DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Wie man in der Schule simuliert – Ideen zur Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Schulunterricht

Verfasserin

Christina Moser

Angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, Dezember 2009

Matrikelnummer:	0502172
Studienkennzahl laut Studienblatt:	A 190 406 313
Studienrichtung laut Studienblatt:	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Dr. Peter Raith

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In meiner Diplomarbeit beschäftige ich mich mit dem Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht. Ich möchte Ideen liefern, wie man als Lehrperson dieses Teilgebiet der Mathematik in den Unterricht einführen könnte. Dabei nehme ich besonders auf die Oberstufe Bezug.

Wenn man den aktuellen Lehrplan betrachtet, fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur ein sehr geringes Ausmaß umfasst. Speziell in der Unterstufe wird dieses Thema komplett ausgegrenzt, es werden lediglich die Grundlagen der Statistik eingeführt. Im Oberstufenlehrplan ist erst ab der 6. Klasse die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgesehen. Ich möchte nun mit meiner Arbeit zeigen, dass das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung einen wichtigen Bestandteil der Mathematik umfasst, der mithilfe verschiedenster Methoden und interessanter Beispiele den Schülern auf vielfache Weise beigebracht werden kann.

Ich habe im ersten Kapitel versucht, die wichtigsten Gründe zusammenzufassen, weshalb es nötig ist, den Schülern eine Vorstellung über die Wahrscheinlichkeit zu vermitteln. Schon im Kindesalter wird man mit Glücks - spielen konfrontiert, zum Beispiel durch das Würfelspiel „Mensch, ärgere dich nicht“, wobei der Ausgang des Spieles vom Zufall abhängig ist. Es liefert aber auch die tägliche Wettervorhersage Aussagen über Wahrscheinlichkeiten. Es wird also die Bedeutung der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht deutlich, da dies ein Gebiet ist, dass uns tagtäglich begleitet.

Weiters habe ich mich in einem eigenen Kapitel mit der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst, um zu zeigen, wo ihre Anfänge liegen, und wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung überall Anwendung fand.

Ebenso möchte ich einen Einblick in die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bei Kindern geben, da dies einen interressanten Aspekt bei der Planung des Unterrichts darstellt.

Nach diesen einführenden Kapiteln werde ich mich der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht widmen. Ich habe mich dafür entschieden, dieses Thema mithilfe von Simulationen einzuführen, dabei habe ich 2 konkrete Beispiele an den Anfang gestellt. Hierbei kann durch gezieltes Erarbeiten eines Beispieles das Interesse an diesem neuen Kapitel bei den Schülern geweckt werden.

Danach halte ich es für wichtig, die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen, und schließlich mit dem Rechnen mit Wahrscheinlickeiten zu beginnen. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariablen, aber auch Erwartungswert und Varianz spielen hier eine bedeutende Rolle.

An dieses Kapitel schließt schließlich noch ein Abschnitt über die Kombinatorik an.

Im abschließenden Kapitel behandle ich die Monte-Carlo-Methode, und bringe auch einige Beispiele dazu.

Ich habe mit dieser Arbeit versucht, eine von vielen Möglichkeiten aufzuzeigen, wie man einen Unterricht über die Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbauen könnte.

Ich möchte auch noch darauf hinweisen, dass alle Bezeichnungen geschlechtsneutral zu verstehen sind, da ich wegen der Einfachheit die grammatikalisch näher liegende Form verwendet habe.

Kapitel 1

Gründe für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht

1.1 Einführung

Ansätze für Gründe für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Schulunterricht finden wir durch einen Blick in unser Umweltgeschehen. Die folgenden Zeitungsmeldungen und Zitate von Wissenschaftlern und Schriftstellern beschreiben den Wissensstand zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Zitate sind aus größeren Zusammenhängen genommen und geben das Zeitgeschehen wieder, kennzeichnen Standpunkte von Wissenschaftlern und Schriftstellern, und auch Haltungen von Menschen. So soll deutlich gemacht werden, wie sehr Zufall und die Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik unsere Umwelt und auch unser Leben prägen.

1.2 Begründungsaspekte in Beispielen

([13], S. 11-21)

David Bergamini:

„Sicherheit ist etwas, das es im menschlichen Leben so gut wie gar nicht gibt. Wir alle sind in hohem Maße vom Zufall abhängig. Unvorhersehbar ist die Zusammensetzung der Erbfaktoren, die unser Äußeres bestimmen; ein unachtsamer Schritt bringt uns möglicherweise ins Krankenhaus, ein Einsatz bei einem Rennen verschafft uns vielleicht einen Gewinn. ... Da wir den Zufall in keiner Weise unter unsere Herrschaft bringen können, versuchen wir, wenigstens die Möglichkeit eines bestimmten Geschehens abzuschätzen. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten gehört seit undenklichen Zeiten zu den menschlichen Beschäftigungen, aber erst seit dem 17. Jahrhundert haben sich die Mathematiker ernsthaft damit befaßt“.

Stichwörter: Sicherheit, Zufall, Abschätzung der Möglichkeit eines bestimmten Geschehens - Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

L. Jànossy:

„…; im täglichen Leben sind wir gezwungen, alle unsere Handlungen auf solche extremen Wahrscheinlichkeiten zu basieren. Wir überschreiten die Straße in einem Augenblick, wo es uns sehr wahrscheinlich erscheint, daß uns kein Fahrzeug überfahren wird. Wie es die Verkehrsunfälle zeigen, können wir uns nicht auf den Fall beschränken, wo es schlechthin sicher ist, daß die Straße überkreuzt werden kann. Ferner benützen wir ein Flugzeug als Verkehrsmittel, obwohl wir aus der Verkehrsstatistik wissen, daß es nur sehr wahrscheinlich ist, daß wir am Ziel ankommen werden. … Wir müßten aufhören zu essen, wenn wir mit Sicherheit die Gefahr vermeiden wollten, uns zufällig durch schlechte Nahrungsmittel zu vergiften."

Stichwörter: Wahrscheinlichkeit, sehr wahrscheinlich, Verkehrsstatistik.

Erwin Schrödinger:

„Es ist nicht sicher, aber ziemlich wahrscheinlich, daß derzeit gerade Linien nach einer Entfernung von 10^{27} oder höchstens 10^{30} Zentimetern in sich zurücklaufen und daß die Welt nicht länger als höchstens 10^{9} oder 10^{10} Jahre in einem Zustand existiert, der mit ihrem gegenwärtigen irgendeine Ähnlichkeit hat".

Sichwörter: nicht sicher, ziemlich wahrscheinlich.

Max Planck:

„Es ist gewiß kein Zufall, daß gerade die größten Denker aller Zeiten zugleich auch tief religiös veranlagt waren, wenn sie auch ihr Heiligstes nicht gern öffentlich zur Schau trugen".

Stichwort: es ist gewiß kein Zufall.

Werbetext:

„Wahrscheinlich sind sie die gegenwärtig höchstentwickelten programmierbaren Rechner, aber sie sind leicht zu bedienen und kommen doch Computern schon sehr nahe".

Stichwort: wahrscheinlich.

Johann Wolfgang von Goethe:

„Achte hatt ich gesetzt, nun ist die Neune gezogen – Sieh, wie nah ich schon war! Nächstens treff ich die Zahl. – Und so klagen die Menschen, die sich dem Zufall vertrauen".

Stichwort: Zufall.

Novalis:

„Auch der Zufall ist nicht unergründlich, er hat seine Regelmäßigkeit".

Stichwort: Regelmäßigkeit des Zufalls.

Pressemeldung:

„Die für den Bau von Kernkraftwerken einstehenden Fachleute haben uns immer versichert, wie klein das Risiko eines größeren Reaktorunfalls sei. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Reaktorkern schmilzt, sei 1 : 20 000 je Reaktor und Jahr. Bei 163 gegenwärtig in den Vereinigten Staaten betriebenen Reaktoren würde das bedeuten, daß in 122 Jahren ein einziger Kernschmelzunfall zu erwarten sei. Niemand kann aber sagen, wann in der Zeit dieser Unfall sich ereignet, er kann nämlich schon in den ersten Jahren, ja schon morgen eintreten. Vielleicht ist er schon eingetreten".

Stichwort: Angabe der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Verhältnis (Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Reaktorkern schmilzt" sei 1 : 20 000 je Reaktor und Jahr).

Pressenotiz:

„Diese spezielle Methode hat, so der Vorstandssprecher der Bergbau-AG Dortmund, [...], ‚mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit' keinerlei Einfluß auf die Schlagwetterexplosion".

Stichwort: mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit.

1.3 Gründe für die Behandlung der Stochastik im Unterricht

Definition:
Stochastik ist ein Wort, das aus dem Griechischen abgeleitet wurde. Es bedeutet soviel wie Vermutung (Mutmaßung) und wird in der Literatur vielfach als Sammelbegriff für Wahrscheinlichkeitsrechnung einschließlich kombinato-

rischer Grundfragen und Statistik benutzt.

1. Viele der vorher genannten Zitate beziehen sich auf unsere Umwelt, die uns fordert und uns in verschiedenen Situationen entgegentritt. Unter Punkt 1 möchte ich nun die angesprochenen Gründe für die Behandlung der Stochastik im Unterricht zusammenfassen.

Die Schule soll Grundbildung vermitteln, die auf ein mathematisches Erfassen unserer Wirklichkeit gerichtet ist. Unsere Wirklichkeit umfasst sowohl deterministische als auch nicht deterministische Phänomene, und deshalb muss die Schule auch Grundkenntnisse vermitteln, die zum Verständnis zufallsbedingter Erscheinungen beitragen. Es geht um die *Vermittlung anwendbaren Wissens* und um die *Anwendung* der erworbenen Kenntnisse auf reale Situationen.

Dazu einige Beispiele:

- Würfelspiele: Spielregeln hinterfragen, z. B.: Aus welchem Grund darf man noch einmal würfeln, wenn die Zahl 6 auftritt? Ist es deswegen, da die Zahl 6 sehr selten gewürfelt wird?
- Glücksspiele/Lotterien: z. B.: Gewinnchancen.
- Schaubilder und Prognosen aufgrund statistischer Daten.
- Qualitätskontrollen mit Stichproben in technischen Prozessen zur Einhaltung der Norm und Überprüfung der Höhe des Ausschussanteils.
- Zufallsgesteuerte Blockversuche in der biologischen Forschung.
- Testung und Erprobung medizinischer Präparate.
- Testverfahren in der Psychologie.
- Probleme im Versicherungswesen: z. B.: stochastische Grundlagen der Rentenversicherung.
- Simulation großtechnischer Prozesse in Physik und Chemie.

  (vgl. [13], S. 21,22)

Es werden drei Begründungen für die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung deutlich:

1.1. Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik treten in Naturwissenschaften, Versicherungswesen, Medizin, Meteorologie, Gesellschaftswissenschaften, Psychologie usw. auf.

1.2. Für den Unterricht ist bedeutend, dass nun mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Aussagen über zufällige Erscheinungen verstanden werden, und auch verglichen werden können. Somit können Aussagen wie wahrscheinlich, unwahrscheinlich, sehr sicher usw. präzisiert werden.

1.3. Es ist die Einsicht zu gewinnen bzw. zu vermitteln, dass die empirisch gewonnenen Gesetze und Beziehungen statistisch charakterisiert werden können.

(vlg. [14], S. 22)

2. In der Stochastik kann der *Prozess der Mathematisierung* (*Modellbildung*) vermittelt werden.

Im täglichen Leben arbeitet man mit Modellen, um komplizierte Sachverhalte durch ein einfaches Schema zu verstehen.

Ebenso ist es in der Mathematik.

Um vom Zufall bestimmte Phänomene im täglichen Leben mathematisch beschreiben zu können, müssen sie erst durch ein System mathematischer Begriffe und Beziehungen. Sie werden also durch *Mathematisierung/Modellbildung* erfassbar und berechenbar. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bildet bei stochastischen Situationen die Grundlage solcher Modelle.

Es gelingt mit diesen Modellen Probleme der Realität, bei denen der Zufall mitwirkt, als mathematische Fragestellungen zu formulieren und zu lösen. Also, zuerst erfolgt die Lösung im zugrundeliegenden Modell, und wird dann im Hinblick auf das reale Problem interpretiert.

Die Schüler sollen lernen eine gleiche formale Struktur bei „verschiedenen“ Zufallsproblemen bzw. Zufallsexperimenten zu erkennen.

Weiters soll es ihnen möglich sein, ein vorgegebenes Problem durch ein ihnen bereits Bekanntes zu ersetzen. Gesetzmäßigkeiten und Zufallsphänomene lassen sich an einfachen Modellen wie den Urnenmodellen leicht erkennen.

„Die Bedeutung von Urnenexperimenten bei der Lösung stochastischer Fragestellungen beruht auf der Tatsache, daß jedes Zufallsexperiment mit endlich vielen Ergebnissen (Elementarereignissen), denen rationale Zahlen als Wahrscheinlichkeiten zukommen, gedanklich durch ein Urnenexperiment ersetzt werden kann.“ Im Stochastikunterricht spielen sie eine große Rolle.

3. Stochastik ist eine *ideenreiche Theorie*.

Sie ergänzt den Mathematikunterricht und rundet ihn gleichzeitig auch ab. Es lohnt sich die Wahrscheinlichkeitstheorie im Unterricht zu erarbeiten. Keiner der Schüler kann sich sicher sein, dass er im Berufsleben oder beim Studium ohne Stochastikkenntnisse auskommt. Es gibt eine Fülle von Literatur und Beispielen.

Allgemein geht es um:

- Anregung zur Kreativität: z. B.: verschiedene Lösungswege finden, Beschaffung und Darstellung von Daten, usw.
- Förderung der Argumentations- und Kommunikationsfähigkeit.
- Lösungsfindung durch Vereinfachung: z. B.: zuerst Lotto „3 aus 8“ statt „6 aus 45“.
- Lösung von Problemstellungen durch Simulation: z. B.: mittels Zufallszahlen, Urnenmodellen.
- Entdecken von Aufgaben mit unrealistischen Einkleidungen.
- Entwicklung von Lösungsstrategien: z. B.: Berechnung von Anzahlen, Wahrscheinlichkeiten, usw.
- Befähigung, Aussagen der beschreibenden Statistik richtig zu bewerten und kritisch zu begegnen.

4. Bei Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik wird das Interesse vieler Kinder geweckt. Sie bewirken eine *intrinsische Motivation.*

Dies bedeutet, dass sie bei solchen Aufgaben ein stärkeres „positives Problemlöseverhalten“ zeigen als bei manch anderen Gebieten.

5. Der Stochastikunterricht darf nicht isoliert vom übrigen Mathematikunterricht angesehen werden. Der Gedanke der *Integration* soll mitspielen. Rechengebiete wie Bruchrechnung und Prozentrechnung können in der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Beispiel vertieft werden.

Beispiel:
Der Begriff der relativen Häufigkeit

$h_n(A)$ für ein Ereignis A ist durch einen Bruch beschrieben:

$$h_n(A) = \frac{\text{Anzahl der Versuche mit dem Ergebnis } A}{\text{Gesamtzahl } n \text{ der durchgeführten Versuche}} \, .$$

Die klassische Wahrscheinlichkeit (Laplace-Wahrscheinlichkeit) $P(A)$ eines Ereignisses A wird berechnet durch den Quotienten:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl } g(A) \text{ der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl } m \text{ der möglichen Fälle}} \, ,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass alle möglichen Fälle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

6. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik hat eine *faszinierende Entwicklungsgeschichte.*

Diese eignet sich gut, um den Unterricht und das Mathematiklernen lebendiger zu gestalten.

- Interessante Probleme aus der Entstehungsgeschichte der Wahrscheinlichkeit.
- Grundlagendiskussion über den Begriff der Wahrscheinlichkeit.
- Zahlreiche Paradoxien in der Stochastik.

Es kann vermittelt werden, wie durch Überwinden von Fehlern Wissenschaft entstand.

(vgl. [13], S. 23–27)

7. Beweise der kombinatorischen Formeln, die auf einem höheren Niveau möglich sind, sind gute Beispiele um Beweismethoden durch vollständige Induktion einzuüben.

8. Strukturelle Leitbegriffe wie Menge, Abbildung (eindeutige Zuordnung) und Verknüpfung, können durch die Behandlung der Stochastik eingeübt und gefestigt werden.

9. Strukturdenken und axiomatisches Denken können leicht erfahrbar gemacht werden durch die Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht, welche wichtige Aspekte der Mathematik darstellen. Das Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört zu den einfachsten in der Mathematik.
(vgl. [14], S. 24,25)

Ich möchte dieses Kapitel mit einem Zitat des Mitbegründers der Wahrscheinlichkeitsrechnung P. S. de Laplace beenden:

„Betrachtet man die analytischen Methoden, die durch diese Theorie entstanden, die Wahrheit der Prinzipien, die ihr zur Grundlage dienen, die scharfe und feine Logik, welche ihre Anwendung bei der Lösung von Problemen erfordert, die gemeinnützigen Anstalten, die sich auf sie gründen, sowie die Ausdehnung, die sie schon erlangt hat und durch ihre Anwendung auf die wichtigsten Fragen der Naturphilosophie und der moralischen Wissenschaften noch erhalten kann; bemerkt man sodann, wie sie selbst in den Dingen, die der Berechnung nicht unterworfen werden können, die verläßlichsten Winke gibt, die uns bei unseren Urteilen leiten können, und wie sie vor irreführenden Täuschungen sich in acht zu nehmen lehrt, so wird man einsehen, daß es keine Wissenschaft gibt, die unseres Nachdenkens würdiger wäre, und die mit größerem Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden könnte“.

(Laplace, P. S. de: *Philosopischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit.* Leipzig 1986 (Reprint der Ausgabe von 1932), S. 171.)

Kapitel 2

Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Stochastik wurde von unterschiedlichen Anwendungsgebieten geprägt.

Zuerst waren es die Griechen und Römer, die durch ihr Interesse an Glücksspielen die Entwicklung von Rechenmodellen vorantrieben, später kamen aus den Bereichen Philosophie, Rechtswissenschaft und Versicherungswesen Anregungen, und schließlich noch später auch aus der Physik.

Heutzutage kommen diese Anregungen vorwiegend aus dem Bereich der Finanzmathematik. Somit hat die Wahrscheinlichkeit, auf dem Umweg über die Statistik, in so gut wie allen quantitativ arbeitenden Wissenschaften Anwendung gefunden. (vgl. [6])

2.1 Die Herausbildung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bereits in der Antike hatte man die Gedanken, dass die Naturgesetze durch eine Menge von zufälligen Ereignissen zur Geltung kommen, z.B. in dem Gedicht „De rerum natura“ von Lukrez. Er hielt es für möglich, dass die Welt durch das zufällige Zusammenwirken der Urelemente so geformt wurde, wie sie heute ist.

Das Ziel der Gelehrten, die das Entstehen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wesentlich beeinflussten war es auch, die Gesetzmäßigkeiten, auf deren Auftreten zahlreiche individuelle Einflüsse einwirken, die nicht, oder fast nicht miteinander verbunden sind, aufzudecken.

Huygens zum Beispiel schrieb 1657, dass er Grundlagen einer „tiefsinnigen und hochinteressanten neuen Theorie“ vortrage, und sich nicht nur mit Spielen beschäftige.

Die Probleme, die im Zusammenhang mit Glücksspielen auftraten gaben den Ausschlag, dass sich bedeutende Gelehrte Gedanken machten über die Zufälligkeit von Ereignissen.

Hauptsächlich liegen die Ursachen aber in der Herausbildung frühkapitalistischer Wirtschaftsverhältnisse und den dabei auftretenden Fragestellungen, wie zum Beispiel im Versicherungswesen, der Auswertung von Beobachtungen und der Bevölkerungsstatistik. (vgl. [20], S. 212,213; [12], S. 9)

2.2 Zur Vorgeschichte

15./16. Jahrhundert:

Bereits bei Luca Pacioli (1445–1514) sind Wahrscheinlichkeitsaufgaben in expliziter Form zu finden, und zwar in einem 1477 gedruckten Kommentar zu DANTEs Divina Commedia. Darin sind zwei klassische Hauptprobleme behandelt, die Aufteilung der Einsätze bei einem vorzeitig abgebrochenen Glücksspiel, und die Häufigkeiten gewisser Würfe mit drei Würfeln. (vgl. [12], S. 9)

Auch Nicolo Tartaglia (1499–1557), Hieronimo Cardano (1501–1576) und Galileo Galilei (1564–1642) behandeln wahrscheinlichkeitstheoretische Fragestellungen, meist in Zusammenhang mit Glücksspielen. (vgl. [20], S. 213)

Den Vorläufern Paciulo, Cardano und Galilei ist es aber nicht gelungen, einen Anstoß zu einer Mathematisierung des anstehenden Problemkreises zu geben. (vgl. [12], S. 10)

Nach heutigen Erkenntnissen hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Jahr 1654 angefangen. Der leidenschaftliche Glücksspieler Chevaliere de Mèrê, der sich aber auch ernsthaft für die Wissenschaft interessierte, regte seinen Freund Blaise Pascal (1623–1662) an, sich mit der Wahrscheinlichkeit dieses oder jenes Spielausganges zu beschäftigen. Er legte ihm konkrete Beispiele vor. (vgl. [20], S. 213)

Ich möchte nun auf 3 dieser sogenannten Paradoxien des Chevalier de Mèrê näher eingehen.

Beispiel 1:

Ein Glücksspiel bestand darin, darauf zu wetten, dass beim viermaligen Ausspielen eines Würfels aus einem Becher mindestens eine Sechs fällt. Chevalier de Mèrê hatte die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses zu

$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

berechnet und so erkannt, dass es (bei gleichen Einsätzen) vorteilhaft ist, darauf zu wetten, dass man mindestens einmal eine 6 wirft. Eine Variante des Spiels benutzte 2 Würfel. Bei 24 Spielen war darauf zu wetten, dass mindestens einmal eine Doppelsechs auftritt.

Chevalier de Mèrè überlegte: Bei 2 Würfeln gibt es $36 = 6 \times 6$ mögliche Spielausgänge. Das sind 6 mal so viele Möglichkeiten wie beim Spiel mit einem Würfel. Wenn man also jetzt auch 6 mal so viele Spiele, also $6 \times 4 = 24$ Spiele, macht, lohnt es sich darauf zu wetten, dass mindestens einmal eine Doppelsechs auftritt. Denn Chevalier de Mèrè berechnete diese Wahrscheinlichkeit analog wie oben zu

$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + ... + \frac{1}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ (24 Summanden).

Chevalier de Mèrè wurde aber in der Praxis enttäuscht und machte bei dieser Spielabwandlung schlechte Erfahrungen. Pascal zeigte auf, dass beide Überlegungen des Chevalier de Mèrè falsch sind: ([14] S. 29)

(In Wirklichkeit war de Mèrè die richtige Lösung auch bekannt.)

Lösung:

Zunächst muss darauf hingewiesen werden, dass das Ereignis „Auftreten mindestens einer 6 bei 4-maligem Würfeln“ die Negation des Ereignisses „Auftreten keiner 6 bei 4-maligem Würfeln“ ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 1. Wurf keine 6 auftritt, ist $\frac{5}{6}$ (fünf günstige Fälle, sechs mögliche Fälle), die Wahrscheinlichkeit, dass beim 2. Wurf keine 6 auftritt, ist ebenfalls $\frac{5}{6}$. Dieselbe Wahrscheinlichkeit ergibt sich für den 3. und 4. Wurf. Denn jeder Wurf ist von dem vorhergehenden völlig unabhänigig, das Ergebnis des vorhergehenden Wurfes beeinflusst in keiner Weise den nächsten Wurf. Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl beim 1. Wurf, als auch beim 2., als auch beim 3., als auch beim 4. Wurf keine 6 auftritt, ist dann

$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5^4}{6^4}$.

Dies ist nun die Wahrscheinlichkeit für „4-mal keine Sechs". Dass wenigstens einmal eine 6 auftritt, ist die Negation. Ordnet man der vollen Gewissheit 1 (die Wahrscheinlichkeit 1) zu und bedenkt, dass die Wahrscheinlichkeit 1 des sicheren Ereignisses stets zwischen denen eines Ereignisses A und seines entgegengesetzten Ereignisses (Gegenereignissses) $\neg A$ aufgeteilt ist, dann gilt $P(A) + P(\neg A) = 1$ und $P(\neg A) = 1 - P(A)$. Hierbei bezeichnet $P(A)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A.

Also hat man als Lösung:
$P(\text{mindestens eine 6 beim 4-maligen Werfen}) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0,5177$.

Ganz analog erhält man für die Variante dieses Spieles
$P(\text{mindestens eine Doppelsechs bei 24 Würfen}) = 1 - \frac{35^4}{36^4} \approx 0,4914$.
([14], S. 31, 32)

Die beiden anderen Spielprobleme sahen wie folgt aus:

Beispiel 2:

Nach Chevalier de Mèrê sollten beim gleichzeitigen Werfen dreier symmetrischer Spielwürfel die Chancen für das Auftreten der Augensumme 11 und der Augensumme 12 gleich groß sein, denn für die Augensumme 11 gibt es 6 verschiedene Möglichkeiten, nämlich 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3, und für die Augensumme 12 gibt es ebenfalls 6 verschiedene Möglichkeiten, nämlich 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3 und 4-4-4.

Chevalier de Mèrê beobachtete aber, dass die Augensumme 11 häufiger als die Augensumme 12 auftrat.

Pascal löste dieses Problem. Man darf nicht nur die Gesamtaugensumme betrachten, sondern muss auch die Verteilung der einzelnen Augen einer bestimmten Konstellation auf die drei Würfel beachten. Die Konstellation 6-3-2, d.h. die Bildung der Summe 11 aus den drei Summanden 6, 3 und 2, kann beispielsweise ralisiert werden durch die geordneten Tripel: (6, 3, 2), (6, 2, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2), (2, 6, 3) und (2, 3, 6), wobei jeweils die erste

Zahl durch den ersten Würfel, die zweite Zahl durch den zweiten Würfel und die dritte Zahl durch den dritten Würfel erzeugt wird. Analog sind auch die Konstellationen 6-4-1 und 5-4-2 durch je 6 Tripel zu ersetzen. Die für die Augensumme 11 angegebenen Konstellationen 5-5-1, 5-3-3 und 4-4-3 liefern jedoch nur je 3 Tripel. Insgesamt gibt es also 27 gleichmögliche günstige Möglichkeiten für das Eintreffen der Augensumme 11. Für die Augensumme 12 gibt es nach denselben Überlegungen aber nur 25 gleichmögliche, günstige Möglichkeiten.

Man beachte:

Die für die Augensumme 12 günstige Summandenwahl 4-4-4 hat nur eine Realisierungsmöglichkeit, nämlich das Tripel (4, 4, 4). Damit ist in diesem Falle das Problem eigentlich schon gelöst. Um aber die Chance der entsprechenden Ereignisse berechnen zu können, muss man noch die Gesamtzahl möglicher Spielausgänge berechnen. Dass jeder der 6 möglichen Spielausgänge des ersten Würfels mit jedem der 6 möglichen Ausgänge beim zweiten Würfel zusammentreffen kann, und diese $6 \times 6 = 36$ Möglichkeiten mit jeder der 6 Möglichkeiten des dritten Würfels zusammentreffen können, gibt es insgesamt $6 \times 36 = 216$ mögliche Spielausgänge. Man setzt nun voraus, dass alle 216 möglichen Spielausgänge mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Die 216 Ereignisse sind gleichwahrscheinlich. Als Wahrscheinlichkeit hat man dann den Quotienten

$$\frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

zu bilden. Also erhalten wir

$$P(\text{Augensumme } 11) = \tfrac{27}{216} \text{ und } P(\text{Augensumme } 12) = \tfrac{25}{216}.$$

Diese Ergebnisse bestätigen die Beobachtungen von Chevalier de Mèrè. Der Fehler in den Überlegungen von Chevalier de Mèrè ist darin zu sehen, dass die von ihm in den beiden Fällen jeweils betrachteten 6 Möglichkeiten nicht gleichwahrscheinlich sind. ([14] S. 27,28)

Beispiel 3: Force majeure

Zwei Spieler A und B haben eine Reihe von Glücksspielen verabredet. Jedes Spiel endet mit Gewinn und Verlust. Es gibt kein Remis. Die Chancen sind für beide Spieler gleich. Wer zuerst insgesamt 5 Spiele gewonnen hat, erhält die Einsätze. Durch höhere Gewalt müssen die Spieler beim Stand von 4:3 für Spieler A gegen B ihre Partien abbrechen. Wie sind die Einsätze zu verteilen? Man schlägt vor:

a) im Verhältnis 4:3

b) im Verhältnis (5-3):(5-4), also im Verhältnis 2:1

Pascal entschied, dass keiner Recht habe. Denn wenn B die nächste Partie gewinnen würde, wäre Gleichstand und B müsste die Hälfte der Einsätze erhalten. Da die Chance für ihn, das nächste Spiel zu gewinnen, aber nur $\frac{1}{2}$ ist, gebührt ihm die Hälfte von der Hälfte, also $\frac{1}{4}$ der Einsätze. D.h., es ist im Verhältnis 3:1 zu teilen. ([14] S. 28)

Während Pascal diese Probleme analysierte, korrespondierte er mit dem Mathematiker Pierre Fermat (1601-1665). Mit diesem Briefwechsel beginnt die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer selbständigen mathematischen Disziplin. (vgl. [20], S. 213)

Die Begriffe Wahrscheinlichkeit und mathematische Erwartung kristallisierten sich bei dieser Korrespondenz heraus.

Sie sahen bereits die wichtige Rolle der Wissenschaft voraus, die zufällige Erscheinungen untersucht. Weiters waren sie sich sicher, dass es bei massenhaften zufälligen Ereignissen klare Gesetzmäßigkeiten gibt.

Christian Huygens (1629–1695) erfuhr vom Briefwechsel 1655, als er in Paris war. Er erfuhr 1655 die Ergebnisse von Pascals und Fermats Untersuchungen, aber nicht die Methoden. Er entwickelte daraufhin eine eigene Methode zur Lösung und schrieb 1657 das für ein halbes Jahrhundert wichtigste Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung „De ratiociniis in ludo aleae“ (Über Berechnungen beim Würfelspiel), welches die lateinische Übersetzung des Originalbuches „Van reeckeningh in spelen von geluck“ ist. Er stellte die von Pascal und Fermat behandelten Fragen über Glücksspiele ausführlich dar, behandelte auch ähnliche Probleme und nannte eine Reihe von ungelösten Aufgaben.

Huygens hat aber nicht den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ benützt, sondern wie Pascal, den „Wert der Hoffnung“ - heute als Erwartungswert bezeichnet. Wenige konkrete Anwendungen wurden zu diesem Zeitpunkt zugelassen, wegen dem mangelnden Entwicklungsstand der Naturwissenschaften.

