies kann sich erheblich auf die Kurse auswirken. Bei Anlagen mit langen Beteiligungszeiträumen kann es vorkommen, dass künftige Steuerrechtsänderungen die Prospektprognosen nachteilig beeinflussen.
vgl. [25] S.120, [20] S.34

4.8.12 Abschreibungsrisiko

Eine Erhöhung des Marktzins birgt die Gefahr eines Wertverlustes, dieses Risiko bezeichnet man als Abschreibungsrisiko. Wenn die Anleihenkurse, aufgrund eines steigenden Marktzinsniveaus, stark fallen, dann entsteht wegen dem Niederstwertprinzips in der Bilanz ein Abschreibungsbedarf, der zu einer unerwünschten Gewinnminderung führen kann.
vgl.[25] S.120

5 Aktien

5.1 Was sind Aktien?

Aktien sind Eigentumsanteile an einem Unternehmen (Aktiengesellschaft) und sie dokumentieren, dass deren Inhaber eine gewisse Geldmenge in die Firma eingebracht hat. Die Summe aller Aktien bildet das Grundkapital der Firma. Inhaber von Aktien werden Aktionäre genannt und haben Anspruch auf Mitsprache und Gewinnbeteiligung. Die Mitsprache können sie auf der Hauptversammlung geltend machen und die Gewinnbeteiligung wird in Form von Dividen ausgezahlt. Die Höhe der Dividen ist vom Erfolg des Unternehmens abhängig.
Eine Aktiengesellschafft besitzt drei wichtige Gremien: Die Hauptversammlung, der Aufsichtsrat und der Vorstand. Der Vorstand trägt die Hauptverantwortung für Erfolg oder Misserfolg, denn er leitet die Geschäfte der Firma. Die Vorstandsmitglieder sind deren oberste Manager. Schwerwiegende Entscheidungen müssen mit dem Aufsichtsrat besprochen werden. Dieser überwacht die Geschäftstätigkeit der Firma im Auftrag der Aktionäre und der Belegschaft.
Die Hauptversammlung findet in der Regel einmal pro Jahr statt und setzt sich aus allen Aktionären zusammen. Dort legen sie die Höhe der Dividen fest und wählen die Mitglieder des Aufsichtsrats.

vgl.[1] S.49-50 [5] S. 7-8

Zusammengefasst hat man mit dem Besitz einer Aktie folgende Rechte:

- Anspruch auf prozentualen Gewinn.
- Teilnahme- und Stimmrecht in der Hauptversammlung.
- Antrags-, Auskunfts- und Anfechtungsrecht.
- Recht auf Erlösanteil bei einer Liquidation[3].
- Anspruch auf Bezugsrecht bei der Ausgabe neuer Aktien.

vgl. [25] S. 80

5.2 Arten von Aktien

Üblicherweise unterscheidet man zwischen sechs verschiedenen Arten von Aktien:

[3]„Auflösung einer Handelsgesellschaft, um die Gläubiger befriedigen und das Restvermögen an die Gesellschafter (Gesellschaft) verteilen zu können.“ [42]

- **Stammaktie** : Ist die Urform von Aktien. Dem Aktionär stehen eine Gewinnbeteiligung, ein Stimmrecht an der Hauptversammlung und das Recht auf Auskunftserteilung zu.

- **Vorzugsaktie**: Besitzer dieser Aktie bekommen meist eine höhere Dividenauszahlung, allerdings haben sie kein Stimmrecht in der Hauptversammlung.

- **Inhaberaktie**: Diese Aktien werden anonym verkauft, sind also nicht auf eine bestimmte Person angeschrieben und können deshalb ohne großen Aufwand weiterverkauft werden. Inhaberaktien werden vor allem an der Börse gehandelt.

- **Namensaktie**: Sie ist das Gegenteil zur Inhaberaktie. Der Name des Eigentümers wird vermerkt und sogar ins Aktienbuch der Gesellschaft eingetragen. Bei einem Wechsel des Besitzers der Aktie muss der Name glöscht werden. Der Verkauf ist also etwas aufwändiger, jedoch hat man Recht auf die Teilnahme an der Hauptversammlung.
  Bei einer „vinkulierten Namensaktie“ ist bei einem Wechsel des Besitzers außerdem noch die Zustimmung der Aktiengesellschaft notwendig.

- **Nennwertaktie**: Jede einzelne Aktie lautet auf einen Nennwert. Das in der Bilanz ausgewiesene Grundkapital der Gesellschaft ergibt sich durch die Summe der Nennwerte aller ausgegebenen Aktien.

- **Stückaktie**: Hier ergibt sich der Anteil aus der Zahl der ausgegebenen Aktien. Für den Aktionär spielt der Unterschied zwischen Nennwertaktie und Stückaktie keine Rolle.

vgl. [5] S. 8, [25] S. 80-82

5.3 Handel mit Aktien

Börsen sind organisierte Aktienmärkte wo Aktien großer Unternehmen gehandelt werden. Das Börsengesetz gibt gesetzliche Richtlinien für den Handel mit Aktien vor. Darin stehen allgemeine Bestimmungen über den Aufbau einer Börse, den Geschäftsablauf und die Börsenaufsicht. Es gibt Präsenzbörsen und Computerbörsen:

- **Präsenzbörsen**: Händler treffen sich im Börsensaal um Geschäfte abzuschließen. Das sind zum Beispiel die New York Stock Exchange (NYSE) die Frankfurter Wertpapierbörse (FWB),...

- **Computerbörsen**: Hier werden Kauf- und Verkaufsanträge durch ein elektronisches Handelssystem automatisch verwaltet und zum Abschluss gebracht. (Beispiel: XETRA)

Auf dem Börsenparkett dürfen Geschäfte nur von registrierten Börsenmitgliedern wie Banken und Wertpapierhändler abgeschlossen werden.
„An der Börse treten Handelsmittler, die so genannten Skontoführer, als Vermittler zwischen Händler der verschiedenen Banken und versuchen, innerhalb kürzester Zeit so viele Geschäfte wie Möglich zu vermitteln.“ [Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, S.9]
Heutzutage kann das Börsengeschehen weltweit über das Internet in realer Zeit mitverfolgt werden, zum Beispiel unter www.nyse.com (New York), www.deutsche-boerse.com (Frankfurt, XETRA) und www.wienerborse.at (Wien).

vgl. [5] S. 9 [1] S.50

5.4 Aktiencharts

Charts sind graphische Darstellungen des Kursverlaufs von Aktien. Es gibt Liniencharts und Candlestickcharts (siehe Abbildung 6).
Liniencharts: Hier werden Kursdaten (Punkte) durch Linien miteinander verbunden.
Candlestickcharts: Hier geben die Enden der Rechtecke die Eröffnungs- und Schlusskurse eines Tages wieder. Wenn der Eröffnungskurs über dem Schlusskurs liegt, dann sind die Rechtecke farbig gefüllt. Liegt umgekehrt der Schlusskurs über dem Eröffnungskurs, dann bleibt der Inhalt des Rechtecks weiß. Die Höchst- beziehungsweise Tiefstkurse sind durch eine Linie an den Enden entweder oberhalb oder unterhalb gekennzeichnet.

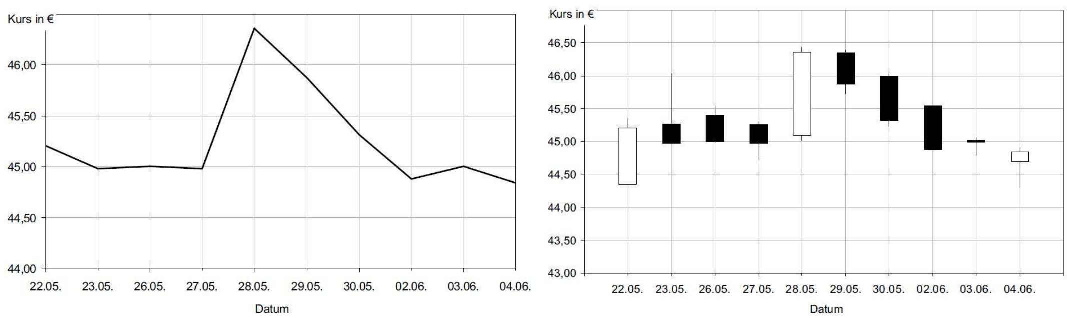

Abbildung 6: Linienchart (links) beziehungsweise Candlestickchart (rechts) der Adidas-Aktie im Zeitraum vom 22.05.08 bis 04.06.08. Quelle: [5] S. 10

vgl. [5] S. 10

5.5 Kurswert und Preis einer Aktie

Der Nennwert einer Aktie ist gegen vieler Vermutungen nicht dem Wert einer Aktie gleichzusetzen, da das Grundkapital nur einen unter mehreren Komponenten des bilanziellen Eigenkapitals darstellt. Diese Tatsache wird in der Bilanzkursrechnung mitberücksichtigt. Der **Bilanzkurs** gibt an, wie hoch der Wert der Aktie sein müsste, wenn alle Vermögenswerte und Schulden des Unternehmens miteinbezogen werden:

$$\text{Bilanzkurs} = \frac{100 \cdot \text{Eigenkapital (=Grundkapital+Rücklagen+Gewinn)}}{\text{Grundkapital}}$$

Für ein Unternehmen ist es, aufgrund verpflichtender handelsrechtlicher Normen, nahezu unmöglich, dass ihre Bilanz diese Bedingung erfüllt. Der Bilanzkurs spielt allerdings in der Finanzanalyse eine wichtige Rolle. Der Preis (Kurs) ergibt sich jedoch durch das „Angebot und Nachfrage“ - Prinzip. Der „Skontoführer“ sammelt alle eingehenden Kauf- und Verkaufsanträge in dem Orderbuch. Das Orderbuch wird im Börsenverlauf regelmäßig geschlossen. Aus den Werten wird der Aktienkurs bestimmt.
Die beiden wichtigsten Techniken zur Kursermittlung sind laut Schredelseker das **Auktionsverfahren** und das **Market-maker-Verfahren**.

5.5.1 Auktionsverfahren

„Beim Auktionsverfahren ergibt sich der Kurs nach dem Meistausführungsprinzip als derjenige Preis, bei dem ein Maximum an Wertpapieren umgesetzt werden kann.“ [Schredelseker, K.: *Grundlagen der Finanzwirtschaft*: Ein informationsökonomischer Zugang. Oldenburg Wissenschaftsverlag GmbH, München, 2002, S. 83]

5.5.2 Market-maker-Verfahren

Hierbei verpflichten sich bestimmte Marktteilnehmer jederzeit bindende An- und Verkaufspreise zu stellen, um die Marktliquidität jederzeit zu garantieren.
vgl. [5] S. 11-12, [25] S. 82-84

5.6 Rendite einer Aktie

Die Rendite ist eine wichtige Kenngröße am Aktienmarkt, denn sie ermöglicht es Aussagen über den Ertrag einer Aktie zu machen und verschiedene Aktien miteinander zu vergleichen. Es gibt die einfache und die logarithmische Rendite.

Definition 3. (Rendite). „Die einfache Rendite E_a^b im Zeitraum $[t_a;t_b]$ wird aus den Kursen S_a am Anfang und S_b am Ende des Zeitraumes gemäß der folgenden Formel berechnet:

$$E_a^b = \frac{S_b - S_a}{S_a}.$$

Die logarithmische Rendite L_a^b im Zeitraum $[t_a;t_b]$ wird aus den Kursen S_a und S_b wie folgt berechnet:

$$L_a^b = \ln\left(\frac{S_b}{S_a}\right).“$$

[Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, S.15]

Die einfache Rendite gibt das Verhältnis zwischen Gewinn beziehungsweise Verlust und Einsatz an (meist in Prozent angegeben) und ist daher sehr anschaulich. Die logarithmische Rendite hat jedoch folgende Vorteile:

- **Symmetrieeigenschaft der logarithmischen Rendite**:

  Da die logarithmischen Rendite symmetrisch bezüglich Null liegen, kann die positive beziehungsweise negative logarithmische Rendite beliebig groß beziehungsweise klein werden.
  Die Symmetrieeigenschaft gilt aufgrund des folgenden Logarithmengesetzes:

  $$\forall x \in \mathbb{R}_+ : \qquad \ln x = -\ln(\frac{1}{x}).$$

- **Additivitätseigenschaft der logarithmischen Rendite**:

  „Wird ein Zeitraum in Teilzeiträume unterteilt, so ist die logarithmische Rendite über den gesamten Zeitraum gleich der Summe der logarithmischen Renditen über die Teilzeiträume.“ [Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, S. 55]
  Diese Eigenschaft gilt aufgrund des folgenden Logarithmengesetzes:

  $$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \qquad \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y.$$

vgl. [5] S. 15-16, [1] S.54-55, [17] S. 14

5.7 Anwendung der Statistik auf Aktienmärkte

Zu den wichtigsten Kenngrößen gehören unter anderem die **Drift** und die **Volatilität** einer Aktie. Durch diese beiden Größen ist man in der Lage statistische Aussagen über die Kursentwicklung zu machen.
Die Drift (das arithmetische Mittel) gibt die durchschnittliche Kursänderung pro Zeitraum an. Damit stellt es ein Trendmaß für die Entwicklung des Aktienkurses dar.
Die Volatilität (Standardabweichung) gibt die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Kursänderungen vom Mittelwert an. Je größer die Standardabweichung ist,

desto mehr schlägt der Aktienkurs vom Mittelwert nach oben oder unten aus. Einerseits steigt in diesem Fall die Chance auf Gewinne, andererseits steigt jedoch auch gleichermaßen das Risiko von Verlusten. Die Standardabweichung stellt also ein Chancen- und Risikomaß dar.

Definition 4. (Drift) x_1, x_2,...,x_n sind die letzten n logarithmischen Rendite einer Aktie (auf den gleichen Zeitraum bezogen). Das arithmetische Mittel

$$\bar{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

wird als **Drift** der Aktie für diesen Zeitraum bezeichnet.

Definition 5. (Volatilität) x_1, x_2,...,x_n sind die letzten n logarithmischen Rendite einer Aktie (auf den gleichen Zeitraum bezogen). Die empirische Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{\mu})^2 + (x_2 - \bar{\mu})^2 + ... + (x_n - \bar{\mu})^2}{n}}$$

wird als **Volatilität** der Aktie für diesen Zeitraum bezeichnet.

In der angegebenen Literatur wird diese Formel zur Berechnung der Volatilität angegeben. Einige Statistik-Bücher (zum Beispiel [21] S. 53 oder [9] S. 69) definieren die Standardabweichung jedoch folgendermaßen:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{\mu})^2 + (x_2 - \bar{\mu})^2 + ... + (x_n - \bar{\mu})^2}{n-1}}.$$

Ich verwende jedoch in der gesamten Arbeit lediglich die erste Formel.

Da die Renditen von einem bestimmten Zeitraum abhängen, beziehen sich auch das arithmetische Mittel und die Standardabweichung auf einen festgelegten Zeitraum. Folgende Gesetzmäßigkeit verhilft nun dazu Kenngrößen bezogen auf einen Zeitraum in Kenngrößen bezogen auf einen anderen Zeitraum umzurechnen:

Satz 3. *Die Drift $\bar{\mu}_1$ und die Volatilität σ_1 einer Aktie bezieht sich auf einen Zeitraum der Dauer T_1 und die Drift $\bar{\mu}_2$ und die Volatilität σ_2 einer Aktie bezogen auf einen anderen Zeitraum der Dauer T_2. Dann gilt:*

$$(a) \qquad \bar{\mu}_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot \bar{\mu}_1.$$

Ist zudem die Korrelation zwischen den Renditen annähernd null, dann gilt näherungsweise:

$$(b) \qquad \sigma_2 \approx \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \sigma_1.$$

Beweis. (a) Zu zeigen: $\bar{\mu_2} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \bar{\mu_1}$.
Sei $T = n \cdot T_1 = m \cdot T_2$ die Dauer des gesamten Zeitraumes der zurückliegend betrachteten Renditen.

$$\Rightarrow \qquad \frac{n}{m} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

Die n aufeinanderfolgenden Rendite bezogen auf einen Zeitraum der Dauer T_1 bezeichenen wir mit x_1, x_2,...,x_n und die Drift mit $\bar{\mu_1}$ und die m aufeinanderfolgenden Rendite bezogen auf einen Zeitraum der Dauer T_2 bezeichenen wir mit y_1, y_2,...,y_m und die Drift mit $\bar{\mu_2}$. Aufgrund der Additivität der logarithmischen Renditen gilt daher:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = y_1 + y_2 + ... + y_m. \qquad (2)$$

$$\text{wegen (2)} \Rightarrow \quad \bar{\mu_2} = \frac{y_1 + y_2 + ... + y_m}{m} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{m}$$

$$= \frac{n}{n} \cdot \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{n}{m} \cdot \bar{\mu_1}$$

$$= \frac{T_2}{T_1} \cdot \bar{\mu_1}.$$

□

(b) Zu zeigen: $\sigma_2 \approx \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \sigma_1$.

Der Einfachheit halber zeigen wir diese Behauptung für einen konkreten Fall, der sich Verallgemeinern lässt.
Zwölf Zweiwochenrenditen werden mit x_1, x_2,...,x_{12}, deren Drift mit $\bar{\mu_1}$ und die Volatilität mit σ_1 bezeichnet und sechs Vierwochenrenditen werden mit y_1, y_2,...,y_6 , deren Drift mit $\bar{\mu_2}$ und die Volatilität mit σ_2 bezeichnet.
Sei wiederum $T = n \cdot T_1 = m \cdot T_2$ die Dauer des gesamten Zeitraumes der zurückliegend betrachteten Renditen.

$$\Rightarrow \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{n}{m} = \frac{12}{6} = 2. \qquad (1)$$

Aufgrund der Additivität der logarithmischen Renditen gilt daher:

$$y_1 = x_1 + x_2, ..., y_6 = x_{11} + x_{12} \qquad (2)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(y_1 - \bar{\mu_2})^2 + (y_2 - \bar{\mu_2})^2 + ... + (y_6 - \bar{\mu_2})^2}{6}$$

$$= \frac{[(x_1 + x_2) - 2\bar{\mu_1}]^2 + [(x_3 + x_4) - 2\bar{\mu_1}]^2 + ... + [(x_{11} + x_{12}) - 2\bar{\mu_1}]^2}{6}$$

$$= \frac{[(x_1 - \bar{\mu_1}) + (x_2 - \bar{\mu_1})]^2 + [(x_3 - \bar{\mu_1}) + (x_4 - \bar{\mu_1})]^2 + ... + [(x_{11} - \bar{\mu_1}) + (x_{12} - \bar{\mu_1})]^2}{6}.$$

Durch Ausmultiplizeren und Vereinfachen des Zählers erhält man:

$$= \frac{(x_1 - \bar{\mu_1})^2 + ... + (x_{12} - \bar{\mu_1})^2 + 2 \cdot [(x_1 - \bar{\mu_1}) \cdot (x_2 - \bar{\mu_1}) + ... + (x_{11} - \bar{\mu_1}) \cdot (x_{12} - \bar{\mu_1})]}{6}.$$

Strebt $(x_1 - \bar{\mu_1}) \cdot (x_2 - \bar{\mu_1}) + ... + (x_{11} - \bar{\mu_1}) \cdot (x_{12} - \bar{\mu_1})$ gegen 0, dann erhält man

$$= \frac{(x_1 - \bar{\mu_1})^2 + (x_2 - \bar{\mu_1})^2 + ... + (x_{12} - \bar{\mu_1})^2}{6} = 2 \cdot \frac{(x_1 - \bar{\mu_1})^2 + (x_2 - \bar{\mu_1})^2 + ... + (x_{12} - \bar{\mu_1})^2}{12}.$$

$$= 2 \cdot \sigma_1^2.$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_2 = \sqrt{2} \cdot \sigma_1.$$

Verallgemeinert folgt daraus:

$$\Rightarrow \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \sigma_1.$$

□

Statistische Daten können Aufschluss über das Verhalten einzelner Aktien geben.

Beispiel 5. *: Abbildung 7 zeigt die logarithmischen Wochenrenditen und Tabelle 6 die Häufigkeitsverteilung der Wochenrenditen der DaimlerChrysler-Aktie von Jänner bis November 2001.*

Das arithmetische Mittel der Renditen beträgt:

$$\bar{\mu} = \frac{0,031 + (-0,055) + 0,101 + ... + (-0,048)}{48} = 0,001.$$

Die Standardabweichung der Renditen beträgt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0,031 - 0,001)^2 + (-0,055 - 0,001)^2 + ... + (-0,048 - 0,001)^2}{48}} = 0,070.$$

Die Renditen liegen ziemlich symmetrisch um $\bar{\mu}$, 47 der 48 Renditen liegen zwischen $\bar{\mu} - 2\sigma$ und $\bar{\mu} + 2\sigma$ und 35 Renditen liegen sogar zwischen $\bar{\mu} - \sigma$ und $\bar{\mu} + \sigma$ (das sind mehr als $\frac{2}{3}$ aller Rendite).

vgl. [5] S. 16-24 [1] S.56-60

Woche Nr.	Datum	Rendite
0	29.12.2000	
1	05.01.2001	0,031
2	12.01.2001	-0,055
3	19.01.2001	0,101
4	26.01.2001	0,081
5	02.02.2001	-0,070
6	09.02.2001	0,060
7	16.02.2001	0,048
8	23.02.2001	-0,043
9	02.03.2001	0,000
10	09.03.2001	0,060
11	16.03.2001	-0,091
12	23.03.2001	-0,034
13	30.03.2001	0,016
14	06.04.2001	0,026
15	13.04.2001	0,019
16	20.04.2001	0,047
17	27.04.2001	-0,009
18	04.05.2001	0,047
19	11.05.2001	0,000
20	18.05.2001	-0,002
21	25.05.2001	-0,011
22	01.06.2001	-0,051
23	08.06.2001	0,001
24	15.06.2001	-0,052
25	22.06.2001	0,014
26	29.06.2001	0,051
27	06.07.2001	-0,011
28	13.07.2001	0,070
29	20.07.2001	0,001
30	27.07.2001	-0,020
31	03.08.2001	-0,040
32	10.08.2001	-0,032
33	17.08.2001	-0,096
34	24.08.2001	0,080
35	31.08.2001	-0,071
36	07.09.2001	-0,064
37	14.09.2001	-0,256
38	21.09.2001	-0,125
39	28.09.2001	0,057
40	05.10.2001	0,125
41	12.10.2001	0,031
42	19.10.2001	-0,017
43	26.10.2001	0,126
44	02.11.2001	-0,082
45	09.11.2001	0,056
46	16.11.2001	0,077
47	23.11.2001	0,096
48	30.11.2001	-0,048

Abbildung 7: Wochenrenditen der DaimlerChrysler-Aktie vgl. [1] S. 52

Renditebereich	Anzahl Renditen	Relative Häufigkeit
-0,300 bis -0,251	1	0,02
-0,250 bis -0,201	0	0,00
-0,200 bis -0,151	0	0,00
-0,150 bis -0,101	1	0,02
-0,100 bis -0,051	9	0,19
-0,050 bis -0,001	11	0,23
0,000 bis 0,049	13	0,27
0,050 bis 0,099	10	0,21
0,100 bis 0,149	3	0,06
0,150 bis 0,199	0	0,00
0,200 bis 0,249	0	0,00
0,250 bis 0,300	0	0,00

Tabelle 6: Häufigkeitsverteilung der logarithmischen Wochenrenditen der DaimlerChrysler-Aktie vgl. [1] S.56

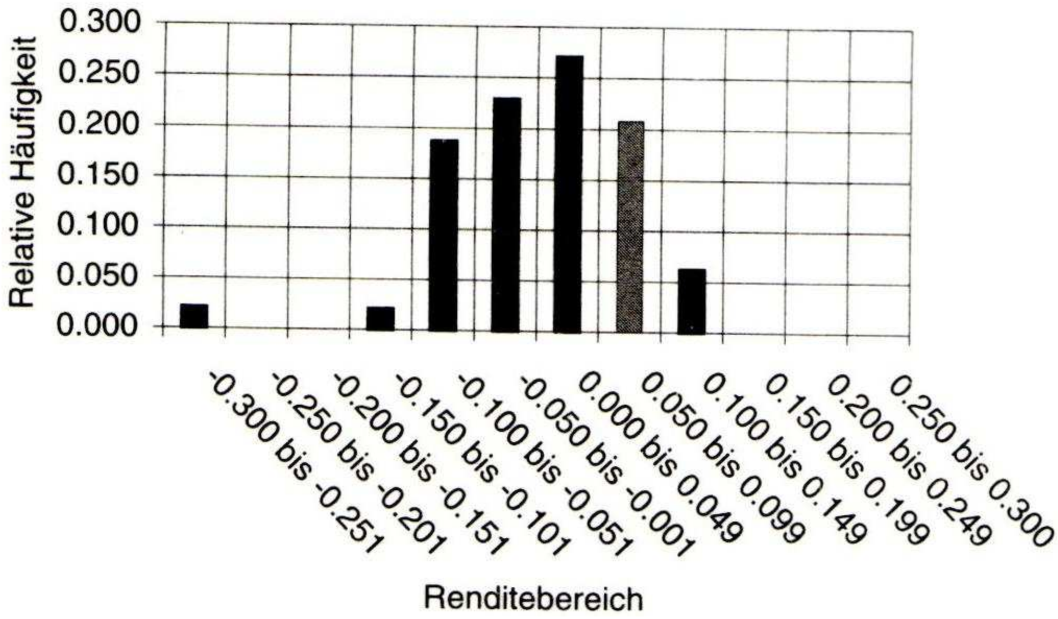

Abbildung 8: Häufigkeitsdiagramm der logarithmischen Wochenrendite der DaimlerChrysler-Aktie, entnommen aus [1] S. 56

5.8 Random-Walk-Modell

„Die Random-Walk-Theorie, häufig auch als „Theorie der symmetrischen Irrfahrt“ bezeichnet, besagt, dass die Verläufe von Aktienkursen nur durch Zufallsprozesse beschrieben werden können.“[32]
Laut Schredelseker behauptet die Random-Walk-Theorie des Weiteren, dass zeitlich aufeinanderfolgende Preisänderungen statisch voneinander unabhängig sind und ihr Erscheinungsbild somit einem durch einen Zufallsmechanismus erzeugten Zahlenreihe gleichen.
Im Random-Walk-Modell werden drei Modellannahmen für das tatsächliche Kursgeschehen getroffen:

- *1. Modellannahme*: Der betrachtete Zeitraum mit Dauer T wird in n Perioden unterteilt, die jeweils $\frac{T}{n}$ lang sind. Der Aktienkurs ändert sich ausschließlich am Ende einer Periode, also zu den Zeitpunkten $\frac{T}{n}$, $2 \cdot \frac{T}{n}$,...,T.

- *2. Modellannahme*: Der Kurs S kann nach jeder Kursänderung nur zwei Werte annehmen:
  uS wenn er gestiegen ist oder dS wenn er gesunken ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Aufwärtsbewegung kommt, beträgt dabei immer p, die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Abwärtsbewegung kommt, beträgt immer $1-p$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind $0 < d < u$ und der Aktienkurs S_0 größer null.

- *3. Modellannahme*: Der Aktienkurs steigt beziehungsweise sinkt in jedem Teilintervall unabhänging vom bisherigen Kursverlauf.

Die folgende Abbildung 9 stellt ein allgemeines Baumdiagramm für die Kursentwicklung einer Aktie in drei Perioden dar. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt der Aktienkurs

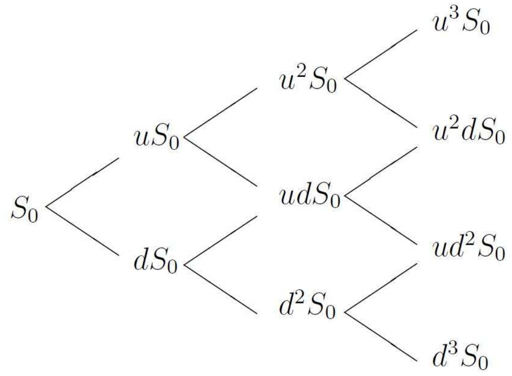

Abbildung 9: Baumdiagramm für die Kursentwicklung einer Aktie, entnommen aus [5] S. 25

bei S_0. Nach drei Perioden der Länge $\frac{T}{3}$ also zum Zeitpunkt $t = T$ liegt der Aktienkurs bei einem der vier möglichen Werte u^3S_0, u^2dS_0, ud^2S_0 oder d^3S_0. Mithilfe der Pfadregel ergeben sich das Erreichen dieser Werte folgende Wahrscheinlichkeiten:

$P_{(u^3S_0)} = p \cdot p \cdot p = \mathbf{p^3}$

$P_{(u^2dS_0)} = p^2 \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p^2 = \mathbf{3 \cdot p^2 \cdot (1\text{-}p)}$

$P_{(ud^2S_0)} = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot p \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = \mathbf{3 \cdot p \cdot (1\text{-}p)^2}$

$P_{(d^3S_0)} = (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) = \mathbf{(1\text{-}p)^3}$

wobei $P_{(u^3S_0)}$ = Wahrscheinlichkeit für u^3S_0, $P_{(u^2dS_0)}$ = Wahrscheinlichkeit für u^2dS_0,...

Hierbei handelt es sich um eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 3$, p und $q = 1 - p$. Durch die Anzahl der Aufwärtsbewegungen ist der Aktienkurs in diesem Modell zum Zeitpunkt t=T eindeutig bestimmt. Die *3. Modellannahme* besagt, dass die einzelnen Bewegungen voneinander unabhängig sind, deshalb ist die Anzal der Bewegungen binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Allgemein gilt daher im Random-Walk-Modell mit n Perioden:

$$P_{(S_T = u^k d^{n-k} S_0)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad \text{wobei } q = 1 - p$$

Weiters ist es sinnvoll $p = q = \frac{1}{2}$ zu setzen, da die Aktienrendite um ihren Mittelwert symmetrisch verteilt sind. Daraus folgt:

$$P_{(S_T=u^k d^{n-k} S_0)} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Nun stellt sich die Frage, welche Werte u und d annehmen. Dazu verwenden wir den Mittelwert $\bar{\mu_L}$ der vergangenen logarithmischen Renditen und die dazugehörige Standardabweichung σ_L, die als „typische“ Abweichung vom Mittelwert festgelegt wird.
Steigt der Aktienkurs in einer Periode, so liegt der Wert der Rendite „typischerweise“ bei $\bar{\mu_L} + \sigma_L$. Sinkt er hingegen, so beträgt die Rendite „typischerweise“ den Wert $\bar{\mu_L} - \sigma_L$.

Wir erhalten somit $u = e^{\bar{\mu_L}+\sigma_L}$ und $d = e^{\bar{\mu_L}-\sigma_L}$.

Beispiel 6. *: Für eine Aktie soll am 15.12.2009 für die nächsten drei Wochen eine Aktienkursentwicklung vorhergesagt werden, wobei der Kurs der Aktie am 15.12.2009 bei € 46,30 steht. Der Mittelwert der vergangenen logarithmischen Wochenrendite lag bei $\bar{\mu_L}$=0,0086 und die Standardabweichung bei σ_L=0,07.*
$\Rightarrow$ *Logarithmische Rendite bei Kursanstieg: 0,0086+0,07=0,0786.*
$\Rightarrow$ *Logarithmische Rendite bei Kursabfall: 0,0086-0,07=-0,0614.*
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ steigt der Kurs auf

$$e^{0,0786} \cdot € \, 46,30 = € \, 50,09,$$

mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ fällt der Kurs auf

$$e^{-0,0614} \cdot € \, 46,30 = € \, 43,54.$$

Ebenso werden die Prognosen für Woche zwei und drei berechnet und daraus folgt Tabelle 7.

Das Random-Walk-Modell zur Beschreibung der Aktienkursentwicklung kann mit dem Werfen einer Münze für jede einzelne Periode gleichgesetzt werden. Leider ist es unmöglich, Aktienkurse sicher vorherzusagen. Durch Modellannahmen ist es aber möglich Wahrscheinlichkeitsaussagen zu treffen, in welchem Bereich der künftige Kurs liegen wird. Die Random-Walk-Theorie ist ein vereinfachtes Modell, deren Modellannahmen zu hinterfragen sind. Beispielsweise werden für zukünftige Prognosen vergangene Daten verwendet. Zudem bleiben u und d konstant, das bedeutet, dass die Modellparameter statisch sind. Diese Tatsache kann zu einem Problem führen, weil neue Informationen (unvorhersehbare Ereignisse) bei Prognosen über

Aktienkurs am				
15.12.2009	22.12.2009	29.12.2009	05.01.2010	Wahrscheinlichkeit
			€ 58,61	0,125
		€ 54,18		
	€ 50,09		€ 50,95	0,375
€ 46,30		€ 47,10		
	€ 43,54		€ 44,30	0,375
		€ 40,95		
			€ 38,51	0,125

Tabelle 7: Random-Walk-Modell: Aktienkursentwicklung innerhalb drei Wochen.

längere Zeiträume nicht in die Bewertung einbezogen werden. Die Veränderungen des Aktienkurses werden also sehr vereinfacht modelliert und es ist unrealistisch anzunehmen, dass der Kurs nach einer Periode nur zwei Werte annahmen kann.

vgl. [1] S.60-62, [5] S. 24-27, [25] S. 407-415, [32]

5.8.1 Anwendung des Random-Walk-Modells in der Schule

Das Random-Walk-Modell ist für Schüler/innen aufgrund seiner Einfachheit leicht zu verstehen. Sie können dabei ihr Wissen zur Binomialverteilung und zur Pfadregel anwenden und somit einen Praxisbezug zu dem bereits theoretisch Gelernten herstellen.

Beispiel 7. *Betrachte das allgemeine Baumdiagramm für die Kursentwicklung einer Aktie mit drei Perioden des Random-Walk-Modells in Abbildung 10. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt der Aktienkurs bei S_0. Der Aktienkurs steigt in jeder Periode entweder um den Faktor $u = e^{\bar{\mu_L}+\sigma_L}$ oder fällt um den Faktor $d = e^{\bar{\mu_L}-\sigma_L}$.*

a) *Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass der Aktienkurs nach den drei Perioden bei (1) u^3S_0, (2) u^2dS_0, (3) ud^2S_0, oder bei (4) d^3S_0 liegt.*

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs in einem Random-Walk-Modell nach fünf Perioden den Wert (1) $u^2d^3S_0$ beziehungsweise (2) u^5S_0 annimmt?*

c) *Gib eine allgemeine Formel dafür an, um zu berechnen wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Aktienkurs in einem Random-Walk-Modell mit n Perioden am Ende des betrachteten Zeitraums insgesamt k-mal gestiegen ist.*

Lösung:

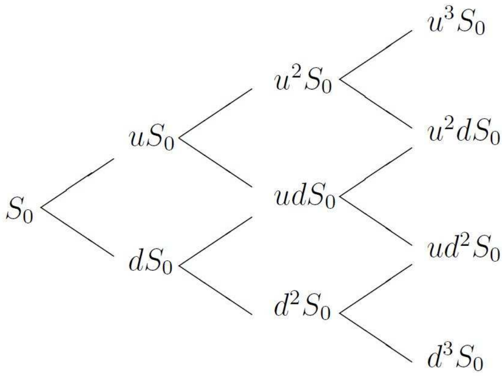

Abbildung 10: Baumdiagramm für die Kursentwicklung einer Aktie mit drei Perioden, entnommen aus [5] S. 25

a) *Mithilfe der Pfadregel erhalten wir folgende Wahrscheinlichkeiten:*

(1) $P(S_3 = u^3S_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$

(2) $P(S_3 = u^2dS_0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0,375$

(3) $P(S_3 = ud^2S_0) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} = 0,375$

(4) $P(S_3 = d^3S_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0,125$

b) *Erweitert man das Baumdiagramm um zwei Perioden, so erhalten wir wiederum mittels Pfadregel:*

(1) $P(S_3 = u^2d^3S_0) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16} = 0,3125$

(2) $P(S_3 = u^5S_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0,03125$

c) *Die Anzahl der Auf- beziehungsweise Abwärtsbewegungen ist mit den Parametern n und* $p = \frac{1}{2}$ *binomialverteilt und dadurch erstellen wir die allgemeine Formel:*

$$P(S_T = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

vgl. [5] S. 187-188

5.9 Normalverteilung

5.9.1 Allgemeines zur Normalverteilung

Definition 6. Seinen $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Eine Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit den Parametern μ, σ^2, X $\sim$ N(μ, σ^2), wenn sie $\forall x \in \mathbb{R}$ folgende Dichte besitzt:

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

Satz 4. *Seien μ und σ^2 Parameter einer normalverteilten Zufallsvariable X, $X \sim$ N(μ, σ^2), dann gilt:*

$$\textit{Erwartungswert } E(X) = \mu, \tag{1}$$

$$\textit{Varianz } V(X) = \sigma^2. \tag{2}$$

Eigenschaften der Normalverteilung

1. Die Dichtefunktion ist symmetrisch um $x = \mu$. Deshalb gilt:

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(\mu - x) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(\mu + x).$$

2. Die Dichtefunktion besitzt folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = 0.$$

3. Die Dichtefunktion hat ein Maximum bei $x_m = \mu$ und ihre Wendepunkte liegen bei $x_1 = \mu + \sigma$ und $x_2 = \mu - \sigma$.

4. Für eine normalverteile Zufallsvariable X, mit den Parametern μ und σ^2 gilt:

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)dx = \mu, \tag{3}$$

$$\text{Varianz } V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\varphi_{\mu,\sigma^2}(x)dx = \sigma^2. \tag{4}$$

Die Wahrscheinlichkeiten, dass die Werte von X in einem beliebigen Intervall $[a;b]$ liegen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, lassen sich mit der Dichte der Normalverteilung bestimmen:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)dx.$$

Definition 7. Die Normalverteilung einer Zufallsvariable X heißt Standardnormalverteilung, wenn μ=0 und σ^2=1. Ihre Dichtefunktion ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Satz 5. *Wenn die Zufallsvariable X mit den Parametern μ und σ^2 normalverteilt ist, dann ist die Zufallsvariable $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt.*

Aus Satz 5 folgt: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte von X in einem beliebigen Intervall $[a;b]$ liegen beträgt:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

vgl. [5] S. 27-30, [1] S.67-71, [24] S.230-231, [23] S.377

5.9.2 Normalverteilte Aktienkurse

Verwendet man als Modell für die Verteilung von Aktienrenditen die Normalverteilung, ist es möglich Aussagen darüber zu machen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Rendite in einem bestimmten Intervall liegt.

Beispiel 8. *: (Modellierung eines Aktienkurses mittels Normalverteilung) Betrachten wir die wöchentliche logarithmische Rendite der DaimlerChrysler-Aktie aus Beispiel 5 und nehmen wir an, dass ihre Zufallsvariable normalverteilt ist.*
Wir wissen bereits $\mu = 0,001$ und $\sigma = 0,070$. Daraus folgt Erwartungswert $= \mu = 0,001$ und Varianz $= \sigma^2 = 0,0049$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Wochenrendite zwischen 0,00 und 0,05 liegt beträgt:

$$P(0,00 \leq X \leq 0,05) = \Phi\left(\frac{0,050-0,001}{0,070}\right) - \Phi\left(\frac{0,000-0,001}{0,070}\right) = 0,264.$$

Vergleicht man nun diese Wahrscheinlichkeit mit der auftretenden relativen Häufigkeit in Tabelle 6 (von 0,00 bis 0,049 liegt die relative Häufigkeit bei 0,27), ist eine annähernde Übereinstimmung zu erkennen.

„Die Interpretation des Zusammenhanges zwischen den beobachteten Kenngrößen und den modellierten Parametern der Normalverteilung beruht auf dem Gesetz der großen Zahlen. Das arithmetische Mittel aus vielen Beobachtungen einer Zufallsgröße liegt nahe dem Erwartungswert und die Standardabweichung der beobachteten Werte nahe σ." [Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, S. 30]

vgl. [5] S. 30-31 [1] S.67-71

5.10 Brownsche Bewegung (Wiener-Prozess)

Definition 8. Sei $W(t)$ mit $t \geq 0$ eine Familie von Zufallsvariablen, die $W(0) = 0$ erfüllt. Wenn $W(t)$ mit $t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung ist, dann gilt für alle $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$: Die Inkremente

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

sind unabhängig und jede dieser Tafeldifferenzen ist normalverteilt mit

$$\text{Erwartungswert } E(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = 0,$$

$$\text{Varianz } V(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = t_{i+1} - t_i.$$

Die Eigenschaft $W(0) = 0$ garantiert, dass der Prozess im Koordinatenursprung beginnt. Außerdem wissen wir, dass eine Positionsänderung $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ sowohl in x- als auch in y-Richtung eine normalverteilte Zufallsvariable ist, mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$. Die Bewegungen in x- und y-Richtung sind voneinander unabhängig.
Erst im Jahre 1900, einige Zeit nach ihrer Entdeckung, schlug Louis Bachelier vor, die Brownsche Bewegung zur Modellierung von Börsenkursen zu verwenden.

Folgerungen aus der Definition:
Aus der Definition wissen wir anders formuliert:
$\forall t \geq 0$ und $h > 0$: $W_{t+h} - W_t \sim N(0, h)$ (d.h. $W_{t+h} - W_t$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz h).

$$\rightarrow \qquad \Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t \sim \epsilon\sqrt{\Delta t}, \qquad [F1]$$

wobei ϵ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.
Nun kann das Verhalten der infinitesimalen Zuwächse dW (d.h. ΔW_t, für $\Delta t \rightarrow 0$) untersucht werden:

$$\rightarrow \qquad dW_t \sim \epsilon\sqrt{dt}. \qquad [F2]$$

Jetzt definieren wir für geeignete Funktionen f das stochastische Integral, als Ebenbild zum Ausdruck dW_t

$$\rightarrow \qquad \int_0^T f(t)dW_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) \text{ mit } t_j = \frac{jT}{n}. \qquad [F2]$$

Durch weitere Überlegungen auf die ich jetzt nicht näher eingehe (genauere Herleitung siehe [2] S.47), lässt sich eine ganze Klasse von stochastischen Prozessen definieren, deren Dynamik von einer Brownschen Bewegung bestimmt wird:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \qquad [F3]$$

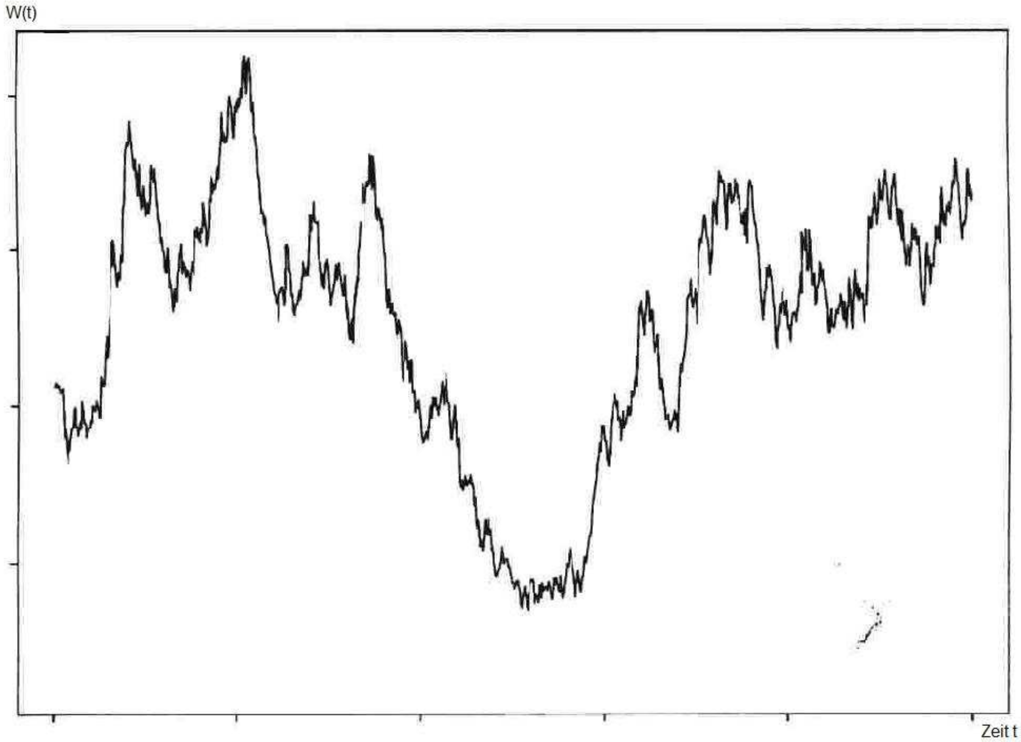

Abbildung 11: Grafische Darstellung einer Brownsche Bewegung, entnommen aus [29] S. 7

wobei in diesem Fall $\mu(x,t) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $\sigma(x,t) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ deterministische Funktionen [4] sind. Solche stochastischen Differentialgleichungen und stochastische Prozesse X_t, die $[F3]$ erfüllen, spielen bei der Modellierung von Aktienkursen eine wichtige Rolle.