Da die Naturwissenschaft zu dieser Zeit noch nicht sehr entwickelt war, bildeten Glücksspiel und Fragen von Demographie und Versicherung den einzigen konkreten Gegenstand zur Entwicklung der Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. So hat sich Graunt mit der Sterbewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom Lebensalter beschäftigt, Johan De Witt (1625–1672) und Edmund Halley (1656–1742) stellten Tabellen für Rentenzahlungen auf, und auch Isaac Newton (1643–1727) nutzte wahrscheinlichkeitstheoretische Gedanken in der Histographie und der Fehlerrechnung. Newton hat sich auch in einem unveröffentlichten Manuskript um 1665 mit geometrischen Wahrscheinlichkeiten befasst.(vgl. [20], S. 213; [18], S. 119, 120; [7])

Wichtige Fortschritte in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbindet man mit dem Namen Jakob Bernoulli (1654 – 1705). Man findet in seinen Arbeiten Betrachtungen über erzeugende Funktionen, die Lösung und Verallgemeinerung einiger Huygensscher Probleme (z.B. Ruin eines Spielers) und die Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als „Grad seiner Gewißheit“, die sich von der Gewissheit, „wie ein Theil vom Ganzen“ unterscheidet.

1713 erschien das erste Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung „Ars coniectandi“ (Kunst des Vermutens) von Bernoulli. Es befasst sich zunächst mit Huygens‘ Abhandlung unter Kommentierung durch Bernoulli, weiters geht es um die Kombinatorik, dann kommen Aufgaben über Urnen, Spielkarten und Würfel vor, und schließlich noch Ansätze zur heutigen mathematischen Statistik.

Den größten Verdienst Bernoullis bildet wohl der „Satz von Bernoulli“, auch Gesetz der großen Zahlen genannt. Die Bedeutung liegt nicht bei der Formulierung des Sachverhaltes, dazu kann man bei Cardano schon Anhaltspunkte finden, sondern, Bernoulli hat als erster eine theoretische Erklärung dafür gefunden, dass sich die relative Häufigkeit an die Wahrscheinlichkeit annähert. Dadurch unterscheidet er sich von vielen seiner Zeit und auch von Autoren, die später wirkten. Diese nahmen zwar den Fakt zur Kenntnis, dass sich unwesentliche Erscheinungen eines Ereignisses bei der Mitteilung über eine große Anzahl von Beobachtungen auslöschen, sahen dies aber als Offenbarung der göttlichen Ordnung an und suchten keine theoretische Begründung. (vgl. [20], S. 213-214; [18], S. 133; [7])

In den nächsten Jahrzehnten wendeten sich zahlreiche Wissenschaftler wahrscheinlichkeitstheoretischen Problemen zu.

Bei der Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist besonders dem französischen Mathematiker Pierre Laplace (1749–1827) viel zu verdanken, aber auch Abraham de Moivre (1667–1754) und Simèon Poisson (1781–1840).

Abraham de Moivre publizierte 1718 „The Doctrine of Chances“ und 1730 die „Miscellanea analytica“ (Analytische Beiträge). Er stellt im ersten Buch die Methoden zur Lösung von Aufgaben, die mit Glücksspielen im Zusammenhang stehen, systematisch dar und vervollkommt sie. Bereits in der 2. Auflage 1738 definierte er ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, das mit der späteren klassischen Definition durch Laplace im Wesentlichen übereinstimmt.

1740 folgte die Angabe einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufgabe durch Th. Simpson (Simpsonsches Verteilungsgesetz), die für die Kontrolle der Produktion wichtig ist. Es kam weiters zur Verbindung von theoretischen Problemen der Völkerkunde und des Versicherungswesens mit Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Leonhard Euler (1707–1783) und zur Formulierung des „Petersburger Spiel“ von Nikolaus Bernoulli (1695–1726)

Mitte des 18. Jahrhunderts kam es zum Aufwerfen der Frage nach der Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Hypothesen, wenn schon Beobachtungsergebnisse vorliegen, durch Daniel Bernoulli (1700–1782). Die Lösung hierzu wurde von Thomas Bayes (gest. 1751) geliefert. Außer der nach ihm benannten Formel lieferte er noch weitere Ausdrücke zur Lösung spezieller

Probleme.

1777 führte ein französischer Naturforscher Graf Comte de Buffon (1707–1788) das erste Beispiel einer geometrischen Wahrscheinlichkeit ein. (vgl. [20], S. 2142; [18], S. 146, 147; [7])

2.3 P.S. Laplace

An der Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert setzte ein Aufschwung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Laplace und Poisson entwickelten, angeregt durch naturwissenschaftliche Fragestellungen aus Ballistik, Astronomie, Theorie der Beobachtungsfehler, spezielle analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und erzielten damit wertvolle Resultate.

Laplace fasst seine Ergebnisse in der „Théorie analytique des probabilités“ 1812 zusammen, wobei er die Einleitung auf der Grundlage seiner Vorlesung von 1795 „Essai philosophique sur les probaliliès“ bildet. Er definiert dort das Maß der Wahrscheinlichkeit:

„Die Theorie des Zufalls ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch Zurückführung aller Ereignisse derselben Art auf eine gewisse Anzahl gleich möglicher Fälle, ... und durch Bestimmung der dem Ereignis günstigen Fälle. Das Verhältnis dieser Zahl zu der aller möglichen Fälle ist das Maß dieser Wahrscheinlichkeit,...“ (Laplace, P.S.: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Leipzig 1932. S.4)

Wenn man dies genauer betrachtet, ist es eher eine Rechenvorschrift, wie man Wahrscheinlichkeit ermitteln kann (wenn „gleichmögliche Ereignisse“ vorliegen), denn eine Definition.

Sein „Essai“ vermittelt auch, dass er theologische und teleologische Erklärungen der Naturerscheinungen ablehnte und auch bekämpfte. Viele spätere Entdeckungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung finden sich schon bei Laplace.

Er diskutierte Glücksspiele, geometrische Wahrscheinlichkeiten, den Satz von Bernoulli und dessen Beziehungen zur Normalverteilung, und in Verbindung mit der Fehlerrechnung die Methode der kleinsten Quadrate, die unabhängig von ihm auch von Legendre und Gauß entdeckt wurde. Sehr oft wandte er erzeugende Funktionen an, insbesondere zur Lösung von Differenzengleichungen, und bewahrte die Sätze des unbekannten Bayes vor dem Vergessen, indem er ihnen eine klare Formulierung gab. Weiters hat Laplace als erster die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung systematisch dargestellt, bewies jene Sätze, die heute Sätze von Moivre-Laplace heißen, und nutzte seine Resultate für praktische Probleme, z.B. statistische Untersuchungen, Astronomie (Normalverteilung).

Die Normalverteilung und deren Anwendung in der Theorie der Beobachtungsfehler verknüpft sich oft mit dem Namen von Gauß, der sie - ebenso wie Laplace - selbsttändig entdeckte. Sie war aber schon von Moivre untersucht worden. Von dem belgischen Mathematiker und Astronomen Quètelet, einem Schüler von Laplace, stammt vermutlich die Bezeichnung Normalverteilung. Dieser machte sich große Verdienste um die Vereinheitlichung der Methoden der beschreibenden Statistik.

Eine Verallgemeinerung vom Bernoulli Gesetz der großen Zahlen und der Sätze von Moivre-Laplace auf den Fall unabhängiger Versuche, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses von der Nummer des Versuchs abhängig ist, fand unter Poisson statt. Er leitete auch eine neue Wahrscheinlichkeitsverteilung – die Poisson-Verteilung – her.

In der Mitte des 19. Jahrhunderts, nach Laplace und Poisson, setzte dann merkwürdigerweise vor allem in den westeuropäischen Ländern eine Stagnation der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein.

Durch eigene Beiträge hatten die Beiden Irrtümer hinsichtlich der Einsatzmöglichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefördert, indem sie ihre Anwendung auf „moralische Wissenschaften“ empfahlen, etwa um den Wahrheitsgehalt eines Gerichtsurteils zu erfassen. Solche Anwendungen führten zu Misserfolgen, da meist das Wesen der gesellschaftlichen Erscheinungen missachtet wurde. Nun war die Begeisterung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung immer mehr verschwunden.

(vgl. [20], S. S. 214, 215; [18], S. 152-156; [12], S. 11, 12)

2.4 Die Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.4.1 Die russische wahrscheinlichkeitstheoretische Schule

Russland bildete eine Ausnahme, was die Stagnation in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung betraf.

Es waren auch hier negative Einflüsse zu spüren, doch die Ideen von „Čebyšev“ wirkten so stark, dass es zu einer Weiterentwicklung und Herausbildung einer russischen Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Petersburg gab. Das erste russische Lehrbuch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung schrieb Bunjakovskij. Er hat damit viel für die Verbreitung der Lehren von Laplace und Poisson getan.

„Čebyšev“ machte die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer strengen mathematischen Disziplin. Zu verdanken ist ihm der Grenzwertsatz für Summen unabhängiger Zufallsgrößen, die Momentenmethode, eine Verallgemeinerung des Gesetzes der großen Zahlen und die Tatsache, dass er den Begriffen „Zufallsgöße“ und „Erwartungswert“ einen zentralen Platz im Begriffssystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuwies und sie entsprechend ausnutzte.

„Čebyšev“ war ein ausgezeichneter Lehrer, der viele Schüler um sich scharte, wobei besonders Markov und Ljapunov auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu nennen sind.

Ljapunov wandte als erster die charakteristischen Funktionen in der Theorie der Grenzwertsätze an. Später wurde der Ljapunovsche Grenzwertsatz durch Bernstein, Chincin, Feller, Lèvy und Linnik verallgemeinert.

Die „Markovschen Ketten“ gehen auf Markov zurück, die zusammen mit den Ideen und Untersuchungen von Poincarè und Bachelier den Ausgangspunkt für die Theorie der zufälligen Prozesse bilden.

Aufgrund zahlreicher mathematischer Resultate und der großen Anwendungsmöglichkeiten in der Naturwissenschaft, führte die Theorie der zufäligen Prozesse zu einem Aufschwung in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In England und den USA waren unter Pearson, Fisher und Wald leistungsfähige Zentren der mathematischen Statistik entstanden, während in diesen Staaten die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine vergleichsweise geringe Rolle spielte.

Nach der Oktoberrevolution ging aus der Moskauer funktionentheoretischen Schule unter Luzin ein weiteres Zentrum der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor. An der Spitze standen Chincin, Kolmogorov und Sluckij, während Bernstein in Leningrad wirkte. Die mathematische Statistik wurde im Gegensatz zu den Vorkriegsjahren stark gefördert. (vgl. [20], S. 309, 310)

2.4.2 Der Weg zur Axiomatisierung

Obwohl es zu Beginn des 20. Jahrhunderts große Erfolge in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gab, waren die logischen Grundlagen noch nicht genügend entwickelt und aufgeklärt und haben so Möglichkeiten zu Missdeutungen und fehlerhaften Anwendungen gegeben. Die Laplace'sche Definition der Wahrscheinlichkeit wurde immer stärker als unzureichend erkannt. (vgl. [20], S. 310, 311)

Beim Mathematikerkongress 1899 in Paris formulierte der berühmte Mathematiker David Hilbert (1862-1943) die Frage nach einer exakten Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie als eines der wichtigsten ungelösten mathematischen Probleme. (vgl. [8]; S. 239)

Er forderte eine Präzisierung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der axiomatischen Methode.

Vom Prozess der Axiomatisierung wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung erst spät erfasst. Borel und Poincarè unternahmen erste Schritte.

1917 wurde von Bernstein ein erster systematischer Aufbau der Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung veröffentlicht, den er später noch ausbaute. Sein Axiomensystem basiert auf dem qualitativen Vergleich zufälliger Ereignisse nach ihrer größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit. Den Ansatz bauten Koopman und Glivenko weiter aus. Glivenko konnte 1939 zeigen, dass dieser Ansatz, der auf der Betrachtung vollständiger normierter Boolescher Algebren beruht, mit der Axiomatik Kolmogorovs übereinstimmt. (vgl. [20], S. 311)

Einen weiteren Versuch, im Bezug der Axiomatisierung, machte R.B. Mises, der 1919 die Wahrscheinlichkeit als mathematischen Grenzwert der relativen Häufigkeit für das Auftreten eines Beobachtungsmerkmals innerhalb eines Kollektivs definiert. Schnell findet diese Definition Anhänger. Kamke 1932, Reichenbach 1935 und andere bauen seine Theorie weiter aus. (vgl. [12], S. 13)

Mises nimmt eine idealistische Grundposition ein. Somit verliert diese Wahrscheinlichkeit ihren Inhalt, eine objektive, zahlmäßige Charakteristik realer Erscheinungen zu sein. Man kann nicht von der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sprechen, wenn nicht unendlich viele Versuche ausgeführt wurden.

Es ergaben sich beim Aufbau der Theorie unüberwindliche logische Schwierigkeiten, dass die Regellosigkeit mit der Forderung, dass die Grenzwerte existieren sollen, unvereinbar ist. (vgl. [20], S. 311)

2.4.3 Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Kolmogorov

An die Ideen von Borel knüpfte Lomnicki an, der 1923 eine Axiomatik auf der Grundlage der mengentheoretischen Konzeption publizierte. Grundlegende Probleme blieben aber in all den Versuchen zum axiomatischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung ungelöst. Besonders betraf es die axiomatische Begründung der Rechenoperationen mit Ereignissen und ihren Wahrscheinlichkeiten und die Definition grundlegender Begriffe wie Zufallsgröße, mathematische Erwartung und bedingte Wahrscheinlichkeit.

1933 stellt Kolmogorov das heute noch übliche Axiomensystem auf, in der Monographie „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Er bemerkte im Vorwort zur axiomatischen Begründung:

„Vor der Entstehung der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie war diese Aufgabe ziemlich hoffnungslos. Nach den Lebesgueschen Untersuchungen lag die Analogie zwischen dem Maße einer Menge und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sowie zwischen dem Integral einer Funktion und der mathematischen Erwartung einer zufälligen Größe auf der Hand. ... Um, ausgehend von dieser Analogie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu begründen, hatte man noch die Maß- und Integrationstheorie von den geometrische Elementen, welche bei Lebesgue noch hervortreten, zu befreien. Diese Befreiung wurde von Frèchet vollzogen". (Kolmogoroff, A. N.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933. S. III)

Kolmogorovs Axiomatik ist nicht die einzig mögliche. Bei ihm wird aber eine logisch einwandfreie Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben, und es ist bei ihm möglich, die neu entstandenen Begriffe und Probleme in einem einheitlichen und einfachen System zu erfassen.

Somit wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Disziplin fest in die Mathematik integriert und es macht die Anwendung hochentwickelter moderner mathematischer Theorien möglich.

Seit der Aufklärung ihrer Grundlagen nahm die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine stürmische Entwicklung hinsichtlich der Theorie, als auch der Anwendungen dieser Theorie. Die grundlegenden Gesichtspunkte wurden aus vielen Aufgaben aus Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie herausgefiltert, um konkrete Probleme mit den allgemeinen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen. Die Sowjetunion nimmt weiterhin einen führenden Platz unter den zahlreichen Zentren ein, die sich mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Fragestellungen beschäftigen. (vgl. [20], S. 311, 312; [12], S. 13, 14)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist in den letzten Jahrzehnten zu einem der Gebiete der Mathematik geworden, die sich am schnellsten entwickeln. Neue theoretische Resultate eröffneten neue Möglichkeiten für die Naturwissenschaft, die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu benutzen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sondert sich somit nicht von den Interessen anderer Wissenschaften ab, sondern hält vielmehr Schritt mit deren Entwicklung, ohne dabei jedoch nur Hilfsmittel für die Lösung praktischer Aufgaben zu sein. Sie ist mehr noch zu einer strengen mathematischen Disziplin mit eigenen Problemen und Beweismethoden geworden, wobei sich erwies, daß ihre wichtigsten Probleme im Zusammenhang mit der Lösung verschiedener Aufgaben der Naturwissenschaft stehen.

Abschließend bleibt zu sagen, daß der Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit praktischen Bedürfnissen in der Physik und in anderen Gebieten der Naturwissenschaften, im Kriegswesen, auf vielen verschiedenen technischen Gebieten, in der Wirtschaftslehre und zahlreichen anderen Bereichen mehr, eine Hauptursache für die doch recht junge Wissenschaft darstellt. ([7])

Kapitel 3

Die Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffes bei Kindern

3.1 Einleitung

Für die sinnvolle Gestaltung des Mathematikunterrichtes ist es notwendig zu wissen, wie weit die kognitive Entwicklung der Kinder fortgeschritten ist. Dies ist besonders wichtig bei einem frühen Stochastikunterricht in der Unterstufe. Bereits Kinder im Alter von sechs bis sieben Jahren haben Kenntnisse über Wahrscheinlichkeit und Zufall. Um konkret den Unterricht zu planen, sollte man über diese Entwicklung Bescheid wissen, „da ja die Schule die jeweiligen Möglichkeiten jedes intellektuellen Stadiums optimal nützen sollte.“ ([12], S. 105, 106)

Zahlreiche Studien untersuchten die kognitive Entwicklung bei Kindern. In meinen Ausführungen beschränke ich mich auf die Studien von Piaget, Inhelder, Yost, Siegel, Andrews, Goldberg, Davies, Hoemann und Ross. Die zahlreichen Untersuchungen nehmen Bezug auf die verschiedenen Phasen, die Kinder bei der Entwicklung durchlaufen.

Hierbei sind besonders drei Phasen von größerer Bedeutung:
([13], S. 86-94)

- die präoperationale Phase (ca. 2 bis 7 Jahre)

- die Phase der konkreten Operationen (ca. 7 bis 12 Jahre)

- die Phase der formalen Operationen (ab 11 oder 12 Jahren)

Im Gegensatz zu den körperlichen Aktivitäten der sensomotorischen Phase, die bis zum zweiten Lebensjahr dauert, sind mit Operationen „verinnerlichte geistige Aktivitäten“ gemeint. In der Phase der konkreten Operationen kann sich das Kind auch schon in Gedanken mit konkreten Gegenständen

beschäftigen. Dies bedeutet eine Loslösung von der konkreten Wirklichkeit auf der einen Seite, auf der anderen Seite beziehen sie sich aber nur auf greifbare Objekte der Wirklichkeit. Ermöglicht werden aber reversibles Denken und ein Erkennen der Teilmengenbeziehung zum Ganzen. Kinder sind hier aber noch nicht fähig über Hypothesen und über rein verbale Aussagen von Problemen nachzudenken.
Dies entwickelt sich später und ist besonders ausgeprägt in der Phase der formalen Operationen (Adoleszenz). Nun kann das Kind Schlüsse aus reinen Hypothesen und nicht nur aus tatsächlichen Beobachtungen ziehen. In dieser Phase kann das Kind mit Symbolen, auch mathematischen Symbolen, umgehen und Überlegungen kombinatorischer Art anstellen.

Man sollte diese Stadien aber nicht als starre zeitliche Schranke sehen, da es Überschneidungen und auch Ausnahmen gibt. Doch bei der geistigen Entwicklung handelt es sich um einen Prozess, bei dem eine Phase auf der anderen aufbaut.

Besonders wichtig sind die Untersuchungen mit den Ergebnissen zu der Phase der konkreten Operationen und der Phase der formalen Operationen, da es sich hier um schulpflichtige Kinder handelt.

Die Versuche wurden in der Interviewtechnik durchgeführt, wobei die Versuche erklärt wurden, und dann die Kinder Voraussagen machen mussten. Den Voraussagen und Spontanäußerungen schlossen sich Fragen des Versuchsleiters an. Diese Gespräche zwischen den Kindern und dem Versuchsleiter waren die Grundlage für die darausfolgenden Schlussfolgerungen. Es wurden etwa 20 Kinder im Alter von 4 bis 12 Jahren pro Versuch befragt.

3.2 Die präoperationale Phase (ca. 2 bis 7 Jahre)

3.2.1 Perlenversuch von Piaget/Inhelder

([13], S. 86-94)

Es befinden sich acht weiße und acht rote Perlen in einer rechteckigen Schachtel, die durch eine kurze Seitenwand getrennt sind. Eine Querachse, die unter der Schachtel angebracht ist, ermöglicht es, mit der Schachtel

Wippbewegungen durchzuführen, sodass die Perlen gegen die gegenüberliegende Wand rollen, wieder zurück usw. Die Kinder müssen die Ergebnisse bei einer Bewegung und mehreren Bewegungen der Schachtel voraussagen und die Wege der Perlen zeichnen.

Versuchsergebnis

Kinder in diesem Stadium erkennen nicht, dass es sich um ein Zufallsexperiment handelt. Sie glauben, die roten und weißen Perlen bleiben getrennt, und der Ausgangszustand wird wieder erreicht. Jede Perle hat einen bestimmten Weg in der Vorstellung der Kinder.

3.2.2 Kastenversuche (Galtonbrett) von Piaget/Inhelder

Hier wurden von Piaget und Inhelder 5 Kästen mit einer Öffnung und mit einer Fächereinteilung jeweils gleicher Breite auf dem gegenüberliegenden Boden benutzt. Die ersten vier Kästchen haben in der Mitte eine Öffnung, das letzte Kästchen am Rand. Kasten IV hat 18 Fächer und die Rückwand ist zusätzlich mit Nägeln besetzt. Es werden bei den Versuchen von oben eine Perle oder mehrere Perlen nacheinander in den jeweiligen, geneigt aufgestellten Kasten geworfen. Der Kasten V diente mehr dem Einsatz in den Diskussionen mit den Versuchspersonen.

Die Versuchspersonen sollten angeben, wohin die Perlen fallen würden bzw., wie die Verteilung der Perlen nach vielen Versuchen sein würde.

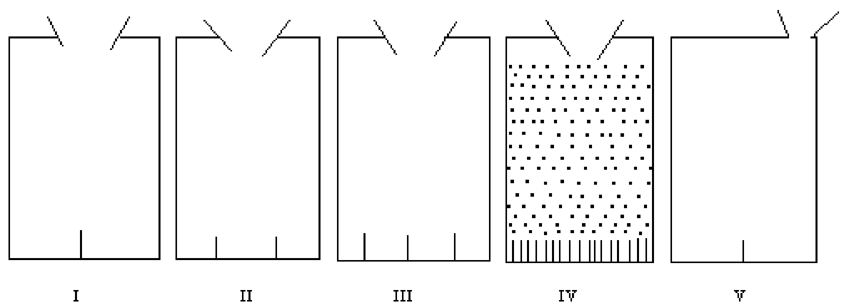


Abbildung 1: Kastenversuch

Mit dem Kasten I wurden die Versuche gestartet. Bei jedem neuen Kasten wurde zusätzlich überprüft, wie die Versuchspersonen die früheren Beobachtungen gebrauchen.

Die Kästen erinnern an Galtonbretter. Es handelt sich um Zufallsexperimente, die auf Normalverteilung und Gleichverteilung abzielen.

Versuchsergebnis

Es sind zwei Vorstellungen beim Kasten I vorherrschend, nämlich fallen alle Perlen entweder in ein Fach, oder die Perlen fallen abwechselnd nach rechts und nach links. Beim Kasten II sehen die Kinder einerseits eine Gleichverteilung infolge Kompensation, andererseits nehmen sie auch an, dass die Perlen in einem Fach landen, entweder in dem zentralen oder einem äußeren. Bei den Kästen III und IV werden unregelmäßige Verteilungen angenommen.

3.2.3 Zufallsregen von Piaget/Inhelder

Bei diesem Versuch wird der Vorgang des Regenfalls auf quadratische Pflastersteine simuliert. Es fallen kleine Glaswürfel durch ein Sieb auf ein mit Quadraten gleicher Größe versehenes Stück Papier. Nun sollen die Kinder voraussagen, wohin einzelne Tropfen (Glaswürfel) fallen, und wie die Verteilung aussieht, wenn nach und nach viele Tropfen fallen. Durch die Erfahrungen mit „wirklichem“ Regen wissen die Kinder aller drei Entwicklngsstufen, dass überall Regentropfen hinfallen werden, doch dies muss unterschiedlich gedeutet werden.

Versuchsergebnis

Das „überall“ impliziert hier nicht eine Verteilung, die zufällig und zugleich mehr und mehr regelmäßig ist. Die Verteilung kann regelmäßig sein, ohne zufällig zu sein, oder willkürlich sein, ohne regelmäßig zu sein. Zum Beispiel verteilten einige Kinder die Tropfen systematisch: Tropfen 1 auf Stein 1, Tropfen 2 auf Stein 2, usw. Umgekehrt haben aber einige Kinder die Tropfen auf einem Stein gehäuft oder auch auf zwei benachbarte Steine. Der Zufallscharakter wird von den Kindern nicht erkannt. Ein Kind bleibt zum Beispiel dabei, dass 20 Tropfen ausreichen, damit 20 Steine einen Tropfen erhalten.

3.2.4 Spielmarkenversuch und Fälschung von Piaget/Inhelder

Zunächst bestand das Versuchsmaterial aus Spielmarken, auf der einen Seite mit einem Kreuz und auf der anderen Seite mit einem Kreis als Markierung versehen. Eine Karte nach der anderen oder ein Stapel von bis zu 20 Karten wurden hochgeworfen, wobei die Kinder sagen sollten, ob nun Kreuz oder Kreis erscheint bzw. wieviele Kreuze oder Kreise auftreten werden.

Die echten Spielmarken wurden, ohne dass die Kinder es wussten, durch „gefälschte" ausgetauscht, sodass nun die benutzten 15 Karten auf beiden Seiten ein Kreuz hatten. Dieser Versuch wird als Trick deklariert.

Versuchsergebnis

Bereits hier zeigt sich schon das bekannte Verhalten. Bei einigen Kindern zeigt sich eine Tendenz zur Kompensation, das heißt, man erwartet, weil beim letzten Wurf mehr Kreise vorkamen, nun beim nächsten Wurf mehr Kreuze. Es zeigt sich aber auch die Erwartung der Fortsetzung des vorhergehenden Ergebnisses. Es werden Ergebnisse nicht ausgewertet, ob sie wesentlich, akzeptabel oder nicht akzeptabel sind. Die Kinder waren vom Ergebnis mit den 15 gefälschten Spielmarken nicht sehr überrascht, sie sehen es in gewisser Weise als natürlich an. Manche glaubten an eine besondere Fähigkeit des Experimentators. Die Kinder glaubten, auch nachdem man ihnen den „Trick" erklärt hatte, dass dies mit normalen Spielmarken möglich sei. Offenbar fehlt den Kindern auch noch die Vorstellung von den vielen Kombinationsmöglichkeiten.

3.2.5 Spielmarkenversuch und Wahrscheinlichkeit von Piaget/Inhelder

Den Versuchspersonen sind hier die genauen quantitativen Zusammensetzungen von zwei Spielmarkenhaufen bekannt. Es werden Wahrscheinlichkeitsvergleiche von den Kindern verlangt.

Die benutzten Spielmarken sind auf der Vorderseite einheitlich weiß, einige der Spielmarken sind in jeder der zwei Mengen auf der Rückseite mit einem Kreuz gekennzeichnet. Von den Versuchspersonen wird die Zusammensetzung der zwei Spielmarkenmengen jeweils exakt zur Kenntnis genommen. Die Spielmarken jeder Menge werden für sich gut gemischt. Die Kinder sollen angeben, aus welcher Menge mit größerer Chance beim ersten Zug eine

Spielmarke mit Kreuz gezogen wird.

Die Bezeichnung a/b bedeutet, die Menge hat insgesamt b Spielmarken, davon haben a Spielmarken ein Kreuz. Piaget und Inhelder betrachteten die folgenden 10 Fälle:

1. Doppelte Unmöglichkeit: Keine der beiden Mengen enthält Karten mit Kreuzen. Die Kinder wissen das, trotzdem wird nach der günstigeren Chance gefragt.	0/3	0/3
2. Doppelte Sicherheit: Alle Spielmarken tragen ein Kreuz. Beide Mengen haben aber ungleiche Anzahlen von Spielmarken.	2/2	4/4
3. Sicherheit - Unmöglichkeit	2/2	0/2
4. Möglichkeit - Sicherheit	1/2	1/1
5. Möglichkeit - Unmöglichkeit	1/2	0/2
6. Identische Zusammensetzungen	1/2	1/2
7. Proportionale Zusammensetzungen: Ungleiche Anzahlen von Spielmarken in beiden Mengen, aber gleiches Verhältnis der Spielmarken mit Kreuz zur Gesamtzahl	1/3	2/6
8. Ungleichheit der günstigen Fälle (Kreuz) - Gleichheit der möglichen Fälle (Gesamtzahl)	1/4	2/4
9. Gleichheit der günstigen Fälle - Ungleichheit der möglichen Fälle	1/2	1/3
10. Ungleichheit der Anzahl der günstigen Fälle (Kreuz) und Ungleichheit der möglichen Fälle (Gesamtzahl), ohne dass Proportionalität vorliegt	1/2	2/3

Tabelle 1: Spielmarkenversuch

Durch diesen sehr differenzierten Versuchsaufbau und seine Ergebnisse haben Piaget und Inhelder Stadium I und Stadium II in noch jeweils zwei Unterphasen eingeteilt.

Versuchsergebnis

Die Fähigkeit quantitative Vergleiche durchzuführen fehlt den Kindern bis zum Alter von 5 Jahren (Stadium IA). Auch dort, wo die Antwort als klar erscheint (wie bei 1/3 und 2/3), treten häufig falsche Antworten auf. Die Schwierigkeit kann nicht im Zahlenverständnis liegen, da man annimmt, dass die Kinder dieser Altersstufe die Zahlen 1 bis 5 simultan erfassen.

In folgendem liegt der Grund:

Das Kind muss die Anzahl der Kreuzkarten und die Gesamtzahl der Karten zugleich in Betracht ziehen. Nach Piaget und Inhelder ist aber das Kind in dieser Altersstufe nicht fähig, die Beziehung zwischen Teil und Ganzem korrekt herzustellen. Das Kind sieht nicht die wechselseitige Beziehung zwischen der Vereinigung A + A' = B und den „Teilungen" B - A = A' und B - A' = A. Ist ein Ganzes in Teile zerlegt, so hört es gewissermaßen auf zu existieren. Durch Vereinigung kann es nicht gedanklich zurückgebildet werden. Die Fähigkeit zu logischen Operationen fehlt.

Am Ende von Stadium I (Stadium IB, 6-7 Jahre) kommt es bei den Aufgaben mit einer Variablen (es handelt sich um die Aufgaben, bei denen sich entweder die Anzahl der günstigen oder die der möglichen Fälle ändert) gelegentlich auch zu richtigen Lösungen. Die dazu von den Kindern angestellten Überlegungen sind aber nicht mathematischer Art, sondern rein individuelle Vorstellungen. Zur Lösung der Aufgaben 7 und 10 sind zwei Variable zu betrachten, es variieren nämlich die Gesamtzahlen und die Anzahlen der Spielmarken mit Kreuzen. Diese Aufgaben können auch diese Kinder nicht lösen.