Satz 6 (Itô-Lemma[5])**.** *Ist $f(x,t)$ eine hinreichend glatte Funktion und der stochastische Prozess X, durch $[F3]$ definiert, dann gilt für $f(X_t,t)$:*

$$df(X_t,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial X_t}\mu(X_t,t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2}\sigma^2(X_t,t)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X_t}\sigma(X_t,t)dW_t. \qquad [F4]$$

vgl. [5] S. 31-32, [26] S.94, [2] S.46-48

5.11 Black-Scholes-Modell für Aktienprozesse

Das Black-Scholes-Modell ist ein weiteres Modell zur Beschreibung von Aktienkursprozessen. Es wird angenommen, dass sich der stochastische Prozess der Renditenentwicklung aus einem deterministischen zeitlich linearen und einem zufälligen Teil zusammensetzt. Der deterministische Anteil lässt sich als erwartete Rendite beschreiben. Da Renditen ebenfalls einem stochastischen Prozess unterliegen, der durch den zufälligen Anteil dargestellt wird, basiert das Modell auf der Annahme, dass sich die Aktienpreise analog einer geometrischen Brownschen Bewegung verhalten.

Definition 9 (Black-Scholes-Modell)**.** „Für den stochastischen Prozess der Renditeentwicklung wird angenommen, dass

$$L_0^t = \mu t + \sigma W_t$$

ist. Dabei sind $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Darüber hinaus sind μ und σ konstant."

[Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, S.32] Mit Hilfe dieses Modells lässt sich also die Verteilung der Rendite bestimmen.
Da laut Definition der Brownschen Bewegung $W_0 = 0$ und die Zufallsvaiable $W_t = W_t - W_0$ mit den Parametern 0 und t normalverteilt ist, L_0^t linear von W_t abhängt, gilt (mit Einbezug der Eigenschaften des Erwartungswertes beziehungsweise der Varianz) für den Erwartungswert beziehungsweise die Varianz von L_0^t:

$$E(L_0^t) = E(\mu t + \sigma W_t) = \mu t + \sigma E(W_t) = \mu t,$$

$$V(L_0^t) = V(\mu t + \sigma W_t) = \sigma^2 V(W_t) = \sigma^2 t.$$

[4] Eine deterministische Funktion $f(x) = y$ bestimmt die Werte von y für gegebene Werte von x genau. vgl. [11] S.14

[5] vgl. [2] S.48

Die Rendite ist also normalverteilt mit den Parametern μt und $\sigma^2 t$. Die statistischen Kennzahlen $\bar{\mu}$ und σ sind Schätzwerte für die Parameter μ und σ im Black-Scholes-Modell.
Bei bekanntem Aktienkurs S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ und wenn über die Rendite $L_0^t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich sind, dann sind auch über den Kurs S_t zum Zeitpunkt $t > 0$ möglich:

$$S_t = S_0 \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)} = S_0 \mathrm{e}^{Rt}.$$

Beispiel 9. *[Modellierung eines Aktienkurses mittels Black-Scholes-Modell] Wir betrachten erneut die Angaben von Beispiel 6. Der Mittelwert der vergangenen logarithmischen Wochenrendite der Aktie lag bei $\bar{\mu_L}$=0,0086 und die Standardabweichung bei σ_L=0,07. Der Kurs der Aktie steht am 15.12.2009 bei € 46,30. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Aktienkurs drei Wochen später € 48,00 übersteigt?*

$$L_0^3 \sim N(3 \cdot 0{,}0086; 3 \cdot 0{,}07^2) \text{ also } L_0^3 \sim N(0{,}0258; 0{,}0147).$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteigt der Kurs nun € 48,00?

$$\begin{aligned} P(S_3 > € \, 48{,}00) &= P(e^{L_0^3} \cdot € \, 46{,}30 > € \, 48{,}00) \\ &= P(L_0^3 > \ln \frac{€ \, 48{,}00}{€ \, 46{,}30}) \\ &=^{(*)} 1 - P(L_0^3 < 0{,}036) \\ &= 1 - \Phi(\frac{0{,}036 - 0{,}0258}{\sqrt{0{,}0147}}) \approx 0{,}466. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \text{ Da} \quad & P(L_0^3 > 0{,}036) + P(L_0^3 \leq 0{,}036) = 1 \\ \rightarrow \quad & P(L_0^3 > 0{,}036) = 1 - P(L_0^3 \leq 0{,}036) \quad \text{und da} \\ & P(L_0^3 = 0{,}036) = 0 \\ \rightarrow \quad & P(L_0^3 > 0{,}036) = 1 - P(L_0^3 < 0{,}036). \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 46,6% übersteigt der Aktienkurs in drei Wochen € 48,00.

Bisher haben wir Rendite im Intervall $[0; t]$ betrachtet, wie sieht die Verteilung der Rendite im Black-Scholes-Modell in einem anderen $[t; t + u]$ Intervall aus?

Satz 7. *Die logarithmische Rendite L_t^{t+u} ist in dem Intervall $[t; t+u]$ normalverteilt, mit den Parametern μu und $\sigma^2 u$.*

Da das Black-Scholes-Modell eine einfache Handhabung auszeichnet, wird es weltweit verwendet. In der Praxis wird es vor allem zur Berechnung von Optionspreisen benützt, deshalb werden wir später noch einmal darauf zurückkommen.

vgl. [5] S. 32-34 [1] S.73-77

5.11.1 Probleme des Black-Scholes-Modell

- Ein großes Problem ist die Annahme einer Normalverteilung. Die Realität zeigt jedoch, dass es sich lediglich um eine grobe Annäherung handelt.
- Es wird, so wie bei der Random-Walk-Theorie, angenommen, dass die Volatilität σ konstant ist. Da sie in Wirklichkeit je nach Marktlage schwankt, ist dieser Punkt zu kritisieren.
- Es wird davon ausgegangen, dass Aktienpreise beständig sind und große Sprünge werden nicht berücksichtigt.

vgl. [37], [5] S. 34, [1] S.79

5.11.2 Lösungen für diese Probleme

Die Abschätzungsformel nach dem Cox-Ross-Rubinstein-Modell (auch Binomialmodell genannt) liefert bessere Ergebnisse für die Volatilität.
vgl. [37]

5.12 Simulation eines Aktienprozesses

Wir können nun auf Grundlage des Black-Scholes-Modell die Kursentwicklung einer Aktie nachspielen. Das folgende Beispiel stellt solch eine Simulation dar.

Beispiel 10. *Betrachten wir erneut die Angaben aus Beispiel 9. Die Parameter* $\mu = 0,0086$ *und* $\sigma = 0,07$ *sind bereits bekannt und werden als Schätzwerte für das Black-Scholes-Modell verwendet. Für die Rendite gilt daher:*

$$L_0^t = 0,0086t + 0,07W_t$$

wobei t= 1 Woche entspricht und W_t *ist standardnormalverteilt.*
Aus diesem Grund besitzt die Rendite L_k^{k+1} *in jedem Zeitintervall* $[k; k+1]$ *mit* $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ *folgende Form:*

$$L_k^{k+1} = 0,0086t + 0,07W_t = 0,0086 + 0,07W_t.$$

Der Aktienkurs am Ende eines Zeitintervalls beträgt:

$$S_{k+1} = S_k \cdot e_k^{k+1}.$$

Einige Computerprogramme bieten die Möglichkeit, Zufallszahlen zu erzeugen und somit eine Simulation schnell zu ermöglichen. Dafür muss man die Zufallszahlengenerierung aktivieren und die entsprechenden Parameter eingeben (Abbildung 12 zeigt diesen Vorgang).

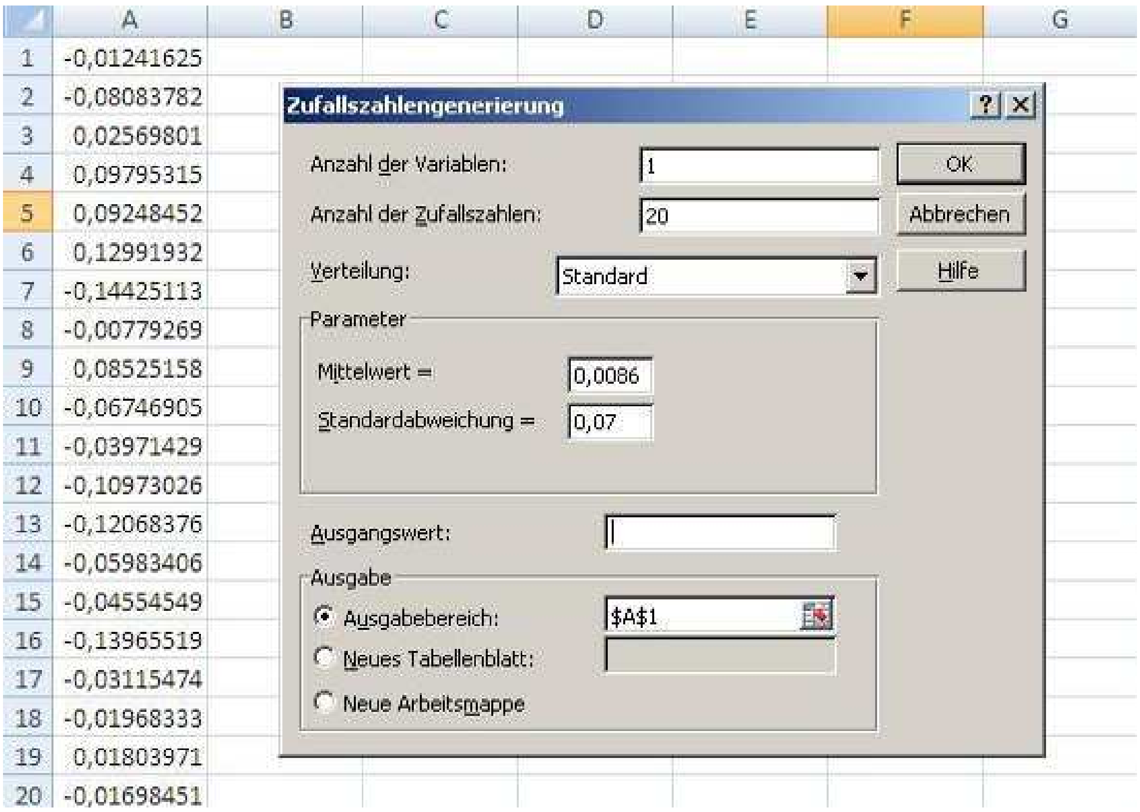

Abbildung 12: Eingabe bei der Zufallszahlengenerierung.

Als Startwert wählen wir den Aktienkurs vom 15.12.2009, der an diesem Tag bei € 46,30 *lag. Abbildung 13 zeigt eine Simmulation des Aktienkursprozesses mittels Excel/Open Office Calc. Zudem bietet es sich an mittels Aktienchart (siehe Kapitel 5.4) diese Simulation auch grafisch darzustellen.*

Woche k	Zufallszahl Wt	Rendite	Aktienkurs in €
0			43,60
1	-0,012416251	0,007730862	43,94
2	-0,080837822	0,002941352	44,07
3	0,025698012	0,010398861	44,53
4	0,097953148	0,01545672	45,22
5	0,092484515	0,015073916	45,91
6	0,129919317	0,017694352	46,73
7	-0,144251135	-0,001497579	46,66
8	-0,007792687	0,008054512	47,04
9	0,085251577	0,01456761	47,73
10	-0,067469045	0,003877167	47,91
11	-0,039714291	0,00582	48,19
12	-0,109730263	0,000918882	48,24
13	-0,120683762	0,000152137	48,24
14	-0,059834065	0,004411615	48,46
15	-0,045545494	0,005411815	48,72
16	-0,139655185	-0,001175863	48,66
17	-0,031154741	0,006419168	48,98
18	-0,01968333	0,007222167	49,33
19	0,018039714	0,00986278	49,82
20	-0,016984507	0,007411085	50,19

Abbildung 13: Simulation eines Aktienkursprozesses.

vgl. [5] S. 34-35 [1] S.78-79

6 Optionen

6.1 Was sind Optionen?

Eine Option berechtigt den Käufer, gegen Bezahlung einer Optionsprämie eine vereinbarte Menge (**Kontraktgröße**) eines bestimmten Finanzgutes (**Basiswertes**) zu einem festgelegten Zeitpunkt (**Ausübungstermin**) oder innerhalb eines bestimmten Zeitraums (**Ausübungsfrist**) und zu einem im Vorhinein festgelegten Preis (**Ausübungspreis**) zu kaufen oder zu verkaufen. Der Käufer ist jedoch nicht verpflichtet, von seinem Recht Gebrauch zu machen. Wenn er sein Recht in Anspruch nimmt, wird von der Ausübung der Option gesprochen.
Es gibt Call-Optionen und Put-Optionen:

- Eine **Call-Option** gibt das Recht Finanzgut zu kaufen.
- Eine **Put-Option** gibt das Recht Gut zu verkaufen.

Somit ergeben sich vier verschiedene Positionen im Optionsgeschäft, die man einnehmen kann:

- Käufer einer Call-Option
- Verkäufer einer Call-Option
- Käufer einer Put-Option
- Verkäufer einer Put-Option

Optionen werden üblicherweise entweder zur Absicherung vor zukünftigen Preisschwankungen (auch Hedging genannt) oder zur Realisierung von Spekulationsgewinnen verwendet. Optionskäufer und Optionsverkäufer müssen verschiedene Vorstellungen über die Kursentwicklung der betreffenden Aktie haben. In der Fachsprache geht der Käufer einer Option eine **long position** ein und der Verkäufer eine **short position**.
Der Käufer einer Call-Option rechnet mit einem Kursanstieg. Durch den Kauf der Option muss er höchstens den Ausübungspreis für die Aktie bezahlen und schützt sich somit vor eventuellen Preissteigerungen. Hingegen geht der Verkäufer einer Call-Option von sinkenden oder gleichbleibenden Kursen aus. In diesem Fall wird der Preis der Option zu seinem Gewinn.
Der Käufer einer Put-Option rechnet mit fallenden Kursen. Durch den Kauf der Option bekommt er mindestens den Ausübungspreis für die Aktie und schützt sich vor einer Preissenkung . Der Verkäufer einer Put-Option geht von steigenden oder gleichbleibenden Kursen aus. Der Preis der Option wird in diesem Fall zu seinem Gewinn.

Da der Preis einer Option im Vergleich zum Basiswert der Aktie meist kostengünstig ist, können große Gewinne, jedoch auch große Verlusste gemacht werden. Sowohl Gewinne als auch Verluste wirken sich beim Optionskauf viel deutlicher aus als beim Aktienkauf, das ist der **Hebeleffekt** von Optionen.

Beispiel 11 (Beispiel zum Hebeleffekt)**.** *Angenommen der Preis der Voest-Alpine-Aktie liegt am 16. Mai 2007 bei* $S_0 = € \, 48,40$ *und der Preis einer Call-Option für dieser Aktie steht bei* $K = € \, 55,41$ *(inklusive* € 3 *Optionspreis) und das Verfallsdatum (16.Juli 2007) T koste* € 3. *Nun tritt der erwünschte Fall, eines Kursantstiegs auf* $S_T = € \, 66,11$ *bis zum Zeitpunkt T (16.Juli 2007), ein. Wie kann ich davon profitieren?*

1. *Wenn ich am 16.Mai 2007 die Aktie um* $S_0 = € \, 48,40$ *kaufe und sie am 16.Juli.2007* $S_T = € \, 66,11$ *wert ist, kann ich einen Gewinn von* € 17,71 *erziehlen. Das entspricht* 36,6% *Gewinn auf die Investition.*

2. *Kaufe ich stattdessen am 16.Mai 2007 um* $K = € \, 55,41$ *eine Call-Option, dann erziele ich am 16.Juli 2007 mit einem Kursanastieg auf* $S_T =$ *€ 66,11 und sofortigem Wiederverkauf, einen Gewinn von* € 10,70. *Das sind* 100% *Gewinn auf die Investition.*

Es muss jedoch bedacht werden, dass man bei Strategie 2 das Risiko eingeht, dass die Option keinen Gewinn erzielt (d.h. wenn $S_T < K$*), dann geht also die gesamte Investition verloren.*

Beispiel 12. *Ein Anleger will am 9.Juni 2009 € 1.000 investieren. Er interessiert sich für eine bestimmte Aktie. Nun hat er die Wahl entweder 22 dieser Aktien zu einem Preis von je € 45,45 oder 625 Call-Optionen derselben Aktie für je € 1,60 mit einem Ausübungspreis von € 50,00 und Ausübungstermin 28.Dezember 2009 zu kaufen.*
Wir untersuchen nun zwei mögliche Aktienkurse am 28. Dezember 2009:
(1.) Der Aktienkurs sinkt auf € 40,00.
(2.) Der Aktienkurs steigt auf € 55,00.
Auswirkungen für das Optionsgeschäft:
(1.) Wenn der Aktienkurs sinkt, wird der Investor seine Option nicht ausüben, sie ist somit wertlos und er verliert seinen gesamten Einsatz von € 1.000. In diesem Fall würde man von einem Totalverlust (-100%) sprechen.
(2.) Wenn der Aktienkurs auf € 55,00 ansteigt, wird der Anleger seine Option ausüben. Er kauft 625 Aktien zu je € 50,00 und verkauft sie sofort wieder zu je € 55,00. Er macht also pro Aktie einen Gewinn von € 3,40 und somit einen Gesamtgewinn von € $3,40 \cdot 625$=*€ 2.125 (212,5%).*
Auswirkungen für das Aktiengeschäft:
(1.) Wenn der Aktienkurs auf € 40,00 sinkt, dann verliert der Investor € 5,45 pro

Aktie und sein Gesamtverlust beträgt € 5,45 $\cdot 22 =$ *€ 119,90 (-11,99%).*
(2.) Steigt der Aktienkurs auf € 55,00 an, gewinnt der Anleger € 9,55 pro Aktie, also einen Gesamtgewinn von € 210,10 (21,01%).
Zusammenfassung:

Kursgeschehen		**Aktiengeschäft**	**Optionsgeschäft**
Kurs sinkt auf € 40,00:	*Verlust:*	*€ 119,9 (-11,99 %)*	*€ 1.000 (-100%)*
Kurs steigt auf € 55,00:	*Gewinn:*	*€ 210,10 (21,01 %)*	*€ 2.125 (212,5%)*

Dieses Beispiel verdeutlicht sehr gut, dass man mit Optionsgeschäften größere Gewinne aber auch größere Verluste als bei Aktiengeschäften erzielen kann. Dies ist das Prinzip des Hebeleffekts und ist vor allem für Spektulanten sehr interessant.

vgl. [5] S. 37, S. 39-41 [1] S.109, [2] S.16-18

6.2 Arten von Optionen

Aktien können sich grob im Basiswert und in den Ausübungszeiträumen unterscheiden.

6.2.1 Optionen mit unterschiedlichen Basiswerten:

Optionsart:	Basiswert:
Aktienoptionen	Aktien
Devisenoptionen	Devisen
Zinsoptionen	Zinssätze, Anleihen
Rohstoffoptionen	Rohstoffe

Es gibt noch viele andere Basiswerte, als die eben erwähnten.

6.2.2 Optionen mit unterschiedlicher zeitlicher Ausübung:

Amerikanische Optionen können während ihrer Laufzeit jederzeit ausgeübt werden.
Europäische Optionen können nur zum festgelegten Zeitpunkt ausgeübt werden.
Bermuda Optionen können nur an gewissen Stichtagen während ihrer Laufzeit ausgeübt werden.

6.2.3 Exotische Optionen:

- Asiatische Optionen: „Eine Optionsvariante, deren Wert sich im Gegensatz zur Europäischen Option und zur American Option nicht durch den aktuellen Kurs (Preis) des Basistitels am Tag der Ausübung, sondern durch den Durchschnittskurs (-preis) des Basistitels bezogen auf einen bestimmten Zeitraum ergibt.“ [42]

- Barrier-Optionen: Sie haben verglichen mit „gewöhnlichen“ Optionen noch einen zusätzliches Merkmal. Der Payoff [6] hängt, zu den üblichen Kriterien, auch davon ab, ob die Barrier (=ein bestimmter Wert) über- beziehungsweise unterschritten wird. So werden sie aktiviert (Knock-In-Option) oder deaktiviert (Knock-Out-Option).

- Compound Optionen: Compound Optionen sind Optionen auf Optionen. Es existieren grundsetzlich vier verschiedene Formen:

  - Eine Call-Option auf eine Call-Option.
  - Eine Call-Option auf eine Put-Option.
  - Eine Put-Option auf eine Call-Option.
  - Eine Put-Option auf eine Put-Option.

  Sie haben zwei unterschiedliche Basispreise und zwei unterschiedliche Ausübungszeitpunkte.

- Digitale Optionen: Sie sind im Vergleich zu klassischen Optionen preiswerter. „Während digitale Optionen bei Erreichen beziehungsweise Nichterreichen einer Kursschwelle einen festen Betrag auszahlen, berücksichtigt die Optionsprämie von Optionsscheinen auch, dass der Kurs theoretisch endlos steigen kann. ... Digitale Optionen sind heute eines der beliebtesten Spekulationsinstrumente der Privatanleger.“[33]

- Lookback-Optionen: Der Ausübungspreis von Lookback-Optionen ist der niedrigste Preis, den der Kurs während der gesamten Laufzeit annimmt. Der Gewinn bei n Börsentagen ist daher:

  $$\text{Gewinn} = S_n - \min_{i=1,\dots,n} S_i$$

  vgl. [22] S. 198

- Russische Optionen

- $\cdots$

vgl. [5] S. 38 , [2] S.17-18 [42]

[6] Wert einer Option zum Zeitpunkt der Ausübung

6.3 Diagramme

Der *Payoff*[7] C_T einer Option zum Ausübungszeitpunkt T hängt vom Ausübungspreis K und dem Aktienkurs S_T des Basiswertes zum Zeitpunkt T ab. Für den Payoff C_T einer Call-Option zum Zeitpunkt T gilt:

$$C_T := \begin{cases} S_T - K, & \text{wenn } S_T > K \\ 0, & \text{wenn } S_T \leq K \end{cases}$$

Ist der Aktienkurs S_T zum Ausübungszeitpunkt T größer als der Ausübungspreis, dann wird der Anleger die Aktie zum Ausübungspreis K kaufen und diese sofort wieder zum Aktienkurs S_T verkaufen und somit $S_T - K$ einnehmen. Liegt der Aktienkurs S_T unter dem Ausübungspreis K, ist die Option wertlos.
Für den Payoff P_T einer Put-Option zum Zeitpunkt T gilt hingegen:

$$P_T := \begin{cases} 0, & \text{wenn } S_T > K \\ K - S_T, & \text{wenn } S_T \leq K \end{cases}$$

Ist der Aktienkurs S_T zum Ausübungszeitpunkt T niedriger als der Ausübungspreis, dann wird der Käufer der Option die Aktie zum Ausübungspreis K verkaufen und diese sofort wieder zum Aktienkurs S_T zurückkaufen und somit $K - S_T$ einnehmen. Liegt der Aktienkurs S_T über dem Ausübungspreis K, ist die Option wertlos.
Payoff-Diagramme: Sind grafische Darstellungen der Optionspreise C_T und P_T zum Zeitpunkt T in Abhängigkeit vom Aktienkurs.
Gewinn beziehungsweise Verlust erhalten wir indem wir vom Payoff noch den Optionspreis C_0 beziehungsweise P_0 abziehen.
Gewinn-Verlust-Diagramme: Sie stellen Gewinn beziehungsweise Verlust in Abhängigkeit vom Aktienkurs S_T grafisch dar.
Die Abbildungen 14 und 15 zeigen ein Payoff-Diagramm einer Call-Option und einer Put-Option.

Die Abbildungen 16 und 17 zeigen Gewinn-Verlust-Diagramme einer Call-Option aus Sicht des Käufers beziehungsweise Verkäufers.

Die Gewinn-Verlust-Diagramme zeigen Gewinnmöglichkeiten und Risiken für Käufer und Verkäufer der Option. Der mögliche Verlust des Verkäufers ist unbeschränkt und sein Gewinn ist maximal der Optionspreis, der Käufer kann jedoch maximal den investierten Optionspreis verlieren und seine möglichen Gewinne sind unbeschränkt.

vgl. [5] S. 41-43 , [2] S.16

6.4 Einflussfaktoren des Optionspreises

Es muss ein Preis für die Option gefunden werden, mit dem sowohl Käufer als auch Verkäufer zufrieden sind, damit beide Parteien auf das Geschäft einsteigen. Gesucht

[7] Der Payoff einer Option ist ihr Wert zum Ausübungszeitpunkt.

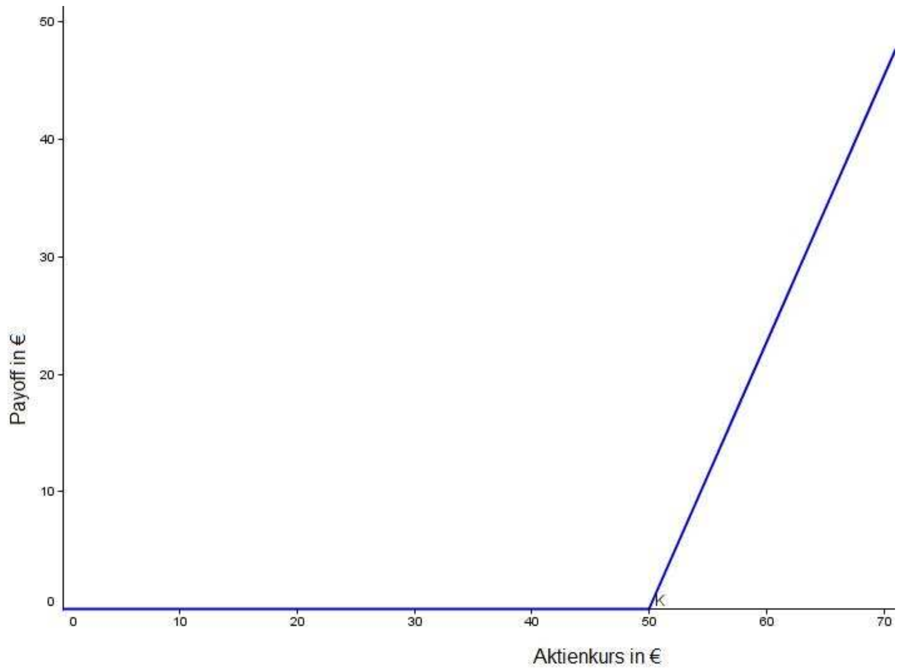

Abbildung 14: Grafische Darstellung des Payoffs einer Call-Option mit Ausübungspreis K als Funktion des Aktienpreises S_T.

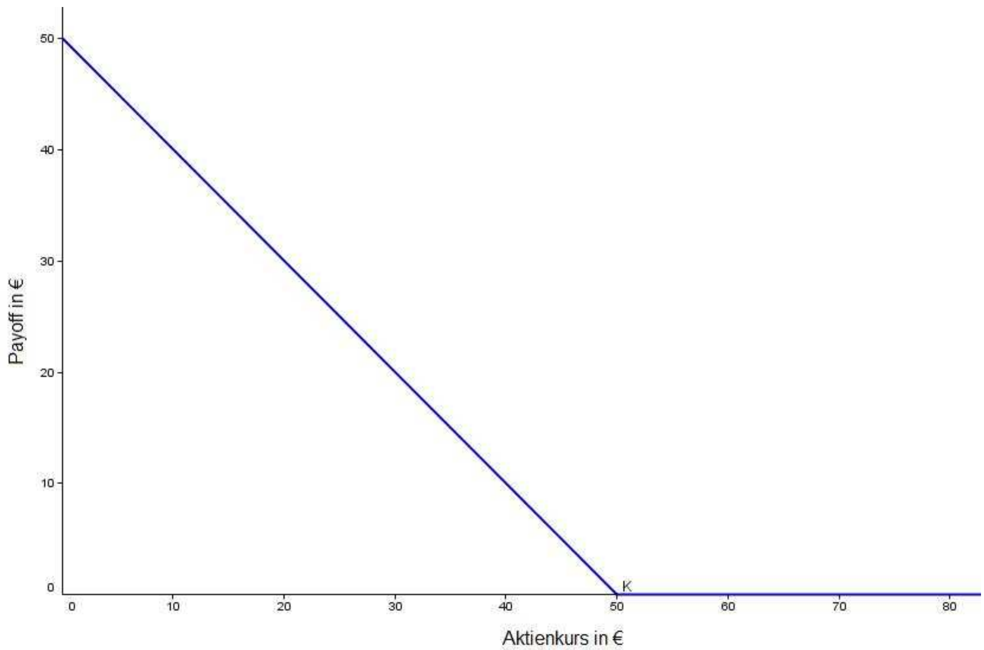

Abbildung 15: Grafische Darstellung des Payoffs einer Put-Option mit Ausübungspreis K als Funktion des Aktienpreises S_T.

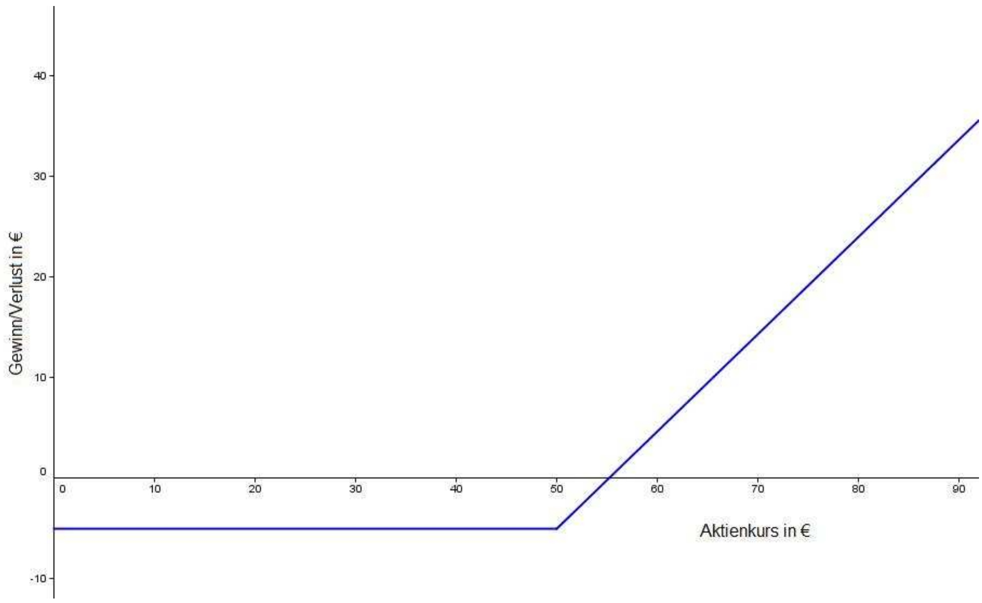

Abbildung 16: Gewinn-Verlust-Diagramm einer Call-Option aus Sicht des Käufers.

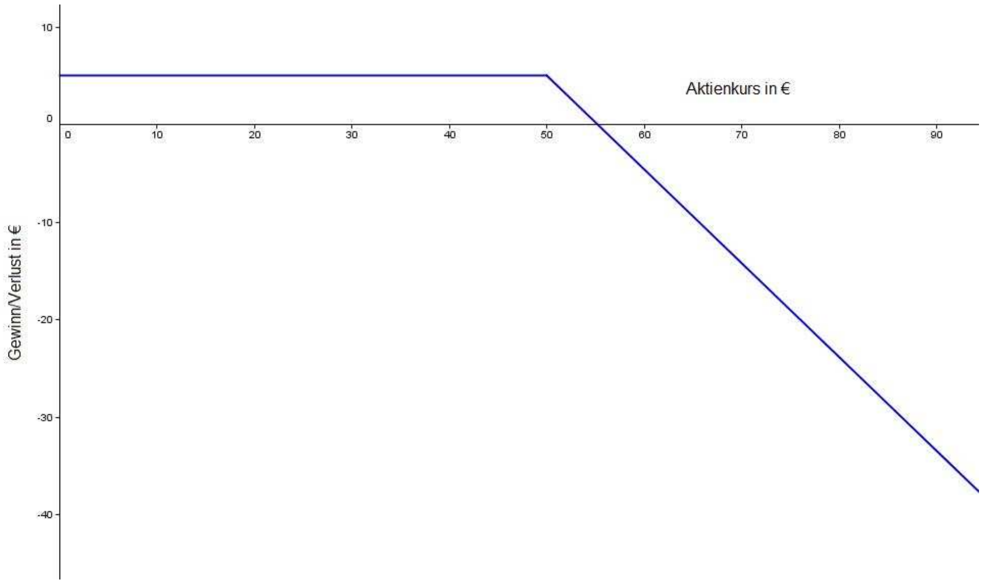

Abbildung 17: Gewinn-Verlust-Diagramm einer Call-Option aus Sicht des Verkäufers.

ist der sogenannte **faire Preis** für die Option. Dabei müssen mögliche Einflussfaktoren berücksichtigt werden.
Mögliche Einflussfaktoren:

- Steigt der Ausübungspreis K, dann wird die Wahrscheinlichkeit kleiner, dass der Aktienkurs den Ausübungspreis übersteigt. Aus diesem Grund sinkt der Preis C_t der Call-Option bei steigendem Ausübungspreis und der Preis P_t der Put-Option steigt.
- Bei fallendem Aktienkurs S_t wird die Chance, dass der Aktienkurs den Ausübungspreis übersteigt, wiederum kleiner. Der Preis C_t der Call-Option sinkt also auch bei sinkendem Aktienkurs und der Preis P_t der Put-Option steigt.
- Umgekehrt sieht die Situation bei steigender Volatilität aus. Steigt die Volatilität, dann schlägt der Aktienkurs stärker nach oben oder unten aus. Es steigt also die Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs sehr große oder sehr kleine Werte annimmt und somit steigt auch die Wahrscheinlichkeit, dass die jeweiligen Optionen ausgeübt werden. Es steigt also der Preis der Call-Option und der Put-Option.

vgl. [5] S. 43-44 , [2] S.30

6.5 Erwartungswert- und No-Arbitrage-Prinzip

6.5.1 Erwartungswertprinzip

Das Erwartungswertprinzip ist ein einfaches Modell zur Optionspreisbestimmung. In diesem Modell soll der bereits erwähnte Einfluss der Aktienkursentwicklung auf den Optionspreis berücksichtigt werden.
Es geht davon aus, dass eine Abzinsung mit dem Zinsfaktor r des Wertes der erwarteten Auszahlung $E(C_T)$ der Option, einen fairen Preis C_0 ergibt:

$$C_0 = \frac{1}{r} E(C_T).$$

Warum ist eine Abzinsung notwendig? Weil die Zahlung des Optionspreises und die Zahlung der Ausübung der Option zu unterschiedlichen Zeitpunkten erfolgen. Um sie miteinander vergleichen zu können, müssen sie auf einen gemeinsamen Zeitpunkt auf- oder abgezinst werden. Der Zinsfaktor r ergibt sich aus dem Zinssatz i und ist $r = 1 + \frac{i}{100}$. In diesem Modell ist mit $t = 0$ der Optionspreis C_T eine Zufallsvariable.

Beispiel 13. *Angenommen der Kurs einer Aktie liegt zum Zeitpunkt* $t = 0$ *bei* $S_0 = € \, 45,00$. *Welchen Preis* C_0 *sollte eine europäischen Call-Option für diese Aktie mit einem Ausübungspreis* $K = € \, 50,00$ *haben? Angenommen der Kurs kann*

$t = 0$	
$S_0 = 45$	
Aktion	Geldfluss
Verkaufe eine Call-Option	+€ 6,41
Leihe € 11,59	+€ 11,59
Kaufe 0,4 Aktien	-€ 18,00 (=-0,4 · € 45)
Saldo	+€ 0,00

Tabelle 8: Beispiel 14

bis zum Ausübungszeitpunkt nur entweder auf € 60 *(mit der Wahrscheinlichkeit p) ansteigen oder auf* € 35 *(mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$) abfallen.*

- *Steigt der Kurs auf $S_T =$ € 60 an, dann gilt: $C_T =$ € 60 − € 50 = € 10.*
- *Fällt der Kurs auf $S_T =$ € 35 ab, dann gilt: $C_T = 0$.*

Nun gilt: $P(C_T =$ € 10$) = p$ und $P(C_T =$ € 0$) = q$. Nach dem Erwartungswertprinzip beträgt die erwartete Auszahlung der Call-Option zum Zeitpunkt T:

$$E(C_T) = p \cdot \text{€}\ 10 + q \cdot \text{€}\ 0 = p \cdot \text{€}\ 10.$$

Nehmen wir an der Zinssatz während dieser Zeit liegt bei 4%, dann gilt:

$$C_0 = \frac{1}{1,04} \cdot \text{€}\ 10 \cdot p = \text{€}\ 9,62 \cdot p.$$

Angenommen die Wahrscheinlichkeit für einen Aktienanstieg liegt bei $p = \frac{2}{3}$, dann lautet der Optionspreis:

$$C_0 = \text{€}\ 9,62 \cdot \frac{2}{3} = \text{€}\ 6,41.$$

Ist $C_0 =$ € 6,41 tatsächlich ein „fairer“ Preis? Da man am Markt nicht nur mit Optionen handeln kann, hat man verschiedene Handlungsmöglichkeiten mit Geld und Aktien. Das folgende Beispiel (Tabelle 8 und 9) zeigt die Möglichkeiten eines Optionsverkäufers, wenn wir von den Angaben aus Beispiel 13 ausgehen. Dieses Beispiel zeigt bei einem Optionspreis von € 6,41 die Ermöglichung eines risikolosen Gewinns von € 1,95. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird kein eigenes Geld und keine bestehenden Aktien für die Transaktion verwendet.

Beispiel 14. *Wir haben gesehen, dass es möglich ist, sowohl bei einem Kursanstieg auf € 60 als auch bei einem Kursabfall auf € 35 Gewinn zu machen.*

Da diese Methode auch in der Praxis tatsächlich funktioniert, wird dieses Prinzip zur Bewertung von Optionen verwendet.

$t = T$			
$S_T =$ € 60		$S_T =$ € 35	
Aktion	Geldfluss	Aktion	Geldfluss
Verkaufe 1 Aktie (Option)	+€ 50,00	Verkaufe 0,4 Aktien	+€ 14
Kaufe 0,6 Aktien am Markt	-€ 36,00		
Zahle Schulden inkl. Zinsen (4%) zurück	-€ 12,05	Zahle Schulden inkl. Zinsen (4%) zurück	-€ 12,05
Saldo	+€ 1,95	Saldo	+€ 1,95

Tabelle 9: Beispiel 14 ... risikoloser Gewinn und „falscher“ Optionspreis.

6.5.2 No-Arbitrage-Prinzip

Definition 10 (Arbitrage)**.** Als Arbitrage bezeichnen wir einen risikolosen Gewinn ohne eigenen Kapitaleinsatz beim Handel mit Finanzgütern.

Preise für Finanzgüter, die dem Martteilnehmer Möglichkeit zur Arbitrage geben, können folgernd nicht „fair“ sein. Beispiel 15 verdeutlicht diese Tatsache.

Beispiel 15. *Angenommen eine Aktie wird in New York um \$ 100 gehandelt. Die gleiche Aktie wird auch in Wien zum selben Zeitpunkt gehandelt, jedoch um € 64. Der Wechselkurs liegt zu diesem Zeitpunkt bei € 0,70 pro \$. Ohne die Transaktionskosten zu berücksichtigen, ergibt sich nun folgende Arbitrage-Möglichkeit:*
Ich kaufe 100 Aktien in Wien und verkaufe diese in New York.
Anschließend wechsle ich die US-Dollar auf Euro um und ich erhalte einen risikolosen Gewinn:

$$100 \cdot (\$\ 100 \cdot 0,7 - € \ 64) = € \ 600.$$

Der Finanzmarkt ist jedoch transparent und aus diesem Grund können solche Arbitrage-Möglichkeiten nur kurz bestehen. Da sie in Wien zu gesteigerter Aktiennachfrage führen würde, wäre eine Erhöhung des Kurses in Wien eine Folge. Gleichzeitig würden sich die Verkäufe der Aktie in New York vermehren, wodurch der Aktienkurs dort sinken würde. Arbitrage-Möglichkeiten verschwinden also sehr schnell. Da es sogenannte „Arbitrageure“ gibt, die darauf spezialisiert sind solche Möglichkeiten zu finden, sind existierende Arbitrage-Möglichkeiten am Markt sofort eliminiert. Es kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass sie nicht existieren. Diese Annahme wird „Non-Arbitrage-Prinzip“ bezeichnet und ist wesentlich für die Preistheorie der Finanzmärkte.

Allgemein treffen wir für den „idealen“ Finanzmarkt folgende Annahmen:

- Es existieren **keine Arbitrage-Möglichkeiten**.
- Kauf und Verkauf von Finanzgütern sind **jederzeit und in jedem Umfang** möglich.
- Wir gehen davon aus, dass **Kreditzins und Anlagezins gleich** sind. Das heißt, der Zinssatz ist für alle Marktteilnehmer (sowohl für Geldeinlagen als auch für Kredite) einheitlich.
- **Vernachlässigung der Transaktionskosten**. In der Realität muss man beim Handel mit Transaktionskosten rechnen. Da diese Kosten für viele Marktteilnehmer kaum ins Gewicht fallen, gehen wir einfachheitshalber davon aus, dass es keine gibt. Vor allem für Rohstoffmärkte müsste diese Annahme, aufgrund hoher anfallender Transportkosten, hinterfragt werden.
- **Aktienleerverkäufe sind möglich**. Das bedeutet, dass Aktien zu einem aktuell gültigen Preis verkauft werden, jedoch erst zu einem späteren Zeitpunkt ausgeliefert werden.
- Es können **beliebige Anteile eines Finanzgutes** gekauft und verkauft werden.

vgl. [5] S. 44-45, [1] S.119-122, [2] S.21-23

6.6 Binomialmodell zur Optionspreisbestimmung

Bei dem Beispiel zum Erwartungswertprinzip sind wir in Konflikt mit dem No-Arbitrage-Prinzip geraten. Aus diesem Grund ist der in Beispiel 13 berechnete Optionspreis von $C_0 = € \, 6,41$ nicht durchführbar. Deshalb versuchen wir nun eine andere Methode zur Preisbildung. Wir verwenden dafür folgende grundlegende Idee:

„**Konstruiere ein Portfolio, dessen Preis zum Zeitpunkt $\mathbf{t = T}$ mit dem Optionspreis $\mathbf{C_T}$ übereinstimmt. Dann muss nach dem No-Arbitrage-Prinzip auch zum Zeitpunkt $\mathbf{t = 0}$ der Preis dieses Portfolios mit dem Optionspreis $\mathbf{C_0}$ übereinstimmen.** " [Adelmeyer, M.; Warmuth, E.: *Finanzmathematik für Einsteiger.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 2003, S.122]

Beispiel 16 (No-Arbitrage-Prinzip und Optionspreis)**.** *Der Verkäufer der Option stellt zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Portfolio aus (Aktie, Geld)=(x,y) auf. Die Variable x steht dabei für die Anzahl an Aktien und y für den Geldbetrag in €. Unabhängig von der Kursentwicklung der Aktie, soll der Wert dieses Portfolios zum Zeitpunkt T gleich dem Wert der Option zum selben Zeitpunkt sein. Nun drücken wir diese Forderung durch ein lineares Gleichungssystem aus. (Angaben aus Beispiel 13: $S_0 =$*

€ 45,00, $K = €\ 50,00$, angenommen der Kurs steigt entweder auf € 60,00 an oder sinkt auf € 35,00. Der Zinssatz während der Zeit beträgt 4%.)

$$60x + 1,04y = 10$$

$$35x + 1,04y = 0$$

Durch Lösen des Gleichungssystems erhält man $x = \frac{2}{5}$ und $y = € - 13,46$.
Das heißt: $(x, y) = (\frac{2}{5}, € - 13,46)$. Es ist also möglich, ein Portfolio zu bilden, das die Kosten für die zufällige Auszahlungsverpflichtung aus der Option unabhängig von der Kursentwicklung der Aktie bereitstellt. Der Optionsverkäufer muss 0,4 Aktien kaufen und € 13,46 leihen.
Aufgrund des No-Arbitrage-Prinzips muss nun bei $t = 0$ auch der Wert des Calls gleich dem Wert des Portfolios, also $C_0 = x \cdot S_0 + y$, sein. Zurück zu unserem Beispiel bedeutet das: $C_0 = 0,4 \cdot € 45,00 + € - 13,46 = € 4,54$. Der mittels Erwartungsprinzip berechnete Preis betrug € 6,41, er war zu hoch und folglich entstand eine Arbitragemöglichkeit.

Der entscheidende Vorteil des No-Arbitrage-Ansatzes ist, dass die Wahrscheinlichkeiten p und $q = p - 1$ der Kursentwicklung der Aktie nicht in den Optionspreis eingehen.
Im folgenden Kapitel beschreiben wir die Verallgemeinerung dazu.
vgl. [1] S.122-123, [2] S.21-23

6.6.1 Das einperiodische Optionspreismodell

Hierbei handelt es sich um ein einfaches Marktmodell mit nur einer Handelsperiode, das heißt, es gibt nur einen Start-Zeitpunkt $t = 0$ und einen Endzeitpunkt $t = T$. Der Aktiewert S_T kann zwei Werte annehmen entweder uS_0, wenn der Kurs steigt, oder dS_0, wenn der Kurs fällt. Das heißt:

$$S_T = \begin{cases} uS_0 & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } p, \\ dS_0 & \text{mit der Wahrscheinlichkeit } q = 1 - p \end{cases}$$

Wir betrachten eine Call-Option mit dem Ausübungspreis K, Zinsfaktor r und Optionspreis C_0, wobei für den Aktienkurs zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt, dass $S_0 > 0$. Die beiden möglichen Werte für C_T bezeichnen wir mit C_u und C_d. Abbildung 18 gibt einen grafischen Überblick.