3.3 Die Phase der konkreten Operationen (ca. 7 bis 12 Jahre)

3.3.1 Perlenversuch

Versuchsergebnis

Eine erste Idee von wechselnden Mischungen entwickelt sich, ohne dass die Gesamtzahl der Möglichkeiten überblickt wird. Eine vorhergesagte Mischung wird eher als eine isolierte, individuelle Verrückung einzelner Perlen gesehen. Die Rückkehr der Perlen in die Ausgangslage wird nicht für unmöglich angesehen, aber für nicht einfach gehalten.

3.3.2 Kastenversuche (Galtonbrett)

Versuchsergebnis

In dieser Stufe werden verallgemeinerungsfähige Verteilungsvorstellungen entwickelt. Für Kasten I nähern sich die Kinder der Aussage der Gleichverteilung an. Bei Kasten II glauben die Kinder, dass im zentralen Fach die meisten Perlen landen, sie sehen aber nicht die Gleichheit zwischen den beiden äußeren Fächern. Ebenso wird bei Kasten III die bevorzugte Stellung der beiden mittleren Fächer erkannt, aber nicht ihre Gleichwertigkeit. Ebenso wird nicht die Symmetrie der beiden äußeren Fächer gesehen. Leichte Ansätze, Ergebnisse aus den vorherigen Versuchen zu übernehmen, wird bei Kasten IV deutlich. Bei Kasten IV glaubten sogar einige Kinder, dass die Nägel eine Ablenkung bewirken und die Kugeln gleichverteilt überall hinlassen.

3.3.3 Zufallsregen

Versuchsergebnis

Die Tropfen werden nun von den Kindern nicht mehr mit künstlicher Regelmäßigkeit verteilt. Vielmehr ist die Regelmäßigkeit der Gleichverteilung das Resultat einer zunehmenden Kompensation, und es gibt eine Synthese zwischen regelmäßig und zufällig. Es fehlt den Kindern aber noch der Begriff vom Verhältnis der Differenzen, da sie diese absolut vergleichen und nicht relativ. So überträgt ein Kind ein zufälliges Anfangszahlenverhältnis von 1:2 Tropfen zweier Steine mit der absoluten Differez 1 auf das seiner Meinung nach zu erwartende Endergebnis 99:100 Tropfen.

3.3.4 Spielmarkenversuch und Fälschung

Versuchsergebnis

Die Kinder nehmen es nicht einfach so hin, dass mit den gefälschten Spielmarken immer dasselbe Zeichen Kreuz auftritt. Sie glauben an einen Zaubertrick oder sagen, dass das nicht gehen kann. Es zeigt sich, dass sich ein globales Verständnis für kombinatorische und wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen anbahnt.

3.3.5 Spielmarkenversuch und Wahrscheinlichkeit

Versuchsergebnis

Es werden hier bereits im ersten Teil dieses Stadiums (Stadium IIA, 7-10 Jahre) gute Ergebnisse von den Kindern bei den Aufgaben mit einer Variable gebracht. Es zeigt sich, dass die Kinder versuchen, mit einer Betrachtung der günstigen bzw. ungünstigen Möglichkeiten auszukommen. Die Aufgaben 7 bis 10 werden mit zwei Variablen weniger gut gelöst. Ein Fortschritt setzt beim Stadium IIB (9-12 Jahre) ein. Entscheidungen werden aber nicht formal getroffen, sondern empirisch optisch vorstellend.

3.4 Die Phase der formalen Operationen (ab 11 oder 12 Jahren)

3.4.1 Perlenversuch

Versuchsergebnis

Es wird ab dem 11. oder 12. Lebensjahr der Mischvorgang verstanden, da die Beobachtungen mit dem mehr und mehr zur Verfügung stehenden Mechanismus der Permutationen in Verbindung gebracht werden. Die Überlagerungen der Wege der Perlen werden dem Permutationssystem angepasst. Es ist nicht mehr überraschend, wenn eine Vermischung in einer Aufeinanderfolge von Versuchen vorkommt. Piaget und Inhelder glauben sogar, dass sich bereits in dieser Stufe bei den Kindern ein Vorverständnis für das Gesetz der großen Zahlen entwickelt, da bei der Vergrößerung der Anzahl der Versuche oder der Verminderung der Anzahl der Perlen nämlich alle Konstellationen realisiert werden können.

Der Perlenversuch macht deutlich, dass Kinder bis zum Alter von 7 Jahren noch nicht zwischen „möglich“ und „notwendig“ unterscheiden können. Die zum Verständnis des Zufallsbegriffs hilfreiche Kenntnis annähernd irreversibler Mischungen ist noch nicht vorhanden.

3.4.2 Kastenversuche (Galtonbrett)

Versuchsergebnis

Die Symmetrie wird von den Kindern berücksichtigt, sodass nun Fächer in symmetrischer Lage als gleichwertig angesehen werden. Die Kinder sehen die Gleichverteilung (Kasten I) bzw. eine symmetrische Verteilung mit einem Maximum in der Mitte (Kasten II) voraus. Als bemerkenswertestes Ergebnis wird das gezeigte Verständnis für die Rolle des Gesetzes der großen Zahlen bezeichnet.

3.4.3 Zufallsregen

Versuchsergebnis

Nun können die Kinder die zunehmende Gleichverteilung aufgrund relativer Differenzen vergleichen. Je größer die Zahlen werden, umso weniger zählt die absolute Differenz. Ein Kind, das die Verteilung 50 zu 51 mit 100 zu 101 auf größere Regelmäßigkeit zu untersuchen hatte, sagte, dass 100 und 101 regelmäßiger sei als 50 und 51, weil „1 mehr auf 100“ weniger ausmache als „1 mehr auf 50“.

3.4.4 Spielmarkenversuch und Fälschung

Versuchsergebnis

Mit den normalen Spielmarken wird das Experiment klar als Zufallsexperiment erkannt. Im Hinblick auf quantitative Prognosen werden die Aussagen genauer und differenzierter. Als Begründung gibt der Schüler an, dass bei „kleinen Zahlen der Zufall weniger groß ist“. Es scheint, dass das Gesetz der großen Zahlen in der Vorstellung der Kinder eine Rolle spielt. Die Fälschungen werden bald erkannt, und, dass man mit 5 echten Spielmarken fünfmal Kreuz werfen kann, wird gesehen, aber für eher selten gehalten.

3.4.5 Spielmarkenversuch und Wahrscheinlichkeit

Versuchsergebnis

In diesem Stadium gibt es keine Anzeichen von Schwierigkeiten, die Aufgaben zu lösen. Vergleiche werden korrekt durchgeführt, und Proportionen werden geschätzt.

3.5 Resumee

Nach Piaget und Inhelder entwickelt sich, aufgrund der Versuchsergebnisse, der quantitative Wahrscheinlichkeitsbegriff erst auf dem Niveau der formalen Operationen. Es handelt sich nämlich bei den für einen quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff erforderlichen Proportionen um Operationen zweiter Stufe, nämlich um Operationen mit Operationen, und die Bildung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffs hängt von der Entwicklung der kombinatorischen Operationen ab.

Aufgrund der Gesprächsprotokolle wird aber auch deutlich, dass Zufallsphänomene vom Kind schon in frühen Stadien wahrgenommen werden. Die Zufallsidee soll sich laut Piaget und Inhelder im Alter von 7 Jahren entwickeln.

3.6 Untersuchungen auf Anregung der Studien von Piaget und Inhelder

(vgl. [13], S. 94-103; [16], S. 25-26; [12], S. 141-142)

Die Arbeit von Yost/Siegel/Andrews (1962) setzt sich kritisch mit der Piagetschen Untersuchungsmethode auseinander.

Vermutet wurde, dass bereits das Vorschulkind einen rudimentären Begriff von Wahrscheinlichkeit besitzt, was auch zutrifft, da die Änderung der Untersuchungsmethoden dies zeigte.

3.6.1 Yost/Siegel/Andrews

In der Arbeit von Yost/Siegel/Andrews wird bezug auf einen Artikel von Piaget aus dem Jahr 1950 genommen.

Folgenden Versuch hatte Piaget durchgeführt:

Es befanden sich in einem undurchsichtigen Behälter eine Auswahl von Spielmarken verschiedener Farben. Eine mit dieser Auswahl völlig übereinstimmende zweite Auswahl blieb auf den Tischen vor den Versuchspersonen als Gedächtnisstütze liegen. 14 Jungen und Mädchen im Alter zwischen 5 und 12 Jahren waren die Versuchspersonen. Die Kinder mussten vorhersagen, welche Farbe am wahrscheinlichsten beim blinden Ziehen einer Spielmarke aus dem Behälter gezogen werden würde.

Zu diesem Versuch äußern sich Yost, Siegel und Andrews kritisch. Sie meinen, da es sich um einen verbalen Test handelt, dass Probleme auftreten können beim Verstehen der Bedeutung der Frage. Weiters können Farbbevorzugungen die echte Vorhersage verfälschen. Piaget nimmt ebenso keine statistische Auswertung vor, und für richtige Antworten gibt es bei ihm keine Belohnungen. Weiters kann durch das Double auf dem Tisch die Antwort des Kindes durch wahrnehmbare Faktoren beeinflusst werden.

Von Yost und seinen Mitarbeitern wurden dann Vergleichsversuche durchgeführt mit Versuchsbedingungen, die die vorher genannten Fehlermöglichkeiten ausschließen sollen.

Es wurden eindeutig Verbesserungen bei den Ergebnissen dieser Versuche festgestellt, im Verleich zu Piaget. Weiters konnte durch eine Belohnung der Kinder aufgrund einer richtigen Antwort die Einschätzung der Wahrscheinlichkeit verbessert werden.

3.7 Weitere Untersuchungen

3.7.1 Goldberg

Goldberg bezieht sich auf die Arbeit von Yost/Siegel/Andrews und modifiziert deren Experimente. Das Wahrscheinlichkeitsverhalten von 4-5jährigen Kindern stand im Mittelpunkt von seinen Untersuchungen, wobei folgende Ergebnisse entstanden:

In seinen Untersuchungen bestätigte es sich, dass Kinder im Alter von

4-5 Jahren bereits ein Verständnis von Wahrscheinlichkeit haben. Fragebedingungen sind bei solchen Ergebnissen aber ausschlaggebend.

Es ergibt sich aber, wenn Piagets Kritikpunkte und die Belohnung richtiger Ergebnisse berücksichtigt werden, dass im neuen Testverfahren der Erfolg noch immer größer ist, jedoch nicht mehr so deutlich.

3.7.2 Davies

Bei C.M. Davies werden auch schulpflichtige Kinder in seine Untersuchungen miteinbezogen. Insgesamt wird bei 112 Kindern die Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes untersucht, bei je 16 Kindern auf den 7 Altersstufen von 3 bis 9 Jahren. Verbale und nicht-verbale Tests wurden von ihm benutzt.

Es konnte gezeigt werden, dass alle Kinder, die im verbalen Test richtig antworteten, auch im nicht-verbalen Test richtig lagen.

Alter in Jahren	bei keinem der beiden Tests	beim nicht-verbalen Test	beim nicht-verbalen und beim verbalen Test
3	50	50	0
4	31	69	0
5	19	81	31
6	0	100	31
7	0	100	75
8	0	100	88
9	0	100	100

Tabelle 2: Prozentsatz der erfolgreichen Schüler bei den Tests

Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

Der Erwerb des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist ein entwicklungsbedingtes Phänomen. Es konnte gezeigt werden, dass das Versagen in beiden Tests mit höherem Alter abnimmt, dass der Erfolg im nicht-verbalen Test mit steigendem Alter zunimmt und bereits im Alter von 6 Jahren 100% ist. Erstmals treten im Alter von 5 Jahren auch Lösungen des verbalen Tests auf.

Weiters tritt früher das nicht-verbale Verhalten der Kinder, das Wahrscheinlichkeitsvorgänge widerspiegelt, auf, als die Verbalisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs oder seine Anwendung.

Es konnte auch bestätigt werden, dass es keinen Unterschied im Wahrscheinlichkeitsverhalten der Geschlechter gibt.

3.7.3 Hoemann/Ross

Hoemann/Ross machten Versuche mit Kindern im Alter von 4-13 Jahren. Ihre ersten beiden Versuche enthalten bereits den entscheidenden neuen Ansatz. Unter zwei Aspekten werden die Experimente durchgeführt, und zwar haben die Kinder einmal gemäß einer Wahrscheinlichkeitsvorschrift und einmal gemäß einer Verhältnisvorschrift ihre Entscheidungen zu treffen. Somit wollen die Autoren prüfen, ob Kinder wirklich schon eine Wahrscheinlichkeitsvorstellung haben, oder ob sie nur Zahlen bzw. Flächen ihrer Größe nach vergleichen.

Versuch 1

Es wurden insgesamt 160 Kinder befragt. Diesen wurde aus einer Serie von Papierscheiben mit unterschiedlichen Anteilen schwarzer und weißer Kreissektoren jeweils 1 Paar dieser Scheiben vorgelegt. Die Chancendifferenzen dieser Scheibenpaare betragen entweder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{8}$. Bei der Chancendifferenz $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{8}$ könnten die Farbverteilungen so sein:

1. Scheibe	2. Scheibe	Differenz
7/8 Fläche von einer Farbe	3/8 Fläche von derselben Farbe	7/8 - 3/8 = 1/2
3/4 Fläche von einer Farbe	1/4 Fläche von derselben Farbe	3/4 - 1/4 = 1/2
9/16 Fläche von einer Farbe	7/16 Fläche von derselben Farbe	9/16 - 7/16 = 1/8

Tabelle 3: Farbverteilungen

Die Scheiben werden beim Versuch unter Wahrscheinlichkeitsvorschrift mit Zeigern versehen und als Glücksräder benutzt. Die Frage dazu lautet:

„Schau Dir bitte die Glücksräder sehr sorgfältig an und zeige mir, welches Du drehen willst, damit der Zeiger auf schwarz (weiß) zeigt.“

Beim Versuch unter Verhältnisvorschrift sind die Scheiben nicht zu Glücksrädern ausgebaut. Hier lautet die Frage:„Schau Dir bitte diese beiden Kreise sehr sorgfältig an und zeige mir, welcher Kreis am meisten schwarz (weiß) hat.“

Es ließen sich bei diesem Versuch auf keiner Altersstufe nennenswerte Unterschiede bei den zwei Fragestellungen feststellen. Aufgrund dieser Ergebnisse schließen Hoemann/Ross darauf, dass Wahrscheinlichkeitsvorstellungen hier nicht zu richtigen Lösungen beitragen. Sie vermuten, dass rein wahrnehmbare Größenvergleiche maßgebend sind.

Versuch 2

Bei diesem Versuch wird zum Unterschied zum ersten Versuch nur jeweils ein Glücksrad bzw. eine Papierscheibe benutzt. Es kommen Scheiben mit unterschiedlichen Farbanteilen schwarz bzw. weiß zum Einsatz. Die Chancendifferenzen sind gleich mit dem Experiment 1. Die Farben schwarz und weiß sind unterschiedlich auf den Scheiben verteilt.

Bei der Wahrscheinlichkeitsvorschrift lautet die Frage: „Drehe bitte den Zeiger, aber zeige mir zuerst, auf welcher Farbe er stehen bleiben wird.“

Bei der Verhältnisvorschrift wird der Zeiger vorher entfernt und das Kind soll auf die Farbe zeigen, die überwiegend vorkommt.

Hier wird deutlich, dass bei der Wahrscheinlichkeitsvorschrift mehr Fehler in den Altersgruppen von 4 bis 8 Jahren auftreten. Es ergibt sich, dass 4jährige Kinder noch nicht fähig zu Wahrscheinlichkeitsurteilen sind. Die richtigen Antworten können sich rein zufällig ergeben. Weiters meinen Hoemann/Ross, dass Kinder erst im Alter von 6 bis 8 Jahren eine Wahrscheinlichkeitsvorstellung entwickeln.

Kapitel 4

Simulationen

Für einen schönen Einstieg in das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung finde ich es sinnvoll, ein konkretes Beispiel an den Anfang zu stellen. Somit kann die Neugier an diesem neuen Kapitel der Mathematik geweckt werden. Hierbei steht das gemeinsame Erarbeiten und Verstehen im Vordergrund, noch nicht das gezielte Rechnen mit den Wahrscheinlichkeiten. Ich gehe davon aus, dass zu diesem Zeitpunkt noch fast kein Wissen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung vorhanden ist.

4.1 Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein Beispiel, das besonders für den Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung geeignet wäre, ist das Folgende, welches eine „Entenjagd“ zum Inhalt hat.

Beispiel:
„Entenjagd“ ([17], S. 164-169)

Die Aufgabenstellung lautet:

Sechs Jäger, alle perfekte Schützen, gehen auf die Jagd. Sie warten darauf, dass Enten auffliegen. Sobald Enten auffliegen schießen die Jäger zur gleichen Zeit. Es kann natürlich auch passieren, dass mehrere Jäger auf die gleiche Ente schießen, da sie sich vorher nicht abreden.

Die Schüler sollen sich überlegen, wieviele Enten wahrscheinlich entkommen können.

Nun stellt sich die Frage, wie dieses Beispiel gelöst werden kann. Die Schüler werden zunächst keine sinnvollen Lösungsvorschläge machen können. Es stellt sich heraus, dass Simulationen dafür nötig sind, da es sich um eine Aufgabe handelt, die exakt noch nicht lösbar ist, da die Schüler noch nicht über die nötigen Kenntnisse für eine exakte Lösung verfügen.

Bevor man nun zur Lösung übergeht, kann hier überhaupt einmal erklärt werden, was man unter Simulation versteht. (vgl. [17], S. 161-162)

Der Begriff Simulation geht auf das lateinische Wort simulare zurück, was bedeutet: ähnlich machen, nachbilden, nachahmen. Simulation bedeutet also die Nachahmung technischer Vorgänge oder bestimmter Verhaltensweisen. Um ihre Kalkulationen zu überprüfen, führen zum Beispiel Ingenieure Versuche an maßstabsgetreuen, verkleinerten Modellen durch. Wenn man in einer Simulation Zufallsgrößen benutzt, so spricht man von Monte-Carlo-Methoden.

N. Metropolis und S. Ulam verfassten 1949 eine erste Arbeit zu diesen Problemen, nämlich „The Monte-Carlo-Method“. J. von Neumann und S. Ulam sind die Begründer dieser Theorie. Obwohl schon theoretische Grundlagen der Monte-Carlo-Methode bekannt waren, wurde diese Methode erst vermehrt angewandt, als die elektronischen Datenverarbeitungsanlagen entwickelt wurden, da eine Simulation von Hand sehr arbeitsaufwändig war.

Durch die einfache Anwendung von Simulationsverfahren ist es möglich, in der Schule Probleme zu behandeln, die über die momentanen mathematischen Mittel der Schüler hinausgehen.

Nun wieder zurück zu unserem Einstiegsbeispiel:

Wir nehmen an, dass die Jäger immer treffen, und ihr Ziel zufällig auswählen. Den Schülern erklären wir das folgende Modell. Die Abbildung 2, in der Enten und Jäger mit 1 bis 6 nummeriert wurden zeigt, wie ein spezielles Ergebnis aussehen könnte.

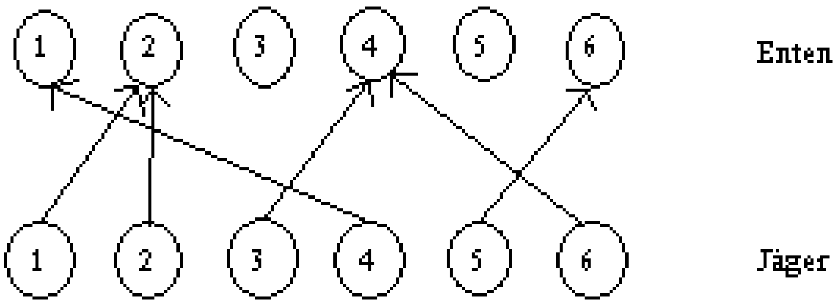


Abbildung 2: Graphisches Modell der „Entenjagd“

Durch ein 6-Tupel von Zahlen, die zwischen 1 und 6 varrieren können, lässt sich das Ergebnis einer solchen „Entenjagd“ also darstellen. In der Abbildung ist es etwa (2, 2, 4, 1, 6, 4). Die zufällige Wahl kann nun bedeuten, dass jeder Jäger sein Ziel mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählt, d.h. alle möglichen 6-Tupel mit Zahlen von 1-6 können vorkommen und haben die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Diese Formulierungen sind lediglich für Oberstufenklassen geeignet. Für eine Unterstufenklasse kann man sich überlegen, das Beispiel anhand einer Tabelle zu verdeutlichen, indem man einen möglichen Ausgang dieser „Entenjagd“ veranschaulicht. In der folgenden Tabelle wird jedem Jäger eine beliebige Ente zugeteilt.

Schießender Jäger	Jäger1	Jäger2	Jäger3	Jäger4	Jäger5	Jäger6
Getroffene Ente	2	2	4	1	6	4

Tabelle 4: Mögliche „Entenjagd“

Ab jetzt verwenden wir die Sprache der Oberstufe, weil diese unsere Formulierungen vereinfacht.

Diesem Modell entsprechen aber auch andere Situationen. Die folgende wäre sinnvoll, um dieses Modell auch Schülern aus einer Unterstufenklasse verständlich zu machen. Man könnte hier, um den Schülern diese Aufgabe zu verdeutlichen, fragen, wieviele der ersten sechs Felder bei einem Würfelspiel freibleiben würden, wenn sechs Personen mitspielen und alle am Start beginnen?

In diesem Fall können sich sechs Personen leicht eine Zahl von 1 bis 6 ausdenken und auf einen Zettel schreiben, diese werden dann vorgelesen, und man sieht wieviele Zahlen fehlen.

Bei unserer Entenaufgabe wird man aber eher vermuten, dass sich die Jäger absprechen, damit der Jagderfolg größer wird.

Vergleichen wir nun noch die Situation mit sechs Schützen auf einem Volksfest an einer Schießbude, die gleichzeitig auf sechs wirbelnde Ballons schießen. Sie stehen nicht alle an einer Stelle. Derjenige der weiter links steht, wird eher auf Ballons die sich links befinden schießen.

Unsere Aufgabe lässt also verschiedene Modelle zu. Zwei davon werden wir simulieren.

Die völlig zufällige Wahl bezeichne ich als Modell 1.

Die Schießbudensituation ist schon schwieriger zu modellieren. Darauf sollte in einer Unterstufenklasse zunächst verzichtet werden, um die Schüler nicht zu verwirren. Bei diesem Modell stellen wir uns dazu die obige Abbildung vor und nehmen an, dass ein Schütze nur auf das gegenüberliegende

Objekt oder eines der beiden daneben schießt, mit gleicher Wahrscheinlichkeit, d.h. der erste Schütze wählt 1 oder 2, der zweite Schütze 2 oder 3 oder 4 usw. Das ist unser Modell 2.

Die davor beschriebenen Umformulierungen der Aufgaben geben schon einen Hinweis darauf, wie man sie simulieren kann: jeweils sechs Schüler denken sich zum Beispiel eine Zahl.

Weniger umständlich ist Würfeln oder die Benutzung einer Tabelle von Zufallszahlen. (siehe Kapitel 8.2 Tabellen von Zufallszahlen)

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über 10 Simulationen für Modell 1.

Simulation	Zufallszahlen	Zahl der entkommenen Enten
1	5,4,2,1,2,5	2
2	5,6,5,4,2,5	2
3	3,5,1,2,3,5	2
4	6,5,4,6,4,6	3
5	6,3,5,4,6,3	2
6	2,6,3,2,2,5	2
7	2,2,5,2,6,6	3
8	2,2,6,4,2,3	2
9	2,3,4,2,2,4	3
10	1,3,4,6,6,1	2

Tabelle 5: 10 Simulationen

So kann man sich Schreibarbeit ersparen. Falls eine Zahl beim sechsmaligen Würfeln fällt, ordnet man ihr eine 0 zu, andernfalls eine 1. Das Ergebnis des Wurfs 5, 4, 2, 1, 2, 5 schreibt sich dann beispielsweise:

1	2	3	4	5	6
0	0	1	0	0	1

Tabelle 6: Ergebnis eines Wurfes

Wenn man zum Beispiel 60 Simulationen in dieser Art notiert, erkennt man, dass, wenn man in der Tabelle die Zahlen in der linken Spalte addiert, sich das gleiche Ergebnis ergibt, wie bei Addition der Zahlen der untersten Zeile.

Um eine größere Anzahl von Versuchen zu simulieren kann man Tabellenkalkulationsprogramme wie zum Beispiel Excel oder Calc verwenden. Zum Simulieren von Würfeln gibt man „`GANZZAHL(1+6*ZUFALLSZAHL())`“ ein. Auf diese Weise kann man bequem viele Versuche simulieren. Der Umgang mit diesen Programmen ist den Schülern meistens bekannt.

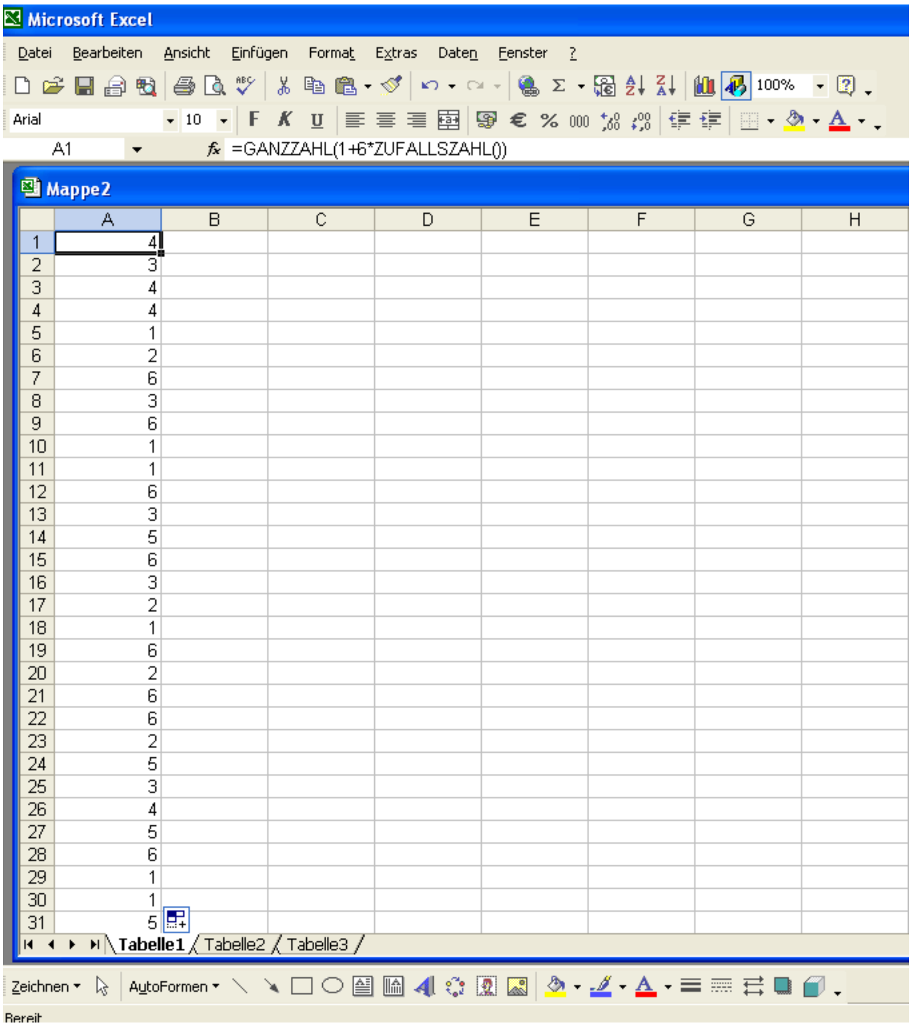


Abbildung 3: Simulieren von Würfeln

Das bedeutet also:

Anzahl der Simulationen, in denen Ente 1 entkommt +...+ Anzahl der Simulationen, in denen Ente 6 entkommt = Anzahl der Simulationen, in denen eine Ente entkommt ×1 + ...+ Anzahl der Simulationen, in denen 5 Enten entkommen ×5.

Die Formel macht nun den theoretisch zu erwartenden Wert plausibel. Die Anzahl der Simulationen kann man als relative Häufigkeit ansehen. Identifiziert man diese mit der Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich:

$$\begin{gathered} P(\text{Ente } \ 1 \text{ entkommt}) + \cdots + P(\text{Ente } \ 6 \text{ entkommt}) = \\ 1 \times P(\text{eine Ente entkommt}) + \cdots + 5 \times P(5 \text{ Enten entkommen})\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Die rechte Seite der Gleichung bedeutet die Anzahl der Enten die durchschnittlich entkommt. Die linke Seite kann man sich leicht ausrechnen, nämlich mit der Wahrscheinlichkeit beim 6-maligen Würfelwerfen zum Beispiel keine 1 zu erhalten. Der theoretisch zu erwartende Wert für die entkommenen Enten ist dann für Modell 1:

$6\times\frac{5^6}{6^6}\approx 2{,}01$

An dieser Stelle ist es sinnvoll die Laplace-Wahrscheinlichkeit einzuführen, die man bereits für dieses Beispiel verwendet hat.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis } \ A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}\,.$$

Modell 2

Nun kann man auch noch betrachten, wie die Zahl der entkommenen Enten verringert werden kann, wenn man gewisse Änderungen der Situation oder Absprachen der Schützen eingeht. Die Simulation ist nicht schwieriger, nur mehr Überlegungen müssen getroffen werden. Die Simulation mit Urnenziehung sieht so aus:

Anhand dieser Graphik sieht man, wie eine Situation am Schießstand aussehen könnte.