Außerdem nehmen wir an, dass $d \leq r \leq u$ und $d < u$ gilt. Würde $r < d$ gelten, dann gebe es wegen $rS_0 < dS_0$ einen risikolosen Gewinn von $(d - r)S_0 > 0$. Für $u < r$ würde $uS_0 < rS_0$ gelten und es würde wiederum einen risikolosen Gewinn $((r - u)S_0 > 0)$ geben.

Um nun die Option berwerten zu können, verwenden wir das Random-Walk-Modell,

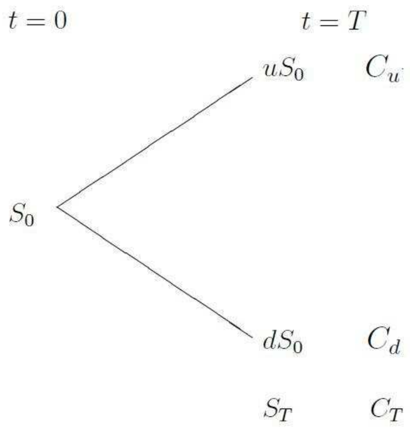

Abbildung 18: Einperiodisches Binomialmodell

um mögliche Aktienkursentwicklungen, die den Preis der Option beeinflussen, zu berücksichtigen.
Daher gilt für eine konkrete Aktie $u = e^{\bar{\mu_L}+\sigma_L}$ und $d = e^{\bar{\mu_L}-\sigma_L}$, wobei $\bar{\mu_L}$ der Mittelwert der vergangenen logarithmischen Rendite und σ_L die dazugehörige Standardabweichung ist. Nun konstruieren wir ein Portfolio (Aktie, Geld)=(x, y), dessen Wert zum Zeitpunkt $t = T$ gleich dem Wert der Option ist:

$$xuS_0 + ry = C_u,$$

$$xdS_0 + ry = C_d.$$

Durch Lösen des Gleichungssystems erhalten wir eine eindeutige Lösung:

$$x = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)},$$

$$y = \frac{uC_d - dC_u}{r(u-d)}.$$

Das heißt $$(x, y) = \left(\frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)}, \frac{uC_d - dC_u}{r(u-d)} \right).$$

Der Optionsverkäufer muss also $\frac{C_u-C_d}{S_0(u-d)}$ Aktien kaufen und sich einen Geldbetrag in der Höhe von $\frac{uC_d-dC_u}{r(u-d)}$ leihen. Der Wert der Option zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt $C_0 = xS_0 + y$.

$$\rightarrow \qquad C_0 = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} S_0 + \frac{uC_d - dC_u}{r(u-d)} = \frac{rC_u - rC_d + uC_d - dC_u}{r(u-d)} =$$

$$= \frac{C_u(r-d) + C_d(u-r)}{r(u-d)}.$$

Satz 8. *Der „faire“ Preis einer Option zum Zeitpunkt $t = 0$ ist im Einperiodenmodell:*

$$C_0 = \frac{C_u(r-d) + C_d(u-r)}{r(u-d)}.$$

Setzen wir $\bar{p} := \frac{r-d}{u-d}$ und $\bar{q} := 1 - \bar{p} = \frac{u-r}{u-d}$ in die obige Gleichung ein, so erhalten wir:

$$C_0 = \frac{1}{r}(\bar{p}C_u + \bar{q}C_d).$$

Der Wert $\bar{p}$ kann als Wahrscheinlichkeit für steigende Aktienkurse interpretiert werden und der Wert $\bar{q}$ als Wahrscheinlichkeit für fallende Kurse. Somit ist C_0 der mit r abgezinste Erwartungswert des Optionspreises, auf diese Wahrscheinlichkeiten bezogen, das heißt $C_0 = \frac{1}{r}\bar{E}(C_T)$. Die beiden Werte $\bar{p}$ und $\bar{q}$ haben nichts mit den individuellen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen der Optionskäufer und Optionsverkäufer zu tun, sondern werden aus $u, d,$ und r berechnet. Daher sind $\bar{p}$ und $\bar{q}$ sogenannte „risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten“.

vgl. [1] S.123-126, [2] S.37-39, [5] S.49-50

6.6.2 Das CRR-Binomialmodell zur Optionspreisbestimmung

Dieses Modell wird auch n-Perioden-Binomialmodell genannt und wurde 1979 von **C**ox, **R**oss und **R**ubinstein eingeführt. Da das Einperiodenmodell bei Prognosen für Aktienkurse, die über einen langen Zeitraum durchgeführt werden, kleine Kursschwankungen während der gesamten Zeit nicht erfassen kann, benötigen wir ein Modell mit mehreren Perioden. Der Baum dieses Modells wird aus Bäumen von Einperiodenmodellen zusammengesetzt. Das Zeitintervall $[0, T]$ wird in n Teilintervalle geteilt, die jeweils Länge $\frac{T}{n}$ haben. Der Aktienkurs ändert sich nur zu den Zeitpunkten $\frac{T}{n}, 2\frac{T}{n}, \cdots, (n-1)\frac{T}{n}, T$. Der Optionspreis kann am Anfang jeder Periode berechnet werden und der Preis der Option lässt sich zum Ausübungszeitpunkt $t = T$ leicht bestimmen. Um nun den Optionspreis C_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ zu berechnen, muss rückwerts gearbeitet werden.

Abbildung 19 zeigt ein 2-Perioden-Binomialmodell. Wir haben zwei Teilintervalle der Länge $\frac{T}{2}$. Nach dem Random-Walk-Modell steigt der Kurs um den Faktor u oder fällt um den Faktor d unabhängig von der bisherigen Kursentwicklung jeweils zu den Zeitpunkten $\frac{T}{2}$ und T. Die möglichen Werte des Optionspreises nennen wir C_u^2, C_{ud} und C_d^2.

$$C_{u^2} = \begin{cases} u^2S_0 - K, & \text{falls } u^2S_0 > K, \\ 0, & \text{falls } u^2S_0 \leq K. \end{cases}$$

$$C_{ud} = \begin{cases} udS_0 - K, & \text{falls } udS_0 > K, \\ 0, & \text{falls } udS_0 \leq K. \end{cases}$$

$$C_{d^2} = \begin{cases} d^2S_0 - K, & \text{falls } d^2S_0 > K, \\ 0, & \text{falls } d^2S_0 \leq K. \end{cases}$$

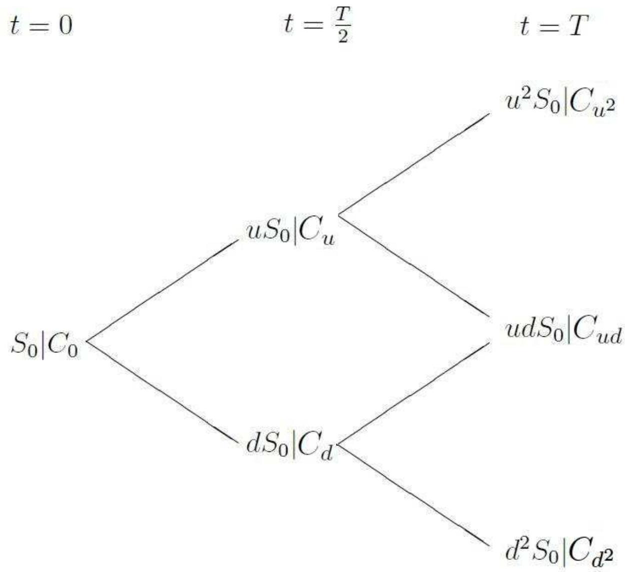

Abbildung 19: 2-Perioden-Binomialmodell

Durch Einsetzen in die Formel $C_0 = \frac{1}{r}(\bar{p}C_u + \bar{q}C_d)$ erhalten wir die Zwischenpreise:

$$C_u = \frac{1}{r}(\bar{p}C_{u^2} + \bar{q}C_{ud}), \qquad C_d = \frac{1}{r}(\bar{p}C_{ud} + \bar{q}C_{d^2})$$

und der gesuchte Optionspreis lautet:

$$C_0 = \frac{1}{r}(\bar{p}C_u + \bar{q}C_d), \quad \text{wobei r der Aufzinsungsfaktor pro Periode ist.}$$

Nun setzten wir die Ausdrücke für C_u und C_d in unsere Formel C_0 ein, dann erhalten wir den abgezinsten Erwartungswert des Optionspreises C_T zum Zeitpunkt t=T bezüglich der Binomialverteilung mit den Parametern $n = 2$ und p:

$$C_0 = \frac{1}{r}[\bar{p}\frac{1}{r}(\bar{p}C_{u^2} + \bar{q}C_{ud}) + \bar{q}\frac{1}{r}(\bar{p}C_{ud} + \bar{q}C_{d^2})]$$

$$C_0 = \frac{1}{r^2}(\bar{p}^2C_{u^2} + 2\bar{p}\bar{q}C_{ud} + \bar{q}^2C_{d^2})$$

Aus dieser Herleitung können wir nun die allgemeine Formel für den Optionspreis im n-Perioden-Modell erstellen. Die möglichen Werte des Optionspreises C_T zum Zeitpunkt $t = T$ bezeichnen wir mit $C_{U^kD^{n-k}}$, wobei $k = 0, 1, \cdots, n$ gibt an wie oft die Aktien innerhalb der n-Perioden steigt.

$$C_{u^kd^{n-k}} = \begin{cases} u^kd^{n-k}S_0 - K, & \text{wenn } u^kd^{n-k}S_0 > E \\ 0, & \text{wenn } u^kd^{n-k}S_0 \leq K \end{cases}$$

Da der Wert $u^k d^{n-k}$ mit der Binomialwahrscheinlichkeit $\binom{n}{k}\bar{p}^k\bar{q}^{n-k}$ auftritt, erhalten wir den Optionspreis als abgezinsten Erwartungswert von C_T.

$$C_0 = \frac{1}{r^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\bar{p}^k\bar{q}^{n-k}\cdot C_{u^k d^{n-k}}.$$

Da in dieser Formel alle Summanden null sind, bei denen der Aktienkurs zum Ausübungszeitpunkt kleiner oder gleich dem Ausübungspreis ist, wenn also $S_T \leq K$, erhalten wir nach einigen Umformungsschritten und Herleitungen:

Satz 9 (Binomialformel einer Call-Option)**.** *Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt der Optionspreis C_0 einer europäischen Call-Option auf eine Aktie im n-Perioden-Modell bei*

$$C_0 = S_0\left[\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}(p')^k(q')^{n-k}\right] - \frac{K}{r^n}\left[\sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}\bar{p}^k\bar{q}^{n-k}\right],$$

wobei

$$a \approx \frac{\ln\left(\frac{K}{d^n S_0}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}, \quad \bar{p} = \frac{r-d}{u-d}, \quad \bar{q} = 1-\bar{p}, \quad p' = \frac{\bar{p}u}{r}, \quad q' = 1-p'.$$

Dabei wird a auf die näherungsgrößere ganze Zahl aufgerundet.

Die Variablen p' und q' können als Wahrscheinlichkeiten aufgefasst werden, weil $d \leq r \leq u$, $p' + q' = 1$ und $0 \leq p' \leq 1, 0 \leq q' \leq 1$. Da jedoch keine Deutung (so wie bei $\bar{p}$ und $\bar{q}$) möglich ist, werden sie als Pseudowahrscheinlichkeiten bezeichnet.
Die Binomialformel für Call-Optionen ist von der Form $C_0 = A - B$.
In A wird der Aktienkurs S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Pseudowahrscheinlichkeit multipliziert, sodass der Aktienkurs S_T zum Zeitpunkt $t = T$ größer als der Ausübungspreis K ist, wenn er mit Pseudowahrscheinlichkeit p' um den Faktor u steigt und mit Pseudowahrscheinlichkeit q' um den Faktor d fällt.
In B wird der Ausübungspreis K auf den Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Faktor r n-mal abgezinst und mit der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit multipliziert, sodass der Aktienkurs S_T zum Zeitpunkt $t = T$ größer als der Ausübungspreis K ist.

Analog können wir nun auch eine Formel zur Berechnung des Preises einer Put-Option aufstellen:

Satz 10 (Binomialformel einer Put-Option)**.** *Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt der Optionspreis P_0 einer europäischen Put-Option auf eine Aktie im n-Perioden-Modell bei*

$$P_0 = \frac{K}{r^n}\left[\sum_{k=0}^{a-1}\binom{n}{k}\bar{p}^k\bar{q}^{n-k}\right] - S_0\left[\sum_{k=0}^{a-1}\binom{n}{k}(p')^k(q')^{n-k}\right],$$

wobei

$$a \approx \frac{\ln\left(\frac{K}{d^n S_0}\right)}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}, \quad \bar{p} = \frac{r-d}{u-d}, \quad \bar{q} = 1-\bar{p}, \quad p' = \frac{\bar{p}u}{r}, \quad q' = 1-p'.$$

Dabei wird a auf die näherungsgrößere ganze Zahl aufgerundet.

Den beiden Formeln liegt die Random-Walk-Theorie zugrunde. Aus diesem Grund gibt es leider auch bei diesem Modell die gleichen Kritikpunkte wie jene der Random-Walk-Theorie.

Beispiel 17. *[Optionspreisbestimmung einer Call-Option] Der Preis einer Option, die am 15.01.2010 gekauft wird und deren Ausübungszeitpunkt am 15.05.2010 liegt, soll berechnet werden:*

Optionstyp:	*Call-Option*
Aktienkurs zum Zeitpunkt t=0:	S_0=*€ 100*
Ausübungspreis:	*K=€ 103*
Perioden:	*n=4 Monate*
Angenommener Jahreszinssatz:	*3,35 %*

Wir erhalten den Monatszinssatz $i = \sqrt[12]{1,0335} - 1 = 0,275\%$. *Durch Statistiken des vergangenen Jahres wissen wir, dass* $u = 1,04$ *und* $d = 0,98$ *sind.*

$$\rightarrow \qquad a = \frac{\ln\left(\frac{103}{0{,}98^4 \cdot 100}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}04}{0{,}98}\right)} = 1,86 \approx 2$$

$$\rightarrow \qquad \bar{p} = \frac{1,00275 - 0,98}{1,04 - 0,98} = 0,379$$

$$\rightarrow \qquad \bar{q} = 1 - 0,379 = 0,621$$

$$\rightarrow \qquad p' = \frac{0,379 \cdot 1,04}{1,00275} = 0,393$$

$$\rightarrow \qquad q' = 1 - 0,393 = 0,607$$

Für den Optionspreis im 4-Perioden-Modell gilt daher:

$$C_0 = 100\left[\sum_{k=2}^{4}\binom{4}{k}0,393^k 0,607^{4-k}\right] - \frac{103}{1,00275^4}\left[\sum_{k=2}^{4}\binom{4}{k}0,379^k 0,621^{4-k}\right] =$$

$$= 100\left[\binom{4}{2}0,393^2 0,607^2 + \binom{4}{3}0,393^3 0,607 + 0,393^4\right] -$$

$$\frac{103}{1,00275^4}\left[\binom{4}{2}0,379^2 0,621^2 + \binom{4}{3}0,379^3 0,621 + 0,379^4\right] = \underline{\underline{€\ 1{,}53}}.$$

Der mittels Binomialmodell errechnete Optionspreis für diese Aktie liegt bei € 1,53.

Beispiel 18 (Anschauliches Beispiel zur Optionspreisbestimmung)**.** *Wir wollen den Optionspreis folgender Aktie berechnen, die wiederum über vier Perioden läuft:*

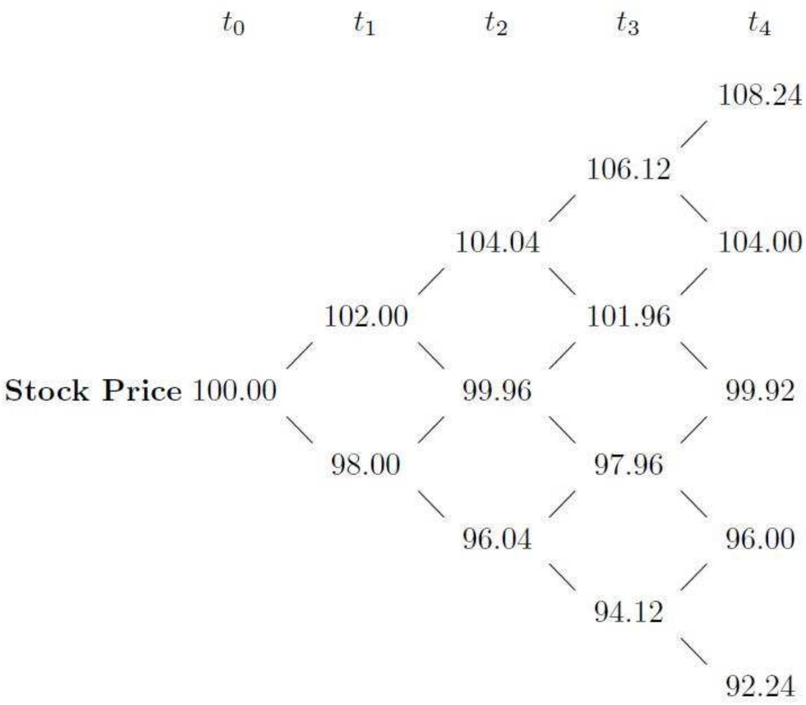

Abbildung 20: Aktienpreise von vier Perioden, entnommen aus [16] S. 222

Wir wissen: u=1,02 und d=0,98

Optionstyp:	*Call-Option*
Aktienkurs zum Zeitpunkt t=0:	S_0=*€ 100*
Ausübungspreis:	*K=€ 100*
Perioden:	*n=4 Monate*
Angenommener Jahreszinssatz:	*5,127 %*

$$\rightarrow \qquad r = 1,004175$$

$$\rightarrow \qquad \bar{p} = \frac{1,004175 - 0,98}{1,02 - 0,98} = 0,6044$$

$$\rightarrow \qquad \bar{q} = 1 - 0,6044 = 0,3956$$

$C_{u^4} = 108,24 - 100 = 8,24; C_{u^3d} = 104,00 - 100 = 4,00; C_{u^2d^2} = 0,00; C_{ud^3} = 0,00; C_{d^4} = 0,00$ $C_{u^2d^2}, C_{ud^3}, C_{d^4}$ *sind gleich null, weil* $S_{u^2d^2}, S_{ud^3}, S_{d^4}$ *kleiner als* S_0

	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4
					8.24
				?	
			?		4.00
		?		?	
Call Price	?		?		0.00
		?		?	
			?		0.00
				?	
					0.00

Abbildung 21: Wie sieht nun der Optionspreis zum Zeitpunkt t=0 aus? Entnommen aus [16] S. 222

sind.
Wir berechnen nun die Optionspreise rückwärts:

$$C_{u^3} = \frac{1}{r}(\bar{p}C_{u^4} + \bar{q}C_{u^3d}) =$$

$$= \frac{1}{1,004175}(0,6044 \cdot 8,24 + 0,3956 \cdot 4,00) =$$

$$= 6,54.$$

Analog berechnen wir $C_{u^2d} = 2,41; C_{ud^2} = 0,00; C_{d^3} = 0,00; C_{u^2} = 4,88; C_{ud} = 1,45; C_{d^2} = 0,00; C_u = 3,51; C_d = 0,87$ *und zuletzt*

$$C_0 = \frac{1}{1,004175}(0,6044 \cdot 3,51 + 0,3956 \cdot 0,87) = 2,46.$$

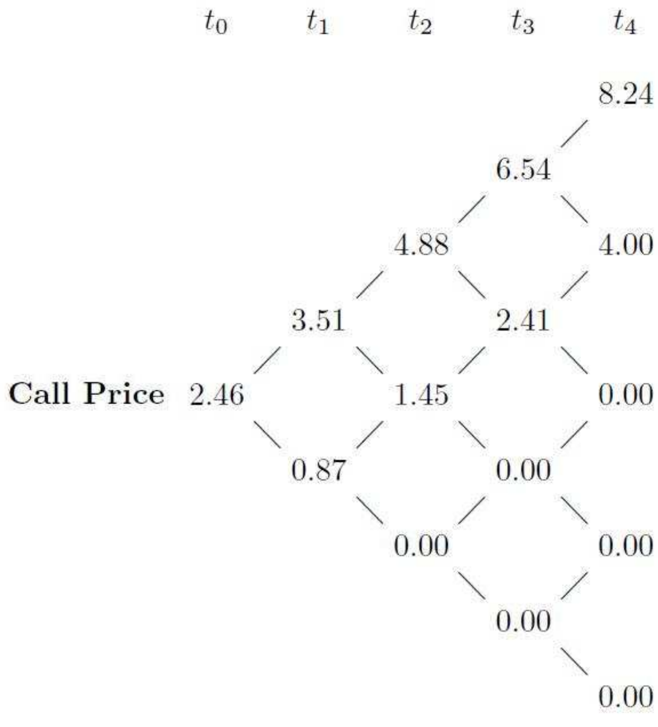

Abbildung 22: Optionspreis zum Zeitpunkt t=0 aus, entnommen aus [16] S. 223

vgl. [6] S.5-8, [16] S.216-225, [1] S.132-140, [2] S.40-43, [5] S.51-55

6.7 Black-Scholes-Modell für Optionspreise

Vorweg eine kurze Übersicht zur Einordnung des Black-Scholes-Modells in der Literatur siehe Abbildung 23.

Fischer Black und Myron Scholes veröffentlichten ihre Formel zur Bewertung europäischer Call-Optionen 1973 und legten somit einen Meilenstein in der Finanzmathematik. Das Black-Scholes-Modell basiert auf Arbitrageüberlegungen und die Zeit wird nicht, wie im Binomialmodell, in Perioden unterteilt, sondern wird als stetige Größe betrachtet. Der Optionspreis kann sich also nicht nur am Ende einer Periode ändern, sondern läuft gleichmäßig ab. Es können sich also sowohl der Aktienkurs als auch der Optionspreis jederzeit ändern und somit ist eine realistischere Darstellung des Börsenverlaufs möglich. Nach dem Black-Scholes-Modell lässt sich der Optionspreis folgendermaßen bestimmen:

Satz 11 (Preisbestimmung einer Call-Option mittels Black-Scholes-Modell)**.** *Der Preis C_0 einer Call-Option für eine Aktie beträgt:*

$$C_0 = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT_{\text{LZ}}}\Phi(d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T_{\text{LZ}}}{\sigma\sqrt{T_{\text{LZ}}}} \qquad \text{und}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_{\text{LZ}}} = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T_{\text{LZ}}}{\sigma\sqrt{T_{\text{LZ}}}}$$

S_0 *... Aktienkurs zum Zeitpunkt* $t = 0$,
K *... Ausübungspreis,*
Φ *... tabellierte standardisierte Normalverteilungsfunktion,*
r *... risikoloser Zinssatz,*
σ *... konstante Standardabweichung des Aktienkurses,*
T_{LZ} *... Zeit bis zum Ende der Ausübungsfrist.*

Aufgrund der engen Verbindung zwischen Binomial- und Black-Scholes-Modell, besitzt die Formel des Black-Scholes-Modells mit $C = A - B$ die gleiche Struktur wie die Formel zur Berechnung des Optionspreises mittels Binomialmodell. Da die Anzahl der Perioden im Black-Scholes-Modell größer und somit die Periodendauer immer kleiner wird, gilt für $n \to \infty$, dass die Periodendauer $\frac{T}{n} \to \infty$ geht. So geht die diskrete Zeiteiteinteilung des Binomialmodells in die kontinuierliche Zeit des Black-Scholes-Modells über.

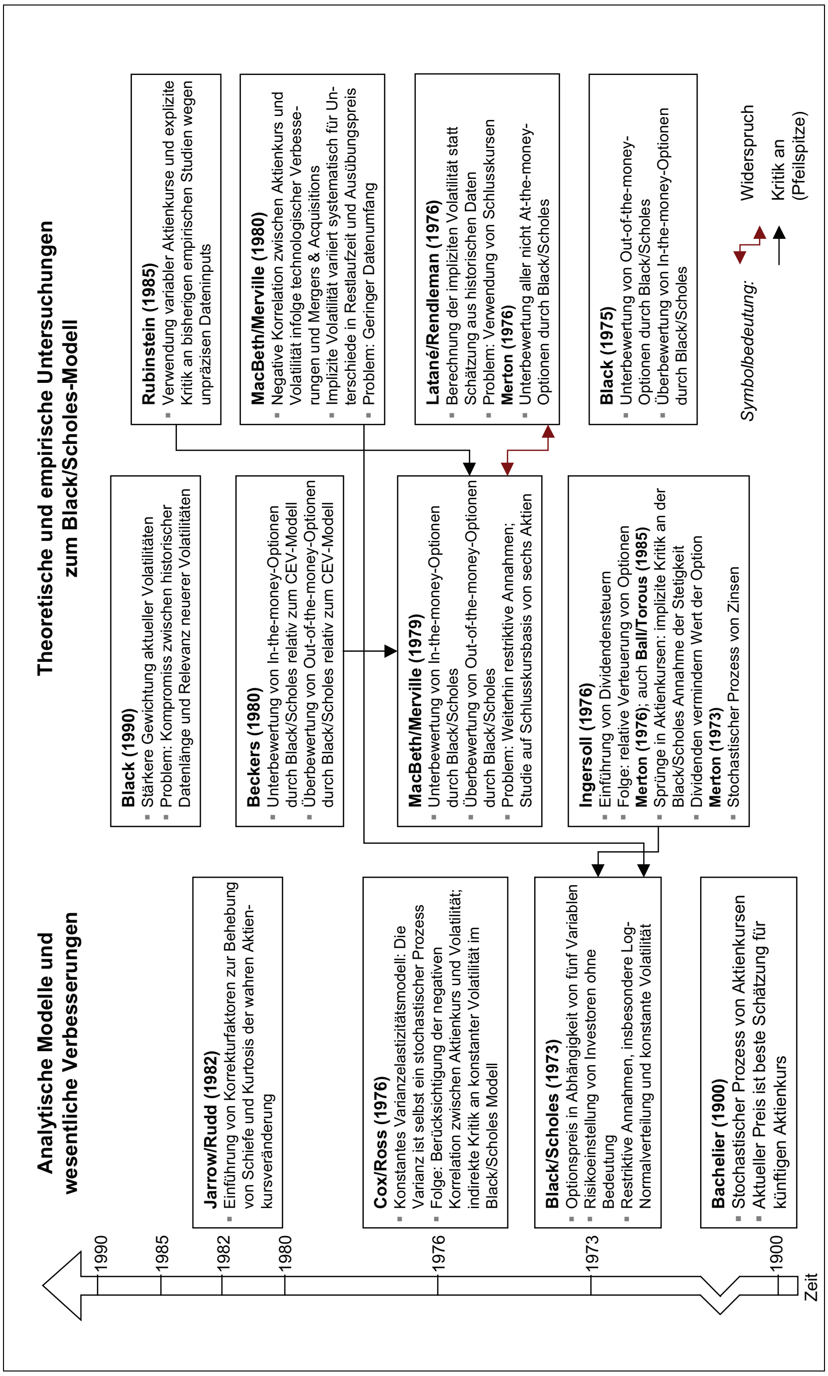

Abbildung 23: Einordnung des Black-Scholes-Modells in der Literatur, entnommen aus [19] S. 7

Der Optionspreis ist also von folgenden fünf Variablen abhängig:

- Aktienkurs S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$,
- Ausübungspreis K,
- Laufzeit T_{LZ},
- risikolosen Zinssatz r,
- Standardabweichung σ des Aktienkurses.

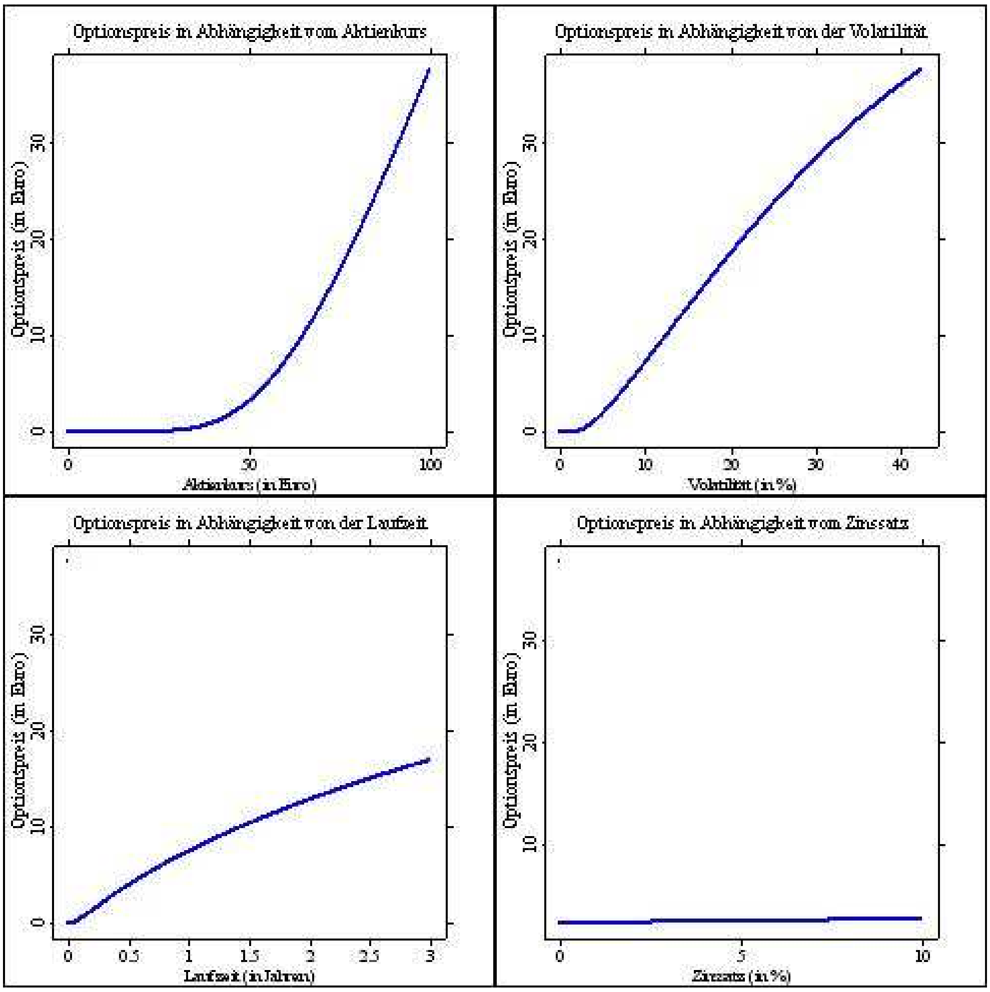

Abbildung 24: Auswirkung auf den Optionspreis bei veränderten Variablen, entnommen aus [19] S. 3

In Abbildung 24 ist dargestellt, wie stark der Optionspreis auf die Änderung einer Variable (Aktienkurs S_0, Volatilität σ, Laufzeit T_{LZ}, Zinssatz r) reagiert.
Es wurde von einer Call-Option mit folgenden Angaben ausgegangen:

$$\begin{array}{lll} S_0 & = & € \; 50, \\ K & = & € \; 65, \\ r & = & 4\;\%, \\ \sigma & = & 58\;\%, \\ T_{\mathbf{LZ}} & = & 122 \text{ Tage}, \\ C_0 & = & € \;\; 2{,}50. \end{array}$$

Während der veränderte Zinssatz nur geringe Auswirkung auf den Optionspreis zeigt, reagiert der Optionspreis auf die anderen drei Variablen deutlich stärker. Bei diesen Simulationen ist jedoch zu bedenken, dass bei den jeweiligen Veränderungen immer nur eine Variable schwankt und die anderen konstant bleiben. Diese Annahme ist nicht realistisch, da zum Beispiel ein sinkender Aktienkurs oft eine höhere Volatilität mit sich bringt.

Satz 12 (Preisbestimmung einer Put-Option mittels Black-Scholes-Modell)**.** *Der Preis P_0 einer Put-Option für eine Aktie beträgt:*

$$P_0 = -S_0\Phi(-d_1) + Ke^{-rT_{\text{LZ}}}\Phi(-d_2)$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T_{\text{LZ}}}{\sigma\sqrt{T_{\text{LZ}}}} \qquad \textit{und}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_{\text{LZ}}} = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T_{\text{LZ}}}{\sigma\sqrt{T_{\text{LZ}}}}$$

Wiederum gilt:

S_0 ... *Aktienkurs zum Zeitpunkt* $t = 0$,
K ... *Ausübungspreis,*
Φ ... *tabellierte standardisierte Normalverteilungsfunktion,*
r ... *risikoloser Zinssatz,*
σ ... *konstante Standardabweichung des Aktienkurses,*
T_{LZ} ... *Zeit bis zum Ende der Ausübungsfrist.*

Beispiel 19 (Optionspreisbestimmung einer Call-Option mittels Black-Scholes-Modell)**.** *Wir gehen von den Angaben aus Beispiel 17 aus:*

Optionstyp:	*Call-Option*
Aktienkurs zum Zeitpunkt t=0:	S_0=*€ 100*
Ausübungspreis:	*K=€ 103*
Perioden:	*n=4 Monate ...* $T=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
Angenommener Jahreszinssatz:	*3,35 %*

Die Jahresvolatilität wurde außerdem mit $\sigma = 0,166$ *bestimmt.*

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{100}{103}) + (0,0335 + \frac{0,166^2}{2}) \cdot \frac{1}{3}}{0,166 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} \approx -0,144$$

$$d_2 = -0,144 - 0,166 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0,24$$

Durch die Tabelle der Normalverteilung (siehe Anhang) bestimmen wir die Werte:

$$\Phi(d_1) = -0,5573 \qquad und \qquad \Phi(d_2) = -0,5948$$

$$C_0 = 100 \cdot (-0,5573) - 103 \cdot e^{-0,0335 \cdot \frac{1}{3}} \cdot (-0,5948) \approx 4,854$$

Der mittels Black-Scholes-Modell berechnete Preis der Call-Option beträgt € 4,85.

6.7.1 Kritik an dem Black-Scholes-Modell

Bei dem Modell wird von folgenden Annahmen ausgegangen, die zu hinterfragen sind:

1. Der Zinssatz der Kapitalaufnahme bleibt über die gesamte Laufzeit der Option konstant und ist somit risikofrei.

2. Es gibt keine Dividendenzahlungen.

3. Steuern werden nicht berücksichtigt.

4. Transaktionskosten werden nicht berücksichtigt.

5. Es gibt die Möglichkeit des Leerverkaufs.

6. Es wird von konstanter Volatilität des Kurses ausgegangen.

7. Der Verlauf des Aktienkurses ist zufällig und stetig log-normal.

„Angesichts der sehr geringen Sensitivität des Optionspreises auf die Höhe des Zinssatzes ist Annahme (1) unbedenklich. Annahme (2) kann relativ unproblematisch aufgehoben werden, indem die während der Laufzeit fälligen Dividenden in die Bewertungsformel einbezogen werden. Entsprechendes gilt für Annahme (3), da sich auch Steuern in die Black/Scholes-Formel integrieren lassen. Durch Integration von Transaktionskosten kann Annahme (4) ebenfalls aufgehoben werden. Schließlich lässt sich nach der Modifikation von Merton (1976) auch ein unstetiger Verlauf des Aktienkurses in das Modell integrieren. Sieht man von der für das rechnerische Ergebnis nicht relevanten Annahme (5) ab, so verbleiben die konstante Volatilität und der log-normale Verlauf der Aktienkurse als restriktive Annahmen des Modells.

Die Annahme der bekannten und konstanten Volatilität ist problematisch, da die zukünftige Volatilität der Aktie zum Bewertungszeitpunkt nicht bekannt ist und da zudem die Volatilität während der Restlaufzeit regelmäßig auch nicht konstant ist.Nach empirischen Erkenntnissen ist die Volatilität vielmehr negativ mit dem Aktienkurs korreliert. Um auf die Annahme der konstanten Volatilität verzichten zu können, haben Cox/Ross (1976), Geske (1979) und Rubinstein (1983) jeweils konkurrierende Alternativen vorgeschlagen. Die weiterhin verbleibende restriktive Annahme der lognormalen Verteilung der Aktienkurse versuchen Jarrow/Rudd (1982) durch Erweiterung der Formel um Korrekturfaktoren aufzuheben.“ [Pape, U.; Merk, A.: *Zur Angemessenheit von Optionspreisen: Ergebnisse einer empirischen überprüfung des Black/Scholes-Modells*. ESCP-EAP, Berlin, 2003, S.8-9]

vgl. [19] S. 2-9, [18] S. 90-92, [5] S. 56-57

7 Spieltheoretisches Denken in der Finanzwirtschaft

In der Finanzwirtschaft hängt der Erfolg unserer Entscheidungen von den Entscheidungen „anderer“ ab, wobei uns die „anderen“ weitgehend unbekannt sind.
Wenn ich also bedenke, dass mein Handeln Reaktionen bei anderen Marktteilnehmern auslöst und ich dann wiederum darüber nachdenke wie ich auf diese Reaktionen reagieren sollte, so handle ich strategisch.
Die Spieltheorie ist eine „sehr komplexe mathematische Theorie interaktiven Handelns“ [Schredelseker, K.: *Grundlagen der Finanzwirtschaft: Ein informationsökonomischer Zugang*. Oldenburg Wissenschaftsverlag GmbH, München, 2002, S.235].
Da der Kursverlauf einer Aktie auch von der Psyche der Menschen beeinflusst wird, ist es von Vorteil mit dem typischen spieltheoretischen Denken in sozialen Zusammenhängen vertraut zu sein. In der Spieltheorie wird jede soziale Situation, die von der Entscheidung der Beteiligten abhängt, als Spiel gesehen. Da an der Börse die Marktteilnehmer selbst Einfluss auf den Preis einer Aktie nehmen, ist viel spieltheoretisches Verständnis gefragt, um einen Vorteil gegenüber anderer Akteure zu haben.

Betrachten wir nun ein Beispiel zur Informationsbeschaffung an der Börse:
Die meisten Investoren holen sämtliche Informationen (betreiben Finanzanalysen, lesen die Finanzpresse oder lassen sich beraten,...) ein, bevor sie kaufen beziehungsweise verkaufen. Je besser diese Vorrecherche funktioniert, desto höher fallen die Gewinnchancen aus. Andere, denen diese Informationsgewinnung nicht so gut gelingt, müssen sich oft mit kleinen Renditen zufrieden geben. Ist es in diesem Fall besser ganz auf Informationen zu verzichten und alles dem Zufall zu überlassen? Was wäre, wenn sich alle Marktteilnehmer so verhalten würden?

Bei diesem Beispiel gibt es sehr viele „Mitspieler“, die anonym sind. Aus diesem Grund sind hier „echte spieltheoretische Lösungen“ kaum möglich. Spieltheoretische Ansätze sind jedoch meist äußerst hilfreich um die komplexen Zusammenhänge besser zu verstehen.
Nun kann es in der oben beschriebenen Situation zwei unterschiedliche Sichtweisen geben.

„Entscheidung gegen die Natur“: Der Markt wird als anonymer Gegner angesehen und das Ergebnis hängt nicht von den Entscheidungen einzelner Personen ab. Mit dieser Betrachtung wird man versuchen möglichst viele Informationen über die wirtschaftliche Entwicklung der Unternehmen, Volkswirtschaften ... zu bekommen.

„Entscheidung gegen bewusste Gegner“: Der Markt wird als Gesamtheit vieler Personen gesehen. Die Gegner sind also eine Vielzahl anonymer Marktteilnehmer, wobei jeder auf seinen eigenen Vorteil bedacht ist und sich zum Nachteil anderer bereichern

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	-7	5	-4
A_2	3	-4	-7	-3
A_3	5	4	5	7
A_4	10	3	-2	-10

Tabelle 10: Spielmatrix aus der Sicht von Bank A

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	7	-5	4
A_2	-3	4	7	3
A_3	-5	-4	-5	-7
A_4	-10	-3	2	10

Tabelle 11: Spielmatrix aus der Sicht von Bank B

will. In diesem Fall muss man davon ausgehen, dass die anderen Personen am Markt die gleichen Informationen haben. Da es Gewinner und Verlierer geben muss, kann es von Vorteil sein, die gewonnenen Informationen nicht zu nutzen, um nicht gemeinsam mit den anderen gleich Informierten, die falschen Entscheidungen zu treffen. Hier ist es wichtig in spieltheoretischen Kategorien denken zu können.

vgl. [25] S.234-237

7.1 Das Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel

Bei diesem Spiel gibt es nur zwei Teilnehmer und ihr gemeinsamer Gewinn summiert sich auf Null. Jeder der beiden führt einen Spielzug durch, ohne den Zug des anderen zu kennen. Dieses Spiels kann durch eine Matrix dargestellt werden.

Beispiel 20. *Wir betrachten zwei Banken A und B, die um gewisse Marktanteile kämpfen. Jede von ihnen kann zwischen vier Handlungsalternativen auswählen.*
Bank A wählt zwischen Strategie A_1, A_2, A_3 und A_4.
Bank B wählt zwischen Strategie B_1, B_2, B_3 und B_4.
Tabelle 10 zeigt die Spielmatrix, die die Zuwächse in Marktanteilsprozenten für Bank A angibt. Erhöht sich der Anteil für Bank A um $p\%$ so vermindert sich der Anteil für Bank B um $p\%$.

Obwohl A nicht sicher weiß für welche Strategie sich B entscheiden wird, weiß er, dass B danach streben wird, das für sie bestmögliche Ergebnis zu erzielen, was wiederum ein schlechtes Ergebnis für A bedeutet. Beide sind sich dieser Tatsache bewusst und aus diesem Grund wird jeder der beiden, bevor er seine eigene Entscheidung trifft, versuchen sich in den Gegner hineinzuversetzen.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	-7	5	-4
A_2	3	-4	-7	-3
A_3	5	4	5	7
A_4	10	3	-2	-10

Tabelle 12: Spielmatrix aus der Sicht von Bank A. Zeile A_2 ist bereits gestrichen.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	-7	5	-4
A_2	3	-4	-7	-3
A_3	5	4	5	7
A_4	10	3	-2	-10

Tabelle 13: Spielmatrix aus der Sicht von Bank A, nach den ersten beiden Überlegungen.

Bei der Spieltheorie ist „reflexives Denken im Sinne eines Bedenkens der Aktionen des/der anderen und der möglichen Rückwirkungen auf das eigene Verhalten“ [[25] S.239] notwendig. Menschen die spieltheoretisch Denken, schätzen den Gegner als genauso schlau wie sich selbst ein.
*Wenden wir dieses Wissen nun auf unser Beispiel an: Das Wunschergebnis von Bank A wäre A_4/B_1, die ihr mit 9% den größtmöglichen Marktanteil bescheren würde. Bank B würde jedoch den Ausgang A_4/B_4 bevorzugen, mit der Wahl B_4 würde sie sich aber der Gefahr aussetzen, dass sich Bank A für Strategie A_3 entscheidet. Es ist also sehr gefährlich, wenn man nur darauf achtet, was für mich das beste Ergebnis wäre. Aus diesem Dilemma hilft uns die sogenannte **Dominanzregel**:*

1. *Mit A_2 steigt Bank A auf jeden Fall schlechter aus als mit A_3 (A_2 wird von A_3 streng dominiert) und scheidet somit als Entscheidung aus. Siehe Tabelle 12.*

2. *Aufgrund dieser Tatsache wird sich Bank B auf keinen Fall für B_1 entscheiden, da B_1 von B_2 streng dominiert wird. B_1 ist somit ebenfalls ausgeschieden. Siehe Tabelle 13.*

3. *Daraufhin wird Bank A sicher nicht A_4 wählen, da nun A_4 von A_3 streng dominiert wird und deshalb ausscheidet. Siehe Tabelle 14.*

4. *Bank B wird nun weder B_3 noch B_4 wählen, weil B_3 und B_4 von B_2 streng dominiert werden und aus diesem Grund ausscheiden. Siehe Tabelle 15.*

5. *Jetzt wählt Bank A bestimmt A_3 und macht somit einen Gewinn von 4%. Siehe Tabelle 16.*

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	-7	5	-4
A_2	3	-4	-7	-3
A_3	5	4	5	7
A_4	10	3	-2	-10

Tabelle 14: Spielmatrix aus der Sicht von Bank A. Zwei Zeilen und eine Spalte sind bereits gestrichen.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	-7	5	-4
A_2	3	-4	-7	-3
A_3	5	4	5	7
A_4	10	3	-2	-10

Tabelle 15: Spielmatrix aus der Sicht von Bank A, nachdem zwei weitere Spalten weggefallen sind.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-5	-7	5	-4
A_2	3	-4	-7	-3
A_3	5	4	5	7
A_4	10	3	-2	-10

Tabelle 16: Endergebnis für die Spielmatrix aus der Sicht von Bank A.