Mit Hilfe der obigen Formel (1) kann der theoretische Wert der Zahl der

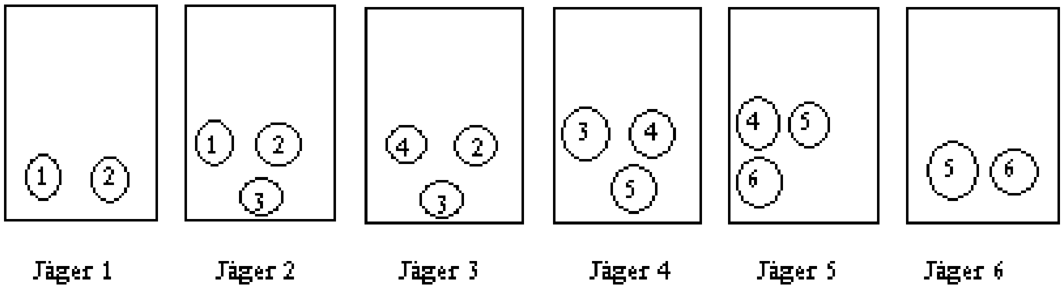


Abbildung 4: Simulation mit Urnenziehung

entkommenen Enten ermittelt werden. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{2^3}{3^3}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2}{3^2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{46}{27}\approx 1,70\,.$$

Man kann nun die Ergebnisse der beiden Simulationen vergleichen.

entkommene Enten	0	1	2	3	4	5
Häufigkeit (Modell 1)	0	9	34	16	1	0
Häufigkeit (Modell 2)	2	22	31	5	0	-

Tabelle 7: Vergleich der Ergebnisse

Würde man die Simulationen 60 Mal durchführen, könnte man sehr schön erkennen, dass die Einschränkung der völlig zufälligen Wahl in Modell 2 die Zahl der entkommenen Enten senkt. Dennoch ist der häufigste Wert in beiden Modellen zwei Enten. Dies liegt schon sehr nahe bei den theoretischen Werten. Es fällt auf, dass bei rein zufälliger Wahl bei allen Simulationen mindestens eine Ente entkommen ist. Es ist also ein recht seltenes Ereignis, dass, falls etwa 6 Personen sich zufällig eine Zahl von 1 bis 6 denken, nicht mindestens 2 Personen die gleiche Zahl gewählt haben.

Ein weiteres Beispiel dieser Art kann nun folgen:

Beispiel:
Das „Drei-Türen-Problem“ ([19], S. 2-25); ([16], S. 104-106)

Ein Kandidat wird bei einem Quiz vor drei Türen gestellt. Hinter zwei der Türen verbirgt sich eine Ziege, und hinter der dritten Tür der Gewinn, nämlich ein Auto. Die Regeln sehen so aus:

1. Auf drei Türen werden zufällig ein Auto und zwei Ziegen verteilt.

2. Alle drei Türen sind verschlossen, damit der Kandidat das Auto und die Ziegen nicht sehen kann.

3. Nun entscheidet sich der Kandidat für eine Tür, in der er glaubt, dass sich das Auto dahinter befindet. Diese Tür bleibt aber noch verschlossen.

4. Der Moderator öffnet nun eine der beiden anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet.

5. Nun wird dem Kandidaten angeboten seine Entscheidung zu überlegen. Er kann entweder die gewählte Tür beibehalten, oder sich für die noch nicht geöffnete zweite Tür umentscheiden.

Es stellt sich nun die Frage, ob der Spieler eine größere Chance hat das Auto zu gewinnen, wenn er die zuerst gewählte Tür beibehält, oder, wenn er sich umentscheidet?

Dieses Beispiel lässt sich sehr schön gemeinsam mit den Schülern erarbeiten.

Nach der Darlegung des Beispieles und der Erklärung der Regeln sollte zuerst einmal eine Diskussion begonnen werden. Hierbei wird sich die Klasse bezüglich ihrer Meinungen spalten, nämlich in in die Gruppe der „Nicht-wechsler“, die glauben, dass sich die Gewinnchance durch das Wechseln der Tür nicht ändert, und in die „Wechsler“, die eine Erhöhung der Gewinnchance darin sehen, sich umzuentscheiden. Nun können die Schüler versuchen ihre Entscheidungen zu begründen.

Um dieses Problem spielerisch zu erarbeiten, kann nun eine Simulation durchgeführt werden, indem die Schüler paarweise zusammen arbeiten. Einer übernimmt die Rolle des „Spielleiters“, der andere die Rolle des „Spielers“.

Nun entscheidet sich der Spielleiter für eine Tür, hinter der sich das Auto befinden soll, und dann werden in einem wechselnden Frage- und Antwortspiel mit dem Spieler zusammen die Versuche durchgeführt. Es soll hier versucht werden, mindestens 10 Spiele durchzuführen.

Die Ergebnisse werden vom Spielleiter notiert, genauso wie die Tatsache, ob sich der Spieler umentschieden hat, oder bei seiner Entscheidung geblieben ist. Danach tauscht man die Rollen.

Nach diesem Versuch kann über die Ergebnisse diskutiert werden, oder sie bereits zu einem Gesamtergebnis zusammenfassen.

Erklärung (1):

Nach der Simulation kann nun auch eine theoretische Erklärung für dieses Problem gesucht werden. Wechseln ist die beste Entscheidung. Zu Beginn ist die Wahrscheinlichkeit für jede Tür ein Drittel. Jetzt wählt man eine Tür, wobei die Wahrscheinlichkeit das Auto dahinter zu finden wieder ein Drittel ist, dass es sich aber hinter einer der beiden anderen Türen befindet beträgt zwei Drittel.

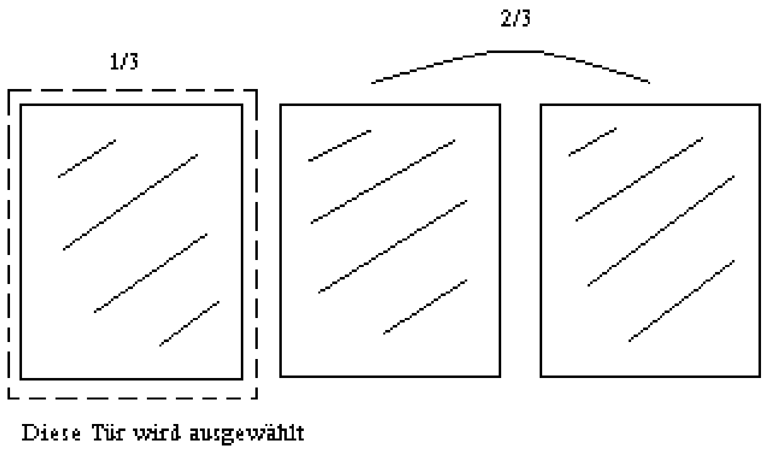


Abbildung 5: Verteilung der Wahrscheinlichkeit

Öffnet der Spielleiter nun aber eine der zwei Türen, ändert sich die Wahrscheinlichkeit für die vom Spieler gewählte Tür nicht, da man ja schon wusste, dass sich hinter einer der beiden anderen Türen eine Ziege befinden muss.

Es beträgt aber die Wahrscheinlichkeit der nicht gewählten Tür zwei Drittel, da bekannt ist, dass das Auto hinter einer Tür sowieso nicht sein kann. Die Gewinnchance erhöht sich also beim Wechsel zu der anderen Tür von einem auf zwei Drittel.

Erklärung (2):

Der Spielleiter kann nur eine Tür öffen, hinter der sich das Auto nicht befindet. Wenn sich ein Spieler zu Beginn richtig entscheidet, kann er nur dann gewinnen, wenn er nicht wechselt. In einem Drittel der Spiele ist das so. Wenn jemand immer wechselt, verliert dieser in allen Spielen, bei denen er gewonnen hätte, hätte er nicht gewechselt. Dies ist ja ein Drittel der Spiele, also gewinnt er in zwei Drittel der Spiele.

Dieses Beispiel eignet sich dazu, den Begriff der Baumdiagramme ein-

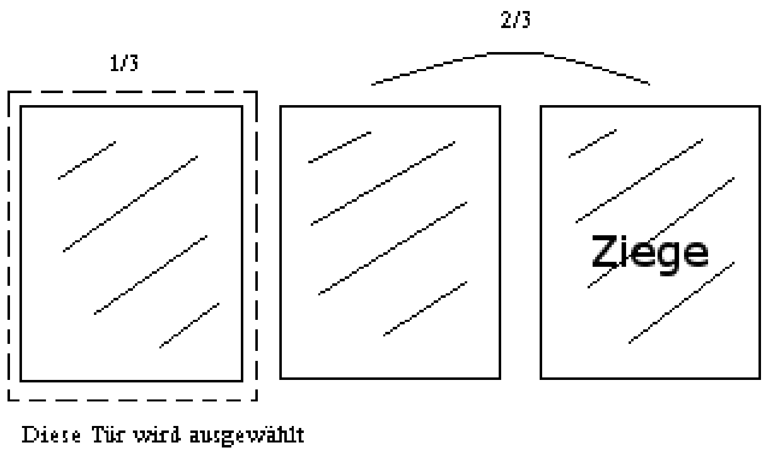


Abbildung 6: Verteilung der Wahrscheinlichkeit bei einer offenen Tür

zuführen. In diesem Baumdiagramm sind alle möglichen Ausgänge und ihre Wahrscheinlichkeiten eingezeichnet. Wenn wir davon ausgehen, dass der Spieler Tür A nimmt, dann sieht das Diagramm folgendermaßen aus:([5])

Nun zur Erklärung des Diagramms:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter einer der Türen ist, ist für alle gleich, nämlich 1/3.

- Die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Moderator eine bestimmte Tür öffnet, sehen folgendermaßen aus:

  Wenn der Kandidat Tür A wählt, und das Auto tatsächlich dahinter ist, kann der Moderator Tür B oder C öffnen, beide sind gleichwahrscheinlich, haben die Wahrscheinlichkeit 1/2.

  Wenn der Kandidat Tür A gewählt hat, das Auto aber hinter Tür B ist, muss der Moderator Tür C ganz sicher (mit Wahrscheinlichkeit 1) öffnen.

  Wenn der Kandidat Tür A gewählt hat, der Prachtschlitten hinter Tür C lauert, muss der Moderator Tür B öffnen (ganz sicher - mit Wahrscheinlichkeit 1).

Nun kann man sich noch ansehen, welche Spielsituationen es gibt, wie wahrscheinlich sie sind, und ob es günstig ist zu wechseln oder nicht:

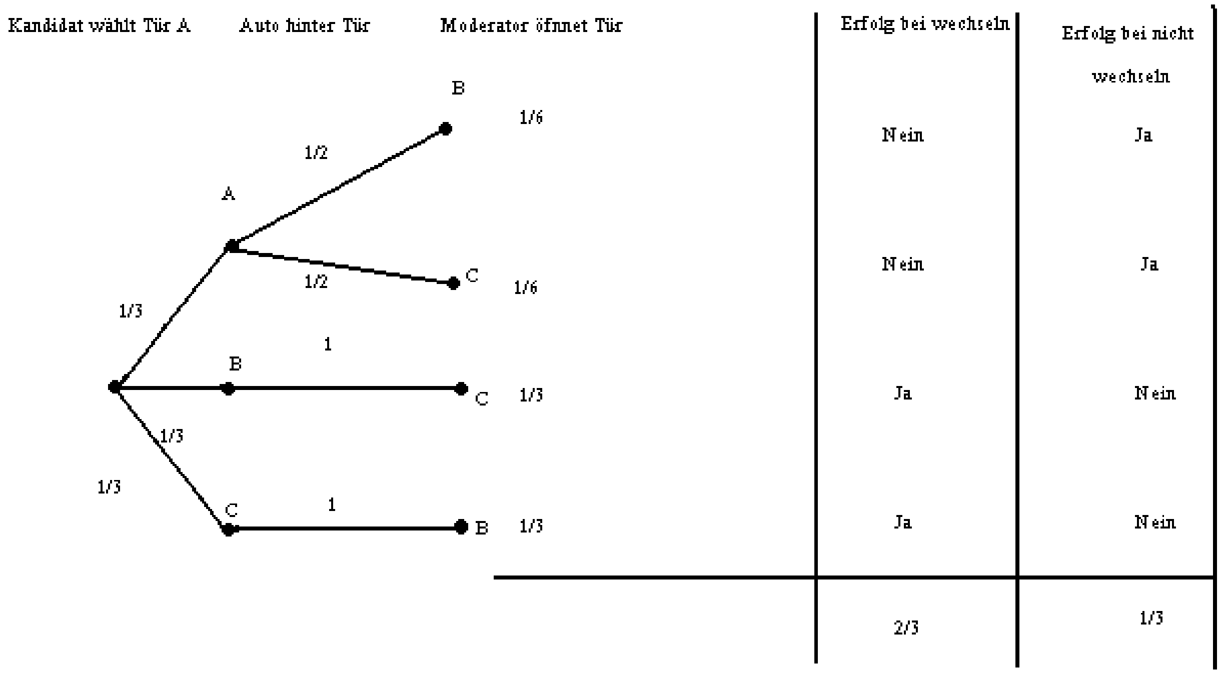


Abbildung 7: Baumdiagramm

- Durch den obersten Pfad beim Diagramm wird die Situation beschrieben, dass das Auto hinter Tür A steht und der Spielleiter Tür B öffnet. Beides zusammen hat die Wahrscheinlichkeit 1/6 (=1/3 x 1/2). Hier wäre es günstig nicht zu wechseln.

- Beim zweite Pfad steht das Auto hinter Tür A und der Spielleiter öffnet Tür C. Wiederum ist die Wahrscheinlichkeit hierfür 1/6 und es wäre sinnvoll nicht zu wechseln.

- Beim dritten Pfad öffnet der Spielleiter Tür C, wobei das Auto hinter Tür B steht. Die Wahrscheinlichkiet dafür ist 1/3 und es wäre gut zu wechseln.

- Im letzten Fall steht das Auto hinter Tür C, der Spielleiter öffnet Tür B, wobei dies mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 geschieht. Hier gewinnt man, wenn man wechselt.

Man kann also erkennen, dass es in den Fällen 1 und 2 klug ist nicht zu wechseln, da diese Fälle mit der Wahrscheinlichkeit 1/6+1/6=1/3 auftreten.

In den Fällen 3 und 4 gewinnt man, wenn man wechselt, da die Wahrscheinlichkeit für diese Situationen 1/3+1/3=2/3 ist.

All diese Fälle können auftreten, wenn der Spieler zu Beginn Tür A gewählt hat.

Wenn man also am Anfang Tür A wählt, ist die Wahrscheinlichkeit ein Auto zu gewinnen ohne Wechsel 1/3 und mit Wechsel 2/3.

4.2 Nützlichkeit einer Simulation

([13], S. 246-248)

Simulationen eignen sich deshalb sehr gut für den Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, da dadurch der experimentelle Aspekt stochastischen Denkens in den Vordergrund gestellt wird. Da Schüler selbst Versuche wiederholt durchzuführen haben, können sie so auch unmittelbar den Zufall entdecken. Dies sind wichtige Erfahrungen für die Schüler.

Ein Simulationsverfahren läuft also folgendermaßen ab:
Bei einem Simulationsverfahren

- stellt man zunächst ein dem vorliegenden Problem angepasstes Modell auf,
- führt dann anhand dieses Modells wiederholt Zufallsexperimente durch,
- wertet schließlich die Ergebnisse des Zufallsexperiments aus, und interpretiert den Schätzwert als Lösung des Problems.

4.2.1 Didaktische Bedeutung einer Simulation

Zunächst einmal fördern Simulationen die Modellbildung im Stochastikunterricht, sowie das stochastische Denken. Durch das wiederholte Durchführen von Zufallsexperimenten werden schließlich Daten zur Einschätzung von Begriffen der Wahrscheinlichkeit geliefert.

Weiters führt das experimentelle Tun bei Simulationen zu einem Motivationsschub bei den Schülern. Es können hier durch die Simulationen bereits Aufgaben gelöst werden, die auf dem erreichten Niveau mit den zur Verfügung stehenden stochastischen Mitteln noch nicht analytisch gelöst werden hätten können.

Ebenso kann eine analytische Lösung einer Aufgabe durch Simulation gewissermaßen eine experimentelle Bestätigung erfahren.

Kapitel 5

Erster Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nachdem ein erster Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung mithilfe von Simulationen stattgefunden hat, möchte ich nun zeigen, wie man weiter vorgehen kann.

Es gibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, wie man einen Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gestalten kann. Wichtig ist, dass die Schüler den Unterricht von Anfang an aktiv mitgestalten. Im Vordergrund sollte zunächst stehen, dass die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kennengelernt und auch verstanden werden.

5.1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

5.1.1 Grundbegriffe

([13], S. 160-181)

1. Zufallsexperimente

Unter dem Leitgedanken „Wo begegnet uns der Zufall und wie können wir ihn berechnen“ können Diskussionen, Probleme oder Spielsituationen am Anfang stehen. Spielsituationen eignen sich besonders für den Einstieg in niedrigen Klassen. Kinder kennen bereits Würfelspiele wie „Mensch ärgere dich nicht“, wobei man durch die Augenzahl des Würfels bestimmte Spielzüge tätigen darf. Ebenso ist den Schülern der Münzwurf zur Seitenwahl beim Fußballspiel und auch bei anderen Ballspielen bekannt.

(Es wurde schon einmal der Sieger des Semifinales einer Fußballeuropameisterschaft (der Männer) mittels Münzwurfs ermittelt. Dies war 1968 in Neapel. Das Spiel Italien - Sowjetunion stand 0:0, durch den Münzwurf wurde Italien zum Sieger erklärt, da es damals noch kein Elfmeterschießen gab. Italien kam so ins Finale.)

Indem man an diese Vorkenntnisse anknüpft, kann man Spiele in den Unterricht aufnehmen. Dies ist ein etwas anderer Zugang, um den Schülern Zufallsphänomene bewusst zu machen.

Beispiel:
Das folgende Spiel ist von seiner Struktur her ein Strategiespiel. Der Schüler muss eine Wahl treffen und diese auch begründen.

Je zwei Schüler bekommen einen Spielplan und einen regelmäßigen Würfel als Zufallsgerät.

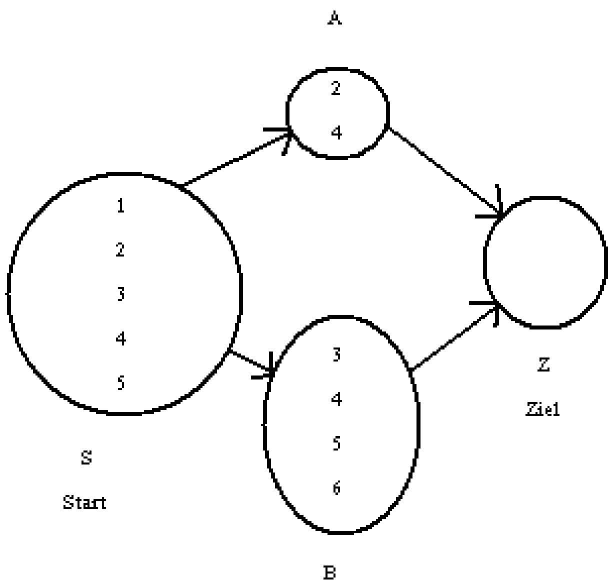


Abbildung 8: Strategiespiel zum Wahrscheinlichkeitsverhalten

Folgende Regel gilt: Jeder Spieler erhält einen Spielstein, der in das Startfeld S gesetzt wird. Abwechselnd wird gewürfelt. Wenn eine Zahl die im Startfeld steht gewürfelt wird, darf man in Richtung der Pfeile entweder nach A oder nach B weitergehen (Alternativentscheidung). Von A aus darf man ins Ziel gehen, wenn man bei den nächsten Würfen 2 oder 4 würfelt, und von B darf man ins Ziel, wenn man 3, 4, 5 oder 6 würfelt. Gewonnen hat, wer zuerst im Ziel ist.

Die Schüler entscheiden so, welchen Weg zum Ziel sie wählen, und der Zufall entscheidet, ob ein Spieler weitergehen darf oder nicht.

Bei diesem einfachen Spiel können bereits vielfältige Diskussionen entstehen:

- Der im Spielplan über B verlaufende Weg ist theoretisch günstiger als der über A (Strategiespiel). Warum?

- Der Ausgang des Spiels hängt aber offensichtlich nicht allein vom gewählten Weg ab, sondern vom Zufall.

  „Der günstigste Weg ist nicht der sichere Weg.“

- Ist die Gewinnchance über B doppelt (vier Fälle in B, zwei Fälle in A) oder dreifach (beim Auftreten von 4 darf man sowohl von A als auch von B ins Ziel rücken) so hoch wie beim Weg über A?

Was würde man bei einer großen Zahl von Spielen bezüglich des Gewinnweges erwarten?

Beim Chancenvergleich in A und B könnte etwa so argumentiert werden, um den Vorteil in B herauszustellen:

- Von A darf man nur in zwei Fällen, von B dagegen in vier (von jeweils 6) weitergehen. Mit Kenntnissen aus der Bruchrechnung kann man den Größenvergleich der entsprechenden Brüche durchführen lassen: $\frac{2}{6} < \frac{4}{6}$
- Beim Auftreten einer 4 darf man sowohl von A als auch von B weitergehen, von B aber auch noch in drei weiteren Fällen, von A dagegen nur in einem weiteren Fall.

Dieses Strategiespiel kann durch Hinzufügen weiterer Felder in den Spielplan zusätzliche Entscheidungen vom Spieler verlangen.

Einige Wahrscheinlichkeitsvergleiche, die zu Beginn im Unterricht verwendet werden können:

- Was ist beim einmaligen Werfen wahrscheinlicher, mit einem Würfel 6 oder mit einem Würfel eine gerade Zahl zu werfen?
- Man wirft einmal zwei regelmäßige Würfel.

  a) Was ist wahrscheinlicher: Die Summe ist kleiner als 4 oder die Summe ist 11?

  b) Was ist wahrscheinlicher: Die Summe ist 7 oder die Summe ist 6?

- Was ist beim einmaligen Werfen wahrscheinlicher, mit einem Würfel 1 oder mit einer Münze Zahl zu werfen?
- Was ist wahrscheinlicher, bei einmaligem Werfen mit einem Würfel eine 6 oder beim einmaligen Werfen mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen?

Durch Spiele und Wettsituationen können diese Fragestellungen dem Alter der Schüler entsprechend dargestellt werden.

2. Zufallsgeräte

Für das Durchführen von Zufallsversuchen braucht man Zufallsgeräte (Zufallsgeneratoren) und Beobachtungsvorschriften: (Abb. S.170 [2])

Zu den „symmetrischen“ Zufallsgeräten zählen:

Abbildung 9: Regulärer Würfel([1])

Abbildung 10: Münze([2])

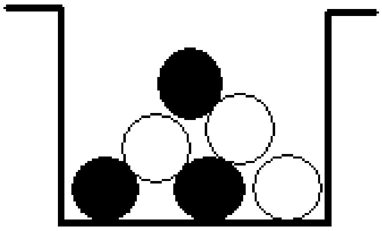


Abbildung 11: Urne mit gleichgroßen Kugeln

Bei all diesen Geräten kann man den möglichen Versuchsausgängen nämlich jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen (Gleichverteilung).

Abbildung 12: Streichholzschachtel([3])

Die leere Streichholzschachtel ist ein asymmetrisches Zufallsgerät, wenn damit geworfen wird.

Es liegt eine Ungleichverteilung bei der den Versuchsausgängen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten.

Glücksrad und Kreisel können je nach Konstruktion sowohl für die Gleichverteilung als auch für die Ungleichverteilung leicht eingesetzt werden.

Bereits im Anfangsunterricht zur Wahrscheinlichkeitsrechnung sollten die Schüler mit dieser Vielzahl von Zufallsgeneratoren vertraut gemacht werden.

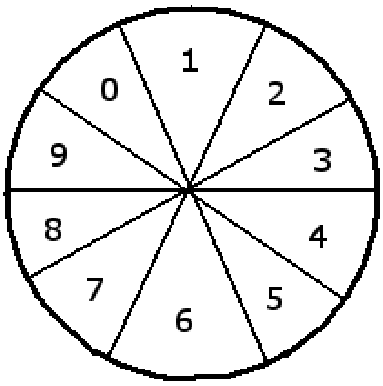


Abbildung 13: Glücksrad

Abbildung 14: Kreisel([4])

3. Ergebnismengen

Zu jedem Zufallsexperiment gehört auch eine Versuchsbeschreibung mit Beobachtungsvorschrift.

Durch die bloße Vorgabe des Zufallsgerätes, ohne weitere Angaben wie, beobachtet man das Auftreten einer Zahl, einer Farbe oder beider Merkmale, kann ein Versuch nicht eindeutig beschrieben werden.

Das Glücksrad in der Abbildung, mit den möglichen Ergebnissen Feld 0-9, beschreibt einen anderen Zufallsversuch als dasselbe Glücksrad, wenn man als mögliche Ergebnisse nur Feld 0-4 und Feld 5-9 zulässt.

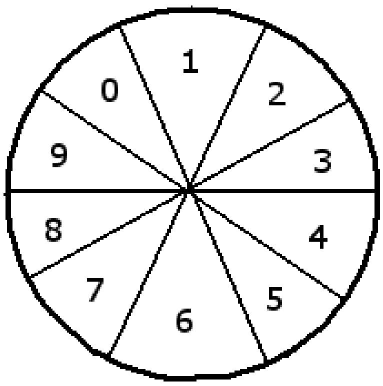


Abbildung 15: Glücksrad

In mathematischer Sicht ist die Angabe der Ergebnismenge der erste wichtige Schritt zur Modellbildung, doch kann man am Anfang beim Wahrscheinlichkeitsunterricht nicht auf die verbale Umschreibung des Begriffs Zufallsexperiment verzichten. Es muss dabei klar gesagt werden, was als mögliche Ergebnisse des Experiments angesehen wird. Hilfreich sind dabei zum Beispiel das Baumdiagramm, die Tabelle, das Koordinatensystem und die Mengensprech- und Mengenschreibweise.

An den Enden der Wege vom Baumdiagramm werden die dem Zufallsexperiment zugeordneten Ergebnisse angegeben, diese bilden die Ergebnismenge Ω.

Beispiele: ([14], S. 172 Abb.)

- Würfel einmal werfen:

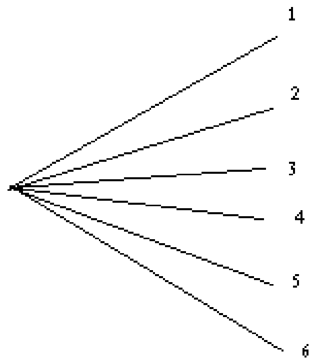


Abbildung 16: Würfel einmal werfen

- Münze zweimal werfen:

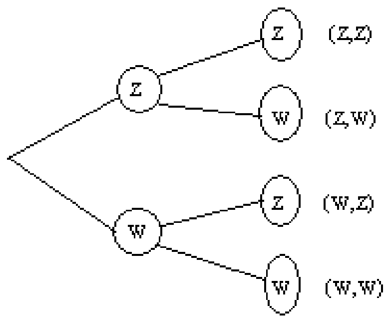


Abbildung 17: Münze zweimal werfen

- Glücksrad einmal drehen:

4. Ereignisse

Bald sollte auch der Begriff Ereignis erarbeitet werden. Am Anfang wird man den Begriff einfach benutzen, ohne ihn zu definieren. Man spricht ganz natürlich von Ereignissen.

Glücksrad einmal drehen	Feld 0-3	Feld 4-7	Feld 5-9

Abbildung 18: Glücksrad einmal drehen

Beispiele von Ereignissen:

- die Münze zeigt oben Zahl (beim Münze einmal werfen)
- der Würfel zeigt oben 2 (beim Würfel einmal werfen)
- beide Münzen zeigen das gleiche Bild (beim zwei Münzen einmal werfen)

Man kann mit dieser Vorstellung vom Ereignisbegriff bereits die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung betreiben.

Unterschieden werden das sichere und das unmögliche Ereignis:

Beim einmaligen Münzwurf ist das „Auftreten von Zahl oder nicht Zahl“ ein sicheres Ereignis, beim einmaligen Werfen eines Würfels ist das „Auftreten von 1 oder nicht 1“ ein sicheres Ereignis, beim einmaligen Werfen eines Würfels ist das „Auftreten von 1 und nicht 1“ ein unmögliches Ereignis, beim einmaligen Werfen eines Würfels ist das „Auftreten keine Augenzahl“ ein unmögliches Ereignis.

Wenn man den Mengenbegriff eingeführt hat, kann man Ereignisse durch Mengen beschreiben, nämlich durch Teilmengen der Ergebnismenge Ω. Auch Ω und ϕ sind Teilmengen von Ω. Ω meint dabei ein sicheres Ereignis und die leere Menge ϕ ein unmögliches Ereignis.

Beispiele:

a) Münze zweimal werfen: Ω={(Z,Z),(Z,W),(W,Z),(W,W)}.

A={(Z,W),(W,Z)}; B={(Z,Z),(W,W)}; C={(Z,Z),(Z,W),(W,Z)}.

b) Würfel einmal werfen: Ω={1,2,3,4,5,6}

E1={2}; E2={1,2,3,4}; E3={3,6}; E4={5,6}; E5=Ω; E6= ϕ

Die Schüler müssen lernen, vorgegebene Ereignisse durch Mengen zu verbalisieren, verbal beschriebene Ereignisse in Mengenschreibweise anzugeben, und im Ergebnisbaum bzw. in der Tabelle eines Zufallsexperiments Ereignisse zu kennzeichnen.

Beispiele:

Obiges Bsp. a):

A: Ereignis, dass beim zweimaligen Werfen einer Münze genau einmal Zahl und genau einmal Wappen auftritt.

B: Ereignis, dass beim zweimaligen Werfen einer Münze das gleiche Bild auftritt.

C: Ereignis, dass ein zweimaliger Münzwurf mindestens einmal Zahl zeigt.

Obiges Bsp. b):

E3: Ereignis, dass der Würfel beim einmaligen Werfen oben eine durch 3 teilbare Zahl zeigt.

E4: Ereignis, dass der Würfel beim einmaligen Werfen oben eine 5 oder 6 zeigt.

E5: Sicheres Ereignis; hier also das Ereignis, dass der Würfel beim einmaligen Werfen oben eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 zeigt.

5. Wahrscheinlichkeit

Als letzter Schritt ist noch notwendig, dass die Schüler lernen, reelle Zahlen zu den Ereignissen als ihre Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen.

Bei der Laplace-Wahrscheinlichkeit liegt unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit eine Berechnungsmöglichkeit der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses vor.

Bei der mittels relativer Häufigkeiten festgelegten Wahrscheinlichkeit handelt es sich dagegen unter der Annahme der Stabilisierung der relativen Häufigkeiten um einen Schätzwert.

Beide Möglichkeiten sollten gleichzeitig in einer Unterrichtseinheit behandelt werden, am besten indem man mit Zufallsexperimenten beginnt, die Gleichverteilung (Laplace-Wahrscheinlichkeit) aufweisen. Man kommt dann schnell zu der „Definition“ für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$eines Ereignisses A:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} .$$

Diese „Definition“ kann, wenn man im Unterricht von der Ergebnismenge Ω gesprochen und Ereignisse als Mengen charakterisiert hat, auch so geschrieben werden:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Definition können nun eingeführt werden:

Für die klassische Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses gilt:

- $P(A)$ ist stets eine rationale Zahl

- Es gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$.