Nach der Dominanzregel ist nun A_3/B_2 übrig geblieben und stellt eine Gleichgewichtslösung dar. Keiner der beiden hat einen Anreiz anders zu handeln, solange der Gegner ebenfalls bei dieser Strategie bleibt.

Es wurde eine Situation erreicht, in der es für keinen der Beteiligten von Vorteil wäre, seine Strategie zu ändern. Dies nennt man „Nash-Gleichgewicht“ und ist ein zentrales Konzept der Spieltheorie.
Dieses Konzept kann nicht nur auf den Spezialfall „Zwei-Personen-Nullsummenspiel“ angewendet werden, sondern kann viel allgemeiner verwendet werden.
Die oben beschriebene spieltheoretische Angehensweise an das Beispiel war nur ein kleiner Ausschnitt der Spieltheorie. Es gibt noch viele weitere Konzepte und Möglichkeiten. Da ich in dieser Arbeit lediglich einen kleinen Einblick in die Denkweisen der Spieltheorie geben möchte, werde ich auf die Unzahl der weiteren Strategien nicht näher eingehen.
Die vorangegangenen Überlegungen sollten lediglich eine Vorstellung davon vermitteln, wie man in reflexiven Zusammenhängen denken kann. Natürlich ist jede Situation individuell und es ist nicht immer leicht ganzheitlich und vernetzt zu denken. Die Spieltheorie stellt lediglich Prinzipien des Denkens dar und kein allgemein gültiges Rezept.

vgl. [25] S.237-266

8 Psychologische Einflussfaktoren auf die Aktienkursentwicklung

Wie bereits erwähnt, gibt es verschiedene Modellierungsmodelle um die Aktienkursentwicklung vorherzusehen und das Risiko zu minimieren. Leider kam es jedoch in der Vergangenheit immer wieder zu Krisen, die man mit keinem Modell erwartet hätte. Es gibt technische Modellierungsverfahren, die sich bereits bewährt haben und gute Prognosen lieferten. Wichtig ist es beim Kauf beziehungsweise Verkauf von Aktien das richtige Timing zu haben, das heißt den richtigen Kauf- beziehungsweise Verkaufszeitpunkt zu erahnen. Diese technischen Analysen können jedoch auch verhängnisvolle psychologische Wirkungen provozieren.
Kritische Marktteilnehmer reagieren bei einem starken Kursanstieg oft mit Skepsis und zweifeln daran, dass es ewig so weitergeht. Aus diesem Grund verkaufen sie, was wiederum Unsicherheiten bei anderen Marktteilnehmern auslöst, die ihre Aktien ebenfalls verkaufen. Dies wirkt sich lawinenartig aus und es kommt unweigerlich zu einem Kurseinbruch. Außerdem gibt es unter den Anlegern in Börsenkreisen oft Gerüchte über die Kursentwicklungen. Diese führen zu Überreaktionen und Übertreibungen, die sich dann auf den Kurs auswirken.

„Analysedaten werden der Psyche nicht gerecht“
Ein Hauptproblem ist, die Grundannahme, dass sich Menschen in bestimmten Situationen immer gleich verhalten. Damit können jedoch extreme Kursschwankungen nicht erklärt werden. Die menschliche Psyche ist sehr komplex und nicht immer leicht zu durchschauen. Sie ist von zahlreichen Einflüssen abhängig: Umweltfaktoren, genetische, kulturelle und geschichtliche Faktoren, eigene Überzeugungen/Werthaltungen, Massenphänomene.
Wenn bei Aktien noch keine vergangenen Daten vorliegen, ist man auf eine subjektive Gewinneinschätzung angewiesen. Diese ist mit großen Unsicherheitsfaktoren verbunden, weil man mit wenig Vorwissen versucht das Verhalten der Menschen vorherzusagen.
Ein interessantes Phänomen ist, dass die Aktienkurse zu Wochenbeginn meist niedriger sind als am Ende der Woche. Es ist also von Vorteil, Aktien an Montagen zu kaufen und an Freitagen zu verkaufen. Zudem wurden Saisoneffekte festgestellt. Im Spätsommer werden in der Regel Gewinne gemacht und der Herbst ist ideal für einen (Wieder-) Einstieg. Zu Beginn des Jahres kommt es häufig zu einem Kursanstieg und die zweite Hälfte des Jahres ist anfällig für sinkende Kurse. Extrem schlechte Kurstage traten fast immer im zweiten Halbjahr auf.
„War in den letzten Jahren ein starker Rückgang bei einer Aktie in einem bestimmten Monat zu beobachten, ist die Wahrscheinlichkeit einer Wiederholung groß, selbst wenn die Karten jedes Mal wieder völlig neu gemischt werden. Daraus exakte Voraussagen oder Gesetzmäßigkeiten abzuleiten, wäre allerdings voreilig. “ [Kitzmann,

A.: *Massenpsychologie und Boerse: So bestimmten Erwartungen und Gefühle Kursverläufe.* Gabler I GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2009, S. 72]
Marktteilnehmer versuchen „Trends“ oder wann der Kurs seine Richtung ändert zu erkennen, um rechtzeitig zu kaufen beziehungsweise verkaufen. Wenn die Widerstandslinie[8] durchbrochen wird, steigen viele Investoren aus. Es konnte bisher noch nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob diese Widerstandslinie eine Wirtschaftsentwicklung widerspiegelt oder psychologischer Natur ist.
Prognosen spielen in der Finanzwelt eine wichtige Rolle und versuchen zukünftige Entwicklungen zu beschreiben. Oft ist es jedoch so, dass sie selbst einen starken Einfluss auf die Entwicklungen haben und somit ihre eigene Wahrheit schaffen. Prognosen sind also ein Versuch die Zukunft aktiv mitzugestalten.
An der Börse wurden klare Muster beobachtet, die auf psychologische Einflussfaktoren zurückzuführen sind. Es wird grundsätzlich bei Kursschwankungen nach oben und nach unten übertrieben. Die Kurse werden durch Massenphänomene und großen Optimismus nach oben getrieben. Bei einer Verzerrung nach unten, treiben Massenhysterie, Ängste und Panik die Kurse in eine Baisse[9]. Gefühle sind ansteckend, ein schlauer Anleger durschaut diese Mechanismen, steuert dagegen und sieht bei dem niedrigsten Kurswert bereits eine Chance für einen neuen Aufschwung. Dazu muss man sich von der Masse absetzen, rational denken, Nervenstärke zeigen und sich von einem allgemeinen Gefühlszustand zu distanzieren. Man muss den Tiefpunkt eines Kurses ungefähr erkennen und investieren.
Viele Anleger erkennen einen Kursrutsch zu spät und steigen nicht rechtzeitig aus. Dieses Phänomen ist ebenfalls psychologischer Natur und es gibt eine einfache Lösung für dieses Problem. Bevor investiert wird, sollte festgelegt werden, bei welchem Verlust die Aktie verkauft werden soll beziehungsweise bei welchem Gewinn man aussteigt.

vgl. [15] S. 63-83

Bei den mathematischen Modellen, die in den vorderen Kapiteln näher beschrieben wurden, sind wir immer von einer Zufälligkeit ausgegangen. Wie wir gerade erfahren haben, wirken sich psychologische Einflussfaktoren auf den Kurs aus und die angenommene Zufälligkeit ist somit zu hinterfragen. Die mathematischen Modelle sind sehr hilfreich und haben an der Börse große Bedeutung, dennoch sollte man die möglichen psychologischen Auswirkungen ebenfalls berücksichtigen.

[8] Eine Widerstandslinie signalisiert ein Kursniveau, das in der Vergangenheit erreicht aber nie überwunden wurde.

[9] Eine Baisse ist eine „Phase anhaltender starker Kursrückgänge an der Börse“ [31]

9 Finanzmathematik im Mathematikunterricht

Viele finanzmathematische Themen lassen sich sehr gut mit den traditionellen Unterrichtsinhalten verbinden und es kann bereits in der Volksschule damit angefangen werden. Dazu ein kurzer Überblick wie eine finanzmathematische Allgemeinbildung in den Mathematikunterricht einfließen könnte:

9.1 Wie kann die Finanzmathematik in den Unterricht eingebaut?

Arithmetik: Bereits in der Volksschule werden die Schüler/innen mit dem Thema Geld konfrontiert. Es eignet sich sehr gut dies mit Fragen zu alltäglichen Situationen zu beginnen. Die Klasse kann zum Beispiel gemeinsam die Preise für eine Jause berechnen, verschiedene Zug-/Flugtarife vergleichen, Eintrittspreise für das Schwimmbad/die Eishalle/das Theater bei unterschiedlichen Preismodellen zu bestimmen. Dies sind natürlich lediglich einige Beispiele von vielen. Da der Alltag viele Situationen bietet, die zu neuen realitätsbezogenen Beispiele inspirieren, sollten nicht nur Aufgaben aus Büchern behandelt werden, sondern auch selbst erfundene Fragestellungen in den Unterricht eingebaut werden.
Am Ende der Unterstufe (Gymnasium, Hauptschule, Gesamtschule) kann die Kursfestsetzung einer Aktie, das „Angebot und Nachfrage“- Prinzip, behandelt werden, dafür sind Kenntnisse zu den Grundrechnungsarten ausreichend. Weiters kann die Bestimmung des Aktienindexes eingeführt werden, dafür müssen bereits Kenntnisse zu den Grundrechnungsarten und der Bruchrechnung vorhanden sein.

Prozentrechnung: Die Prozentrechnung ist ein wichtiger Inhalt im Mathematikunterricht und ermöglicht verschiedenen finanzmathematischen Fragestellungen nachzugehen. Eine wichtige Anwendung der Prozentrechnung ist die Zinsrechnung, mit der Beispiele der linearen Verinsung behandelt und realitätsnahe Sparpläne erstellt werden können. Die Zinsrechnung ist mittlerweile fester Bestandteil im Unterricht und man findet in vielen Lehrbüchern Beispiele dazu.
Bemerkung: Im Vergleich zu früher ist die Zinsrechnung heute zurückgegangen. Meiner Meinung nach wäre es wichtig ein Mittelmaß zu finden. Früher war die Zinsrechnung im Lehrplan etwas zu dominant und heute wird sie ein wenig vernachlässigt.

Funktionen: Funktionen werden sowohl in der Unterstufe als auch in der Oberstufe genau durchgenommen. Im Bereich lineare Funktionen, ist eine interessante Aufgabe für Schüler/innen, verschiedene Handytarife/Internettarife miteinander zu vergleichen. Da sehr viele Jugendliche bereits selbst ein Handy beziehungsweise Internet besitzen, ist dieses Beispiel sicherlich interessant und gut vorstellbar. In der Oberstufe wird die Kosten- und Preistheorie behandelt. Da Grafiken hierbei sehr hilfreich sind und zu einem besseren Verständnis führen, bietet sich die Möglichkeit an „Geogebra“ unterstützend einzubauen. Das ist ein gratis Software-Programm mit dem sich Grafiken sehr schnell und einfach darstellen lassen und alle Variablen veränderbar sind. Die Schüler/innen können also durch Ausprobieren die Thematik eventuell besser verstehen [10].

Exponentielles Wachstum: Wenn das exponentielles Wachstum erlernt wird, kann die Zinsrechnung auf die exponentielle Verzinsung und den Zinseszinseffekts erweitert werden. Langfristige und allgemeine Spar- und Tilgungspläne, Rückzahlungen beim Ratenkauf und die Problematik des Effektivzinssatzes können somit betrachtet werden. Wenn die Schüler/innen die Grundkenntnisse zur Zinsrechnung beherrschen, kann die Anleihe als mögliche Anlageform behandelt werden.

Stochastik: Der Begriff Stochastik fasst die Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik zusammen und viele finanzmathematische Themen können mittels Stochastik behandelt werden. Es kann beispielsweise ein grober Überblick zur Versicherungsmathematik gegeben werden. Für das Lösen vieler Aufgaben in diesem Bereich ist bereits Wissen zur diskreten Zufallsvariable und der Definition von fairen Spielen ausreichend.
Ein weiteres sehr spannendes Kapitel ist die Mathematik von Aktien. Aktienkurse können mittels beschreibender Statistik analysiert werden. Zudem kann die Klasse gemeinsam aus vergangenen Kursdaten einer Aktie mit Hilfe einfacher Methoden einer mathematischen Aktienanalyse Schätzintervalle und Wahrscheinlichkeiten für die kommenden Tage/Wochen angeben und ihre Werte später mit den tatsächlichen Kursen vergleichen.
Zum Ende der Oberstufe ist es reizvoll wichtige Gebiete der Stochastik wie die fairen Spiele und das Binomialmodell auf die Optionspreis-Theorie anzuwenden. Der Preis einer Option kann auf Grundlage des No-Arbitrage-Prinzips und des Black-Scholes-Modells entwickelt und analysiert werden.

[5] S.66-71

9.2 Warum eine finanzmathematische Allgemeinbildung in den Unterricht eingebaut werden sollte?

Vorweg eine kurze Definition was unter finanzieller Allgemeinbildung verstanden wird: „Finanzielle Allgemeinbildung ist die Vermittlung von Verständnis, Wissen und sozialer Handlungskompetenz beim Umgang mit den Finanzdienstleistungen in Kredit, Anlage, Zahlungsverkehr und Versicherungen, die vor allem Banken und

[10] Ein Unterrichtsvorschlag dazu befindet sich im Kapitel „Umsetzungsbeispiele für die Schule“

Versicherungen anbieten." [Reifner in Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht.* Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009, S.66]
Das Anlage- und Kreditwesen gestaltet sich heutzutage wesentlich komplexer und komplizerter als vor ein paar Jahren. Früher existierte als einzige Anlageform das Sparbuch, das durch die vielen anderen Möglichkeiten immer mehr an Bedeutung verliert. Jugendliche müssen sich außerdem jetzt mehr Gedanken über eine Altersvorsorge machen als früher. Obwohl es natürlich diverse Anlagebertater/innen gibt, ist es von großem Vorteil, wenn ein gewisses Grundwissen bereits besteht, um nicht von der Kompetenz eines Beraters abhängig zu sein. Ziel sollte es sein. Personen dabei zu unterstützen, kritisch und eigenverantwortlich zu handeln und in der Lage sind sowohl im privaten als auch im beruflichen Bereich, ihr Leben fianziell zu meistern. Aus diesem Grund ist es wichtig, die finanzmathematische Allgemeinbildung in der Schule so praxisnahe und anbieterunabhängig wie möglich zu gestalten. Wie bereits erwähnt gibt es viele Anknüpfungspunkte, jedoch wird die Finanzmathematik bisher leider in einigen Büchern vernachlässigt beziehungsweise lediglich als eigenes Kapitel eingeführt. Meiner Meinung nach wäre es jedoch sinnvoll finanzmathematische Themen in verschiedene Kapitel einfließen zu lassen und sie nicht getrennt zu betrachten. Die Wachstums-, Zins- und Prozentrechnungen sind bereits ein fester Bestandteil im Unterricht. Das spannende Thema der stochastischen Finanzmathematik wird jedoch kaum gelehrt und es gibt wenig Literatur zur Umsetzung dieser Thematik im Unterricht.
Daume entwickelte eine Grafik, die darstellt, wie die finanzmathematische Allgemeinbildung in den Unterricht einfließen könnte. Siehe Abbildung 25. Da diese Grafik auf das deutsche Schulsystem ausgerichtet ist, sind kleine Anpassungen an den österreichische Lehrplan notwendig. Dabei handelt es sich lediglich um eine Veränderung der Reihenfolge, die Vernetzungen und Inhalte können übernommen werden.

Es handelt sich hierbei lediglich um eine grobe Einteilung, die noch viele Konkretisierungen zulässt. Durch das Wiederaufgreifen bestimmter Themen, ergeben sich Vernetzungen.

[5] S.66-71

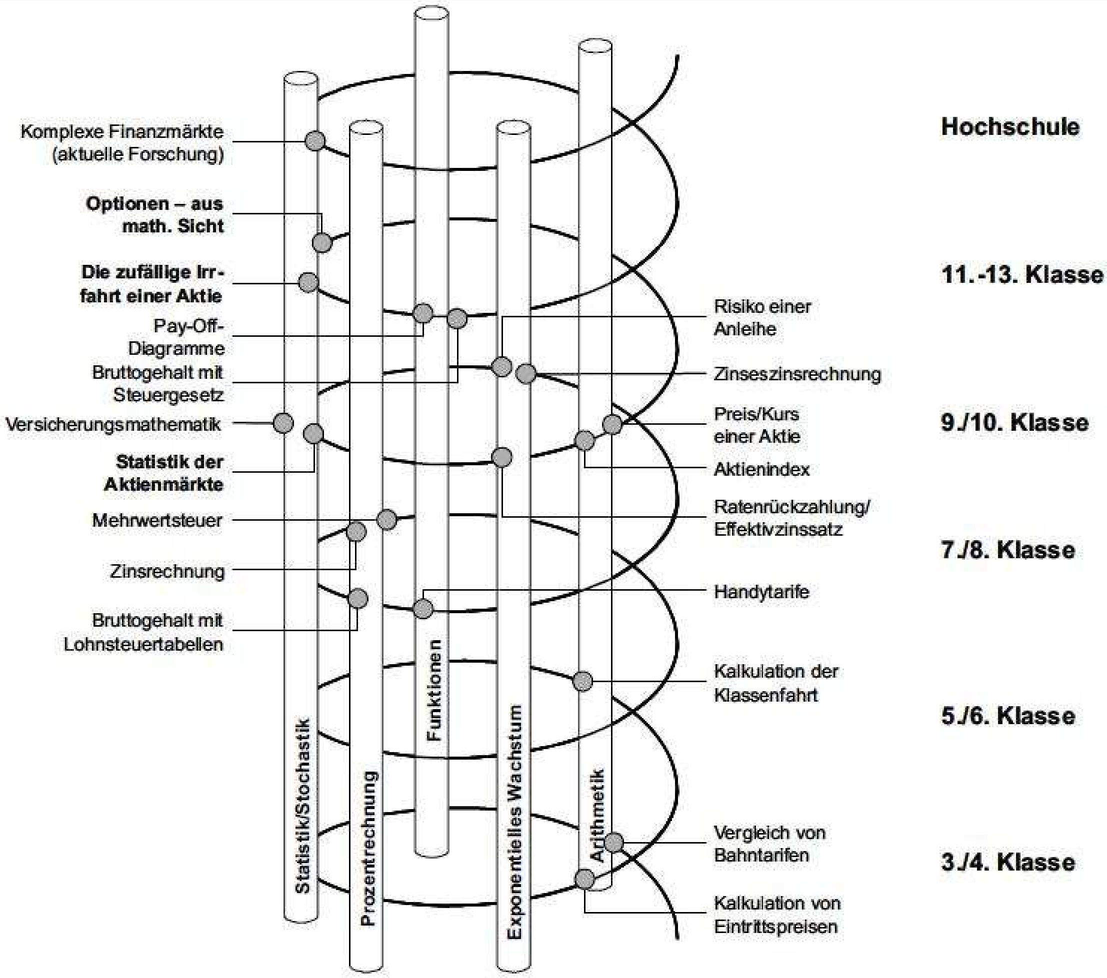

Abbildung 25: Mögliches Spiralcurriculum für eine finanzielle Allgemeinbildung im Mathematikunterricht entnommen aus [5] S. 71

9.3 Umsetzungsbeispiele für die Schule

9.3.1 Lernperiode zu Kosten- und Preistheorie

Im Vorfeld sollte den Schüler/innen bereits ein theoretischer Input gegeben werden. Die Lehrperson präsentiert die verschiedenen Eingaben in Geogebra auf einem Beamer. Die Schüler/innen versuchen in Zweier-Teams auf einem Computer die einzelnen Schritte nachzumachen. Mit Hilfe der graphischen Darstellung und der Möglichkeit die Kurven schnell und einfach zu verändern, sollen die Fragen zur Theorie beantwortet werden. Diese Beispiele können auch zur Festigung (oder auch Motivation) mathematischer Begriffe oder Resultate verwendet werden.

Die Kostenfunktion und ihr Verlauf

1. Wo kannst du im Graphen und in der Funktionsgleichung die Fixkosten ablesen?

2. Gib an welche der drei Funktionen K_1, K_2 und K_3 linear, quadratisch bzw. kubisch ist!

3. Betrachte die Steigung der Funktionen an verschiedenen Stellen!
   Ist diese bei allen Funktionen gleich?

4. Wie verändert sich die Steigung bei den einzelnen Funktionen?

5. Versuche die Verläufe der einzelnen Kostenfunktionen zu interpretieren!

Die grafische Darstellung in Geogebra könnte wie in Abbildung 26 aussehen. Auf der rechten Seite sind die Schieberegler zu sehen, die von den Schüler/innen verändert werden sollen. Ohne großen zeitlichen Aufwand haben sie die Möglichkeit viele verschiedene Funktionen zu vergleichen.

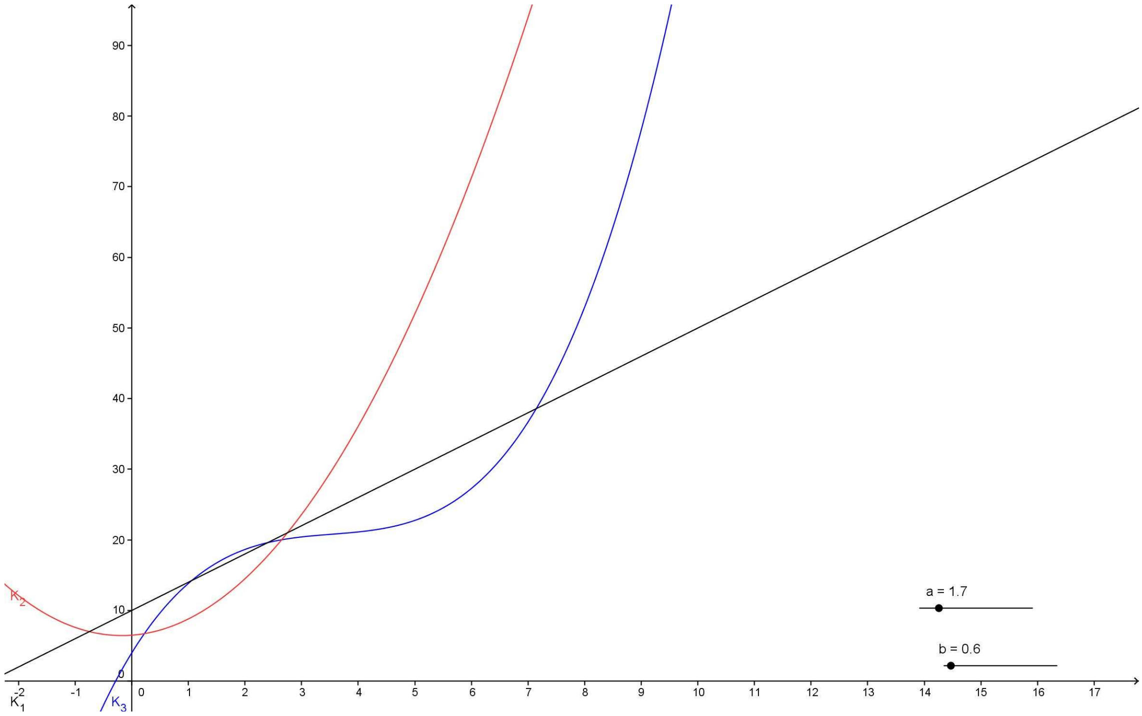

Abbildung 26: Grafische Darstellung in Geogebra

Kubische Kostenfunktion - Stückkosten, Betriebsoptimum, Erlösfunktion (Konkurrenzbetrieb)

1. Wir legen die Koeffizienten der Funktion fest, und zeichnen die Kostenfunktion $K(x) = ax^3 - bx^2 + cx + d$.

2. Wir zeichnen die Stückkostenfunktion $K_{\text{Stück}} = \frac{K(x)}{x}$.

3. Wir bestimmen das Minimum der Stückkostenfunktion, das Betriebsoptimum. $K'_{\text{Stück}}(x_{\text{opt}}) = 0 \rightarrow x_{\text{opt}}$ ... Stelle des Betriebsoptimums.[11]

4. Welchen Zusammenhang kannst du zwischen der Stückkostenfunktion $K_{\text{Stück}}$ und der ersten Ableitung der Kostenfunktion $K'(x)$ an der Stelle des Betriebsoptimums erkennen?
Könnte man das Betriebsoptimum auch auf eine zweite Art ermitteln?