- Tritt A stets mit Sicherheit auf, so ist $P(A) = 1$.

- Ist $P(A) = 1$, so tritt A mit Sicherheit auf.

- Kann A unmöglich auftreten, so ist $P(A) = 0$.

- Ist $P(A) = 0$, so ist A unmöglich.

Ebenso sollten in der selben Unterrichtseinheit Zufallsexperimente mit Ungleichverteilungen besprochen werden, wie das Werfen eines gefälschten

Würfels, Werfen einer gezinkten Münze, Werfen einer Streichholzschachtel, usw.

Hier muss man Versuchsreihen durchführen lassen, die die Stabilität der relativen Häufigkeit erkennen lassen.

Beispiel:
Eine leere Streichholzschachtel trägt, wie angegeben, auf den Seiten die Ziffern 1-6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit der Streichholzschachtel eine Sechs zu werfen? (Abb. S.111)

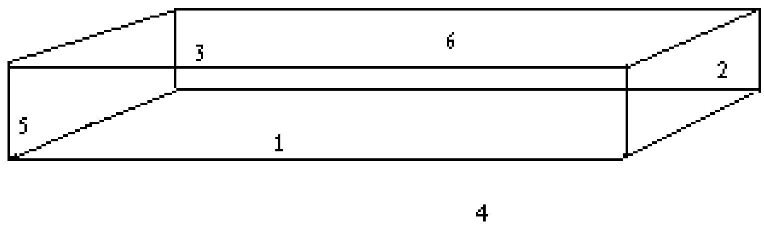


Abbildung 19: Leere Streichholzschachtel

Lösung:

Die 6 Versuchsausgänge sind nicht gleichmöglich. Um eine mögliche Antwort zu finden, müssen lange Versuchsreihen durchgeführt werden, und die relative Häufigkeit für das Ereignis „Auftreten einer Sechs“ berechnet werden.

Definition der relativen Häufigkeit:

$$h_n(A) = \frac{\text{Anzahl } H_n(A) \text{ der Versuche mit dem Ereignis } A}{\text{Gesamtzahl } n \text{ der Versuche}} .$$

Nun sollten auch die Eigenschaften der relativen Häufigkeit behandelt werden.

Eigenschaften:

- $h_n(A)$ ist stets eine rationale Zahl.
- Es gilt: $0 < h_n(A) < 1$, denn für die absolute Häufigkeit $H_n(A)$ des Ereignisses A gilt $0 < H_n(A) < n$.
- Ist Ω das sichere Ereignis, so gilt: $h_n(\Omega) = 1$. Begründung: $H_n(\Omega) = n$.

- Ist ϕ das unmögliche Ereignis, so gilt $h_n(\phi) = 0$. Begründung: $H_n(\phi) = 0$.

Ein wichtiges Ziel soll sein, dass die Schüler lernen, begründete Entscheidungen zu treffen, ob, und wenn ja, warum bei einem vorgegebenen Zufallsexperiment eine Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann oder zu verwerfen ist.

Wenn man den Anfangsunterricht unter das Motto „Wo begegnet uns der Zufall?“ setzt, sollten aber auch umgangssprachliche Wendungen diskutiert werden:

- Wahrscheinlich werde ich die Reise nicht machen.
- Wahrscheinlich wird es morgen regnen.
- Wahrscheinlich werde ich jetzt eine Sechs würfeln.
- Wahrscheinlich ist die Behauptung falsch.
- Es ist möglich, aber nicht sicher, dass heute 30 Grad erreicht werden.
- Es ist nicht unmöglich, dass ich bei der Tombola den Hauptgewinn ziehe.

Schulbücher geben gute Anregungen dazu, damit die SchülerInnen lernen, solche und ähnliche Aussagen richtig einzuschätzen und zu bewerten, im Sinne einer mathematischen Präzisierung.

Kapitel 6

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

6.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

6.1.1 Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

([8], S. 181-185)
Beispiel:
Ein Betrieb hat 628 Mitarbeiter. Gemäß der Tabelle verteilen sich diese auf die Gruppen Frauen-Männer bzw. Raucher-Nichtraucher. Es wird zufällig eine Person X ausgewählt aus der Menge aller Mitarbeiter Ω.

	Frauen	Männer	Gesamt
Raucher	201	189	390
Nichtraucher	98	140	238
Gesamt	299	329	628

Tabelle 8: Rauchgewohnheiten in einer Firma

Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gesucht:

1. $P(X \text{ ist Raucher})$
2. $P(X \text{ ist Raucher})$, wenn man bereits weiß, dass eine Frau ausgewählt wurde.

Lösung:
1. $P(X \text{ ist Raucher}) = \frac{390}{628} \approx 0,62$
2. $P(X \text{ ist Raucher}) = \frac{201}{299} \approx 0,67$

In diesem Beispiel wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E_1 (nämlich X ist Raucher) unter der Voraussetzung berechnet, dass ein anderes Ereignis E_2 (nämlich X ist eine Frau) eintritt.

In so einem Fall spricht man von der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Definition:
Es seien E_1 und E_2 Ereignisse eines Versuches. Die Wahrscheinlichkeit für E_1 unter der Voraussetzung, dass E_2 eintritt, nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit** von E_1 unter der Voraussetzung E_2 und bezeichnet sie mit $P(E_1/E_2)$.

Das Symbol $P(E_1/E_2)$ wird gelesen als „Wahrscheinlichkeit von E_1 unter der Bedingung E_2“.

Normal liegen immer Voraussetzungen bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen zugrunde, bei der bedingten Wahrscheinlichkeit wird eine Voraussetzung explizit ausgedrückt.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit wird folgendermaßen berechnet: ([11], S. 82,83)

Die Anzahl der möglichen Ergebnisse ist $\mid E_2 \mid$, die Anzahl der Ergebnisse von E_1, die zugleich Elemente von E_2 sind (günstige Fälle), ist $\mid E_2 \cap E_1 \mid$.

Nun ist also $P(E_1/E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|E_2|}$.

Wegen $P(E_1 \cap E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|\Omega|}$ und $P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|}$ gilt:

$P(E_1/E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|E_2|} = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|\Omega|} / \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$.

Es drängt sich nun folgende Definition auf:

(Ω/P) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B seien Ereignisse in Ω mit $P(A) > 0$. Dann nennt man

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A.

Beispiel:
([15], S. 62)

25% der SchülerInnen sind in Mathematik bei einer Prüfung durchgefallen, 15% in Chemie und 10% sind in Mathematik und Chemie durchgefallen. Einer der SchülerInnen wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in

1. Mathematik durchfiel, wenn man weiß, dass er Chemie nicht bestanden hat?

2. Chemie durchfiel, wenn man weiß, dass er Mathematik nicht bestanden hat?

3. Mathematik oder Chemie durchfiel?

Hierbei sei M = {Mathematik nicht bestanden} und C = {Chemie nicht bestanden}.

Es gilt dann $P(M) = 0,25$; $P(C) = 0,15$; $P(M \cap C) = 0,10$.

Die Lösung sieht dann folgendermaßen aus:

zu 1.: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler in Mathematik durchfiel, wissend, dass er Chemie nicht bestanden hat, ist

$$P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0,10}{0,15} = \frac{2}{3}.$$

zu 2.: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler in Chemie durchfiel, wissend, dass er bereits Mathematik nicht bestand, ist

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0,10}{0,25} = \frac{2}{5}.$$

zu 3.: $P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 0,25 + 0,15 - 0,10 = 0,30 = \frac{3}{10}$.

Dieses Beispiel lässt sich sehr gut mit Excel simulieren.

Dafür wird in die erste Spalte A1 der Ausdruck „`ZUFALLSZAHL()`“ eingegeben. Dies liefert eine Zufallszahl zwischen 0 und 1. Es ist sinnvoll, sich einige hundert Zufallszahlen auf diese Weise liefern zu lassen.

Nachdem 10% der Schüler in Mathematik und Chemie durchgefallen sind und 15% nur in Chemie, nehmen wir an, dass die Werte bis 0,1 dem Durchfallen in Mathematik und Chemie entsprechen, und die Werte bis 0,15 dem Durchfallen in Chemie.

In die Spalte B1 werden diejenigen eingetragen, die in Chemie durchgefallen sind. Dieser Befehl lautet „`WENN(A1<0,15;1;0)`“.

Die Spalte C1 wird mit „`WENN(A1<0,1;1;0)` gefüllt, dies entspricht denjenigen die in Mathematik und in Chemie durchgefallen sind.

Um den relativen Anteil derjenigen, die in Mathematik und Chemie durchgefallen sind, an denjenigen, die nur in Chemie durchgefallen sind, auszurechnen, können wir in die Spalte D1 noch eingeben
„`SUMME(C1:C500)/SUMME(B1:B500)`“.

6.1.2 Multiplikationsregel

([8], S. 193-202)

Versuche bestehen manchmal aus mehreren Teilversuchen, die nacheinander oder parallel durchgeführt werden.

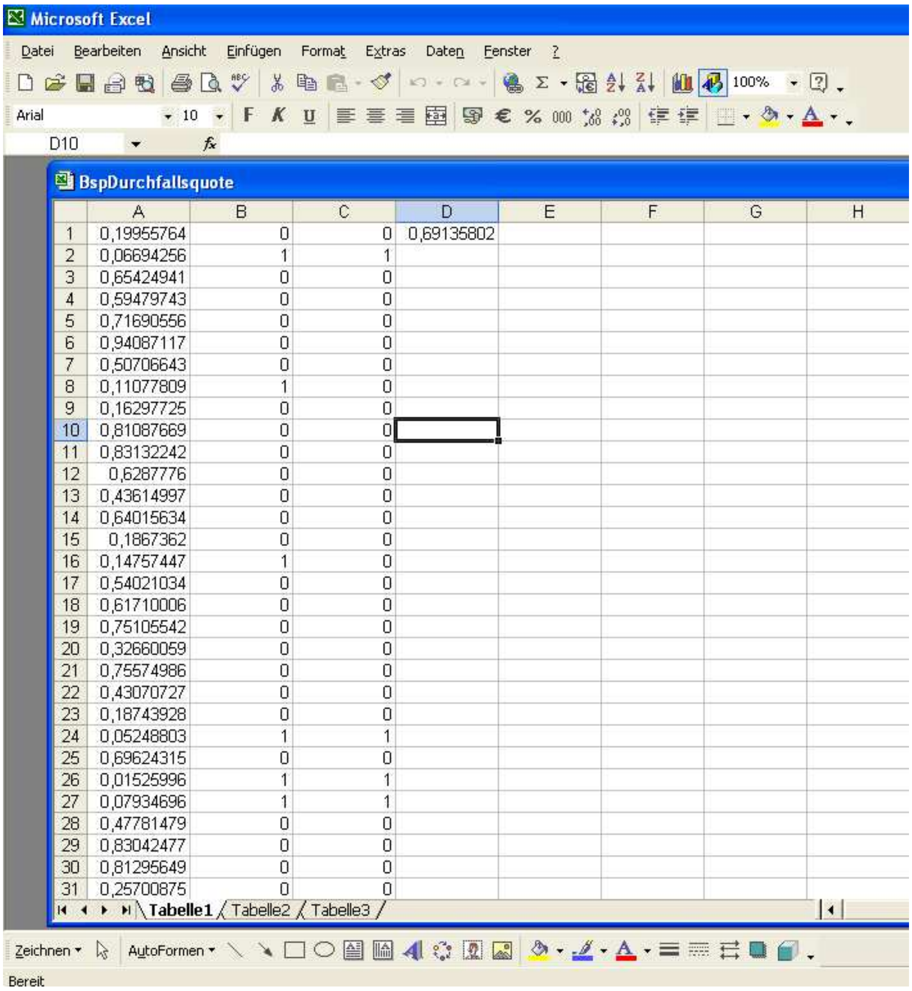
Beispiel:
Da das Ehepaar Adam ständig beim Roulette verloren hat, geht es zu den Spielautomaten. Frau Adam spielt an einem Gerät, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gewinnt. Herr Adam spielt bei einem Gerät mit Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$, bekommt dafür aber mehr. Gleichzeitig wird gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) beide gewinnen,

b) Frau Adam gewinnt und Herr Adam verliert,

c) Frau Adam verliert und Herr Adam gewinnt,

d) beide verlieren?



	A	B	C	D
1	0,19955764	0	0	0,69135802
2	0,06694256	1	1	
3	0,65424941	0	0	
4	0,59479743	0	0	
5	0,71690556	0	0	
6	0,94087117	0	0	
7	0,50706643	0	0	
8	0,11077809	1	0	
9	0,16297725	0	0	
10	0,81087669	0	0	
11	0,83132242	0	0	
12	0,6287776	0	0	
13	0,43614997	0	0	
14	0,64015634	0	0	
15	0,1867362	0	0	
16	0,14757447	1	0	
17	0,54021034	0	0	
18	0,61710006	0	0	
19	0,75105542	0	0	
20	0,32660059	0	0	
21	0,75574986	0	0	
22	0,43070727	0	0	
23	0,18743928	0	0	
24	0,05248803	1	1	
25	0,69624315	0	0	
26	0,01525996	1	1	
27	0,07934696	1	1	
28	0,47781479	0	0	
29	0,83042477	0	0	
30	0,81295649	0	0	
31	0,25700875	0	0	

Abbildung 20: Simulation von Prüfungsergebnissen

e) Wie groß ist die Summe der in a) bis d) berechneten Wahrscheinlichkeiten?

Lösung:

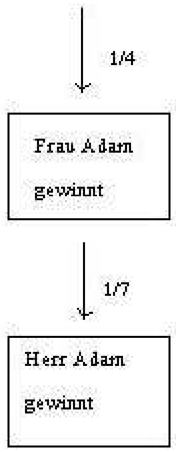


Abbildung 21: Wahrscheinlichkeit: Beide gewinnen

a)Der Versuch besteht darin, dass beide die Automaten betätigen. Zuerst sieht man sich das Resultat von Frau Adam an, dann das von Herrn Adam. Von Interesse ist das Ereignis, dass beide gewinnen.

Die Frage ist nun, wie man von den beiden Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{7}$ auf die gesuchte Wahrscheinlichkeit kommt?

Überlegung: Bei jeder längeren Versuchsserie, wobei jeder Versuch darin besteht, dass Frau und Herr Adam spielen, würde Frau Adam in etwa $\frac{1}{4}$ aller Versuche gewinnen und Herr Adam in etwa $\frac{1}{7}$ aller Versuche. Nun bedenkt man, dass man eine sehr lange Versuchsserie, 1 Million Versuche, durchführt.

Frau Adam würde nun in 250 000 Versuchen gewinnen. Man betrachte nun nur die Versuche, in denen Frau Adam gewonnen hat. Diese werden als eigene Versuchsserie angesehen. Anzunehmen ist, dass Herr Adam in etwa $\frac{1}{7}$ aller Versuche dieser Serie gwonnen hat (das sind etwa 36 000 Versuche). Damit haben beide in etwa $\frac{1}{7}$ von $\frac{1}{4}$, das ist $\frac{1}{7}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{28}$ aller Versuche, gewonnen.

Wenn man dies nachrechnet ergibt sich, 36 000 ist etwa $\frac{1}{28}$ von 1 Million.

Es folgt daraus: P(Beide gewinnen) $= \frac{1}{4}\times\frac{1}{7} = \frac{1}{28}$

b) P(Frau Adam gewinnt und Herr Adam verliert)$= \frac{1}{4}\times\frac{6}{7}= \frac{3}{14}$

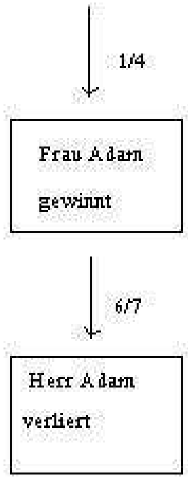


Abbildung 22: Wahrscheinlichkeit: Fr.Adam gewinnt, Hr.Adam verliert

c) P(Frau Adam verliert und Herr Adam gewinnt)$= \frac{3}{4}\times\frac{1}{7}= \frac{3}{28}$

d) P(Beide verlieren)$= \frac{3}{4}\times\frac{6}{7}=\frac{9}{14}$

e)$\frac{1}{28}+\frac{3}{14}+\frac{3}{28}+\frac{9}{14}=1$

Definition:
Es seien E_1 sowie E_2 Ereignisse eines Versuches. Das Ereignis „E_1 und E_2“, symbolisch $E_1 \cap E_2$, tritt genau dann ein, wenn sowohl E_1 als auch E_2 eintritt.

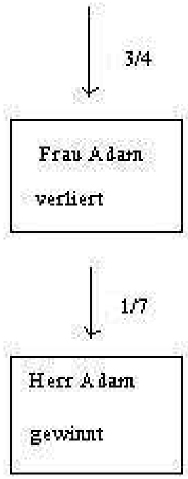


Abbildung 23: Wahrscheinlichkeit: Fr.Adam verliert, Hr.Adam gewinnt

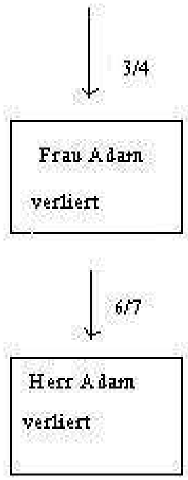


Abbildung 24: Wahrscheinlichkeit: Beide verlieren

Beispiel:
In einer Urne befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel zufällig gezogen und dann nochmal eine, ohne dass die erste zurückgelegt wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) beide Kugeln weiß sind,

b) die erste Kugel schwarz, die zweite weiß ist,

c) die erste Kugel weiß, die zweite schwarz ist,

d) beide Kugeln schwarz sind?

e) Wie groß ist die Summe der in a) bis d) berechneten Wahrscheinlichkeiten?

Lösung:

a) P(Erste Kugel weiß $\cap$ Zweite Kugel weiß) $= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

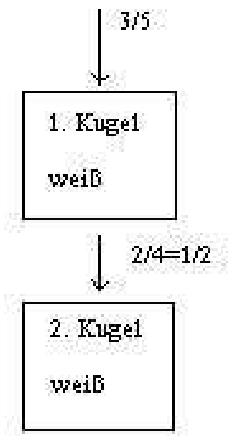


Abbildung 25: Wahrscheinlichkeit: Beide Kugeln weiß

b) P(Erste Kugel schwarz $\cap$ Zweite Kugel weiß) $= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

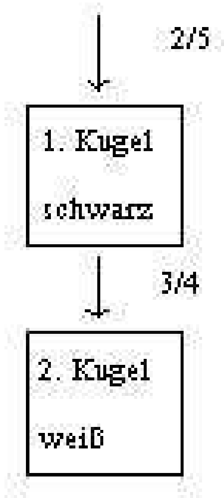


Abbildung 26: Wahrscheinlichkeit: 1.Kugel schwarz, 2.Kugel weiß

Man geht in diesem Beispiel so vor: Um die Wahrscheinlichkeit $P(E_1 \cap E_2)$ zu berechnen, hat man $P(E_1)$ und dann die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_2/E_1)$ berechnet. Dann setzt man $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2/E_1)$.

Kann man nun dies allgemein begründen?

Bei einer Versuchsserie wird in etwa $\mathrm{P}(E_1)$ aller Fälle E_1 eintreten. In etwa $\mathrm{P}(E_2/E_1)$ aller dieser Versuche wird auch E_2 eintreten, also wird insgesamt in etwa $\mathrm{P}(E_1) \times \mathrm{P}(E_2/E_1)$ aller Versuche sowohl E_1 als auch E_2 eintreten. Daraus folgt:

$$\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) \approx \mathrm{P}(E_1) \times \mathrm{P}(E_2/E_1)$$

Dieses Beispiel lässt sich auch mittels Excel simulieren.

Zufallszahlen zwischen 0 und 1 werden generiert indem man in die Spalte A1 den Befehl „`ZUFALLSZAHL()`" eingibt. Nachdem wir 60% weiße Kugeln haben, ordnen wir jedem Wert kleiner als 0,6 eine weiße Kugel zu, allen anderen eine schwarze.

Falls Schwarz gezogen worden ist, können keine 2 weißen Kugeln mehr kommen, deshalb ordnen wir diesem Wert 1 zu, der dann automatisch schwarz bedeutet. War aber die 1. Kugel weiß, so generieren wir eine 2. Zufallszahl. Dieser Befehl lautet „`WENN(A1<0,6;ZUFALLSZAHL();1)`“.

Nachdem jetzt nur mehr die Hälfte der Kugeln weiß ist, ordnen wir allen kleiner als 0,5 die Farbe weiß zu, und allen anderen die Farbe schwarz.

Ist nun B1<0,5, dann haben wir 2 weiße Kugeln gezogen. In allen anderen Fällen haben wir zumindest 1 schwarze Kugel gezogen. In die Spalte C1 wird nun „`WENN(B1<0,5;1;0)`“ eingegeben.

Um den relativen Anteil auszurechnen können wir in D1 eingeben „`SUMME(C1:C500)/500)`“

Multiplikationsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
Sind E_1, E_2 Ereignisse eines Versuchs, dann soll gelten:

$$P(E_1 \cap E_2) \approx P(E_1) \times P(E_2/E_1)$$

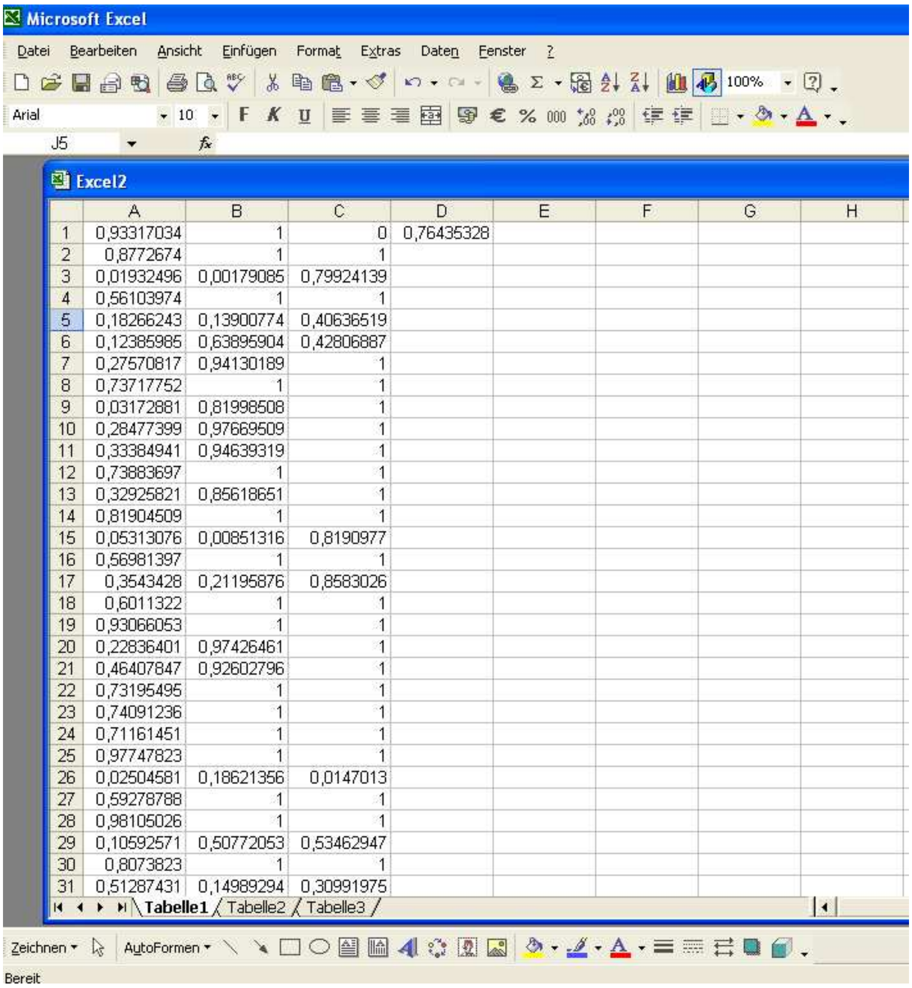
Diese Regel muss bei jeder Wahrscheinlichkeitszuordnung erfüllt sein und ist eine Art Grundgesetz. Sie wird bewusst nicht als „Satz“ bezeichnet, da diese obige Überlegung mit relativen Häufigkeiten kein Beweis für die Multiplikationsregel ist.

Bei den beschriebenen Beispielen hatte das Eintreten von E_1 keinen Einfluss auf das Eintreten von E_2. Es galt $\mathrm{P}(E_2/E_1) = \mathrm{P}(E_2)$, d.h. das Ereignis E_2 war unabhängig vom Ereignis E_1.

Definition:
Falls $P(E_1) > 0$, dann heißen E_1 und E_2 **unabhängig**, wenn $P(E_2/E_1) = P(E_2)$.

Satz: *Sind E_1,E_2 Ereignisse eines Versuchs und ist E_2 unabhängig von E_1, so gilt:* $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

Beweis: Unmittelbar aus der Multiplikationsregel und aus der Definition der Unabhängigkeit folgt dieser Satz. $\square$



	A	B	C	D
1	0,93317034	1	0	0,76435328
2	0,8772674	1	1	
3	0,01932496	0,00179085	0,79924139	
4	0,56103974	1	1	
5	0,18266243	0,13900774	0,40636519	
6	0,12385985	0,63895904	0,42806887	
7	0,27570817	0,94130189	1	
8	0,73717752	1	1	
9	0,03172881	0,81998508	1	
10	0,28477399	0,97669509	1	
11	0,33384941	0,94639319	1	
12	0,73883697	1	1	
13	0,32925821	0,85618651	1	
14	0,81904509	1	1	
15	0,05313076	0,00851316	0,8190977	
16	0,56981397	1	1	
17	0,3543428	0,21195876	0,8583026	
18	0,6011322	1	1	
19	0,93066053	1	1	
20	0,22836401	0,97426461	1	
21	0,46407847	0,92602796	1	
22	0,73195495	1	1	
23	0,74091236	1	1	
24	0,71161451	1	1	
25	0,97747823	1	1	
26	0,02504581	0,18621356	0,0147013	
27	0,59278788	1	1	
28	0,98105026	1	1	
29	0,10592571	0,50772053	0,53462947	
30	0,8073823	1	1	
31	0,51287431	0,14989294	0,30991975	

Abbildung 27: Simulation einer Urnenziehung

Satz: *(Verallgemeinerte Multiplikationsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung):*

Sind E_1, E_2,..., E_r Ereignisse eines Versuches (r $\geq$2), so gilt:

$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_r) = P(E_1) \times P(E_2/E_1) \times P(E_3/E_1 \cap E_2) \times \ldots \times P(E_r/ E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{r-1})$.

Dieser Satz eignet sich für mehrstufige Versuche. Mehrstufige Versuche bestehen aus mehreren Teilversuchen, die nacheinander oder zugleich durchgeführt werden. Diese verallgemeinerte Multiplikationsregel kann man kurz so ausdrücken:

„Die Wahrscheinlichkeit für den Weg ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Weges.“ ([8],S. 200)

Beispiel:
([11], S. 85)
53 % der Bevölkerung sind Frauen, 80 % der Frauen sind verheiratet und 30 % dieser verheirateten Frauen sind berufstätig. Wieviel Prozent der Bevölkerung machen die berufstätigen und verheirateten Frauen aus?

F ... Menge aller Frauen

V ... Menge der verheirateten Frauen

B ... Menge der berufstätigen Frauen

Es ergibt sich nun:

$P(F) = 0,53$

$P(V/F) = 0,8$

$P(B/F \cap V) = 0,3.$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also:

$$P(F \cap V \cap B) = P(F) \times P(V/F) \times P(B/F \cap V) = 0,53 \times 0,8 \times 0,3 = 0,1272.$$

Es beträgt also der Anteil der berufstätigen, verheirateten Frauen an der gesamten Bevölkerung 12,72 %.

Wenn man dieses Beispiel mit Excel simuliert sieht dies folgendermaßen aus:

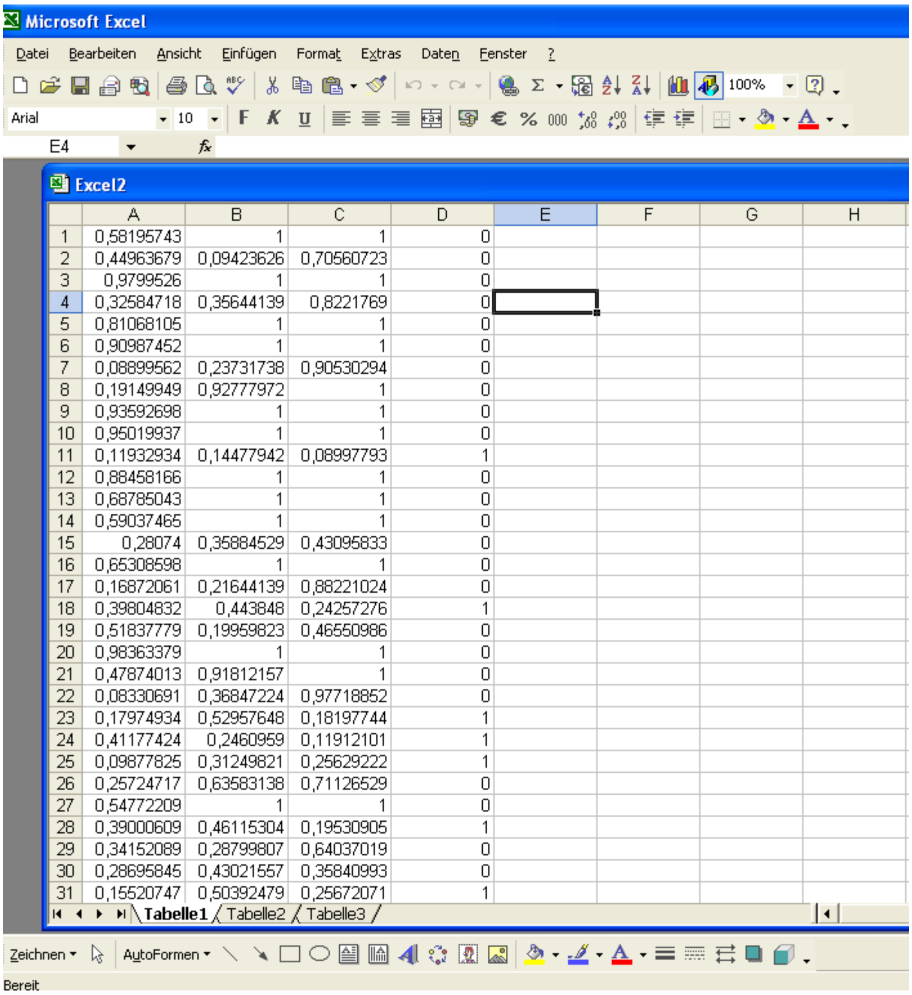
Es wird wieder in die Spalte A1 „`ZUFALLSZAHL()`“ eingegeben, und wir lassen uns 500 Zufallszahlen liefern.

Weil 53% Frauen sind, nehmen wir an, dass die Werte bis 0,53 einer Frau entsprechen. Für die Frauen generieren wir wieder eine Zufallszahl, Männer werden jetzt nicht mehr berücksichtigt. Es wird also in B1 „`WENN(A1<0,53;ZUFALLSZAHL();1)`“ eingegeben. Von diesen sind 80% verheiratet, daher entsprechen Werte bis 0,8 einer verheirateten Frau. In C1 wird eingegeben „`WENN(B1<0,8;ZUFALLSZAHL();1)`“. Für Männer und nicht verheiratete Frauen erhalten wir den Wert 1 und für die verheirateten Frauen generieren wir eine neue Zufallszahl. Nachdem 30% der verheirateten Frauen berufstätig sind, ordnen wir Werten bis 0,3 eine berufstätige Frau zu. In D1 wird eingegeben „`WENN(C1<0,3;1;0)`“. Somit erhalten wir in Spalte D den Wert 1 für eine verheiratete berufstätige Frau und 0 sonst.

6.1.3 Die Additionsregel

([8], S. 190–193)

Beispiel:
Herr Adam und seine Frau spielen Roulette im Casino. Herr Adam setzt auf die Zahlen „über 18 “ (d.h. {19,20, ..., 36}), seine Frau auf die Gruppe {1,2,3}. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der Beiden gewinnt? Welche Beziehung besteht zwischen dieser Wahrscheinlichkeit und den Wahrscheinlichkeiten, dass Herr Adam bzw. seine Frau gewinnt?



	A	B	C	D
1	0,58195743	1	1	0
2	0,44963679	0,09423626	0,70560723	0
3	0,9799526	1	1	0
4	0,32584718	0,35644139	0,8221769	0
5	0,81068105	1	1	0
6	0,90987452	1	1	0
7	0,08899562	0,23731738	0,90530294	0
8	0,19149949	0,92777972	1	0
9	0,93592698	1	1	0
10	0,95019937	1	1	0
11	0,11932934	0,14477942	0,08997793	1
12	0,88458166	1	1	0
13	0,68785043	1	1	0
14	0,59037465	1	1	0
15	0,28074	0,35884529	0,43095833	0
16	0,65308598	1	1	0
17	0,16872061	0,21644139	0,88221024	0
18	0,39804832	0,443848	0,24257276	1
19	0,51837779	0,19959823	0,46550986	0
20	0,98363379	1	1	0
21	0,47874013	0,91812157	1	0
22	0,08330691	0,36847224	0,97718852	0
23	0,17974934	0,52957648	0,18197744	1
24	0,41177424	0,2460959	0,11912101	1
25	0,09877825	0,31249821	0,25629222	1
26	0,25724717	0,63583138	0,71126529	0
27	0,54772209	1	1	0
28	0,39000609	0,46115304	0,19530905	1
29	0,34152089	0,28799807	0,64037019	0
30	0,28695845	0,43021557	0,35840993	0
31	0,15520747	0,50392479	0,25672071	1

Abbildung 28: Anteil der Frauen an der Bevölkerung

Lösung:

E_1 ... Herr Adam gewinnt.

E_2 ... Frau Adam gewinnt.

E ... Mindestens einer der beiden gewinnt.

$P(E_1) = \frac{18}{37}$

$P(E_2) = \frac{3}{37}$

$P(E) = \frac{18+3}{37}$

$P(E) = P(E_1) + P(E_2)$

Definition:
Es seien E_1, E_2 Ereignisse eines Versuches. Das Ereignis „E_1 oder E_2", symbolisch $E_1 \cup E_2$, tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der beiden Ereignisse E_1 bzw. E_2 eintritt.

Aufgrund des vorherigen Beispieles lässt sich das allgemeine Gesetz $P(E_1 \cup P(E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ vermuten.

Fortsetzung des Beispieles:

Herr Adam setzt auf „über 18", seine Frau setzt jetzt auf „ungerade". Wie groß sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten?

Lösung: (Definitionen bleiben bestehen wie im vorigen Bsp.)

$P(E_1) = \frac{18}{37}$

$P(E_2) = \frac{18}{37}$

Würde $P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ gelten, so wäre $P(E) = \frac{36}{37}$, also wäre E fast sicher.

Dies kann aber nicht stimmen, da es mehrere Zahlen gibt, bei denen weder Herr Adam noch Frau Adam gewinnt: 0,2,4,6,8, ..., 18.

$P(E)$ berechnet man, indem man die ungeraden Zahlen bis 18 zählt, das sind 9, und die Zahlen über 18 sind 18.

Jetzt erhält man $P(E) = \frac{9+18}{37} = \frac{27}{37} \neq P(E_1) + P(E_2)$

Eine Beziehung $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ gilt also scheinbar immer dann, wenn die Ereignisse E_1 und E_2 einander ausschließen.

Definition:
Zwei Ereignisse eines Versuches heißen **einander ausschließend**, wenn es nicht möglich ist, dass beide zugleich eintreten.

Additionsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Sind E_1 und E_2 einander ausschließende Ereignisse desselben Versuches, dann soll gelten:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

6.1.4 Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses

Definition:
Es sei E ein Ereignis. Das Ereignis **nicht E**, symbolisch ¬E, tritt genau dann ein, wenn das Ereignis E nicht eintritt.

Satz: *: Ist E ein Ereignis, so gilt:*
P(¬E) = 1-P(E).

Beispiel:
([16], S. 77,78)

Ein Komitee aus 2 Personen soll gebildet werden. Roswitha, Anna und Paul wollen eine zufällige Auswahl durchführen, bei der 2 Personen nacheinander gezogen werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna in das Komitee kommt?

Dieses Beispiel können die Schüler mit einem Würfel selber simulieren. Da bei einem Würfel sechs verschiedene Würfelausgänge möglich sind, ordnen wir je einer Person zwei verschiedene Zahlen zu. Roswitha wird in das Komitee gewählt, wenn die Zahlen 1 oder 2 gewürfelt werden, Anna bei den Zahlen 3 oder 4, und Paul, falls 5 oder 6 gewürfelt wird. Jeder Schüler kann so zwei verschiedene Personen für das Komitee erwürfeln und danach notieren. Auf diese Weise kann man dieses Beispiel beliebig oft simulieren.

Ebenso könnte man diese Aufgabe mit einer Urne simulieren. Es wird jeder Name der drei Personen auf einen Zettel geschrieben und in eine Urne geworfen. Jeder Schüler darf zwei der drei Zettel ziehen, danach wieder zurücklegen, und die gezogenen Namen notieren. Somit bekommt man viele verschiedene Simulationen.

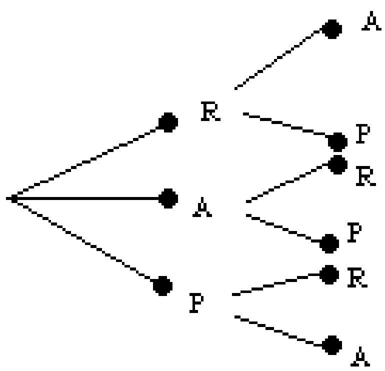


Abbildung 29: Baumdiagramm-Komitee

Lösung (1):

$P(Anna) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6}$.

Lösung (2):

P(Anna)= 1-P($\neg Anna$) = 1 - ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$) = 1 - $\frac{2}{6} = \frac{4}{6}$.

In diesem Fall kann die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis einfacher bestimmt werden. Es kann also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis mit dem sicheren Ereignis und dem Gegenereignis einfacher bestimnt werden.

6.1.5 Unabhängige Ereignisse

Beispiel:
([9], S. 143, 144)

Eine Karte wird aus einem Stapel von 20 Spielkarten gezogen. E ist das Ereignis „Herz“, F das Ereignis „Figur“. Da es fünf Herz und zwölf Figuren gibt gilt, $P(E) = \frac{5}{20} = 0,25$ und $P(F) = \frac{12}{20}$. Weiters gilt: $P(E/F) = \frac{3}{5} = 0,6$. Drei der Fünf Herz sind Figuren. Es gilt somit $P(F/E) = P(F)$.

Es wurde durch das Wissen um das Eintreten von E die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von F nicht beeinflusst. Es folgt, dass E und F **unabhängige Ereignisse** sind.

Definition:
Wie schon zuvor erwähnt, heißen zwei Ereignisse E und F unabhängig, wenn gilt: $P(F/E) = P(F)$. Die Multiplikationsregel hat dann die Form:
$P(E \cap F) = P(E) \times P(F)$.

Beispiel:
Zwei Jäger, Forstmann und Bergsteig, schießen beide auf ein Wildschwein.

Beide treffen unabhängig voneinander mit den Wahrscheinlichkeiten $P(F) = 0,9$ und $P(B) = 0,7$.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen beide gleichzeitig?

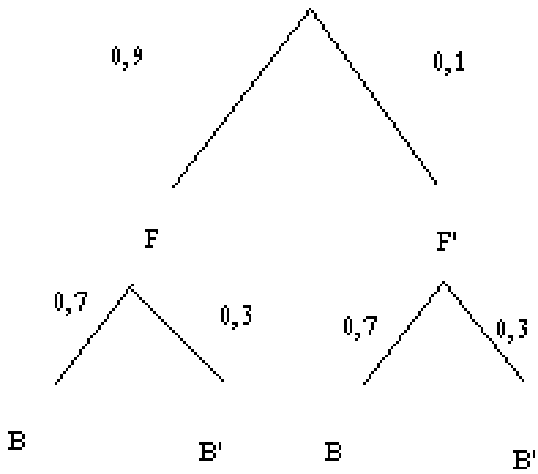


Abbildung 30: Baumdiagramm-Jäger

$P(F \cap B) = P(F) \times P(B) = 0.9 \times 0,7 = 0,63.$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft nur Forstmann?

$P(F \cap \neg B) = P(F) \times P(\neg B) = 0.9 \times 0,3 = 0,27.$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft mindestens einer? Hier kann man mit der Gegenwahrscheinlichkeit arbeiten:

$P(F \cup B) = 1 - P(\neg(F \cup B)) = 1 - P(\neg F \cap \neg B)) = 1 - P(\neg F) \times P(\neg B) = 1 - 0,1 \times 0,3 = 0,97.$

Man kann diese Rechnungen auch mit dem Baumdiagramm zeigen.

Beispiel:
([11], S. 90, 91)

Als Beispiel für eine unabhängige Wiederholung eignet sich der Münzwurf. Es wird eine Münze zweimal geworfen. B_1 sei das Ereignis, dass beim 1. Wurf Adler trifft und B_2 das Ereignis, dass beim 2. Wurf Kopf erscheint.
Den Ereignisraum kann man leicht angeben: Ω = {(K,K), (K,A), (A,K), (A,A)}.

B_1 = {(A,K), (A,A)}
B_2 = {(K,K), (A,K)}

Es ergibt sich mit der klassischen Wahrscheinlichkeit nach Laplace:

$P(B_1) = P(B_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, da $|B_1| = |B_2| = 2$ und $|\Omega| = 4$.

$B_1 \cap B_2$ = {(A,K)}, d.h. $|\ B_1 \cap B_2\ | = 1$.

=> $\mathrm{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathrm{P}(B_1)\times\mathrm{P}(B_2)$.

Die beiden Ereignisse sind also unabhängig.

6.1.6 Totale Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes

([9], S. 147-149)

Beispiel:
In einem Gymnasium besuchen 35% der Schüler die fünfte Klasse, 25% die sechste, 22% die siebente und 18% die achte Klasse. In der fünften Klasse kommen 38% der Schüler, in der sechsten 25%, in der siebenten 20% und in der achten 12% mit dem Fahrrad in die Schule. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein zufällig ausgewählter Schüler mit dem Fahrrad zur Schule?
d.h.: Wieviel Prozent aller Schüler fahren mit dem Rad zur Schule? Für die Radfahrer gilt: Man kann radfahren und in die fünfte, sechste, siebente oder achte Klasse gehen. Diese Ereignisse schließen einander aus, daher gilt für

die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$P(R) = 0,35 \times 0,38 + 0,25 \times 0,25 + 0,22 \times 0,20 + 0,18 \times 0,12 = 0,2611 \approx 26\%$.

Es kommen 26% aller Schüler mit dem Rad zur Schule.

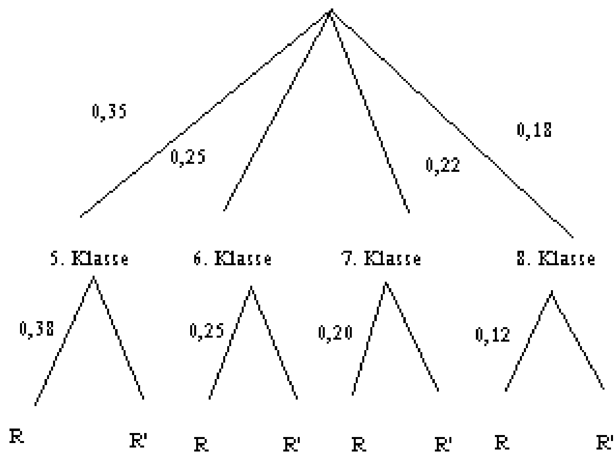


Abbildung 31: Baumdiagramm-Schüler fahren mit Rad zur Schule

Bei der Berechnung wurde die Additions- und die Multiplikationsregel verwendet.
Wenn man jetzt allgemein überlegt: Seien die Ereignisse F_1, F_2, ..., F_n eine Zerlegung des Ergebnisraumes. Dann schließen sie einander paarweise aus und geben vereint Ω. Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E gilt dann:

$P(E) = P(F_1) \times P(E/F_1) + P(F_2) \times P(E/F_2) + \ldots + P(F_n) \times P(E/F_n) = \Sigma P(E/F_i) \times P(F_i)$.

Dies nennt man den **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**.

Beispiel:
Bei einem Einbruch gibt eine Alarmanlage mit Wahrscheinlichkeit von 98% Alarm. Bei keinem Einbruch gibt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8%

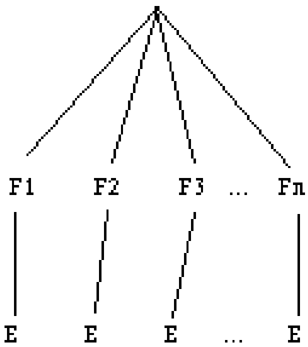


Abbildung 32: Baumdiagramm-Totale Wahrscheinlichkeit

blinden Alarm. Die Wahrscheinlichkeit, dass überhaupt eingebrochen wird, liegt bei 0,2%. Die Anlage gibt Alarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist wirklich ein Einbruch im Gange?

Das Ereignis „Einbruch“ sei E, das Ereignis„Alarm“ sei A.

Mann kennt bereits: $P(E) = 0,002$, $P(A/E) = 0,98$, $P(A/\neg E) = 0,008$.

Man will nun $P(E/A)$ berechnen. Es gilt: $P(E/A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)}$.

Der Zähler und der Nenner des Bruchs können berechnet werden.

$P(E \cap A) = P(E) \times P(A/E) = 0,002 \times 0,98 = 0,00196$.
$P(A) = P(E) \times P(A/E) + P(\neg E) \times P(A/\neg E) = 0,002 \times 0,98 + 0,998 \times 0,008 = 0,009944$.
$P(\neg E) = 1 - P(E) = 0,998$.
$P(E/A) = \frac{0,00196}{0,009944} = 0,1971\ldots \approx 19,7\%$.

Es ist mit etwa 20% Wahrscheinlichkeit ein Einbruch im Gange, wenn sich der Alarm einschaltet.

In diesem Beispiel kann man die angestellten Überlegungen noch vereinfachen. Es ist $P(E/A) = \frac{P(E\cap A)}{P(A)} = \frac{P(E)\times P(A/E)}{P(A)} = \frac{P(A/E)\times P(E)}{P(A)}$, wobei $P(A)$ als totale Wahrscheinlichkeit bestimmt wird.

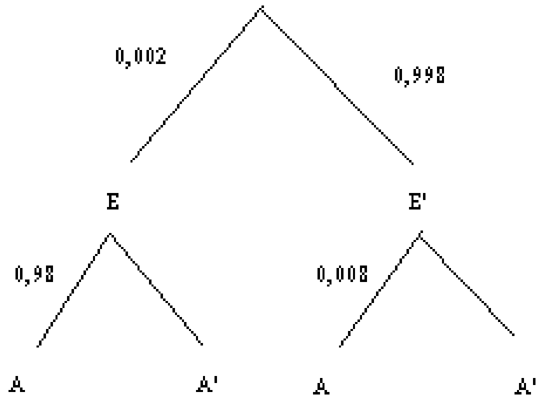


Abbildung 33: Baumdiagramm: Alarmanlage

Es ergibt sich nun mit einer etwas geänderten Bezeichnung der sogenannte **Satz von Bayes**:

$$P(F/E) = \frac{P(E/F)\times P(F)}{P(E)} \text{ bzw. } P(E)\times P(E/F) = P(F)\times P(E/F).$$

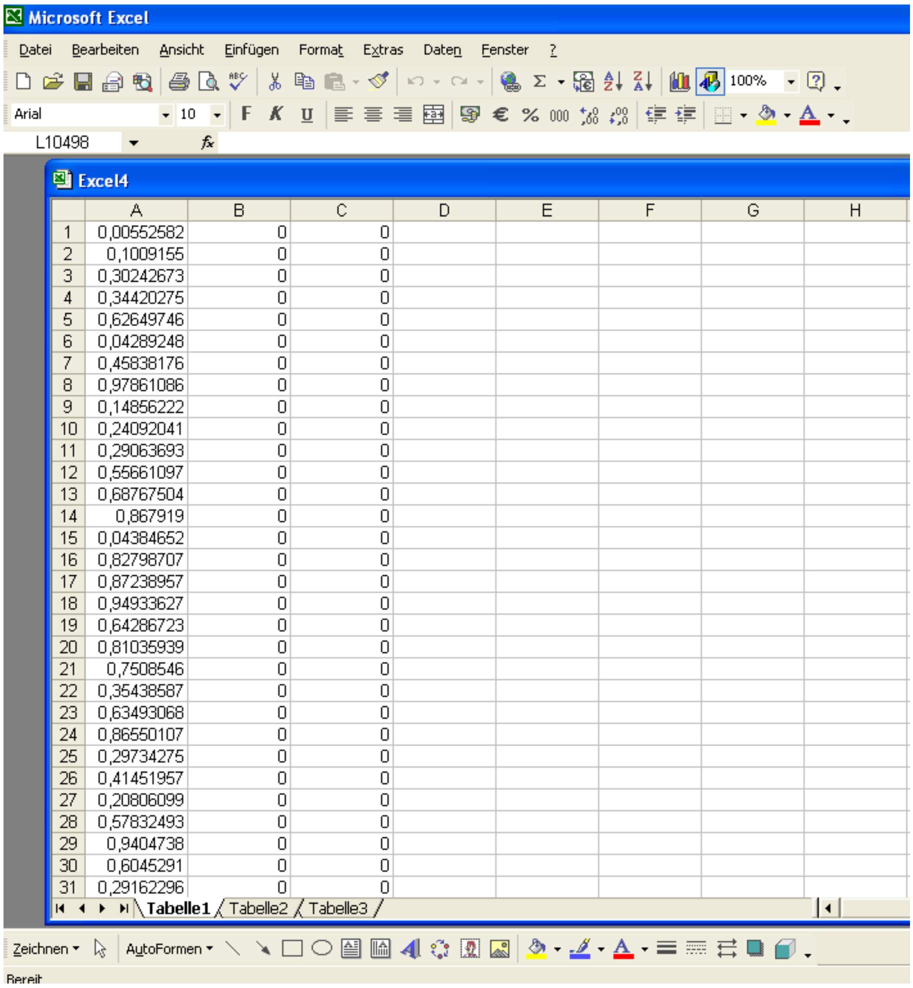
Auch dieses Beispiel kann man mit Hilfe von Excel simulieren.

Wie bei den vorigen Beispielen suchen wir uns zuerst mit „`ZUFALLSZAHL()`" in A1 eine Menge Zufallszahlen.

Die Werte bis 0,002 entsprechen den tatsächlichen Einbrüchen, die Werte bis 0,002×0,98 einem Einbruch bei dem Alarm ausgelöst wird, und die Werte von 1-0,998×0,0080 entsprechen einem Blindalarm.

In B1 wollen wir 1 eingeben, falls ein Alarm ausgelöst worden ist, und 0 sonst. Deshalb schreiben wir „`WENN(A1<0,00196;1;WENN(A1>0,992016;1;0)`". Jetzt schreiben wir in C1 „`WENN(A1<0,00196;1;0)`", das heißt 1, wenn eingebrochen wurde und Alarm ausgelöst worden ist. In D1 geben wir jetzt „`SUMME(C1:C4000)/SUMME(B1:B4000)`"ein.

Ich kann mir vorstellen, dass die Schüler bei solchen Simulationen gespannt mitarbeiten und voller Ehrgeiz weitere Simulationen durchführen wollen. Wenn von Zeit zu Zeit eine Computerstunde im Mathematikunterricht eingebaut wird, kann der Unterricht um vieles verständlicher und interessanter gestaltet werden.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0,00552582	0	0					
2	0,1009155	0	0					
3	0,30242673	0	0					
4	0,34420275	0	0					
5	0,62649746	0	0					
6	0,04289248	0	0					
7	0,45838176	0	0					
8	0,97861086	0	0					
9	0,14856222	0	0					
10	0,24092041	0	0					
11	0,29063693	0	0					
12	0,55661097	0	0					
13	0,68767504	0	0					
14	0,867919	0	0					
15	0,04384652	0	0					
16	0,82798707	0	0					
17	0,87238957	0	0					
18	0,94933627	0	0					
19	0,64286723	0	0					
20	0,81035939	0	0					
21	0,7508546	0	0					
22	0,35438587	0	0					
23	0,63493068	0	0					
24	0,86550107	0	0					
25	0,29734275	0	0					
26	0,41451957	0	0					
27	0,20806099	0	0					
28	0,57832493	0	0					
29	0,9404738	0	0					
30	0,6045291	0	0					
31	0,29162296	0	0					

Abbildung 34: Wahrscheinlichkeit eines Einbruches

Beispiel:
Die Marktanteile der Firmen A, B und C für ein bestimmtes Gerät betragen 30%, 50% und 20%. Fehlerhaft sind die Geräte der Firma A mit 8% Wahrscheinlichkeit, von B mit 4%, und von Firma C mit 5% Wahrscheinlichkeit. Wenn mein Gerät fehlerhaft ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es dann von der Firma A?

F ist das Ereignis „fehlerhaftes Gerät“; A,B,C seien die Ereignisse “von A,B,C bezogen“.

Man kennt:

$P(A) = 0,3$
$P(B) = 0,5$
$P(C) = 0,2$
$P(F/A) = 0,08$
$P(F/B) = 0,04$
$P(F/C) = 0,05$

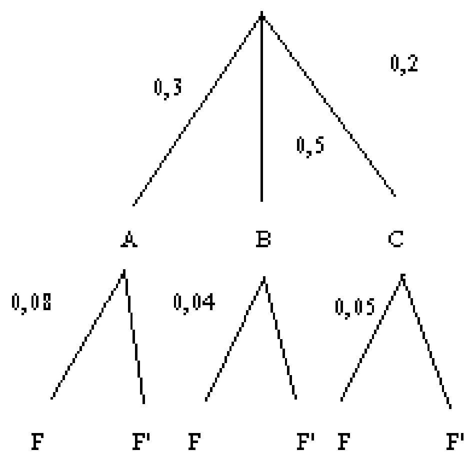


Abbildung 35: Baumdiagramm: fehlerhaftes Gerät

Es wird nun $P(A/F)$ berechnet. Es gilt:

$P(A/F) = \frac{P(F/A) \times P(A)}{P(F)}$.

$P(F)$ wird als totale Wahrscheinlichkeit bestimmt.

$P(F) = 0,3 \times 0,08 + 0,5 \times 0,04 + 0,2 \times 0,05 = 0,054$

$PA/F) = \frac{0,08 \times 0,3}{0,054} = 0,444\ldots \approx 44\%$.

Das Gerät stammt mit einer Wahrscheinlichkeit von 44% von der Firma A.

6.2 Zufallsvariablen

([10], S. 261-266)

6.2.1 Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer Stichprobe

Unter den Zufallsversuchen besitzen jene eine zentrale Stellung, die genau zwei mögliche Versuchsergebnisse haben: Erfolg - Misserfolg, Kopf - Zahl, Kontrolliert - Unkontrolliert, Bub - Mädchen usw. Bei der n-maligen Durchführung von solch einem Versuch interessiert man sich meist nur für die Anzahl X der Erfolge, die dabei auftreten, nicht aber für die Reihenfolge, in der die Erfolge und Misserfolge eintreten.
Die Anzahl X ist eine vom Zufall abhängige, diskrete Variable, die nur die Werte $0, 1, \ldots, n$ annehmen kann. Diese nennt man eine **diskrete Zufallsvariable**.

Beispiel:
1): Ein Bus kommt zum Zoll mit 30 Insassen. Wie groß ist aus der Sicht des Zöllners die Chance bei zufälliger Auswahl von 3 Personen 1) keinen, 2) genau einen, 3) genau zwei, 4) genau 3 Schmuggler zu erwischen, wenn er weiß, dass erfahrungsgemäß 10% aller Grenzgänger schmuggeln? Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit für „Schmuggeln“ ist 0,1, die für „Nichtschmuggeln“ ist 1 - 0,1 = 0,9.

Man setzt nun „schmuggelt“ = 1 und „schmuggelt nicht“ = 0.

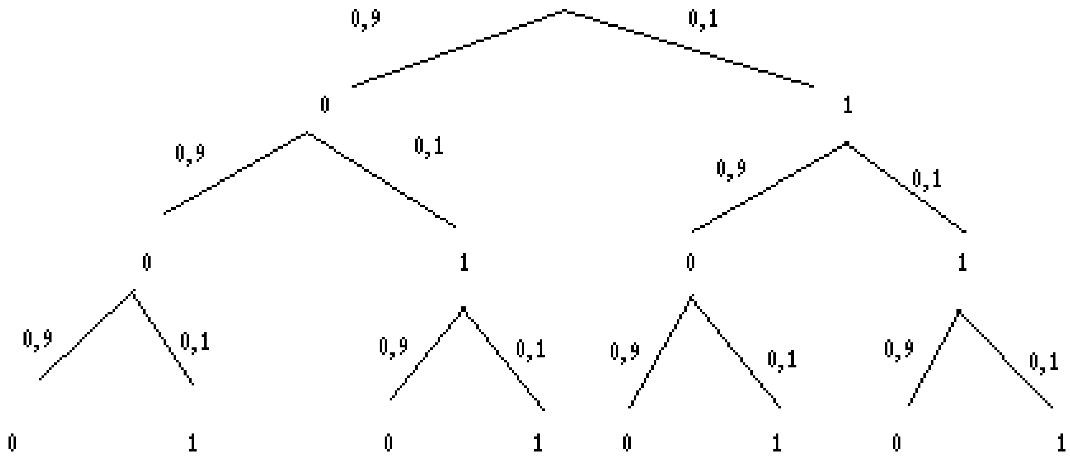


Abbildung 36: 1)Baumdiagramm: Schmuggler

$P(X = 0) = P(000) = 0,9^3 = 0,729$
$P(X = 1) = P(100) + P(010) + P(001) = 3 \times 0,1 \times 0,9^2 = 0,243$
$P(X = 2) = P(110) + P(101) + P(011) = 3 \times 0,1^2 \times 0,9 = 0,027$
$P(X = 3) = P(111) = 0,1^3 = 0,001$

Beispiel:
2): Der Fahrer des Busses weiß, dass 3 von den 30 Insassen, das sind 10%, schmuggeln. Wie groß ist jetzt aus der Sicht des Fahrers bei zufälliger Auswahl von 3 Personen die Chance, dass 1) genau 0, 2) genau 1, 3) genau 2, 4) genau 3 Schmuggler erwischt werden?

Man setzt nun wieder „schmuggelt“ = 1 und „schmuggelt nicht“ = 0.

$P(X = 0) = P(000) = \frac{27}{30} \times \frac{26}{29} \times \frac{25}{28} \approx 0,7204.$

$P(X = 1) = P(100) + P(010) + P(001) = \frac{3}{30} \times \frac{27}{29} \times \frac{26}{28} + \frac{27}{30} \times \frac{3}{29} \times \frac{26}{28} + \frac{27}{30} \times \frac{26}{29} \times \frac{3}{28} \approx 0,2594.$

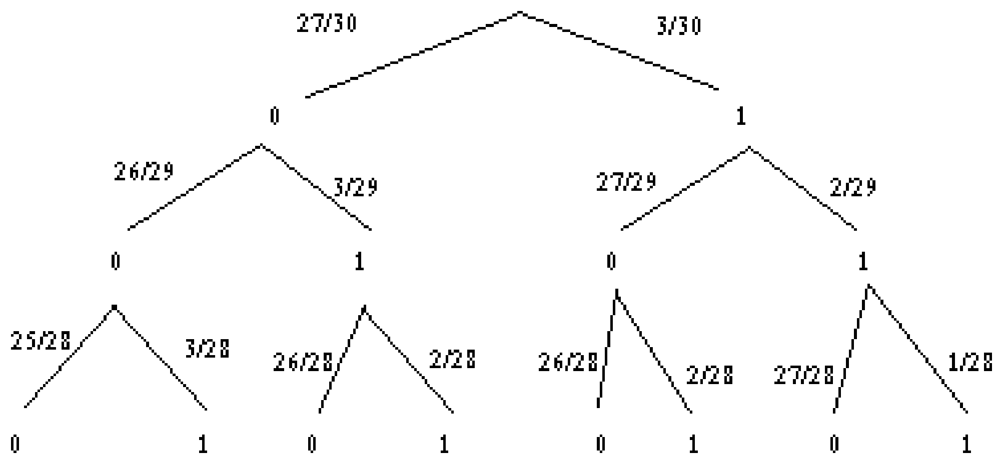


Abbildung 37: 2)Baumdiagramm: Schmuggler

$P(X=2) = P(110) + P(101) + P(011) = \frac{3}{30} \times \frac{2}{29} \times \frac{27}{28} + \frac{3}{30} \times \frac{27}{29} \times \frac{2}{28} + \frac{27}{30} \times \frac{3}{29} \times \frac{2}{28} \approx 0,0200.$

$P(X=3) = P(111) = \frac{3}{30} \times \frac{2}{29} \times \frac{1}{28} \approx 0,0002.$

Bei diesen zwei Beispielen hat man zwei unterschiedliche Ausgangssituationen:
Vom Informationsstand des Zöllners bleibt die Wahrscheinlichkeit Schmuggler zu erwischen bei jedem Zug gleich. Daher hängen die gesuchten Wahrscheinlichkeiten nur von der Schmuggler-Wahrscheinlichkeit p = 0,1 und vom Umfang n der Stichprobe, nicht aber von der Anzahl N der Insassen im Bus ab. Simulieren kann man diese Situation mathematisch durch 3-maliges Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit z.B. 30 Kugeln (27 „0“- Kugeln und 3 „1“-Kugeln)oder mit z.B. 10 Kugeln (9 „0“- Kugeln und 1 „1“-Kugel).