5. Wir zeichnen im Betriebsoptimum x_{opt} eine Tangente an die Kostenfunktion $K(x)$. Diese Tangente ist beim Konkurrenzbetrieb gleich der Erlösfunktion $E(x) = px$. (p ... Preis pro ME)

[11] An der Stelle x_0 einer reellen Funktion $f_{(x)}$ befindet sich ein lokales Extremum, wenn die Ableitung $f'_{(x)}$ der Funktion an der Stelle x_0 gleich Null ist, also $f'_{(x_0)} = 0$.

6. An welcher Stelle deckt der Erlös die Kosten?

7. Kostenkehre:
   Welchen Zusammenhang kannst du zwischen der Kostenkehre W und den drei Funktionen $K(x)$, $K'(x)$ und $K''(x)$ feststellen?

Abbildung 27 zeigt die grafische Darstellung in Geogebra.

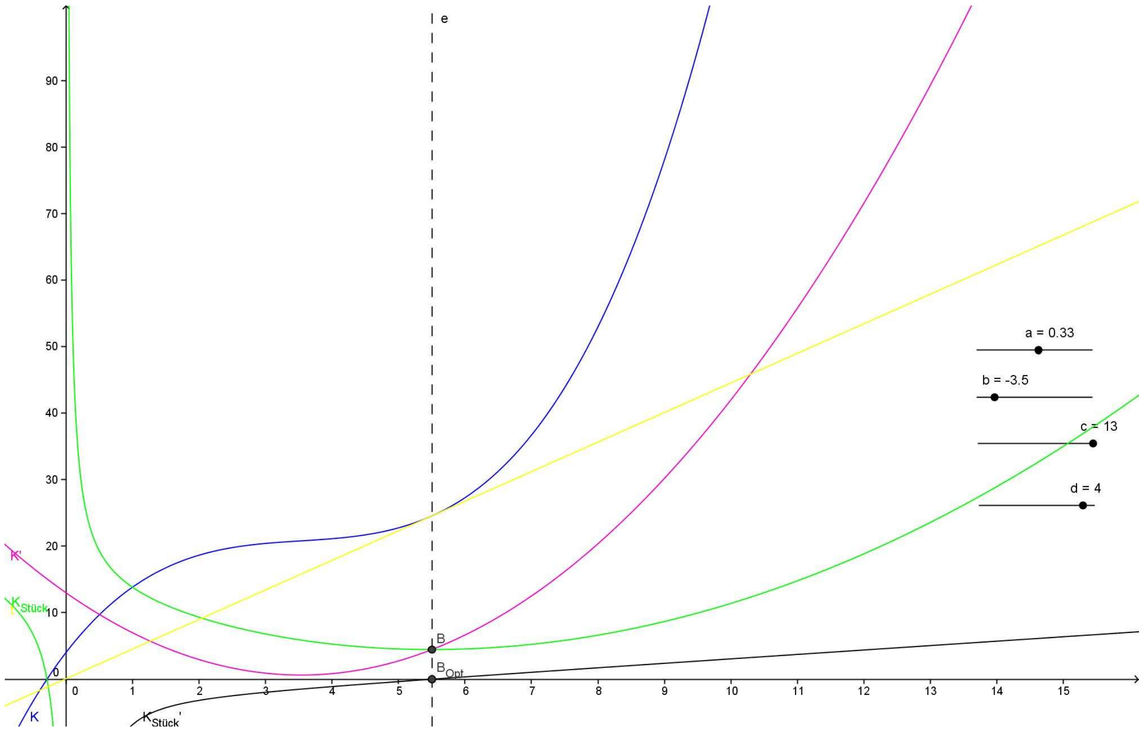

Abbildung 27: Grafische Darstellung in Geogebra

Gewinnbereich und maximaler Gewinn (Konkurrenzbetrieb)

1. Wir zeichnen eine kubische Kostenfunktion.

2. Wir zeichnen die Erlösfunktion $E(x) = px$.

3. Wir zeichnen die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$.

4. Wir zeichnen die Nullstellen der Gewinnfunktion ein.
   $G(x) = 0 \rightarrow x_1$... Gewinnschwelle, x_2... Gewinngrenze

5. Was gilt an diesen Stellen für die Kostenfunktion $K(x)$ und die Erlösfunktion $E(x)$? Wie könntest Du Gewinnschwelle und Gewinngrenze daher auch berechnen?

6. Wir sehen, dass wir nur zwischen Gewinnschwelle und Gewinngrenze Gewinn haben. Diesen Bereich nennen wir Gewinnschwelle.

7. Wir zeichnen das Maximum der Gewinnfunktion ein
$G'(x_{G_{max}}) = 0 \rightarrow x_{G_{max}}$ ... Menge des maximalen Gewinns, $G(x_{G_{max}}) = E(x_{G_{max}}) - K(x_{G_{max}})$ .... maximaler Gewinn.

8. Bei welchem Verkaufspreis fallen Betriebsoptimum und gewinnmaximierende Menge zusammen? Was kannst du hier über den Gewinnbereich sagen. Wie groß ist der Gewinn bei diesem Verkaufspreis?

9. Welche Funktionen verändern sich bei einer Änderung des Verkaufspreises nicht, d.h. sind unabhängig vom Verkaufspreis?

10. Berechne für einen beliebigen Verkaufspreis den maximalen Gewinn bei der gegebenen Kostenfunktion.

Abbildung 28 zeigt die grafische Darstellung in Geogebra.

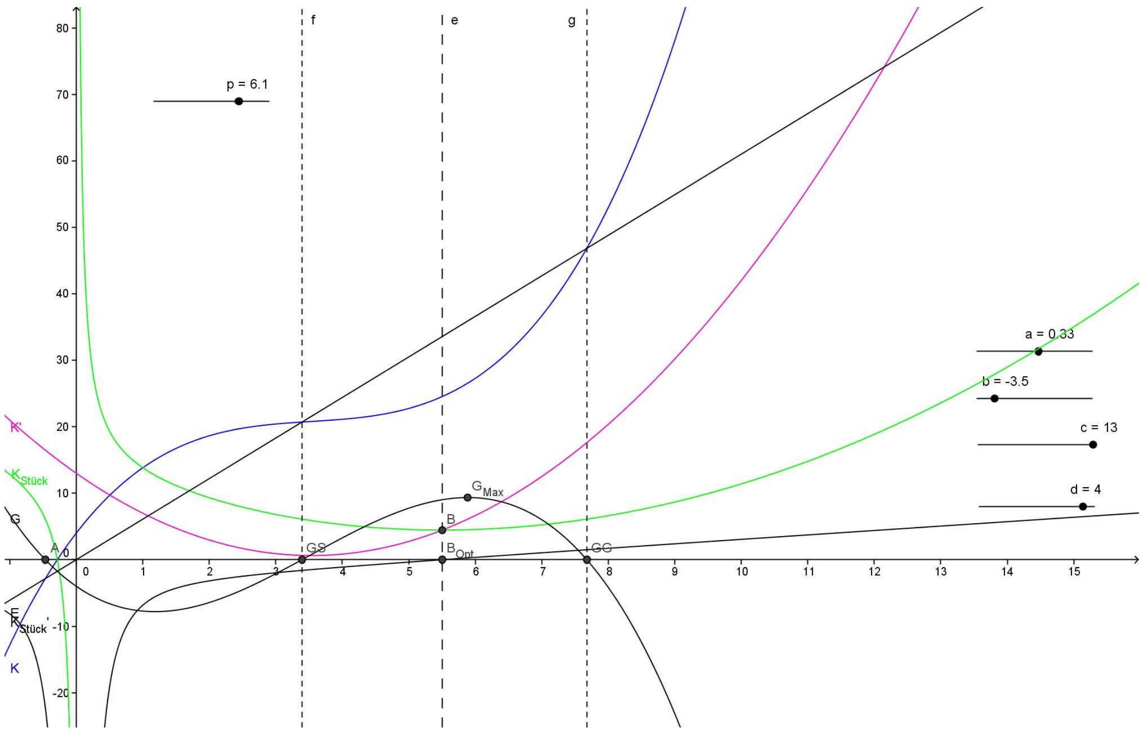

Abbildung 28: Grafische Darstellung in Geogebra

Betriebsoptimum, Gewinn und langfristige Preisuntergrenze (Konkurrenzbetrieb)

1. Was passiert, wenn Betriebsoptimum und gewinnmaximierende Menge zusammenfallen, d.h. gleich groß sind?
2. Bei welchem Verkaufspreis ist dies der Fall?
3. Was kannst du bei dieser Situation über den Gewinnbereich sagen?
4. Warum spricht man bei diesem Verkaufspreis von der langfristigen Preisuntergrenze?
5. Was würde passieren, wenn du als Unternehmer/ Unternehmerin den Verkaufspreis noch tiefer ansetzen würdest?

10 Online Börsenspiel

Einige Banken bieten immer wieder Online-Börsenspiele an. Auf diesem Weg können neben Erwachsenen auch Schüler beziehungsweise Schülergruppen erste Erfahrungen mit dem Kauf und Verkauf von Aktien machen.
Aus diesem Grund habe ich mich näher mit dem Börsenspiel der oberösterreichischen Raiffeisenbank beschäftigt. Das Spiel startete am 1. Oktober 2009 und endete mit den Schlusskursen vom 25. November 2009. Man ging dabei kein Risiko ein, konnte aber große Gewinne abräumen. Nach den acht Wochen wurden die besten fünf der Erwachsenenwertung, der beste Studierende, die drei besten Schüler und die drei besten Klassen mit Geschenken belohnt. Jede/r Spieler/in bekommt fiktiv € 50.000 die er/sie in Aktien investieren kann. Pro Aktie durften maximal 20% des Gesamtkapitals investiert werden. Es ist möglich Limits einzugeben, wenn diese erreicht werden wird verkauft oder gekauft. Für jeden Auftrag werden fiktive Spesen von 0,25% des Transaktionswertes abgezogen. Jede Order kostet zusätzliche 3 Euro.

vgl. [36]

11 Anhang

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Tabelle der Normalverteilung, entnommen aus [35] S. 1

12 Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\exists$	es existiert
$\forall$	für alle
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$x \in M$	x ist Element aus der Menge M
E_a^b	einfache Rendite im Zeitraum $[t_a; t_b]$
L_a^b	logarithmische Rendite im Zeitraum $[t_a; t_b]$
$\bar{\mu}$	Drift (arithmetisches Mittel) einer Aktie
σ	Volatilität (empirische Standardabweichung) einer Aktie
$\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	X ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Parametern μ und σ

13 Kurzzusammenfassung

Diese Arbeit liefert einen kleinen Einblick über Risiken und Chancen von Anleihen, Aktien und Optionen. Keine dieser drei Anlageformen ist risikofrei, wobei Anleihen relativ sicher sind.
Aktien und Optionen bringen ein deutlich größeres Risiko mit sich, eröffnen jedoch auch neue Chancen und ihr Risiko kann durch richtige Modellierung zumindest reduziert werden.
Zu den Risiken einer Anleihe gehören unter anderem das Zinsänderungsrisiko, das Liquiditätsrisiko, das Bonitätsrisiko, das Kündigungsrisiko, das Inflationsrisiko, das Währungsrisiko, das Auslosungsrisiko, das Transferrisiko, das Steuerrisiko, das Abschreibungsrisiko und das Kreditrisiko.
Bei Aktien und Optionen ist das größte Risiko ein gleichbleibender oder sogar fallender Aktienkurs. In diesem Fall wäre man nämlich mit einem Sparbuch oder einer Anleihe vermutlich besser ausgestiegen. In meiner Arbeit habe ich verschiedene mathematische Modelle vorgestellt, mit denen man die Wahrscheinlichkeit eines Anstiegs beziehungsweise eines Abfalls des Kurses vorhersagen kann. Leider sind Vorhersagen jedoch immer mit Unsicherheiten und somit mit möglichen Fehlprognosen verbunden. Es gibt einige sehr brauchbare Modelle, wie das „Random-Walk-Modell“, das „Black-Scholes-Modell“ und das „Binomialmodell“, die in der Praxis bereits erfolgreich angewendet wurden und die Risiken deutlich minimierten. Aktien und Optionen können zu großen Verlusten aber auch zu großen Gewinnen verhelfen und je besser man die finanzmathematischen Hintergründe verstehen und anwenden kann, desto größer ist die Chance Profite zu erzielen.
Zudem ist beim Handeln an der Börse ein spieltheoretisches Grundverständnis von großem Vorteil. Da der Aktienkurs zum Teil auch vom Handeln anderer Marktteilnehmer abhängig ist, sollte man versuchen die anderen Beteiligten zu durchschauen und die für sich beste Strategie herausfinden.

14 Abstract

This thesis gives a brief overview of bond-, stock- and option-risks and -opportunities. None of these investment forms are riskless, but bonds are saver than the others. On the one hand stocks and options contain more risks, but on the other hand they open new opportunities and their risks can be reduced with correct modeling.
Bond-risks are for example the interest rate risk, the liquidity risk, the credit risk, the inflation risk, the exchange rate risk, the transfer risk, the tax risk, the financial risk and so on.
The risk of stocks an options is, that the stock price could fall or does not change after a period. In that case you would have made more money with a traditional bankbook or bonds.
I introduced some mathematical methods to calculate the probability, that the price will rise or fall. Unfortunately prognoses are always connected with uncertainties. There are some usefull models, for example the „Random-Walk-theory“, the „Black-Scholes-model“ and the „Binomial model“. These models have already been very successful in the past. With stocks and options it is possible to make much money but it is also possible to lose a lot.
Moreover, if you invest money on the stock-market, it will be helpfull to know some basics of game theorie. Other market participants influence the stock price, therefore it is necessary to know how people act and find out your perfect strategy.

Literatur

[1] Adelmeyer, M.; Warmuth, E.: *Finanzmathematik für Einsteiger*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 2003.

[2] Albrecher, H.; Binder, A.; Mayer, P.: *Einführung in die Finanzmathematik*. Birkhäuser Verlag AG, Basel/ Schweiz, 2009.

[3] Bachmann, U.; Trost, R.: *Die Komponenten des Kreditspreads: Zinsstrukturunterschiede zwischen ausfallbehafteten und risikolosen Anleihen*. Deutscher Universitäts-Verlag, 1. Auflage, Wiesbaden, 2004.

[4] Daldrup, A.: *Konzeption eines integrierten IV-Systems zur ratingbasierten Quantifizierung des regulatorischen und ökonomischen Eigenkapitals im Unternehmenskreditgeschäft unter Berücksichtigung von Basel II.* , Cuvillier Verlag, Göttingen, 2007.

[5] Daume, P.: *Finanzmathematik im Unterricht*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.

[6] Davis, M.: *Mathematics of Financial Markets*. Mathematics Unlimited, 2001.

[7] Dommermuth, T.; Hauer, M.; Nobis, F.: *Geldanlage von A-Z*. Taschenguide, 3. Jg, 1989.

[8] Drummen, M.; Zimmermann, H.: *Portfolioeffekte des Währungsrisikos*. In: Finanzmarkt und Portfolio Management, Nr. 1, 6. Jg, 1992.

[9] Dubacher, R.; Zimmermann, H.: *Risikoanalyse schweizerischer Aktien: Grundkonzepte und Berechnungen*. In Finanzmarkt und Portfolio Management, Nr. 1, 3. Jg, 1989.

[10] Eberhardt, B.: *Transferrisiko bei privaten Kofinanzierungen internationaler Entwicklungsbanken*. Diplomarbeit im Studiengang Volkswirtschaftslehre, Hochschule für Wirtschaft und Umwelt, Nürtingen-Geislingen, 2007.

[11] Ehrlich, W.; Esenwein-Rothe, I.; Jürgensen, H.; Rose, K.: *Kompendium der Volkswirtschaftslehre*: Band 1. Vandenhoeck & Ruprecht, 5. Auflage, Göttingen, 1975.

[12] Fulmek, M.: *Finanzmathematik*. Skriptum zur Vorlesung im SS 2008, Universität Wien, 2008.

[13] Götte, R.: *Aktien, Anleihen, Futures, Optionen: Das Kompendium*. Tectum Verlag, Marburg, 2001.

[14] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung in Lehre und Gebrauch*. Teubner Verlag, 5. Auflage, Wiesbaden, 2006.

[15] Kitzmann, A.: *Massenpsychologie und Boerse: So bestimmten Erwartungen und Gefühle Kursverläufe*. Gabler I GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2009, S. 63-84.

[16] Lovelock, D.; Mendel, M.; Wright A.L.: *An Introduction to the Mathematics of Money: Saving and Investing*. Springer, New York, 2007.

[17] Lauter, J.: *Mathematik Formelsammlung*. Cornelsen, 2. Auflage, Berlin, 2002.

[18] Ødegaard, B., A.: *Financial Numerical Recipes in C++*. verfügbar unter http://finance.bi.no/ bernt, April 2007.

[19] Pape, U.; Merk, A.: *Zur Angemessenheit von Optionspreisen: Ergebnisse einer empirischen überprüfung des Black/Scholes-Modells*. ESCP-EAP, Berlin, 2003.

[20] Pelikan, E.: *Chancen mit geschlossenen Fonds: Attraktive Renditen und effektive Risikosteuerung für das private Portfolio*. Gabler I GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2007.

[21] Pflaumer, P.; Heine, B.; Hartung J.: *Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften*. Oldenburg Wissenschaftsverlag, 3. Auflage, München, 2005.

[22] Ross, S.M.: *An elementary introduction to mathematical finance: Options and other topics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[23] Schira, J.: *Statistische Methoden der VWL und BWL: Theorie und Praxis*. Pearson Studium, 3. Auflage, München, 2009.

[24] Schlittgen, R.: *Einführung in die Statistik: Analyse und Modellierung von Daten*. Oldenburg Wissenschaftsverlag GmbH, 10. Auflage, München, 2003.

[25] Schredelseker, K.: *Grundlagen der Finanzwirtschaft: Ein informationsökonomischer Zugang*. Oldenburg Wissenschaftsverlag GmbH, München, 2002.

[26] Shreve, S. E.: *Stochastic Calculus for Finance 2: Continous-Time Models*. Springer, New York, 2004.

[27] Stechow, I.: *Bewertung festverzinslicher Wertpapiere unter modifizierten Risikoaspekten*. (Diplomarbeit) GRIN Verlag, 1. Auflage, Wismar, 2002.

[28] Steiner, P.; Uhlir, H.: *Wertpapieranalyse*. Physica-Verlag, 4. Auflage, Heidelberg, 2001.

[29] Rudolf, J.: *Stabilität des Black - Scholes - Modells im Hinblick auf die Volatilität.* Freiburg, 1993.

[30] Wenninger, C.: *Markt- und Kreditrisiken für Versicherungsunternehmen: Quantifizierung und Management.* Deutscher Universitäts-Verlag, 1. Auflage, Wiesbaden, 2004.

[31] http://boersenlexikon.faz.net/baisse.htm, aufgerufen am 3.3.2010.

[32] http://www.charttec.de/html/lexikon_random_walk_markteffizienz.php, aufgerufen am 5.01.2010.

[33] http://www.clickoptions.de/files/pdf/presse/de/articles18.pdf, aufgerufen am 26.01.2009.

[34] http://www.investopedia.com/terms/b/bid-askspread.asp, aufgerufen am 17.12.2009.

[35] http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/Statistik-Hesse-SS08/uebungsblaetter/normalverteilungstabelle.pdf, aufgerufen am 5.01.2010.

[36] http://www.oon-boersespiel.at, aufgerufen am 2.11.2009.

[37] http://www.optiontradingpedia.com/free_black_scholes_model.htm, aufgerufen am 10.01.2009.

[38] http://www.wertpapierdepot.net/wertpapiere/anleihen.html, aufgerufen am 25.10.2009.

[39] http://www.investmentsparen.net/anleihen-und-marktzins.html, aufgerufen am 11.12.2009.

[40] http://www.wertpapierdepot.net/wertpapiere/wertpapiere.html, aufgerufen am 24.10.2009.

[41] http://www.wertpapierdepot.net/wertpapiere/wertpapierarten.html, aufgerufen am 24.10.2009.

[42] http://www.wirtschaftslexikon24.net, aufgerufen am 3.01.2010.

15 Lebenslauf

Name:	Sonja Weissenböck
Geburtsdatum:	05. April 1984, Linz
Staatsbürgerschaft:	Österreich
E-Mail:	sonja.wb@gmx.net
Eltern:	Walter und Sabine Weissenböck
Ausbildung:	Juni 2003 Matura im Borg für Leistungssport 2003-2004 Studium an der WU (Management Science) 2004-2010 Sport und Mathematikstudium (Lehramt)
Auslandserfahrung:	Wintersemester 2006 in Schweden (Technische Universität von Luleå)
Zusatzausbildungen:	Rettungsschwimmschein und Rettungsschwimmlehrschein Erste Hilfe-Kurs und Prüfung
Sporterfolge	8. Platz, Weitsprung, U18 WM 2001 15. Platz, Hürdenlauf, U18 WM 2001 9. Platz, Hürdenlauf, Europäische olympische Jugendspiele 2001 15 österreichische Meistertitel