Die Wahrscheinlichkeit, einen Schmuggler zu erwischen, ändert sich aber vom Informationsstand des Fahrers von Zug zu Zug. Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten hängen vom Umfang n der Stichprobe, von der Anzahl N aller Insassen und der Anzahl M der Schmuggler ab. Durch dreimaliges Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit z.B. 30 Kugeln (27 „0“- Kugeln und 3 „1“-Kugeln) kann man die Situation mathematisch simulieren, nicht aber mit 10 Kugeln (9 „0“- Kugeln und 1 „1“-Kugel).

Es werden durch unterschiedliche Informationsstände unterschiedliche Modelle bewirkt und deshalb auch eine unterschiedliche Einschätzung der Situation. Je nachdem erhält man eine andere Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf die Werte $X = 0$ bis $X = 3$ der Zufallsvariablen X.
Beim ersten Beispiel spricht man von einer binomial-verteilten Zufallsvariablen X, und beim zweiten Beispiel von einer hypergeometrisch-verteilten Zufallsvariablen X.

6.2.2 Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsfunktion und Verteilungsfunktion

Es handelt sich bei der Anzahl der Erfolge bzw. Misserfolge in einer Stichprobe vom Umfang n nur um einen Typ einer Zufallsvariablen.
Allgemein versteht man unter einer Zufallsvariablen X eine Größe, die vom Zufall gesteuert wird, und verschiedene reelle Zahlen x als Wert annehmen kann.
Die Wahrscheinlichkeit, mit der X ihre Werte x jeweils annimmt, beschreibt die **Verteilung der Zufallsvariablen** X. Je nachdem, ob X einzelne (höchstens abzählbar unendlich viele „diskret" liegende) Zahlen x annehmen kann bzw. alle Zahlen eines bestimmten Intervalls, spricht man von einer diskreten Zufallsvariablen bzw. einer kontinuierlichen Zufallsvariablen und einer **diskreten Verteilung** bzw. **kontinuierlichen Verteilung** der Zufallsvariablen.

Die Verteilung einer diskreten Zufallsvariablen legt man so fest:

- man gibt entweder für jedes x_i die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ seines Auftretens an,
- oder man gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ an, mit der die Zufallsvariable einen Wert $x_i \leq x$ ($x \in R$) annimmt. Durch Aufsummieren der $P(X = x_i)$ aller $x_i \leq x$ kann man diese Wahrscheinlichkeiten bilden:

Definition:
Die Funktion
f: R $\rightarrow$ [0;1], y = P(X=x_i), i $\in N*$ heißt **Wahrscheinlichkeitsfunktion**

F: R $\rightarrow$ [0;1], y = P(X$\leq$x)= Σf(x_i), x $\in$ R heißt **Verteilungsfunktion** der diskreten Zufallsvariablen X.

Beispiel:
(Fortsetzung von 1)):

Beschreibe die Verteilung der Zufallsvariable X mit der Wertetabelle und mit einem Graphen a) der Wahrscheinlichkeitsfunktion und b) der Verteilungsfunktion. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X 1) höchstens 1, 2) mindestens 2 ist? Wo erscheinen die Ergebnisse im Graphen der Wahrscheinlichkeitsfunktion?

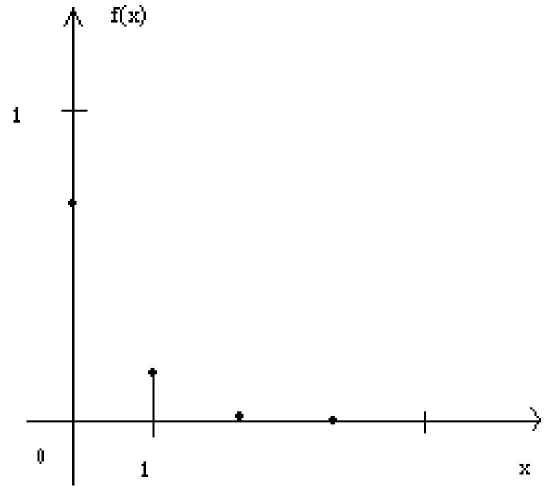


Abbildung 38: Wahrscheinlichkeitsfunktion

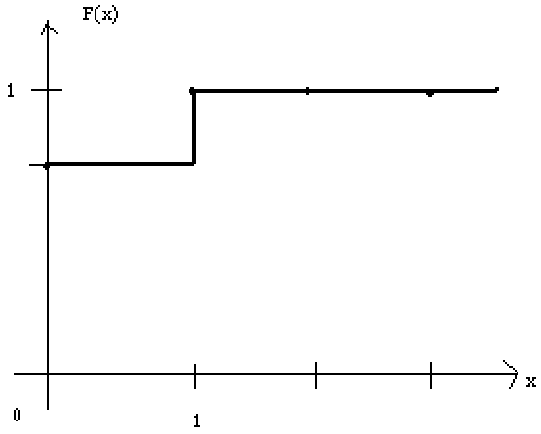


Abbildung 39: Verteilungsfunktion

Lösung:

a) $f(0) = P(X = 0) = 0,729$

$f(1) = P(X = 1) = 0,243$

$f(2) = P(X = 2) = 0,027$

$f(3) = P(X = 3) = 0,001$

b) $F(0) = P(X \leq 0) = 0,729$

$F(1) = P(X \leq 1) = 0,729 + 0,243 = 0,972$

$F(2) = P(X \leq 2) = 0,972 + 0,027 = 0,999$

$F(3) = P(X \leq 3) = 0,999 + 0,001 = 1$

1) P(X höchstens 1) $= P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,729 + 0,243 = 0,972$.

2) P(X mindestens 2) $= P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,027 + 0,001 = 0,028$.

6.3 Erwartungswert und Varianz

6.3.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Wenn man sich noch einmal die beiden Beispiele 1) und 2) ansieht, stellt sich die Frage, wie viele Erfolge die Zollwache auf „lange Zeit" gesehen im Mittel erwarten kann, wenn sie n Personen kontrolliert?

Im Nachhinein ist die Antwort klar, nämlich $\Sigma\ x_i \times$ r(x_i)

Wenn man die Antwort aber im Vorhinein wissen möchte, so wird man r(x_i) durch P(X=x_i) schätzen. Es ergibt sich folgende Definition.

Definition:
Als **Erwartungswert** der Zufallsvariablen X bezeichnet man die Zahl $E(X) = \mu = \Sigma x_i \times P(X = x_i)$

Beispiel:
(Fortsetzung 1))

Wie viele Erfolge darf die Zollbehörde bei n=3 Kontrollen aus Sicht des Zöllners erwarten?

Lösung: E(X) wird gebildet:
$P(X = 0) = 0,729 \qquad 0 \times 0,729 = 0$
P(X=1) = 0,243 1× 0,243 = 0,243
P(X=2) = 0,027 2× 0,027 = 0,054
P(X=3) = 0,001 3× 0,001 = 0,003

Summe: E(X) = 0,300

$$
\begin{array}{ll}
P(X = 0) = 0,729 & 0 \times 0,729 = 0 \\
P(X = 1) = 0,243 & 1 \times 0,243 = 0,243 \\
P(X = 2) = 0,027 & 2 \times 0,027 = 0,054 \\
P(X = 3) = 0,001 & 3 \times 0,001 = 0,003 \\
 & \text{Summe: } E(X) = 0,300
\end{array}
$$

Der Erwartungswert muss keine ganze Zahl sein. Man will lediglich mit dieser Zahl aussagen, dass, falls man nicht einen sondern 10, 100 oder noch mehr Busse kontrolliert, wird man $10 \times 0{,}3 = 3$, $100 \times 0{,}3 = 30$ usw. Erfolge erwarten dürfen. Man bekommt bei Wahrscheinlichkeitsaussagen erst sinnvolle Ergebnisse, wenn es Aussagen über Massenerscheinungen sind.

6.3.2 Gewinnerwartung

Beispiel:
3): (vgl Beispiel 1) und seine Fortsetzung)
Es wurde ein Prämiensystem eingeführt um die Zöllner anzuspornen. Wer bei einer Stichprobe von 3 Personen genau 0, 1, 2 oder 3 Erfolge hat, erhält der Reihe nach 1, 5, 20 oder 100 € Erfolgsprämie. Wie hoch ist die Prämie, die der Zöllner aus seinem Informationsstand heraus erwarten darf?

Lösung: Man bildet den Erwartungswert der Zufallsvariablen $g(X)$, die die Gesamtprämie des Zöllners in Abhängigkeit von der Anzahl X der Erfolge beschreibt:

P(X=0) = 0,729 Prämie: 0: $0 \times 0{,}729 = 0$
P(X=1) = 0,243 Prämie: 5: $5 \times 0{,}243 = 1{,}1215$
P(X=2) = 0,027 Prämie: 20: $20 \times 0{,}027 = 0{,}540$
P(X=3) = 0,001 Prämie: 100: $100 \times 0{,}001 = 0{,}100$

Die Summe beträgt E(Prämie) = E(g(X)) = 1,855

Somit muss die Zollbehörde je Dreier-Stichprobe 1,86 € ausbezahlen.

Definition:
Als Erwartungswert der diskreten Gewinnfunktion $g(X)$ (**Gewinnerwartung**) bezeichnet man die Zahl $E(g(X)) = \Sigma g(x_i) \times P(X = x_i)$

6.3.3 Varianz und Standardabweichung einer Zufallsvariablen

Definition:
Als **Varianz** der Zufallsvariablen X bezeichnet man die Zahl $V(X) = \sigma^2 = \Sigma(x_i - E(X))^2 \times P(X = x_i) = \Sigma(x_i - \mu)^2 \times P(X = x_i)$.

σ heißt **Standardabweichung** (Streuung) der Zufallsvariablen X.

Da die alleinige Angabe des Erwartungswertes $E(X) = \mu$ wenig aussagekräftig wäre, gibt man ihn mit einer „Streuung“ σ an.

Beispiel:
(Fortsetzung von 1))

Um wie viel weicht die Anzahl der ertappten Schmuggler durchschnittlich vom Erwartungswert $E(X) = 0,3$ ab.

Lösung:
P(X=0) = 0,729 (0 - 0,3)^2 $\times$ 0,729 = 0,06561
P(X=1) = 0,243 (1 - 0,3)^2 $\times$ 0,243 = 0,11907
P(X=2) = 0,027 (2 - 0,3)^2 $\times$ 0,027 = 0,07803
P(X=3) = 0,001 (3 - 0,3)^2 $\times$ 0,001 = 0,00729

Die Summe beträgt: 0,27000 = V(X) $\Rightarrow \sigma \approx 0,52$.

6.3.4 Gewinnstreuung

Definition:
Als Varianz der diskreten Gewinnfunktion $g(X)$ bezeichnet man die Zahl $V(g(X)) = \sigma_g^2 = \Sigma(g(x_i) - E(g(X)))^2 \times P(X = x_i)$
σ_g heißt Standardabweichung (Streuung) von $g(X)$, kurz **Gewinnstreuung**.

Beispiel:
(Fortsetzung von 3))
Um wieviel Euro streut die pro Dreier-Stichprobe zu zahlende Prämie im

Mittel um ihren Erwartungswert $E(g(X)) = 1,855$?

P(X=0) = 0,729 (0 - 1,855)^2 $\times$ 0,729 = 2,50851
P(X=1) = 0,243 (5 - 1,855)^2 $\times$ 0,243 = 2,40352
P(X=2) = 0,027 (20 - 1,855)^2 $\times$ 0,027 = 8,88951
P(X=3) = 0,001 (100 - 1,855)^2 $\times$ 0,001 = 9,63244

Die Summe beträgt: 23,43398 = V(g(X)) $\Rightarrow \sigma^2 \approx$ 4,84.

Die Prämie streut voraussichtlich um 4,84 € um ihren Erwartungswert E(g(X)) = 1,86 €.

Kapitel 7

Kombinatorik

([10], S. 249-257)

Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, nicht im speziellen ein Kapitel der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Für große Werte von N und n ist die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen und der LAPLACE'schen Regel mühsam, da es viele Pfade gibt. Man kann also leicht einen übersehen oder etwa doppelt zählen. Deshalb kann man Zählformeln herleiten.

7.1 Zählformeln für geordnete Stichproben (Variationen)

Bei diesen geordneten Stichproben spielt die Reihenfolge der Ziehung eine Rolle.

a) Ziehen mit Zurücklegen

Beispiel:
In einer Urne befinden sich 2 Kugeln, beschriftet mit den Buchstaben U und H. Jemand zieht 3 Mal, wobei er jedes Mal die Kugel wieder in die Urne legt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Wort UHU entsteht?

Man kann sehen, dass es 8 verschiedene Möglichkeiten beim Ziehen gibt, wobei nur eine Ziehung das gewünschte Wort ergibt. Jede Ziehung ist gleich wahrscheinlich und es ergibt sich deshalb gemäß der LAPLACE´schen Wahrscheinlichkeitsregel für die Ziehwahrscheinlichkeit $P(\text{UHU}) = \frac{1}{8}$

Die Anzahl 8 kommt so zustande: Beim 1. Zug hatte man 2 Möglichkeiten, beim 2. Zug hatte man für jeden der beiden 1. Züge wieder 2 Möglichkeiten, also $2 \times 2 = 2^2 = 4$ Möglichkeiten. Jede der 4 Möglichkeiten erlaubt beim 3.

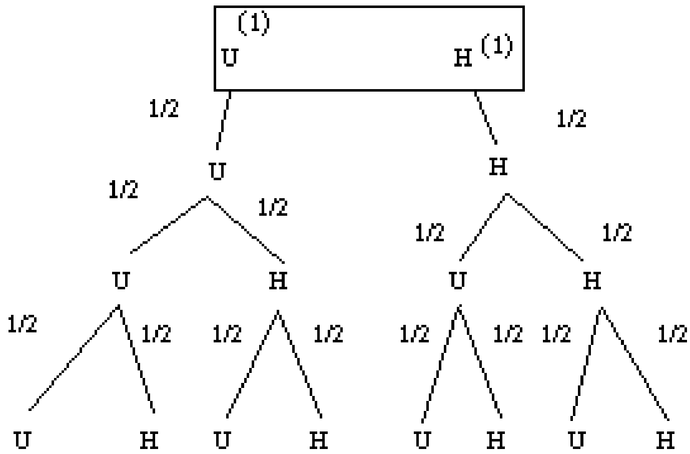


Abbildung 40: Baumdiagramm-Ziehen mit Zurücklegen

Zug wieder 2 Möglichkeiten, womit man $(2 \times 2) \times 2 = 2^3 = 8$ Möglichkeiten hat. Allgemein hat man bei N Elementen und n Zügen N^n Möglichkeiten.

Formel:

Die Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n aus N Elementen **mit Zurücklegen** zu ziehen, betragt N^n.

Beispiel:
([11], S. 75)

Eine Tippreihe beim Toto besteht aus 12 Spielen mit je 3 Möglichkeiten, nämlich 1, 2 oder x. Eine Tippkolonne kostet 1 Euro. Wieviel müsste man bezahlen, wenn man mit Sicherheit einen Zwölfer machen möchte?

Man kann sich dieses Beispiel nun wie ein Urnenbeispiel vorstellen, indem sich in einer Urne 3 Kugeln befinden, die mit 1, 2 und x beschriftet sind. Dies bedeute, dass N gleich 3 ist.

Alle 12 Spiele besitzen 3 mögliche Ausgänge, deshalb muss jede gezogene Kugel nach jeder der 12 ($=n$) Ziehungen wieder zurückgelegt werden. Es ergeben sich 3^{12} Möglichkeiten.

Der Gesamteinsatz beträgt also $1 \times 3^{12} = 531441$ Euro.

b) Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel:
In einer Urne befinden sich drei Kugeln, wobei zwei mit dem Buchstaben U beschriftet sind, und eine den Buchstaben H trägt. Der Reihe nach wird je eine Kugel gezogen, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen. Es soll wieder das Wort „UHU“ entstehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit?

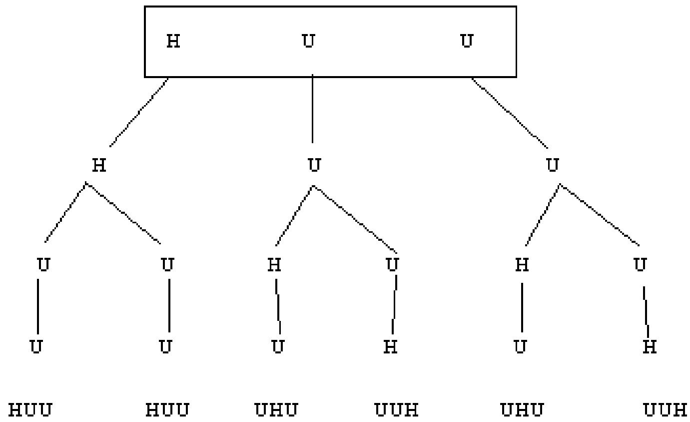


Abbildung 41: Baumdiagramm-Ziehen ohne Zurücklegen

Man sieht, dass es 6 mögliche Ziehungen gibt, die alle gleich wahrscheinlich sind.

2 Ziehungen ergeben das gewünschte Wort: P(UHU)= $\frac{2}{6}$=$\frac{1}{3}$.

Beim Ziehen ohne Zurücklegen gibt es in diesem Beispiel 3×2×1 Möglichkeiten. Allgemein gibt es beim Ziehen von n aus N Elementen ohne Zurücklegen $N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times (N-n+1)$ Möglichkeiten, was man durch Erweitern mit $(N-n)!$ zu $\frac{N!}{(N-n)!}$ umformen kann.

Formel:

Die Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n aus N Elementen **ohne Zurücklegen** zu ziehen, beträgt

$$N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Für $n = N$ gibt es insbesondere $n!$ Möglichkeiten, n Elemente zu permutieren.

Beispiel:
([11], S. 76-77)

Für die Eröffnung einer Filiale einer Firma werden 7 neue Arbeitskräfte gesucht. 16 Bewerbungen liegen vor. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese 7 Posten zu besetzen?

In diesem Fall ist $N = 16$, $n = 7$, also folgt $n - k = 9$.

Es ergeben sich nun $\frac{16!}{9!} = 57\ 657\ 600$ Möglichkeiten.

Beispiel:
Ein Kind hat 5 verschiedene Perlen und möchte diese auf eine Schnur auffädeln. Wie groß ist die Anzahl der Anordnungsmöchlichkeiten?

Natürlich erhält man die Lösung durch $5! = 120$.

7.2 Zählformeln für ungeordnete Stichproben (Kombinationen)

Hierbei spielt die Reihenfolge der Ziehung der einzelnen Elemente keine Rolle.

a) Ziehen ohne Zurücklegen

Beispiel:
Paul hat sich nicht für die Mathematikwiederholung vorbereitet. Er weiß, dass dafür jede Stunde zwei Schüler zufällig ausgewählt werden. Wie groß ist für ihn die Chance, zur Stundenwiederholung gerufen zu werden, wenn noch 14 andere Schüler anwesend sind?

Lösung:

Paul zeichnet ein Baumdiagramm, wobei er für „komme dran“ =1 und für „komme nicht dran“ =0 schreibt.

Es gibt also zwei Ziehungsverläufe, nämlich 10 und 01, bei denen er kontrolliert wird. Sie treten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{15} \times \frac{14}{14} = \frac{1}{15}$ bzw. $\frac{14}{15} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{15}$ auf.

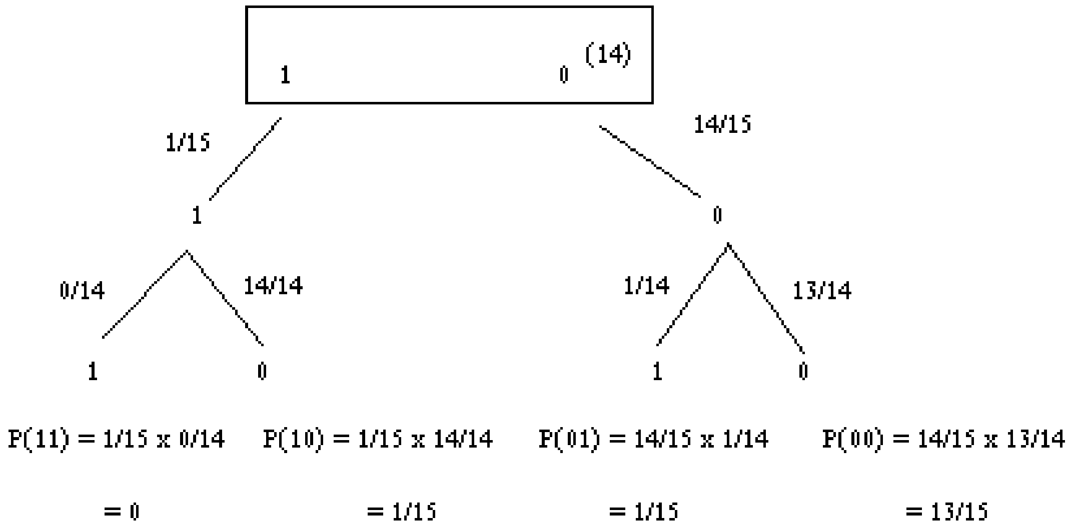


Abbildung 42: Baumdiagramm-Ziehen ohne Zurücklegen

Fasst man nun die beiden zusammen, so erhält man

P(komme dran)= P(10$\vee$01)=P(0;1)=$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{2}{15}$

Es kann also Paul egal sein, ob er beim 1. oder beim 2. Zug ausgewählt wird, es zählt nur ob er, egal an welcher Stelle, in der Stichprobe enthalten ist. Sein Interesse gilt den **ungeordneten Stichproben von n aus N Elementen ohne Zurücklegen** für den Fall $n = 2$ und $N = 15$.

Gemäß der Zählregel gibt es ja $N \times (N-1) \times (N-2) \times \cdots \times (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$ Möglichkeiten, eine geordnete Stichprobe von n aus N Elementen ohne Zurücklegen zu ziehen. Da n Elemente auf $n!$ Arten permutiert werden können, bestimmten jeweils $n!$ geordnete Stichproben ein und dieselbe ungeordnete Stichprobe. Die Anzahl der ungeordneten Stichproben ist daher die durch $n!$ geteilte Anzahl der geordneten Stichproben:

$$\frac{N \times (N-1) \times (N-2) \times \ldots \times (N-n+1)}{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (1)}$$

Im Zähler und im Nenner stehen gleich viele Faktoren, nämlich n. Erweitert man den Bruch mit $(N-n)!$, so erhält man die Formel $\frac{N!}{n! \times (N-n)!}$

Formel:

Die Anzahl der Möglichkeiten, eine ungeordnete Stichprobe von n aus N Elementen **ohne Zurücklegen** zu ziehen, beträgt

$$\frac{N\times(N-1)\times(N-2)\times\ldots\times(N-n+1)}{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(1)}=\frac{N!}{n!\times(N-n)!}$$

Beispiel:
([11], S. 78)

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei Lotto „6 aus 45“ einen Sechser zu machen?

Dies ist ein typisches Beispiel für eine ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen, da es hier nicht auf die Anordnung ankommt, und, die bereits gezogenen Kugeln werden nicht mehr in die Lostrommel zurückgelegt.

N ist nun 45 und n beträgt 6.

Es ergeben sich $\frac{45!}{39!\times 6!}$ = 8 145 060 Möglichkeiten.

Davon ist jedoch nur eine einzige 6-er Kombination richtig. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit (alle 6 richtig) erhält man $\frac{1}{8145060} \approx 1{,}23 \times 10^{-7}$

b) Ziehen mit Zurücklegen

Durch ähnliche Überlegungen wie beim Ziehen ohne Zurücklegen erhält man für das Ziehen von n aus N Elementen mit Zurücklegen:

$$\frac{(N+n-1)!}{n!\times(N-1)!}$$

Formel:

Die Anzahl der Möglichkeiten, eine ungeordnete Stichprobe von n aus N Elementen mit Zurücklegen zu ziehen, beträgt

$$\frac{(N+n-1)\times(N+n-2)\times\ldots\times(N)}{n\times(n-1)\times\ldots\times(1)}=\frac{(N+n-1)!}{n!\times(N-1)!}$$

Beispiel:
Um diese Formel verständlich zu machen, kann man anhand eines Beispieles hinführen. ([11], S. 79-80)

Man möchte N nicht unterscheidbare Kugeln auf n Schachteln aufteilen, wenn in jeder der Schachteln Platz für alle Kugeln ist. Wieviele Möchlichkeiten gibt es dies zu tun? (Angenommen $N = 3$ und $n = 5$)

Eine mögliche Aufteilung:

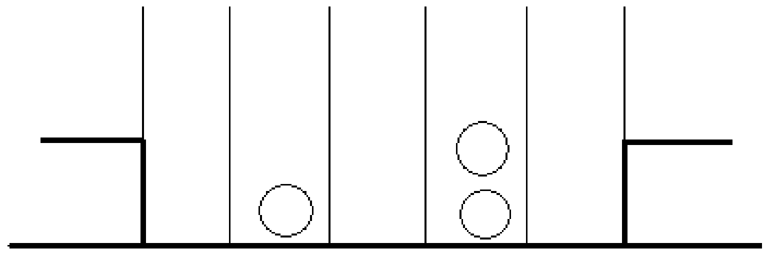


Abbildung 43: Mögliche Aufteilung der Kugeln

Es werden also bei 5 Schachteln (5+1) Wände gebraucht. Sowohl Kugeln als auch Wände sind nicht unterscheidbar, also kann man die 3! Permutationen der Kugeln und die (5-1)! Permutationen der Wände (die Außenwände sind fest) zu jeweils einer Möglichkeit zusammenfassen.

Es ergeben sich nun (3+5-1) Objekte, die, wenn sie alle verschieden wären, auf (3+5-1)! Möglichkeiten angeordnet werden könnten. Dies ist aber nicht so, deshalb muss dies noch durch die ununterscheidbaren Fälle (3! Kugeln, (5-1)! Wände) dividiert werden.

$\frac{(3+5-1)!}{3! \times (5-1)!} = 35.$

Verwendet man nun die Variablen N und n, so ergeben sich $\frac{(N+n-1)!}{n! \times (N-1)!}$ Möglichkeiten, N nicht unterscheidbare Kugeln auf n Schachteln zu verteilen.

Kapitel 8

Monte-Carlo-Methoden

Wie schon erwähnt, benötigt man für die Verwendung der Monte-Carlo-Methode Zufallszahlen, die man sich mit Hilfe dreier Möglichkeiten beschaffen kann:

a) Tabellen von Zufallszahlen

b) Zufallsmechanismen wie Münze, Würfel, Roulette usw.

c) Algorithmen

8.1 Zufallsmechanismen

Zufallszahlen können mit jedem Zufallsmechanismus erzeugt werden, egal ob Roulette, Würfel oder Urne. Es ist aber nicht so einfach eine „gute" Reihe von Zufallszahlen aufzustellen, da jedes Gerät nur mehr oder weniger die Anforderung erfüllt, dass alle Zahlen die gleiche Möglichkeit besitzen, ausgewählt zu werden.

Beispiel:
([14], S. 111-112)

Das Beispiel soll zeigen, dass eine zufällige Auswahl eines Schülers anhand von drei Zufallsexperimenten, also Modellen, durchgeführt werden kann.

In einer Klasse mit 32 Schülern steht eine Freikarte für ein Fußballspiel zur Verfügung. Ein Schüler soll dafür gerecht, also rein zufällig, ohne irgendwelche Verdienste des Schülers zu berücksichtigen, ausgewählt werden. Wie könnte man das durchführen?

1.Lösungsweg:

Man kann 32 Namenskärtchen anlegen, die dann aus einer Urne blind gezogen werden.

2. Lösungsweg:

Man kann einen Würfel benutzen, der 6 Versuchsausgänge liefert, wenn man ihn einmal würfelt. Da das nicht reicht, muss man ihn zweimal werfen, und es ergeben sich 36 Versuchsausgänge: (1,1);(1,2);...(6,5);(6,6). Die erste Ziffer eines Paares gibt das Ergebnis des ersten Wurfes an. Jeder Schüler erhält ein Schlüsselwort (x, y) mit $1 \leq x \leq 6$ und $1 \leq y \leq 6$. Tritt zum Beispiel beim zweimaligen Würfel das Schlüsselwort (5,6) auf, dann hat der entsprechende Schüler gewonnen.

3. Lösungsweg:

Es wird eine Münze 5 mal geworfen, denn man braucht eine 5 stellige Stichprobe, damit alle Schüler eindeutig markiert sind. Jeder einzelne Münzwurf hat die 2 Ausgänge, K oder Z. Man erhält beim 5 maligen Werfen $2^5 = 32$ verschiedene 5-Tupel aus den Zeichen K und Z. Jeder Schüler bekommt eine 5 stellige Zeichenfolge als Code, und so wird dann der entsprechende Gewinner unter den Schülern ermittelt.

8.2 Tabellen von Zufallszahlen

Mithilfe von Zufallsmechanismen und Algorithmen werden Tabellen von Zufallszahlen gewonnen.

1947 wurde durch Drehen eines Rouletts eine solche Tabelle aufgestellt und veröffentlicht unter dem Titel „One million random digits“.

56434	70543	38696	98502	32092	95505	62091	39549	30117	98209
62694	42837	29183	11393	68463	25150	86338	95620	39836	41272
15413	40505	33123	63218	72940	98349	57249	40170	36819	01162
14446	16065	68459	35776	64276	92868	07372	31700	66711	26115

Tabelle 9: Tabelle von Zufallszahlen ([17], S. 208)

So sieht eine Tabelle zum Beispiel aus. In Fünfergruppen sind die Zahlen zusammengefasst, um sie einfacher lesen zu können. Man kann beim Ablesen von Zufallszahlen aus der Tabelle irgendwo anfangen und in beliebiger Richtung weitergehen.

Es gibt für das zuletzt genannte Beispiel noch ein weiteres Simulationsverfahren, das man anwenden kann. Man kann so vorgehen, dass man die Zufallsexperimente zur Bestimmung der zufälligen Auswahl nicht mehr selbst ausführt, sondern bereits fertige Ergebnisse von Zufallsexperimenten in Form von tabellierten Zufallszahlen verwendet. Die Zahlen werden also durch einen Zufallsprozess erzeugt und in dieser Reihenfolge aufgeschrieben. ([14], S. 132)

Man kann also das Beispiel so lösen, indem die 32 Schüler je eine Nummer bekommen, von 01-32. Es wird nun aus der Tabelle der Zufallszahlen eine Zeile durch Zufall ausgewählt. Die ausgewählten Zufallszahlen kann man in Blöcken zu je zwei Ziffern lesen. Stimmt die erste Zahl mit einer laufenden Nummer der Schülerliste überein, so hat dieser Schüler gewonnen. Ist dies aber nicht der Fall, so geht man weiter und nimmt die nächsten zwei Ziffern. Dies wird wiederholt, bis die erste Nummer mit einer der Schüler übereinstimmt.

8.3 Algorithmen

Es widerspricht dem Prinzip der Zufälligkeit, Algorithmen für die Erzeugung von Zufallszahlen zu benutzen, da jede folgende Zahl durch die vorherige bestimmt ist. Darum werden die so erzeugten Zahlen auch Pseudo-Zufallszahlen genannt. Man macht sich zunutze, dass man irgendeine wohlbestimmte Zahlenfolge als Zufallsfolge auffassen kann, wenn sie eine ausreichende Anzahl von Zufälligkeitstests besteht. Es war aus dem Grund notwendig, solche Algorithmen zu erarbeiten, da für die meisten Simulationen sehr viele Zufallszahlen benötigt werden und das Speichern einer Tabelle von Zufallszahlen würde in einem Rechner zuviel Platz erfordern.

Auf J. von Neumann geht eine der ersten Methoden zur Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen zurück. ([17], S. 163)

Gestartet wird bei einer vierstelligen Zahl, z.B. 4258, diese wird quadriert, 18130564, und davon werden die mittleren vier Ziffern als erste Zufallszahlen und als neuer Ausgangspunkt für das Verfahren genommen.

Es ist wichtig wie man die Ausgangszahl wählt.

Beginnt man zum Beispiel das Verfahren mit 3792, so beträgt das Quadrat 14379264 und das Verfahren stagniert, da wir wieder die Zahl 3792 erhalten.

D.H. Lehmer hat 1951 folgende Methode vorgeschlagen: ([17], S. 163)

Durch die folgenden Zahlen werden Zufallszahlen erzeugt:

$$x_{n+1} = a \times x_n + b \pmod{m} .$$

Drei Parameter müssen gewählt werden, a, b, und m. Die meisten Computer benutzen das Binärsystem, deshalb setzt man im allgemeinen $m = 2^r$.

Beispiel:
Mit dem Algorithmus für $a = 5, b = 7, m = 2^3 = 8$ und $x_0 = 1$ erhalten wir:

$x_1 = 5 \times 1 + 7 \equiv 4 \pmod 8$

$x_2 = 5 \times 4 + 7 \equiv 3 \pmod 8$

Für die ersten 8 Zufallszahlen ergibt sich somit: 4, 3, 6, 5, 0, 7, 2, 1

Daraufhin wiederholt sich die Folge. Will man eine längere Periode produzieren, so muss man m größer wählen.

8.4 Beispiele zur Monte-Carlo-Methode

Die Monte-Carlo-Methode hat große Bedeutung für Anwendungen im Alltagsbereich. Auch schon deshalb sollte sie im Unterricht durchgeführt werden. Die Schüler können so durch die Simulationen motiviert werden, und sie lockern den Unterricht auf. Die folgenden Beispiele sollen einen Eindruck über die breite Verwendbarkeit der Methode liefern.

Beispiel:
Busankünfte an einer Haltestelle ([17], S. 169-171)

Angenommen wird, dass die Busse in einem 10-minütigen Zeitrhythmus fahren. Stellen wir uns nun vor, dass ein Fahrgast ohne die Auskunftzeiten zur Haltestelle kommt, so muss er manchmal 10 Minuten, manchmal aber auch nur ein paar Sekunden warten. Die mittlere Wartezeit wird hier 5 Minuten betragen.

Nun nehmen wir an, dass die Busse einen anderen Zeitrhythmus haben, nämlich 5-minütigen Intervallen folgen in Abwechslung 15-minütige Intervalle. Es würden zwar pro Stunde und Tag genauso viele Busse fahren wie bei dem 10-minütigen Rhythmus, doch wäre die mittlere Wartezeit für einen zufällig ankommenden Fahrgast die gleiche?

Die Antwort darauf ist Nein, denn die Wahrscheinlichkeit, während des 5 Minutenintervalls gerade an der Bushaltestelle anzukommen, ist $\frac{1}{4}$, im Gegensatz zu $\frac{3}{4}$ für das 15 Minutenintervall. Die mittlere Wartezeit ergibt sich also zu

$$\frac{1}{4}\times \text{ 2,5 Min.} + \frac{3}{4}\times \text{ 7,5 Min.} = \text{6,25 Min.}$$

Wenn man nun überlegt kommt man zum Schluss, dass der feste Zeitabstand pro Tag oder Stunde immer die geringste mittlere Wartezeit ergibt für Personen ohne Fahrplan.

Mit Zufälligkeit hat dies aber nicht sehr viel zu tun. Man kann nun das Problem, dass Busse völlig zufällig und nicht zu ihren angekündigten Ankunftszeiten kommen, betrachten.

Zur Simulation benützen wir die folgende Tabelle:

Die Zahlen werden einfach als Minutenzahlen von Busankunftszeiten in einer Stunde gelesen. Zahlen über 60 werden weggelassen. Je sechs Zahlen werden der Größe nach geordnet, beginnend bei 9.00:

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70

Tabelle 10: Zufallszahlentabelle

9.01	9.15	9.23	9.48	9.59	9.59
10.03	10.05	10.08	10.23	10.24	10.44
11.10	11.43	11.50	11.53	11.54	11.55
12.08	12.10	12.18	12.35	12.37	12.44
13.03	13.13	13.14	13.16	13.22	13.43
14.23	14.32	14.40	14.43	14.50	14.50
15.03	15.05	15.10	15.11	15.22	15.54

Tabelle 11: Busfahrplan

Was wird passieren, wenn ein Fahrgast zwischen 9.00 und 15.54 zufällig zur Haltestelle kommt?

Die Wahrscheinlichkeit, dass er im Intervall 13.03 - 13.13 ankommt, ist $\frac{10}{414}$. Für die Busintervalle t_i beträgt die Wahrscheinlichkeit, in diesen Zeitspannen einzutreffen $\frac{t_i}{414}$. Die Wartezeit ist aber durchschnittlich die halbe Busintervalllänge, sodass sich dann für die mittlere Wartezeit E ergibt:

$$E = \Sigma \frac{t_i}{414} \times \frac{t_i}{2} = \frac{1}{2 \times 414} \times \Sigma t_i^2$$

Wenn man E nun berechnet erhält man E$=\frac{1}{828} \Sigma t_i^2 = 9,85$ Min.

Die mittlere Intervalllänge zwischen Busankunftszeiten beträgt:

$\frac{414}{42} =$ 9,86.

Man kann erkennen, dass obwohl genauso viele Busse fahren wie beim 10 Minutentakt und die mittlere Intervalllänge ja auch 9.86 Minuten beträgt, die Wartezeit des zufällig eintreffenden Fahrgastes fast genauso groß ist, wie der mittlere Busabstand und viel größer wie beim festen 10 Minutentakt.

Beispiel:
Rosinenbrötchen- Aufgabe ([14], S. 234)

Es befinden sich 150 Rosinen in 5 kg Teig. Aus diesem Teig werden 100 Brötchen zu je 50 g gebacken, wobei der Teig zuvor sorgfältig durchgeknetet wird. Dennoch wird die Anzahl der Rosinen in einzelnen Brötchen unterschiedlich sein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Brötchen mindestens a)eine Rosine ist, b) 2(3) Rosinen sind?

Lösung:

Vor der rechnerischen Behandlung wird nun eine Simulation vorgenommen. Zunächst kann man annehmen, dass sich die Rosinen nicht gegenseitig beeinflussen, und eine Rosine mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{100}$ in jedes Brötchen gelangen kann.

In dem großen Quadrat soll jedes kleine Quadrat ein Brötchen darstellen. Für jede Rosine wählen wir ein Paar von Zufallszahlen. Also wählen wir 150 Paare von Zufallsziffern aus der unten angegebenen Tabelle von Zufallszahlen. Dabei wird ausgegangen von Spalte 21/22, dann 23/24 und noch 25/26. Die erhaltenen Zahlen sind 34, 24, 23 usw.

Dies bedeutet also, dass Rosine 1 in Brötchen Nr.34 kommt, Rosine 2 in Brötchen Nr. 24 , Rosine 3 in Brötchen Nr. 23 usw. In das jeweilige Brötchenfeld wird ein Strich gemacht.

Als Schätzwerte für die Lösungen erhält man durch Auszählen:

$$P = \frac{\text{Anzahl der Brötchen mit einer Rosine}}{\text{Anzahl aller Brötchen}}$$

für a) $P \approx \frac{79}{100} = 0,79$

für b) $P(\text{2 Rosinen}) \approx \frac{34}{100} = 0,34$; $P(\text{3 Rosinen}) \approx \frac{10}{100} = 0,1$.

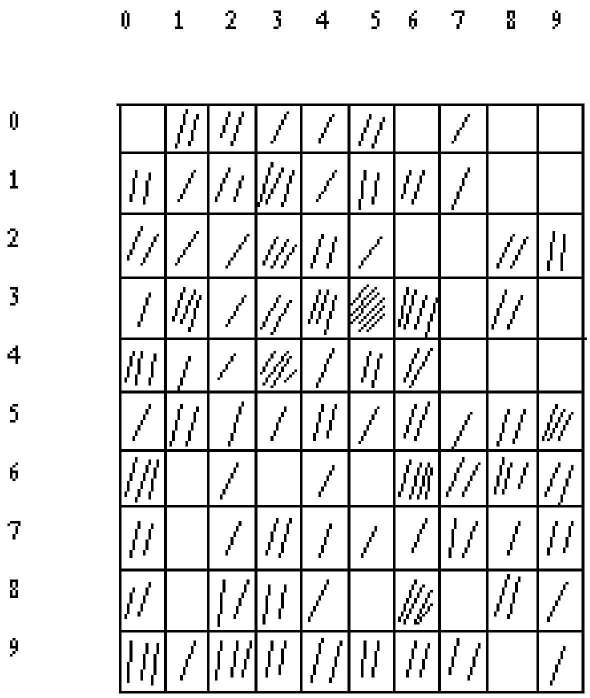


Abbildung 44: Rosinenbrötchen

Diese Schätzwerte können nun mit der theoretischen Lösung verglichen werden:

zu a) Da jede Rosine mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{100}$ in ein Brötchen gelangt, ist die Zahl $(1-0,01)^{150}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich keine der 150 Rosinen in dem Brötchen befindet. Also ist die Lösung zu a):

$$\mathrm{P} = 1-(1-0,01)^{150} = 1-0,99^{150} \approx 1-0,221 = 0,779.$$

zu b) Man denkt sich, dass die Rosinen nacheinander in den Teig geworfen werden. Es handelt sich um einen Versuch, der mit derselben Wahrscheinlichkeit 0,01 insgesamt 150 mal wiederholt wird. Mit der Formel von Bernoulli erhalten wir dann:

$$P_{150,2} = \binom{150}{2} \times (\tfrac{1}{100})^2 \times (\tfrac{99}{100})^{148} \approx 0,252.$$

$$P_{150,3} = \binom{150}{3} \times (\tfrac{1}{100})^3 \times (\tfrac{99}{100})^{147} \approx 0,126.$$

Beispiel:
Nadelproblem von Buffon - Bestimmung von π ([14], S. 48-50)

Dieses Problem stammt aus dem Jahr 1777 und ist das erste Problem einer geometrischen Wahrscheinlichkeit. Es ermöglicht eine experimentelle Bestimmung von π, und ist gerade deswegen so interessant.

In der Ebene sind parallele Geraden mit dem Abstand d voneinander vorgegeben. Es wird zufällig eine Nadel der Länge a auf dieser Ebene geworfen, wobei a $<$ d ist. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine Gerade schneidet?

Da a $<$ d, kann die Nadel höchstens eine Gerade schneiden.

Nachdem alle Streifen völlig gleichberechtigt sind, kann ein beliebiger Streifen ausgewählt werden. Der Abstand des Mittelpunkts der Nadel von der nächstgelegenen Geraden wird mit x bezeichnet, mit α wird der Winkel

Zeile Nr.	Spalte Nr. 1–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50
0	10097	32533	76520	13586	34673	54876	80959	09117	39292	74945
1	37542	04805	64894	74296	24805	24037	20636	10402	00822	91665
2	08422	68953	19645	09303	23209	02560	15953	34764	35080	33606
3	99019	02529	09376	70715	38311	31165	88676	74397	04436	27659
4	12807	99970	80157	36147	64032	36653	98951	16877	12171	76833
5	66065	74717	34072	76850	36697	36170	65813	39885	11199	29170
6	31060	10805	45571	82406	35303	42614	86799	07439	23403	09732
7	85269	77602	02051	65692	68665	74818	73053	85247	18623	88579
8	63573	32135	05325	47048	90553	57548	28468	28709	83491	25624
9	73796	45753	03529	64778	35808	34282	60935	20344	35273	88435
10	98520	17767	14905	68607	22109	40558	60970	93433	50500	73998
11	11805	05431	39808	27732	50725	68248	29405	24201	52775	67851
12	83452	99634	06288	98083	13746	70078	18475	40610	68711	77817
13	88685	40200	86507	58401	36766	67951	90364	76493	29609	11062
14	99594	67348	87517	64969	91826	08928	93785	61368	23478	34113
15	65481	17674	17468	50950	58047	76974	73039	57186	40218	16544
16	80124	35635	17727	08015	45318	22374	21115	78253	14385	53763
17	74350	99817	77402	77214	43236	00210	45521	64237	96286	02655
18	69916	26803	66252	29148	36936	87203	76621	13990	94400	56418
19	09893	20505	14225	68514	46427	56788	96297	78822	54382	14598
20	91499	14523	68479	27686	46162	83554	94750	89923	37089	20048
21	80336	94598	26940	36858	70297	34135	53140	33340	42050	82341
22	44104	81949	85157	47954	32979	26575	57600	40881	22222	06413
23	12550	73742	11100	02040	12860	74697	96644	89439	28707	25815
24	63606	49329	16505	34484	40219	52563	43651	77082	07207	31790
25	61196	90446	26457	47774	51924	33729	65394	59593	42582	60527
26	15474	45266	95270	79953	59367	83848	82396	10118	33211	59466
27	94557	28573	67897	54387	54622	44431	91190	42592	92927	45973
28	42481	16213	97344	08721	16868	48767	03071	12059	25701	46670
29	23523	78317	73208	89837	68935	91416	26252	29663	05522	82562
30	04493	52494	75246	33824	45862	51025	61962	79335	65337	12472
31	00549	97654	64051	88159	96119	63896	54692	82391	23287	29529
32	35963	15307	26898	09354	33351	35462	77974	50024	90103	39333
33	59808	08391	45427	26842	83609	49700	13021	24892	78565	20106
34	46058	85236	01390	92286	77281	44077	93910	83647	70617	42941
35	32179	00597	87379	25241	05567	07007	86743	17157	85394	11838
36	69234	61406	20117	45204	15956	60000	18743	92423	97118	96338
37	19565	41430	01758	75379	40419	21585	66674	36806	84962	85207
38	45155	14938	19476	07246	43667	94543	59047	90033	20826	69541
39	94864	31994	36168	10851	34888	81553	01540	35456	05014	51176
40	98086	24826	45240	28404	44999	08896	39094	73407	35441	31880
41	33185	16232	41941	50949	89435	48581	88695	41994	37548	73043
42	80951	00406	96382	70774	20151	23387	25016	25298	94624	61171
43	79752	49140	71961	28296	69861	02591	74852	20539	00387	59579
44	18633	32537	98145	06571	31010	24674	05455	61427	77938	91936
45	74029	43902	77557	32270	97790	17119	52527	58021	80814	51748
46	54178	45611	80993	37143	05335	12969	56127	19255	36040	90324
47	11664	49883	52079	84827	59381	71539	09973	33440	88461	23356
48	48324	77928	31249	64710	02295	36870	32307	57546	15020	09994
49	69074	94138	87637	91976	35584	04401	10518	21615	01848	76938

Abbildung 45: Zufallszahlentabelle ([14], S. 133)

bezeichnet, den die Nadel und diese Gerade einschließen.

Im folgenden Bild liegt der Mittelpunkt der Nadel in der unteren Hälfte des Streifens.

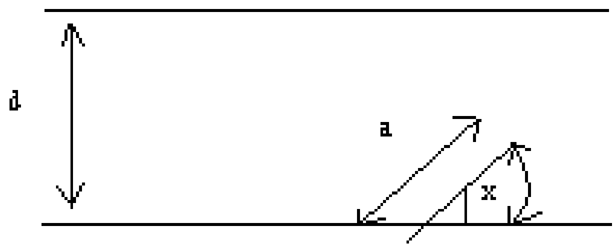


Abbildung 46: Nadelproblem von Buffon

Durch die Parameter α und x kann jede Lage der Nadel beschrieben werden.

Es gilt $0 \leq x \leq \frac{d}{2}$ und $0 \leq \alpha \leq \pi$

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$, kann x die maximale Länge der halben Nadel $\frac{a}{2}$ annehmen, und die Nadel berührt noch die untere Parallele. Bei allen anderen Winkeln muss der Abstand x kleiner als $\frac{a}{2}$ sein, wenn die Nadel die Parallele schneiden soll. Aus der Zeichnung liest man die Bedingung für ein Schneiden ab. Mit Hilfe der Sinusfunktion findet man:

$x \leq \frac{a}{2} \sin \alpha.$

In einem Koordinatensystem können die mögliche Fläche und die günstige Fläche (schraffiert) eingezeichnet werden. Man erhält so für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

Wir berechnen jetzt die günstige Fläche, siehe Abbildung: Koordinatensystem.

$\int_0^\pi \frac{a}{2} \sin \alpha \, d\alpha = -\frac{a}{2} \cos \alpha \, d\alpha \Big|_0^\pi = a$

P$= \frac{\text{Maßzahl von F}}{\text{Maßzahl von A}} = \frac{a}{(d/2)\pi} = \frac{2a}{d\pi}$

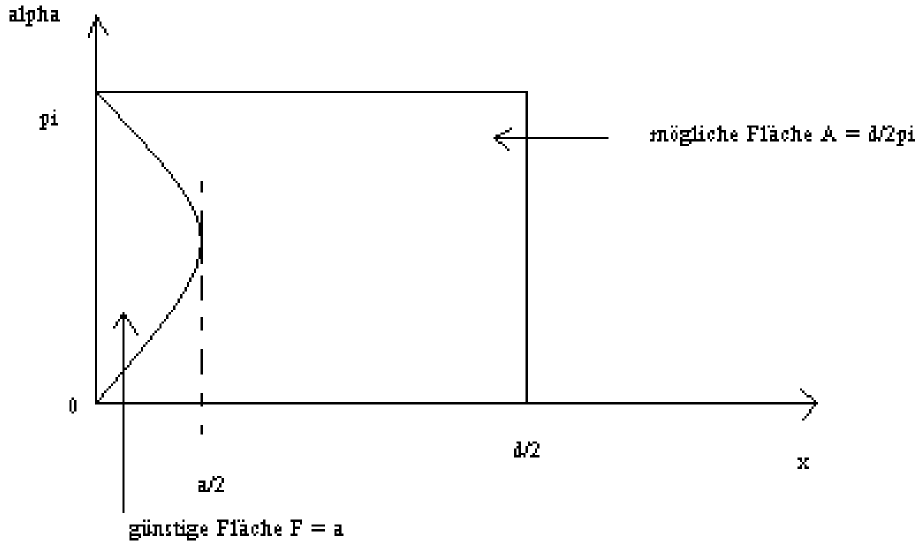


Abbildung 47: Koordinatensystem

Im Allgemeinen ist also die gesuchte Wahrscheinlichkeit keine rationale Zahl. Das Ergebnis sagt also, dass die Nadel ungefähr in dem $\frac{2a}{d\pi}$-ten Teil der Versuche eine der Geraden schneiden wird.

Auf experimentellem Weg kann man auch so die Zahl π bestimmen.

Man bestimmt die relative Häufigkeit $h_n(S) = \frac{z}{n}$ in einer langen Versuchsreihe von n Versuchen dafür, dass die Nadel eine Gerade schneidet. Dann ist nach früheren Ausführungen $h_n(S)= \frac{z}{n} \approx \frac{2a}{\pi d}$.

Man kann das nach π auflösen: $\pi \approx \frac{2a \times n}{z \times d}$.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann also zur numerischen Approximation der Zahl π herangezogen werden.

Verwendung für den Unterricht:

Im Unterricht kann man von den Schülern eine Nadel experimentell werfen lassen, und die Zahl der Überschneidungen dabei notieren.

Sinnvoll wäre es, aufgrund dieses Beispieles eine Stunde im Computerraum zu verbringen, um den Schülern dies anhand des Computers zu veranschaulichen.

Beispiel:
Kreisflächenberechnung, Monte-Carlo-Integration, Bestimmung von π ([13], S. 250-252); ([14], S. 230-232)

Die Figur enthält ein Einheitsquadrat mit einem eingeschriebenen Viertelkreis, der den Radius 1 hat.

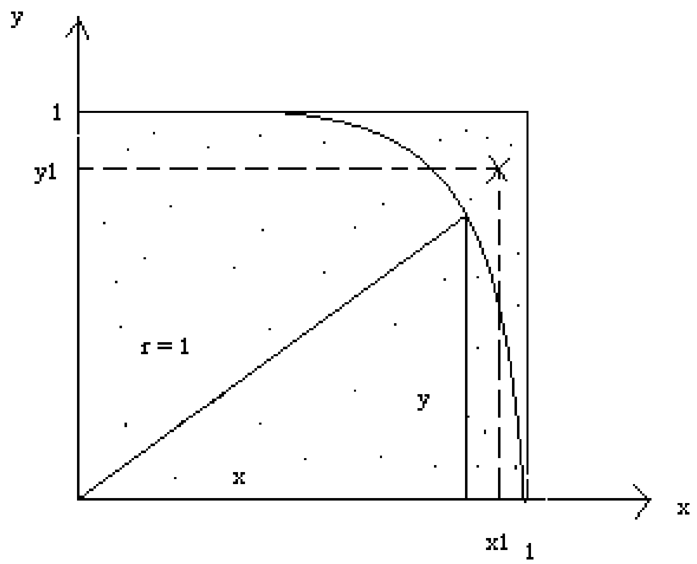


Abbildung 48: Kreisflächenberechnung

a)Man lässt von oben auf die Figur ein Sandkorn fallen, und stellt jedes Mal fest, ob es im Inneren des Kreises oder in der Zwischenfläche Quadrat-Kreis zum Liegen kommt. Hierbei macht man eine Vielzahl von Versuchen, zum Beispiel 1500 und zählt dabei wie oft das Sandkorn im Inneren des Viertelkreises zum Liegen kommt. Angenommen es ist 1128 liegen geblieben. Nimmt man nun an, dass jeder Punkt im Quadrat mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen wird, und dass alle Flächen gleicher Größe gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, dann kann die relative Häufigkeit

$\frac{1128}{1500}$ als ein Maß für das Verhältnis $\frac{\text{Viertelkreis}}{\text{Quadrat}}$ gesehen werden.

Wir haben den Radius 1, also erhalten wir

$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1128}{1500} = 0{,}752$, d.h. $\pi \approx 3{,}008$.

b) Nun „mathematisiert“ man die obige Vorgehensweise und überdeckt das Quadrat mit vielen zufälligen Punkten, die mit Zufallszifferntabellen gewonnen werden können. Ein zufälliger Block von 4 Ziffern wird nun zur Festlegung eines Punktes genutzt, indem die ersten zwei Ziffern als Hundertstel der x-Koordinate und die letzten zwei Ziffern als Hundertstel der y-Koordinate gedeutet werden.

Zum Beispiel: 8868, $x_1 = 0{,}88$; $y_1 = 0{,}68$.

Es werden nun viele Punkte eingezeichnet und man zählt wieder die Punkte des Inneren des Viertelkreises ($N_V K$) und die Gesamtzahl der Punkte (N_Q).

Man erhält nun einen Schätzwert aus der Beziehung $\frac{A_V K}{A_Q} \approx \frac{N_V K}{N_Q}$.

c)Nun wird nochmals vom Einheitsquadrat ausgegangen. Der Viertelkreis ist algebraisch beschrieben durch die Menge K aller Punkte (x, y), für die $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ist und deren Abstand vom Ursprung nicht größer als 1 ist. Man findet dann mit Hilfe des phytagoräischen Lehrsatzes:

K$= (x, y)/x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$

Verwendung für den Unterricht

Geeignet ist diese Mathematisierung für den Einsatz von Taschenrechnern. Die Schüler können damit schnell feststellen, ob die ermittelten Punkte innerhalb oder außerhalb des Viertelkreises liegen.

Auch bei diesem Beispiel könnte mithilfe des Computers gearbeitet werden.

Literatur

[1] *Regulärer Würfel*

royalty-free Bild

Quelle: Silvia Berner

http://www.mattonimages.de/bilder/jpg/mcd_sb10477.html/sok-würfel

[2] *Münze*

royalty-free Bild

Quelle: Creativ Studio Heinemann

http://www.mattonimages.de/bilder/jpg/ib_ibxodh00703392.html/sok-münze/sim-DP_DP1853858.JPG/st-theme

[3] *Streichholzschachtel*

royalty-free Bild

Quelle: Mark Weiss

http://www.mattonimages.de/bilder/jpg/pd_sb10062257b-001.html/sok-streichholzschachtel

[4] *Kreisel*

royalty-free Bild

Quelle: Frank Muckenheim

http://www.mattonimages.de/bilder/jpg/we_muf00300.html/sok-kreisel

[5] *Ziegenproblem*

http://www.mister-mueller.de/mathe/beispiele/ziege/ziege5.html, 17.10.2009

[6] *Wahrscheinlichkeitsrechnung: Geschichte und Anfang*

http://www.gymnasium-meschede.de/projekte/projekt12-02/mathe/wsrech/index.html

[7] *Geschichte der Stochastik*

http://www3.ext.tu-freiberg.de/~wwwfk/highlights/projektwoche/mathematik/ Geschichte_der_Stochastik.htm

[8] BÜRGER, H.: *Mathematik Oberstufe 3.*

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1980.

[9] DINAUER: *Mathematik 7.*

Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991.

[10] GÖTZ, S.: *Lehrbuch der Mathematik 7.*

öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH & Co.KG, Wien, 2003.

[11] HABLE, C.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht.*

Diplomarbeit, Universität Wien, Wien, 1990.

[12] HEITELE, D.: *Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe.*

Dissertationsdruck Blasaditsch GmbH, Dortmund, 1976.

[13] KÜTTING, H.: *Didaktik der Stochastik.*

BI-Wiss.-Verl., Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994.

[14] KÜTTING, H.: *Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.*

Verlag Herder, Freiburg im Breisgau, 1981.

[15] LIPSCHUTZ, S.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung:Theorie und Anwendung.*

HAAG + HERCHEN Verlagsbüro GmbH, Frankfurt am Main, 1992.

[16] MAYERHOFER, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung in der AHS Unterstufe.*

Diplomarbeit, Universität Wien, Wien, 2008.

[17] STEINBRING, H.: *Stochastik in der Sekundarstufe I.*

Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln, 1984.

[18] Struik, D.: *Abriss der Geschichte der Mathematik.*

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.

[19] Wollring, B.: *Ein Beispiel zur Konzeption von Simulationen bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs*

Stochastik in der Schule 12, Heft 3 (2-25), 1992.

[20] Wussing, H.: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.*

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

Zusammenfassung

In meiner Diplomarbeit befasse ich mich mit der Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Schulunterricht. Ich möchte Möglichkeiten aufzeigen, wie man als Lehrperson mithilfe zahlreicher Beispiele und den unterschiedlichsten Methoden dieses Teilgebiet der Mathematik den Schülern verständlich machen kann.

In den einführenden Kapiteln bin ich darauf eingegangen, aus welchem Grund es eigentlich sinnvoll ist, die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Unterricht einzubauen, welche Geschichte dieses Thema begleitet, und wie die Entwicklung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffes bei Kindern vor sich geht.

Nach diesem Einstieg habe ich mich der Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Unterricht gewidmet. Ich habe mich für einen Einstieg mithilfe von Simulationen entschieden, wobei ich zwei konkrete Beispiele an den Anfang gestellt habe. Anhand dieser, sollen die Schüler eine Vorstellung von Wahrscheinlichkeitsrechnung bekommen, und so an diesem neuen Abschnitt der Mathematik Gefallen finden.

Es ist wichtig, die Schüler nun zu aller erst mit den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut zu machen, und schließlich mit einigen Beispielen das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten zu beginnen.

Sowohl die bedingte Wahrscheinlichkeit, Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, aber auch die Kombinatorik sollten Beachtung im Unterricht finden. Diese Kapitel habe ich mit zahlreichen Beispielen begleitet, und immer wieder Simulationen zum besseren Verständnis der Theorie verwendet.

Im abschließenden Kapitel befasse ich mich noch mit der Monte-Carlo-Methode, wobei ich wieder einige Beispiele bringe.

Abstract

In my dissertation I deal with the introduction of probability in school. I would like to indicate possibilities for teachers to make clear this branch of mathematics to students using numerous examples and different methods.

In the introductory chapters I deal with reasons why it makes sense to treat probability in school, with the history of this subject, and with the development of chance and likelihood in children's understanding.

After this I treated the introduction of probability calculus in school lessons. I decided to use simulations to understand and solve the first examples, and I started with two concrete examples. In this way the students should get an idea of probability theory, and find interest in this new segment of mathematics.

It is important to make the students familiar with the basic concepts of probability theory, and then to start calculations with likelihood using some examples.

Conditional probability, random variables, mathematical expectation, variance, but also the theory of combinations should be treated. Numerous examples are integrated in these chapters and often simulations are used in order to obtain a better understanding of the theory.

The final chapter deals with Monte Carlo methods and again some examples are used.

Persönliche Daten

Name:	Christina Moser
Geburtsdaten:	Melk, 29. Juli 1987
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig
Eltern:	Ing. Karl Moser (50), EDV-Berater Margit Moser (45), HS Lehrerin
Geschwister:	Barbara (17), Verena (10)

Schulische Ausbildung

1993 – 1997 Volksschule Yspertal
1997 – 2001 Hauptschule Yspertal
2001 – 2005 Stiftsgymnasium Melk

Studienlaufbahn

2005 – 2009 Universität Wien: Lehramtstudium: Mathematik; Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung