universität wien

DISSERTATION

Titel der Dissertation

"Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres"

Verfasser

Mag. Michael Gaidoschik

angestrebter akademischer Grad

Doktor der Philosophie (Dr. phil)

Wien, im Jänner 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 092 297
Dissertationsgebiet lt. Studienblatt:	Pädagogik
Betreuer:	ao. Univ.-Prof. Dr. Günter Hanisch

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Abbildungen

Verzeichnis der Tabellen

Vorwort

Am Beginn dieser etwas unhandlich geratenen Arbeit stand, wie es sich seit PLATON in der Wissenschaft gehört, das Staunen. Staunen darüber, dass in der deutschsprachigen Fachdidaktik der Grundschulmathematik einerseits einhellig vor den Gefahren einer "Verfestigung des zählenden Rechnens" gewarnt wird; dass daher die Überwindung des zählenden Rechnens einhellig als wichtiges Ziel des Arithmetikunterrichts noch im ersten Schuljahr ausgegeben wird; dass aber andererseits im deutschsprachigen Raum so gut wie keine Studien darüber vorliegen, mit wie vielen Kindern dieses Ziel üblicherweise auch tatsächlich erreicht wird. Staunen auch darüber, dass bei allen durch PISA und TIMSS entfachten Debatten über die Qualität des Mathematikunterrichts in Österreich kaum darüber gesprochen wird, was im Erstunterricht passiert; obwohl es doch gerade bei einem Fach wie Mathematik, in dem sich Verständnislücken im Grundlagenbereich auf jeder höheren Stufe mit wachsender Wucht bemerkbar machen, naheliegt, dass die Defizite, die bei 10- oder 16-Jährigen beklagt werden, wesentlich auch damit zu tun haben könnten, wie diese Kinder und Jugendlichen in die Schulmathematik gestartet sind.

Fehlstarts in die Schulmathematik künftig vermeiden zu helfen, war ein Hauptanliegen, als ich diese Arbeit begann. Wie wichtig das wäre, erfahre ich seit nun 15 Jahren Tag für Tag in meinem Hauptberuf: Ich fördere außerschulisch Kinder und Jugendliche, die als "rechenschwach" gelten und doch oft nur unter den Spätfolgen solcher Fehlstarts zu leiden haben. Der Beitrag, den die nun endlich fertiggestellte Dissertation zur Vermeidung von "Rechenschwächen" allenfalls leisten könnte, beschränkt sich freilich auf die Bereitstellung von Grundlagenwissen. Und es stimmt natürlich nur zum Teil, dass nichts praktischer sei als eine gute Theorie: Auch gute pädagogische Theorien müssen erst noch in gute Unterrichts- und Förderdesigns umgesetzt werden, um praktisch wirken zu können. Dass wenigstens Teile dieser Arbeit Anstoß und Hilfestellung dafür geben könnten, solche Designs zu entwerfen und im Interesse der Kinder zu erproben, ist meine große Hoffnung. In meinem "Nebenberuf", meiner Tätigkeit in der LehrerInnenfortbildung, daran mitzuwirken, sehe ich als eine der Herausforderungen für meine Zukunft.

An dieser Stelle ist Dank zu sagen. Er gilt zu allererst Eva, meiner Frau. Ohne sie gäbe es diese Dissertation nicht.

Mein Dank geht an meinen Erstbetreuer, Herrn Prof. Dr. Günter Hanisch (Universität Wien), und meine Zweitbetreuerin, Frau Prof. Dr. Anna Susanne Steinweg (Universität Bamberg), denen ich viel zu viele Seiten zugemutet habe und die mir durch ihre Rückmeldungen und Anregungen wichtige Denkanstöße gegeben haben. Ich danke Herrn Prof. Hans-Dieter Gerster (PH Freiburg) für einen nun schon seit Jahren bestehenden fachlichen Austausch, der viel

zum Entstehen dieser Dissertation beigetragen hat, und seine zahlreichen konstruktiv-kritischen Anmerkungen zum Manuskript. Frau Dr. Reisinger und Herrn Dr. Schiffinger danke ich für ihre Beratung in Fragen der Statistik.

Die Arbeit an dieser Dissertation erstreckte sich über viele Jahre und war dadurch auch eine große finanzielle Belastung. Ich hätte das Projekt gar nicht beginnen können, wäre ich nicht in der Anfangsphase als Gastdozent an der Pädagogischen Akademie des Bundes in Wien vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur aus den Mitteln der Forschungsförderung für Pädagogische Tatsachenforschung finanziell unterstützt worden. Für die Unterstützung, die sie mir in dieser Zeit beim Einreichen des Antrags auf Projektförderung haben zukommen lasse, danke ich dem damaligen Direktor der Pädagogischen Akademie Dr. Manfred Teiner sowie Frau Prof. Dr. Angelika Paseka und Herrn Prof. Dr. Christian Fridrich. Mein Dank geht auch an den Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung an der Universität Klagenfurt, der mir einen Teil der erheblichen Reisekosten rückerstattete, die durch die zahlreichen Schulbesuche entstanden und die von der Projektförderung über die Pädagogische Akademie nicht abgedeckt wurden.

Ich danke dem Landesschulrat für Niederösterreich, namentlich Herrn Landesschulinspektor Ing. Leopold Rötzer, der sich hinter die Zielsetzungen des Projektes gestellt und durch ein offizielles Schreiben wohl maßgeblich dazu beigetragen hat, dass nur 21 Schulen gelost werden mussten, um eine Zufallsauswahl von 20 Schulen für das Projekt zu gewinnen; und ich danke den SchulleiterInnen der teilnehmenden Schulen, die mich organisatorisch unterstützt und in ihren Schulen freundlich aufgenommen haben.

Schließlich danke ich in besonderem Maße all denen, die sich so bereitwillig von mir haben befragen lassen: den Lehrkräften, die mir Einblicke gewährten in ihre Unterrichtsgestaltung und auch organisatorisch viel Arbeit abnahmen; den Eltern der teilnehmenden Kinder, die mir gestatteten, ihre Kinder zu interviewen, und die sich auch selbst mit dem Elternfragebogen abmühten; und natürlich den Kindern, die mich an ihren oft so beeindruckenden mathematischen Überlegungen teilhaben ließen und fast durchwegs mit großer Freude und Begeisterung an allen Interviews teilnahmen. Ihnen gegenüber ein Schuljahr lang Forscher bleiben zu müssen und auch in den Fällen, wo der Förderbedarf offenkundig war, nicht auch Förderer sein zu können, ist mir äußerst schwergefallen. Ich hoffe, dass ich durch die umfassende Information, die ich nach den letzten Interviews Lehrkräften wie Eltern über den mathematischen Entwicklungstand ihrer Kinder zukommen ließ, sicherstellen konnte, dass die Teilnahme an diesem Forschungsprojekt für diese Kinder zumindest kein Nachteil war.

Kaltenleutgeben, im Jänner 2010 Michael Gaidoschik

1. Problemaufriss und Gliederung

"Zählmethoden als alleinige oder vorwiegend praktizierte Lösungsstrategie bei Kindern über das erste Schuljahr hinaus zu tolerieren ist unterlassene Hilfeleistung."

GERSTER 1994, S. 46

1.1 "Verfestigtes zählendes Rechnen" und daran anschließende Forschungsinteressen

"Besondere Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens" (SCHIPPER 2003a, S. 103) finden in den letzten Jahrzehnten verstärkt Aufmerksamkeit seitens der Pädagogik und Fachdidaktik der Grundschulmathematik. Als ein wesentliches Merkmal solcher Schwierigkeiten wird von deutschsprachigen AutorInnen übereinstimmend das "Hängenbleiben" (GERSTER 1994, S. 45) mancher Kinder an Zählstrategien (vgl. Kap. 2.1) beim Lösen von Plus- und Minusaufgaben genannt (vgl. etwa LORENZ & RADATZ 1993, S. 116ff; GERSTER 1994, S. 42-46; GAIDOSCHIK 2003a, S. 32-35; SCHIPPER 2003a, S. 109f; KAUFMANN & WESSOLOWSKI 2006, S. 14).

Dieses "verfestigte zählende Rechnen" (SCHIPPER 2003a, S. 110) wird gesehen als die Kehrseite eines geringen "Vorrats an auswendig gewussten Aufgaben" (RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING 1996, S. 84; vgl. etwa auch RUSSELL & GINSBURG, 1984, S. 217). Dementsprechend hält GEARY in einem Überblick über die englischsprachige (vorwiegend psychologisch interessierte) Fachliteratur zu "mathematics learning disabilities (MLD)" fest:

> *"The most consistent finding in the literature is that children with MLD [...] differ from their typically achieving peers in the ability to use retrieval-based processes to solve simple arithmetic [...] problems"* (GEARY 2004, S. 7f).

In der Redeweise vom "*verfestigten* zählenden Rechnen" wird die Abweichung von einer *normalen* Entwicklung zum Ausdruck gebracht, in der "zählendes Rechnen" sehr wohl seinen Platz hat: *Zu Beginn ihrer arithmetischen Entwicklung* lösen, wie noch im Detail darzustellen sein wird (siehe Kapitel 2), *alle* Kinder Additionen und Subtraktionen (unter anderem) mit Hilfe von Zählstrategien (vgl. etwa PADBERG 2005, S. 82f; BAROODY 2006, S. 22). Als "nicht normal", sondern Merkmal einer "besonderen Schwierigkeit" können Zählstrategien also erst dann gelten, wenn sie "sich verfestigen" – und *nicht* (wie demgemäß bei Kindern *ohne* besondere Schwierigkeiten) *im Laufe der Zeit* mehr und mehr von nicht-zählenden Strategien (Faktenabruf und Ableitung; vgl. Kap. 2.1) abgelöst werden (vgl. ROTTMANN & SCHIPPER 2002, S. 51; LORENZ & RADATZ 1993, S. 116ff).

Dass es sich hierbei tatsächlich um eine *Verfestigung* und nicht bloß um eine *zeitliche Verzögerung* handelt; dass also die Betroffenen ihre Zählstrategien auch zu einem späteren Zeitpunkt nicht oder zumindest nicht im selben Maße ablegen wie die sich "normal" entwickelnden SchülerInnen, legen Studien nahe, welche die Lösungsstrategien von SchülerInnen auch der Sekundarstufe erfassen (MOSER OPITZ 2005; SCHÄFER, 2005; vgl. auch OSTAD, 1998). Tatsächlich fehlen aber bis zum heutigen Tag *Längsschnittstudien*, welche die Lösungsstrategien *derselben* Kinder von der Grundschule (oder gar vom Kindergarten) ausgehend bis in die Sekundarstufe oder gar darüber hinaus erfassen würden. Abgesehen vom hohen Aufwand spricht gegen solche Studien freilich der pädagogische Impetus, bei jenen Kindern intervenieren zu wollen, bei denen sich eine Verfestigung von Zählstrategien abzeichnet (vgl. Kap. 8.5.5).

Dieser Impetus ist begründet aus der jedenfalls innerhalb der deutschsprachigen Fachdidaktik verbreiteten Überzeugung, dass das Festhalten an Zählstrategien den Kindern in höheren Schulstufen zum Schaden gereiche. LORENZ und RADATZ nennen deshalb das zählende Rechnen, wenn es "verfestigt bzw. die einzige Lösungstechnik bei arithmetischen Operationen [wird]", eine "Sackgasse [..], aus der die Schüler im 2. oder im 3. Schuljahr kaum mehr herauskommen" (LORENZ & RADATZ 1993, S. 117). Warum und inwiefern das Festhalten an Zählstrategien (auch wenn diese kaum je die *einzige* Lösungstechnik eines Kindes darstellen, siehe Kapitel 2) tatsächlich die gesamte weitere arithmetische Entwicklung eines Kindes massiv beeinträchtigt, wird in Kapitel 3 umfassend dargestellt. Weil dem aber so ist, ergeben sich aus pädagogischer Perspektive folgende Problemlage und daraus abgeleitet folgende Forschungsinteressen:

Die Rede vom "verfestigten zählenden Rechnen" trifft eine Post-factum-Feststellung, dem strengen Wortsinn nach eine *endgültige*: Was einmal *verfestigt* ist, das wird man (im Prinzip) aus eigener Kraft nicht mehr los. Umso dringlicher wäre dann aber, nicht erst das negativ zu bewertende *Resultat der Verfestigung* zu konstatieren, sondern *diesen Prozess selbst* möglichst frühzeitig zu identifizieren. Dafür wäre es aber notwendig, *am zählenden Rechnen selbst* bzw. an den Kindern, die ja *alle* in einer frühen Phase ihrer arithmetischen Entwicklung zählende Rechenstrategien einsetzen, Unterschiede auszumachen zwischen jenen Kindern, bei welchen das zählende Rechnen bloß vorübergehend ist und jenen, die diese Lösungsstrategie dauerhaft zu ihrer Hauptstrategie machen, also *verfestigen*.

Sofern diese Unterscheidung empirisch überhaupt möglich ist, muss sie in angemessener Weise berücksichtigen, dass wir es mit einer Entwicklung zu tun haben, die von Anfang an unter dem Einfluss von Erwachsenen (Eltern und anderen erwachsenen Bezugspersonen, das sind später vor allem auch KindergartenpädagogInnen und VolksschullehrerInnen) und anderen Kindern (Geschwistern, SpielgefährtInnen, später vor allem KollegInnen im Kindergarten und in der Volksschule) stattfindet. Es ist plausibel, dass solche Einflüsse (vermittelt durch die geistig-aktive Verarbeitungsleistung des Kindes selbst) entscheidend dazu beigetragen haben, welche Lösungsstrategien ein Kind zu einem beliebigen Zeitpunkt seiner arithmetischen Entwicklung anwendet.

Wenn wir also *verstehen* wollen, warum ein bestimmtes Kind zu einem bestimmten Zeitpunkt Zählstrategien anwendet, müssen wir auch ein möglichst umfassendes Bild davon gewinnen, unter welchen Einflüssen seine arithmetische Entwicklung bis zu diesem Zeitpunkt stattgefunden hat. Davon und von den zu erwartenden künftigen Einflüssen wird es aber wohl auch abhängen, ob dieses Kind das zählende Rechnen in weiterer Folge zugunsten nicht-zählender Strategien aufgibt oder aber diese zum Nachteil seiner weiteren Entwicklung verfestigt. Da wir die mannigfachen Einflüsse, denen kindliches Lernen ausgesetzt ist, theoretisch wie praktisch nie zur Gänze kontrollieren können, müssen wir uns auch bei der angestrebten Unterscheidung von vorübergehendem und sich verfestigendem zählenden Rechnen wohl mit *Wahrscheinlichkeitsaussagen* ("Es ist zu erwarten, dass...", "Es steht zu befürchten, dass...") begnügen müssen.

Von Interesse ist diese Unterscheidung aus pädagogischer Sicht ohnedies nicht deshalb, weil wir *Vorhersagen* treffen und deren Eintreten oder Nichteintreten wissenschaftlich-distanziert überprüfen wollen, sondern weil wir eine sich abzeichnende negative Entwicklung durch gezielte Interventionen nach Möglichkeit zu stoppen versuchen werden. Dafür ist aber ein möglichst umfassendes Wissen darüber erforderlich, welche Lernprozesse manche Kinder im Laufe der Zeit dazu befähigen, zählende Strategien durch nicht-zählende (Faktenabruf und Ableitungen; vgl. Kap. 2.1) zu ersetzen und aus welchen Gründen andere Kinder ebendies nicht oder nicht in ausreichendem Maße oder nicht innerhalb der gewünschten Zeit tun. Erst auf Grundlage eines solchen Wissens lassen sich nämlich *begründete* Aussagen darüber treffen, ob und warum bestehende didaktisch-methodische Konzepte zum mathematischen Erstunterricht bzw. bestehende Förderkonzepte die angestrebte Ablösung vom zählenden Rechnen begünstigen oder diese vielleicht sogar behindern. Und erst auf dieser Basis lassen sich alternative Unterrichtsdesigns entwickeln, mit denen *in begründeter Weise* die Hoffnung verbunden werden kann, möglichst vielen Kindern den Übergang zu nicht-zählenden Rechenstrategien zu erleichtern oder vielleicht erst zu ermöglichen. Dass auch solche praktisch-pädagogischen Schlussfolgerungen aus den hier angestrebten theoretischen Einsichten letztlich immer nur *Wahrscheinlichkeitsausagen* sein können (vgl. KRAUTHAUSEN 2009, S. 114), liegt an der bereits erwähnten unüberschaubaren und nicht restlos kontrollierbaren Vielzahl an Einflüssen auf das kindliche Lernen, zu der nicht zuletzt die Vielfalt kindlicher Individualitäten selbst gehört.

Tatsächlich sind wir aber beim gegenwärtigen Stand der Forschung auch zu solchen Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht auf befriedigendem wissenschaftlichen Niveau imstande: nicht mit Bezug auf die präzise Beurteilung kindlicher Entwicklungsstände und daher erst recht nicht mit Bezug auf didaktisch-methodische Konzepte, die der weiteren Entwicklung förderlich sind.

Das liegt zum einen daran, dass auch die *internationale* Forschung (bei allem, was sie diesbezüglich bereits geleistet hat; vgl. Kapitel 2) noch immer zu wenig darüber weiß, in welchen Varianten Kinder ihre Rechenstrategien vom anfänglichen zählenden Rechnen weiterentwickeln oder eben nicht.

Zum anderen liegen für den *deutschen* Sprachraum bislang nur wenige (und kaum repräsentativ zu nennende; siehe Kapitel 2.2.4 und 2.13.2) und für Österreich keine einzige Studie über die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben vor. Das ist deshalb relevant, weil eine Reihe von internationalen Studien (vgl. Kapitel 2.6) starke Hinweise dafür liefert, dass wir die vorwiegend im englischen Sprachraum durchgeführten Untersuchungen nicht ohne weiteres auf den deutschen Sprachraum übertragen können. Wollen wir also die arithmetische Entwicklung *österreichischer* (deutscher, italienischer...) Kinder verstehen und befördern, müssen wir zunächst untersuchen, wie *österreichische* (deutsche, italienische...) Kinder unter den besonderen Bedingungen ihres arithmetischen Lernens rechnen lernen. Plausibel erscheinen national-spezifische Einflüsse wohl vor allem im Bereich des Unterrichts, aber eventuell auch der Sprache, der frühkindlichen Sozialisation und Förderung und möglicherweise auch in anderen Bereichen.

1.2 Gliederung der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit wird angesichts dieser Problemlage zunächst der Versuch unternommen, den aktuellen *Stand der internationalen Forschung* zur Entwicklung kindlicher Rechenstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben umfassend darzustellen, kritisch zu sichten und die oben bereits angedeuteten Forschungslücken im Detail herauszuarbeiten. Erst auf dieser Grundlage können die Forschungsfragen, die im weiteren Verlauf der Arbeit geklärt werden sollen, im Einzelnen dargestellt und begründet werden (Kapitel 2). In diesen Forschungsfragen wird der Fokus der weiteren Arbeit auf die Entwicklung der Rechenstrategien im Laufe des *ersten* Schuljahres gelegt.

Kapitel 3 geht deshalb der Frage nach, welche Zielvorgaben die aktuelle Fachdidaktik der Grundschulmathematik einerseits, der aktuelle österreichische Lehrplan und die österreichischen Bildungsstandards andererseits für den *frühen* Arithmetikunterricht formulieren.

In Kapitel 4 wird ein knapper Überblick darüber gegeben, welche *didaktisch-methodischen Mittel* die aktuelle Fachdidaktik zur Erreichung dieser Zielvorgaben vorschlägt.

Kapitel 5 leitet mit den aus dem Theorieteil (vorwiegend Kapitel 2) entwickelten *Hypothesen* zur Strategieentwicklung bei österreichischen ErstklässlerInnen zum empirischen Teil der Dissertation über.

Kapitel 6 erläutert *Design und Durchführung der empirischen Untersuchungen*, die zur Prüfung der Hypothesen und mit dem Ziel einer darüber hinausgehenden Exploration des Forschungsfeldes unternommen wurden. Das waren im Einzelnen: Eine Längsschnittstudie zur Entwicklung kindlicher Rechenstrategien im Laufe des ersten Schuljahres; eine qualitative Inhaltsanalyse der Schulbücher, die im Mathematikunterricht dieser Kinder verwendet wurden; eine Befragung der Lehrkräfte dieser Kinder zu didaktisch-methodischen Aspekten ihres Mathematikunterrichts; schließlich eine Befragung der Eltern dieser Kinder zum häuslichen Üben im Laufe des ersten Schuljahres wie auch zur Ermittlung der höchsten abgeschlossenen Schulbildung der Eltern.

In Kapitel 7 werden die Ergebnisse der *Schulbuchanalyse*, der *LehrerInnenbefragung* sowie der *Elternbefragung* dargestellt und diskutiert.

Kapitel 8 ist der deskriptiven Statistik und der *Darstellung qualitativer Ergebnisse* der Längsschnittstudie zur Entwicklung kindlicher Rechenstrategien gewidmet.

In Kapitel 9 erfolgt die *Signifikanzprüfung* der in Kapitel 5 formulierten Hypothesen.

Die Ergebnisse des empirischen Teils der Arbeit werden in Kapitel 10 mit Blick auf den erhofften pädagogisch-didaktischen Ertrag *diskutiert*.

In Kapitel 11 erfolgt schließlich eine *Zusammenfassung* der gesamten Arbeit.

2 Die Entwicklung kindlicher Lösungsstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben: Stand der Forschung und offene Fragen

"Abzählen, das machen fast die meisten. Aber das finde ich für einen Blödsinn. Wenn es jetzt eine leichte Rechnung ist, und mir fällt nicht die Zahl ein, und ich rechne mit den Fingern nach, das finde ich irgendwie – wenn man ein bisschen mehr nachdenkt, dann fällt es einem auch ein."

CHRISTIAN, Mitte seines ersten Schuljahres

WITTMANN (1995, S. 356f) nennt unter den "Herzstücken" der Mathematikdidaktik auch die beiden folgenden Bereiche:

- *"research in the pre-requisites of learning and into the teaching/learning processes"*
- *"development and evaluation of substantial teaching units [...]"*

Das eine ist dem anderen logisch vorausgesetzt. Auf unseren Forschungsgegenstand angewandt: Um "substantielle Lehreinheiten" im Bereich des kleinen Einspluseins entwickeln und/oder beurteilen zu können, müssen wir zunächst möglichst detailliert darüber Bescheid wissen, welche Lernvoraussetzungen für welche Rechenstrategien benötigt werden, auf welche Weise diese Voraussetzungen von Kindern unter welchen Bedingungen tatsächlich genutzt und weiterentwickelt werden, und welche Rolle Unterricht (als förderliche, vielleicht aber auch mitunter hinderliche Bedingung) dabei spielen kann. Die weitverzweigte interdisziplinäre Forschung zu diesen Fragen soll deshalb in Kapitel 2 (nach einer einleitenden Klärung dabei häufig verwendeter Begriffe) in ihren wesentlichen Aspekten zusammengefasst und kritisch bewertet werden. Auf dieser Grundlage werden dann in Kapitel 3 aktuelle Zielvorgaben und in Kapitel 4 didaktisch-methodische Konzepte zum Erstrechenunterricht einer Überprüfung unterzogen.

2.1 Definition häufig verwendeter Begriffe

Zum besseren Verständnis der folgenden Ausführungen seien zunächst wesentliche, in vorliegenden Studien zur Strategieentwicklung wiederholt verwendete Begriffe kurz definiert. Die ausführliche Klärung und ins Detail gehende Diskussion dieser Begriffe macht einen wesentlichen Teil der folgenden Unterkapitel aus.

"Lösungsstrategie", "Rechenstrategie"

Als "Lösungsstrategie" wird im Rahmen dieser Arbeit die Gesamtheit der *beobachtbaren* Handlungen und *erschließbaren* geistigen Akte bezeichnet, die ein Kind als *Mittel* anwendet für den Zweck, eine bestimmte Aufgabe zu bewältigen. Handelt es sich dabei um eine *Rechenaufgabe* (also darum, die Summe c einer Addition a+b=c bzw. die Differenz f einer Subtraktion d–e=f zu ermitteln), so wird auch der engere Begriff "Rechenstrategie" verwendet.

Im Anschluss an SIEGLER und JENKINS (1989, S. 11ff) fordert diese Definition *nicht*, "that a strategy must be consciously formulated or the product of a conscious or rational choice". Speziell die beim Bewältigen der Aufgabe ablaufenden *geistigen Akte* können auch *automatisiert* ablaufen, also "rasch und ohne bewusste Steuerung" (GERSTER 1994, S. 38). Weiters ist im Sinne dieser Definition *nicht* gefordert, dass die Aufgabe mittels der eingesetzten Handlungen und geistigen Akte tatsächlich (richtig) *gelöst* wird. Entscheidend ist lediglich, dass diese Handlungen und Akte *zielgerichtet* mit dem *Zweck der Aufgabenbewältigung* ablaufen (vgl. ASHCRAFT 1990, S. 207, zit. n. KESTING 2005, S. 86). Sofern also ein Kind meint, die ihm gestellte Plus- oder Minusaufgabe dadurch zu *bewältigen*, dass es "irgend eine" Zahl nennt, ohne selbst einen Zusammenhang gerade dieser Zahl zur gestellten Aufgabe angeben zu können, ist auch dieses "Raten" als eine "Lösungsstrategie" zu werten. Weigert sich das Kind dagegen, die Aufgabe zu bearbeiten, etwa mit der Begründung, diese sei "zu schwer", dann ist zwar auch das eine "*Strategie" für den Umgang* mit Zumutungen seitens der Erwachsenenwelt, kann aber schwerlich als *"Lösungsstrategie" für diese Aufgabe* bezeichnet werden.
Welche Strategien Kinder im Einzelnen beim Lösen von Plus- und Minusaufgaben anwenden, ist Gegenstand einer Vielzahl pädagogischer und psychologischer Studien. Der diesbezügliche Forschungsstand wird in den folgenden Unterkapiteln im Detail dargestellt. An dieser Stelle sollen lediglich die für die Erläuterung der Problemlage unverzichtbaren *Hauptkategorien* kindlicher Lösungsstrategien und einige weitere, damit eng zusammenhängende Begriffe in ihren wesentlichen Bestimmungen hinreichend geklärt werden.

"Additive Grundaufgaben"

Das Hauptinteresse der vorliegenden Arbeit gilt Additionen zweier einstelliger Summanden (von 0+0 bis 9+9) und deren Umkehraufgaben, also Subtraktionen mit ein- oder zweistelligem Minuenden, einstelligem Subtrahenden und einstelliger Differenz (von 18–9 bis 0–0). Diese werden im Folgenden, einschlägiger Literatur folgend, als "additive Grundaufgaben" bezeichnet. Sie decken sich weitgehend mit den Aufgaben des "kleinen Einspluseins und Einsminuseins", wobei allerdings das kleine Einspluseins im traditionellen Verständnis auch die Aufgaben mit 10 als Summanden umfasst (RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING 1996, S. 83).

In der englischsprachigen Literatur werden in diesem Zusammenhang unter anderem die Begriffe "basic number combinations" (vgl. BAROODY 2006) bzw. "(basic) arithmetic facts" (vgl. ASHCRAFT 1995) verwendet. Diese umfassen allerdings (wie die Übersetzung "basale arithmetische Fakten", vgl. GRUBE 2006, S. 1) neben den additiven auch die multiplikativen Grundaufgaben, also das "kleine Einmaleins" und dessen Umkehrung in der Division. Zur Abgrenzung dienen in der englischsprachigen Literatur dann selbsterklärende Begriffe wie etwa "single-digit addition" (vgl. BAROODY, 1987).

"Faktenabruf", "Auswendigwissen", "Automatisierung"

"Faktenabruf" bezeichnet das Lösen einer additiven Grundaufgabe durch direkten Abruf der Lösung aus dem Gedächtnis (vgl. GERSTER 1994, S. 38; GRUBE 2006, S. 3 spricht von "Wissensabruf"). Englischsprachige Autoren verwenden dafür die Begriffe "recall" (etwa CARPENTER & MOSER 1984, S. 181) oder auch (fact) "retrieval" (etwa SIEGLER & JENKINS 1989, S. 12). Voraussetzung eines Faktenabrufes ist das "Auswendigwissen" (RADATZ u.a. 1996, S. 83) der entsprechenden Grundaufgabe, welche als als "(Zahlen)-Fakt" oder auch "Zahlensatz" im Langzeitgedächtnis gespeichert ist. Solches Auswendigwissen ist das Ergebnis eines Prozesses, der als "Auswendiglernen" oder auch "Automatisieren" bezeichnet wird (GERSTER 1994, S. 37-39; zum Beleg der synonymen Verwendung der Begriffe "Automatisieren" und "Auswendiglernen" bzw. der davon abgeleiteten Begriffe "Automatisierung" und "Auswendigwissen" in der deutschsprachigen fachdidaktischen Literatur vgl. etwa WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 7 und S. 13f; GERSTER 1994, S. 46).

"Ableitung", "Ableitungsstrategie", "operative" bzw. "heuristische Strategie"

Eine Addition bzw. Subtraktion kann auch dadurch gelöst werden, dass sie in ihrem bestimmten quantitativen Zusammenhang zu einer anderen, bereits automatisierten Addition bzw. Subtraktion gedacht wird. Dieser "operative Zusammenhang" mit der bereits automatisierten Aufgabe vermittelt die Lösung der noch nicht automatisierten. Dafür kommt eine Reihe von quantitativen Zusammenhängen in Frage, etwa der zwischen einer Aufgabe und ihrer "Nachbaraufgabe" ($a+b=c \rightarrow a+[b+1]=c+1$), einer Aufgabe und ihrer "Umkehraufgabe" ($a+b=c \rightarrow c–b=a$ bzw. $a+b=c \rightarrow c–a=b$), oder auch das sogenannte "gegensinnige Verändern" ($a+b=c \rightarrow [a–1]+[b+1]=c$). Strategien, die solche operativen Zusammenhänge nutzen, werden in der vorliegenden Arbeit vorwiegend als "Ableitungen" bzw. "Ableitungsstrategien" bezeichnet (vgl. GERSTER 1994, S. 46). Andere dafür gebräuchliche Begriffe sind "operative Strategien" (vgl. etwa RADATZ u. a. 1996, S. 82f) oder auch "heuristische Strategien" (vgl. etwa PADBERG 2005, S. 88-93).

Englischsprachige AutorInnen behandeln solche Strategien unter verschiedensten Bezeichnungen, etwa "derived facts" (z. B. CARPENTER & MOSER 1984, S. 181), "deductive strategies" (z. B. GRAY 1991, S. 551), "cognitive strategies" (z. B. CHRISTENSEN & COOPER 1992), "mental calculation strategies" (z. B. MURPHY 2004) oder auch "decomposition" (z. B. SIEGLER & JENKINS, S. 24).

"Fakten nutzende Strategien"

Unter dem Begriff "Fakten nutzende Strategien" werden in vorliegender Arbeit die Strategien "Faktenabruf" und "Ableitung" zusammengefasst.

"Zählstrategie", "zählende (Lösungs-)Strategie", "zählendes Rechnen"

Die Begriffe "Zählstrategie" oder auch "zählende (Lösungs-)Strategie" werden in dieser Arbeit als Oberbegriffe für alle jene Lösungsstrategien verwendet, die das Aufsagen von Teilen der Reihe der natürlichen Zahlen (oder auch ein nur gedankliches, aber nicht ausgesprochenes, sondern "subvokales Durchschreiten" von Teilen dieser Reihe) beinhalten. Die Zahlwortreihe kann dabei vorwärts (bei Additionen, aber auch bei Subtraktionen, die als Ergänzung gelöst werden) oder rückwärts (bei Subtraktionen) zum Einsatz kommen. In deutschsprachigen Publikationen werden diese Strategien oft auch als "zählendes Rechnen" zusammengefasst (vgl. etwa GERSTER 1994, S. 42-45; PADBERG 2005, S. 34; HASEMANN 2003, S. 98-99; LORENZ & RADATZ 1993, S. 116; SCHIPPER 2003, S. 109f). In der englischsprachigen Literatur ist dafür die Bezeichnung "counting strategies" gebräuchlich (vgl. etwa BAROODY, 2006, S. 22).

"Alleszählen", "Weiterzählen", "Rückwärtszählen", "Zählendes Ergänzen"

Die von Kindern beim Addieren und Subtrahieren angewandten Zählstrategien sind im Detail überaus vielfältig. In grober Unterscheidung können die meisten dieser Strategien entweder als Varianten des "Alleszählens" oder des "Weiterzählens" (bzw. analoger Subtraktionsstrategien) klassifiziert werden.

"Alleszählen" oder "Alleszählstrategien" (in der englischsprachigen Literatur "count all", etwa bei SIEGLER 1987, oder "counting all", etwa bei CARPENTER & MOSER 1984) sind im engeren Wortsinn all jene Zählstrategien, bei denen *alle* drei Zahlen (a, b, c) eines Additions- bzw. Subtraktionsterms ($a + b = c$, $a – b = c$) *jeweils für sich zählend* dargestellt bzw. ermittelt werden (Näheres dazu in Kapitel 2.10.1). Dabei kommt in der Regel Zählmaterial (Finger oder Würfel und dergleichen) zum Einsatz, mit welchem die Addition als ein Dazugeben oder Zusammenfassen bzw. die Subtraktion als ein Wegnehmen ("take away" bei BAROODY u.a. 2003, "separating from" bei CARPENTER & MOSER 1984) oder auch als Ergänzen ("matching" bei CARPENTER & MOSER 1984) konkret dargestellt ("modelliert") wird. CARPENTER und MOSER (1984, S. 181) erheben das "counting all" deshalb *neben* den "counting strategies" in den Rang einer eigenen Kategorie namens "direct modeling strategy". Tatsächlich wird aber Alleszählen von manchen Kindern auch ohne „direktes Modellieren“ durchgeführt.

Bei Verwendung der Finger bzw. in Abhängigkeit von der Größe der Zahlen kann die Darstellung bzw. Ermittlung einzelner Zahlen beim direkten Modellieren auch ohne Zählen, nämlich durch Simultanerfassung bzw. durch Erkennen eines Fingermusters erfolgen. Ob und inwiefern es dann dennoch berechtigt sein kann, von einer *Alles*zählstrategie zu sprechen, wird in Kapitel 2.10.1 erörtert.

Bei der Additionsstrategie des "Weiterzählens" wird in der Regel das dem einen Summanden entsprechende Zahlwort ausgesprochen oder gedacht und, beginnend mit dem in der Zahlwortreihe unmittelbar folgenden Zahlwort, um die dem anderen Summanden entsprechende Anzahl von Zahlwörtern weitergegangen; das dabei zuletzt erreichte Zahlwort wird als Lösung genannt ("counting on" in der englischsprachigen Literatur, vgl. etwa CARPENTER & MOSER 1984, S. 181). Zu Varianten des weiterzählenden Rechnens siehe Kapitel 2.10.2.

Analog dazu kann das Ergebnis einer Subtraktion durch "Rückwärtszählen" ("counting down from" bei CARPENTER & MOSER 1984, S. 182) oder auch durch "zählendes Ergänzen" ("counting up from" bei CARPENTER & MOSER 1984, S. 182) ermittelt werden. Beim Rückwärtszählen wird in der Regel das dem Minuenden entsprechende Zahlwort ausgesprochen oder gedacht und, beginnend mit dem in der Zahlwortreihe unmittelbar voranstehenden Zahlwort, um die dem Subtrahenden entsprechende Anzahl von Zahlwörtern zurückgegangen; das zuletzt erreichte Zahlwort wird als Lösung genannt. Beim zählenden Ergänzen wird in der Regel das dem Subtrahenden entsprechende Zahlwort ausgesprochen oder gedacht und, beginnend mit dem in der Zahlwortreihe unmittelbar folgenden Zahlwort, bis zum Zahlwort des Minuenden weitergezählt. Als Ergebnis wird die Anzahl der dafür benötigten Zählschritte genannt. Zu Varianten siehe Kapitel 2.10.2.

Das Durchschreiten der Zahlwortreihe beim Weiterzählen, Rückwärtszählen und zählenden Ergänzen erfolgt im Regelfall Wort für Wort (ohne Auslassungen). Seltener zu beobachten, aber wohl gleichfalls als Zählstrategie zu werten sind Strategien, die ein "Zählen in Zweierschritten" oder (beim Addieren bzw. Subtrahieren zweistelliger Zahlen) ein "Zählen in Zehnerschritten" usw. beinhalten.

2.2 Chronometrische Studien

2.2.1 GROEN & PARKMAN

Als "first major cognitive investigation of mental arithmetic" bezeichnet ASHCRAFT (1995, S. 6) in einem breit angelegten Forschungsüberblick die Studie von GROEN und PARKMAN (1972). Tatsächlich haben sich schon davor PsychologInnen und PädagogInnen ausführlich der Frage gewidmet, was beim Kopfrechnen passiert und wie sich dieses bei Kindern entwickelt. Und für "Rechenmethodiker" handelt es sich dabei ohnedies um *die* zentrale Fragestellung; ihre Empfehlungen fußen immer auch auf expliziten oder zumindest impliziten Theorien darüber, wie das Rechnen mit kognitiven Voraussetzungen im Allgemeinen, dem Zahl- und Operationsverständnis im Besonderen zusammenhängt (zur Geschichte der Rechendidaktik in Deutschland vgl. den Überblick bei RADATZ & SCHIPPER 1983, S. 26-47).

Für die Psychologie auf der anderen Seite ist seit ihren Anfängen als empirische Disziplin das Rechnen ein Gegenstand erhöhter Attraktivität, insbesondere als "Prototyp eines Inhaltsbereiches, in dem Verstehen eine herausragende Rolle spielt", generell aber wegen der "Vielfalt der an der Bearbeitung mathematischer Probleme beteiligten [kognitiven] Mechanismen" (STERN 1998, S. 12f). So behandelte schon THORNDIKE (1922, zit. nach ASHCRAFT 1995, S. 4) das Rechnenlernen im Rahmen seiner Lerntheorie als "Formierung und Verstärkung individueller Reiz-Reaktions-Assoziationen". Auf dieser theoretischen Grundlage suchte man dann Erklärungen etwa für den schon bald entdeckten "size effect", dass nämlich Additionen mit größeren Summanden häufiger falsch und mit längeren "Reaktionszeiten" gelöst werden als solche mit kleineren Summanden. Wenn beim Addieren nur eingelernte Reiz-Reaktions-Verknüpfungen reproduziert werden, dann ist zunächst ja tatsächlich nicht einsehbar, warum Verknüpfungen mit größeren Zahlen "schwieriger" zu lernen sein sollten als solche mit kleineren. Eine Erklärung im Einklang mit THORNDIKES Theorie fand man dann etwa in der unterschiedlichen Häufigkeit, mit der bestimmte Aufgaben (also "Reize") in Schulbüchern dargeboten werden (vgl. COWAN 2003, S. 39). Wir werden auf den "size effect" und weitere Erklärungsversuche noch zurückkommen.

Wenn also selbst innerhalb der Psychologie GROEN und PARKMAN keineswegs die ersten waren, die sich dem Lernen und Beherrschen der additiven Grundaufgaben zuwandten, stand ihre Studie doch am Beginn einer intensivierten Beschäftigung. Und auch bezüglich der Erhebungs*methode* wurde von den beiden eine Tradition begründet, die bis heute fortwirkt: GROEN und PARKMAN ermittelten auf Millisekunden genau die Antwortzeiten ("reaction times"), die Kinder (n = 37) am Ende des ersten Schuljahres für Additionen mit einstelligen Summanden benötigten (GROEN & PARKMAN 1972, S. 333). Dasselbe hatten sie in einer Vorläuferstudie schon bei einer Gruppe von Studierenden (a.a.O., S. 337-342) unternommen. Aus den erhobenen Lösungs*zeiten* versuchten sie nun, Rückschlüsse auf die jeweils angewandten Lösungs*strategien* zu ziehen.

Sie kamen dabei zu dem Schluss, dass die Lösungszeiten der ErstklässlerInnen am besten erklärt würden durch das so genannte "min model". "min" steht dabei für "minimum addend": Das Modell besagt, dass die Kinder bei einer Addition zunächst den größeren der beiden Summanden identifizierten und dann *um den kleineren Summanden* (deshalb "min") weiterzählten. Für den als ersten Schritt postulierten Vergleich der Summanden veranschlagten sie in ihrer Regressionsgleichung eine konstante Zeitspanne. Dazu komme eine variable Zeitspanne, die proportional zur Größe des kleineren Summanden wachse, gedeutet als Folge eines Weiterzählens, das eben umso länger dauere, je mehr Zählschritte nötig seien (a.a.O., S. 332-334). Das erkläre auch den "size effect": Mit der Anzahl der zu tätigenden Zählschritte steige sowohl die Bearbeitungsdauer als auch die Fehleranfälligkeit.

GROEN und PARKMAN bemerkten selbst, dass ihr Modell offenkundig für Verdoppelungsaufgaben ("ties") nicht passte. Hier stellten sie auch bei ErstklässlerInnen deutlich (nach unten) abweichende Lösungszeiten fest und nahmen daher an, dass diese Aufgaben schon Ende des ersten Schuljahres durch Faktenabruf gelöst würden (a.a.O., S. 335). Noch stärker im Widerspruch zur Annahme, dass zählend gerechnet würde, waren freilich die bei Studierenden erhobenen Lösungszeiten. GROEN und PARKMAN postulierten deshalb, dass Erwachsene im Gegensatz zu Kindern Additionen generell durch Faktenabruf und nur gelegentlich durch Zählstrategien lösten (a.a.O., S. 339-342).

2.2.2 Beiträge von ASHCRAFT und seinen Forschungsteams

Auch ASHCRAFT beschäftigte sich, allein und in Kooperation mit verschiedenen Kollegen, zunächst mit den Lösungsstrategien Erwachsener, um sich in weiterer Folge auch Fragen der Entwicklung bei Kindern zuzuwenden. ASHCRAFT und BATTAGLIA (1978) verwendeten dafür "Verifikationsaufgaben": Den erwachsenen ProbandInnen wurden richtige und falsche Additionsgleichungen (z. B. 5+7=12, 4+8=11) zur Beurteilung des Wahrheitsgehaltes vorgelegt, die Reaktionszeiten in Millisekunden gemessen. Dabei zeigte sich (wie in der Studie von GROEN und PARKMAN) ein Anstieg der Reaktionszeiten in Abhängigkeit von der Größe der Summanden, allerdings nicht in Form einer (als Ausdruck des Zählens deutbaren) linearen, sondern einer exponentiellen Funktion. ASHCRAFT und STAZYK (1981) schlossen daraus, dass der "problem size effect" bei Erwachsenen nicht durch die Anwendung von Zählstrategien bei einem Teil der Aufgaben entstehe, sondern (bei unterstelltem generellen Faktenabruf) durch *unterschiedliche assoziative Stärken*, mit denen die einzelnen Grundaufgaben im Langzeitgedächtnis gespeichert seien. Die Stärke der Assoziation nehme also exponentiell mit der Größe der Summanden ab. Als "Teilerklärung" dieser schwächeren Verankerung größerzahliger Grundaufgaben vermuten ASHRAFT und CHRISTY (1995) deren selteneres Vorkommen als Übungsaufgaben in Schulbüchern.

ASHCRAFT und FIERMAN (1982) verglichen die bei Erwachsenen gewonnenen Regressionsgleichungen mit den Reaktionszeiten, die Dritt-, Viert- und SechstklässlerInnen bei Verifikationsaufgaben zeigten. Aus den Abweichungen bzw. Übereinstimmungen schlossen sie, dass DrittklässlerInnen einen Mix aus Faktenabruf und Zählstrategien anwenden, SechstklässlerInnen hingegen die Grundaufgaben wie Erwachsene aus dem Gedächtnis abrufen würden.

2.2.3 Einwände gegen chronometrische Studien

Über ASHCRAFTs Modell eines "Gedächtnis-Netzwerks" der additiven Grundaufgaben, welches ab der dritten bis vierten Schulstufe das zählende Rechnen ablöse, entbrannte in den frühen 1980er Jahren eine "armchair debate" (ASHCRAFT 1985, S. 104) zwischen ASHCRAFT und BAROODY. BAROODYS Position wird uns noch im Detail beschäftigen; ASHCRAFT nutzte die Debatte für einige Klarstellungen, darunter die wesentliche, dass sein Model in keiner Weise "prescriptive", sondern "purely descriptive" sei: Die Aussage, dass die additiven Basisfakten *letztlich* als "memory network" gespeichert und beim Rechnen aus diesem abgerufen würden, impliziere nicht, dass er Drill zum Auswendiglernen der Grundaufgaben befürworte (ASHCRAFT 1985, S. 101f). Zugleich bekennt ASHCRAFT sich explizit dazu, in seinem Entwicklungsmodell individuelle Unterschiede zu vernachlässigen: "Most models of interest in psychology deal with general tendencies rather than individual differences" (a.a.O., S. 103).

Dass aber gerade diese individuellen Unterschiede den Wert *ausschließlich* chronometrischer Studien für die Gewinnung von Erkenntnissen über Lösungsstrategien grundsätzlich in Frage stellen, konnte SIEGLER zeigen. Er ließ 22 Kindergartenkinder, 28 Erst- und 18 ZweitklässlerInnen verschiedene Additionen bearbeiten und ermittelte einerseits die Reaktionszeiten. Andererseits wurden die Kinder bei jeder einzelnen Aufgabe beobachtet und nachträglich zu ihrer Lösungsstrategie befragt (SIEGLER 1987, S. 255).

Die Mittelwerte der Reaktionszeiten ließen sich bei dieser Studie mit dem "min model" von GROEN und PARKMAN bestens vereinbaren; diesem zufolge hätten also *alle* Kinder *alle* Aufgaben durch Weiterzählen vom größeren Summanden aus gelöst. Beobachtung und Befragung ergaben allerdings ein gänzlich anderes Bild. Demnach lösten die Kinder

– einen Anteil der Aufgaben durch Faktenabruf (dieser Anteil war im Kindergarten gering, in der ersten und zweiten Schulstufe zunehmend größer);
– viele Aufgaben dem Modell entsprechend tatsächlich durch Weiterzählen vom größeren Summanden aus;
– einige Aufgaben (wieder ansteigend mit dem Alter) durch Ableitungsstrategien;
– andere Aufgaben (im Kindergarten recht viele, später nur wenige) durch bloßes Raten
– wieder andere durch Alleszählen (wieder abnehmend mit dem Alter).

Die meisten Kinder berichteten, sie hätten *wenigstens drei* verschiedene Strategien verwendet. Wie verhielten sich nun diese Berichte zu den Lösungszeiten? Durchaus konsistent: Bei jenen Aufgaben, für die die Kinder selbst angaben, weitergezählt zu haben, konnten die Reaktionszeiten tatsächlich durch das "min model" hinreichend erklärt werden. Wenn aber die Kinder selbst als Strategie Faktenabruf angaben, versagte das "min model", ebenso dort, wo sie Ableitungsstrategien oder Alleszählen zu Protokoll gaben. Die Lösungszeiten unterstützten also die Aussagen der Kinder; umgekehrt widerlegten diese Aussagen in Kombination mit den beobachteten (Zähl-)Handlungen die Annahme, dass von allen Kindern durchwegs *eine* Lösungsstrategie (das Weiterzählen) angewandt worden sei (SIEGLER 1987, S. 255f).

Damit wird aber auch die Aussagekraft der Entwicklungsstudie von ASHCRAFT und FIERMAN (1982) fragwürdig. Wenn diese nämlich befinden, "third grade is a transitional age with respect to memory structure for addition", und dies durch den Befund ihrer Studie (an gerade einmal zehn DrittklässlerInnen) stützen, wonach "half of these children seemed to be counting, and half retrieving from memory" (a.a.O., S. 216), dann offenbart das eben jene von SIEGLER aufgezeigte "peril of averaging data" überdeutlich: Hätte wirklich die eine Hälfte der Kinder *ausschließlich* zählend gerechnet, dann wäre *zumindest für diese Kinder* ja die dritte Klasse *gerade keine* "Übergangsstufe" zum nicht-zählenden Rechnen gewesen. Umgekehrt soll ASHCRAFT und FIERMAN zufolge die andere Hälfte der Kinder diesen Übergang in der dritten Schulstufe längst gemacht haben. Was aber weder für die einen, noch für die anderen zutrifft, ist nicht deshalb "im Durchschnitt" für alle wahr. Solches "data averaging" ist *nicht* aussagekräftig für die Entwicklung *irgendeines* Kindes und daher auch nicht für die Entwicklungstendenzen von Teilgruppen der Kinder eines Jahrgangs.

2.2.4 Chronometrie in neuem Gewand

Trotz solcher prinzipieller Einwände wurde das chronometrische Design in jüngerer Zeit von GRUBE (2006) wieder aufgegriffen und mit einem aus Forschungsarbeiten zum "Arbeitsgedächtnis" ("working memory", vgl. BADDELEY 1990, S. 67-96) übernommenen experimentellen Ansatz kombiniert. Das Modell des "Arbeitsgedächtnisses" unterscheidet drei Komponenten, die am vorübergehenden Bewussthalten und Verarbeiten von Informationen beteiligt seien: die "zentrale Exekutive" als steuernde Instanz sowie den "visuell räumlichen Skizzenblock" und die "phonologische Schleife" als deren Stützsysteme. Ersterer diene zum befristeten Aufrechterhalten von visuell Wahrgenommenem, letztere zum vorübergehenden Merken von Gehörtem oder auch nur "innerlich" (im Zuge eines "rehearsal") Gesprochenem.

Das von GRUBE gewählte experimentelle Design der "artikulatorischen Unterdrückung" baut darauf auf, dass bei Anwendung von Zählstrategien die phonologische Schleife in erhöhtem Maße gefordert sei. Dasselbe Subsystem des Arbeitsgedächtnisses werde aber auch dann beansprucht, wenn ein Kind ein beliebiges Wort wiederholt aufsagen muss. Da aber eine begrenzte Kapazität der phonologischen Schleife angenommen wird, sei bei zählenden Rechnern eine Beeinträchtigung der Rechenleistung zu erwarten, wenn diese während des Rechnens als Parallelaufgabe "fortwährend den Buchstaben D ("de de de …") mit Taktvorgabe von 130 Schlägen pro Minute artikulieren" müssen (GRUBE 2006, S. 72).

Tatsächlich zeigte sich nun bei ErstklässlerInnen unter der Bedingung der artikulatorischen Unterdrückung eine deutliche Verlängerung der Bearbeitungszeiten für Verifikationsaufgaben, nicht aber bei Zweit-, Dritt- und ViertklässlerInnen (untersucht wurden zwischen 16 und 22 Kindern je Klassenstufe, jeweils gegen Ende des Schuljahres). Die längeren Bearbeitungszeiten der ErstklässlerInnen wiederum traten vor allem bei Aufgaben mit Zehnerübergang auf, nicht so sehr bei Aufgaben im Zahlenraum bis zehn.

GRUBE schließt daraus, dass "schon Erstklässler am Ende des Schuljahres zur Lösung von Gleichungen ohne Zehnerübergang mehrheitlich keine verbalen Zählprozeduren mehr nutzen" (a.a.O., S. 89f). Dass er damit einen weit früheren Übergang zu mehrheitlich nicht-zählendem Rechnen postuliert als etwa ASHCRAFT und FIERMAN (1982), führt ihn zur weitergehenden Annahme, dass Kinder zwar bereits Ende des ersten Schuljahres "über Ressourcen [verfügen], die sie von der Nutzung von Zählstrategien unabhängig machen". Sie würden diese Ressourcen aber nur dann auch wirklich nutzen, wenn man sie (etwa durch Aufforderung zum parallelen Dauer-Artikulieren einer Silbe) bei der ihnen vertrauteren und daher unter *normalen* Bedingungen von ihnen bevorzugten Zählstrategie behindere (GRUBE 2005, S. 114f).

GRUBE selbst bescheinigt seiner Studie unter Hinweis auf "geringe Teststärke, […] große Fehlervarianz und geringe Stichprobengröße" nur begrenzte Aussagekraft (GRUBE 2006, S. 90). Das eigentlich Fragwürdige scheint aber doch schon das Erhebungsdesign der "artikulatorischen Unterdrückung" selbst zu sein: Dass jüngere Kinder durch diese *gezielte Ablenkung* beim Bearbeiten von Verifikationsaufgaben stärker beeinträchtigt werden als ältere, lässt sich wohl ebenso gut interpretieren als Ausdruck einer in diesem Alter *insgesamt größeren Ablenkbarkeit*. Dass das parallele Artikulieren ausschließlich die "phonologische Schleife" und nicht auch (um innerhalb des Arbeitsgedächtnismodells zu argumentieren) die "zentrale Exekutive" in Anspruch nimmt, scheint zudem wenig plausibel. GRUBE selbst merkt zudem an, dass die Altersunterschiede sich etwa auch "aus einer zunehmenden Leistungsfähigkeit des Arbeitsgedächtnisses", einer "zunehmenden Verarbeitungsgeschwindigkeit" oder auch "zunehmenden Übung" erklären ließen (a.a.O., S. 89).

Wenn also ältere Kinder von der "Artikulationsbedingung" weniger beeinträchtigt werden als jüngere, dann lässt dies nicht zwingend den Rückschluss auf eine andere Lösungs*strategie* zu. Möglicherweise sind sie in ihren Lösungsstrategien (*welche dies auch sein mögen*) einfach nur routinierter, weniger leicht ablenkbar. Insgesamt ist es aus pädagogisch-didaktischer Perspektive doch etwas befremdlich, Aussagen über das Rechnen und das rechnerische Denken von Kindern ausgerechnet dadurch gewinnen zu wollen, dass man es unter Bedingungen untersucht, unter denen es außerhalb des Labors nie stattfindet.

Unabhängig von dieser Kritik an der Erhebungsmethode: GRUBE fällt auch in der Interpretation seiner Befunde hinter die erwähnte Studie von SIEGLER (1987) und andere, im Folgenden noch zu besprechende Arbeiten zurück, die (bei allen Unterschieden) zumindest zweierlei sehr einheitlich zeigen: Erstens besteht die Entwicklung kindlicher Lösungsstrategien nicht einfach in der Ablösung der einen Strategie durch eine andere. Zweitens und vor allem erreichen die dabei zu Tage tretenden individuellen Unterschiede eine Dimension, die pauschale Aussagen über *die* Lösungsstrategie *der* ErstklässlerInnen, *der* ZweitklässlerInnen usw. von äußerst geringem theoretischen Erkenntniswert und (mit Blick auf die Unterrichtsgestaltung) ebenso fraglichem praktischen Nutzen erscheinen lassen.

2.3 Entwicklung in Form "überlappender Wellen"

Der bereits als Kritiker ausschließlich chronometrischer Studien erwähnte US-amerikanische Kognitionspsychologe SIEGLER hat seit den frühen 1980er Jahren (allein und mit verschiedenen Kollegen) eine Reihe von Studien, Büchern und Buchbeiträgen zur Entwicklung kindlicher Rechenstrategien veröffentlicht (u.a. SIEGLER & SHRAGER 1984; SIEGLER 1987, 1988; SIEGLER & JENKINS 1989; GEARY, BOW-THOMAS, LIU & SIEGLER 1996; SHRAGER & SIEGLER 1998), auf die sich wiederum eine Reihe von Folgestudien in wesentlichen theoretischen Annahmen stützen (etwa GEARY & BROWN 1991; GEARY, BROWN & SAMARANAYAKE 1991; GOLDMAN, MERZ & PELLEGRINO 1989). Zentrale Annahmen SIEGLERS sind, wenn auch nicht immer als solche kenntlich gemacht, auch in aktuellen neuropsychologischen Beiträgen wieder zu finden (vgl. etwa VON ASTER 2005, S. 26f). SIEGLERS Beitrag zu diesem Forschungsgebiet verdient also eine ausführliche Beschäftigung.

Der Autor hat das von ihm und seinen KollegInnen begründete und im Laufe der Jahre immer wieder modifizierte Modell der Strategieentwickung in SIEGLER 2001 (deutsche Übersetzung des 1998 erschienenen Originals) selbst zusammenfassend dargestellt. Es soll, vor allem auf Grundlage dieser jüngsten Gesamtdarstellung, zunächst im Detail erläutert werden. In der anschließenden Kritik wird unter anderem auch auf die Einwände eingegangen werden, die BAROODY und TIILIKAINEN an SIEGLERS Modell(en) formuliert haben (BAROODY & TIILIKAINEN 2003).

2.3.1 Der "overlapping waves approach" von SIEGLER und Kollegen und ihre Modelle der Strategieentscheidung

SIEGLER ordnet die Entwicklung des kindlichen Rechnens ein in sein übergeordnetes "Modell kognitiver Entwicklung", das er selbst als "overlapping waves approach" (etwa "Ansatz der überlappenden Wellen") bezeichnet:

> *"Die grundlegenden Annahmen dieses Ansatzes sind, dass Kinder jeder Zeit über eine Vielzahl von Denkweisen über die meisten Themen verfügen, dass diese unterschiedlichen Arten zu denken miteinander konkurrieren und dass die differenzierteren Denkweisen nach und nach immer dominanter werden"* (SIEGLER 2001, S. 122).

SIEGLER stützt sich dabei wesentlich auf Beobachtungen, die er und seine Kollegen in einer Reihe von "mikrogenetischen Studien" (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 9-11) mit Kindern im Vorschul- und frühen Schulalter gewonnen haben: Kleine und kleinste Stichproben von Kindern (bei SIEGLER & JENKINS 1989 etwa acht Kindergartenkinder) wurden innerhalb eines längeren Zeitraumes wiederholt mit gleichartigen Aufgaben konfrontiert. Die von den Kindern dabei jeweils angewandten Strategien wurden durch Beobachtung und Befragung erhoben und in ihrer Entwicklung analysiert. Ziel dabei war, die geistigen "Repräsentationen und Prozesse" zu erschließen, die den "qualitativen und quantitativen Aspekten ihres Lernens" zugrunde liegen (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 9).

Im Bereich der additiven Grundaufgaben zeigte sich in solchen Studien wiederholt, dass schon Kindergartenkinder über eine Vielzahl von Lösungsstrategien verfügen. SIEGLER und ROBINSON (1982, S. 236) unterschieden folgende vier Kategorien:

– "counting-fingers strategy": beide Summanden (welche in dieser Studie die Zahl 5 nicht überstiegen) werden mit Fingern dargestellt, die Gesamtanzahl wird durch Auszählen aller ausgestreckten Finger ermittelt;
– "fingers strategy": die Summanden werden mit den Fingern dargestellt, die Gesamtanzahl wird ohne Auszählen der Finger genannt;
– "counting strategy": die Summe wird durch Zählen ermittelt, aber ohne "obvious external referent";
– "retrieval strategy": das bereits auswendig gewusste Ergebnis der Addition wird aus dem Gedächtnis abgerufen.

In späteren Studien wurden zum Teil andere Kategorisierungen verwendet. So unterschied SIEGLER (1987) zwar nicht mehr zwischen "counting-fingers" und "counting", dafür aber innerhalb der Zählstrategien zwischen "count all" (vgl. Kap. 2.1) und der "min"-Strategie, die in der Besprechung der Studien von GROEN & PARKMAN (1972) bereits erläutert wurde. Zusätzlich klassifiziert SIEGLER (1987) Kinderantworten als "guess", wenn das Kind selbst zu Protokoll gibt, es hätte die Antwortzahl "bloß geraten"; und er bringt als neue Kategorie "decomposition" ins Spiel, die dem entspricht, was in Kapitel 2.1 als "Ableitung" definiert wurde.

Generell ließen sich, so das "Modell überlappender Wellen", *frühere* von *späteren* Strategien und damit Phasen einer altersabhängigen Entwicklung unterscheiden:

– Die objektiv betrachtet aufwändigste Zählstrategie des "count all" sei mit größerer Häufigkeit bei jüngeren Kindern als bei älteren zu beobachten.

– In einer späteren Phase überwiege das – objektiv betrachtet – effizientere Weiterzählen ("min").
– "Retrieval" gebe es bei einzelnen Aufgaben schon früh, in späteren Jahren werde es mehr und mehr zur dominierenden Strategie.

In der Regel aber wende ein und dasselbe Kind *in jeder Phase* seiner Rechenentwicklung *mehrere Strategien parallel* an, zum Teil in Abhängigkeit von der jeweils gefragten Aufgabe, zum Teil aber auch bei ein und derselben Rechnung, die an einem Tag mit der einen, am nächsten Tag mit einer anderen Strategie gelöst werde. Die Entwicklung verlaufe also nicht in einer linearen Abfolge von Phasen mit jeweils durchgehender Verwendung *einer* Strategie, sondern in der Veränderung im beobachtbaren "mix of existing strategies" (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 27).

Wodurch kommt es nun zur Aufnahme *neuer* Strategien in diesen "Mix"? SIEGLER und Kollegen sehen hier einerseits die *Möglichkeit direkter Vermittlung*: "Manchmal werden Kindern neue Strategien beigebracht oder durch eine Person, die sie anwendet, nahegelegt" (SIEGLER 2001, S. 125f). So sei insbesondere die Strategie "count all [...] explicitly taught to young children by their parents" (SHRAGER & SIEGLER 1998, S. 409). Auf welche Weise und auf Grundlage welcher bereits zuvor erworbenen Konzepte von Zahlen und Rechenoperationen dieses "explizite Lehren" von den Kindern gedanklich verarbeitet wird, wird nicht näher dargestellt. Größere Aufmerksamkeit widmen Siegler und Kollegen der Weiterentwicklung vom "count all" zum "count on": Diese sei Folge einer "Strategieentdeckung", die Kinder früher oder später *selbstständig* machten, wenn sie nur über einen längeren Zeitraum hinweg immer wieder mit Additionsaufgaben konfrontiert würden. SIEGLER und JENKINS fassen ihre Beobachtungen zur Rolle von Einsicht und Verständnis bei diesen "Entdeckungen" wie folgt zusammen:

> *"The degree to which the discovery processes reflected understanding and insight fell along a continuum. [...] The most insightful explanations reflected understanding not only that a new strategy had been used but why the new strategy was a good idea. [...] At the other extreme, some children insisted that they had retrieved the answer, and gave no evidence that they recognized that they had counted from the larger addend"* (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 66).

Einsicht wird damit also zumindest nicht als einziger Motor der Entdeckung neuer Strategien gefasst; generell laufe es eher umgekehrt:

> *"Discovery of a strategy often is only the first step toward understanding it. [...] Understanding often comes only with use. Only as people employ new concepts and strategies, and observe their consequences in the world, do they achieve a deep understanding of the strategies' advantages, disadvantages, and conditions of applicabilty"* (a.a.O., S. 112).

SIEGLER und JENKINS stützen sich bei dieser Einschätzung einerseits auf die Verbalprotokolle jener Kinder, die in Abweichung von ihrer bisherigen Strategie plötzlich bei einer Aufgabe weiterzählend rechneten, aber nicht beschreiben (geschweige denn erklären) konnten, was sie da taten. Hinzu kam die gehäufte Beobachtung, dass Kinder nach erstmaliger Anwendung einer neuen Strategie diese in der Regel nur sehr zögerlich auf weitere Aufgaben anwandten. Das galt auch für jene Kinder, die bei Befragung durchaus klare Einsicht in die neue Strategie dokumentierten; der zeitliche Abstand zwischen "strategy discovery" und "strategy generalization" war bei diesen Kindern aber deutlich geringer als bei ihren nicht verbalisierungsfähigen AlterskollegInnen.

Wenn aber die Entwicklung einer neuen Strategie (Prozedur) zumindest nicht immer und nicht eindeutig als Ausdruck eines weiterentwickelten Verständnisses (Konzeptes) gesehen werden kann, wie ist sie dann erklärbar? Im Grunde, so SIEGLER und JENKINS, gar nicht – und dass gelte für geistige Entdeckungen generell:

> *"Both noble scientific discoveries and mundane everyday discoveries seem to be based on opportunistic, catch-as-catch-can cognitive processes that take a variety of forms and occur in a variety of situations"* (a.a.O., S. 107).

In ihren inter-individuellen Unterschieden ebenso wie in den Entscheidungen, die ein einzelnes Kind für oder gegen eine bestimmte Strategie bei einer bestimmten Aufgabe zu einem bestimmten Zeitpunkt treffe, komme die "Anpassungsfähigkeit" der kindlichen Strategiewahl zum Ausdruck: Kinder würden generell gerade jene Strategie ergreifen, die für sie selbst zum gegebenen Zeitpunkt bei genau dieser Aufgabe "im Vergleich zu alternativen Methoden besonders gut funktioniert" (SIEGLER 2001, S. 123). So würden sie die Weiterzählstrategie zunächst "am häufigsten bei Aufgaben wie 2+9" anwenden, also bei Aufgaben,

> *"bei denen der kleinere Summand sehr klein ist und der Unterschied zwischen den Summanden groß. Bei solchen Aufgaben ist Weiterzählen sowohl einfach als auch effektiv im Vergleich zu alternativen Verfahren wie von eins beginnend zu zählen"* (a.a.O., S. 123).

Ähnlich "adaptiv" würden sie Gedächtnisabruf zunächst "vor allem bei einfachen Aufgaben, bei denen dies erfolgversprechend scheint" anwenden, "während sie bei schwierigeren Aufgaben zeitaufwendigere und mühsamere Strategien" (a.a.O., S. 123) wählten.

Die nähere Beschreibung solcher "adaptiver" Strategieentscheidungen ist Gegenstand von Modellen, die SIEGLER und Kollegen unter Einsatz von Computersimulationen entwickelt und im Laufe der Jahre immer wieder modifiziert haben: Das ursprüngliche "Distribution of associations model (DOAM)" (SIEGLER & SHRAGER 1984) wurde zunächst vom "Adaptive strategy choice model (ASCM)" (SIEGLER & SHIPLEY 1995) und zuletzt von der "Strategy choice and discovery simulation (SCADS)" (SHRAGER & SIEGLER 1998) abgelöst. Nachfolgende Darstellung beruht im Wesentlichen auf der zusammenfassenden Darstellung, die SIEGLER 2001 (S. 377-383) selbst gibt. Dieser zufolge sei der Prozess der Strategieentscheidung beim Lösen additiver Grundaufgaben folgendermaßen zu erklären:

– Das Lösen additiver Aufgaben führe im Gedächtnis des Kindes zur Bildung von Assoziationen zwischen einer Aufgabe und der (oder auch den) beim Lösen dieser Aufgabe erzielten Ergebniszahl(en). Je häufiger eine bestimmte Zahl als Ergebnis bei einer bestimmten Aufgabe ermittelt worden sei, desto größer sei die "assoziative Stärke" dieser Ergebniszahl für diese Aufgabe. Wenn ein Kind beispielsweise die Aufgabe "drei plus vier" zu einem bestimmten Zeitpunkt seiner Lernbiografie bereits zwanzigmal mit "sieben" und (aufgrund von Zählfehlern) je zehnmal mit "sechs" und mit "acht" beantwortet hat, dann resultiere dies darin, dass im Gedächtnis "drei plus vier" sowohl mit "sieben" als auch mit "sechs" und "acht" verknüpft sei. Die "assoziative Stärke" von "sieben" sei in diesem Fall aber in Bezug auf "drei plus vier" doppelt so groß sei wie die von "sechs" bzw. "acht". Je nachdem, wie viele verschiedene Ergebniszahlen mit ein und derselben Aufgabe überhaupt assoziiert und wie unterschiedlich die "assoziativen Stärken" dieser einzelnen Ergebniszahlen ausgeprägt seien, besitze diese Aufgabe eine "steile" oder "flache" Verteilungskurve: Eine "steile" Verteilungskurve ergebe sich, wenn das Kind beim Bearbeiten der Aufgabe in der Vergangenheit stets oder in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle zur selben Ergebniszahl gelangt ist. "Flach" sei die Verteilung dann, wenn mehrere Ergebniszahlen in der bisherigen Lernbiografie annähernd gleich häufig als Antwort ermittelt wurden.
– Auf Grundlage dieser bei unterschiedlichen Aufgaben unter Umständen unterschiedlich steilen oder flachen Verteilungskurven

  > *"legt das Kind ein Vertrauenskriterium fest. Dieses Vertrauenskriterium bildet die Schwelle, die von der assoziativen Stärke einer aus dem Gedächtnis abgerufenen Antwort überschritten werden muß, damit die Antwort gegeben wird"* (SIEGLER 2001, S. 381).

– Wenn das Kind nun in weiterer Folge mit einer Addition konfrontiert wird, dann, so SIEGLER, "ruft das Kind die Antwort aus dem Gedächtnis ab". Wenn *dabei* die assoziative Stärke der

  > *"Antwort, die aus dem Gedächtnis abgerufen wird, das Vertrauenskriterium erreicht, gibt das Kind die Antwort. Im umgekehrten Fall wird das Kind entweder erneut eine Antwort aus dem Gedächtnis abrufen und prüfen, ob sie das Vertrauenskriterium erreicht, oder nicht weiter im Gedächtnis nach einer Antwort suchen und stattdessen eine Backup-Strategie anwenden, um das Problem zu lösen"* (a.a.O., S. 381).

– Die individuellen Unterschiede in den Lösungsstrategien der Kinder ließen sich demnach im Wesentlichen auf zweierlei zurückführen: Einerseits gebe es Unterschiede im Vertrauenskriterium. Bei manchen Kindern müsse die "assoziative Stärke" einer im Gedächtnis gespeicherten möglichen Antwort einen vergleichsweise hohen Wert überschreiten, damit diese Kinder sich dazu entschließen könnten, diese Antwort auch zu nennen. Andere Kinder seien diesbezüglich gewissermaßen weniger "anspruchsvoll", weniger "vorsichtig". Für SIEGLER ist dies zum Teil der Ausdruck von (nicht weiter erläuterten) Unterschieden im "kognitiven Stil" der Kinder. Auf dieser Grundlage gelangt er auch zur Klassifizierung von Kindern in "good students, not-so-good students, and perfectionists" (SIEGLER 1988): Als "Perfektionisten" bezeichnet er dabei Kinder, die ebenso häufig richtige Lösungen finden wie die "guten Schüler", dabei aber "weniger Antworten aus dem Gedächtnis [geben] als die Schüler in beiden anderen Gruppen"; und dies sei nichts anderes als die Folgeerscheinung ihrer "sehr stringente[n] Vertrauenskriterien" (SIEGLER 2001, S. 384). Zum Teil habe aber das Vertrauenskriterium etwas Willkürlich-Zufälliges an sich:

> *"This variability in confidence criterion was critical in accounting for the trial-to-trial variability whereby a child would use retrieval one day on a problem and the min strategy the next day on the same problem. [...] there was no evidence for [...] intelligent selection of confidence criteria"* (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 32).

– Unabhängig vom Vertrauenskriterium gebe es Unterschiede darin, wie "steil" oder "flach" die Verteilungskurven der additiven Grundaufgaben im Gedächtnis der Kinder angelegt seien: Je steiler die Kurve, umso höher die Wahrscheinlichkeit, dass das Vertrauenskriterium überschritten wird. Ein Kind hat aber nach diesem Modell bei einer Aufgabe dann eine steile Verteilungskurve, wenn es diese Aufgabe *immer wieder* und dabei im Idealfall *immer*, zumindest aber in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle *mit derselben Ergebniszahl* (welche im Idealfall, aber nicht notwendigerweise auch die richtige Ergebniszahl ist) gelöst hat. Dies werde durch eine Studie von KERKMAN & SIEGLER (1993) bestätigt, wonach gerade jene Kinder in der zweiten Klasse am häufigsten Gedächtnisabruf praktizierten, die in der ersten Klasse beim Anwenden von Zählstrategien "am genauesten" gewesen seien (vgl. SIEGLER 2001, S. 383).
– SIEGLERs Strategieentscheidungsmodell mündet also in klaren didaktischen Empfehlungen: Die Weiterentwicklung kindlicher Lösungsstrategien von zählenden zu Abrufstrategien werde gefördert durch *häufige* Anwendung von Zählstrategien:

> *"A second influence on acquisition of distributions of associations is amount of exposure to each problem. [...] The more exposure to a problem the more opportunities the child has to associate the correct answer with it"* (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 33).

– Dabei sei es aber wichtig, dass die Kinder zählend zu richtigen Ergebnissen gelangen; und dies werde erschwert, "wenn man Kinder dazu drängt, ihre Fingern [sic!] nicht zu benutzen" (SIEGLER 2001, S. 383).

Soweit die Kernpunkte der Strategieentscheidungsmodelle von SIEGLER und Kollegen, welche im folgenden Abschnitt kritisch geprüft werden sollen.

2.3.2 Zur Kritik an SIEGLERS Beiträgen

Mit dem Bild der "overlapping waves" hat SIEGLER für die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien eine einprägsame und stimmige Metapher gefunden. Die Tatsache, dass Kinder zu ein und derselben Zeit unterschiedliche Strategien verwenden, ist aber schon in dem von SIEGLER zu Recht kritisierten Modell von GROEN und PARKMAN bereits grundsätzlich anerkannt, wenn diese neben dem von ihnen als Generalstrategie behaupteten "counting on from larger" zumindest für die Verdopplungsaufgaben als Strategie den Abruf von Fakten annahmen. Die auch für SIEGLER wesentlichen Strategien des Alleszählens, Weiterzählens, Ableitens und Faktenabrufens wurden bereits von CARPENTER und MOSER (1982, S. 14f) beschrieben, die sich dabei, wie später SIEGLER, auf Beobachtung und Befragung im Rahmen von Einzelinterviews stützten. Und dass diese Strategien bei ein und demselben Kind zum selben Erhebungszeitpunkt neben einander zu beobachten sind, die Entwicklung aber tendenziell zu einem reduzierten Einsatz von Zählstrategien und einem immer häufigeren Rückgriff auf gespeicherte "number facts" führe, ist eines der wichtigen Ergebnisse der Längsschnittstudie von CARPENTER und MOSER (1984, S.189-199; vgl. Kap. 2.3).

CARPENTER & MOSER (1984) hielten aber bezüglich der auch von ihnen beobachteten "nicht vollständigen Konsistenz" in der Strategiewahl fest: "There is no clear pattern for much of the variability" (a.a.O., S. 189f). SIEGLER dagegen beansprucht mit seinem "Strategieentscheidungsmodell" gerade, ein solches "Muster" gefunden und erklärt zu haben. Wie stichhaltig ist seine Erklärung? Dazu die folgenden Überlegungen:

SIEGLERS Modell setzt voraus, dass Kinder stets die Wahl hätten zwischen *Abruf* aus dem Gedächtnis und einer *"Backup-Strategie"*. Zumindest bei der jeweils ersten Konfrontation mit einer bestimmten Aufgabe ist diese Voraussetzung ganz offenkundig nicht gegeben. Wenn ein Kind etwa "3+4" noch nie (auf welche Weise immer) gelöst hat, wie könnte es dann die Lösung bereits im Gedächtnis gespeichert haben? BAROODY & TIILIKAINEN (2003, S. 101) wenden also zu Recht ein, dass "novices" eben *keine* Wahl hätten, weil nun einmal noch kein Wissen im Lanzeitgedächtnis abgespeichert sei. Auch die Annahme eines dem eigentlichen Rechnen vorgelagerten *rein verbalen* Auswendigmerkens eines unverstandenen "Sprüchleins" (vgl. RADATZ u.a. 1996, S. 83) hilft hier nicht weiter. Solches ist zwar bei Vorschulkindern sehr wohl zu beobachten, beschränkt sich aber erstens in der Regel auf einige wenige "Rechensätze" und kann schon deshalb nicht als generelle Grundlage einer "freien Strategiewahl" herhalten. Zweitens ist dann ja bei solcherart "gelösten" Aufgaben die Strategieentscheidung gerade deshalb wieder nicht *frei*, weil das Kind über kein Operationsverständnis und daher auch nicht über die Alternative einer "Backup-Strategie" verfügt (weshalb es sich in solchen Fällen wohl auch nur um das "Lösen einer Aufgabe" unter Anführungszeichen handelt).

Wenn überhaupt, kann das Modell also nur auf Kinder angewandt werden, die bereits einige Erfahrung im Lösen von Grundaufgaben haben. Diese Erfahrung, so SIEGLER, manifestiere sich im Gedächtnis der Kinder in Form von "Assoziationen" zwischen einer bestimmten Aufgabe und all jenen Zahlen, die im Zuge von zählenden Lösungsversuchen jemals als Ergebnis dieser Aufgabe ermittelt wurden. Nun wird die hier offenbar vorausgesetzte Theorie vom Lernen als "Knüpfen von Assoziationen" zwischen einem Reiz (Aufgabe) und einer Reaktion (Lösungszahl) in SIEGLERS Arbeiten zur Entwicklung von Rechenstrategien nicht weiter ausgeführt. In der Lernpsychologie aber wird als wesentliche Voraussetzung für das Assoziationslernen die "*enge zeitliche Paarung* (Kontiguität)" (GERSTER 1994, S. 38) zwischen Reiz und Reaktion genannt. Das Anwenden einer Zählstrategie verhindert aber gerade, dass es zu einer solchen Kontiguität kommt. GRAY führt dazu aus:

> *"Because count-on is a process completed over time, the links between the problem, the process and the product of the process are less tenuous for the below average child. The focus of attention for the below average child is the process which concentrates action by the child. The product, frequently arrived at with a sense of relief, is marginalised so that longer term benefits are limited"* (GRAY 1991, S. 571f).

Mindestens zweierlei spricht also, GRAYS Überlegungen folgend, ganz entschieden gegen die bei SIEGLER zentrale Annahme eines *quasi selbsttätigen* assoziativen Abspeicherns jedes einzelnen Zählergebnisses:

– Zum einen lässt das zählende Lösen einer Aufgabe (in Abhängigkeit von der Anzahl der Zählschritte und der Geschwindigkeit und Sicherheit des Zählens) in vielen Fällen *keine enge zeitliche Paarung* zwischen Aufgabe und Ergebnis zustande kommen. Eine solche könnte zwar selbst nach zeitaufwändigen Zählakten dann eintreten, würde ein Kind nach Lösung der Aufgabe sich noch einmal, gleichsam rekapitulierend, dem Gesamtkomplex "Aufgabe – Ergebnis" zuwenden. Das ist aber zumindest bei jenen Kindern nicht zu erwarten, die (wie von GRAY treffend beobachtet) das Finden der Lösung nach dem konzentrationsaufwändigen Zählprozess als "Erleichterung" und die Aufgabe damit als "endlich" abgeschlossen empfinden:

  > *"After using counting to obtain solutions [...] many of the below average children gave the solutions with relief. More importantly however, many of the younger children within this group could not remember the problem that had triggered their procedure. [...] It appears that the younger below average child does not receive any feedback from the counting procedure; the process is not being encapsulated into a known concept"* (GRAY 1991, S. 569).

– Zum anderen spricht GRAY damit ein zweites wesentliches Moment an: Die *Aufmerksamkeit* ist jedenfalls im Zählakt selbst nicht auf die *Beziehung* zwischen Aufgabe und Ergebniszahl gerichtet, sie gilt vielmehr völlig dem *Prozess des Zählens.* Die Bedeutung der "selektiven Aufmerksamkeit" für das Behalten (oder eben Nicht-Behalten) im Gedächtnis wird aber von SIEGLER selbst (2001, S. 253-256) in anderem Zusammenhang ausdrücklich hervorgehoben. Es ist also plausibel, dass zumindest Kinder, "whose attention and working memory is tied up with devising or mastering a new strategy, might not store such data [im Sinne einer Assoziation zwischen Aufgabe und Ergebnis; Anm. M.G.]", wie BAROODY und TIILIKAINEN (2003, S. 85) unter Verweis auf GEARY (1993) gegen SIEGLER festhalten.

Neben dem Konstrukt unterschiedlicher "assoziativer Stärken" benötigt SIEGLER auch ein "Vertrauenskriterium", welches vom Kind auf Grundlage seines ihm eigenen "kognitiven Stils" jeweils "festgelegt" werde. Nun kann tatsächlich beobachtet werden, dass Kinder beim Rechnen höchst unterschiedliche "Vorsicht" walten lassen: Manche "bekennen" sich offen zum Raten ("guess" bei SIEGLER 1987). Andere erwecken nicht den Eindruck, "bloß irgendeine Zahl" zu nennen, liegen mit dem Ergebnis aber dennoch immer wieder daneben. Sie meinen also offenbar selbst, das richtige Ergebnis bereits auswendig zu wissen, ohne es tatsächlich zu tun. Wieder andere zögern, ergreifen schließlich eine Zählstrategie, um die Aufgabe zu lösen, geben aber dann auf Befragung glaubhaft an, dieses Ergebnis schon vor dem Zählen vermutet zu haben, sich dessen aber nicht sicher gewesen zu sein.

Für letztere scheint SIEGLERS Begriff des "Perfektionisten" passend. Das bei diesen Kindern erkennbare Abwägen zwischen subjektivem "Sicherheitsbedürfnis" und dem Grad der Gewissheit, mit der eine Aufgabe und eine mögliche Ergebniszahl in ihrem Bewusstsein assoziiert sind, ist aber kein *allgemeines* Phänomen. Es ist überhaupt nur denkbar bei jenen Kindern, die tatsächlich bereits solche Assoziationen geknüpft haben, was aber entgegen SIEGLERS Annahmen – siehe oben – nicht einfach als mechanische Folge wiederholter Zählprozesse zustande kommt. Und es setzt ein Maß an Reflexivität voraus, das – wie alleine schon die Existenz der Lösungsstrategie "guess" zeigt – keinesfalls selbstverständlich ist.

Ohnedies ist aber die *Rolle des Bewusstseins*, von *Einsicht* und *Verständnis* bei der Entwicklung von kindlichen Lösungsstrategien in den Modellen von SIEGLER und Kollegen in sich widersprüchlich bestimmt. Den Kindern wird mit Bezug auf die Addition zwar ein "goal sketch" zugestanden, also ein Bewusstsein der "hierarchy of objectives that a satisfactory strategy must meet" (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 115). SIEGLER spricht weiters beständig von "adaptive choices", also *Entscheidungen* (was Bewusstsein unterstellt), welche den Problemstellungen *angepasst* werden (was eine gewisse Einsicht unterstellt). Er beobachtet, dass Kinder das Weiterzählen anstelle des Alleszählens üblicherweise zuerst bei Aufgaben wie 9+2 anwenden, und bemerkt dazu:

> *"This pattern makes sense. The greater the difference between the two addends the greater the savings in number of counts that the min strategy provides over the sum strategy. The smaller the size of the smaller addend, the easier it is to execute the min strategy correctly"* (a.a.O., S. 29).

Das Verhaltensmuster der Kinder mache also "Sinn". Andererseits sei aber offen, ob dieser "Sinn" den Protagonisten selbst auch bewusst ist:

> *"Children sometimes formulate new strategies whose advantage is that they can be executed faster and with less effort than existing ones. Whether children anticipate that such strategies will be more efficient, and which experiences lead them to form such strategies, are unknown"* (a.a.O., S. 18).

Die Entwicklung von Lösungsstrategien wird also einerseits in Begriffen beschrieben, die an ein aktives, experimentierendes, Strategievorteile abwägendes kindliches Individuum denken lassen. Andererseits *reagiere* dieses bloß auf *mehr oder weniger zufällig* (das bleibt tatsächlich so unbestimmt!) gemachte Strategieentdeckungen:

> *"The third assumption is that knowledge about where the strategies should be used comes primarily from past outcomes produced by the strategies rather than through a rational metacognitive analysis of where the strategies should be most useful"* (a.a.O., S. 14).

An solchen Widersprüchen wird deutlich, dass SIEGLER die wichtige Unterscheidung zwischen "conceptual" und "procedural knowledge" (vgl. HIEBERT & LEFEVRE 1986) insgesamt in unzureichender Weise berücksichtigt. "Conceptual knowledge" umfasst ja (im Bereich der Grundschulmathematik) die *Konzepte*, die ein Kind von Zahlen und Rechenoperationen erworben hat, sein *Verständnis* von operativen *Zusammenhängen*, seine *Einsicht* in *Gesetzmäßigkeiten*; "procedural knowledge" hingegen die *Verfahrensweisen (Prozeduren)*, mit denen bestimmte Anforderungen bewältigt werden können (unabhängig von der Frage, ob bzw. in welchem Maße der Bedeutungsgehalt dieser Anforderungen und der Grund für die Legitimität dieser Prozeduren dem Kind klar ist).

SIEGLER erklärt nun das Verhältnis dieser beiden Arten von Wissen zwar als eines der Wechselwirkung: RITTLE-JOHNSON, SIEGLER und WAGNER ALIBALI (2001, S. 346) sprechen von einem "iterativen Prozess", "with increases in one type of knowledge leading to increases in the other type of knowledge, which trigger new incereases in the first". Bei genauerer Betrachtung bestimmen SIEGLER und Kollegen in ihren Arbeiten zur Entwicklung von Rechenstrategien aber *alles* Wissen als letztlich nur prozedural:

– Kinder lernen durch häufigen *Gebrauch*, dass ein *Verfahren* (etwa das Weiterzählen) "equally accurately and even more efficiently" angewandt werden könne als ein anderes (hier: das Alleszählen);
– *deshalb* (wegen seiner prozeduralen Vorteile) wenden sie es an.

Auf Grundlage welcher *Konzepte* ihnen dieses Verfahren aber als "accurate and efficient" erscheint, wird gar nicht in Betracht gezogen. Entsprechend *passiv* ist (trotz der Redeweise von "Entdeckungen" und "adaptiven Entscheidungen") die Rolle des lernenden Kindes bei SIEGLER letztlich bestimmt:

- Es wird (von seinen Eltern, in seiner Schule) mit Additionen konfrontiert;
- es löst diese mit Hilfe von zumindest anfangs "direkt gelehrten" Verfahren;
- jede Lösung findet Niederschlag im (gleichfalls als passiver Mechanismus bestimmten) Gedächtnis in Form von Assoziationen;
- diese Assoziationen *determinieren* – in Kombination mit dem teils willkürlich, teils aufgrund einer Charakterdisposition wirksamen "Vertrauenskriterium" – die eine oder andere Strategieentscheidung.

Auch BAROODY und TIILIKAINEN kritisieren an diesem Modell "oversimplified and untested assumptions" (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 82): Während Lernen tatsächlich ein aktiver Prozess des "inductive and/or deductive reasoning" (a.a.O., S. 83) sei, stellten es SIEGLER und Kollegen als "essentially a mechanical and passive […] process" dar. Dabei würden sie auch die Rolle verkennen, die "computational practice" tatsächlich bei der Weiterentwicklung von Lösungsstrategien spiele. Bei SIEGLER und Kollegen wirke Übung einerseits, wie gezeigt, quasi "mechanisch" durch Ausbildung von Assoziationen. Andererseits werde Kindern eine "metacognitive heuristic" zugestanden, welche sie Redundanzen (beim Alleszählen) bzw. erhöhte Effizienz (beim Weiterzählen) erkennen lasse. Tatsächlich aber sei

> *"providing an opportunity to see and reflect on patterns and relations [..] probably a more important contribution of computational practice" (a.a.O., S. 83).*

Übung könne also, so BAROODY und TIILIKAINEN, dazu führen, dass Kinder *Zusammenhänge* zwischen zuvor isoliert betrachteten und behandelten Aufgaben erkennen. Die Entwicklung neuer Strategien erfolge auf Grundlage dieser neu gewonnenen *Einsichten*. Von all dem ist aber bei SIEGLER nicht die Rede.

Bei SIEGLER zählt dagegen im Wesentlichen die *Quantität*, nicht die Qualität der Übung. Dabei führt er selbst genügend wertvolle Beobachtungen an, die in eine andere Richtung weisen: Die Kinder in der Untersuchung von SIEGLER und JENKINS (1989) wandten die – von ihnen selbstständig entdeckte – Strategie des Weiterzählens zunächst nur bei ganz wenigen Aufgaben an. Das änderte sich jedoch, nachdem sie in der achten Untersuchungswoche auch mit "herausfordernden" Additionen wie 24+2 konfrontiert wurden. Die "strategy *generalization*" kann also durch solche "challenge problems" offenkundig beschleunigt werden. Die Strategie*entdeckung* selbst wurde dagegen von den "challenge problems" nicht gefördert: Die (wenigen) Kinder, die in den ersten acht Wochen fortgesetzter Konfrontation mit einfacheren Addition noch keine einzige Aufgabe durch "Weiterzählen" gelöst hatten, waren durch die "challenge problems" "nur verwirrt" (SIEGLER 2001, S. 127).

SIEGLER nimmt diese Unterschiede im Umgang mit "challenge problems" im Grunde nur zur Kenntnis, kann sie aber im Rahmen seiner Modelle nicht erklären. Dabei lassen sich die geschilderten Phänomene bei Anerkennung einer tatsächlichen Wechselwirkung zwischen "konzeptionellem" und "prozeduralem" Wissen wie folgt deuten:

Kinder, die auf Grundlage ihrer über Zahlen und das Addieren bislang gewonnenen Einsichten *verstanden* haben, dass "Weiterzählen" eine legitime Strategie ist, wenden diese beim Addieren kleiner Summanden möglicherweise dennoch zunächst nur zurückhaltend an. Denn in diesem Bereich sind die Vorteile des "Weiterzählens" gegenüber dem "Alleszählen" ja tatsächlich nicht erheblich; und auf der anderen Seite besitzt "Alleszählen" den Vorzug größerer Vertrautheit. In der Auseinandersetzung mit "herausfordernden Aufgaben" wird diesen Kindern aber die höhere Effizienz des "Weiterzählens" immer deutlicher, und zugleich werden sie mit dieser neuen Strategie mehr und mehr vertraut. Beides lässt sie diese Strategie in weiterer Folge auch bei "nicht-herausfordernden Aufgaben" bereitwilliger verwenden.

Wenn ein Kind hingegen noch gar nicht begriffen hat, dass "Weiterzählen" überhaupt eine zulässige Strategie darstellt, dann wird ihm diese grundlegende Einsicht durch größere Zahlen zumindest nicht erleichtert. Und weil "challenge problems" alleszählend nur mit erhöhtem Konzentrationsaufwand zu bewältigen sind, reagiert dieses Kind in nachvollziehbarer Weise "verwirrt" und überfordert.

Fazit: SIEGLER bleibt das Verdienst, innerhalb des psychologischen Forschungszweigs auf die Schwächen chronometrischer Ansätze hingewiesen und demgegenüber die Vielfalt kindlicher Lösungsstrategien hervorgehoben zu haben. Seine Strategieentscheidungsmodelle greifen, wenn auch in theoretisch unzulänglicher Weise, ein wichtiges Phänomen in der Entwicklung kindlicher Rechenstrategien auf: das Nebeneinander von unterschiedlichen Strategien bei denselben oder strukturähnlichen Aufgaben zu ein- und demselben Zeitpunkt. Seine didaktische Schlussfolgerung (die Empfehlung, im Unterricht zählendes Rechnen zu üben) beruht auf problematischen theoretischen Annahmen und steht, wie noch zu zeigen sein wird, in Widerspruch zu empirischen Befunden, wonach Unterricht im zählenden Rechnen (zumindest bei manchen Kindern) offenbar gerade *nicht* dazu beiträgt, das zählende Rechnen zu überwinden.

Eine der Studien, die unter anderem auch dafür Hinweise liefert, ist die bereits erwähnte Längsschnittstudie von CARPENTER und MOSER (1984). Dieser ist der folgende Abschnitt gewidmet.

2.4 Die Längsschnittstudie von CARPENTER und MOSER

CARPENTER und MOSER (1984) untersuchten die Entwicklung der Rechenstrategien von zuletzt noch 88 Kindern vom Beginn der ersten bis Mitte der dritten Schulstufe. Die Kinder, mehrheitlich aus Mittelschichtsfamilien stammend, wurden jeweils zur Mitte eines Semesters, in Summe also achtmal, jeweils einzeln interviewt. Dabei hatten sie Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 18 zu lösen, welche in einfache Textaufgaben ("word problems") unterschiedlicher semantischer Struktur eingekleidet waren. Die Aufgaben wurden den Kindern vorgelesen, dies wurde bei Bedarf auch mehrfach wiederholt. Jeweils eine Hälfte der Aufgaben durfte mit Hilfe von Würfeln gelöst werden. Diese seien aber ab Mitte der zweiten Schulstufe kaum noch verwendet worden. Finger als Zählhilfe waren offenbar durchgehend gestattet.

2.4.1 Einschränkungen bei der Auswahl der Aufgaben

Die Auswahl des Zahlenmaterials unterlag folgenden (beim Vergleich mit weiteren Studien zu beachtenden) Einschränkungen:

- Bei den Additionen wurden die Verdoppelungsaufgaben ausgespart, ebenso Additionen mit der Summe 10, Additionen mit 0 und 1 als Summand sowie Additionen zweier aufeinander folgender Zahlen (wie etwa 6+7), wobei letztere Bedingung sich bei "smaller numbers" nicht durchhalten ließ. Diese weitreichenden Vorgaben begründen die Autoren mit dem Bestreben "to minimize solutions based on special characteristics of the numbers in the problem".
- Um feststellen zu können, ob Kinder das Vertauschungsgesetz der Addition anwenden, wurde stets der kleinere Summand als erster gereiht.
- Die Subtraktionen wurden durchgehend so konstruiert, dass die Differenz kleiner war als der Subtrahend, es wurde also etwa 9–7 gefragt, nicht aber 9–2. Das sei notwendig gewesen "for consistency": CARPENTER und MOSER wollten ja im Besonderen untersuchen, wie Kinder *Textaufgaben* lösen. Bei diesen gibt es aber im Bereich der Subtraktionsaufgaben solche, die *ihrer semantischen Struktur nach* das Ergänzen, andere, die das Wegnehmen nahe legen. Da festgestellt werden sollte, ob die semantische Struktur Einfluss auf die Wahl der Strategie hat, sollte das Zahlenmaterial selbst durchgehend dieselbe Strategie nahe legen. CARPENTER und MOSER entschieden sich dabei für Aufgaben, bei denen ein Abwägen des Aufwands eher für ein ergänzendes Hochzählen als für ein wegnehmendes Runterzählen spreche (a.a.O., S. 181).

2.4.2 Angaben zum Unterricht der interviewten Kinder

Anders als in vielen (entwicklungs-)psychologischen Studien zum Thema ist der Unterricht bei CARPENTER und MOSER nicht völlig ausgeblendet. Die Autoren machen zumindest einige wenige Angaben dazu, was den befragten Kindern im Mathematikunterricht vermittelt bzw. zu vermitteln versucht wurde:

- Großer Wert sei in den Klassen der befragten Kinder von Anfang an auf das Lösen von Sachproblemen gelegt worden; dabei sei das "Modellieren mit Material" betont worden. Das Lernen der arithmetischen Basisfakten sei ein zweiter Schwerpunkt gewesen.
- Bis zum zweiten Interview (Mitte des ersten Schuljahres) seien Additionen und Subtraktionen noch nicht auf symbolischer Ebene behandelt worden.
- In den ersten eineinhalb Jahren habe man die Kinder "strongly encouraged to use modeling behavior by representing numbers with sets of physical objects. Second, various forms of counting were suggested."
- Zum Zeitpunkt des fünften Interviews (Mitte des zweiten Schuljahres) "it was expected that the children would have made substantial progress in memorizing all basic addition and subtraction number facts". CARPENTER und MOSER machen keine weiteren Angaben darüber, ob überhaupt und wenn ja, in welcher Weise ab diesem Zeitpunkt darauf geachtet wurde, ob diese Erwartung auch tatsächlich zutraf. Ebenso wenig erfahren wir darüber, wie jenen Kindern im Unterricht begegnet wurde, die diese Erwartung nicht erfüllten, die also weiterhin vorwiegend zählende Lösungsstrategien verwendeten.
- Nirgendwo findet sich ein Hinweis darauf, dass Ableitungsstrategien gezielt unterrichtet worden wären (a.a.O., S. 186f).

2.4.3 Aussagen zur Strategieentwicklung

Die Strategien der Kinder wurden durch Beobachtung und Befragung ermittelt (zu den dabei verwendeten Kategorien vgl. Kap. 2.1). Als wesentliche Tendenzen der Entwicklung der *Additions*strategien halten die Autoren fest:

- Zu Beginn des ersten Schuljahres habe "counting-all" klar vorgeherrscht − bei Additionen mit Zehnerübergang zu etwa 62 Prozent.
- "Counting-all" sei im Laufe der Befragungen mehr und mehr zugunsten von "counting-on" und "number facts" (also Faktenabruf und wohl auch Ableitung; s.u.) aufgegeben worden. Zu den Aufgaben im Zahlenraum bis zehn fehlen genauere Angaben. Für die Aufgaben mit Zehnerübergang sind der Grafik zu den Lösungsstrategien am *Ende des ersten Schuljahres* nur ungefähr folgende Anteile zu entnehmen: 15 Prozent "number facts", 33 Prozent "counting-on", 45 Prozent "counting-all". Die restlichen sieben Prozent waren nicht eindeutig zuordenbar oder wurden von den Kindern nicht gelöst. *Mitte des zweiten Schuljahres* betrugen die entsprechenden Anteile ungefähr 39/42/16/3, Mitte des dritten Schuljahres (im letzten Interview) 83/14/3/0.
- "Counting-on" sei, wenn auch zu sehr unterschiedlichen Zeitpunkten, bei fast allen Kindern im Verlauf der Studie zu beobachten gewesen. Bei manchen dieser Kinder sei zuvor nie ein "counting-all" registriert worden. Dennoch vermuten CARPENTER und MOSER, dass

"counting-all" für *alle* Kinder am Beginn ihrer Strategieentwicklung stehe; manche von ihnen hätten diese Phase zu Schulbeginn aber bereits überwunden.

– "Counting-on" und "counting-all" seien in den ersten Interviews oft parallel verwendet worden, dasselbe Kind habe also im selben Interview manche Additionen alleszählend, andere weiterzählend gelöst.
– Auch "counting-on-from-first" und "counting-on-from-larger" seien häufig parallel verwendet worden. Die Autoren konnten keine zwingenden Hinweise dafür erkennen, dass Kinder in einer ersten Phase das Weiterzählen nur vom erstgenannten Summanden aus betrieben und erst später das effizientere Weiterzählen vom größeren Summanden entdeckt hätten. Eine solche Phase des (ausschließlich) "ineffizienteren Weiterzählens" könne nur zwischen den (jeweils vier Monate auseinander liegenden) Interviews vermutet werden und würde dann zumindest nicht sehr lange anhalten.

Bei den *Subtraktionsstrategien* zeigten sich Abhängigkeiten von der semantischen Struktur der Textaufgaben, allerdings nicht durchgehend in der von den Autoren erwarteten Weise:

– Bei "Join missing addend" Aufgaben, also Texten, bei denen ein Teil einer Gesamtanzahl und die Gesamtanzahl selbst bekannt waren und der fehlende Teil berechnet werden sollte, seien (der semantischen Struktur entsprechend und sofern die Aufgabe nicht durch Faktenabruf gelöst wurde) fast ausschließlich *ergänzende* Zählstrategien verwendet worden, also "Adding on" mit Material bzw. "Counting up from given" ohne Material.
– "Seperate problems", also Texte, in denen von der Gesamtanzahl ein Teil weggenommen wird und der verbliebene Teil zu berechnen ist, seien wie erwartet auch als Wegnehm-Handlungen modelliert worden. Wurde aber eine Zählstrategie ohne Material angewandt, dann sei dies mehrheitlich "counting-up-from-given" und nicht das (der semantischen Struktur des Textes eher entsprechende) "counting-down-from" gewesen. Die Autoren vermerken, dass 18 Prozent der Kinder in keinem einzigen der acht Interviews die Strategie des Rückwärtszählens gezeigt hätten, 45 Prozent in nur einem einzigen. Sie sehen auch Hinweise dafür, dass Rückwärtszählen (wenn überhaupt) zeitlich später auftrete als ergänzendes Hochzählen. Zur Deutung des hohen Anteils von Hochzählen verweisen die Autoren aber auch darauf, dass das gewählte Zahlenmaterial (wie erläutert) Hochzählen zur leichteren, Rückwärtszählen zur schwieriger durchführbaren Strategie machten, und dass andere Studien gerade umgekehrt einen höheren Anteil von "counting-down" ermittelt hätten (a.a.O., S. 194). In PADBERGs Studie zu den Subtraktionsstrategien 31 deutscher ErstklässlerInnen am Ende des ersten Schuljahres lösten die Kinder Subtraktionen – sofern sie zählend rechneten – *ausschließlich* durch Rückwärtszählen (PADBERG 1994, S. 327).
– Unabhängig von der semantischen Struktur habe auch bei Subtraktionen die Nutzung von Faktenabruf über die Jahre hin zugenommen. Der Anteil von Zählstrategien habe aber etwa bei "Join Missing Addend"-Aufgaben noch Mitte des dritten Schuljahres nur etwa 40 Prozent betragen.

Zu Häufigkeit von *Ableitungsstrategien* fehlen detaillierte Angaben. Ableitung wird in den zur Studie veröffentlichten Grafiken offenbar innerhalb der Kategorie "number facts" nicht von Faktenabruf unterschieden. Im Text wird lediglich festgehalten, dass über 80 Prozent der Kinder "at some time during the study" Ableitungsstrategien gezeigt und etwa 40 Prozent in zumindest einem Interview "fünf oder mehr" von den zwölf Aufgaben (Additionen und Subtraktionen) mit Zehnerübergang durch eine Ableitungsstrategie gelöst hätten. Insgesamt gelte:

> *"Although derived facts often seem to require a great deal of insight about numbers, they were not used by just a handful of bright students"* (a.a.O., S. 196).

An anderer Stelle (CARPENTER & MOSER 1983, zitiert nach STEINBERG 1985, S. 338) berichten die Autoren hingegen, dass etwa die Hälfte der Kinder solche Strategien nie oder nur sehr selten verwendet hätte.

Auch zur *Qualität* der beobachteten Ableitungsstrategien äußern sich CARPENTER und MOSER nicht im Detail. Die Autoren merken nur an, dass diese üblicherweise auf Verdoppelungen aufbauten, aber auch auf Additionen mit der Summe zehn. Das impliziert, dass diese beiden Additionstypen früher als andere automatisiert wurden. Wie oben erläutert, waren aber weder Verdoppelungen noch Additionen mit der Summe zehn Gegenstand der Befragungen (a.a.O., S. 191-196). Ableitungsstrategien im Bereich der Subtraktionen hätten oft auf der Umkehrung zugehöriger, bereits gespeicherter Additionen basiert; auch hierzu machen die Autoren keine näheren Angaben.

Die Begriffe "fact mastery" bzw. "fact user" verwenden CARPENTER und MOSER dann, wenn ein Kind zu einem Erhebungszeitraum wenigstens zwei Drittel der Aufgaben durch Faktenabruf oder Ableitung (als durch "Gebrauch von Fakten" im weiteren Sinn) löste. Auch bei dieser recht großzügigen Interpretation konnten am Ende des ersten Schuljahres nur elf Prozent der Kinder als "fact users" im Zahlenraum bis zehn klassifiziert werden. Mitte des zweiten Schuljahres waren es 45 Prozent, Mitte des dritten Schuljahres 89 Prozent. Umgekehrt waren also immer noch elf Prozent der DrittklässlerInnen selbst im Zahlenraum bis zehn *keine* "fact users", vertrauten also definitionsgemäß noch bei mindestens einem Drittel der Additionen in diesem Zahlenraum auf Zählstrategien.

Noch einmal deutlich seltener war "fact mastery" im gesamten Zahlenraum bis 18 festzustellen: Nur 24 Prozent der Kinder zeigten diese "Meisterschaft" schon Mitte des zweiten Schuljahres (für das erste Schuljahr machen CARPENTER und MOSER diesbezüglich keine Angaben). Auch ein Jahr später hatten nur 70 Prozent der Kinder dieses (in den untersuchten Klassen für die Mitte des zweiten Schuljahres angestrebte) Ziel erreicht.

Die Autoren vermerken, dass Kinder in der Regel zunächst in drei aufeinander folgenden Interviews (was etwa der Zeitspanne von einem vollen Jahr entspricht) mindestens 75 Prozent der Aufgaben durch Weiterzählen lösten, ehe sie "fact mastery" gezeigt hätten – sofern sie diese "Meisterschaft" im Verlauf der Studie überhaupt erreicht haben.

2.4.4 Didaktische Konsequenzen aus Sicht der Autoren

CARPENTER und MOSER ziehen aus diesen Ergebnissen die folgende (wenn auch vorsichtig formulierte) "implication for instruction":

> *"There is some evidence that instruction based on these principles (acknowledging that there is an extended period during which children count-on and count back) can be effective. [...] However, since children invent the counting strategies for themselves without direct instruction, it is not clear that specific instruction on advanced counting strategies is necessary"* (a.a.O., S. 200).

Es bleibt freilich unklar, worin die im Zitat behauptete "evidence" besteht. Was die Studie tatsächlich zeigt, ist ja nur dieses:

- Ein großer Teil der untersuchten Kinder verwendete über lange Zeit vorwiegend Zählstrategien, und zwar von Interview zu Interview zunehmend solche des Weiterzählens.
- Daneben wurden, gleichfalls zunehmend, Aufgaben aus dem Gedächtnis gelöst. Viele Kinder verwendeten auch Ableitungsstrategien.
- Beim letzten Interview, Mitte des dritten Schuljahres, hatten immer noch 30 Prozent der Kinder die für Mitte des zweiten Schuljahres angestrebte "fact mastery" im Zahlenraum bis 18 und elf Prozent der Kinder die bereits für Ende des ersten Schuljahres angestrebte "fact mastery" im Zahlenraum bis zehn *nicht* erreicht.
- All das geschah vor dem Hintergrund eines Unterrichts, in dem Kinder zumindest die ersten eineinhalb Jahre lang "nachdrücklich ermutigt" wurden, Aufgaben mit Hilfe von Zählmaterial zu lösen.

Unter diesen Voraussetzungen war nun eine "extended period during which children count-on and count back" zu beobachten. Warum dies aber ein Argument *dafür* sein sollte, das weiterzählende Rechnen gezielt zu fördern, wie es CARPENTER und MOSER andeuten ("can be effective"), bleibt unklar: Kinder, die zum *zählenden* Rechnen ermutigt werden, entdecken der Studie zufolge zumeist auch ohne gezielte Förderung die Strategie des "*counting-on"*. Zu einem beträchtlichen Teil halten sie an dieser auch nach zweieinhalb Schuljahren immer noch fest. Warum sollte eine gezielte Förderung im "counting-on" (also im *Anwenden* von Zählstrategien) nun zu einer früheren und vollständigeren *Ablösung* von Zählstrategien beitragen? Die Tatsache, dass jene Kinder, die letztlich "fact mastery" erreichten, davor über längere Zeit "counting-on" betrieben, lässt diesen Schluss jedenfalls nicht zu. Mit gleicher Berechtigung ließe sich aus dem Umstand, dass Solo-Pianisten zunächst Klavierschüler waren, die Hoffnung ableiten, dass jeder Klavierschüler dereinst zum Solo-Pianisten heranreift. Tatsächlich aber gab es nicht wenige Kinder, die bis zum letzten Interview "weiterzählende Rechner" blieben. Wenn zwar ein Teil jener Kinder, die beim Addieren und Subtrahieren über längere Zeit "counting-on" betreiben, später "fact mastery" erreicht, während ein anderer (keineswegs vernachlässigbarer) Teil an dieser Strategie festhält, dann sollte weiter geforscht werden, was den Unterschied macht. Aber dass ausgerechnet jene Strategie gefördert werden soll, deren Überwindung Ziel des Unterrichts ist, geht daraus wohl kaum hervor.

CARPENTER und MOSER äußern diese Empfehlung allerdings ohnedies nur sehr zurückhaltend. Sie tun dies freilich nicht deshalb, weil sie deren (sach-)logischen Mangel entdeckt hätten. Ihr Bedenken gilt vielmehr der Frage, ob so etwas wie "direkte Instruktion" denn überhaupt "notwendig" sei, wenn doch offenbar die meisten Kinder (aber zumindest im Rahmen der Studie nicht alle!) das "counting-on" auch weitgehend selbstständig entdeckten. Ob Unterricht freilich nur das *Notwendige* und nicht vielmehr das *Hilfreiche* im Auge haben sollte, ist eine Frage, die an anderer Stelle dieser Arbeit behandelt werden soll (s. Kap. 3).

2.4.5 Zusammenfassende Beurteilung

Die Studie von CARPENTER und MOSER ist bis zum heutigen Tag eine von wenigen geblieben, die eine größere Anzahl von Kindern über einen längeren Zeitraum in ihrer Strategieentwicklung begleiten und dabei den Unterricht mitberücksichtigen (wobei letzteres bei CARPENTER und MOSER in methodisch und inhaltlich unzureichender Weise geschieht). Die Erhebungsmethode (Beobachtung und Befragung in nicht-standardisierten Interviews) erlaubt detaillierte Aussagen über die Qualität der kindlichen Strategieentwicklung vor dem Hintergrund eines Unterrichts, der Zählstrategien zumindest anfangs explizit fördert. Die dabei zutage tretende Inkonsistenz vieler Kinder in ihrer Strategiewahl bleibt im Rahmen der Studie ein nur teilweise geklärter Befund. Auch die statistisch erfasste Verschiebung von anfänglich häufigem "counting-all" zu dem Mitte des dritten Schuljahres vorherrschenden, aber keinesfalls ausschließlich anzutreffenden Faktenabruf wird theoretisch kaum aufgearbeitet und vor allem hinsichtlich der großen inter-individuellen Unterschiede nicht aufgeklärt. Ableitungsstrategien wurden von CARPENTER und MOSER zwar erfasst, aber nicht im Detail dargestellt. Insbesondere fehlen Angaben dazu, ob Kinder, die schon früh Ableitungsstrategien anwendeten, sich in ihrer weiteren Entwicklung von jenen unterschieden, die das nicht taten.

In Summe also viel Stoff für weitere Untersuchungen. Im folgenden Abschnitt werden zunächst Studien zusammengefasst, die wie CARPENTER und MOSER vorrangig *Häufigkeiten* einzelner Rechenstrategien in Abhängigkeit vom Schulalter untersuchen, dabei aber im Besonderen den Unterschieden zwischen Kindern unterschiedlicher "mathematischer Begabung" nachgehen.

2.5 Studien zu Häufigkeiten einzelner Rechenstrategien bei Kindern unterschiedlicher "Begabung"

2.5.1 GEARY & BROWN (1991)

GEARY und BROWN verglichen die Rechenstrategien von Dritt- und ViertklässlerInnen unterschiedlicher "mathematischer Begabung", welche jeweils mittels standardisierter Tests ermittelt wurde: 14 als "gifted", 12 als "normal" und 15 als "math disabled (MD)" eingestufte Kinder aus zwei ländlichen US-Schulen hatten jeweils 40 Aufgaben des kleinen Einspluseins (mit und ohne Zehnerübergang; keine Verdoppelungsaufgaben) zu lösen. Die zur Lösung angewandten Strategien wurden gemäß den Selbstauskünften der Kinder folgenden Kategorien zugewiesen: "counting fingers", "verbal counting" und "retrieval" (GEARY & BROWN 1991, S. 400f). Bemerkenswerterweise wurde bei Nichtübereinstimmung der Selbstauskunft des Kindes mit der Beobachtung des Interviewers *stets* der Angabe des Kindes gefolgt (zur Kritik daran vgl. Kap. 6.1.4). Die mittleren Häufigkeiten der auf diese Weise erfassten Strategien sind aus Tabelle 1 ersichtlich.

Tabelle 1: Häufigkeiten verschiedener Lösungsstrategien von US-amerikanischen Dritt- und ViertklässlerInnen (n = 41) in Abhängigkeit von ihrer Einstufung als "math disabled (MD)", "normal" bzw. "gifted", erstellt nach GEARY & BROWN 1991, S. 402

	MD	normal	gifted
counting fingers	15 %	10 %	2 %
verbal counting	41 %	29 %	10 %
retrieval	44 %	61 %	88 %

Die Autoren vermerken statistisch signifikante Gruppenunterschiede zwischen "gifted" und "MD" bzgl. "counting fingers", ebenso zwischen "gifted" und den beiden anderen Gruppen bzgl. "verbal counting" und schließlich zwischen allen drei Gruppen bzgl. "retrieval" (a.a.O., S. 401). GEARY und BROWN interpretieren dies auf Grundlage des Strategieentscheidungsmodells von SIEGLER (s. Kap. 2.3) als Ausdruck von unterschiedlich hohen "assoziativen Stärken", mit denen Kinder der drei Begabungsgruppen die Aufgaben des Einspluseins gespeichert hätten. Der je nach Begabung unterschiedliche "strategy mix" spiegele also die unterschiedliche "maturity of the long-term memory organization of basic facts" (a.a.O., S. 398) wider.

Zur Kritik an SIEGLER vgl. Kap. 2.3. Zu GEARY und BROWN selbst sei angemerkt: Wenn die messbar geringere Häufigkeit von Faktenabruf bei "MD children" hier mit einem "unreifen oder sogar abnorm organisierten Gedächtnisnetzwerk" (a.a.O., S. 404f) *erklärt* wird, dann handelt es sich dabei um eine *Scheinerklärung*. Denn die Frage lautet ja: *Warum* werden die Aufgaben von manchen Kindern nur selten aus dem Gedächtnis abgerufen? Die Antwort von GEARY und BROWN Antwort sagt aber nicht mehr, als dass das *Gedächtnis* dieser Kinder *so* *organisiert sei*, dass Aufgaben nur selten aus dem Gedächtnis abgerufen werden *können*. Dabei wird aber das Gedächtnis der Kinder ausschließlich über die von ihnen auswendig gemerkten Grundaufgaben bestimmt; darüber hinaus ist über ihr Gedächtnis nichts zu erfahren. Der Inhalt von zu Erklärendem und (vorgeblicher) Erklärung ist hier also ein und derselbe; schon HEGEL hat dieses Erklärungsmuster als "leere Tautologie" kritisiert (HEGEL 1830/1970, S. 270).

2.5.2 GEARY, BROWN & SAMARANAYAKE (1991)

Die Längsschnittstudie von GEARY, BROWN und SAMARANAYAKE (1991) geht über die von GEARY und BROWN (1991) insofern hinaus, als hier als zweiter möglicher Grund für Unterschiede im Faktenabruf das *Arbeitsgedächtnis* ins Spiel gebracht und dieses (anders als das Langzeitgedächtnis in GEARY & BROWN 1991) *auch für sich untersucht und näher bestimmt* wird (zum "Arbeitsgedächtnismodell" siehe Kap. 2.2.4).

Auch die Kinder dieser Studie (26 als "normal" und zwölf als "mathematically disabled (MD)" eingestufte Erst- und ZweitklässlerInnen) entstammten einer ländlichen US-Schule. Die "MD children" waren von der Schule auf Grundlage eines standardisierten Tests als solche eingestuft worden und erhielten Förderunterricht im Ausmaß von 20 Minuten pro Tag, an fünf Tagen der Woche. Im Rahmen dieses Förderunterrichts wurden die Kinder unter anderem im Gebrauch der "min-Strategie" unterwiesen, es wurde also darauf hingearbeitet, dass sie Additionen *zählend*, und zwar durch *Weiterzählen* (und nicht durch Alleszählen) lösen (a.a.O., S. 789f).

Die Additionsstrategien der Kinder wurden zu zwei Terminen (offenbar jeweils etwa Mitte des ersten und des zweiten Schuljahres; genaue Angaben fehlen) auf dieselbe Weise ermittelt und kategorisiert wie bei GEARY & BROWN (1991) (siehe oben; beim ersten Erhebungstermin wurde zusätzlich die Strategie "fingers" registriert, also "nicht-zählender Fingereinsatz", vgl. Kap. 2.1). Beim zweiten Termin (zehn Monate nach dem ersten) wurden darüber hinaus Maße für das Arbeitsgedächtnis der Kinder erhoben. Tabelle 2 zeigt die mittleren Häufigkeiten, mit denen die verschiedenen Additionsstrategien für Kinder der beiden Gruppen registriert wurden. GEARY, BROWN und SAMARANAYAKE (a.a.O., S. 791) halten für die Gruppe der "normalen" Kinder einen statistisch signifikanten Zuwachs im Faktenabruf und eine signifikante Abnahme im Einsatz verbaler Zählstrategien zwischen erstem und zweitem Erhebungszeitpunkt fest. Für die "MD children" waren dagegen *keine* signifikanten Änderungen im Gebrauch der einzelnen Strategien zu verzeichnen. Die "normalen" Kinder lösten zu T2 signifikant mehr Aufgaben durch Faktenabruf als die "MD children".

Tabelle 2: Häufigkeiten verschiedener Lösungsstrategien von US-amerikanischen Erst- und ZweitklässlerInnen (n = 28) zu zwei Zeitpunkten im Abstand von zehn Monaten in Abhängigkeit von ihrer Einstufung als "normal" bzw. "math disabled (MD)", erstellt nach GEARY, BROWN & SAMARANAYAKE 1991, S. 791

	Normal		MD	
	T1	T2	T1	T2
counting fingers	6 %	4 %	7 %	6 %
Fingers	0 %	0 %	4 %	0 %
verbal counting	56 %	44 %	62 %	69 %
Retrieval	39 %	51 %	26 %	25 %

Die Arbeitsgedächtnisüberprüfung zu T2 ergab dazu signifikant höhere Maße des Arbeitsgedächtnisses für die "normalen" Kinder. Ebendies führt die Autoren zur Vermutung, dass "relatively poor working memory resources" einen zweiten Faktor für die Entstehung von "mathematical disability" (a.a.O., S. 795) darstellten. Die Autoren erläutern diese Hypothese auf Grundlage des SIEGLERschen Strategieentwicklungsmodells: SIEGLER (siehe Kapitel 2.3.1) hatte ja angenommen, dass wiederholtes zählendes Lösen einer Aufgabe quasi automatisch dazu führe, dass diese Aufgabe im Langzeitgedächtnis mit wachsender "assoziativer Stärke" gespeichert und in weiterer Folge durch Faktenabruf gelöst werde. Nun hatten aber gerade die "MD children" dieser Studie besonders viel Übung im zählenden Rechnen, wurden sie doch im Rahmen des Förderunterrichts, wie berichtet, gerade *dazu* immer wieder angeleitet. Die Autoren vermerken auch eine massive Verbesserung der "counting skills" und eine Abnahme von Verzählfehlern bei den "MD children" zwischen erstem und zweitem Erhebungstermin.

Gerade das hätte aber gemäß SIEGLER zu einem Anstieg der "assoziativen Stärken" und damit zu einem erhöhten Faktenabruf dieser Aufgaben führen müssen. Durch den Verweis auf die schwachen Arbeitsgedächtniswerte der "MD Kinder" meinen GEARY, BROWN und SAMARAYANAKE nun aber dennoch an SIEGLERS Modell festhalten zu können: Bei den "MD Kindern" "zerfalle" ("decays") die "ursprüngliche Repräsentation" der Rechenaufgabe so rasch im (defizienten) Arbeitsgedächtnis, dass es zu keiner Assoziation zwischen dem Zählergebnis und der Rechenaufgabe komme. (Die Autoren berufen sich bei dieser Annahme auf "personal communication" mit SIEGLER selbst.)

Das scheint in sich "wasserfest" zu sein: Zählendes Rechnen führt (vermittelt über einen Anstieg der "assoziativen Stärken") quasi automatisch zu nicht-zählendem Rechnen, und wenn doch nicht, dann liegt es am Arbeitsgedächtnis. Wenn aber SIEGLERS Modell (gegen welches, wie dargestellt, manches vorzubringen ist) nicht schon vorausgesetzt wird, scheint doch folgende Interpretation zumindest nicht weniger plausibel: Mit den "MD Kindern" wurde in den zehn Monaten zwischen T1 und T2 den Autoren zufolge sehr intensiv zählendes Rechnen trainiert. Zu T2 zeigten sie sich im Wesentlichen als geschickte zählende Rechner. Intensives Training im zählenden Rechnen scheint also wirksam in dem Sinne, dass dadurch schneller gezählt wird und die Fehlerquote sinkt; die Ablösung vom zählenden Rechnen zugunsten des

Faktenabrufes fördert es aber nicht. Unterschiedliche Arbeitsgedächtnis-Ressourcen mögen bei all dem eine Rolle spielen – welche, ist unter den Bedingungen dieser Studie aber nicht zu klären. *Eine* Studie, *zwei* Deutungen; für die letztere wird in den folgenden Abschnitten noch einiges an Argumenten und empirischen Belegen vorgebracht werden. Zu einer umfassenderen Kritik an Versuchen, Rechenschwierigkeiten auf Arbeitsgedächtnisdefizite zurückzuführen, vgl. Kap. 2.12.

2.5.3 OSTAD (1998)

Auch OSTAD (1998) interessierten Unterschiede in der Strategieentwicklung zwischen Kindern, die als "mathematically disabled" ("MD children") eingestuft waren, und Kindern ohne solche Einstufung ("mathematically normal", "MN children"). Er erhob die Additions- und Subtraktionsstrategien von Kindern beider "Begabungsstufen" im Rahmen einer Querschnittstudie: Befragt wurden insgesamt 202 norwegische Kinder am Ende der zweiten, vierten und sechsten Schulstufe. Deren Einstufung als "MD" oder "MN" erfolgte durch die Schulen: "MD children" waren aufgrund anhaltender Lernschwierigkeiten in Mathematik einem Programm zugewiesen worden, welches für einen Zeitraum von mindestens zwei Jahren schulinterne Förderung vorsah.

Wie CARPENTER und MOSER ließ OSTAD die Kinder "word problems" unterschiedlicher semantischer Struktur bearbeiten. In einfache Texte eingekleidet wurden vier Additionen, sechs Subtraktionen und sechs additive "Platzhalteraufgaben" (z.B. 9+_=13, 14–_=6) im Zahlenraum bis 20, mit zwei Ausnahmen allesamt mit Zehnerübergang. Dieselben 16 Aufgaben wurden in einem zweiten Abschnitt der Interviews auch noch als reine "number facts" ohne Texteinkleidung gefragt. Die Kinder wurden, was bei der Interpretation der Ergebnisse zu beachten sein wird, dazu ermutigt

> *"to use whatever strategy was* easiest *for them to reach the answer [...] The important thing was that the children should try their hardest to arrive at the* right *answer"* (OSTAD 1998, S. 7; Hervorhebungen M.G.).

Die Ermittlung der Lösungsstrategien erfolgte jeweils durch Befragung und Beobachtung.

Für die vorliegende Arbeit interessieren nur die Ergebnisse bei den nicht-eingekleideten Additionen und Subtraktionen (unter Ausblendung der "Platzhalteraufgaben"). OSTAD unterschied die erhobenen Strategien (mit erheblichem Informationsverlust) nur nach den Kriterien "mental", "verbal" und "material", ohne diese Kategorien klar zu definieren. "Mental" dürfte Faktenabruf und Ableitung, also alle nicht-zählenden Strategien umfassen, "verbal" sämtliche Zählstrategien ohne Materialverwendung, "material" jene unter Materialeinsatz. Tabelle 3 zeigt, wie häufig die einzelnen Strategien bei den genannten Aufgaben festgehalten wurden.

Tabelle 3: Häufigkeiten verschiedener Lösungsstrategien norwegischer Kinder in Abhängigkeit von Schulstufe und Einstufung als "mathematically normal" bzw. "disabled", erstellt nach OSTAD 1998, S. 14

	"mathematically normal"			"mathematically disabled"		
	2. Kl.	4. Kl.	6. Kl.	2. Kl.	4. Kl.	6. Kl.
zählend mit Material	69 %	53%	39 %	97 %	96 %	93 %
zählend ohne Material	20%	24%	22 %	3 %	4 %	5 %
nicht-zählend	9%	23%	39 %	0 %	0 %	2 %

OSTAD (a.a.O., S. 13f) hält dazu fest, dass die Kinder der beiden "ability levels" unterschiedliche "patterns of strategy-use" zeigten: In jeder Schulstufe griffen die als "normal" eingestuften Kinder signifikant seltener zu materialgestützten Zählstrategien und signifikant öfter zu verbalen Zählstrategien wie auch zu nicht-zählenden Strategien. Bei den "normalen" Kindern unterschiedlicher Klassenstufen zeige sich mit steigendem Alter zudem ein *Zuwachs an nicht-zählenden Strategien* zu Lasten der materialgestützten Zählstrategien, während die Häufigkeit verbaler Zählstrategien annähernd gleich bleibe. Bei den als "mathematisch behindert" eingestuften Kindern scheine es hingegen über die erfassten Schulstufen hinweg "no obvious change in strategy" gegeben zu haben.

Die von OSTAD erhobenen Häufigkeiten sind vor dem Hintergrund vergleichbarer Studien aus anderen Ländern (siehe oben) überraschend, vor allem mit Bezug auf die als "normal" eingestuften Kinder. (Die Angaben zu den als "disabled" eingestuften Kindern sind ohnedies schwer zu beurteilen, da die Einstufung nach Kriterien erfolgte, die in der Studie nicht genannt werden.) Während etwa die (gleichfalls "normalen") Kinder in der Studie von CARPENTER und MOSER (1984) Ende des zweiten Schuljahres etwa 62 Prozent der Additionen mit Zehnerübergang nicht-zählend lösten, sind es bei OSTAD gerade neun Prozent der (zumeist einen Zehnerübergang einschließenden) Additionen und Subtraktionen. Materialgestützte Zählstrategien werden in der US-Studie Ende des zweiten Schuljahres für 14 Prozent solcher Aufgaben festgehalten, in der norwegischen für 69 Prozent.

Dass Kinder unterschiedlicher Nationen sich in der Entwicklung von Rechenstrategien massiv unterscheiden können, zeigt etwa die Studie von GEARY, BOW-THOMAS, LIU und SIEGLER (1996; siehe dazu den folgenden Abschnitt). Anders als dort fehlen bei OSTAD aber Hinweise dafür, dass es tatsächlich *national bedingte* Unterschiede (seien es solche der Sprache, der Kultur oder spezifischer des Mathematikunterrichts) sind, die für diese massiven Abweichungen verantwortlich sein könnten. Eher schon ist anzunehmen, dass der auffallend hohe Anteil an Zählstrategien und da wieder an materialgestützten Zählstrategien bei OSTAD zu einem gewissen Teil auch auf die *Art der Erhebung* zurückzuführen ist:

Erstens waren die reinen Rechenaufgaben eingebettet in ein Interview, in dem auch *Text*aufgaben vorgegeben wurden. Diese stellten – unabhängig von der rein rechnerischen Schwierigkeit – wenigstens zum Teil durch ihre anspruchsvolle semantische Struktur hohe Anforderungen an das Zahl- und Operationsverständnis der Kinder – deutlich höhere als die vergleichsweise einfachen Text-Typen, die CARPENTER und MOSER (1984) verwendeten. So ließ OSTAD etwa auch Textaufgaben bearbeiten, in denen der Minuend einer Subtraktion zu ermitteln war. Aufgaben dieses Typs lösten in einer Untersuchung mit 88 ErstklässlerInnen aus vier Münchener Grundschulen nur 38 Prozent der Kinder richtig – nicht aufgrund von rechnerischen Schwierigkeiten, sondern weil sie nicht wussten, wie sie mit den genannten Zahlen (Subtrahend und Differenz) rechnen sollten, um zum "Ergebnis" zu kommen (STERN 1992, zitiert nach RADATZ u.a. 1996, S. 79). Es ist denkbar, dass viele der von OSTAD befragten Kinder bei solchen Aufgaben auf das angebotene Material als *Modellierungs*hilfe (und nicht eigentlich als Zählhilfe) zurückgriffen – vermutlich auch solche Kinder, die die zugrunde liegende Rechenaufgabe üblicherweise bereits mit fortgeschritteneren Strategien (verbales Zählen, Ableitung, Faktenabruf) lösten. In weiterer Folge könnte es zumindest für manche Kinder verführerisch gewesen sein, das nun einmal bereits in Gebrauch genommene Zählmaterial auch für weitere Aufgaben (auch nicht eingekleidete, reine Rechenaufgaben) zu verwenden – selbst bei Aufgaben, die sie unter anderen Umständen mit anderen Strategien gelöst hätten. CARPENTER und MOSER haben über Fälle solcher "Verführung durch das Material" bei US-amerikanischen Kinder berichtet (vgl. Kap. 2.3).

Hier kommt nun ein Zweites, wohl Wesentlicheres hinzu: Wie erläutert, waren die Kinder bei OSTAD mit Nachdruck aufgefordert worden, die für sie *einfachste* und zudem *sicherste* Strategie anzuwenden. Wie viel Zeit sie für eine Aufgabe benötigten, wurde hingegen offenbar gar nicht erhoben und spielte jedenfalls in der Anweisung an die Kinder keine Rolle. Das mag zumindest in einigen Fällen Kinder dazu bewogen haben, Aufgaben nicht mit der jeweils fortschrittlichsten Strategie ihres aktuellen Repertoires (vgl. SIEGLER 2001) zu lösen, sondern eben mit der (vermeintlich) einfachsten und sichersten.

OSTADS Häufigkeitsangaben sind also für Vergleiche mit anderen Studien und Nationen kaum geeignet. Die hochgradige Stabilität der (für alle Schulstufen auf dieselbe Weise ermittelten) Strategien der "MD children" kann aber als weiterer Hinweis dafür gewertet werden, dass manche Kinder ihre *Rechenstrategien über die Jahre hinweg kaum ändern* und auch in höheren Schulstufen an Zählstrategien festhalten (wobei auch bei diesem Schulstufen-Vergleich Vorsicht geboten ist, da es sich ja um eine Querschnitt-Studie handelt). OSTAD weist darauf hin, dass in den untersuchten Schulen der Mathematikunterricht "for the youngest age groups" gerade darin bestanden habe, Zählstrategien einzuüben: "‚The main thing‘ the pupil has to do is to count the concretes and write in the answers" (OSTAD 1992, nach OSTAD 1998, S. 16.); wir werden auf diesen Punkt noch genauer eingehen (siehe Kapitel 2.9.3).

2.5.4 Zusammenfassende Beurteilung der drei Studien

Die in diesem Abschnitt referierten Untersuchungen machen deutlich, dass die von SIEGLER wie auch von CARPENTER und MOSER beschriebene fortschreitende Ablösung von Zählstrategien durch letztlich vollständigen oder zumindest weitgehenden Faktenabruf nicht von *allen* Kindern erreicht wird – jedenfalls nicht im untersuchten zeitlichen Rahmen, der etwa bei OSTAD bis ans Ende der sechsten Schulstufe reicht. GEARY und BROWN (1991) wie auch GEARY, BROWN und SAMARAYANAKE (1991) vermuten als Ursachen für das hartnäckige Festhalten mancher Kinder an Zählstrategien ausschließlich individuelle Faktoren (Langzeitgedächtnis, Arbeitsgedächtnis). OSTAD (1998) verweist dagegen auf mögliche Einflüsse des Unterrichts.

Damit ist die Frage eröffnet, welche Faktoren auf die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien einwirken können. Wichtige Hinweise dazu können Studien liefern, welche die Entwicklungsverläufe von Kindern unterschiedlicher Nationen miteinander vergleichen; auf solche Studien wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen.

2.6 Studien zu Einflüssen national unterschiedlicher Wirkfaktoren

2.6.1 Massiv höherer Anteil von Faktenabruf bei ostasiatischen Kindern

GEARY, BOW-THOMAS, LIU und SIEGLER (1996) verglichen US-amerikanische und chinesische Kinder unter anderem bezüglich ihrer Rechenstrategien im Zahlenraum bis 18. Befragt wurden je etwa 100 Kinder, die zu etwa gleichen Teilen den Kindergarten, die erste, zweite und dritte Klasse einer Grundschule besuchten; es fanden jeweils zwei Interviews statt, das erste im vierten Monat des (Vor-) Schuljahres, das zweite gegen Ende des jeweiligen Schuljahres. Die Aufgabenauswahl, die Erhebungsmethode und die Kategorisierung der Strategien waren bei den Grundschulkindern gleich wie in der Studie von GEARY, BROWN und SAMARAYANAKE (1991; siehe Kap. 2.5). Als zusätzliche Strategie wurde "decomposition" vermerkt, worunter offenbar jede Form von Ableitung aus anderen Aufgaben verstanden wurde. Die Kindergartenkinder hatten beim ersten Interview nur Additionen mit Summanden bis maximal 5 zu bearbeiten, beim zweiten Interview aber auch schon einige Aufgaben mit Zehnerübergang.

Die Autoren unterscheiden bei der Erfassung der Strategien nicht zwischen Faktenabruf und "bloßem Raten" ("guess" bei SIEGLER 1987, vgl. Kap. 2.3). Das erklärt wohl zum Teil die erstaunlich hohen Raten von "retrieval" bei den befragten Kindergartenkindern, wie aus den Fehlerquoten deutlich wird: So geben die Autoren für die US-amerikanischen Kinder im vierten Monat ihres letzten Kindergartenjahres eine "retrieval"-Rate von 59 Prozent bei "kleinen Additionen" (beide Summanden kleiner oder gleich 5) an, zugleich aber eine Fehlerquote von 33 Prozent. Hohe Fehlerquoten (22 Prozent beim ersten, zwölf Prozent beim zweiten Interview) relativieren auch die Häufigkeitsangaben zu "retrieval" bei den US-amerikanischen ErstklässlerInnen.

Anders bei den chinesischen Kindern: Die Fehlerquoten bei "retrieval" sind in keiner Alterstufe höher als fünf Prozent. Die für den vierten Monat des letzten Kindergartenjahres festgehaltenen 31 Prozent "retrieval" bei "kleinen Additionen" erfolgten mit einer Fehlerquote von gar nur einem Prozent, ebenso die 84 Prozent "retrieval", die gegen Ende der Kindergartenzeit bei denselben Aufgaben registriert wurden. Die chinesischen Kindergartenkinder hatten zu diesem Zeitpunkt nicht nur erstaunlich viele Aufgaben bereits automatisiert, sie wussten offenbar auch sehr genau zu unterscheiden, wo sie sich auf ihr Gedächtnis verlassen konnten und welche Aufgaben (die restlichen 16 Prozent) sie lieber durch Weiterzählen lösten.

Und auch das ist bemerkenswert: Während Ende des Kindergartenjahres die US-amerikanischen Kinder 32 Prozent der "kleinen Additionen" durch offenes Fingerzählen lösten, war diese entwicklungsmäßig betrachtet frühere Zählstrategie (vgl. CARPENTER & MOSER 1984, siehe Kap. 2.4) bei den chinesischen Kindern desselben Alters gar nicht mehr zu beobachten. Sofern sie solche Aufgaben überhaupt noch zählend lösten, taten sie es mit der "fortschrittlicheren" Strategie des verbalen Weiterzählens.

Auch in den ersten drei Schulstufen zeigten sich fast durchgehend signifikante Strategie-Vorteile der chinesischen Kinder; die wesentlichen seien hier hervorgehoben:

– Chinesische ErstklässlerInnen lösten schon *im vierten Monat des ersten Schuljahres* nur noch 18 Prozent der gefragten Einspluseins-Aufgaben zählend, und zwar durchgehend in der "fortschrittlichsten" Zählstrategie des Weiterzählens. US-Kinder lösten zu diesem Zeitpunkt 78 Prozent der Aufgaben zählend (34 Prozent durch offenes Fingerzählen).
– Bereits *Ende der ersten Schulstufe* lösten die chinesischen Kinder 91 Prozent der Aufgaben aus dem Gedächtnis, weitere sechs Prozent durch Ableitung; ab Ende des zweiten Schuljahres waren es so gut wie 100 Prozent Faktenabruf. US-amerikanische Kinder dagegen lösten Ende der ersten Schulstufe nur 28 Prozent durch Faktenabruf und noch gegen Ende des dritten Schuljahres nur 56 Prozent; zu diesem Zeitpunkt wurden von ihnen immer noch etwa 40 Prozent der Aufgaben zählend gelöst.
– Chinesische Kinder verzeichneten jeweils zwischen dem vierten und neunten Schulmonat *signifikante Fortschritte* im Faktenabruf (mit Ausnahme der Kinder der dritten Schulstufe, die nichts mehr zu verbessern hatten; sie lösten sowohl im vierten wie auch im zehnten Monat 100 Prozent der Aufgaben durch "retrieval"). Bei den US-amerikanischen Kindern

dagegen waren in den beiden ersten Schulstufen *keine signifikanten Änderungen im Strategie-Mix* zu verzeichnen (mit Ausnahme des Zuwachses von "decomposition" von einem auf vier Prozent bei den Erstklässerlnnen).

Die von GEARY u.a. (1996) für die US-amerikanischen Kinder erhobenen Werte bleiben – bei etlichen, im Detail auch erheblichen Abweichungen – insgesamt im Rahmen der Ergebnisse von CARPENTER und MOSER (1984), GEARY und BROWN (1991) oder GEARY, BROWN und SAMARAYANAKE (1991). Umgekehrt zeigen auch die Studien von FUSON und KWON (1992) sowie SONG und GINSBURG (1987) eine deutliche "Strategie-Unterlegenheit" US-amerikanischer Kinder im Vergleich zu ostasiatischen (in diesen Fällen südkoreanischen) Kindern.

Und es gibt Hinweise dafür, dass es sich dabei nicht um eine bloße Entwicklungsverzögerung handelt, die in späteren Jahren wettgemacht würde: So verglichen etwa CAMPBELL und XUE die Rechenstrategien von StudentInnen, die die Grund- und Sekundarstufe in China absolviert hatten und nun in Kanada Psychologie studierten, mit den Strategien von StudienkollegInnen, die in Kanada aufgewachsen waren. Die chinesischen Studentinnen lösten Additionen mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 18 zu etwa 90 Prozent durch Faktenabruf, die kanadischen signifikant seltener zu etwa 64 Prozent. Die chinesischen StudentInnen behalfen sich so gut wie nie mit Zählstrategien (bei 0,3 Prozent der Aufgaben), die kanadischen Studentinnen gaben bei 4,6 Prozent der Additionen zu Protokoll, zählend gerechnet zu haben (daneben lösten sie viele Aufgaben durch Ableitungsstrategien) (CAMPBELL & XUE 2001, S. 305-308).

2.6.2 Mögliche Einflüsse der Sprache

Wie sind solche massiven Unterschiede zu erklären? Plausibel erscheint eine (wenigstens nach bisherigem Forschungsstand) nicht klar zu entwirrende Verknüpfung mehrerer Faktoren. GEARY u.a. (1996) verweisen zum einen auf Besonderheiten der ostasiatischen Sprachen:

Zum einen erlauben die chinesischen Zahlwörter bis zehn kürzere Artikulationszeiten als die englischen (und auch deutschen). Die Kapazität des phonetischen Speichers im Arbeitsgedächtnis ist aber zeitlich (und nicht durch die reine Anzahl der zu speichernden Elemente) begrenzt (vgl. GRUBE 2005, S. 108). Deswegen schneiden chinesische Erwachsene beim Nachsprechen von Reihen ungeordneter Zahlwörter besser ab als englisch- (oder auch deutschsprachige), ihre "Gedächtnisspanne" umfasst in der Regel neun rasch artikulierte, jene von englischsprachigen nur sieben langsamer artikulierte Zahlwörter (vgl. DEHAENE 1999, S. 121f). Dieser "Vorsprung" ist (auf zunächst niedrigerem Niveau) auch schon bei Kindern gegeben. Nun verzichten chinesische Kinder, solange sie zählend rechnen, zumeist schon früh auf Zählhilfen, wenden also schon früh die "fortschrittlichere" Strategie des *verbalen* Weiterzählens an. Eine Hauptschwierigkeit dabei ist es, trotz Verzichts auf Zählmaterial zu kontrollieren, um wie viel man bereits weitergezählt hat. Dies dürfte durch die schneller artikulierten (und daher in größerer Anzahl im Arbeitsspeicher verfügbaren) Zahlwörter der chinesischen Sprache erleichtert werden (GEARY u.a. 1996, S. 2023).

GEARY u.a. (a.a.O., S. 2041) vermuten aber einen darüber hinausreichenden Einfluss der Artikulationszeiten auch auf das Automatisieren der Basisfakten: Sie verweisen auf SIEGLERS Entwicklungsmodell, wonach durch jede zählend ermittelte Lösung die Assoziation von Aufgabe und Ergebnis im Gedächtnis gestärkt werde (s. Kap. 2.3), schränken dies aber um die Bedingung ein, dass dafür "the problem's addends and the generated answer must be simultaneously active in working memory". Da aber das zählende Rechnen im Chinesischen durch die kürzere Artikulationszeit der Zahlwörter schneller zu absolvieren sei, erleichtere dies die Ausbildung und Verstärkung von Gedächtnisassoziationen und beschleunige so den Prozess der Automatisierung. Zur Kritik an dieser mechanistischen Sichtweise vgl. Kap. 2.12.

Eine zweite Besonderheit ostasiatischer Sprachen besteht darin, dass die Zahlwortbildung ab zehn auf sehr transparente Weise der Zahlnotation im dezimalen Stellenwertsystem entspricht: Zweistellige Zahlen werden in diesen Sprachen nach dem Prinzip "so viele Zehner, so viele Einer" benannt. 11 wird also (in deutscher Rückübersetzung) als "zehn-eins" gesprochen, 12 als "zehn-zwei", 20 als "zwei-zehn", 21 als "zwei-zehn-eins" usw. Das begünstigt Kinder in diesen Sprachen beim Erlernen der Zahlwortreihe über zehn hinaus (vgl. MILLER, SMITH, ZHU & ZHANG 1995), wie es offenbar auch insgesamt die Einsicht in die Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems erleichtert (vgl. ZHANG 2001, S. 28f). Es dürfte aber auch die Entwicklung von Additions- und Subtraktionsstrategien beeinflussen: Die besondere Bedeutung der Zahl zehn wird durch die Zahlensprechweise deutlich hervorgehoben. Das erleichtert Kindern offenbar die Einsicht in Rechenstrategien, die auf das Bündeln von zehn Einern zu einem Zehner aufbauen wie etwa das "Teilschrittverfahren" (6+7 als 6+4 +3) (vgl. GEARY u.a. 1996, S. 2041). Umgekehrt wird in der englischen (wie auch deutschen) Sprache die Sonderstellung, die der Zahl zehn im dezimalen Stellenwertsystem zukommt, durch die Zahlwortbildung verdunkelt, und zwar noch einmal verstärkt durch die unmittelbar auf "ten" (bzw. "zehn") folgenden Zahlwörter "eleven, twelve" (bzw. "elf, zwölf"). Auch das ist wohl ein Grund, warum das Teilschrittverfahren so vielen deutschsprachigen Kindern in der ersten Klasse (aber auch später noch) so ganz und gar nicht einleuchtet (vgl. GAIDOSCHIK 2009, S. 173-176; s. Kap. 2.10.9).

Freilich: Nicht die *Sprache* rechnet, sondern *Kinder* tun dies auf Grundlage ihres aktuellen *Verständnisses* von Zahlen, Rechenoperationen, Strategien. Die ostasiatischen Sprachen können als *günstige Voraussetzung* für die frühe Entwicklung effektiver Rechenstrategien betrachtet werden. Um aber zu verstehen, was Kinder aus dieser Voraussetzung machen, müssen auch weitere mögliche Einflussfaktoren und das Ganze der Entwicklung berücksichtigt werden.

2.6.3 Mögliche Einflüsse des Unterrichts

Da ist als ein wesentlicher Einflussfaktor der *Unterricht.* GEARY u.a. (1996, S. 2039f) verweisen auf beträchtliche *quantitative* Unterschiede im Mathematik-Unterricht: Die chinesischen Kinder hatten zwischen den beiden Erhebungsterminen durchschnittlich um etwa 25 Prozent mehr Mathematik-Stunden als die US-amerikanischen.

Über die *Qualität* des Mathematikunterrichts in den untersuchten Klassen ist in dieser Studie nichts zu erfahren. Andere Autoren weisen aber darauf hin, dass es in China eine starke Tradition gebe, den Kindern *gezielt nicht-zählende Lösungsstrategien zu vermitteln*, und zwar nicht erst für die Bewältigung des Zehnerübergangs, sondern auch schon für Aufgaben innerhalb des Zahlenraums bis zehn. Bei letzteren wird als wichtige zweite Bezugsgröße die Zahl fünf betont, auch durch die Auswahl entsprechender Materialien (vgl. SUN & ZHANG 2001; ähnlich in Südkorea, vgl. FUSON & KWON 1992, und Japan, vgl. EASLEY 1983; HATANO 1982).

In scharfem Kontrast dazu wird aus einschlägigen US-amerikanischen Studien der letzten drei Jahrzehnte – so weit sie auf den Unterricht überhaupt eingehen – immer wieder deutlich, dass es in den USA zumindest im Mathematikunterricht der beiden ersten Schulstufen üblich ist, Kinder gezielt zu (weiter-)zählenden Lösungsstrategien anzuhalten (vgl. etwa CARPENTER & MOSER 1984, s. Kap. 2.4; aktuell HENRY & BROWN 2008, s. Kap. 2.9.5; für den Förderunterricht GEARY, BROWN & SAMARAYANAKE 1991, s. Kap. 2.5). Die aktive Vermittlung nicht-zählender Strategien wird zwar von US-amerikanischen FachdidaktikerInnen schon seit BROWNELL (1929) und verstärkt wieder seit Ende der 1970er Jahre massiv propagiert (Näheres dazu s. Kap. 2.9). Doch auch noch im Jahre 2006 wird dieses didaktische Konzept von BAROODY, einem seiner vehementesten Fürsprecher, als "Außenseiterposition" eingeschätzt, die in deutlicher Opposition stehe zum "common sense" der US-amerikanischen Schulwirklichkeit (vgl. BAROODY 2006, s. Kap. 2.8).

2.6.4 Unterschiede in der Verwendung von Ableitungsstrategien

Tatsächlich zeigt die Studie von GEARY u.a. (1996) signifikante Unterschiede zwischen US-amerikanischen und chinesischen Kindern gerade auch bezüglich des Ableitens:

Schon gegen Ende des letzten Kindergartenjahres lösten die chinesischen Kinder 44 Prozent der bei diesem zweiten Termin gefragten Additionen mit Zehnerübergang durch "decomposition" (a.a.O., S. 2034, S. 2038). Für die US-amerikanischen Kindergartenkinder wurden zu diesem Zeitpunkt nur zwei Prozent Ableitungsstrategien registriert, und dies mit einer Fehlerquote von 25 Prozent (bei den chinesischen Kindern betrug die Fehlerquote bei Ableitungen nur drei Prozent).

Die chinesischen ErstklässlerInnen lösten im vierten Monat des ersten Schuljahres 36 Prozent der Additionen durch "decomposition", im neunten Monat nur noch sechs Prozent. Diese signifikante Abnahme ging einher mit einer signifikanten Zunahme von "retrieval" (von zunächst 43 auf schließlich 91 Prozent). Die chinesischen Kinder lösten ab Ende des ersten Schuljahres also wohl einfach deshalb nur noch wenige Aufgaben durch Ableitung, weil sie darauf nicht mehr angewiesen waren.

Die US-amerikanischen ErstklässlerInnen hingegen griffen im vierten Schulmonat so gut wie nie zu Ableitungsstrategien und im neunten Schulmonat bei gerade vier Prozent der Aufgaben. Parallel dazu erhöhte sich zwar der Anteil von "retrieval" zwischen viertem und neunten Schulmonat, dieser Zuwachs war aber nicht signifikant (a.a.O., S. 2034). Auch die US-amerikanischen ZweitklässlerInnen verwendeten so gut wie nie Ableitungsstrategien. Sofern sie eine Aufgabe nicht durch Faktenabruf lösten (was auch Ende der zweiten Schulstufe noch bei etwa 60 Prozent der Aufgaben der Fall war), griffen sie zu Zählstrategien (a.a.O., S. 2035).

Die Autoren vermuten selbst, dass gerade auch das wiederholte Lösen von Aufgaben durch Ableitungsstrategien die Ausbildung von Aufgabe-Antwort-Assoziationen im Gedächtnis der chinesischen Kinder gefördert und damit zu ihrem frühen Auswendigwissen beigetragen habe:

> *"This is because decomposition can be executed quickly, especially when contrasted with time-consuming finger counting. The fast execution of decomposition should enable all problem features and the generated answer to be simultaneously active in working memory, which, in turn, should facilitate the formation of problem/answer associations"* (a.a.O., S. 2042; ähnlich argumentiert GERSTER 1994, S. 46).

Wir werden auf dieses Argument noch zurückkommen (vgl. Kap. 2.12.1).

2.6.5 Andere sozio-kulturelle Einflussfaktoren

Freilich müssen neben Schule und Kindergarten auch weitere sozio-kulturelle Einflussfaktoren beachtet werden. Zur Vorsicht vor einseitigen Interpretationen mahnt gerade auch die bereits erwähnte Studie von CAMPBELL und XUE: Die Autoren befragten nämlich sowohl *chinesische* StudentInnen, die ihre Schulzeit in China absolviert hatten, als auch Kinder von chinesischen Einwanderern, die bereits in Kanada in die Schule gegangen waren. Zwischen diesen beiden Gruppen gab es *keine* signifikanten Unterschiede in ihren Lösungsstrategien. Beide unterschieden sich in der beschriebenen Weise aber signifikant von der Gruppe der *kanadischen* (und in Kanada aufgewachsenen) StudentInnen (CAMPBELL & XUE 2001, S. 312).

CAMPBELL und XUE verweisen in diesem Zusammenhang auf eine Reihe von Studien zu außerschulischen kulturellen Faktoren, welche teils vermittelt über die Motivation der Kinder, teils direkt zu verstärkten Lernanstrengungen führten: So werde der schulischen Leistung eines Kindes von ostasiatischen Eltern, aber auch seinen AlterskollegInnen ein höherer Stellenwert eingeräumt; die Überzeugung, dass persönliche Anstrengung zu Erfolg führe, sei weiter verbreitet; schließlich werde außerschulische Förderung häufiger und intensiver betrieben (ähnlich FUSON & KWON 1992 für Südkorea). CAMPBELL und XUE vermuten auf Grundlage ihrer eigenen Untersuchung, dass eher solche kultur-spezifischen Faktoren und weniger der schulische Mathematikunterricht zu den beschriebenen Unterschieden in den Lösungsstrategien beitrage (a.a.O., S. 312).

2.6.6 Zusammenfassende Beurteilung vorliegender Vergleichsstudien

Insgesamt betrachtet, leisten Vergleichsstudien wie die von GEARY u.a. (1996) oder SONG & GINSBURG (1987) einen in mehrfacher Hinsicht bedeutsamen Beitrag zur Erforschung kindlicher Lösungsstrategien. Sie machen deutlich, dass die in zahlreichen Studien vorwiegend für US-amerikanische Kinder belegten Entwicklungsverläufe mit ihren hohen Anteilen von Zählstrategien bis in höhere Schulstufen hinein nicht interpretiert werden dürfen als Ausdruck eines *quasi naturhaften*, durch Persönlichkeitsfaktoren determinierten Reifungsprozesses. Auch wenn es noch weiterer Studien bedarf, um klarer zu verstehen, *warum* ostasiatische Kinder das zählende Rechnen früher und umfassender zugunsten von Faktenabruf hinter sich lassen: Dass sie nicht *per naturam* bessere Rechner sind als etwa US-amerikanische Kinder, dürfte außer Streit stehen. Und auch wenn der Unterricht vermutlich nicht der *einzige* Grund für diese massive Überlegenheit ostasiatischer Kinder ist, so ist es doch auch kaum plausibel, dass die gleichfalls dokumentierten nationalen Unterschiede in der methodisch-didaktischen Behandlung von zählenden bzw. ableitenden Lösungsstrategien im Erstunterricht *gar keinen* Einfluss ausüben sollten.

Tatsächlich ist die Rolle des Unterrichts und insbesondere der gezielten Vermittlung von Ableitungsstrategien Gegenstand einer Reihe von Studien und Entwicklungsmodellen, welche in den Abschnitten 2.7 und 2.8 näher dargestellt werden. Zuvor soll aber auf Untersuchungen eingegangen werden, die Hinweise liefern für geschlechtsspezifische Unterschiede in den Mathematikleistungen, aber auch schon bei frühen Rechenstrategien.

2.7 Studien zu geschlechtsspezifischen Unterschieden

Die in Politik und Fachwelt (vgl. etwa HOPMANN, BRINEK & RETZL 2007; JAHNKE & MEYERHÖFER 2006) umstrittenen internationalen Vergleichsstudien TIMSS (für Kinder der vierten Schulstufe) und PISA (für 15- bis 16jährige Jugendliche) ermittelten für Österreich (aber nicht für alle teilnehmenden Länder; vgl. MOSER OPITZ 2007, S. 69f) deutliche Unterschiede in den Mathematikleistungen von Mädchen und Buben bzw. weiblichen und männlichen Jugendlichen zugunsten der Buben bzw. männlichen Jugendlichen (für TIMMS 2007 vgl. http://www.bifie.at/timss-2007-0, 9.12.2009; für PISA 2006 vgl. http://www.bifie.at/pisa-ergebnisse-2006, 9.12.2009; zu den in Österreich besonders deutlichen Geschlechterunterschieden vgl. STADLER 2009).

LANDERL und KAUFMANN fassen neuere (entwicklungs-)psychologische Studien dahingehend zusammen, diese würden "zeigen, [...] dass geschlechtsspezifische Leistungsunterschiede bei numerisch-rechnerischen Aufgaben bereits in den ersten Grundschuljahren auftreten" (LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 83).

KRAJEWSKI fand für die von ihr untersuchten Kinder auch "schon ein halbes Jahr vor Schuleintritt" einen "Geschlechtseffekt, nach dem Jungen zu diesem Zeitpunkt über ein besseres Zahlenvorwissen verfügten als die Mädchen". Ihrem Prädiktormodell gemäß (vgl. Kap. 2.11) erkläre dieser Vorsprung im Vorwissen den weiteren Befund, dass die Jungen "auch in der ersten Klasse bessere Rechenfertigkeiten an den Tag legten als die Mädchen" (KRAJEWSKI 2003, S. 213). Auch DORNHEIM ermittelte in ihrer Längsschnittstudie signifikante Vorteile der Buben im Vorschulalter, allerdings nur im Bereich "Simultan Erfassen" (vgl. DORNHEIM 2008, S. 337; unter diesem Titel wurden freilich tatsächlich überwiegend Leistungen im *quasi-simultanen* Erfassen strukturierter Zahldarstellungen ermittelt, wie aus der Beschreibung der Aufgaben deutlich wird, vgl. DORNHEIM 2008, S. 289). In anderen Bereichen des "Zahlen-Vorwissens" ergaben sich in dieser Studie keine signifikanten Unterschiede zugunsten der Buben, zum Teil sogar (nicht signifikante) Vorteile der Mädchen (vgl. DORNHEIM 2008, S. 337). Am Ende der 1. Klasse zeigte sich aber auch in dieser Studie in einem standardisierten Mathematikschulleistungstest ein höchst signifikanter Unterschied zugunsten der Buben, der am Ende der 2. Klasse ebenso höchst signifikant fortbestand (vgl. DORNHEIM 2008, S. 344).

Wodurch lassen sich diese Unterschiede zwischen Buben und Mädchen erklären? Ob dafür (auch) "neurobiologische Geschlechtsunterschiede" zumindest als "begünstigende Faktoren" verantwortlich zu machen sind, wie etwa CAHILL vertritt (CAHILL 2006, zitiert nach LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 83; ähnlich DEHAENE 1999, S. 186), wird auch innerhalb der Neurobiologie und –psychologie "noch kontrovers diskutiert" (LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 82). Unabhängig davon spricht aber vieles dafür, dass "gesellschaftliche Faktoren einen großen Einfluss haben: Bis heute wird eher von Jungen als von Mädchen erwartet, dass sie sich für Mathematik interessieren" (LANDERL & KAUFMANN S. 83). MOSER OPITZ verweist in diesem Zusammenhang auf Studien von KELLER (1997) bzw. RUSTEMEYER (1999), wonach Lehrkräfte der Sekundarstufe bzw. Lehramts-Studierende – und zwar jeweils Männer und Frauen in gleicher Weise – "Mathematik [...] als eine männliche Domäne betrachten und dadurch Mädchen die Sichtweise vermitteln, dass Mathematik nichts für Mädchen sei" (MOSER OPITZ 2007, S. 71). Ähnliche Botschaften werden vielen Mädchen, so das Ergebnis einer Untersuchung von CHOUINARD, VEZEAU, BOUFFARD & JENKINS (zitiert nach MOSER OPITZ 2007, S. 72), auch von ihren eigenen Eltern vermittelt und können "die negative Sichtweise der Mädchen bezüglich der eigenen mathematischen Leistungen beeinflussen" (MOSER OPITZ 2007, S. 72). Dass aber das "mathematische Selbstkonzept" Einfluss hat auf die Motivation beim weiteren Mathematiklernen und darüber vermittelt auch auf schulische Mathematikleistungen, scheint plausibel (vgl. MOSER OPITZ 2007, S. 65).

Dass die unterschiedlichen Haltungen, die Lehrkräfte und Eltern Jungen und Mädchen gegenüber mit Bezug auf Mathematik häufig einzunehmen scheinen, auch ganz spezifisch auf die Entwicklung von *Rechenstrategien* einwirken können, dafür scheint die Studie von CARR, JESSUP und FULLER Hinweise zu liefern: Die Autorinnen erhoben einerseits die Additions- und Subtraktionsstrategien von US-amerikanischen ErstklässlerInnen in qualitativen Interviews (je 46 Buben und Mädchen, jeweils 4 Kinder aus einer von 23 verschiedenen Klassen). Dabei wurde allerdings nur zwischen "overt, covert, or retrieval" unterschieden: Als "overt" wurde das offene, sichtbar zählende Rechnen mit Hilfe von Fingern protokolliert, als "covert" sowohl "verdecktes" zählendes Rechnen ohne äußere Zählhilfen als auch das Anwenden einer Ableitungsstrategie, als "retrieval" der rasche Abruf von bereits auswendig gemerkten Zahlenfakten aus dem Gedächtnis (CARR, JESSUP & FULLER 1999, S. 23ff). Darüber hinaus wurden die Lehrkräfte und Eltern u.a. dazu befragt, ob sie die Kinder zu der einen oder anderen der genannten Strategien angeleitet hätten, und die Kinder u.a. dazu, welche dieser Strategien ihrer Einschätzung nach von ihren Lehrkräften bzw. Eltern für "besser" gehalten würden, und warum Lehrkräfte und Eltern das ihrer Auffassung nach tun würden (a.a.O., S. 27ff).

Als Ergebnis der qualitativen Interviews berichten die Autorinnen von signifikanten geschlechtsspezifischen Unterschieden ($p<0{,}01$) in der Häufigkeit von einerseits "overt [strategies]" (häufiger bei Mädchen), andererseits "retrieval" (häufiger bei Buben), wobei diese Unterschiede sich im Laufe des ersten Schuljahres verstärkt hätten. In den Befragungen der Lehrkräfte und Eltern habe sich u.a. gezeigt, dass die Lehrkräfte in der zweiten Hälfte des Schuljahres eher Buben als Mädchen zum Faktenabruf "gelenkt hätten" ("were likely to direct boys more than girls to use retrieval strategies"). Und Buben hätten auch eher als Mädchen den Eindruck erhalten, ihre Eltern würden Strategien bevorzugen, "that make one look smart [...] such as retrieval". Als Resümee ihrer Studie formulieren die Autorinnen:

> *"Much of the instruction given on strategy use seems to be either intentionally or unintentionally beneficial to boys. [...] In several instances girls actually seem to be hurt by their interactions with teachers and parents"* (CARR, JESSUP & FULLER 1999, S. 42).

Kritisch ist anzumerken, dass durch die Vermischung von zählendem und ableitendem Rechnen in der Kategorie "covert" mögliche geschlechtsspezifische Unterschiede in der Nutzung wie auch in der Vermittlung von Ableitungsstrategien und damit ein wesentlicher Aspekt der Strategieentwicklung (vgl. die folgenden Kapitel) ausgeklammert werden. Auch bleibt unklar, durch welche Unterrichtsmaßnahmen Buben eher als Mädchen zum Faktenabruf "gelenkt" worden seien. Sofern damit lediglich *Appelle* wie "Versuch' es doch im Kopf!" und ähnliches gemeint sein sollten (was aus dem Text aber nicht deutlich wird), bedürfte es weiterer Überlegungen, inwiefern solche Aufforderungen förderlich sein können für die Automatisierung, die ja der Strategie "retrieval" vorausgesetzt ist; denn ein Kind merkt sich ein Zahlenfaktum wohl nicht einfach deshalb, weil ein Erwachsener gern hätte, dass es sich dieses Zahlenfaktum merkt.

Gemäß obiger Kritik an SIEGLERS These der Ablösung vom zählenden Rechnen durch wiederholtes zählendes Rechnen (vgl. Kap. 2.3.2) scheint es aber plausibel zu sein, dass umgekehrt das (vor-)schnelle und wiederholte Ermuntern zum zählenden Rechnen (ob dieses nun "overt" oder "covert" erfolgt) die Ablösung von Zählstrategien erschweren kann. Wenn Lehrkräfte Jungen eher als Mädchen Faktenabruf zutrauten, könnten solche fortgesetzten Ermunterungen zum zählenden Rechnen bei Jungen seltener erfolgt sein als bei Mädchen. *Das* könnte tatsächlich Einfluss auf die Strategieentwicklung genommen haben (eher als der bloße Appell zum Faktenabruf). Insgesamt lässt die Studie von CARR, JESSUP und FULLER also viele Fragen offen. Ihr Verdienst ist, wichtige Fragen gestellt zu haben, deren Klärung vermutlich tatsächlich einen wichtigen Beitrag zum Verständnis der unterschiedlichen Mathematikleistungen von Buben und Mädchen leisten könnte.

2.8 Beiträge von BAROODY

Die Veröffentlichungen von BAROODY zur Entwicklung kindlicher Rechenstrategien umfassen einen Zeitraum von mittlerweile über 25 Jahren. Sie basieren vor allem auf qualitativen Studien, die BAROODY allein oder mit KollegInnen teils als Einzelfallstudien, teils an kleinen Stichproben von Kindergarten- und Grundschulkindern durchgeführt hat. Wie SIEGLER gelangt BAROODY durch Beobachtung und Befragung der Kinder zum Befund, dass deren Strategieentwicklung nicht linear, sondern in Form einander überlappender Phasen mit jeweils unterschiedlichen Haupt- und Nebenstrategien erfolge. Diese Phasen werden aber von BAROODY vor allem bezüglich der Rolle von Ableitungsstrategien deutlich anders bestimmt.

2.8.1 BAROODYS "schema based view"

Die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien, so BAROODY in einer gemeinsam mit TIILIKAINEN erstellten zusammenfassenden Darstellung, beginne mit "overt counting strategies", also mit offenen Zählstrategien unter Rückgriff auf Material (Objekte, Finger). Es folge eine Phase zunehmender "covert counting strategies", also verdeckter (nur verbaler) Zählstrategien. Diese seien aber bereits kombiniert mit "reasoning strategies", also mit Ableitungsstrategien *auf Grundlage von Überlegungen* über Zahlen und deren operative Zusammenhänge. Schließlich würden Kinder die additiven Grundaufgaben mehr und mehr durch "covert and efficient memory-production processes" lösen. Diese bestünden aber nicht einfach nur im schnellen Abruf von Fakten aus dem Langzeitgedächtnis, sondern vor allem auch im zunehmend *automatisierten Anwenden der erkannten Regeln und Ableitungsstrategien* (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 100).

Ableitungsstrategien spielen gemäß BAROODY und TIILIKAINEN auch eine besondere Rolle beim Übergang von Phase 2 zu Phase 3. Dass nämlich die Basisfakten zunehmend durch Abruf aus dem Gedächtnis gelöst werden können, sei "not a distinct aspect of LTM [long time memory] but an integral aspect of the structured framework for general arithmetic knowledge" (a.a.O., S. 104). Es würden nicht isolierte Fakten *gespeichert*, sondern es entstehe ein Netzwerk aus Fakten und Beziehungen zwischen Fakten. Sobald ein neuer Zusammenhang (etwa Kommutativität) entdeckt wird, werde dieser in das bestehende Netz eingeflochten und dieses dadurch "reorganisiert". Übung könne dazu führen, dass "reasoning processes" und die Anwendung von Regeln, die auf quantitativen Zusammenhängen beruhen, mehr und mehr automatisiert werden. Diesem Charakter des Speicherungsprozesses gemäß umfasse auch der *Abruf* aus dem Gedächtnis nicht nur die Basisfakten selbst, sondern auch Beziehungen zwischen solchen. Schnelle Antworten könnten also ebenso gut das Resultat von "automatic memory production" sein wie von "semi-automatic backup strategies" (a.a.O., S. 104).

"Schlüssel" zum Erlernen der arithmetischen Basisfakten ist für BAROODY und TIILIKAINEN demnach das *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten.* Ganz ähnlich hatte schon BROWNELL befunden:

> *"Arithmetic ability is characterized, not by isolation and independence of facts, but by systematization, recognition of relationships, and generalization"* (BROWNELL 1929, S. 104f).

Als didaktische Konsequenz, so BAROODY in Weiterführung eines schon von BROWNELL propagierten Ansatzes, müsse Kindern die Gelegenheit gegeben werden, arithmetische Muster und Beziehungen zu entdecken und zur Konstruktion von Ableitungsstrategien zu nutzen. Übung entfalte ihre lernfördernde Wirkung nicht dadurch, dass (wie SIEGLER postuliert) Kinder stets aufs Neue zählend zu Lösungen gelangen und dadurch Gedächtnisassoziationen gestärkt würden. Worum es tatsächlich gehe, sei "purposeful and interesting practice". Eine solche ermutige Kinder, nach arithmetischen Gesetzmäßigkeiten zu suchen, über diese nachzudenken und sie anderen zu erläutern. Dadurch erwürben Kinder flexible, auf neue Probleme transferierbare "Schemata" im Sinne PIAGETS (vgl. WITTMANN 1981, S. 63f), welche durch weiteres Übens im beschriebenen Sinne automatisiert würden (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 106f). Nicht die Quantität des Übens sei also entscheidend, sondern dessen Qualität:

> *"When children discover and exploit new relationships, there should be broad improvement in mental-arithmetic performance that may have little to do with the frequency of previous practice"* (BAROODY 1988, S. 372).

Als Beipiel für Schemata, Prinzipien, "relationships", die Kinder durchschauen und auf deren Grundlage sie in weiterer Folge auch zuvor nicht geübte Aufgaben schnell und sicher lösen, bringt BAROODY unter anderem die "*N* after rule" für Additionen mit dem Summanden eins (das Ergebnis ist die "nächste Zahl" in der Zahlwortreihe) (BAROODY 1983, S. 228f). Die Tatsache, dass Kinder mit Hilfe solcher Schemata auch nicht geübte Aufgaben rasch und sicher ohne Rückgriff auf Zählstrategien lösen können, ist für BAROODY ein wichtiger Einwand gegen SIEGLERS Modell der akkumulativen Stärkung von Aufgabe-Ergebnis-Assoziationen durch repetitives Üben (BAROODY 1999, S. 168).

Besonders eingehend beschäftigte sich BAROODY mit dem "Komplementaritätsprinzip", also der Einsicht, dass jede Subtraktion die Umkehraufgabe einer Addition darstellt und auf dieser Grundlage aus dieser abgeleitet werden kann. Seine Arbeiten zur Entwicklung dieser Einsicht werden im Folgenden genauer dargestellt, weil sie in exemplarischer Weise den "iterativen" Zusammenhang zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen erkennbar machen, der für BAROODYS Sicht der arithmetischen Entwicklung wesentlich ist. Zugleich wird an ihnen aber eine theoretische Schwäche deutlich, deren Kritik ein weiterer Abschnitt gewidmet ist.

2.8.2 BAROODY zur Entwicklung des "Komplementaritätsprinzips"

BAROODY, GINSBURG und WAXMANN (1983) erhoben in qualitativen Interviews mit je 18 Kindern einer ersten, zweiten und dritten Klasse, ob und wie häufig diese zur Lösung einer Subtraktion c–a=b auf die komplementäre Addition a+b=c zurückgriffen, unter der Bedingung, dass die Subtraktion *unmittelbar nach* der Addition gefragt wurde. Etwa 80 Prozent der Dritt-, aber nur jeweils etwa 40 Prozent der Erst- und ZweitklässlerInnen taten dies im Laufe der Interviews. Das "Komplementaritätsprinzip" wurde von diesen Kindern in den ersten beiden Klassenstufen damit deutlich seltener angewandt als das Kommutativitätsprinzip der Addition (a+b=b+a), welches in einer analogen Aufgabe von gut 70 Prozent der Erst- und gut 80 Prozent der Zweit- und DrittklässlerInnen genutzt wurde.

Die Autoren betonen zwar zu Recht: "Failure to use a principle does not necessarily imply that the principle is not known" (a.a.O., S. 167). Tatsächlich hätten einige Kinder den Rückgriff auf soeben gelöste Aufgaben als "Schummeln" empfunden und dies dementsprechend "gestanden" oder auch (wahrheitswidrig) bestritten. BAROODY und Kollegen vermuten darin auch eine Reaktion auf bewusste oder unbewusste Botschaften von Erwachsenen, welche den Einsatz von "Abkürzungen" beim Rechnen nicht immer ermutigen würden (a.a.O., S. 168).

Dennoch scheint der komplementäre Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion, ihre gegenseitige Beziehung als Umkehraufgabe der jeweils anderen, für Kinder um vieles schwerer zu verstehen als etwa die Kommutativität der Addition. Um dies näher zu untersuchen, führte BAROODY (1999) zwei weitere Studien durch. Zum einen wurden 40 Kinder im letzten Kindergarten- und ersten Grundschuljahr mit "complement tasks" konfrontiert. Dabei wurde ihnen ein Kärtchen mit einer bereits gelösten Addition (zum Beispiel 4+5=9) gezeigt und vorgelesen. Unmittelbar im Anschluss daran wurde ein Kärtchen mit der komplementären Subtraktion (in dieser Studie 9–4 und nicht 9–5) daneben gelegt und gefragt, ob (im gegebenen Beispiel) 4+5=9 eine Hilfe sei, um 9–4 zu lösen. Wenn ein Kind dies bejahte, sollte es die Subtraktion auch lösen und erläutern, worin die Hilfe bestand.

Um zu vermeiden, dass Kinder durch Anwendung einer unverstandenen Regel (etwa: "Man muss immer die Zahl sagen, die auf dem zweiten Kärtchen fehlt!") Scheinkompetenz vortäuschen können, wurden die "complement tasks" durchmischt mit nicht-komplementären Aufgabenpaaren.

Wegen der bereits bekannten Schwierigkeiten, die das Komplementaritätsprinzip in diesem Alter bereitet, waren die ProbandInnen bewusst aus einem Kindergarten- bzw. Schulprogramm für überdurchschnittlich begabte Kinder ausgewählt worden. Nur 27 Prozent dieser Kinder nutzten das Komplementaritätsprinzip durchgängig, nur 45 Prozent taten dies bei wenigstens einer Aufgabe. Sechs Kinder (15 Prozent der Stichprobe) schienen das Prinzip erst bei Bearbeitung der ersten "complement tasks" im Rahmen des Interviews entdeckt und dann auch bei weiteren Aufgaben angewandt zu haben (BAROODY 1999, S. 142-148).

Die zweite Studie war als Trainingsstudie konzipiert: Nach einem Pretest, der wieder unter anderem "complement tasks" umfasste, erhielten zehn der 20 teilnehmenden ErstklässlerInnen in 24 Sitzungen "direkte Unterweisung" zum Komplementaritätsprinzip. Diese bestand etwa darin, dass

– die Trainerin "wiederholt darauf hinwies", dass etwa die Subtraktion 5–3 auch vermittels der Addition 3+2=5 bzw. als Ergänzung (3+_=5) gelöst werden könne;
– Fragen gestellt wurden wie "Was kommt beim Zählen vor 4? Was fällt dir auf an der Rechnung 4–3=1?";

– die Kinder aufgefordert wurden, auf Kärtchen notierte Additionen und Subtraktionen zu überprüfen und Aufgabe-Umkehraufgabe-Paare heraus zu suchen.

Zusätzlich wurden das Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis zehn an isolierten Aufgaben geübt. Die per Zufallsprinzip ermittelte Kontrollgruppe übte in derselben Zeit dieselben Additionen und Subtraktionen, das Komplementaritätsprinzip wurde in dieser Kontrollgruppe aber bewusst nicht angesprochen (a.a.O., S. 148-156).

Bei einem Prestest zu Beginn des ersten Schuljahres hatten die teilnehmenden Kinder wenig Einsicht in das Komplementaritätsprinzip gezeigt. Bei strenger Auslegung war es nur von fünf der 20 Kinder bei insgesamt neun von 126 Aufgaben angewandt worden. Im Posttest wurden dieselben "complement tasks" gestellt wie im Pretest. Gerade diese Aufgaben waren im Training bewusst ausgeblendet worden, weil überprüft werden sollte, wieweit die Kinder der Trainingsgruppe die Komplementarität auch an nicht-trainierten Aufgabenpaaren erkennen. Die Ergebnisse im Posttest waren nur geringfügig anders als im Pretest: Bei strenger Auslegung (Komplementaritätsprinzip wurde angewandt *und* hinreichend erläutert) waren sieben der Kinder bei insgesamt zehn (oder sieben? – im Text finden sich beide Angaben) von 120 "complement tasks" erfolgreich. Die Kinder der Trainingsgruppe schnitten nicht besser ab als die der Kontrollgruppe, im Gegenteil: jene drei Kinder, die bei den "complement tasks" im Nachtest am besten waren, waren in der Kontrollgruppe gewesen. Die Trainerin hatte bereits nach Abschluss der Trainingseinheiten festgehalten, dass das Komplementaritätsprinzip für die Kinder schwer zu verstehen gewesen sei; ihrem Eindruck zufolge hätten nur fünf der zehn Kinder "gegen Ende des Trainings" eine "Verbindung hergestellt" (a.a.O., S. 156).

Wie schon in der Vorgängerstudie (BAROODY u.a. 1983) gab es auch diesmal Hinweise dafür, dass Kinder die Komplementarität von Subtraktion und Addition am ehesten dann erkennen, wenn sie die Addition bereits automatisiert haben: In neun der zehn Fälle, wo eine "complement task" nach strengen Kritierien richtig gelöst wurde, war die Addition bereits automatisiert. Dementsprechend wurde die Komplementarität am häufigsten bei 8–4 und 6–3 erkannt: Die zugehörigen Verdoppelungen gehörten zu den am öftesten automatisierten Aufgaben.

Zur Deutung der Schwierigkeiten der Kinder mit dem Komplementaritätsprinzip (und der "enttäuschenden Resultate des intensiven und extensiven Trainingsanstrengung") verweist BAROODY auf RESNICKS (1983, 1992) Arbeiten zum Teile-Ganzes-Schema, auf welchem das Komplementaritätsprinzip beruhe. Das Teile-Ganzes-Schema ist nach RESNICK (1983) zwar in einfacher Form (als proto-quantitatives Schema) Kindern schon vor Schuleintritt zugänglich, dessen systematische Anwendung auf Zahlbeziehungen sei aber, so RESNICK, eine Hauptaufgabe des frühen Mathematikunterrichts (vgl. auch Kap. 2.10.4).

Genauer unterscheidet RESNICK (1992) vier Phasen der Entwicklung mathematischen Denkens, die wie in jedem anderen Bereich auch beim Teile-Ganzes-Schema durchlaufen würden:

– Zunächst würden Beziehungen zwischen einem Ganzen und seinen Teilen nur im Umgang mit konkreten Objekten als *quasi-qualitativer Zusammenhang* wahrgenommen und richtig beurteilt, also etwa: Dieser und dieser Haufen von Würfeln können zu einem größeren Haufen zusammengeschoben werden; wenn von diesem großen Haufen dieser Teil weggenommen wird, bleibt dieser andere Teil übrig, usw. ("protoquantitative reasoning").
– Auf dem Level der "mathematics of quantities" gelinge diese Teile-Ganzes-Reflexion mit Bezug auf *quantifizierte* Objekte, z.B.: *Diese drei* (konkret vorliegenden, eventuell aber auch nur vorgestellten) Würfel werden als Teil *dieser fünf* Würfel erkannt. Das Kind kann vorhersehen, dass nach Wegnahme dieser drei Würfel diese zwei Würfel übrig bleiben werden, usw.
– Auf dem Level des "numerical reasoning" kann der Zusammenhang auch abstrakt formuliert werden, aber nur mit ganz bestimmten Zahlentripeln. Dem entspricht BAROODYS Befund, dass von einigen Kindern zwar 8–4 als Umkehrung von 4+4 erkannt wurde, 9–4 aber nicht als Umkehrung von 4+5.
– Erst zuletzt trete "operational reasoning" ein, in dem der Zusammenhang als allgemeines Prinzip, als "Eigenschaft der beteiligten Operationen" Addition und Subtraktion erkannt wird (RESNICK 1992, nach BAROODY 1999, S. 165f).

Wie berichtet, scheint nun das Erfassen der Komplementarität auf dem "numerical-reasoning level" dadurch erleichtert zu werden, dass eine Addition bereits durch Faktenabruf oder rasche Ableitung gelöst werden kann. Umgekehrt vermutet BAROODY, dass bei nicht-automatisierten Additionen die Aufmerksamkeit des Kindes durch "laborious calculation" "aufgebraucht" werde, "leaving none for discovering and using part-whole relationships and the complement regularity" (BAROODY u.a. 1983, S. 166f). In jedem Fall führe die Entdeckung des Komplementaritätsprinzips an einigen wenigen Additions-Subtraktions-Paaren also nicht dazu, dass dieses auf einen Schlag auf alle anderen bereits automatisierten Additionen übertragen werde.

Für BAROODY ist das ein Beispiel dafür, dass der von ihm vermutete "priniciple-based retrieval process" kein "all-or-nothing phenomenon" sei. BAROODY nennt zwei Kriterien dafür, dass ein zunächst nur vereinzelt angewandtes Prinzip verallgemeinert werde: Zum einen gebe es vermutlich einen "Schwellenwert", den der Grad der Automatisation einer Aufgabe bereits überschritten haben müsse, damit diese Aufgabe ihrerseits als Ableitungsbasis für eine andere Aufgabe genutzt werden könne. Zum anderen bedürfe das Ableiten selbst der Übung:

> *"After a period of computational practice in which children discover the complement relation, they go through a period in which they use the relation to reason out differences more or less consciously and relatively slowly. With practice, this reasoning process may become nonconscious and automatic"* (BAROODY 1999, S. 168).

2.8.3 Zur Kritik an BAROODY

Im Zentrum von BAROODYs "schema-based view" steht, wie dargestellt, die These, dass "fact mastery" erreicht werde durch "internalization of relationships" und *nicht* durch "internalization of facts" (BAROODY 1985). Gerade BAROODYs Studien zum "Komplementaritätsprinzip" machen aber deutlich, dass das Gewinnen von Einsicht in operative Zusammenhänge ("relationships") alles andere als selbstverständlich ist. Noch in der dritten Klasse hatte ein Fünftel der befragten SchülerInnen *keine* Einsicht in den komplementären Zusammenhang von Addition und Subtraktion gezeigt (BAROODY u.a. 1983), und BAROODY kann keine empirischen Belege dafür vorlegen, dass nicht auch in höheren Schulstufen ein beträchtlicher Anteil an Kindern ohne diese Einsicht bleibt. Ohnedies ist aber *Einsicht* in ein Prinzip nicht gleichbedeutend damit, dass dieses Prinzip auch tatsächlich beim Lösen von Subtraktionen *Anwendung* findet; BAROODY vermutet ja, dass *Übung im Ableiten selbst* notwendig sei, um das Lösen von Subtraktionen durch Umkehrung gewusster Additionen als Strategie zu automatisieren (BAROODY 1999, S. 168).

Offenbar ist also zumindest bei *manchen Kindern*, zumindest in Bezug auf *manche arithmetische Prinzipien*, keineswegs gesichert, dass sie zu einer "internalization of relationships" (vgl. BAROODY 1985) gelangen, sei es, dass sie diese *Beziehungen gar nicht erfassen*, sei es, dass es ihnen an der zur *Automatisierung* der Ableitungsstrategien erforderlichen Übung mangelt. Was passiert mit diesen Kindern?

In der aktuellsten Darstellung seines Ansatzes, den er dort als "number-sense view" tituliert, geht BAROODY darauf ein, dass manche Kinder "learning difficulties" zeigen und *nicht* zur "fact mastery" gelangen. Deren Scheitern erklärt er als "due largely to inadaquate or inappropriate instruction", wobei das Ungenügende im Unterricht eben darin bestehe, dass auf das Auswendiglernen isolierter, unverstandener Fakten und nicht auf das Verstehen von Zusammenhängen und Automatisieren von Ableitungsstrategien hingearbeitet worden sei (BAROODY 2006, S. 26f). Diese Erklärung hartnäckiger Schwierigkeiten beim Rechnenlernen ist konsequent im Sinne seines Ansatzes, entbehrt aber (zumindest bei BAROODY) der empirischen Absicherung. (Tatsächlich liegen Studien vor, die BAROODY zumindest in manchen Bereichen zu stützen scheinen; sie sind Gegenstand des folgenden Abschnitts.)

Was BAROODY dabei jedoch offenbar gar nicht in Betracht zieht, ist die Möglichkeit, dass zumindest manche Kinder "fact mastery" tatsächlich *ausschließlich oder weitestgehend* als "internalization of facts" erreichen könnten. Das erstaunt schon deshalb, weil er selbst seine "number-sense view" ja als den *Gegenpol* zur "conventional wisdom" darstellt. Er drückt damit aus, dass ein Arithmetikunterricht, den er selbst für förderlich zur Erreichung von "fact mastery" hält, (zumindest in den USA, auf die er sich wohl in erster Linie bezieht) alles andere als verbreitet ist. Die "konventionelle Weisheit" besteht nach BAROODY vielmehr darin, dass es um "memorizing individual facts by rote through repeated practice and reinforcement" gehe (a.a.O., S. 24-27).

Wenn aber der (zumindest in den USA) übliche frühe Arithmetikunterricht mit diesen Worten zutreffend charakterisiert ist und wenn andererseits (vorliegenden Studien zufolge) zumindest ein großer Teil auch der US-amerikanischen SchülerInnen letztlich doch "fact mastery" erreicht, dann wäre doch zumindest *denkbar* (und sollte daher wissenschaftlich geprüft werden), dass zumindest manche Kinder die Basisfakten tatsächlich *nur* auswendig lernen. Es wäre also zu prüfen, ob − gegen BAROODYS apodiktisches Urteil − nicht manche, vielleicht sogar viele Kinder tatsächlich eine "internalization of (isolated) facts" betreiben, also die additiven Grundaufgaben im Langzeitgedächtnis abspeichern, ohne deren operative Zusammenhänge zu durchschauen und für Ableitungsstrategien zu nutzen.

Mit Bezug auf die in der Einleitung zu Kapitel 2 zitierte Unterscheidung WITTMANNS (1995, S. 356f) ist freilich festzuhalten: Wenn man auf der Ebene des *"research in the pre-requisites of learning"* die Möglichkeit des "reinen Auswendiglernens" von Basisfakten in Betracht zieht, dann erklärt man einen auf Auswendiglernen *abzielenden* Arithmetikunterricht damit nicht auch schon für ein gelungenes Unterrichtsdesign. Auf dieser zweiten Ebene der Didaktik, beim *"development [...] of substantial teaching units"*, geht es ja gerade darum, der *Wirklichkeit* des Unterrichts ein *Sollen* (zumindest im Sinne einer Verbesserung) entgegen zu halten. Das unterstellt übergeordnete Ziele, die ihrerseits Ausdruck von (bildungspolitischen, ethischen, sonstigen) Interessen und als solche selbst nicht wissenschaftlich zu begründen sind. Aufgabe der Wissenschaft ist es aber, diese Hierarchie von Zielen klar und deutlich zu beschreiben, ihre logischen und fachlichen Voraussetzungen und Implikationen offenzulegen, dabei allfällige innere Widersprüche aufzuzeigen. In weiterer Folge wird Didaktik auf dieser Ebene zu einer "Ingenieurswissenschaft" ("design science", vgl. WITTMANN 1995): Sie prüft, ob und in welchem Ausmaß Mittel, die zur Erreichung vorgegebener Ziele vorgeschlagen und/oder tatsächlich angewandt werden, dafür auch tatsächlich tauglich sind; sie modifiziert diese Mittel bzw. entwickelt neue und evaluiert wiederum diese Modifikationen und Neuentwicklungen mit Blick auf die vorgegebenen Ziele.

Reines Auswendiglernen ("memorizing by rote") wird von BAROODY als Mittel des frühen Mathematikunterrichts abgelehnt, weil es im Widerspruch zu dem von ihm geteilten übergeordneten Ziel der "adaptive expertise" steht (dazu näher in Kapitel 3). Umgekehrt liefern BAROODYS Arbeiten im Sinne der oben erläuterten "Ingenieurswissenschaft" plausible Argumente und (auf der Ebene von Einzelfallstudien durchaus auch empirische Hinweise) für die These, dass ein Arithmetikunterricht, der "principles" und darauf basierende Ableitungsstrategien in den Mittelpunkt stellt, in besonderer Weise *auch* für das Erreichen von "fact mastery" förderlich sei (mehr dazu im folgenden Abschnitt). In diesem Bereich liefert BAROODY also überaus wertvolle Beiträge zur Didaktik des mathematischen Erstunterrichts.

Wenn er aber (auf die Spitze getrieben in seiner Auseinandersetzung mit ASHCRAFT, siehe Kapitel 2.2) dort, wo es um die *Erforschung* kindlicher Lernprozesse geht, dem reinen Auswendiglernen keinen Platz einräumt; wenn er also die *Möglichkeit* eines solchen, seiner Vorstellung von *gutem* Mathematikunterricht widersprechenden Lernens nicht einmal in Betracht zieht, dann blendet er Teile der Wirklichkeit aus, statt sie zu erklären.

Erst ihre möglichst umfassende Erklärung macht Wirklichkeit aber praktisch handhabbar – gerade auch im Sinne der von BAROODY verfolgten Ziele. Sollte sich nämlich zeigen, dass zumindest manche Kinder durch reines Auswendiglernen zur "fact mastery" gelangen, ergäbe sich sogleich die weitere, praktisch bedeutsame Forschungsfrage: Sind diese beiden Arten von Faktenwissen (jenes auf Basis von Beziehungswissen und jenes ohne diese Basis) gleichwertig? Oder gibt es Unterschiede – etwa mit Bezug auf ihre "Haltbarkeit", also ihre Abhängigkeit von fortgesetzter Übung (welcher Art auch immer)? Oder mit Bezug auf die Häufigkeit von Abruffehlern? Mit Bezug auf die Übertragbarkeit solchen Wissens auf Additionen und Subtraktionen außerhalb des Bereichs der Grundaufgaben? Mit Bezug auf die Tauglichkeit als Verständnisbasis für elementare Algebra? Die Beantwortung solcher Fragen würde wichtiges neues Material liefern für die Beurteilung von Unterrichtsdesigns – nicht auf der Ebene der Zielformulierungen, sondern im Kernbereich einer "Ingenieurswissenschaft", also bei der Frage, ob und wie weit ein gewähltes Mittel (hier: das "bloße Auswendiglernen") zum Erreichen deklarierter Ziele auch tatsächlich taugt.

Freilich: Es ist (wie in anderen Bereichen mathematischen Lernens auch) wenig plausibel, dass wir es hier mit einem strengen "Entweder-Oder" zu tun haben; dass also Kinder entweder *gar keine* Beziehungen durchschauen und ausschließlich "auswendig" (wenn überhaupt) lernen; oder aber *volle Einsicht* in arithmetische Zusammenhänge entwickeln und sich Fakten *nur* im Zusammenhang (und nicht zumindest teilweise auch isoliert) merken.

BAROODY (2006, S. 29) selbst verweist ja darauf, dass sich quantitative Muster und Beziehungen bezüglich ihrer "salience" unterscheiden, also in unterschiedlichem Grad "hervorspringen", mehr oder weniger leicht durchschaubar sind. Dann wäre aber auch plausibel, dass zumindest manche Kinder (vor allem jene, deren Unterricht gemäß "conventional wisdom" abläuft) ausschließlich die "stärker hervorspringenden" Zusammenhänge erkennen, also etwa die "*N* after rule" oder das Kommutativgesetz der Addition. Das Automatisieren allein dieser beiden *Prinzipien* würde bereits zur "fact mastery" bezüglich einer Vielzahl von Basisfakten (allen Additionen mit eins als Summand, unabhängig von dessen Stellung) führen. *Andere*

Basisfakten könnten (zumindest von manchen Kindern) dennoch durch "bloßes Auswendiglernen" automatisiert werden – ob dies nun (vom Standpunkt übergeordneter Ziele aus) wünschenswert ist oder nicht.

Fazit: BAROODYs "schema based view" bzw. "number sense view" leidet an einer Vermengung von *Wunsch* und *Wirklichkeit*. Was er als *Theorie der arithmetischen Entwicklung* vorträgt, ist oft mehr ein (plausibel argumentiertes) *Plädoyer* für einen strategie-orientierten Arithmetikunterricht als eine tatsächlich *wissenschaftliche Darstellung* dessen, wie Kinder *hier und heute* (bezogen auf die US-amerikanische Schulwirklichkeit) tatsächlich rechnen lernen – oder zuweilen auch nicht. Und dass diesem Plädoyer gemäß ein strategie-orientierter Unterricht tatsächlich nicht nur für das *Verständnis* von Zusammenhängen, sondern auch für das *Automatisieren* der Basisfakten förderlich ist, wird von BAROODY im Wesentlichen nur *postuliert.*

Wie bereits erwähnt, wurde in einer Reihe von Studien versucht, diese Wirkung auch *empirisch zu belegen.* Solche Studien sind Gegenstand des folgenden Abschnitts.

2.9 Zur Bedeutung von Ableitungsstrategien für das Automatisieren der Basisfakten

Wie erwähnt, war das Automatisieren der additiven Basisfakten für THORNDIKE (1922) eine Frage des Knüpfens von "bonds", also von festen Verbindungen, die im Langzeitgedächtnis zwischen spezifischen "stimuli" (den "Rechenaufgaben") und spezifischen "responses" (den "Lösungen") etabliert werden müssten. Das konsequenterweise empfohlene Mittel zur Erreichung dieses Ziels im Unterricht war "drill": Aufgabe und Lösung sollten demzufolge immer wieder in unmittelbarer Verknüpfung visuell (als Ziffergleichung) und akustisch (als gehörte Rechnung) dargeboten und vom Kind einzeln (oder auch den Kindern der Klasse im Chor) laut nachgesprochen, mit Hilfe von "flash-cards" eintrainiert werden usw. (zu THORNDIKE und der sich auf ihn berufenden "drill theory" vgl. STEFFE 1979, S. 370f; COWAN 2003, S. 44).

Die additiven Grundaufgaben werden hier also als visuelle und/oder akustische Stimulus-Response-Ketten betrachtet, deren Bedeutung (Zahlen und deren additiver Zusammenhang) für das Automatisieren keine Rolle spiele. WHEELER ging sogar so weit, diese Bedeutung für einen dem Automatisieren abträglichen Störfaktor zu halten:

> *"It might be more economical first to teach the number combinations* [sc. als Stimulus-Response-Ketten ohne jeden Rekurs auf deren Bedeutung; Anmerkung M.G.], *and later develop the number concepts"* (WHEELER 1939, S. 311, zit. n. COWAN 2003, S. 42).

WHEELERS Argument: Wenn Kinder wissen, was Zahlen und Rechenoperationen bedeuten, dann könnten sie auf die Idee kommen, eine Addition zählend zu lösen, statt ihr Heil in bedeutungslos auswendig gelernten Wortketten zu suchen. Einen ähnlichen Rechenunterricht hat wohl schon Mitte des vierten nachchristlichen Jahrhunderts AUGUSTINUS erhalten, der sich noch viele Jahre später in seinen "Bekenntnissen" daran erinnert: "Iam vero 'unum et unum duo, duo et duo quattuor' odiosa cantio mihi erat." ("Wahrlich, eine verhasste Leier war mir dieses 'Eins und eins ist zwei, zwei und zwei ist vier'." AUGUSTINUS o.J/1980, S. 46).

Dieser Form des Rechenunterrichts und der zugrunde liegenden Theorie arithmetischen Lernens setzte BROWNELL seine eigene (von BAROODY 2006, S. 23 so titulierte) "number sense view" entgegen:

> *"According to this theory, arithmetic ability is characterized, not by isolation and independence of facts, but by systematization, recognition of relationships, and generalization; and the pupil learns a fact in relation to other facts, and through these other facts in such a manner that he can be intelligent in using them"* (BROWNELL 1929, S. 104 f).

BROWNELL und CHAZAL versuchten diese Theorie dadurch zu erhärten, dass sie qualitative Interviews mit 32 US-amerikanischen DrittklässlerInnen durchführten, deren Arithmetikunterricht in der ersten und zweiten Klasse nach den Grundsätzen der Drill-Theorie organisiert worden war. Sie konstatierten, dass die Kinder nur etwa 40 Prozent der Aufgaben aus dem Bereich des kleinen Einspluseins durch Faktenabruf korrekt lösten. Etwa 23 Prozent der Additionen wurden zählend gelöst, etwa 24 Prozent "incorrectly guessed", die restlichen abgeleitet (BROWNELL & CHAZAL 1935, nach CIFARELLI & WHEATLEY 1978, S. 368).

Ein auf der "drill theory" (in nicht näher bestimmter Weise) aufbauender Unterricht hat also bei den 32 untersuchten Kindern *nicht* dazu geführt, dass im dritten Schuljahr auch nur die Mehrzahl der Einspluseinsaufgaben automatisiert war. Das kann freilich Zweifel an der Richtigkeit der "drill theory" wecken oder bekräftigen. Deren Vertreter könnten gegen die Studie aber auch einiges einwenden und haben dies auch getan (kleine Stichprobe, fehlende Kontrolle möglicher Störvariablen, vor allem auch die ungeprüfte Möglichkeit, dass die Theorie im Unterricht nicht adäquat umgesetzt worden sei…).

Was die Studie von BROWNELL und CHAZAL aber in keinem Fall leisten kann, ist die *empirische Absicherung* von BROWNELLS Gegentheorie: Selbst wenn "drill" *nicht* (oder zumindest nicht bei *allen* oder nicht bei der *Mehrzahl* von Kindern) zur Automatisierung führt, ist damit ja noch lange nicht erwiesen, dass "systematization, recognition of relationships, and generalization" diesen Effekt hätten.

Und so blieb es in der US-amerikanischen Fachdidaktik zunächst bei einem "Glaubensstreit" zwischen "drill theorists" und "meaning theorists", in welchem sich freilich die "drill theorists" (vgl. etwa CIFARELLI und WHEATLEY 1978) mehr und mehr in der Defensive wiederfanden. Grund dafür waren weniger empirische Studien zum arithmetischen Lernen als vielmehr ein sich in den USA (und anderswo) mehr und mehr durchsetzender Konsens bezüglich wesentlicher Zielsetzungen des Mathematikunterrichts (Näheres dazu in Kapitel 3): Wenn es dem Unterricht generell um *mathematisches Verständnis* als unerlässliche Voraussetzung für Transfer und Anwendung des Gelernten geht, dann muss ein auf Drill basierender Rechenunterricht als Widerspruch zu diesem übergeordneten Ziel betrachtet werden. Umgekehrt zeigt etwa BAROODYS "schema based view" einen Weg auf, wie schon das Lernen der Grundaufgaben als *mathematische Tätigkeit* organisiert werden *kann*.

So verteidigt denn auch STEFFE das gezielte Unterrichten von "thinking strategies" gegen den Einwand von CIFARELLI und WHEATLEY, dass solche Strategien für das Automatisieren der Basisfakten nicht *notwendig* seien (vgl. CIFARELLI & WHEATLEY 1978), *vorrangig* mit dem Hinweis auf übergeordnete Ziele des Mathematikunterrichts:

> *"Goals emphasizing children's arithmetical reasoning should replace those goals emphasizing standard algorithms. [...] the goals of introducing thinking strategies [...] are not necessarily to acquire factual knowledge"* (STEFFE 1979, S. 373).

Hier erfolgt also eine andere Gewichtung als bei BROWNELL: "Thinking strategies" sollten zwar im Unterricht besondere Beachtung erfahren. Aber dabei gehe es *nicht in erster Linie* um die (durchaus *auch* angestrebte) Automatisierung der Basisfakten. Das *wesentliche* Motiv für diese Art von Unterricht sei vielmehr, dass das Herstellen von Beziehungen, das Erkennen und Anwenden von quantitativen Zusammenhängen *für sich genommen* schon wesentliche Ziele des frühen Mathematikunterrichts darstellten (ähnlich GINSBURG 1989, S. 143).

Um *diese* Zielsetzung widerspruchsfrei vertreten zu können, ist es *nicht* notwendig, mit BAROODY zu behaupten, dass Kinder "fact mastery" *ausschließlich* auf dem Weg über Ableitungsstrategien erlangen. Insofern "fact mastery" als Teilziel (oder als Mittel für weitere Ziele) aber auch von den "meaning theorists" angestrebt wird, sollten deren Vertreter zumindest zeigen können, dass die beiden Zielsetzungen – Einsicht in Zusammenhänge einerseits, Beherrschen der Basisfakten anderseits – einander nicht widersprechen. Nachzuweisen wäre also, dass Einsicht in operative Zusammenhänge *auch* dazu beiträgt (oder zumindest nicht davon abhält), die Basisfakten zu automatisieren. Sollte darüber hinaus auch noch gezeigt werden können, dass die Basisfakten auf Grundlage von Einsicht sogar umfassender und/oder mit geringerem Lernaufwand und/oder nachhaltiger und/oder mit geringerer Fehlerquote automatisiert werden können als durch Drill, dann wäre dies als wichtiges zusätzliches Argument für die "meaning theory" zu werten.

Sollte sich dagegen umgekehrt herausstellen, dass Drill – soweit es um die Automatisierung der Basisfakten geht – das effizientere Mittel darstellt, würde dies wohl für eine Art von "Versöhnung" von "drill theory" und "meaning theory" sprechen: Einsicht in operative Zusammenhänge müsste als Ziel deshalb ja keineswegs aufgegeben werden, "thinking strategies" könnten weiterhin einen hohen Stellenwert im Mathematikunterricht haben. Dieses Ziel müsste aber losgelöst von dem zweiten Ziel verfolgt werden, dass darin besteht, die Basisfakten möglichst umfassend zu automatisieren (und für welches dann Drillmaßnahmen als Mittel zum Einsatz kommen sollten; so wohl etwa die Position von CIFARELLI & WHEATLEY 1979).

Soweit die Ausgangslage für eine Reihe von Studien, die unternommen wurden, um in der Auseinandersetzung zwischen "drill theory" und "meaning theory" wenigstens etwas empirischen Boden unter die Füße zu bekommen; einige davon werden im Folgenden näher beleuchtet.

2.9.1 THORNTONs Unterrichtsexperimente

THORNTON (1978) bildete aus den ZweitklässlerInnen zweier US-amerikanischer Grundschulen mit "ähnlichem sozioökonomischen Hintergrund" zwei "intact groups" von jeweils etwa 20 Kindern (genauere Angaben zu den Zuteilungskriterien fehlen). Den Gruppen wurden durch "random assignment" zwei unterschiedliche Treatments zugewiesen:

Die "traditional group" wurde in enger Anlehnung an das verwendete Schulbuch unterrichtet. Es wurden zunächst nur Additionen, dann nur Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn behandelt, dann wieder zuerst Additionen gefolgt von Subtraktionen im Zahlenraum 18. Als Rechenstrategien sah das Buch offenbar einerseits "counting on from larger" vor, andererseits "go to ten", also das Teilschrittverfahren für Zehnerübergänge (vgl. Kap. 2.6). *In welcher Weise* diese Strategien im Buch und im Unterricht behandelt wurden, macht THORNTON nicht deutlich. Ergänzt wurde das Arbeiten im Schulbuch um (gleichfalls nicht näher erläuterte) "teacher-directed drills" (THORNTON 1978, S. 225).

In der "experimental group" wurden zunächst (mit dem Ziel der Automatisierung) alle Verdoppelungsaufgaben bis 18 behandelt. Die weiteren Aufgaben des Einspluseins wurden im Sinne von "related facts" jeweils in Gruppen erarbeitet; es wurden also "Familien" von Aufgaben gebildet, die jeweils durch dieselbe Strategie vorteilhaft gelöst werden können.
Das Erarbeiten dieser Strategien beschreibt THORNTON wie folgt:

> *"There was heavy emphasis on helping children to organize their thinking, to create their own or adopt suggested strategies for remembering the facts prior to drill over any given segment"* (a.a.O., S. 217).

Die "suggested strategies" umfassten

– "doubles +1", ("Verdoppeln plus eins"), also die Ableitung etwa von 6+7 aus der Aufgabe 6+6 nach dem Gedanken "um eins mehr";
– "sharing numbers", also die Ableitung etwa von 6+8 aus 7+7 nach dem Prinzip der "gegensinnigen Veränderung";
– "addition 9s", also die Ableitung etwa von 6+9 aus 6+10;
– "counting on from larger", also bewusstes Weiterzählen vom größeren Summanden bei Additionen wie 2+7 oder 3+6;
– "using 10", also das Ergänzen auf 10 als erster Schritt bei Additionen wie 4+8 ("Teilschrittverfahren", siehe Kap. 2.6).

Dieses Treatment wurde ebenso wie jenes in der "traditional group" während acht Wochen, an jeweils drei Tagen der Woche, jeweils 20 Minuten lang durchgeführt. Der restliche Mathematikunterricht in dieser Zeit war frei von Arithmetik. (Vergleichbare Treatments bezogen auf das kleine Einmaleins erhielten die ViertklässlerInnen der beiden Schulen; dieser Teil der Studie bleibt hier ausgeblendet.)

THORNTON gesteht ein, es sei unmöglich gewesen "to control totally the teacher variable during the study". Es habe aber laufend Gespräche mit den Lehrkräften gegeben "to check whether the guidelines were understood and followed" (a.a.O., S. 216).

Vor Beginn des Treatments (in der zweiten Woche des Schuljahres) wurde in einem Pre-Test erhoben, wie viele der Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 18 ein Kind innerhalb von drei Minuten korrekt löste; dafür wurden sämtliche Grundaufgaben in Zufallsanordnung auf Testformularen abgedruckt. Der Test wurde am Tag nach Beendigung des Treatments als Post-Test und ein drittes Mal als "retention test" wiederholt – zwei Wochen nach Ende des Treatments; in dieser Zeit "*no facts* were studied by the students" (a.a.O., S. 218).
Zusätzlich wurden mit dem (gemessen an den Testwerten) besten sowie schwächsten Drittel beider Gruppen im Anschluss an den "retention test" qualitative Interviews durchgeführt, um Auskunft über die Rechenstrategien der Kinder zu erhalten; diese Interviews wurden am Ende des Schuljahres wiederholt.

Tabelle 4 zeigt die Gruppenmittelwerte und Standardabweichungen bei den drei Rechentests (Anzahl der durchschnittlich innerhalb von drei Minuten richtig gelösten Aufgaben). Beide Gruppen verzeichnen signifikante Zuwächse bei den Additionen. Bei den Subtraktionen trifft dies nur auf die Experimentalgruppe zu, während die Kontrollgruppe bei den beiden späteren Tests sogar signifikant weniger Subtraktionen richtig löste. Letzteres lag vor allem auch daran, dass die Kinder die Reihenfolge, in der sie die Testaufgaben bearbeiteten, selbst wählen durften. Beim Pre-Test seien viele Kinder der "traditional group" nach Beobachtung der

Lehrkraft bedenkenlos über Aufgaben, die ihnen schwer erschienen, hinweggegangen und hätten sich auf die leichteren Aufgaben konzentriert. Bei den nachfolgenden Tests hätten sie eher die vorgegebene Reihenfolge (in der die leichteren und schwereren Aufgaben nach Zufallsprinzip gemischt waren) eingehalten, "perhaps because they felt they should know them" (da sie diese schließlich acht Wochen lang geübt hatten) (a.a.O., S. 226).

Tabelle 4: Mittelwerte der richtig gelöste Additionen und Subtraktionen in Abhängigkeit vom Treatment als "traditional" ("trad.") oder "experimental group" ("exp."), nach THORNTON 1978, S. 219

	pretest		posttest		retention test	
	trad.	exp.	trad.	exp.	trad.	exp.
Mittelwert richtig gelöster Additionen	32,32	23,16	39,36	61,64	36,59	65,20
(Standardabweichung Add.)	(13,01)	(7,67)	(10,96)	(17,26)	(10,21)	(18,93)
Mittelwert richtiger Subtraktionen	27,86	16,56	20,59	41,56	20,59	44,00
(Standardabweichung Sub.)	(14,50)	(7,55)	(9,94)	(16,02)	(10,60)	(17,68)

Dieses nur für die Kontrollgruppe berichtete Testverhalten relativiert freilich auch die weiteren Gruppenvergleiche. THORNTON hält dazu fest, dass die Experimentalgruppe sowohl beim Addieren als auch beim Subtrahieren beim Pre-Test signifikant schwächer, bei den nachfolgenden Tests aber jeweils signifikant besser abgeschnitten habe als die Kontrollgruppe. In einem weiteren Vergleich wurden nur die "harder facts [...] in which both addends [..] were greater than 3 and at least one was greater than 6" (a.a.O., S. 222) berücksichtigt. Beide Gruppen lösten im Pre-Test etwa fünf dieser "harder facts" richtig (wobei, wie dargestellt, die Kinder selbst entscheiden konnten, ob sie sich überhaupt an einer solchen Addition versuchen oder aber diese überspringen wollten). In den nachfolgenden Tests blieb dieser Wert für die Kinder der Kontrollgruppe annähernd gleich, jener der "experimental group" steigerte sich signifikant auf durchschnittlich mehr als 17 "harder facts".

Die nach Beendigung der Treatments durchgeführten qualitativen Interviews zu fünf ausgewählten Additionen ergaben folgendes Bild: Kinder der Experimentalgruppe zeigten bei 80 Prozent der im Laufe der Interviews gerechneten Aufgaben solche Strategien, die während des Treatments "explicitly taught or encouraged" worden waren. Bei Kindern der "traditional group" seien die im Schulbuch behandelten Strategien "counting on from larger" und Teilschrittverfahren dagegen nur bei 32 Prozent der Aufgaben verwendet worden. Viele Kinder dieser Gruppen hätten alle fünf Aufgaben durch Zählstrategien unter Einsatz von Fingern oder eines als Zählhilfe verwendeten Lineals gelöst (a.a.O., S. 225). Wie berichtet, nahmen an den Interviews jeweils das beste und das schwächste Drittel der Kinder (gemessen an den Rechentestresultaten) teil. Sowohl "high" als auch "low achievers" hätten in den Interviews "thinking strategies" gezeigt, allerdings unterschiedlich häufig (62 Prozent der mittels Ableitung gelösten Aufgaben fielen auf die "high achievers").

THORNTON schließt die Veröffentlichung ihrer Studie mit einer vorsichtigen Empfehlung:

> *"Perhaps, in view of E[xperimental] group performance in this and other studies, curriculum and classroom efforts should focus more carefully on the development of strategy prior to drill on basis facts"* (a.a.O., S. 226).

Ihre Vorsicht ist hinsichtlich der methodischen Beschränkungen der Studie wohlbegründet. Eine kausale Interpretation von Unterrichtsexperimenten dieser Art (zumal bei derart kleinen Stichproben) ist grundsätzlich problematisch, selbst dann, wenn (anders als es bei THORNTON möglich war) die Kinder den Gruppen nach strengem Zufallsprinzip zugeordnet werden (vgl. dazu BAUERSFELD 2000). THORNTON selbst weist auf die wesentliche, nicht kontrollierte (und wohl auch nie vollständig kontrollierbare) Variable der Lehrkraft hin. Durch die Freigabe der Reihenfolge, in der die Kinder die Testaufgaben bearbeiten durften, handelte sie sich beträchtliche zusätzliche Unschärfen ein. Weiters gibt ein Test, der nur Geschwindigkeit und Richtigkeit der Aufgabenbearbeitung misst, keine eindeutige Auskunft über die bei der Bearbeitung gewählten Strategien. Die in den Interviews erhobenen zusätzlichen Daten wären diesbezüglich um vieles aussagekräftiger, werden aber nur recht knapp referiert. Alles in allem ist THORNTONS (1978) Studie also vor allem als Motivation für weitere, methodisch sorgfältiger angelegte Untersuchungen zu werten. Sie ist aber für Vertreter der "meaning theory" jedenfalls durchaus *ermutigend*.

Das gilt (ebenso bedingt) auch für THORNTONS (1990) Nachfolgestudien, in denen sie die Wirksamkeit eines strategie-zentrierten Arithmetikunterrichts speziell für das *Subtrahieren* im Zahlenraum bis 18 zu zeigen versuchte. Diesmal wurden zwei erste Klassen über das gesamte Schuljahr nach unterschiedlichen "Programmen" unterrichtet. Die teilnehmenden Kinder in der Kontroll- und Experimentalgruppe waren bezüglich ihrer Durchschnittswerte in einem standardisierten "basic skills"-Test sowie bezüglich ihrer Zählfertigkeiten zu Schulbeginn "gematcht" worden. Das Unterrichtsexperiment wurde mit den Kindern des folgenden Jahrgangs wiederholt.

Die Kontrollgruppe erhielt jeweils den an dieser Schule üblichen Unterricht, der mit Bezug auf das Subtrahieren wie folgt beschrieben wird: Zunächst sei durch "direktes Modellieren" von Sachsituationen am Operationsverständnis gearbeitet worden, wobei Subtrahieren offenbar ausschließlich als *Wegnehmen* (und nicht auch als *Ergänzen*) behandelt wurde. In weiterer Folge seien Subtraktionen gestaffelt nach Zahlenräumen behandelt worden, zunächst im Zahlenraum bis 6, dann 12, dann 18. Übungsseiten hätten üblicherweise jeweils Subtraktionen mit demselben Minuenden vereint, also etwa alle Subtraktionen, bei denen von der Zahl acht subtrahiert wird, dann alle, bei denen von der Zahl neun subtrahiert wird, usw. Übungen hätte es in zweierlei Form gegeben: Einerseits seien Subtraktionen mithilfe von Zählmaterial gelöst worden, andererseits hätten (nicht näher beschriebene) "whole-class activities" im Sinne von "drill for learning and retention" stattgefunden. Über das Schuljahr verteilt, sei so jeweils gebündelt zunächst das Addieren, dann das Subtrahieren in einem bestimmten Zahlenraum behandelt worden, dann wieder Addieren gefolgt von Subtrahieren im nächsten Zahlenraum, usw. (a.a.O., S. 251f).

In der Experimentalgruppe dagegen wurde mit dem Subtrahieren erst begonnen, als "die meisten SchülerInnen" 75 Prozent der Additionen im Zahlenraum bis 18 bereits "beherrschten". Darunter wurde im Einklang mit THORNTONs Verständnis einer "thinking strategy" auch das Addieren durch schnelles und sicheres Weiterzählen verstanden. Die Erarbeitung der Subtraktionen erfolgte nicht getrennt nach "Zahlenräumen", sondern in "Strategiegruppen", also in Gruppen von Aufgaben, die jeweils mit derselben Lösungsstrategie vorteilhaft lösbar sind.

Die erste solche Gruppe bildeten Subtraktionen mit den Subtrahenden eins, zwei und drei. Als Strategie der Wahl wurde den Kindern für solche Aufgaben das "Rückwärtszählen im Kopf" nahe gelegt; vorbereitend war mit den Kindern trainiert worden, von einem beliebigen Wort der Zahlwortreihe bis 20 rückwärts zu zählen. Weitere unterrichtete Strategien waren "Wegnehmen einer Hälfte" (bei 8–4 bis 18–9) und "Wegnehmen von 10" (in Umkehrung der zu diesem Zeitpunkt bereits gelernten Verdoppelungen und Additionen mit der Summe 10) und das "Hochzählen von der kleineren Zahl". Letzteres wurde den Kindern nahe gelegt für Subtraktionen, bei denen der Minuend nur um eins, zwei oder drei größer ist als der Subtrahend (etwa 9–8 oder 9–7).

Diese Strategien seien jeweils unter Einsatz von Material (Rechenwürfeln) erarbeitet worden. Dabei sei durchgehend Wert darauf gelegt worden, dass die Kinder über die Sinnhaftigkeit einer Strategie für eine bestimmte Aufgabe und auch über mögliche andere Wege zur Lösung derselben Aufgabe diskutieren. Umgekehrt hätten die Kinder in eigenen Übungseinheiten immer wieder selbst entscheiden müssen, ob eine bestimmte Strategie für eine vorgegebene Subtraktion von Vorteil sei oder nicht. Erst wenn auf diese Weise Verständnis für die einzelnen Strategien sichergestellt schien, wurden auch in der Experimentalklasse (nicht näher erläuterte) Drill-Aktivitäten gesetzt (THORNTON & SMITH 1988, S. 8ff; THORNTON 1990, S. 249ff).

In qualitativen Interviews zu Schulbeginn war festgestellt worden, dass in beiden Gruppen etwa zwei Drittel der Kinder Aufgaben wie etwa "6–2" bereits vor jeder Unterweisung lösen konnten. Sie taten es (in beiden Gruppen gleichermaßen) vorwiegend mittels einer Zählstrategie, die THORNTON "show all" nennt: Der Minuend ("all") wird dabei zunächst mit den Fingern dargestellt. Für den Subtrahenden wird ein Finger nach dem anderen umgeklappt, dabei wird hochgezählt (im Beispiel also "eins, zwei"). Die verbleibende Anzahl von Fingern wird als Ergebnis genannt (THORNTON & SMITH 1988, S. 10f).

Weitere qualitative Interviews fanden im Abstand von jeweils drei Wochen zwischen Jänner und Mai des ersten Schuljahres statt. Dabei wurden für neun ausgewählte Subtraktionen jeweils Strategien, Lösungszeiten und Lösungsrichtigkeit ermittelt. Zusätzlich wurde in einem Paper-pencil-Test im Mai des ersten Schuljahres ermittelt, wie viele von 54 vorgegebenen Subtraktionen die Kinder innerhalb von drei Minuten richtig lösen konnten; dieser Test wurde nach den Sommerferien als "retention test" wiederholt.

In den qualitativen Interviews wurde deutlich, dass die Kinder der Experimentalklassen beider Jahrgänge am Ende des Schuljahres *signifikant mehr Aufgaben durch Faktenabruf* lösten als jene der Kontrollklassen (etwa 60 Prozent gegenüber etwa 20 Prozent) und signifikant weniger durch "show all". Diese (dem "counting all" bei der Addition entsprechende) Strategie wurde von Kindern der Experimentalklassen schon bei den ersten Interviews im Jänner signifikant seltener und im Mai so gut wie gar nicht mehr verwendet, während in den Kontrollklassen noch im Mai 18 Prozent (Studie I) bzw. 31 Prozent (Studie II) der Aufgaben auf diese Weise gelöst wurden. Im Paper-pencil-Test zeigte sich dementsprechend vor wie nach den Sommerferien ein signifikanter Vorteil der Experimentalklasse, und zwar bei Subtraktionen aller "Strategiegruppen" (a.a.O., 254-257).

In den Kontrollklassen wurden im Jänner gut 50 Prozent der Aufgaben zählend gelöst. Gegen Ende des Schuljahres waren es gut 60 Prozent, wobei freilich im selben Zeitraum der (in diesen Klassen anfangs bei über einem Drittel liegende) Anteil an Aufgaben zurückging, bei denen Kinder erst gar keinen Lösungsversuch unternahmen. In den Experimentalklassen hingegen nahm die Häufigkeit verbaler Zählstrategien von anfangs etwa zwei Drittel auf zuletzt etwa 30 Prozent ab, obwohl dort ja Zählstrategien für bestimmte Aufgaben auch gezielt trainiert worden waren.

Nicht-zählende Ableitungsstrategien wurden in der Kontrollklasse (in der solche Strategien nicht explizit behandelt wurden) in allen Interviews relativ konstant selten verwendet (bei fünf bis elf Prozent der Aufgaben). In den Experimentalklassen zeigte sich bezüglich der Ableitungsstrategien ein interessanter Verlauf: Ableitungen nahmen zunächst zu (in der einen Klasse auf bis zu 41 Prozent beim dritten Interview) – parallel zur steigenden Bedeutung, die ihnen im Strategie-Unterricht im Laufe des Schuljahres beigemessen wurden. Gegen Ende des Schuljahres wurde ihre Verwendung aber wieder seltener – während parallel dazu, wie ausgeführt, der Faktenabruf deutlich häufiger wurde. Das ist vereinbar mit BAROODYs Annahme, dass Aufgaben, die wiederholt durch Ableitung gelöst werden, letztlich automatisiert werden. Freilich sank in den Experimentalklassen aber auch die Häufigkeit von Zählstrategien parallel zur Zunahme des Faktenabrufs, was als Hinweis darauf gewertet werden könnte, dass es zumindest bei manchen Aufgaben auch einen direkten Übergang vom zählenden Rechnen zum Faktenabruf geben könnte. THORNTON selbst geht dieser (wohl nur durch Überprüfung individueller Entwicklungsverläufe zu klärenden) Frage nicht im Detail nach. Sie bemerkt lediglich das zeitliche Zusammenfallen: Ableitungen seien "nicht benötigt oder nicht verwendet" worden "when the memorization rate was higher" (a.a.O., 260).

Die von THORNTON als "harder facts" ausgewiesenen Subtraktionen (im wesentlichen Subtraktionen mit Zehnerübergang mit Ausnahme der Halbierungsaufgaben) wurden auch von den Kindern der Strategiegruppe bis zuletzt überwiegend durch Hochzählen gelöst, eine Strategie, die im Unterricht nur für die Minuenden 1, 2 oder 3 gezielt erarbeitet worden war (a.a.O., 261). Wir werden darauf im Zusammenhang mit Karen FUSONs Zweifeln an der Sinnhaftigkeit eines Strategieunterrichts (Kap. 2.9.8) noch zurückkommen.

2.9.2 STEINBERGS Interventionsstudie

Dass das Erlernen nicht-zählender Strategien Kindern beim Subtrahieren schwerer fällt als beim Addieren, zeigt auch die Interventionsstudie von STEINBERG (1985): Die Autorin ließ zu Beginn der zweiten Schulstufe 23 US-amerikanische Kinder acht Wochen lang Ableitungsstrategien im Zahlenraum bis 18 erarbeiten und trainieren; die reguläre Lehrerin der Kinder wurde zu diesem Zweck vor und während des Treatments entsprechend unterwiesen. Das Treatment orientierte sich an jenem von THORNTON (1978, siehe oben); die einzelnen Ableitungsstrategien wurden unter Einsatz von Material jeweils für sich erarbeitet und im Bereich der zur jeweiligen Strategie gehörigen "Aufgabenfamilie" eingeübt. Die ersten vier Wochen waren Additionsstrategien gewidmet, die zweiten Subtraktionsstrategien; als Grund-Strategie für das Subtrahieren wurde "think addition" erarbeitet, also das Ableiten einer Subtraktion aus der inversen Addition.

Mit jedem Kind fanden im Verlauf der Studie (neben den täglichen Unterrichtsgesprächen) vier umfangreiche qualitative Interviews statt: Eines vor Beginn der Maßnahmen, eines etwa zur Halbzeit, ein drittes unmittelbar und ein letztes zwei Monate nach Beendigung des Treatments. Dabei waren jeweils dieselben acht Additionen und fünf Subtraktionen mit Zehnerübergang zu rechnen. Die Lösungsstrategien wurden beobachtet und/oder durch Befragung ermittelt und in den Kategorien von CARPENTER und MOSER (1984, siehe Kap. 2.4) erfasst.

Der Zuwachs im Verwenden von Ableitungsstrategien zwischen Pre- und Post-Test war signifikant ($p < 0,05$) für das Addieren, aber nicht für das Subtrahieren. Während beim Pre-Test nur 10 der 23 Kinder bei mehr als einer Addition eine Ableitung zeigten, waren es beim Post-Test wie auch zwei Monaten danach 20 Kinder. Beim Post-Test lösten 15 Kinder (gegenüber sechs Kindern beim Pre-Test) mehr als zwei Additionen durch Ableitung, zehn Kinder (gegenüber vier beim Pre-Test) mehr als vier Additionen (a.a.O., S. 346f).

Die quantitative Aussagekraft auch dieser Studie ist begrenzt. Es fehlt eine Kontrollgruppe, die Stichprobe ist klein und stellt keine Zufallsauswahl dar; bezüglich dieser Stichprobe fällt zudem auf, dass schon im Pre-Test der Anteil an Ableitungsstrategien (21 Prozent bei den Additionen, 25 Prozent bei den Subtraktionen, wo allerdings auch jede Kombination von Zähl- und Ableitungsstrategie als Ableitung gewertet wurde) höher war, als dies in früheren Studien berichtet wurde. STEINBERG selbst (a.a.O., S. 337) fasst eine Reihe von (vorwiegend US-amerikanischen Vorläuferstudien) dahingehend zusammen, dass in diesen "only a small percentage (1%−10%)" der zu einem bestimmten Zeitpunkt gegebenen Antworten als "derived fact strategies" gewertet wurden.

In *qualitativer* Hinsicht liefert STEINBERGS Studie aber eine Reihe wertvoller Hinweise. Zum einen konnte sie bei den Kindern drei "clusters of strategy profiles" unterscheiden:

- Die erste Untergruppe bildeten jene sechs Kinder, die schon beim Pre-Test häufig Ableitungsstragien zeigten, allerdings vorwiegend beim Addieren (zwei Kinder bei mehr als zwei der acht Additionen, vier sogar bei sieben oder allen acht Additionen), kaum beim Subtrahieren. "Almost all the children" dieser Gruppe lösten die Aufgaben des Post-Tests vorwiegend durch Faktenabruf.
- Die zweite Untergruppe von zwölf Kindern verwendete beim Pre-Test vorwiegend Zählstrategien, beim Post-Test dagegen vorwiegend Ableitungsstrategien. Vier dieser Kinder waren beim Pre-Test vorwiegend "Alleszähler".
- Die dritte Untergruppe von fünf Kindern blieb in ihrer Strategiewahl während des Treatments relativ stabil; sie griffen durchwegs nie oder nur vereinzelt auf Ableitungsstrategien zurück. Eines der Kinder war als lernbehindert eingestuft; die anderen vier aber waren "very good counters", die "sehr schnell und effizient" waren in der Anwendung der Strategie "counting-on-from-larger".

Die Kinder unterschieden sich also nicht nur (wie aufgrund vorausgehender Studien zu erwarten war) im Strategie-Mix, den sie beim Pre-Test zeigten. Deutliche Unterschiede zeigten sich auch darin, wie die Kinder ihre Strategien unter dem Einfluss eines Treatments, das für alle in gleicher Weise Ableitungsstrategien forcierte, während eines relativ kurzen Zeitraums veränderten oder eben nicht:

Bei Kindern, die bereits vor dem Treatment relativ häufig Ableitungsstrategien verwendeten, scheint das Treatment dazu beigetragen haben, dass die zuvor durch Ableitung gelösten Aufgaben mehr und mehr automatisiert wurden.

Bei jenen Kindern, die vor dem Treatment vorwiegend zählende Rechner waren, ergab sich eine Zweiteilung: Die einen machten sich die im Unterricht behandelten Ableitungsstrategien zu eigen, die anderen nicht, wobei offenbar gerade jene Kinder an ihren ursprünglichen Zählstrategien festhielten, die mit diesen schnell und sicher zu richtigen Lösungen kamen (a.a.O., S. 347f).

Gleichfalls bedeutsam als Ausgangspunkt für weitere Forschungen ist STEINBERGS Bericht über *Schwierigkeiten*, die sich beim Vermitteln der Ableitungsstrategien zeigten:

- Üblicherweise seien zumindest zwei bis vier Einheiten vergangen, ehe Kinder eine neu gelernte Strategie auch *von sich aus* ("by choice") benützten – obwohl sie diese Strategie zumeist schon in der derselben Stunde, in der sie eingeführt wurde, auf *Verlangen der Lehrkraft* anwenden konnten (a.a.O., S. 348).
- Das Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang gestaltete sich deshalb als besonders schwierig (und wurde auch bis zuletzt wenig verwendet), weil etwa die Hälfte der Kinder die Additionen mit der Summe 10 noch nicht automatisiert hatten und zudem mehr als ein Drittel der Kinder "lacked a basic understanding of place value and had to count to find the answer to a problem like 10+4" (a.a.O., S. 348).
- Einige wenige Kinder wandten die gelernten Strategien offenbar ohne tieferes Verständnis an. So lösten vier Kinder etwa 7+6 hartnäckig als 7+7+1, weil sie die Regel "Verdoppeln plus eins" bei Aufgaben wie 6+7 gelernt und übergeneralisiert hatten, dass stets die erste Zahl zu verdoppeln sei. Vielen Kindern gelang es aber, gelernte Strategien auf neue Aufgaben zu übertragen bzw. für diese abzuändern. So lösten sie etwa 7+6 als 7+7–1, noch ehe die Strategie "Verdoppeln minus eins" explizit im Unterricht behandelt wurde (a.a.O., S. 349).
- Das Erlernen der Subtraktionsstrategien gestaltete sich durchgehend schwieriger, was vor allem daran lag, dass vielen Kindern vor Beginn des Treatments der inverse Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion nicht klar war und erst grundlegend erarbeitet werden musste (a.a.O., S. 349).
- STEINBERG hält fest, dass neben kognitiven Faktoren (Einsicht in eine Strategie, vorhandenes Faktenwissen usw.) vermutlich auch soziale und personale Faktoren eine Rolle bei der Entscheidung eines Kindes für oder gegen eine bestimmte Strategie gespielt hätten; diese seien aber durch Gespräche mit den Kindern nicht immer zu entschlüsseln gewesen. So spiele offenbar "social pressure" eine Rolle dabei, ob ein Kind offene Zählstrategien anwende oder nicht. Andere Kinder hätten sich dahingehend geäußert, dass sie (scheinbar willkürlich) es einmal mit den Fingern, einmal im Kopf probierten (wobei unklar bleibt, was sie mit "im Kopf" meinen: ein "Zählen im Kopf", oder der Versuch, sich an Gelerntes zu erinnern, oder eine Ableitung...) (vgl. STEINBERG, S. 353).

Zusammengefasst liefert STEINBERGS Studie eine Fülle von wichtigen Beobachtungen dazu, wie Kinder (in all ihrer Vielfalt) auf einen Unterricht reagieren, der Ableitungsstrategien in den Mittelpunkt stellt. Wie STEINBERG selbst einräumt, erlaubt das Design der Studie keine klaren Aussagen dazu, "whether an extensive use of DFSs [derived fact strategies] leads to the recall of number facts" (a.a.O., S. 352). Bei jenen sechs Kindern, die bereits von einem hohen "Ableitungs-Level" ausgehend weiter im Gebrauch von Ableitungsstrategien unterstützt wurden, könnte dies förderlich auf das Automatisieren gewirkt haben. Es lässt sich aber die Gegenhypothese nicht widerlegen, dass es sich dabei um jene Kinder gehandelt habe, die (etwa auf Grundlage überdurchschnittlicher "Merkfähigkeit") in jedem Fall (auch ohne diese Art des Unterrichts) so weit gekommen wären. Die Faktenlage ist aber zumindest mit der Annahme einer förderlichen Wirkung von Ableitungsstrategien *verträglich.*

Umgekehrt hatten gerade jene Kinder, die zu Beginn des Treatments schnelle und sichere Weiterzähler waren und Ableitungsstrategien vermutlich gerade deshalb nicht in ihr Strategie-Repertoire aufnahmen, auch zwei Monate nach Beendigung der Studie keine Fortschritte im Faktenabruf gemacht. Das spricht erneut gegen SIEGLERS Annahme, dass gerade das häufige erfolgreiche zählende Lösen einer Grundaufgabe deren Automatisierung nach sich ziehe.

2.9.3 Beiträge von GRAY und KollegInnen

GRAY bemüht sich seit Anfang der 1990er Jahre (allein und in Kooperation mit KollegInnen) in einer Reihe von (vorwiegend qualitativ orientierten) Arbeiten um den verstehenden Nachvollzug kindlicher Denkprozesse beim Anwenden von Zähl- bzw. Ableitungsstrategien. In einer vielbeachteten Studie (GRAY 1991) befragte er Kinder zwischen sieben und zwölf Jahren aus zwei englischen Schulen zu ihren Lösungsstrategien bei Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 18. Dabei wurden aus jeder der zwölf teilnehmenden Klassen jeweils sechs Kinder ausgewählt, von denen nach Einschätzung der Klassenlehrkraft je zwei bezüglich ihrer Rechenleistungen über dem Durchschnitt, repräsentativ für den Durchschnitt und unter dem Durchschnitt der Klasse waren (GRAY 1991, S. 557f.).

Ähnlich wie in den bereits erwähnten Studien aus den USA oder auch Norwegen war der Prozentsatz von Aufgaben, die von den englischen Kindern durch Faktenabruf gelöst wurden, selbst im Zahlenraum bis zehn (und selbst bei den als überdurchschnittlich eingestuften Kindern) noch in der Alterstufe der Achtjährigen bescheiden: Die "above average" Achtjährigen lösten im Schnitt etwa 70 Prozent der Additionen und etwa 60 Prozent der Subtraktionen in diesem Zahlenraum durch Faktenabruf. Bei den "below average" Achtjährigen waren es etwa 35 Prozent der Additionen und etwa 15 Prozent der Subtraktionen. Bei den als "durchschnittlich" eingestuften Kindern zeigten nur die Zwölfjährigen weitestgehende Automatisierung im Zahlenraum bis zehn; bei den "below average" Kindern wurde diese in keiner Alterstufe erreicht werden. GRAY vermerkt

> *"a two year gap, extending to three years by the age of twelve, between the level of attainment of the below average and the above average children in knowledge of the number facts to ten"* (a.a.O., S. 560).

Angesichts der kleinen Stichprobe, der unscharfen Kriterien für die Auswahl der Kinder und schließlich des Querschnittcharakters der Studie ist in der Interpretation der Daten Vorsicht angeraten. GRAYs "two year gap" könnte so verstanden werden, als würden die "below average" SchülerInnen im selben Ausmaß zur Automatiserung der Basisfakten gelangen wie die anderen, "nur" eben um zwei Jahre *verzögert*. Tatsächlich kann dies aus den erhobenen Daten keinesfalls geschlossen werden, und GRAYs weitere Ausführungen laufen auch gerade darauf hinaus, dass dies zumindest für manche SchülerInnen sogar höchst unwahrscheinlich ist.

GRAY interessieren dabei weniger die quantitativ messbaren Unterschiede zwischen den Kindern der drei Leistungsstufen als vielmehr ihre *qualitativ unterschiedlichen Zugänge* zu Zahlen und Rechenaufgaben. GRAY und TALL (1994, S. 129) prägen dafür in weiterer Folge den Begriff "proceptual divide". Als "procept" bezeichnen sie die "symbolic ambiguity" von Ausdrücken wie "3+4", ihre Zweideutigkeit als symbolische Darstellung einerseits einer "procedure", andererseits eines "concept":

– Als "procedure" verstanden, ist "3+4" für ein Kind ein "Auftrag" zum Alleszählen von zuerst drei, dann vier, dann sieben Objekten, oder auch zum Weiterzählen "um vier" (von "drei" ausgehend) bzw. "um drei" (von "vier" ausgehend).
– Als "concept" oder "object" betrachtet, ist "3+4" *dasselbe wie* "7" (oder auch wie "5+2" oder "die Hälfte von 14").

Kinder auf der einen Seite des "proceptual divide" würden nur die "procedures" zur Kenntnis nehmen, nicht aber die "concepts". Sie können dann zwar zählend die korrekte "Lösung" einer Addition ermitteln, aber "without [..] linking input and output in a form that will be remembered as a new fact" (GRAY 2003, S. 69). Die Kinder auf der anderen Seite dieser Trennlinie "sehen" als Ergebnis der Prozedur ein *Zahlenfaktum*, sie verstehen also "3+4=7" als eine Aussage über einen feststehenden *Zusammenhang*, eine *Beziehung* von drei als *Objekten* gedachten Zahlen.

Dieser "proceptual divide", also der grundsätzliche Unterschied im Denken über Zahlen und Operationen, sei nun der geistige Hintergrund der vordergründig feststellbaren Unterschiede im Strategiegebrauch: GRAY (1991) befragte die Kinder seiner Querschnittstudie dazu, was sie selbst für die "beste Art, eine Addition zu lösen" hielten. Wenig überraschend meinten 91 Prozent der Kinder, dies sei "knowing the answer". Nun wussten aber, wie berichtet, viele Kinder bei vielen Additionen die Antwort eben nicht schon auswendig. Was sei dann das "Nächstbeste"? Drei Viertel der "below average"-Sieben- und Achtjährigen meinten, dass in diesem Fall *Zählen* der beste Weg sei. Und dementsprechend agierten diese Kinder auch: Während die "above average children" Aufgaben, die sie nicht auswendig wussten, wenigstens zu einem Teil (und die Achtjährigen sogar fast ausschließlich) durch Ableitungsstrategien lösten, waren solche Ableitungsstrategien bei den "below average children" so gut wie gar nicht zu beobachten.

Nun hatten diese Kinder freilich auch bereits wesentlich weniger Basisfakten automatisiert als die Kinder der beiden anderen Leistungsstufen. Somit waren ihre Möglichkeiten zum Ableiten schon alleine dadurch limitiert. Offenbar verwendeten sie aber auch die wenigen von ihnen bereits automatisierten Basisfakten nicht, um mit deren Hilfe andere Aufgaben abzuleiten (a.a.O., S. 564-569). Warum aber haben diese Kinder weniger Basisfakten automatisiert? GRAY (1991) interpretiert dies als *Folge ihres zählenden (prozeduralen) Zugangs* – ganz im Gegensatz zu SIEGLER, der umgekehrt das *Automatisieren* als *Folge wiederholten Zählens* sieht. GRAYS Argument wurde bereits in der Besprechung SIEGLERS gewürdigt (vgl. Kap. 2.3). Unter Verwendung der nun erläuterten Begriffe lässt sich GRAYS Position nun noch etwas differenzierter fassen:

Nicht das zählende Rechnen an sich verhindert nach GRAY das Automatisieren, sondern das *eingeschränkte Verständnis von Zahlen und Rechenoperationen*, das bei manchen Kindern (aber keineswegs allen) das zählende Rechnen begleitet. GRAY (2003) erläutert das mit dem Vergleich eines Fünfjährigen und des achtjährigen Joseph. Beide ermitteln die Lösung der Addition 4+3 zählend, aber:

> *"The 5-year-old is experiencing counting as part of a programme of conceptual development which may eventually give him choices. Joseph and children like him are counting because they are unable to do anything else – they have no choice"* (a.a.O., S. 65).

Dass Joseph "keine Wahl" habe und zählen müsse, liege eben daran, dass er "4+3" *nur* als "Auftrag zum Zählen" (procedure) verstehe und *nicht auch* als Zahlenfaktum (concept), das mit anderen Zahlenfakten (beispielsweise 3+3) zusammenhängt.

Im zählenden Rechnen (speziell im *weiter*zählenden Rechnen) sieht GRAY aber sehr wohl auch die Möglichkeit, ein solches "prozeptuelles" Verständnis zu entwicklen, welches über das zählende Rechnen hinausführt:

> *"However, count-on may lead to the development of a procept. It can produce a result that is seen both as a counting procedure and a number concept"* (GRAY 2003, S. 69; ebenso GRAY & TALL 1994, S. 124).

Der *entscheidende* Unterschied zwischen "procedural" und "proceptual approach" liege nun aber gerade *im Gebrauch von Ableitungsstrategien*:

> *"The use of derived facts strengthens the bonds between the known knowledge and the relationships and structures that are inherent in the number system. [...] using derived facts to obtain solutions is an auxiliary approach which enhances the ability to remem-*

> *ber. […] Thus it is suggested that the use of derived facts for the younger children is an indispensable stage in developing knowledge of the number bonds"* (GRAY 1991, S. 571).

Die hier begründete "prozeptuelle Trennung" der Kinder führe dazu, dass sie in weiterer Folge tatsächlich "a different form of mathematics" (GRAY 1991, S. 570) betreiben würden, mit weitreichenden Folgen:

> *"It is hypothesized that the difference between success and failure lies in the difference between the use of procepts and procedures. [...] This divide between success and failure is found throughout the mathematics curriculum. [...] they may ask 'tell me how to do it', anxiously seeking the security of a procedure rather than the flexibility of procept. From this point on, failure is almost inevitable. It is for this reason that mathematics is known chiefly as a subject in which people fail, fail badly, and fail often"* (GRAY 2003, S. 70).

In späteren Arbeiten beschrieben GRAY und KollegInnen diesen unterschiedlichen Zugang auch als Unterschied im "focus", den Kinder auf die Elemente einer (im Unterricht veranlassten) Handlung legen: Die einen richteten ihre Aufmerksamkeit auf die *Beziehungen zwischen* den Objekten, mit denen sie handeln; sie seien in der Lage "to separate the inherent mathematical qualities from the actual physical context". Die anderen achteten eher auf "physical aspects of the activity, which are assimilated in an episodic way", sodass etwa Farbe oder räumliche Anordnung von Rechenwürfel für bedeutsam gehalten und erinnert würden, aber nicht deren quantitatives Verhältnis (GRAY, PINTO, PITTA & TALL 1999, S. 120). Dementsprechend unterschiedlich seien auch die *mentalen Repräsentationen,* welche die einen wie die anderen ausbildeten. Bei den "high achievers" bestünden diese in "numerischen Symbolen", welche durch "flexible mental links" verbunden seien (a.a.O., S. 123). Anders bei den "low achievers":

> *"The objects of thought of the low achievers were analogues of perceptual items that seemed to force them to carry out procedures in the mind, almost as if they are carrying out the procedures with perceptual items on the desk in front of them"* (PITTA & GRAY 1997, zitiert nach GRAY u.a. 1999, S. 122).

Zur Würdigung der Beiträge von GRAY und KollegInnen:

Ihre empirische Basis sind Einzelfalluntersuchungen und kleine Stichproben mit unscharfen Auswahlkriterien (etwa "above average/average/below average" einzig auf Grundlage von Lehrereinschätzungen). Die Befunde daraus werden auf einem durchwegs hohen argumentativen Niveau interpretiert. GRAY und KollegInnen verabsäumen es aber, die auf diese Weise gewonnenen Vermutungen über kindliche Denkweisen und den "proceptual divide" so weit zu operationalisieren, dass sie einer empirischen Überprüfung zugänglich wären.

Das liegt wohl auch darin begründet, dass es sich bei der Rede vom "divide" wohl um eine bewusste Zuspitzung handelt, die zugunsten der didaktisch-pädagogischen Botschaft (aber zulasten der wissenschaftlichen Genauigkeit) vorgenommen wurde: Mit "procedural" und "proceptual approach" sind aus Sicht der Autoren die *Extreme* eines breiten Spektrums von kindlichen Zugängen beschrieben. Sie gestehen selbst ein: "Translating what may seem to be the extreme cases [...] across the full range of the children that we meet is not easy" (GRAY & PITTA-PANTAZI 2006, S. 218). Die Zuspitzung erfolgt in der erklärten Absicht, Lehrkräfte auf die Gefahren aufmerksam zu machen, die ein vorrangig auf Vermittlung von Prozeduren gerichteter Unterricht für "low achievers" in sich birgt (vgl. GRAY 1991, 571-573; GRAY & PITTA 1999, S. 14f; GRAY 2003, S. 70ff).

Der wissenschaftliche Ertrag wird dadurch aber eingeschränkt. Wir wissen (nicht erst, aber auch aus den Befragungen von GRAY und KollegInnen), dass Kinder (nicht nur in Abhängigkeit von ihrem Alter) unterschiedlich viele Basisfakten gespeichert haben. Wir wissen, dass manche Kinder Ableitungsstrategien anwenden, andere nicht. Dass jene Kinder, die nur wenige Basisfakten gespeichert haben, auch so gut wie keine Ableitungsstrategien zeigen, ist schon deshalb plausibel, weil Ableiten ein gewisses Maß an Automatisierung voraussetzt.

Dass aber umgekehrt Kinder, die *nicht* ableiten, *deshalb* in geringerem Umfang und/oder erst später zur Automatisierung der Basisfakten gelangen, ist eine Hypothese, für die GRAY und KollegInnen zwar plausible Argumente liefern, die von ihnen aber ebenso wenig empirisch geprüft wird wie die dazu komplementäre Annahme, dass Kinder, die Ableitungsstrategien zeigen, *deshalb* Vorteile in der Automatisierung der Basisfakten haben. Die Querschnittstudie, aus der GRAY seine Vermutung ursprünglich ableitet, ist für eine solche Überprüfung schon vom Design her (Stichprobenauswahl, Querschnittcharakter) nicht geeignet.

Zudem kann die "Alles-oder-nichts"-Sichtweise eines "proceptual divide" der Vielfalt kindlicher Entwicklungsvarianten vermutlich nicht gerecht werden. Wenn Ableitungsstrategien tatsächlich dem Automatisieren förderlich sind, wäre doch plausibel, dass das Ausmaß des Automatisierens auch davon abhängt, *welche* Ableitungsstrategien ein Kind *wie häufig* verwendet. Es ist anzunehmen, dass auch "above average children" sich diesbezüglich unterscheiden; schließlich sind manche Strategien, wie BAROODY festhält, mehr, manche weniger "salient". Weiters ist anzunehmen, dass auch *Gedächtnisstrategien* dabei eine Rolle spielen (vgl. Kap. 2.12). All das wird aber von GRAY und KollegInnen in ihren Überlegungen ausgeblendet.

2.9.4 Beiträge aus Australien

Stärker quantitativen Methoden verpflichtet als GRAY und KollegInnen, untersuchten CHRISTENSEN und COOPER (1992) die Frage nach dem Einfluss von Ableitungsstrategien in einer Interventionsstudie mit 40 australischen ZweitklässlerInnen. In einem Pre-Test wurde zunächst erhoben, mit welchen Strategien und wie rasch diese Kinder zu Beginn des zweiten Schuljahres Additionen im Zahlenraum 18 lösten. Keines (!) der Kinder habe dabei Ableitungsstrategien gezeigt, solche seien auch im ersten Schuljahr nicht Gegenstand des Unterrichts gewesen. Die Kinder absolvierten dann zwölf Wochen lang ihren Mathematikunterricht, der nunmehr zwar nicht vorrangig, aber auch die Erarbeitung und den Gebrauch von Ableitungsstrategien wie "Verdoppeln plus eins" und das Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang beinhaltete. Daneben gab es wie bisher "experiences with manipulative materials, drill and practice games, speed drills" (CHRISTENSEN & COOPER 1992, S. 40).

Auf Grundlage des (den Pre-Test wiederholenden) Post-Tests wurden nach Ablauf dieser zwölf Wochen zwei etwa gleich große Gruppen von SchülerInnen unterschieden, "strategy users" und "non users". Als "user" wurde offenbar jedes Kind gewertet, welches bei wenigstens einer Aufgabe eine Ableitungsstrategie demonstrierte. Der Vergleich der Mittelwerte beider Gruppen ergab, dass die "user" beim Post-Test signifikant mehr Aufgaben durch Faktenabruf und signifikant weniger durch Zählstrategien lösten als die "non user".

Freilich: Signifikante Gruppenunterschiede im Faktenabruf waren schon beim Pre-Test gegeben, als noch keines der Kinder Ableitungsstrategien zeigte. CHRISTENSEN und COOPER vermuten deshalb den Einfluss unterschiedlicher "ability": Die "begabteren" Kinder würden einerseits eher Ableitungsstrategien entwickeln (bzw. die unterrichteten Strategien übernehmen) als die "weniger begabten" Kinder. Das wiederum erhöhe in weiterer Folge die Wahrscheinlichkeit, dass die begabteren Kinder letztlich noch häufiger Faktenabruf (und noch seltener Zählstrategien) verwendeten.

Dagegen ist anzumerken, dass "ability" als *Erklärungs*kategorie keine zusätzliche Erkenntnis bringt: Die "Fähigkeit" wurde ja in dieser Studie gar nicht anders bestimmt als über die Anzahl der automatisierten bzw. abgeleiteten Basisfakten. Es lässt sich als Befund dieser Studie also unter Verzicht auf diese Kategorie auch einfach festhalten, dass jene Kinder, die schon vor dem "Strategieunterricht" relativ viele Basisfakten automatisiert hatten, nach diesem Unterricht in der Regel sowohl Ableitungsstrategien demonstrierten als auch Zuwächse im Faktenabruf verzeichneten.

CHRISTENSEN und COOPER gestehen in ihrer Interpretation dieses Befunds zwar ein: "Causal links cannot be sustained with the confidence that an experimental design would provide".

Dennoch meinen sie, ihre Befunde würden die Hypothese stützen, "that strategy use facilitates the transition from counting to retrieval of facts to memory" (a.a.O., S. 42). Dem ist entgegen zu halten, dass die Befunde mit dieser Hypothese zweifellos *vereinbar* sind. Sie lassen sich aber auch umgekehrt so interpretieren, dass Faktenabruf eine Voraussetzung für das Anwenden von Ableitungsstrategien darstellt. Dass das zumindest *auch* der Fall ist, zeigt eine simple Sachanalyse: Um eine Aufgabe *ableiten* zu können, muss man eine *andere Aufgabe* auswendig wissen, *von der* man ableiten kann. Kinder, die weniger auswendig wissen, haben auch weniger Möglichkeiten, abzuleiten. Dass umgekehrt durch das (wiederholte) Ableiten das Auswendiglernen der zunächst abgeleiteten Fakten befördert wird, wird von BAROODY, GRAY und anderen "meaning theorists" postuliert, es bleibt aber auch nach CHRISTENSEN und COOPERS Studie wohl nur eine (wenn auch plausible) Vermutung.

Zu Vorsicht und stärkerer Differenzierung in dieser Frage mahnt die Querschnittstudie von CUMMING und ELKINS (1999) mit insgesamt 109 Kindern der dritten, vierten, fünften und sechsten Schulstufe einer australischen Grundschule. Im Mathematikunterricht dieser Schule waren "thinking strategies" in den beiden ersten Schuljahren "direkt unterrichtet" worden, wobei als "thinking strategy" allerdings auch das *Weiterzählen* bei Additionen mit 1, 2 und 3 gewertet wurde, sofern es bewusst vom *größeren* Summanden ausgeht. Andere unterrichtete Strategien waren etwa "Verdoppeln plus eins", "Verdoppeln plus zwei", "Verdoppeln plus drei" oder das Lösen einer Addition "x+9" mithilfe der Nachbaraufgabe "x+10".

In dieser Schule wurden *bewusst keine "drill activities"* gesetzt. Die Annahme war, dass die Kinder (auch) über den Gebrauch von "thinking strategies" zur Automatisierung der Basisfakten gelangen würden. Letzteres wurde aber offenbar nicht als vorrangiges Ziel betrachtet, wie aus den Zeitvorgaben hervorgeht: "The stated expectation of the syllabus was that children would have automaticity of the addition facts by the end of Grade 5" (CUMMING und ELKINS 1999, S. 162).

Die Dritt- bis SechstklässlerInnen dieser Schule wurden in der zweiten Hälfte des Schuljahres wie folgt getestet: Zunächst mussten sie alle 100 Additionen mit Summanden zwischen 0 und 9 unter Erfassung der Lösungszeiten am Computer rechnen. Dann wurden sie in qualitativen Interviews zu ihren Strategien bei 12 ausgewählten Additionen befragt. Die 100 Aufgaben des kleinen Einspluseins wurden auf acht "fact bundles" aufgeteilt, etwa "zero facts" (0+0 bis 0+9/9+0), "doubles" (Verdoppelungen), "near doubles" (wie etwa 4+5) oder auch "nine facts" (9+6), wobei die Klassifikationen "mutually exclusive" vorgenommen wurden (9+8 wurde etwa als "near double" gewertet und nicht als "nine fact") (a.a.O., S. 161f).

Auf Grundlage der gemittelten Lösungszeiten für Aufgaben der einzelnen "fact bundles" wurden neun Cluster von Kindern mit "similiar processing profiles" gebildet: Alle Kinder waren nämlich etwa gleich schnell bei Additionen mit 0 und 1 sowie Verdoppelungsaufgaben im Zahlenraum bis zehn, sie unterschieden sich aber signifikant bezüglich ihrer Lösungszeiten bei Aufgaben der anderen "fact bundles". Cluster 1 umfasste die durchgehend schnellsten Kinder, Cluster 9 die durchgehend langsamsten. Ein Vergleich der Clusterzugehörigkeit mit den in den qualitativen Interviews erhobenen Lösungsstrategien ergaben "a tendency for" Faktenabruf oder Ableitung bei den Kindern der drei schnellsten Cluster, gleichfalls tendenziell eine Mischung aus Ableitungs- und Zählstrategien bei den Kindern der Cluster 4 bis 6, und "considerable use of counting strategies for Clusters 7 through 9" (a.a.O., S. 162-167).

Die Strategieprofile der Kinder konnten auf diese Weise sehr differenziert miteinander verglichen werden. Wie in früheren Studien zeigten Kinder höherer Schulstufen zwar tendenziell einen höheren Anteil an Faktenabruf und Ableitungsstrategien. Doch selbst in der *fünften und sechsten* Schulstufe waren noch (je zwei) Kinder zu finden, die vorwiegend auf Zählstrategien vertrauten. Nur 16 der 55 Kinder (29 Prozent) dieser beiden Schulstufen hatten das kleine Einspluseins tatsächlich vollständig automatisiert; 17 weitere lösten die nicht-automatisierten Aufgaben im Wesentlichen durch Ableitungsstrategien, 18 kombinierten Ableitung und Zählstrategien.

In der *dritten* Schulstufe hatte kein einziges Kind alle (oder fast alle) Aufgaben automatisiert. Nur eines verzichtete fast vollständig auf Zählstrategien, zwölf weitere mischten Zähl- und Ableitungsstrategien. Zehn von 23 Kindern (43 Prozent) der dritten Schulstufe zeigten noch im zweiten Halbjahr einen hohen Anteil an Zählstrategien. Deutlich anders die Verteilung in der *vierten* Schulstufe: Zwei von 29 Kindern lösten die Aufgaben fast durchgehend durch Faktenabruf, zehn weitere durch Faktenabruf oder Ableitung, 13 Kinder teils nicht-zählend, teil zählend, und vier Kinder (14 Prozent) vorwiegend zählend (a.a.O., S. 167).

Da es sich um eine Querschnittstudie mit noch dazu kleinem Sample handelt, können bezüglich der *Entwicklung* von Lösungsstrategien auf Basis der gewonnenen Daten lediglich Hypothesen formuliert werden. Entsprechend vorsichtig formulieren die Autoren: Die Daten würden es nahe legen, "that instruction in thinking strategies does not in itself necessarily lead to automaticity of the addition facts" (a.a.O., S. 172). Nun führt wohl keine Art des Unterrichts "in itself necessarily" zum angestrebten Lernerfolg. Es muss aber festgehalten werden, dass CUMMING und ELKINS die Art und Weise wie auch die Intensität der "instruction in thinking strategies" in den beiden ersten Schuljahren wie auch den Unterricht danach weitgehend im Dunkeln lassen. Berücksichtigt man aber das wenige, das doch zu erfahren ist, dass nämlich

– erstens offenbar *gar keine Aktivitäten auf das Auswendiglernen* von Basisfakten gerichtet waren,

- zweitens auch *Strategien des Weiterzählens* als "thinking strategies" interpretiert und daher *gezielt unterrichtet* wurden,
- schließlich ab Beginn der dritten Schulstufe "thinking strategies" im Unterricht nicht mehr weiter behandelt wurden,

dann scheint folgende Interpretation der Daten mindestens so plausibel:

- Ein Mathematikunterricht, der *ausschließlich* auf Ableitungsstrategien setzt und sich *nicht zusätzlich auch* um Automatisierung bemüht, scheint nicht geeignet, um Kinder mehrheitlich und frühzeitig zur Automatisierung der Basisfakten zu führen. Das ist freilich aus der Sachanalyse heraus ohnedies zu erwarten, denn Ableitungsstrategien können wie erläutert ja nur dann zur Anwendung kommen, wenn zumindest einige Aufgaben bereits automatisiert sind (vgl. dazu GERSTER 1994, S. 46).
- Die gezielte Vermittlung von Weiterzählstrategien bei Additionen mit 1, 2 oder 3 mag zumindest bei einigen Kindern die unterrichtlichen Bemühungen um Ableitungsstrategien konterkariert haben. VAN DE WALLE (2004, S. 164) bemerkt dazu: "It is difficult to explain to young children that they should count for some facts but not others." Wenn Kinder also bei Additionen mit 1, 2 oder 3 darin bestärkt werden, eine Zählstrategie anzuwenden, könnte das dazu führen, dass zumindest einige dann auch alle anderen Additionen weiterzählend zu bewältigen versuchen. Ein solchermaßen gegenüber dem zählenden Rechnen ambivalenter Unterricht könnte also dazu beigetragen haben, dass sich Zählstrategien verfestigten, entgegen der Absicht, das zählende Rechnen (langfristig) überflüssig zu machen.
- Möglicherweise ist es zumindest für manche Kinder notwendig, auch über das zweite Schuljahr hinaus immer wieder gezielt im Erkennen und Anwenden von Ableitungsbeziehungen zwischen den Basisfakten gefordert und gefördert zu werden. Das ist vereinbar mit dem weiteren Befund von CUMMING und ELKINS, dass Ableitungsstrategien erst in den höheren Schulstufen verbreitet zu beobachten waren. Die Autoren sehen darin zwar eine Bestätigung für

  > *"previous research that able students develop such strategies for themselves in the search for cognitive efficiency. [...] Direct instruction in the early grade levels does not appear to have been effective, for whatever reasons"* (a.a.O., S. 172).

  Tatsächlich lässt sich aber auf Grundlage der Daten nur feststellen, dass *die besondere Art des Strategieunterrichts*, den diese Kinder erhalten haben, "nicht effektiv" gewesen ist – nicht aber, dass Strategieunterricht per se nichts bewirken könne und die Entwicklung von Strategien des nicht-zählenden Rechnens den "able students", die dafür keiner gezielten Förderung bewirken, vorbehalten bleiben müsse (diese Frage wird in Kap. 2.9.6 näher untersucht).

Zusammengefasst, liefert die Studie von CUMMING und ELKINS zwar eine differenzierte Darstellung der Strategieprofile der untersuchten Kinder und zeigt ein weiteres Mal, wie vielfältig die Entwicklung von Lösungsstrategien (in diesem Fall bis in die sechste Schulstufe hinein) verläuft. Die von den Autoren selbst gestellte Frage, "whether use of thinking strategies leads to automatised use of strategies or fact recall" (a.a.O., S. 153), kann aber schon deshalb nicht schlüssig beantwortet werden, weil das Design der Studie keine klaren Aussagen darüber zulässt, in welcher Weise (und ob überhaupt) die untersuchten Kinder in den beiden ersten Schuljahren den "Gebrauch von Ableitungsstrategien" tatsächlich erlernt haben.

2.9.5 Ableitungsstrategien und aktuelle Schulwirklichkeit in Kalifornien

Genauere, letztlich aber doch wieder ungenügende Einblicke in den Unterricht als Einflussfaktor kindlicher Strategieentwicklung gewährt die Studie von HENRY und BROWN (2008) mit 275 kalifornischen ErstklässlerInnen aus 9 verschiedenen öffentlichen Schulen und 28 verschiedenen Klassen. Erhoben wurden dabei einerseits die individuellen Strategien der Kinder bei zehn Additionen und acht Subtraktionen im Zahlenraum bis 18. Andererseits wurden die Lehrkräfte der untersuchten Klassen dazu befragt,

- zu welchem Prozentsatz ihre Mathematikstunden darin bestanden hätten, Vorgaben des verwendeten Schulbuchs zu erfüllen;
- wie viele und welche Art von "instructional events" dem Lernen der Basisfakten gewidmet gewesen seien;
- welchen relativen Stellenwert die folgenden Ziele in ihrem Arithmetikunterricht gehabt hätten: a) Entwicklung von *nicht-zählenden* Strategien, b) Finden der *richtigen* Antwort und c) *Auswendigmerken* der Basisfakten.

All das erfolgte vor dem Hintergrund der 1999 vom Staat Kalifornien vorgegebenen "Number Sense Standards". Diesen zufolge sollen SchülerInnen am Ende des ersten Schuljahres "know the addition facts (sums to 20) and the corresponding subtraction facts and commit them to memory" (CALIFORNIA STATE BOARD OF EDUCATION 1999, zitiert nach HENRY & BROWN 2008, S. 154; vgl. dazu auch Kap. 3).

Die qualitativen Interviews zur Erhebung der Lösungsstrategien wurden im achten und neunten Schulmonat durchgeführt. Zu diesem Zeitpunkt wurden die staatlichen Standards bei weitem nicht erfüllt. Bei strenger Auslegung waren nur 2,2 Prozent der Kinder dort, wo die Standards sie am Ende des ersten Schuljahres haben wollen: Nur diese Kinder lösten tatsächlich *alle* gefragten Aufgaben durch Faktenabruf. Rechnet man auch "derived facts" als nicht-zählende Strategie zur "fact mastery", dann waren bezüglich der Addition etwa neun Prozent, bezüglich der Subtraktion etwa fünf Prozent der Kinder "fact masters". Und reduziert man die Ansprüche darauf, dass die Kinder wenigstens 80 Prozent der Aufgaben nicht-zählend lösen sollten, dann fielen unter diese großzügigere Definition von "fact mastery" etwa 21 Prozent der Kinder bezüglich der Addition, etwa 10 Prozent bezüglich der Subtraktion.

Diese Häufigkeiten bleiben im Rahmen dessen, was CARPENTER und MOSER schon etwa 30 Jahre davor für US-amerikanische ErstklässerInnen erhoben hatten (s. Kap. 2.4) – und damit weit unter den Ansprüchen des kalifornischen Staates. Dieser hatte schließlich "world class" [sic!] angestrebt und dafür an den arithmetischen Kompetenzen ostasiatischer Kinder (vgl. Kap. 2.6) Maß genommen (HENRY & BROWN 2008, S. 154).

Welche Einflüsse des Unterrichts auf die Rechenleistungen kalifornischer ErstklässlerInnen lassen sich der Studie entnehmen?

Gemäß LehrerInnenbefragung wurden 43 Prozent der untersuchten Kinder in engster Anlehnung an das Schulbuch unterrichtet. Diese Gruppe von Kindern löste im Durchschnitt deutlich weniger Aufgaben durch Faktenabruf als jene Kinder, deren LehrerInnen eine weniger enge Anlehnung ans Schulbuch deklarierten. HENRY und BROWN verzeichnen eine signifikant positive (freilich sehr niedrige) Korrelation von "textbook reliance" und der Häufigkeit von Zählstrategien ($r = 0{,}14$, $p < 0{,}05$) (a.a.O., S. 167).

Inhaltlich erscheint ein solcher Zusammenhang plausibel: Zum einen ist ein "buchlastiger" Mathematikunterricht, speziell in der ersten Schulstufe, immer problematisch, durchaus unabhängig von der Güte des Schulbuches (vgl. FUSON 1992a, S. 79f). Zweitens und vor allem scheinen die verwendeten Schulbücher aber gerade Zählstrategien ermutigt zu haben, "rather than supporting student movement away from counting and toward derived-fact strategies and memorization" (a.a.O. 179). Sie bleiben damit offenbar in der Tradition jener Schulbücher, die schon in den von CARPENTER und MOSER (1984) untersuchten Klassen verwendet worden waren – trotz der neuen, auf frühe Überwindung des zählenden Rechnens dringenden Standards. Bemerkenswerterweise waren aber alle diese Schulbücher staatlich approbiert worden.

In derselben Tradition standen offenbar auch die Lehrkräfte selbst. Die vom Staat vorgegebenen neuen Standards mit dem Ziel der frühen Automatisierung der Basisfakten waren den Lehrkräften natürlich bekannt. Viele bekundeten aber im Verlauf der Erhebungen ihre Unsicherheit darüber, wie sie ihre SchülerInnen beim Erreichen dieser Standards am effektivsten unterstützen könnten (a.a.O., S. 167). Und viele gaben an, sie hätten sich (während des gesamten Schuljahres) darum bemüht, dass die Kinder Additionen durch Weiterzählen lösten, in der Überzeugung, "that repetition using counting would eventually lead to derived-fact strategies and memorization" (a.a.O., S. 178).

Mit einer Ausnahme gaben alle Lehrkräfte an, sie hätten (in unterschiedlichem Ausmaß) über die Übungsseiten des Schulbuches hinaus zusätzliche Maßnahmen zum Automatisieren der Basisfakten ergriffen, vor allem zusätzliche Arbeitsblätter und "flash cards" verwendet und "timed tests" eingesetzt. Nur für die Verwendung zusätzlicher Arbeitsblätter geben HENRY und BROWN eine (äußerst schwache: r = 0,16) signifikante Korrelation an (mehr Arbeitsblätter – höherer Anteil von automatisierten Additionen). Insgesamt schließen sie aus ihren Daten, dass die primär auf *Erhöhung der Quantität* von Übungsaufgaben gerichteten Aktivitäten "did not dramatically contribute to student basic fact retrieval or fluency" (a.a.O., S. 169).

Den Angaben der LehrerInnen zufolge habe es pro Woche im Schnitt acht "instructional events focused on derived-fact strategies" gegeben. Dennoch waren Ableitungsstrategien bei den SchülerInnen relativ selten zu beobachten: Etwa acht Prozent der Additionen und drei Prozent der Subtraktionen wurden durch Ableitung gelöst. Worin genau die dem Ableiten gewidmeten Aktivitäten bestanden, wird nicht ausgeführt.

Die Autoren halten eine (erneut sehr niedrige) signifikante Korrelation zwischen der Häufigkeit solcher Ableitungs-Aktivitäten einerseits und der durch Textaufgaben ermittelten *"Number Sense Proficiency"* der Kinder fest. Diese Maßzahl wiederum korrelierte positiv (in mittlerer Stärke; r = 0,58) mit der Häufigkeit, mit der die Kinder die Basisfakten nicht-zählend (durch Faktenabruf oder Ableitung) lösten. Umgekehrt halten die Autoren eine schwach mittlere negative Korrelation (r = − 0,48) zwischen "Number Sense Proficiency" und der Häufigkeit von Zählstrategien fest (a.a.O., S. 172f).

Alles in allem liefern die in kalifornischen Klassen erhobenen Daten erneut Hinweise dafür, dass Kinder, die im Unterricht *vorrangig* in der Verwendung von Zählstrategien gefördert wurden, am Ende des ersten Schuljahres die Grundaufgaben mehrheitlich auch mit Zählstrategien lösen – anders als die von GEARY u.a. (1996) untersuchten chinesischen SchülerInnen. Ein in einzelnen Klassen gebotenes *Mehr* an Übungsaufgaben (die dann wohl wieder mehrheitlich zählend bewältigt wurden) hatte keinen positiven Einfluss auf die Automatisierung.

Allerdings hatten die kalifornischen Lehrkräfte *neben* der Erarbeitung und Absicherung des (weiter-)zählenden Rechnens *auch* solche Maßnahmen eingebaut, die auf Ableitungsstrategien gerichtet waren. Dass diese Strategien in den qualitativen Interviews selten verwendet wurden, lässt auf Grundlage der (gerade bezüglich des Strategie-Unterrichts) unzureichenden Daten dieser Studie mindestens zwei unterschiedliche Hypothesen zu:

Die Studie von HENRY und BROWN könnte einerseits als Bestätigung von VAN DE WALLEs bereits zitierter Auffassung gewertet werden, dass man Kinder nicht einerseits zum zählenden Rechnen ermutigen und andererseits erwarten dürfe, dass sie in (davon abgegrenzten Unterrichtseinheiten) von Zählstrategien Abstand nehmen, um über operative Zusammenhänge nachzudenken (vgl. VAN DE WALLE 2004, S. 164).

Die kalifornischen Daten könnten aber auch zur Hypothese reizen, dass sich Ableitungsstrategien im Klassenunterricht gar nicht effizient vermitteln lassen − zumindest nicht effizient genug, um auch von Kindern am unteren Ende des Leistungsspektrums übernommen zu werden. Wir sind solchen Zweifel bereits bei CUMMING und ELKINS (1999, siehe oben) zumindest als Andeutung begegnet; im folgenden Abschnitt soll ihre Stichhaltigkeit näher geprüft werden.

2.9.6 Zweifel an der "Unterrichtbarkeit" von Ableitungsstrategien

CUMMING und ELKINS verweisen auf den (bis heute fortbestehenden) Mangel an "evidence [...] about the transition from conscious thinking strategies to automaticity, particularly fact recall" und fassen "the evidence to date" wie folgt zusammen:

> *"Efficient users of thinking strategies appear for the most part to have derived the strategies for themselves, presumably based on some naive or sophisticated understanding of number and cognitive efficiency"* (CUMMING & ELKINS 1999, S. 153).

Freilich: "For the most part" waren und sind "thinking strategies" auch *nicht* Gegenstand gezielten Unterrichts – zumindest nicht in den USA und Großbritannien, den Ländern, aus denen der Großteil der "evidence to date" stammt (vgl. BAROODY 2006, S. 24-27; FOXMAN & BEISHUIZEN 2002, S. 41). Sofern also Kinder in empirischen Untersuchungen wie jener von CARPENTER und MOSER (1984), HENRY und BROWN (2008) oder auch GRAY (1991) Ableitungsstrategien demonstrierten, dann *mussten* sie diese zuvor (jedenfalls "for the most part") *selbst entdeckt* haben – der Unterricht ließ ihnen gar keine andere Wahl. Aus der Tatsache, dass viele Kinder *auf Grundlage dieses Unterrichts* solche Strategien *nicht* selbst entdeckt haben, folgt aber nicht, dass Ableitungsstrategien nur entweder spontan oder gar nicht gelernt werden können. Anders gesagt: Dass viele Kinder Ableitungsstrategien *ohne* gezielte Unterweisung *nicht* entdecken, beweist nicht, dass sie solche Strategien *auch mit* Unterweisung *nicht entdecken können*.

Deshalb legt etwa auch GRAY wohl zu Recht Wert auf die Feststellung, dass seine Unterscheidung zwischen prozedural denkenden und daher nicht-ableitenden Kindern einerseits, prozeptuell-ableitenden Kindern andererseits *nicht* gemeint sei als Zuschreibung einer unverrückbaren, nicht beeinflussbaren Persönlichkeitskonstante:

> *"We do not use the evidence collected to imply that some children are doomed forever to erroneous procedural methods whilst others are guaranteed to blossom into a rich mathematical conceptualisation"* (GRAY u.a. 1999, S. 118).

Und tatsächlich liefern ja auch Studien wie die von THORNTON (1978, 1990) und STEINBERG (1985) (s. Kap. 2.9.1 und 2.9.2) bei allen methodischen Mängeln doch deutliche Hinweise für die Wirksamkeit eines Unterrichts, der Ableitungsstrategien zu vermitteln sucht; im Falle STEINBERGS explizit auch für die schwächsten Kinder einer Klasse.

2.9.6.1 FUSONs Plädoyer für gezielte Instruktion im zählenden Rechnen

Karen FUSON (1992a, 1992b) nimmt aber gerade die letztgenannten Studien zum Anlass, die Sinnhaftigkeit eines "Strategie-Unterrichts" (speziell für den Teilbereich der Subtraktionen) zumindest tendenziell in Zweifel zu ziehen. Sie selbst hatte in den 1980er Jahren in US-amerikanischen Versuchsklassen als Strategie für das Addieren gezielt Weiterzählen vom größeren Summanden, als Subtraktionsstrategie gezielt Hochzählen vom Subtrahenden trainieren lassen. Nun entsteht bei diesen Zählstrategien aber das Problem des "keeping track": Das Kind muss die Anzahl der bereits getätigten Zählschritte unter Kontrolle halten, um zu wissen, *bei welcher Zahl* es (beim weiterzählenden Addieren) stoppen muss bzw. *um wie viele Zahlen* es (beim hochzählenden Ergänzen) bis zum zählend erreichten Minuenden tatsächlich weitergezählt hat. Je mehr Zählschritte, umso schwieriger wird diese Kontrolle (vgl. Kap. 2.10.2).

FUSON veranlasste die LehrerInnen der Versuchsklassen deshalb, mit den Kindern gezielt daran zu arbeiten, die Anzahl der Zählschritte ganz offen mit Hilfe der Finger zu kontrollieren. Als Resultat dieser Maßnahmen hält FUSON fest:

> *"First and second graders added any two single-digit number with sums over ten quite accurately; the high-achieving first graders and all achievement levels of second graders added quite rapidly [...] Even below-average first graders were able to solve the most difficult subtraction marks problems with single-digit addends and sums through 18 [...] Teachers reported that they were astounded by how rapidly children learned counting up"* (FUSON 1992a, S. 122ff).

FUSON vergleicht nun diese Erfahrungen mit jenen von THORNTON (1990) und hält fest, die "strategy children" aus THORNTONs Versuchsklassen "were not as correct on the difficult subtraction problems as were the children in the Fuson studies". Auch hätten die Kinder aus THORNTONs Versuchsklassen die im Unterricht forcierten nicht-zählenden Strategien gerade bei den schwierigeren Subtraktionen mehrheitlich nicht verwendet. Vielmehr hätten sie bei solchen zumeist auf das Hochzählen zurückgegriffen, dabei aber gerade deshalb mehr Fehler gemacht, weil ihnen keine vergleichbar sicheren "keeping track"-Methoden zur Verfügung standen wie jene, die in den Studien von FUSON erarbeitet wurden (a.a.O., S. 125).

Dass hingegen die Kinder in der Studie von STEINBERG relativ selten auf die im Unterricht vermittelte Subtraktions-Strategie "through to ten" (analog zum Teilschrittverfahren beim Addieren) zurückgegriffen haben, sieht FUSON wesentlich in der englischen Sprache begründet: "Ten-structured methods" seien in ostasiatischen Sprachen naheliegend (vgl. Kap. 2.6). Im Englischen hingegen werde zehn als dezimale Einheit gerade bei den Zahlwörtern bis "nineteen" kaum deutlich (a.a.O., S. 132). (Tatsächlich kommt "ten" ja nur im Zahlwort für 10 selbst vor, in "eleven" und "twelve" gar nicht, ab "thirteen" nur verwandelt im Suffix "-teen".

Das Deutsche ist in *diesem* Zahlenbereich bezüglich des Dezimalsystems noch eine Spur transparenter, dafür ab zwanzig noch undurchsichtiger als das Englische.)

FUSON plädiert aus beiden Gründen (relative "Erfolglosigkeit" der Strategievermittlung bei THORNTON, "Strategiefeindlichkeit" der englischen Sprache) zumindest implizit *gegen* eine gezielte Vermittlung von nicht-zählenden Rechenstrategien (und für das Training von "counting on/up"), speziell im Bereich der Subtraktion. Sie ist zwar (entsprechend ihrer konstruktivistischen Grundposition) nicht für eine "Unterdrückung" nicht-zählender Subtraktionsstrategien, sofern Kinder diese von sich aus entwickeln, und sieht voraus, dass in "a heterogeneous classroom [...] discussion of various thinking strategies will arise as the more advanced children construct and use them". Einen darauf gerichteten *Unterricht für die gesamte Klasse* betrachtet sie aber offenkundig als programmierte Überforderung (a.a.O., S. 133).

2.9.6.2 Zur Kritik an FUSONs Position

Dass Kinder mit Zählstrategien "sicher und schnell" zu Ergebnissen im Zahlenraum bis 20 kommen können, ist nicht zu bestreiten; ebenso wenig, dass es ihnen *dabei* hilft, wenn sie ihre Finger ganz offen für das "keeping track" einsetzen. Nun weist aber etwa GRAY darauf hin, dass zählendes Rechnen die *Gefahr einer Verfestigung* in sich birgt (für weitere Argumente gegen das gezielte Fördern von Zählstrategien vgl. Kap. 3). FUSON äußert sich nicht über die Zukunftsperspektive der Kinder, die im Rahmen ihrer Studien in den ersten Schuljahren zu "sicherem und schnellem" zählenden Rechnen hintrainiert wurden.

In diesem Abschnitt geht es freilich weniger um die didaktischen Schlussfolgerungen als vielmehr um die theoretischen Annahmen, die diesen zugrunde liegen. Und diesbezüglich muss festgehalten werden, dass FUSONs Zweifel an der Effizienz eines Strategieunterrichts *unzureichend begründet* sind:

- Wie bereits kritisiert, hat THORNTON in ihren Versuchsklassen eben *nicht durchgängig* und im Falle der Subtraktionsstudien sogar *nicht einmal vorwiegend* nicht-zählende Ableitungsstrategien unterrichten lassen, sondern die Kinder mit einem in sich widersprüchlichen Mix aus Zähl- und Ableitungsstrategien konfrontiert (vgl. Kap. 2.9.1). Der in THORNTONs Versuchsklassen immer noch relativ hohe Anteil an Zählstrategien am Ende des ersten Schuljahres (der freilich deutlich niedriger liegt als in den Kontrollklassen) lässt unter diesen Bedingungen keinen Rückschluss darauf zu, wie wirksam *Ableitungsstrategien* bei englischsprachigen Kindern generell sein können.
- Dass die Kinder in FUSONs Studien Subtraktionen "schneller und sicherer" lösten als bei THORNTON, ist wenig erstaunlich: Bei THORNTON sollten die Kinder ja jeweils überlegen, welche Strategie der jeweiligen Aufgabe angemessen sei. Bei FUSON dagegen sollten sie ohne langes Nachdenken einfach hochzählen. Noch "schneller und sicherer" wäre aber

wohl die durchgehende Verwendung eines Taschenrechners gewesen. Möglicherweise würde ein konsequenter Unterricht im "Ableiten" (anders als THORNTONS "Strategiemix") auf längere Sicht zu mindestens ebenso "schnellem und sicherem" Rechnen führen wie FUSONS Zähltraining.

– Dass sich Ableitungsstrategien für das Subtrahieren bei STEINBERG als *schwerer vermittelbar* erwiesen als für das Addieren, wurde von der Autorin selbst hinreichend erklärt: Die Kinder in ihrer Versuchsklasse hatten noch zu wenig Sicherheit im Addieren, um die Subtraktionsstrategie "think addition" anwenden zu können. Zudem mangelte es am Verständnis des Stellenwertsystems. Das spricht klar dagegen, auf Ableitungsstrategien zu setzen, solange die dafür notwendigen Voraussetzungen noch nicht abgesichert sind. Aber es ist umgekehrt kein Hinweis dafür, dass Ableitungsstrategien für Kinder (sobald sie über diese Voraussetzungen verfügen) nicht nachvollziehbar seien.
– Dass ostasiatische Sprachen Einsicht in das Dezimalsystem erleichtern, heißt umgekehrt nicht, dass die englische (oder auch deutsche) Sprache diese Einsicht verhindert.

Immerhin betrachtet es FUSON für denkbar, dass das von ihr propagierte schulische Training zählender Rechenstrategien

> *"with the proper learning opportunities from early kindergarten [...] would be unnecessary for most children (or would be a brief developmental waystation)"* (FUSON 1992a, S. 134).

Aber auch darin drückt sie noch ihre Überzeugung aus, dass Ableitungsstrategien *für zumindest einige* Kinder *nicht* verstehbar seien – ohne dies zu begründen und ohne eine dafür hinreichende empirische Grundlage.

Tatsächlich wurde in einigen Studien überprüft, ob und unter welchen Bedingungen auch Kinder am unteren Ende des Leistungsspektrums in der Lage sind, Ableitungsstrategien zu durchschauen und anzuwenden; solche Studien sind Gegenstand des folgenden Abschnitts.

2.9.7 Ableitungsstrategien auch für "lernschwache" Kinder?

TORBEYNS, VERSCHAFFEL und GHESQUIÈRE (2004) befragten 83 holländische SchülerInnnen am Ende ihres ersten Schuljahres. Die Kinder hatten im Unterricht zwei Ableitungsstrategien für den Zehnerübergang gelernt, das Teilschrittverfahren (z.B. 7+8=7+3+5, vgl. Kap. 2.6) und (bei entsprechenden Zahlen) "Verdoppeln plus eins" (z.B. 7+8=7+7+1, vgl. Kap. 2.9.1). Die Verdoppelungen im ZR bis 18 waren zuvor erarbeitet worden; ein Ziel dabei war es, gerade diese Aufgaben als Basisaufgaben für Ableitungsstrategien auch zu automatisieren.

Ein standardisierter Rechentest zu Beginn der Studie ergab, dass jeweils etwa 30 Kinder "strong" bzw. "weak mathematical abilities" hatten. Kinder mit "moderate abilities" waren in der Stichprobe etwas seltener vertreten. Alle Kinder sollten nun im Rahmen qualitativer Interviews die Aufgaben 6+7, 7+6, 7+8, 8+7 und 9+8 lösen, also gerade solche Aufgaben, die sowohl durch das Teilschrittverfahren als auch durch "Verdoppeln plus eins" vorteilhaft lösbar sind. Unter diese Aufgaben waren weitere Additionen mit Zehnerübergang gemischt, für deren Lösung das Verdoppeln eines der beiden Summanden *keinen* naheliegenden Strategie-Teilschritt darstellte (a.a.O., S. 323f).

Es zeigte sich, dass *alle* 83 Kinder in der Lage waren, die fünf interessierenden Aufgaben nicht-zählend mit einem der beiden Verfahren zu lösen. In *allen drei* Leistungsgruppen fanden sich Kinder, die im Zuge der Bearbeitung der fünf Additionen von sich aus *beide* Strategien demonstrierten. In der "schwachen" Gruppe war dies seltener: Ein signifikant höherer Anteil dieser Kinder wählte für *alle* Aufgaben dasselbe Verfahren, dann zumeist das Teilschrittverfahren. In den beiden anderen Gruppen wurde "Verdoppeln plus eins", wenn vorteilhaft, häufiger verwendet (a.a.O., S. 325). Die Autoren sehen darin einen Hinweis dafür, dass – bei deutlichen Unterschieden in der *Flexibilität* der Anwendung unterschiedlicher Ableitungsstrategien – auch mathematisch schwache ErstklässlerInnen in der Lage sind, "to apply multiple school-taught calculation strategies efficiently and adaptively" (a.a.O., S. 327).

PUTNAM, DE BETTENCOURT und LEINHARDT (1990) präsentierten Kindern im Rahmen von qualitativen Einzelinterviews zwei Handpuppen, welche Additionen und Subtraktionen mithilfe von Ableitungsstrategien lösten bzw. zu lösen versuchten. Die Puppen machten dabei teilweise Fehler, teilweise gerieten sie ins Stocken und wussten nicht mehr weiter; die Kinder sollten das Treiben der Puppen kommentieren, ihnen "weiterhelfen": Ist es richtig, so zu rechnen? Warum "darf" man das? Wie müsste die Puppe, die beim Ableiten den Plan verloren hat, weitermachen, damit sie zum richtigen Ergebnis kommt (a.a.O., S. 253-255)?

Nun ist das Kommentieren und Beurteilen von Strategien, die andere anwenden, schon für sich genommen vermutlich schwieriger als das Beschreiben und Begründen eigener Strategien (und letzteres wohl mit größerem Recht ein Kriterium für das Strategieverständnis als ersteres). Die von den Puppen demonstrierten Strategien waren darüber hinaus aber großteils auch noch konzeptuell besonders anspruchsvoll: Neben "Verdoppeln plus eins" (vorgeführt bei der Aufgabe 8+9) und dem Teilschrittverfahren verwendeten die Puppen als Additionsstrategie auch "gegensinniges Verändern" ("sharing"), bei dem etwa 6+4 aus 5+5 abgeleitet wird, algebraisch $(a+1)+(a-1)=a+a$. Konzeptuell noch fordernder waren die die von den Puppen verwendeten Subtraktionsstrategien: 15–8 lösten die Puppen mit der Gedankenkette "8+8=16, 16–8=8, dann ist 15–8 nur 7" ("doubles minus 1"); die Aufgabe 14–8 mit der Überlegung "14–7=7, dann ist 14–8 nur 6" ("sharing"); 11–6 wie folgt: "10–5=5, dann ist (10+1)–(5+1) auch 5" ("maintain difference", "Konstanz der Differenz") (a.a.O., S. 249-253, S. 255-269).

In dieser Weise wurden einerseits 22 "normally achieving third graders" befragt, andererseits 19 "LD [learning disabled] students" einer öffentlichen US-amerikanischen Grundschule. Ob die Kinder im Unterricht jemals mit den im Interview vorgezeigten Strategien konfrontiert worden waren, wurde im Rahmen der Studie nicht erhoben.

Die Interviews brachten im Wesentlichen folgende Ergebnisse:

– Die "normally achieving children" lieferten bei etwa 55 Prozent der vorgeführten Additionen "complete explanations" der vorgezeigten Strategien (wobei aus Zeitgründen nicht allen Kindern alle Strategien vorgeführt wurden). Die "LD children" taten dies bei insgesamt etwa 52 Prozent der Additionen, allerdings mit deutlicher Abhängigkeit vom Alter der Kinder (bei den "LD children" der dritten Schulstufe waren es nur 33 Prozent).
– Die Subtraktionsstrategien wurden von den "normally achieving children" nur bei 28 Prozent der gezeigten Rechnungen "vollständig erklärt". Den "LD children" gelang dies so gut wie gar nicht.
– Sofern die "LD children" Erklärungen lieferten, unterschieden sich diese inhaltlich nicht wesentlich von jenen der "normally achieving children".
– "LD children" ließen sich bei den Subtraktionen zumeist nicht auf die von den Puppen vorgeführten Strategien ein, sondern tendierten dazu, den Puppen gewissermaßen ihre eigene Lösungsstrategie als bessere zu empfehlen; das war zumeist eine Zählstrategie. Diese Reaktion war, seltener, auch bei "normally achieving children" zu beobachten.

Die AutorInnen der Studie interpretieren dies wie folgt:

> *"So even though LD children apparently lag behind their normally achieving peers [...] they do not appear to have some fundamental cognitive deficit or to display unusual patterns of thinking that preclude them from gaining this understanding* [sc. of derived-fact strategies, Ergänzung M.G.]" (a.a.O., S. 272).

PUTNAM u.a. lassen es offen, ob das Verhalten der "LD children" bei den Subtraktionen ein Hinweis sei auf eine "basic inflexibility on their part" oder aber "result of instruction". Hier (wie generell auf dem Gebiet der "derived fact strategies") bestehe weiterer Forschungsbedarf (a.a.O., S. 283).

In letzterem muss PUTNAM u.a. auch heute noch Recht gegeben werden. Bezüglich ihres eigenen, in Summe höchst verdienstvollen Forschungsbeitrags ist allerdings in Frage zu stellen, ob unscharfe Kategorien wie "learning disabled", "normally achieving" und dergleichen mehr hilfreich sind im Bemühen, die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien besser zu verstehen. Die Studie von PUTNAM u.a. ist ja selbst ein weiterer Beleg für die Vielfalt, der wir in diesem Zusammenhang begegnen – aber eben innerhalb der "normally achieving children" in ähnlicher Weise wie innerhalb der "LD children". Weder bei den einen, noch bei den anderen handelt es sich um eine (hinsichtlich ihres Strategieverständnisses wie auch -gebrauchs) homogene Gruppe. Hier eine Trennlinie der "Normalität" zu ziehen, scheint willkürlich; es hilft jedenfalls für das Verstehen von Kindern auf beiden Seiten der Trennlinie ebenso wenig weiter wie für die Entwicklung und Evaluation von Unterrichtsdesigns, die Kinder beim "Rechnenlernen" bestmöglich unterstützen wollen.

2.10 Konzeptuelle Voraussetzungen unterschiedlicher Lösungsstrategien: Zu vielfältig und komplex für ein "allgemeingültiges Modell"?

FRITZ und RICKEN halten als Bilanz bisheriger Forschung über den "Erwerb des Rechnens" fest:

> *"Obwohl Theorien [...] über einzelne Entwicklungsaspekte oder die Entwicklung des Rechnenlernens in einem begrenzten Altersbereich ausgearbeitet wurden, liegt bisher kein allgemeingültiges Modell vor, das z.B. erlauben würde, den Erwerb des Wissens über Zahlen, Mengen und Rechenoperationen zu beschreiben, zu erklären und* [gemeint ist wohl: diese Beschreibungen und Erklärungen; Anm. M.G.] *mathematikdidaktisch zu verwerten"* (FRITZ & RICKEN 2008, S. 29, unter Berufung auf REISS, HEINZE & PEKRUN 2007; fast gleichlautend LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 86).

Im folgenden Abschnitt wird *nicht* versucht, ein solches "allgemeingültiges Modell" zu liefern (etwa in Konkurrenz zu FRITZ und RICKEN 2008 oder KRAJEWSKI 2008, die genau das anstreben). Es sollen vielmehr, in kritischer Auseinandersetzung mit dazu veröffentlichten fachdidaktischen und entwicklungspsychologischen Arbeiten, die in den bisherigen Abschnitten dargestellten "einzelnen Entwicklungsaspekte" in eine Gesamtschau der arithmetischen Entwicklung eingeordnet werden. Die leitende Frage bei dieser Gesamtschau lautet: Über welche Voraussetzungen muss ein Kind verfügen, um die einzelnen, in qualitativen Interviews erfassbaren Rechenstrategien jeweils verstehen und/oder anwenden zu können? Erst nach Beantwortung dieser Frage lässt sich in weiterer Folge (vgl. Kap. 3) sinnvoll überlegen, wie Kinder bei der Aneignung *erwünschter* Strategien gefördert werden können – und zuvor schon, welche Strategien wir im Unterricht mit Kindern berechtigter Weise in welchem Alter anstreben sollten.

Dabei ist eine Vorbemerkung zum "Faktenabruf" sinnvoll. GRAY hält zu dieser Lösungsstrategie fest:

> *"The ability to simply recall facts is difficult to establish within a hierarchy, because such a strategy can be used without any evidence of meaning. It may only provide evidence of routine and a good memory"* (GRAY 1991, S. 554).

Wenn also im Folgenden erörtert wird, wie Kinder ihre Lösungsstrategien in Abhängigkeit von ihrem Wissen über Zahlen und Rechenoperationen weiterentwickeln, dann ist *daneben* immer auch die Möglichkeit zu berücksichtigen, dass ein Kind auch unabhängig von solchen Fortschritten im konzeptuellen Wissen seinen Bestand an auswendig gewussten Grundaufgaben erweitern kann.

Andererseits wird aber Faktenabruf erst zuletzt zur "Hauptstrategie" – sofern Kinder in ihrer Rechenentwicklung überhaupt jemals dahin gelangen, die additiven Grundaufgaben mehrheitlich oder vollständig auf diese Weise zu lösen. Es stellt sich die Frage, ob der für sich genommen "kognitiv indifferente" Faktenabruf nur deshalb (im Sinne einer *"Haupt*strategie*")* am Ende der "normalen" Entwicklung steht, weil die Prozesse der Speicherung im Langzeitgedächtnis (neben "memory" auch noch) "routine" und damit Zeit in Anspruch nehmen – oder ob das (im Laufe ihrer Entwicklung zumindest beim Großteil der Kinder wohl wachsende) Verständnis für Zahlen und Rechenoperationen hinzutritt als eine weitere, zumindest *hilfreiche* Bedingung dafür, dass nicht nur einzelne Aufgaben gemerkt werden, sondern Faktenabruf insgesamt zur "Hauptstrategie" werden kann.

Es ist gerade auch diese fachdidaktisch höchst relevante Frage, der in der folgenden Gesamtschau nachgegangen werden soll und die wohl auch nur im Rahmen einer solchen Gesamtschau beantwortet werden kann.

2.10.1 "Pattern numbers" und "counted numbers" als konzeptuelle Voraussetzung des ersten Rechnens

Wie erläutert, ist es zwar denkbar, dass ein Kind noch ohne jedes Verständnis von Zahlen und Rechenoperationen einen "Spruch" wie "zwei und zwei ist vier" als eine (für es selbst) bedeutungslose Wortfolge nachspricht und sogar im Gedächtnis behält. Es wäre aber wohl deplatziert, in diesem Fall von "erstem Rechnen" zu sprechen. Dieses liegt wohl erst dann vor, wenn ein Kind *bewusst* additive *Aufgaben lösen* kann. Als nähere kognitive Voraussetzung dafür – sozusagen als "konzeptuelles Einstiegsniveau" in das Addieren und Subtrahieren – ist von Kindern zumindest zweierlei gefordert:

- ein erstes Verständnis von *Zahlen als Anzahlen* und
- ein erstes Verständnis vom *Addieren* und *Subtrahieren* auf *Handlungsebene* (als *Handlungen*, bei denen *Anzahlen* eine Rolle spielen).

Bei der Erläuterung dieser beiden Voraussetzungen ist eine wichtige Unterscheidung vorzunehmen: So wie das zum Addieren und Subtrahieren geforderte *Zahlverständnis* nicht gebunden ist an die Kenntnis von *Ziffern*, ist ein Verständnis für additive Aufgaben nicht erst dann gegeben, wenn ein Kind gelernt hat, die *Operationszeichen* + und – im Sinne dieses seines aktuellen Aufgabenverständnisses zu verwenden.

2.10.1.1 Verständnis von Zahlen als *Anzahlen*

Schon Säuglinge zeigen die Fähigkeit zur *quantitativen Differenzierung*. Diese ist allerdings offenbar (entgegen früheren Annahmen, vgl. etwa WYNN 1992) noch *keine* Unterscheidung von *Anzahlen*: Säuglinge reagieren in Habituierungsexperimenten nur dann auf den Unterschied zwischen eins und zwei, wenn *zwei* (z.B. Quadrate) auch *mehr Fläche* einnehmen als eins (CLEARFIELD & MIX, 1999, zitiert nach KRAJEWSKI 2008, S. 276).

Schon ab etwa zwei Jahren können Kinder dann aber tatsächlich zwischen zwei, drei und vielleicht (das ist umstritten; vgl. DEHAENE 1999, S. 83f) auch noch vier *beliebig angeordneten* Objekten unterscheiden, ohne diese zu zählen. Diese Fähigkeit wird als "Simultanerfassung" ("subitizing") bezeichnet. Sie sollte begrifflich getrennt werden von der Fähigkeit, die Anzahl von Objekten, die nach bestimmten Kriterien *gegliedert* sind, auch weit über vier hinaus "auf einen Blick" zu erfassen ("quasi-simultane Anzahlerfassung", vgl. GERSTER 2009a, S. 251).

Welches *Zahldenken* steckt aber hinter der Verwendung der Wörter "zwei", "drei", "vier" für simultan erfasste Anzahlen? Wie VON GLASERSFELD erläutert, handelt es sich dabei im Verständnis des Kindes wohl *zunächst* nur um *Namen für "figurale Muster"*. Diese werden als "figurale *Ganzheiten* aufgefaßt, *nicht* als aus *Elementen* zusammengesetzte Gebilde" (VON GLASERSFELD 1987, S. 261; Hervorhebung M.G.). FUSON (1992a, S. 57) spricht hier eben deshalb vom Verständnis der Zahl als "*pattern* number".

Diese "figuralen Muster" zugeordneten Zahlwörter bis "drei" oder "vier" lernen Kinder schon früh als Beginn einer *Zahlwortreihe* kennen. Sie lernen diese bald auch über den engen Bereich der simultan erfassbaren Anzahlen hinaus fortzusetzen, wobei sie die Reihe zunächst tatsächlich nur als (anfangs noch nicht stabile) *Wortreihe ohne Bezug zu Quantität* denken. In weiterer Folge lernen sie, diese Zahlwörter auch zum eigentlichen *Zählen* zu verwenden: Die Objekte einer vorliegenden Menge werden *abgezählt*, eine geforderte Anzahl wird durch *Auszählen* von ebenso vielen Objekten gebildet (vgl. FUSON 1992a, S. 98).

Dieses Verständnis von *Kardinalität* ("cardinal meaning", Zahl als *Anzahl*) wird aber erst im Laufe einer längeren *Zählentwicklung* erworben. Kinder lernen zwar schon früh, auf die Frage "Wie viele sind es?" die Reihe der Zahlwörter (so weit sie diese aktuell beherrschen) aufzusagen. Sie lernen weiters, dabei eine (zumeist durch Antippen vermittelte) Eins-zu-Eins-Zuordung zwischen je einem Zahlwort und je einem Objekt vorzunehmen. Sie verstehen diese Handlung aber zunächst offenbar *noch nicht* als das *Ermitteln einer Anzahl*: Fragt man sie, nachdem sie die Zählhandlung an einer vorliegenden Menge von Objekten abgeschlossen haben, wie viele es denn nun seien, dann fangen sie in dieser frühen Phase ihrer Zählentwicklung typischerweise erneut von "eins" zu zählen an (vgl. BERMEJO, MORALES & GARCIA DEOSUNA 2004). Oder sie setzen die Zahlwortreihe über das zuletzt genannte Zahlwort hinaus weiter fort, oder sagen irgendwelche weiteren Zahlwörter, die ihnen in den Sinn kommen. In den Worten von FUSON: "Early counting has no result other than the acitivity of counting" (FUSON 1992a, S. 62).

Auch das Erlernen der "last word rule" (etwa: "Auf die Frage 'Wie viele?' soll ich mit dem beim Zählen zuletzt verwendeten Zahlwort antworten!") ist, anders als dies FRITZ, RICKEN und GERLACH (2007, S. 10) darstellen, *keine* Garantie für ein kardinales Zahlverständnis ("Stufe 3" im Entwicklungsmodell von FRITZ u.a.):

> *"Some children show a transitional last-word-response in which they will respond to a how-many question with the last word in counting, but the last word does not refer to the whole counted set"* (FUSON 1992a, S. 62f).

Erst wenn das Kind beim Abzählen von fünf Autos "fünf" sagt und damit auch tatsächlich *alle fünf* Autos *meint* (und nicht nur das zuletzt angetippte *fünfte*), hat es die *count-to-cardinal transition* (FUSON 1992a, S. 62) vollzogen. Das Anzahlverständnis bleibt aber zunächst offenbar an Objekte gebunden: Es sind im Verständnis des Kindes "(diese) fünf Autos". Getrennt von diesen oder anderen Objekten mag aber "fünf" noch keine Anzahlbedeutung haben:

> *"Fünffachheit ist eine Eigenschaft einer konkreten Menge, die abgezählt wurde [...]. In einem anderen Kontext versteht das Kind u. U. die "5" als ein singuläres Ding (keine Vielheit)"* (GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 66).

Für dieses frühe, selbst schon von seinen Anfängen her deutlich weiter entwickelte Verständnis von Zahlen verwendet FUSON den Begriff "counted number". Zahl wird hier durchaus als *Anzahl* (kardinal) verstanden, aber nur *als Anzahl von konkreten Objekten* und letztlich *verbürgt durch das Abzählen* dieser Objekte. Es scheint nun plausibel, mit FUSON (1992a, 1992b) anzunehmen, dass Kinder additive Aufgaben (formuliert als "word problems") erst dann bewältigen können, wenn sie Zahlen zumindest als "pattern number" und/oder (abhängig von der Größe der Zahl) als "counted number" verstehen.

Das von FRITZ u.a. formulierte Modell siedelt dagegen das erste Addieren und Subtrahieren bereits auf dem (dort als Stufe 2 gefassten) Niveau des nicht-kardinalen, *rein* ordinalen Verständnisses von *Zahlen als Positionen* in der Zahlwortreihe an (FRITZ u.a. 2007, S. 8f): Kinder würden auf dieser Stufe Aufgaben wie "Auf der Rutsche sind 5 Kinder. Auf dem Klettergerüst 3. Wie viele Kinder sind das insgesamt?" zählend lösen, "gestützt auf die Vorstellung des mentalen Zahlenstrahls" und "orientiert am Richtungsmarker, der angibt, dass die Zahlen durch ein Voranschreiten auf dem Zahlenstrahl 'mehr' bzw. 'größer' werden" (a.a.O., S. 9). Die Autorinnen setzen "mehr" und "größer" hier deshalb unter Anführungszeichen, weil ihrem Modell nach auf dieser Stufe "keine kardinale Mengenvorstellung" (gemeint sein soll wohl:

kein *kardinales Zahldenken*) vorliege und "größer" für das Kind lediglich bedeute, dass die Zahl "später in der Zahlwortreihe genannt wird". Andererseits sehen FRITZ u.a. aber auf dieser Stufe "bereits die Verknüpfung des Verständnisses von Vermehren und Vermindern mit der Zahlenstrahlvorstellung" gegeben, und erst diese Verknüpfung erlaube die Lösung der genannten Textaufgabe (a.a.O., S. 9).

Nun soll nicht bestritten werden, dass Kinder in ihrer arithmetischen Entwicklung auch zu Widersprüchlichem fähig sind (s.u.). Die logischen Widersprüche der "Stufe 2" im Entwicklungsmodell von FRITZ u.a. scheinen aber doch eher die Folge davon zu sein, dass die Autorinnen zwei zu unterscheidende Bereiche vermengen: Ein Kind mag einerseits sehr wohl im kardinalen Sinne verstanden haben, dass "5 Kinder" *alle* fünf Kinder auf der Rutsche bedeutet, "3 Kinder" *alle* drei Kinder auf dem Klettergerüst. *Dasselbe* Kind mag andererseits dennoch nicht in der Lage sein, die Gesamtanzahl der Kinder anders als zählend zu ermitteln. Die Lösung von 5+3 ergibt sich nämlich *nicht* aus dem kardinalen Verständnis, weder der Zahl fünf, noch der Zahl drei. Das kardinale Verständnis ermöglicht es dem Kind aber, eine Zählstrategie anzuwenden. Diese *Prozedur* des zählenden Rechnens mag dann modellhaft beschrieben werden als "Voranschreiten auf dem Zahlenstrahl", bei dem Zahlen *wie Positionen* auf dem Zahlenstrahl behandelt werden. Daraus kann aber nicht geschlossen werden, dass das zählend rechnende Kind Zahlen immer und ausschließlich "rein ordinal" denkt. Wäre das so, dann könnte es die zählend ermittelte Gesamtzahl der Kinder ja gar nicht als *Anzahl der Kinder* deuten; denn die Kinder sind ja nun ganz sicher keine "Positionen auf dem Zahlenstrahl".

Auch wenn es für uns Erwachsene verwirrend sein mag: "Die Bedeutung, die das Kind der Zahl gibt, kann mit dem Kontext wechseln" (GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 103). Es ist theoretisch wie praktisch bedeutsam, diese Kontextabhängigkeit stets im Auge zu behalten, wenn wir über *das* Zahlverständnis eines Kindes sprechen. Festzuhalten ist: Selbst wenn Kinder Zahlen *grundsätzlich* bereits kardinal verstehen, dabei aber *nur* über das Konzept der "counted number" bzw. "pattern number" verfügen, sind sie beim Addieren und Subtrahieren auf das *vollständige Modellieren* der Aufgabe und damit (sofern der enge Bereich der Simultanerfassung überschritten wird) auf *zählendes Rechnen* angewiesen.

Hier kommt nun als zweite Bedingung ihr Verständnis der Aufgabenstellung selbst ins Spiel.

2.10.1.2 Additives Operationsverständnis

Tatsächlich sind additive Aufgaben vielfältig und je nach Typus für Kinder auch unterschiedlich schwer zu verstehen. Die vorliegenden Befunde sprechen dafür, dass Kinder Additionen zunächst wohl als *Veränderung einer Anzahl konkreter Dinge* verstehen ("unary view", vgl. WEAVER 1982, S. 62; BAROODY, WILKINS & TIILIKAINEN 2003, S. 153), zum Beispiel: "Da sind vier rote Würfel, drei blaue Würfel werden dazu gegeben, *danach* sind es insgesamt sieben (rote und blaue) Würfel." Ein vermutlich ("evidence is far from conclusive", BAROODY u.a. 2003, S. 153) *späteres* Verständnis der Addition ist statisch, im Sinne der *gedanklichen Vereinigung* zweier Anzahlen ("binary view", WEAVER 1982, S. 63): "Hier liegen vier rote und drei blaue Würfel, zusammen sind es sieben (rote und blaue)."

Auch bei der Subtraktion scheint die die "intuitive view" von Kindern die einer *Veränderung* im Sinne des *Wegnehmens* ("take away") zu sein (BAROODY u.a. 2003, S. 149): "Da liegen sieben Würfel, *davon* nehme ich drei weg, dann bleiben vier übrig."

FUSON weist darauf hin, dass schon Kindergartenkinder durch direkte Modellierung auch "word problems" lösen könnten, die über diese enge Deutung der Subtraktion hinausgehen:

- Typ A: Aufgaben, in denen ein *Ausgleich* verlangt wird, wie etwa: "Da sind 8 rote Würfel und 5 blaue. Wie viele blaue müssen dazukommen, damit gleich viele blaue und rote Würfel daliegen?"
- Typ B: Aufgaben, in denen nach dem *Rest* oder (verbleibenden) *Teil eines Ganzen* gefragt wird, etwa: "Da sind 8 Würfel. 5 davon sind blau, die anderen rot. Wie viele sind rot?"
- Typ C: Aufgaben, in denen ein *Vergleich* verlangt wird: "Da sind 8 rote Würfel und 5 blaue. Um wie viele sind die roten Würfel mehr?" (Vgl. FUSON 1992a, S. 64 f.)

Alle diese Textaufgaben lassen sich mit Hilfe derselben Subtraktion 8–5=3 lösen. Was aber FUSON an dieser Stelle als "fairly simple subtraction situations" bezeichnet, nämlich die Typen B und C, konnten in einer Untersuchung mit 88 deutschen ErstklässlerInnen nur 55 bzw. 28 Prozent der Kinder richtig lösen (STERN 1992, zitiert nach RADATZ u.a. 1996, S. 79). In FUSONs Entwicklungsmodell (FUSON 1992a, FUSON 1992b) werden auch solche Probleme auf dem untersten "Level I" eingeordnet. Das erscheint zumindest gewagt; wir werden darauf noch zurückkommen. Hier schon sei angemerkt, dass zwar natürlich jede Subtraktion *auch* als Ergänzung gedeutet werden *kann*. Wenn aber Kindergartenkinder oder ErstklässlerInnen Aufgaben des Typs A, so wie es deren "semantische Struktur" (vgl. SCHMIDT 2003, S. 34) nahelegt, tatsächlich *als Ergänzung lösen* (in STERNs Untersuchung schafften dies 96 Prozent der Kinder; vgl. RADATZ u.a. 1996, S. 79), dann tun sie das vermutlich *nicht im Bewusstsein,* damit eine *Subtraktion* gelöst zu haben.

Letzteres hängt freilich, wie FUSON (1992a, S. 70) zu Recht anmerkt, auch wesentlich davon ab, wie Kinder gelernt haben, die Operationszeichen + und – zu gebrauchen und *auf dieser Grundlage* auch Text- bzw. Sachaufgaben zu mathematisieren. FUSON selbst hat in mehreren Versuchsklassen initiiert, dass das Minuszeichen von Anfang an mit drei verschiedenen Bedeutungen eingeführt wurde, "as having [...] a take-away, a compare, and an equalize-meaning". Sie berichtet (ohne dies näher auszuführen), dass einige Kinder "further experiences focused on differentiating and remembering meanings for the marks + and –" benötigt hätten. Diese "weiteren Lernerfahrungen" seien erfolgreich gewesen "in reducing this interference", haben diese aber offenbar nicht vollständig beseitigen können. Generell hätten die Kinder aber auf dieser Grundlage Textaufgaben mit Vergleichs- und Ausgleichsproblemen ebenso gut gelöst wie Wegnehmprobleme (FUSON 1992a, S. 124).

2.10.1.3 "Alleszählen" als basale Rechenstrategie

Was auch immer die Deutung ist, die Kinder (entsprechend ihren Lernerfahrungen) dem Plus- und Minuszeichen zunächst geben: In dieser ersten Phase sind sie auf Grundlage ihres Verständnisses von Zahlen als "pattern number" bzw. "counted number" (vgl. Kap. 2.10.1.1) darauf angewiesen, Additionen und Subtraktionen *mit konkreten Objekten* (Fingern, Würfeln und dergleichen) oder zumindest mit der *Vorstellung konkreter Objekte* durchzuführen. Sie müssen dabei *jede* der drei in einer Ziffergleichung notierten Zahlen a+b=c bzw. d–e=f *für sich, nach einander* entweder durch Abzählen ("counted number") oder aber auch durch Simultanerfassung ("pattern number") darstellen bzw. ermitteln. Das ist freilich wiederum in einer Reihe von Ausformungen möglich:

Da ist zunächst das "counting all" bzw. "separate from" im wörtlichen Sinne: *Alles wird gezählt*, jede der drei Zahlen a, b und c wird durch Hochzählen von eins weg gebildet bzw. ermittelt. Dabei werden etwa für 3+4=7 tatsächlich *zunächst* "eins, zwei, drei" Finger der einen Hand, *dann* "eins, zwei, drei, vier" Finger der anderen Hand einzeln aufgeklappt. Schließlich ermittelt das Kind in einem *dritten* Zählakt (dem "sum count") mit "eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben" auch die Gesamtzahl der nun aufgeklappten Finger wieder zählend (vgl. etwa BAROODY 1987, S. 142, der die unterschiedlichen tatsächlich beobachtbaren und zum Teil wohl auch nur denkbaren Fingerzählstrategien in allen Details auflistet).

FUSON betont, dass die Finger oder Würfel im Bewusstsein des Kindes auf diesem Niveau *entweder* Summand *oder* Summe, aber nie beides seien: Die Summanden würden *nicht als Teil* der Summe gedacht, sondern die Summe sei für das alleszählende Kind eine *neue* Anzahl, durch welche die Summanden gewissermaßen zeitlich "abgelöst" werden (vgl. FUSON 1992a, S. 66f). Das gibt die *Prozedur* des Alleszählens korrekt wieder (die Zahlen a, b und c in a+b=c werden jeweils für sich zählend aufgebaut bzw. ermittelt), ist aber bezüglich des zugrunde liegenden gedanklichen *Konzepts* von Zahl spekulativ: Es ist sehr wohl *möglich*, dass ein Kind nach Abschluss der "counting all"-Prozedur eine Reflexion des Ganzen bezüglich seiner Teile anstellt. Dass dies üblicherweise auf dem Niveau des "counting all" nicht geschieht, mag wohl zutreffen. Wir werden aber noch sehen, dass *nicht darin* der wesentliche Unterschied zum "counting on" begründet liegt. Ein tatsächlich wesentliches Unterscheidungsmerkmal scheint vielmehr im Angewiesensein auf *vollständige Modellierung* zu liegen. *Dieses* ist wohl auch der konzeptuelle Grund dafür, dass bestimmte Textaufgaben – eben solche, die sich durch ihre semantische Struktur gegen eine vollständige Modellierung sperren – von Kindern auf dem Level der "pattern numbers" bzw. "counted numbers" nicht gelöst werden.

Additionen mit Summanden größer als fünf stellen für Kinder dieses Levels, sofern sie ihre *Finger* als "counted objects" verwenden, ein besonderes Problem dar: Bei einer Aufgabe wie 1+6 lässt sich zwar jeder der Summanden für sich mit Fingern darstellen, aber nicht in der oben geschilderten Weise. Es können nun nicht mehr beide Summanden an den Fingern *je einer* Hand dargestellt werden. Und den einen Finger, den das Kind üblicher Weise für die Darstellung der Sechs noch an der zweiten Hand verwendet, hat es bei gewohnter Darstellung der Eins bereits "verbraucht". Solche Additionen werden daher von manchen Kindern zunächst tatsächlich auch nicht bewältigt. Sie können gerade deshalb eine jener Sackgassen ("impasses") darstellen, die eine kognitive Weiterentwicklung provozieren (vgl. SIEGLER & JENKINS 1989, S. 103). Auch bei einem Verharren *innerhalb* des "counted number"-Denkens ist aber eine Lösung dieses Problems mithilfe der Finger möglich: Das Kind muss dann etwa bei 1+6 beim Darstellen der Sechs zumindest noch einen Finger jener Hand verwenden, mit der es bereits die Eins modelliert hat.

Kinder, die Zahlen als "counted number" verstehen, sind nicht *unbedingt* auf Finger oder Material angewiesen: Sie können auch versuchen, die vollständige Modellierung der Aufgabe *in der Vorstellung* zu leisten. Für 3+4 etwa muss das Kind sich "vor seinem inneren Auge" zunächst "eins, zwei, drei" Würfel oder Finger vorstellen, "daneben" oder "darunter" weitere "eins, zwei, drei, vier". Es muss dann versuchen, diese *nur vorgestellten Einheiten* im "sum count" nochmals mit "eins" beginnend korrekt abzuzählen. Auf dieses Weise sind "counting all" und (noch schwerer) "separate from" auch als "covert strategies" möglich. Das erfordert freilich selbst bei kleinen Zahlen einen enormen Konzentrationsaufwand und ist entsprechend fehleranfällig (vgl. FUSON 1992a, S. 70).

2.10.1.4 Strategien auf der Basis gespeicherter "Fingermuster"

Viele Kinder speichern mit der Zeit "Fingermuster" und können auf dieser Grundlage in einer Aufgabe a+b=c bzw. d–e=f eine, zwei oder (bei geeigneten Zahlen) auch alle drei der beteiligten Zahlen als "pattern numbers" behandeln. Auf diese Weise lässt sich dann etwa 5+3"wie folgt lösen: Zunächst wird eine ganze Hand (gespeichert als "fünf") hochgehoben, dann werden mit *einer* Ausstreckbewegung drei Finger der anderen Hand (gespeichert als "drei") daneben gehalten. Zuletzt kann auch das entstandene neue Muster aus "fünf und drei" Fingern ohne Zählen (in diesem Fall "quasi-simultan") als "acht" erkannt werden.

Diese Strategie ist bei SIEGLER & ROBINSON (1982) unter der Bezeichnung "fingers" berücksichtigt. Eine weitere, in der Literatur kaum beschriebene Variante des Fingergebrauchs beim Addieren besteht darin, etwa bei 3+4=7 zunächst drei Finger *simultan* (als "pattern number") auszustrecken, dann "eins, zwei, drei, vier" Finger *einzeln* (vier als "counted number") an das "Muster" der drei anzufügen und das sich so ergebende neue Muster (eine ganze Hand und noch zwei Finger) wieder als "pattern number" *quasi-simultan* zu erfassen (vgl. Kap. 6.1.7).

Bei beiden zuletzt genannten Strategien werden nur *Teile* der Addition *zählend* durchgeführt; das spricht vordergründig gegen ihre Klassifikation als "counting *all*." FUSON ordnet diese Strategien dennoch dem Einstiegs-Level ihres Entwicklungsmodells zu (FUSON 1992a, S. 70). Das erscheint insofern problematisch, als im abschließenden nicht-zählenden Bestimmen der Summe eine *quasi-simultane Zahlerfassung* deutlich wird, die über die einfache "pattern number" hinausreicht. Die Frage ist aber, *wie weit* sie darüber hinausreicht: Entscheidend ist, was das Kind beim Abrufen von Fingermustern *denkt*. Wenn es "sieben Finger" als "fünf Finger und noch zwei Finger" erkennt bzw. darstellt und *dabei* die sieben Finger als ein *Ganzes* in Beziehung zu fünf und zwei Fingern als seinen *Teilen* reflektiert, hat es die Stufe der "pattern number" zumindest in dieser Reflexion deutlich verlassen (siehe Kap. 2.10.4).

Viele Kinder, die *äußerlich* auf *dieselbe* Weise mit ihren Fingern rechnen, erbringen diese Reflexionsleistung aber nicht. Die (simultan erkannten) "sieben Finger" haben sie tatsächlich *nur* als ein (wenn auch bereits recht anspruchsvolles) figurales Muster gespeichert. Dessen *Teile* sind ihnen *nicht als solche bewusst*. Entsprechend werden die Finger dann auch eingesetzt: Bei einer Aufgabe wie etwa 8–5 wird ein solcherart denkendes Kind zwar acht Finger simultan als fünf und drei ausstrecken. Es wird dann aber fünf Finger nicht als "eine ganze Hand" wegnehmen, sondern "eins, zwei, drei, vier, fünf" Finger einzeln umknicken, zunächst die drei Finger der zweiten, dann zwei weitere Finger der ersten Hand (vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 41; GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 108f). Auch wenn in solchen Fällen nicht *alles* gezählt wird, entspricht das zugrunde liegende Zahlverständnis letztlich doch dem des "counting all". Und deshalb bleibt einem Kind, das Fingermuster nur als *unreflektierte Muster* einzusetzen pflegt, auch wieder nur die Strategie des "Alleszählens" im vollen Sinne, sobald es auf ein anderes Material festgelegt wird (etwa durch ein "Verbot", die Finger zu verwenden).

Ein Kind aber, das die Aufgabe 8–5 mittels Fingermuster so löst, dass es von den simultan ausgestreckten acht Fingern die fünf Finger der einen Hand simultan wieder wegnimmt, demonstriert damit vermutlich ein bereits weiter gehendes Verständnis: Zumindest *im Kontext des Fingerrechnens* ist ihm offenbar bewusst, dass fünf (Finger) ein Teil des Ganzen von acht (Fingern) sind. Die konzeptuelle Basis von Fingerrechenstrategien muss also wohl differenzierter betrachtet werden, als dies bislang in Untersuchungen und darauf aufbauenden Entwicklungsmodellen in der Regel geschehen ist.

2.10.2 Weiterzähl-Strategien als *Ökonomisierung* des zählenden Rechnens

Das "counting all" wird, wie dargestellt (vgl. etwa Kap. 2.3 und 2.4), in seiner Rolle als Hauptstrategie üblicherweise vom "counting on" abgelöst. Dieses soll hier zunächst genauer als bisher *auf prozeduraler Ebene* beschrieben werden, ehe seine konzeptuelle Grundlage einer detaillierten Analyse unterzogen wird.

"Counting on" kann mit und ohne Zählhilfe durchgeführt werden, weiters als "counting on from first" (Weiterzählen von der *erstgenannten* Zahl des Additionsterms, unabhängig von deren Größe) oder als "counting on from larger" (Weiterzählen von der *größeren* Zahl des Additionsterms, unabhängig davon, ob diese im Term zuerst genannt wird). In jedem Fall wird, anders als bei den unter 2.10.1 behandelten Strategien, beim eigentlichen "counting on" zumindest einer der beiden Summanden *nicht* modelliert.

Am Beispiel 3+4: Beim "counting on" wird *nicht* zuerst "eins, zwei, drei" gezählt. Sondern das Kind nennt gleich das Zahlwort "drei", um *von dort ausgehend* in der Zahlwortreihe "um vier" weiterzuzählen. Das erfordert in weiterer Folge, wie erläutert, ein "keeping track": Das beim Weiterzählen im Beispiel zuerst genannte "vier" muss *zugleich* als "eins" in einer eigenen "Weiterzählreihe" bilanziert werden, das "fünf" der "Hauptzählreihe" als "zwei" der "Weiterzählreihe", das "sechs" als "drei". Nur dann weiß das Kind, dass es bei "sieben" als der *vierten* Zahl der Weiterzählreihe aufhören und diese als Ergebnis nennen kann.

Noch anspruchsvoller ist das "keeping track" bei der entsprechenden Subtraktionsstrategie des "counting back": Hier sind "Hauptzählreihe" und "Weiterzählreihe" nämlich *gegenläufig*. Einerseits muss zum Beispiel bei 8–5 von "acht" mit "sieben, sechs, fünf, vier, drei" zurückgezählt werden. Andererseits muss aber beim "keeping track" das "sieben" als "eins", das "sechs" als "zwei" usw. bilanziert werden.

Beim ergänzenden "counting to" fällt das Problem der Gegenläufigkeit der beiden Zählreihen weg: Das "keeping track" besteht nun darin, die Schritte "sechs, sieben, acht" der Hauptzählreihe als "eins, zwei, drei" der Weiterzählreihe zu registrieren, um die so ermittelte *Anzahl der Zählschritte* als Ergebnis nennen zu können.

In jedem Fall wird das "keeping track" entscheidend erleichtert, wenn als Zählhilfe die Finger verwendet werden. Manche Kinder verzichten darauf und behelfen sich mit konzentriert-rhythmischem (oft auch nur "innerem", subvokalem) Sprechen der "dazu gezählten" Zahlwörter. Summanden bis drei oder vier können so in der Regel noch gut kontrolliert werden. Ob FUSON dies unter "pattern number methods of keeping track" (FUSON 1992a, S. 83) versteht, bleibt unklar. "Pattern numbers" spielen jedenfalls auch in der Verwendung der *Finger als*

Zählhilfe eine wichtige Rolle. Beispielsweise kann beim Weiterzählen "um sechs" so lange ein Finger nach dem anderen ausgestreckt und dabei jeweils um eins weitergezählt werden, bis das vertraute "Fingermuster" der Zahl sechs erreicht ist. Die dabei im Weiterzählen erreichte Zahl gibt das Ergebnis der Addition an.

Auf der *prozeduralen* Ebene sind solche Strategien offenkundig ein Fortschritt gegenüber den Alleszähl-Strategien: "Counting on" ist "weniger umständlich", daher tendenziell "schneller" als "counting all", "counting back" und (ergänzendes) "counting to" sind tendenziell schneller als "separate from". Dieser "ökonomische Fortschritt" besteht nicht oder nur bedingt im Vergleich zu "finger pattern"-Strategien. Letztere sind, wie besprochen, nicht per se Ausdruck eines im Vergleich zum Alleszählen tieferen Zahlverständnisses. Drückt sich nun aber im *weiterzählenden* Rechnen ein solcher *konzeptueller* Fortschritt aus? *Müssen* also Kinder mehr (bzw. anderes) von Zahlen und Rechenoperationen verstanden haben, um weiterzählend addieren und zurück- oder hochzählend subtrahieren zu können?

An dieser Stelle ist eine grundsätzliche Anmerkung angebracht: Wie gesehen, verwenden Kinder in der Regel zumindest zeitweilig Alleszähl- und Weiterzählstrategien *parallel*. Daraus könnte gefolgert werden, dass beide (da bei *demselben* Kind *gleichzeitig* in Verwendung) doch auch nur Ausdruck *desselben Verständnisses* sein können.

Doch erstens kommt hier der Unterschied zwischen Kompetenz und Performanz zum Tragen: Es ist denkbar, dass ein Kind kraft seines Zahlverständnisses bereits die *Kompetenz* erworben hat, eine Aufgabe anders als alleszählend zu lösen, in seiner *Performanz* aber aus anderen Gründen (etwa Sicherheitsbedürfnis, Gewohnheit) dennoch an dieser vertrauten Strategie festhält (vgl. STEINBERG 1985, S. 353).

Zweitens spielt hier offenbar das bestimmte "Zahlenmaterial" eine wichtige Rolle: Zwar gibt es auch das Phänomen, dass ein und dieselbe Aufgabe heute alleszählend, morgen weiterzählend, übermorgen wieder alleszählend gelöst wird (vgl. CARPENTER & MOSER 1984, siehe Kap. 2.4). Oft aber wird Weiterzählen von einem Kind zuerst (und dann aber vielleicht durchgehend) gerade bei solchen Additionen verwendet, wo es tatsächlich eine große Arbeitsersparnis bedeutet, wie etwa bei "n+1 combinations" (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 87). Wo dagegen die durch Weiterzählen erzielbare Einsparung an Zeit und Mühe objektiv betrachtet gering ausfällt, mag dasselbe Kind auch weiterhin alleszählend vorgehen.

Es lässt sich also aus dem Umstand, dass ein Kind einzelne Aufgaben alleszählend löst, grundsätzlich nicht erschließen, dass es Zahlen immer und in jedem Fall nur auf dem "pattern number" bzw. "counted number"-Niveau denkt. Was sich sagen lässt, ist lediglich: Wenn ein Kind Zahlen auf diesem Niveau denkt, ist es in der Lage, Additionen und Subtraktionen durch vollständiges Modellieren alleszählend zu lösen. "Counting on" erfordert *kein* vollständiges Modellieren und ist insofern ein Fortschritt. Es fragt sich aber, worin er genau besteht.

FUSON bewertet diesen Fortschritt in ihrem Entwicklungsmodell klar als "*conceptual* progress", als Fortschritt im *Verständnis*. Im weiterzählenden Addieren würde das Kind die Summanden als "embedded number" ("eingebettete Zahl") denken: "Each addend is embedded within this sum as a recognizable, separate section of number words" (FUSON 1992b, S. 254). Nun ist aber der Summand als Teil der Summe freilich auch beim "counting all" durchaus erkenn*bar*. Ein "conceptual progress" in dem von FUSON ausgeführten Sinn wäre das Weiterzählen erst dann, wenn in dieser Rechenstrategie zum Ausdruck käme, dass das Kind die Summanden *auch tatsächlich selbst als Teile der Summe erkennt* und bewusst als solche erfasst; dies ist zu prüfen.

Dazu müssen aber zunächst jene zwei Strategien analysiert werden, die in FUSONs Entwicklungsmodell als "transitional procedures" zwischen "counting all" und "counting on" angesiedelt werden. Bereits diese Strategien stehen für FUSON auf einem konzeptuell höheren Niveau als das "counting all".

Die eine dieser Übergangsstrategien bezeichnet FUSON als "object-count-on" (a.a.O., S. 255). Der Unterschied dieser Strategie gegenüber dem "counting all" bestehe in einer "Abkürzung mit Bezug auf den ersten Summanden" ("first addend abbreviated", FUSON 1992a, S. 82):

Beim "counting all" löst ein Kind etwa 3+4 dadurch, dass es (a) zuerst drei (b) dann vier und (c) schließlich alle sieben Würfel auszählt, wobei bei diesem "sum count" wieder mit "eins" beginnend alle Würfel gezählt werden.

Beim "object-count-on" laufen (a) und (b) in derselben Weise ab. Bei (c) dagegen zählt das Kind die (zuvor schon abgezählten) drei Würfel beim "sum count" kein weiteres Mal. Es nimmt, so FUSON, vielmehr eine "cardinal-to-count-transition" vor, benützt also das (zuvor kardinal gedachte) "drei" nun als *Zähl*zahl, um von dieser *weiterzählend* die (bereits vorher ausgezählten) vier Würfel des zweiten Summanden durch Antippen oder Verschieben "dazu zu geben". Das Problem des "keeping track" stellt sich hier nicht, denn die Addition wurde ja zuvor vollständig modelliert. Das Kind ist sich deshalb sicher, dass es mit dem Antippen des letzten Würfels des zweiten Summanden *alle Würfel* ausgezählt hat. Gerade dieses Wegfallen des "keeping track" prädestiniere das "object-count-on" zu einer "transitional procedure" (FUSON 1992b, S. 255).

Inwiefern liegt hier nun aber ein "*conceptual* progress" (a.a.O., S. 255) vor? FUSON bezeichnet die oben beschriebene *Prozedur* (mit einem im Grunde pleonastischen Terminus) als "embedded integration":

> *"Now the child can think of the sum objects and simultaneously can think of the objects for one addend as being some of those sum objects. [...] only one addend is counted, but it is counted as the second addend embedded within the sum"* (FUSON 1992a, S. 87).

Hier scheint ein unbestreitbarer *prozeduraler* Fortschritt auf konzeptueller Ebene überinterpretiert zu werden. FUSON spricht selbst zutreffend von einer *Abkürzung* ("first addend abbreviated", a.a.O., S. 82). Aber *abgekürzt* wird hier doch *der im Grunde selbe Vorgang*; um im genannten Beispiel zu bleiben: Das Kind hat beim "object-count-on" nach dem Auszählen des zweiten Summanden noch im Gedächtnis, dass es für den ersten Summanden gerade zuvor drei Würfel hingelegt hat. Es *erspart* sich deshalb ein neuerliches Abzählen und zählt nur den zweiten Summanden noch einmal, dieses Mal aber mit "vier" beginnend. Inwiefern hat es dabei in irgendeiner Weise anders über die verwendeten Zahlen gedacht als beim "counting all"? Die Zahlen sind nach wie vor "counted numbers", bezogen auf "perceptual unit items" (STEFFE & COBB 1988, S. 3), wahrnehmbare Einheiten. Und gerade in der Behandlung des zweiten Summanden besteht nicht der geringste Unterschied zum Alleszählen (*zwei* Zählakte, zuerst mit "eins" beginnend, im Zuge des "sum count" mit "vier" beginnend). *In der Prozedur selbst* wird jedenfalls in keiner Weise deutlich, dass das Kind "die Objekte des einen Summanden gleichzeitig als Objekte der Summe" denken würde. Freilich ist, wie GRAY (2003, S. 69; siehe Kap. 2.9.4) bemerkt, eine solche *Reflexion des Ganzen in seinen Teilen* (was wohl mit "embedded integration" gemeint sein soll) durch die zählende Ermittlung des Ganzen auch nicht ausgeschlossen: Es ist *möglich*, dass sie vom Kind beim "object-count-on" geleistet wird. Aber das wäre dann eben eine *zusätzliche* gedankliche Leistung, die über die eigentliche Prozedur hinausgeht.

Wie verhält es sich nun mit dem "sequence-count-all", welches von FUSON als zweite "Übergangsprozedur" auf dem "Level II" ihres Entwicklungsmodells genannt wird (a.a.O., S. 255)? Gemeint ist eine Strategie, der auch SIEGLER & JENKINS (1989, S. 58) unter der Bezeichnung "short cut sum" eine Zwischenstellung zwischen "counting all" und "counting on" zuschreiben; BAROODY nennt sie (1987, S. 142) "(mental) counting all from first". Wieder am Beispiel 3+4 ausgeführt: Das Kind legt beim "sequence-count-all" mit "eins, zwei, drei" zunächst drei Würfel vor sich (oder streckt einzeln drei Finger aus). Es legt dann einzeln vier Würfel dazu (streckt einzeln vier weitere Finger aus), begleitet dieses Dazugeben (Ausstrecken) aber mit "vier, fünf, sechs, sieben". Hier muss es nun also in irgendeiner Weise ein "keeping track" bewerkstelligen, um zu wissen, dass es beim Aussprechen von "sieben" den vierten Würfel (Finger) dazugegeben hat.

Auch hier ist, deutlicher noch als beim "object-count-on", unbestreitbar ein *prozeduraler* Fortschritt gegeben: Das Kind zählt *in einem Zählvorgang* die *vier* Objekte des zweiten Summanden als *viertes, fünftes, sechstes* und *siebentes* Objekt der Summe (beim counting-all geschieht dies erst im Zuge des abschließenden dritten Zählvorgangs). Aber auch hier scheint es überzogen, von einem "major change in the conception" (FUSON 1992a, S. 83) zu sprechen: Wie beim "counting-all" wird die Addition vollständig modelliert, die Zahlen werden weiterhin als "counted numbers", also stets mit Bezug auf konkrete Objekte verwendet. Und ob das Kind dabei eine *gedankliche* "Einbettung" des Summanden in die Summe leistet, kann aus der beobachtbaren Handlung nicht erschlossen werden; eine solche "Einbettung" ist jedenfalls keine unabdingbare Voraussetzung dafür, um ein "sequence-count-all" bewerkstelligen zu können.

Was sich beim "sequence-count-all" aber *anbahnt* und beim eigentlichen "counting on" tatsächlich eine neue Qualität zumindest im *Umgang mit* Zahlen darstellt, ist der Übergang vom *Zählen von konkreten Objekten* zum *Zählen von Zahlwörtern*. Beim "sequence-count-all" ist dieser Übergang noch nicht vollzogen: Das Kind zählt im genannten Beispielsfall ja tatsächlich noch immer die angetippten Objekte − zwar nicht mit "eins, zwei, drei, vier", sondern mit "vier, fünf, sechs, sieben", aber es sind die *Objekte* (und nicht die Zahlwörter selbst), auf die es im "keeping track" sein Bewusstsein gerichtet hat.

Anders beim eigentlichen "counting on", dem "Level III" im Entwicklungsmodell von FUSON (1992a, S. 93-95). In der Form des "counting on from first" bedeutet das für unsere Beispielaufgabe 3+4:

- *Keiner* der beiden Summanden wird direkt modelliert.
- Das zählende Darstellen des ersten Summanden wird nicht erst beim "sum count" *abgekürzt*, sondern es findet gar nicht erst statt. "Drei" wird als Startzahl für das folgende Weiterzählen *unmittelbar* genannt.
- Das "keeping track" beim Weiterzählen bezieht sich tatsächlich auf die ausgesprochenen oder (subvokal) gedachten Zahlwörter. Auch wenn dabei Finger zum Einsatz kommen, werden nicht eigentlich die Finger "dazugezählt", sondern umgekehrt: Das bereits gespeicherte Muster "vier Finger" hilft beim *Zählen der Zahlwörter*. Sobald durch Ausstrecken des vierten Fingers dieses Muster erkennbar wird, wird das Weiterzählen beendet (vgl. BAROODY 1987, S. 155).

Dieses "Zählen von Zahlwörtern" ist vom bisherigen "Zählen von Objekten" tatsächlich *verschieden.* Die Reihe der Zahlwörter wird so zur "numerable chain" (FUSON 1992a, S. 98); das ist zunächst einmal wieder ein klarer *prozeduraler* Fortschritt. Ihn darüber hinaus auch als *Weiterentwicklung im Zahlkonzept* zu werten, mag insofern gerechtfertigt sein, als die rechnerische Verknüpfung zweier Zahlen im Denken des Kindes nun auch ohne das Vorliegen von zählbaren Objekten oder simultan erfassten Mustern möglich wird. In RESNICKS wichtiger Unterscheidung (vgl. Kap. 2.8.2) wird damit aus der "*mathematics of quantities*" erstmals eine "*mathematics of numbers*": Während in erstgenannter die Zahlen als "adjectives" dienen, welche ihre Bedeutung "from the physical material they refer to and describe" beziehen, werden Zahlen in der "mathematics of numbers" gedacht als "conceptual entities that can be manipulated and acted upon" (RESNICK 1992, S. 404). Dieser Unterschied wird im Folgenden noch näher beleuchtet (vgl. Kap. 2.10.4).

Was aber gegenüber dem "counting all" beim "counting on" *unverändert* bleibt, ist die Behandlung von Zahlen als "Zusammensetzung aus lauter Einzelnen": Wenn das Kind etwa die Addition 4+3 als "(vier), *fünf, sechs, sieben*" löst, dann geschieht *im Rahmen dieser Prozedur* selbst gerade *keine* gedankliche "*Einbettung* des zweiten Summanden in die Summe". Die Zahl drei wird hier nicht als Teil der Zahl sieben behandelt. Die drei wird vielmehr umgekehrt in lauter Einerschritte *aufgelöst*. Ebenso beim Subtrahieren als "counting-down": Ein Kind, dass bei 8–5 "(acht), *sieben, sechs, fünf, vier, drei*" zählt, denkt *in diesem Zählakt selbst* nicht an das Wegnehmen einer Teilanzahl (drei) von einer Gesamtanzahl (acht), sondern es denkt *fünf Einzelschritte*. Wieder besteht die Möglichkeit der begleitenden Reflexion: Das Kind *kann* zusätzlich oder anschließend fünf als den weggenommenen Teil und drei als den übrig gebliebenen Teil des Ganzen acht denken. Aber diese Reflexion ist dem weiterzählenden Rechnen selbst ebenso wenig vorausgesetzt wie dem alleszählenden Rechnen. Kinder, die weiterzählend rechnen, mögen diese gedankliche Leistung der "Einbettung der Summanden in die Summe" erbringen oder auch nicht; das weiterzählende Rechnen selbst liefert dafür keinen Hinweis.

Dass wir es hier nicht unbedingt mit einem konzeptuellen Fortschritt zu tun haben, zeigt sich auch daran, dass sich gerade im Rahmen von Weiterzähl-Strategien mitunter *Abkoppelungen vom kardinalen Zahldenken* ergeben, die in dieser Form beim "counting all" nicht vorkommen:

Manche Kinder zählen beim "counting on" von 3+4 zwar um vier Zahlwörter weiter, beginnen das Weiterzählen aber bei "drei", wodurch sich ein "Fehler um eins" ergibt (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 34). Das ist von einer "Einbettung der Summanden in die Summe" weit entfernt: Die Summanden werden *nicht* als für sich bestehende *Ganzheiten* und zugleich als Teile der Summe behandelt, sondern jeweils für sich als Reihe von "units". Dabei wird aber die letzte "unit" des ersten Summanden zugleich (und im Widerspruch zur Kardinalität der Summanden) als erste "unit" des zweiten Summanden genommen. Es findet hier im Akt des Weiterzählens also *keine kardinale Reflexion* (und daher schon gar keine Reflexion einer "Zahl als Zusammensetzung aus Zahlen") statt.

Wie FUSON anführt, kommt es mitunter auch zu einer Vermischung zweier möglicher "counting-down"-Strategien. Das "counting down" von 7–4 kann ja auf zwei Arten zu einem korrekten Ergebnis führen (die vom Kind beim Runterzählen im "keeping track" betont ausgesprochenen Zahlwörter sind im Folgenden jeweils kursiv gesetzt):

(a) "Sieben (hier beginne ich), *sechs* (das bleibt, wenn eins schon weg ist), *fünf* (bleibt, wenn zwei weg sind), *vier* (bleibt, wenn drei weg sind), *drei* (bleibt, wenn vier weg sind), das Ergebnis ist drei (das beim Runterzählen zuletzt genannte Zahlwort)!"

(b): "*Sieben* (kommt als erste Zahl weg), *sechs* (kommt als zweite Zahl weg), *fünf* (kommt als dritte Zahl weg) *vier* (kommt als vierte Zahl weg), also bleiben noch drei (das Zahlwort, welches beim Runterzählen auf das zuletzt genannte folgt)!"

Bei Vermischung beider Strategien wird "sieben, sechs, fünf, vier" (ergibt im "keeping track" tatsächlich vier Zahlwörter) gezählt und das letztgenannte "vier" als Antwort gegeben. Fuson selbst bemerkt hier: "This indicates that some children may invent and use counting down in a procedural way without close ties to cardinality" (FUSON 1992a, S. 95; vgl. auch SCHIPPER 2003b, S. 234f; GERSTER 2005, S. 210).

So ist es wohl. Das spricht aber zugleich dagegen, dem "counting down" bzw. "counting on" den Rang eines "major change" im konzeptuellen Verständnis zuzuschreiben, wie dies Fuson in ihrem Entwicklungsmodell tut. Tatsächlich sind Strategien des "Weiterzählens" für sich genommen wohl nicht mehr als ein "prozeduraler" Fortschritt, eine Ökonomisierung innerhalb des zählenden Rechnens. Sie können verbunden sein mit einer parallel dazu erfolgenden Weiterentwicklung des Zahlkonzeptes und/oder mit vertieften Einsichten in operative Zusammenhänge, sind aber nicht per se schon Ausdruck solcher "konzeptueller" Fortschritte. Dass letztere in der Regel ohnedies nicht in klar abgrenzbaren "Stufen" (wie dies von "Entwicklungsmodellen" suggeriert wird) erfolgen, ist eine der Kernaussagen des folgenden Kapitels.

2.10.3 "Number-after-rule", "Counting on from *larger*" und Kommutativität der Addition

Als ein frühes Beispiel für die Ablösung des zählenden Rechnens durch Einsicht in ein Prinzip führt BAROODY die "number-after-rule" an (BAROODY 1983, S. 228; BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 84), die in etwa besagt: "Bei Additionen +1 ist das Ergebnis die 'Zahl nach' dem anderen Summanden."

BAROODY und TIILIKAINEN erklären die Einsicht in diese Regel als konzeptuelle Konsequenz einer Erfahrung, die beim zählenden Rechnen gemacht wird: Das Kind integriere dabei zwei zunächst isolierte Aspekte seines mathematischen Wissens, nämlich einerseits das Wissen, wie man Additionen zählend löst, andererseits das bereits automatisierte Wissen um die Abfolge der Zahlwörter. Einmal erkannt, werde dieses Prinzip dann auch auf Additionen übertragen, die zuvor noch nie zählend gelöst wurden (BAROODY & TIILIKAINEN, S. 84f).

Aber worin besteht diese Einsicht genau? Das scheint von Kind zu Kind (und beim selben Kind in unterschiedlichen Phasen seiner Entwicklung) durchaus verschieden zu sein. Auf einer konzeptuell noch relativ niedrigen Ebene lässt sich die "number-after-rule" schlicht als Anwendung des "counting-on" auf ein dafür besonders einladendes "Zahlenmaterial" interpretieren. Beim Weiterzählen "um eins" entfällt ja das "keeping track"-Problem. Und tatsächlich spielen Aufgaben, bei denen genau eins addiert wird, wohl auch die Rolle eines Katalysators für den Übergang vom "counting all" zum "counting on": Dieses wird von vielen Kindern zunächst ausschließlich bei Additionen +1, später auch bei +2 und erst dann auch bei größeren Summanden angewandt (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 87).

Es hängt hier wieder alles davon ab, wie ein Kind das Weiterzählen *reflektiert*: Wenn das Ergebnis von +1 tatsächlich nur als "number *after*", als "Zahl *danach*" gedacht wird, drückt sich darin eben auch "nur" wieder das bereits analysierte Zahlverständnis der "counted number" aus. Wenn dagegen n+1 gedacht wird als "Zahl, die *um eins mehr* ist als n", kommt ein *relationaler* Aspekt ins Spiel, der über das isolierte Denken "kardinaler Ganzheiten" hinausreicht. Das ist nicht selbstverständlich: Manche Kinder beantworten zwar "sechs und eins?" spontan mit "sieben", können aber mit der Frage, was "um eins mehr als sechs?" sei, nichts anfangen (vg. GAIDOSCHIK 2003a, S. 31).

Eine noch grundlegendere Erweiterung des Zahlkonzepts läge dann vor, wenn (um im Beispiel zu bleiben) "sieben" als Einheit (Ganzes) von "sechs" und "eins" gedacht würde, wenn also die "sechs" als Teil der "sieben" (mit "eins" als dem anderen Teil) bewusst bliebe. Solche weitergehenden Reflexionen sind *möglich*; aber sie sind offenkundig nicht *Bedingung* dafür, dass ein Kind eine Aufgabe wie 6+1 unter Rückgriff auf die "number-after-rule" bzw. durch "counting on" rasch löst. Wir können also aus dem schnellen Lösen von 6+1 nicht den Schluss ziehen, dass das Kind "sechs" als Teil der "sieben" denkt (vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 140).

Nun beantworten Kinder in einer bestimmten Phase ihrer arithmetischen Entwicklung zwar Aufgaben wie 6+1 bereits spontan (etwa im Rückgriff auf die "number-after-rule), greifen aber bei Aufgaben wie 1+6 noch auf das umständliche "counting all" zurück (BAROODY u.a. 2003, S. 151). Auch das lässt sich unterschiedlich interpretieren: Entweder haben diese Kinder die "number-after-rule" noch nicht um die Einsicht in die Kommutativität der Addition ergänzt. Oder sie haben das "counting on" noch nicht zum konsequenten "counting on from larger" weiterentwickelt. Dass beides nicht zusammenfällt; dass also im "counting on from larger" nicht unbedingt auch schon (volle) Einsicht in die Kommutativität der Addition zum Ausdruck kommt, macht BAROODYS detailreiche Analyse dieses Entwicklungsschrittes deutlich, die im Folgenden in ihren wesentlichen Zügen wiedergegeben wird.

Wie bereits ausgeführt, scheinen Kinder das Addieren ja zunächst üblicherweise im Sinne einer Veränderung zu verstehen ("change-add-to addition schema", BAROODY 1987, S. 154). Dieses Schema steht aber einer Einsicht in die Kommutativität der Addition zunächst entgegen. Wer beispielsweise zwei Äpfel zu bereits vorhandenen fünf Äpfeln dazugibt, führt nun einmal *nicht dieselbe Handlung* aus wie jemand, der fünf Äpfel zu zwei Äpfeln dazugibt. Dass beides zum selben *Handlungsergebnis* führt, ist aus dieser Perspektive nicht selbstverständlich.

Dazu passt, dass Kinder im "counting all" die im Term a+b vorgegebene Reihenfolge der Summanden beim Modellieren üblicherweise einhalten, auch dann, wenn b>a. Nun wäre freilich auch kein "ökonomischer Vorteil" ersichtlich, wenn (unter Nutzung der Kommutativität der Addition) a+b alleszählend als b+a gelöst, also zuerst b und dann a Würfel hingelegt würden: Da beim "counting all" ohnedies beide Summanden zweimal (zuerst für sich, dann noch ein zweites Mal im Zuge des "sum count") gezählt werden, ist der Zählaufwand für a+b und b+a unabhängig von der relativen Größe von a und b immer derselbe.

Das ist aber schon bei den Übergangsstrategien "object-count-on" und "sequence-count-all" ("short-cut-sum" bei SIEGLER & JENKINS 1989) nicht mehr der Fall. Hier würde die Umstellung zu b+a den abschließenden "sum count" (bei b>a) verkürzen bzw. das "keeping track"-Problem reduzieren. Dennoch wird dieser Vorteil von Kindern üblicherweise erst nach einiger Zeit der Rechen- respektive Zähl-Praxis mit Additionsaufgaben entdeckt (vgl. BAROODY u.a. 2003, S. 151). Wenn er einmal entdeckt wird, dann erfolgt dies aber zumeist gleich in Kombination mit der Entdeckung des eigentlichen "counting on". Wenn Kinder also erst einmal diese fortschrittlichere Zählstrategie verwenden, dann häufig von Anfang an in der "ökonomischen" Variante des "counting on from larger" (und ohne oder zumindest ohne eine allzu lange Phase des "counting on from first") (vgl. BAROODY 1987, S. 155; SIEGLER & JENKINS 1989, S. 70; CARPENTER & MOSER 1984, S. 192).

Heißt das nun, dass Kinder, die "counting on from larger" praktizieren, damit auch schon Einsicht in die Kommutativität der Addition unter Beweis stellen? Offenbar ist das nicht unbedingt der Fall. BAROODY berichtet aus Einzelfallstudien, dass manche Kinder einerseits Strategien wie "counting on from larger" wie selbstverständlich anwenden, andererseits aber "commutativity tasks" nicht lösen können, das heißt: Direkt gefragt, ob zum Beispiel 4+5 und

5+4 gleich viel seien, antworten sie mit "Ich weiß nicht!" oder "Da muss ich erst zählen!" Beim Vertauschen der Summanden sei also (bei *diesen* Kindern) das Bestreben um "cognitive economy" leitend, aber nicht die Einsicht in die Kommutativität als ein allgemeines Prinzip (BAROODY 1987, S. 153). Dazu muss freilich ergänzt werden, dass auch diese Kinder zumindest erkannt haben müssen, dass das Vertauschen der Summanden *"erlaubt"* ist. Und tatsächlich erhalten sie ja, wenn sie auf diese Weise vorgehen (und sich nicht verzählen), richtige Ergebnisse und daher positive Rückmeldungen seitens der Erwachsenenwelt (vgl. RESNICK 1983, S. 123). BAROODY u.a. sprechen in diesem Zusammenhang davon, dass die Kinder eine "commutativity permission" benützen würden (BAROODY u.a. 2003, S. 154). RESNICK weist darauf hin, dass sie diese "permission" möglicherweise als Selbstverständlichkeit betrachten, weil es ihrer frühen "order-invariance" ohnedies entspreche, eine Addition gleichermaßen von links nach rechts wie von rechts nach links zu lesen. Das Vertauschen der Summanden könne also zunächst einer grundlegenderen "default basis" entspringen, die dann beim Subtrahieren tatsächlich zur Fehlerquelle werde (RESNICK 1983, S. 123f). Möglicherweise wenden manche Kinder das Vertauschen der Summanden aber auch deshalb (zumindest anfangs) nur als "Trick" ohne zu Grunde liegendes Verständnis von Kommutativität an, weil es ihnen *genau so* im Unterricht (oder auch in der häuslichen Förderung) auch nahegebracht wurde.

Auf Grundlage eigener und zahlreicher weiterer Studien zum Umgang von Kindern mit Kommutativitätsaufgaben schlägt BAROODY ein Vier-Stufen-Modell der Entwicklung des Kommutativitätsverständnisses vor (BAROODY u.a. 2003, S. 154f):

In einer ersten Phase (Level 0) verstünden Kinder das Addieren *ausschließlich* im Sinne einer "unary conception" (als Veränderung *einer* Anzahl) und daher *nicht* kommutativ.

Auf Level I werde das Verständnis für das Addieren um eine "binary conception" ergänzt (als Vereinigung *zweier* Teile zu einem Ganzen). Das ermögliche "Protokommutativität": Kinder vertauschen auf diesem Level die Summanden, wo dies ihren Zähl- oder Rechenaufwand spürbar reduziert. Sie tun dies insbesondere beim Bearbeiten von Textaufgaben, die der "binary conception" entsprechen (DE CORTE & VERSCHAFFEL 1987, S. 374). Aber sie demonstrieren noch keine Einsicht bei expliziten "Kommutativitätsaufgaben": Die beiden Interpretationen einer Addition als "unary" und "binary" seien auf dieser Stufe "only loosely connected".

Auf Level II könne ein Kind bei einer "commutativity task" mit Teile-Ganzes-Einkleidung auch explizit erklären, *warum* es "erlaubt" ist, die Reihenfolge der Summanden zu vertauschen. Das gelinge aber noch nicht bei Textaufgaben, in denen es um eine Veränderung geht. Unabhängig davon wende ein Kind auf diesem Level das Vertauschungsgesetz bei Zahlaufgaben ohne Texteinkleidung im Sinne einer "permission" zur Arbeitsersparnis an.

Erst auf Level III erfolge die Integration von "unary" und "binary view" der Addition. Das vorteilhafte Vertauschen der Summanden erfolge nun unabhängig von der Sachsituation, seine Legitimität könne von den Kindern explizit erklärt werden; erst jetzt sei "true commutativity" erreicht (BAROODY u.a. 2003, S. 154f).

Die Studien zum Kommutativitätsverständnis machen auf exemplarische Art deutlich, wie komplex das Wechselspiel von prozeduralem und konzeptuellen Wissen in der arithmetischen Entwicklung eines Kindes ist: Eine neue Prozedur (Weiterzählen von der größeren Zahl, auch wenn diese nicht die erstgenannte ist) ist nicht zwangsläufig Ausdruck eines neuen, *klaren* Konzeptes (Kommutativität der Addition). Sie mag zunächst eher *aus Nützlichkeitserwägungen* (Verringerung des Zählaufwands) *ausprobiert* und im Erfolgsfall (positive Rückmeldung seitens der Erwachsenen, aber vielleicht auch tatsächlich die Entdeckung, dass das Ergebnis gleich ist wie bei der "umständlicheren" Alternativ-Prozedur) als *erlaubt* akzeptiert werden. Auch *das* ist freilich eine *Art von Einsicht*, aber es handelt sich um ein "weak schema – a generalization narrow in scope (tied to a particular context) and, perhaps, lacking logical coherence" (BAROODY u.a. 2003, S. 145, unter Verweis auf ANDERSON 1984). Die Prozedur bleibt auf dieser Grundlage im Gebrauch beschränkt; sie wird auch dort, wo sie von Vorteil wäre, nicht durchgehend angewandt. Jedes Anwenden der Prozedur schafft aber weitere Gelegenheiten zum Überdenken des Konzeptes, wodurch aus dem *schwachen* Schema ein *starkes* werden *kann*. Der prozedurale Fortschritt ist also eine *günstige Bedingung* für weiteren konzeptualen Fortschritt; erst dieser führt wiederum zu einem umfassenden Einsatz der fortschrittlicheren Prozedur.

Aus didaktischer Perspektive wesentlich daran ist die Rolle des Denkens, der Reflexion: Dass eine neue Prozedur von vertiefter Einsicht begleitet wird, ist kein Automatismus, sondern erfordert eine gedankliche Leistung des Kindes. *Prozeduren* können dem Kind auch einfach vorgemacht werden. Es kann etwa dazu angeleitet werden, beim Addieren die Summanden immer dann zu vertauschen, wenn der größere Summand "hinten steht". Aber die *Einsicht* in die Kommutativität der Addition lässt sich dadurch *nicht erzwingen*. Was Unterricht leisten kann und – um Lernprozesse zu erleichtern – auch leisten sollte, ist *Anlässe zu stiften* zur Reflexion. Kinder sollten also etwa aufgefordert werden, gezielt zusammengestellte Aufgabenreihen mit Tauschaufgaben zu lösen. Beim Bearbeiten solcher Aufgabenreihen ergeben sich wiederholt *Gelegenheiten* für die Einsicht in das Tauschprinzip. Die Chancen für diese Einsicht werden wesentlich erhöht, wenn die Kinder zusätzlich *zum Sprechen und damit zum Reflektieren* über ihre beim Lösen der Aufgaben gemachten Erfahrungen angeregt werden.

Ein zweites wird deutlich: Analysiert man, wie Kinder bestimmte Aufgaben in verschiedenen Phasen ihrer Entwicklung lösen, und analysiert man diese Strategien bezüglich ihrer konzeptuellen Voraussetzungen, wird man, wie RESNICK schreibt, "gezwungen" "to recognize relatively small changes in cognitive structures" (RESNICK 1983, S. 147). Die Entwicklung des arithmetischen Denkens verläuft also nicht – zumindest nicht in der Regel – in "großen Sprüngen", sondern in kleinen Schritten und auf mitunter recht verwickelten Pfaden.

"Wahre Kommutativität" erfordert nach BAROODY und Kollegen (2003) also Einsicht in die "Teile-Ganzes-Struktur" einer Addition und damit auch ein Teile-Ganzes-Verständnis von Zahlen. Dieses ist nach FUSON (1992a, S. 95) die konzeptuale Voraussetzung auch für alle weiteren nicht-zählenden Ableitungsstrategien. Nach allem, was zum Kommutativitätsprinzip gesagt wurde, erscheint es aber plausibel, dass auch diese weiteren Strategien nicht einfach auf Grundlage einer plötzlichen Einsicht "auf einmal da" sind und sofort verallgemeinert werden. Zudem sind, wie BAROODY bemerkt, offenbar manche Strategien für Kinder leichter zugänglich als andere (vgl. Kap. 2.8.3). Es empfiehlt sich daher, die verschiedenen Strategien jeweils für sich zu untersuchen. Zuvor muss aber ihre behauptete gemeinsame Grundlage, das bereits mehrfach erwähnte "Teile-Ganzes-Konzept", näher analysiert werden.

2.10.4 Das "Teile-Ganzes"-Konzept

RESNICK betrachtet die "Interpretation von Zahlen im Sinne des Verhältnisses von Teilen zu einem Ganzen" als

> *"major conceptual achievement of the early school years [...] With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not availabe to younger children"* (RESNICK 1983, S. 114).

Um eine "application to quantity" handle es sich hierbei deshalb, weil Kinder schon früh in der Lage seien, das Verhältnis eines Ganzen zu seinen Teilen reflexiv zu erfassen: Sie verstünden, dass das Ganze sich aus seinen Teilen zusammensetzt und diese Teile im Ganzen erhalten bleiben; dass das Wegnehmen eines Teiles einen Rest vom Ganzen übriglässt, dass aber durch das Zurückgeben dieses Teiles das Ganze wiederhergestellt werden kann; dass ein Vermehren des einen Teiles zur Vermehrung des Ganzen führt, es sei denn, es wird durch das Vermindern des anderen Teiles ausgeglichen (vgl. RESNICK 1992, S. 408).

Solche Einsichten seien aber zunächst "protoquantitativ", bezogen auf "real-life situations in which partitions must be made but no *exact* quantification is required" (RESNICK 1983, S. 146; Hervorhebung M.G.). Sie gründeten selbst auf einfacheren "protoquantitaven Schemata": dem "compare schema" (Mengen können ohne Ermittlung der exakten Anzahl nach "mehr", "weniger" und "gleich viel" verglichen werden) sowie dem "increase/decrease schema" (eine Menge wird mehr, wenn man etwas dazugibt, und weniger, wenn man etwas wegnimmt).

Diese Schemata müssten aber erst mit dem "mentalen Zahlenstrahl" des Kindes, seinem Wissen um die Abfolge der Zahlwörter, integriert werden, um in weiterer Folge auch auf Zahlen angewandt werden zu können (RESNICK 1991, nach GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 74f).

Um den zeitlichen Ablauf dieser "Integration" näher zu untersuchen, interviewte IRWIN 107 neuseeländische Kinder zwischen vier und sieben Jahren. Schon die Vierjährigen konnten in der Regel vorhersagen, welchen Effekt die Vermehrung einer (nicht genau quantifizierten) Teilmenge auf die (gleichfalls nicht genau quantifizierte) Gesamtmenge haben würde (dass diese nämlich dadurch insgesamt "mehr" würden, "Kovarianz"). Auch das Phänomen der "Kompensation" (ein oder mehrere Elemente wechseln von einer Teilmenge zur anderen, die Gesamtmenge bleibt "gleich viel") war bereits Vierjährigen in solchen nicht-quantifizierten Teile-Ganzes-Beziehungen schon einsichtig, dabei kam es aber häufiger auch zu falschen Beurteilungen. Noch größere Schwierigkeiten bereitete Kindern dieses Alters die exakte (mit Zahlen quantifizierte) Beurteilung, wie solche Veränderungen eines oder beider Teile sich auf *gezählte* Ganzheiten auswirken; aber auch das schafften bereits fast 60 Prozent der Vierjährigen. Solche Teile-Ganzes-Überlegungen nun aber auch auf abstrakte Additionsterme zu übertragen und beispielsweise zu wissen, dass 10+10 gleich viel ist wie 11+9, ohne erst beide Aufgaben lösen zu müssen, gelang in der Regel erst Siebenjährigen (vgl. IRWIN 1996).

Entscheidend für das Weitere ist also nach RESNICK die Anwendung eines zunächst nicht-quantifizierten Schemas auf die Welt der Zahlen. Ein "major achievement" liege erst dann vor, wenn sich die allgemeine Einsicht um die Beziehung eines Ganzen zu seinen Teilen in "Zahlentripeln" spezifiziert:

> *"The Part-Whole schema specifies relationships among triples of numbers. In the triple 2-5-7, for example, 7 is always the whole; 5 and 2 are always the parts. [...] The relationship among 2,5 and 7 holds whether the problem is given as 5+2=?, 7–5=?, 7–2=?, 2+?=7, or ?+5=7"* (RESNICK 1983, S. 115).

Die Rede vom "Teile-Ganzes-Schema" oder "Teile-Ganzes-Konzept" hat, vermittelt vor allem über die Arbeiten GERSTERS, auch im deutschen Sprachraum und da gerade auch im Bereich der Entwicklungspsychologie Verbreitung gefunden. FRITZ u.a. (2007) bzw. FRITZ & RICKEN (2008) haben dieses Konzept in ihr Entwicklungsmodell integriert, scheinen dabei aber die unterschiedlichen Perspektiven der Modelle von FUSON und RESNICK und vor allem RESNICKS spätere Differenzierung der "mathematics of quantities" und der "mathematics of numbers" (RESNICK 1992, S. 402-413) nicht ausreichend berücksichtigt zu haben.

Denn auf der Ebene der "mathematics of quantities" (vgl. Kap. 2.8.2) bedeutet "Teile-Ganzes-Konzept" im Grunde nicht mehr als das, was unter "kardinales Zahlverständnis" (und somit bereits auf "Level I" in den Modellen von FUSON 1992a und FUSON 1992b) ausgeführt wurde:

> *"As children apply their counting skills in situations that earlier were reasoned about only protoquantitatively, they begin to develop the mathematics of quantities. In the process, the part/whole schema becomes quantified"* (RESNICK 1992, S. 408).

Die Trennung in Stufe 3 ("Erwerb der Kardinalität") und Stufe 4 ("Teil-Teil-Ganzes Verhältnisse werden erkannt") bei FRITZ und RICKEN (2008, S. 37) ist also konstruiert, sie ist sachlogisch nicht haltbar. Bereits dann nämlich, wenn ein Kind eine Aufgabe wie 3+4 auf Grundlage seines kardinalen Zahlverständnisses in eine Handlung mit Würfeln übersetzt und dabei zunächst drei, dann vier Würfel auszählt und deren Gesamtanzahl alleszählend bestimmt, hat es *auf der Ebene der "mathematics of quantities"* das "Teile-Ganze-Schema" angewandt: Es hat zwei quantifizierte *Teil*mengen zu einer quantifizierten *Gesamt*menge zusammengefügt. Nichts *wesentlich* anderes passiert auch dann, wenn diese Aufgabe "im Kopf" gelöst wird – solange dieses "Im-Kopf-Lösen" *zählend mit dem Gedanken an quantifizierte Gegenstände* erfolgt:

> *"The mathematics of quantities can be done mentally – in one's head. One can think of splitting 12 apples into two collections, of 8 apples and 4 apples [...] The calculation can be mental, but it belongs to the mathematics of quantities as long as what is mentally represented is actual physical quantities and actions on them"* (RESNICK 1992, S. 405).

RESNICK geht es also bei *ihrer* Unterscheidung von "Entwicklungsstufen" (anders als FUSON) nicht primär um die Frage, mit welcher *Lösungsstrategie* eine Aufgabe bewältigt wird. Für sie ist vielmehr wesentlich, auf welche Weise Zahlen "mental repräsentiert" werden – *woran ein Kind denkt, wenn es rechnet*. Freilich hat das Zahldenken auch Auswirkungen darauf, welche Strategien einem Kind prinzipiell zugänglich seien. Aber der wesentliche Unterschied ist nicht der zwischen *Alleszählen* und *Weiterzählen* – beide Strategien sind auf der Ebene der "mathematics of quantities" möglich. Der wesentliche Unterschied besteht zwischen dem Angewiesensein auf *Zählstrategien* und *nicht-zählenden Strategien,* denen ein Vereinen von Teil-Anzahlen zu Anzahl-Ganzen bzw. ein Aufspalten von Anzahl-Ganzen in Teil-Anzahlen zugrunde liegt. Der dafür vorausgesetzte Schritt im Zahlendenken besteht also darin, eine "mathematics of numbers" zu entwickeln, Zahlen selbst als "Objekte" zu begreifen, die ihrerseits Eigenschaften haben. Und die Eigenschaften einer Zahl sind eben nichts anderes als ihre *Beziehungen zu anderen Zahlen,* ihre *"Zusammengesetztheit aus Zahlen"*:

> *"The properties of numbers are defined in terms of other number. Numbers have magnitudes in relation to one another: For example, 12 is 8 more than 4; it is 3 times 4 [...] Numbers are also compositions of other numbers: thus, 12 is 8+4, 7+5, 6+6, and so on"* (RESNICK 1992, S. 405).

"Number triples" sind also *eine* (und vermutlich eine *frühe*) Variante, wie Kinder *Zahlen als Zahlen*, und das heißt zwangsläufig: *in Beziehung zu anderen Zahlen* denken können. Erst *diese* Anwendung des "Teile-Ganzes-Schemas" in der "mathematics of numbers" (und *nicht* schon seine Anwendung auf "konkrete Quantitäten", wie FRITZ und RICKEN 2008, S. 37, meinen) ist jenes "major conceptual achievement", das Kinder nach RESNICK zu neuen "Formen des Lösens mathematischer Probleme" befähigt. Hier trifft sich RESNICKs Darstellung wieder mit FUSONs Entwicklungsmodell, in welchem "triad numbers" und "recomposible triads" das "Level IV" konstituieren. Erst auf diesem seien FUSON zufolge "derived fact strategies" möglich (FUSON 1992a, S. 95f).

Die Unterscheidung zwischen "mathematics of quantities" und "mathematics of numbers" ist wesentlich. Denn solange Kinder nicht über spezifische "number triples" verfügen, bleiben sie auf Zählstrategien auch dann angewiesen, wenn sie (in ihrer Welt der "mathematics of quantities") Teile-Ganzes-Beziehungen erkennen. Ein Kind, das bei 8–5 acht Würfel auszählt und davon fünf abgezählte Würfel wegnimmt, hat mit dieser Modellierung ein (quantifiziertes) Teile-Ganzes-Verständnis bewiesen – schließlich hat es ja fünf Würfel als Teil der acht Würfel behandelt und von ihnen weggenommen. Das verhilft ihm aber nicht dazu, die Aufgabe ohne Zählen lösen zu können. Dafür ist es nämlich notwendig, die *Zahlen 8/5/3 selbst* als *spezifisches Zahlentripel* zu *verstehen* und auch bereits gespeichert zu haben. (Kinder, die den Zusammenhang von 8/5/3 zwar im Sinne eines Zahlentripels *verstehen*, aber *noch nicht gespeichert haben*, können immerhin bei *Vorgabe* etwa von 3+5=8 daraus *ableiten*, dass 8–5=3 sein muss.) Zur Basis für nicht-zählende Lösungsstrategien wird das Teile-Ganzes-Konzept also erst dann, wenn ein *bestimmtes*, im Sinne von *Teilen* und *Ganzem* gedachtes *Zahlentripel* bereits auch *automatisiert* ist. Es bedarf, über das *grundsätzliche* Verständnis von "Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen" hinausgehend, *auch* eines bereits automatisierten Wissens darüber, *welche spezifischen* Zahlen zueinander in diesem Zusammenhang stehen.

Wie aber erwerben Kinder solche spezifischen Zahlentripel? Für RESNICK "scheint es plausibel" ("seems plausible"), dass das zählende Lösen von Additionen und Subtraktionen mit "small numbers" einen "wichtigen Schritt" in diese Richtung bedeute (RESNICK 1983, S. 125). Das Kind würde demnach etwa das Zahlentripel 8/5/3 aus seinen wiederholten Erfahrungen beim zählenden Lösen von Aufgaben wie 3+5=8, 8–5=3 usw. allmählich gewinnen: "Extensive practice involving problems via counting should help children quantify their original schemas" (RESNICK u.a. 1991, S. 34, zitiert nach GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 79).

GERSTER und SCHULTZ kritisieren wohl zu Recht, dass RESNICK an dieser Stelle die tatsächlichen "Schwierigkeiten und Leistungen" bei der Konstruktion spezifischer Zahlentripel "nicht (genügend) beachtet" (GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 79). Gerade eine Subtraktion wie 8–5 ist gut geeignet, dies (in Anlehnung an Argumente von GERSTER & SCHULTZ, a.a.O., S. 140-146) zu verdeutlichen:

Ein Kind mag kein Problem damit haben, 8–5 als *Wegnehmen einer Teilmenge* von einem Ganzen zu deuten. Wenn es dies mit Zählmaterial durchführt, dann nimmt es mit "eins, zwei, drei, vier, fünf" von den zuvor ausgezählten acht Würfeln fünf Würfel weg; die drei übrig gebliebenen wird es in der Regel simultan als "drei" erfassen. Auf der Ebene der "mathematics of quantities" wird man ihm das Teile-Ganzes-Konzept nicht absprechen können. Ist ihm dabei aber auch die *Zahl acht* als Ganzes mit den *Teilzahlen* fünf und drei bewusst geworden?

Wenn ja, dann ist das eine *aktive gedankliche Konstruktion* des Kindes. Denn es hat mit *Gegenständen* gehandelt, nicht mit Zahlen, die nun einmal keine *physischen* Gegenstände sind, sondern *Objekte des Denkens*. Die physische *Handlung auf Zahlenebene zu interpretieren*, ist also eine Leistung des Denkens, und keine geringe: Sind die fünf Würfel einmal zur Seite geschoben, ist zwar das "Ergebnis" ermittelt und damit der vordergründige Zweck der Handlung erfüllt. Um aus dieser Handlung das Zahlentripel 8/5/3 zu abstrahieren, muss das Kind aber nun *Acht* denken, obwohl die acht Gegenstände, mit denen es hantiert hat, nun in zwei Gruppen zu fünf und drei Gegenständen auf dem Tisch liegen; es muss diese fünf und drei Gegenstände einerseits *als Ganze für sich* denken (denn nur als Ganzheiten können sie Teil der Acht sein); und es muss Fünf und Drei andererseits *zugleich* als Teile der Acht denken.

Das erfordert, wie GERSTER und SCHULTZ betonen, eine "Reversibilität des geistigen Handelns" (a.a.O., S. 143), die nicht selbstverständlich ist. Wenn ein Kind diese Reversibilität nicht aufbietet, wenn es die geforderte Reflexion auf numerischer Ebene nicht leistet, kann es noch so viel "extensive Praxis" haben und wird nicht zu den geforderten Einsichten über Zahlentripel gelangen. Zusätzlich wird diese Reflexion auf numerischer Ebene durch das *zählende* Handeln durchaus nicht leichter gemacht. Denn wenn das Kind die fünf Würfel in lauter Einzelschritten wegnimmt, dann denkt es *dabei* ja gar nicht "Fünf" als Gesamtheit, sondern es konzentriert sich auf die Abfolge "eins, zwei, drei, vier, fünf". "Fünf" wird also selbst nicht als Ganzes (das es sein muss, um als Teil eines anderen Ganzen fungieren zu können) behandelt, sondern in lauter Einzelne zerstückelt. Freilich *kann* ein Kind diese zerstückelnde Handlung *reflektieren* und die Einheit der *fünf Zählschritte* zu *einer Fünf* geistig wiederherstellen. Tut es das aber nicht, dann kommt "Acht" im Zuge dieser Handlung schon deshalb nicht als "Drei und Fünf" ins Bewusstsein, weil auch die Fünf gar nicht als Fünf bewusst ist.

Daran ändert sich nichts Wesentliches, wenn das Kind die Aufgabe ohne Material durch verbales Rückwärtszählen oder zählendes Ergänzen löst. Auch hier wird im Lösungsprozess eine der Zahlen in Einzelschritte aufgelöst; das Zahlentripel 8/5/3 tritt als solches dabei nicht ins Bewusstsein. Die nachträgliche Reflexion ist möglich, aber kein selbstverständliches Resultat "extensiver Praxis" – umso weniger, wenn diese den Zweck hat, damit vorrangig oder ausschließlich ein *Ergebnis* zu ermitteln. Denn die nachträgliche Reflexion von Ergebnis und Ausgangszahl als Teil und Ganzes ist irrelevant, wenn es um die Ermittlung der Lösungszahl geht: "Warum sollte ein Kind nochmal zurückblicken [...] und nach Zusammenhängen suchen? Das Ergebnis ist genannt und aufgeschrieben" (GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 145).

So treffend RESNICK also das Zahlverständnis charakterisiert, das die "mathematics of numbers" konstituiert, so unzureichend sind ihre Ausführungen dazu, welche gedanklichen Leistungen auf dem Weg zu diesem Verständnis zu erbringen sind. Diese Leistungen korrekt zu analysieren ist pädagogisch-didaktisch aber höchst bedeutsam. Denn Unterricht kann Kindern die geforderte gedankliche Konstruktion von Zahlentripeln zwar nicht abnehmen, er kann sie ihnen aber erleichtern oder erschweren. Ein Unterricht, der "extensive practice" im zählenden Rechnen beinhaltet, erschwert sie eher. Was könnte sie erleichtern?

Die Sachanalyse führt hier wieder zu den "derived fact strategies": Wenn Kinder lernen sollen, Zahlen als Zusammensetzungen aus bzw. in ihren Beziehungen zu anderen Zahlen zu denken, dann scheint es zielführend, genau das auch zu einem zentralen Inhalt des frühen Arithmetikunterrichts zu machen. Wie schon ARISTOTELES bemerkt hat:

> *"Denn was man erst lernen muß, bevor man es ausführen kann, das lernt man, indem man es ausführt: Baumeister wird man, indem man baut, und Kitharakünstler, indem man das Instrument spielt"* (ARISTOTELES, Nikomachische Ethik II/1103a 33, Reclam-Ausgabe 1983, S. 34f).

Mit Blick auf das arithmetische Lernen ist zu ergänzen: *Zahlen in Beziehung zu einander zu denken lernt man, indem man Zahlen zu einander in Beziehung setzt*. Nichts anderes geschieht aber, wenn Kinder dazu angehalten werden, aus einem Zahlenfaktum ein anderes abzuleiten; wenn von ihnen gefordert wird und sie darin gefördert werden, über den *Zusammenhang von Rechnungen* nachzudenken, wie es beim Anwenden von "derived fact strategies" geschieht.

Nun meint aber FUSON, dass "derived fact strategies" erst auf "Level IV", also erst dann möglich seien, wenn Kinder bereits über "Triad Numbers", Zahlen als "Zusammensetzungen aus Zahlen" verfügen (FUSON 1992a, S. 95). Würde das stimmen, dann hätten wir einen klassischen Circulus vitiosus vor uns: Die Sachanalyse hat ergeben, dass Kinder Zahlen dadurch als "Zusammensetzungen aus anderen Zahlen" zu erkennen lernen, dass sie über Ableitungsstrategien nachdenken. Ableitungsstrategien sollen ihnen, so FUSON, aber erst dann zugänglich sein, wenn sie dieses Zahlverständnis bereits erworben haben.

Aber auch im Falle der "Triad Numbers" wird sich zeigen, dass *Einsicht* kein "all-or-nothing-phenomenon" ist. Schon in der Analyse der kindlichen Entwicklung hin zum Verständnis von Kommutativität (vgl. Kap. 2.10.3) ist ja deutlich geworden, dass es bereits auf Grundlage eines "nur" kardinalen Zahlverständnisses (Zahl als "counted number" oder "pattern number") möglich ist, *erste Einsichten* in Ableitungsbeziehungen (wie es die Kommutativität ja auch ist) zu gewinnen. Der lange, mitunter verwinkelte Weg zur "true commutativity" ist aber auch ein *warnendes* Beispiel insofern, als wir uns offenbar davor hüten müssen, erste und vereinzelte Nutzungen eines Rechenvorteils (respektive einer Ökonomisierung von Zählstrategien) schon als Beleg dafür zu nehmen, dass ein Kind eine "höhere Stufe des Zahlverständnisses" und die dem Rechenvorteil zugrundeliegende operative *Prinzipien* durchschaut hätte. Nun gehört aber Kommutativität zu jenen "patterns or relationships", die BAROODY (2006, S. 29) als "highly salient" einstuft. Wie entwickelt sich das Verständnis bei anderen, weniger "hervorspringenden" Beziehungen? Einige der dazu vorliegenden Arbeiten werden in den folgenden Abschnitten behandelt.

2.10.5 Additionsstrategien auf Grundlage von Kovarianz

CARPENTER und MOSER (1984) charakterisierten die von ihnen nicht im Detail untersuchten "derived fact strategies" wie folgt:

> *"These solutions usually are based on doubles or numbers whose sum is 10. For example [...] one solution involved the following analysis: '4+6=10 and 4+7 is just 1 more than 10.' [...] derived facts often seem to require a great deal of insight about numbers"* (a.a.O., S. 196).

Auch andere AutorInnen geben als Beispiel für beobachtete Ableitungsstrategien (sofern sie diesbezüglich überhaupt ins Detail gehen) an vorderster Stelle das Ableiten einer Addition aus einer bereits automatisierten "Nachbar-Addition" an. Als "Ableitungsbasis" werden fast immer Verdoppelungen angeführt, seltener auch die von CARPENTER und MOSER mitgenannten Additionen mit der Summe 10 (vgl. etwa FUSON 1992a, S. 96; GARNETT 1992, S. 212). Diese Strategien werden in weiterer Folge unter den Kurzbezeichnungen "Verdoppeln plus eins" bzw. (sofern die Ableitungsbasis keine Verdoppelung ist) als "Plus-eins-Strategie" besprochen.

Zusammenhänge des Typs a+b=c → a+(b–1)=c–1 (künftig "Minus-eins-Strategie" genannt) wie auch Zusammenhänge der Art a+b=c → a+(b+x)=c+x mit x >1 werden in der Literatur seltener behandelt. STEINBERG (1985) erwähnt aber, dass einige der ZweitklässlerInnen, mit denen "Verdoppeln plus eins" als Strategie im Unterricht erarbeitet wurde, auch die Strategie "Verdoppeln minus eins" von sich aus anwandten, noch ehe diese im Unterricht behandelt wurde. Die Strategie "Verdoppeln plus zwei" sei nur von einem Kind noch vor ihrer Behandlung im Unterricht verwendet worden. Viele Kinder hätten aber (nach Erlernen der Strategie "Verdoppeln plus eins") nur einer expliziten Frage bedurft, um "Verdoppeln plus zwei" von sich aus anzuwenden. Sieben der 23 Kinder hätten auch die nie unterrichteten Strategien "Verdoppeln plus drei" und "Verdoppeln plus vier" verwendet (STEINBERG 1985, S. 349).

Der in der Literatur am häufigsten behandelte Typus der genannten Ableitungsstrategien ist aber das "Verdoppeln plus eins". Seine Ableitungsbasis, die Verdoppelungsaufgaben, werden zumindest im Zahlenraum bis zehn von den meisten Kindern schon relativ früh auswendig gemerkt (vgl. SVENSON & SJÖBERG 1983, S. 119). Und der Zusammenhang zwischen einer Addition und ihrer "Nachbaraddition" ist offenbar vergleichsweise "salient" (nach BAROODY 2006), also eine "hervorspringende" Beziehung. Wie die Kommutativität kann aber auch diese Beziehung vermutlich auf sehr unterschiedlichem konzeptuellem Niveau erkannt und genutzt werden. FUSON bemerkt dazu:

> *"As with other precocious conceptual advances that require only pattern number, it is not clear whether such simple derived-fact strategies should really be considered as Level IV recomposible triad strategies"* (FUSON 1992a, S. 96).

FUSONS Subsumtionsproblem ergibt sich folgerichtig aus der bereits kritisierten Prämisse, Ableitungsstrategien seien erst auf der Ebene von "recomposible triad strategies" möglich. Auch beim "Verdoppeln plus eins" ist dies offenbar nicht zwingend der Fall, wenn auch unklar bleibt, was FUSON im oben angeführten Zitat mit "pattern number" meint. Eher plausibel erscheint es, dass zumindest manche Kinder, die beispielsweise 3+4 aus 3+3 ableiten, dies zunächst nur auf Grundlage eines "counted-number"-Denkens tun. Diese Kinder dürften das "Verdoppeln plus eins" also erst einmal nur als eine weitere, über das "counting on" noch hinausreichende *Abkürzung des zählenden Rechnens* entdecken, etwa in der Weise: "3+3=6 weiß ich schon, bei 3+4 muss ich nur um eins weiter zählen" (vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 140).

Dem "Verdoppeln plus eins" liegt also wohl nicht zwingend schon der Gedanke an eine "recomposible triad number" zugrunde. Wäre dies der Fall, dann sollte ein Kind, das 3+4 aus 3+3 ableiten kann, wohl immer auch 6–3 und in weiterer Folge auch 7–4 durch Ableitung lösen können. Ob und wie häufig dies der Fall ist, wurde bislang aber offenbar noch nicht untersucht. FUSON merkt auch zu Recht an, dass solche Studien immer konfrontiert wären mit dem Problem der "Inkonsistenz", mit der Kinder "the same kinds of problems even within the same session" lösen (FUSON 1992a, S. 96). Zudem gelte: "Many children clearly function at multiple levels that vary by the size of the numbers in the addition or subtraction situation" (a.a.O., S. 97). Beides erschwere den Rückschluss auf die bei Ableitungsstrategien zugrunde liegenden konzeptuellen Einsichten ganz prinzipiell.

Eine der wenigen Arbeiten, die überhaupt näher untersuchen, was Kinder zu Ableitungsstrategien *denken* (und nicht nur, ob sie welche *anwenden*), ist bis zum heutigen Tag die bereits erwähnte Studie von PUTNAM u.a. (1990) geblieben. Die Studie ist verdienstvoll, ihr Design blendet aber wiederum die Seite der *Anwendung* weitgehend aus: Der richtige Ausgangspunkt von PUTNAM und Kollegen war, dass aus der Nicht-Anwendung einer Strategie in qualitativen Interviews (Performanz-Ebene) nicht geschlossen werden kann, dass dem Kind jene Einsichten fehlen, die der Strategie zugrunde liegen (Kompetenz-Ebene).

Umgekehrt kann aber aus der von PUTNAM und Kollegen erhobenen Leistung, eine vorgezeigte Ableitungsstrategie als "zulässig" zu erkennen und diese Zulässigkeit vielleicht sogar zu begründen, kein Rückschluss darauf gezogen werden, wie ein Kind vergleichbare Aufgaben tatsächlich *löst*. Beides, Einsicht *und* Anwendung, wurde aber von PUTNAM und Kollegen nicht durchgehend erhoben. Sie vermerkten lediglich, wenn ein Kind sich gar nicht auf die demonstrierte Strategie einließ und stattdessen seine eigene gewohnte Strategie praktizierte (PUTNAM u.a. 1990, vgl. Kap. 2.9.7).

Die Aussagekraft der auf dieser Grundlage von PUTNAM und Kollegen entwickelten "Skizze" für ein "model of understanding derived-fact strategies" (a.a.O., S. 272-281) ist schon deshalb nur beschränkt. Die Autoren halten fest, dass ein "model of production", also ein Modell der tatsächlichen *Anwendung* von Ableitungsstrategien, "zusätzliches Wissen" der Kinder berücksichtigen müsste. Mindestens so plausibel ist aber, dass für das (gelegentliche) *Verwenden* einer Strategie mitunter auch "weniger Wissen" notwendig ist als für eine "complete explanation", wie dies im Modell von PUTNAM und Kollegen jeweils vorausgesetzt ist. SIEGLER und STERN sprechen gar von "unambiguous evidence that strategies can be discovered without conscious awareness" (SIEGLER & STERN 1988, S. 377). Zutreffender als die in sich widersprüchliche Rede von einer "unbewussten Strategie" dürfte freilich sein, dass Kinder häufig nicht zur *Verbalisierung* einer Strategie in der Lage sind, die sie soeben oder vielleicht auch schon vor einiger Zeit entdeckt haben.

Das Modell von PUTNAM und Kollegen unterscheidet jedenfalls einen "problem-schema mapper", worunter die Fähigkeit verstanden wird, eine abzuleitende Aufgabe in geeigneter Weise unter das Schema eines Zahlentripels zu subsumieren: Ist das Ganze gefragt oder einer seiner Teile? Hier stellen die Autoren erhöhte Schwierigkeiten beim "mapping" von Subtraktionen fest.

Zweitens bedürfe es zum Verstehen von Ableitungsstrategien einer Fähigkeit, die PUTNAM und Kollegen "comparer/transformer" nennen: Die via Ableitung zu lösende Aufgabe müsse mit einem bereits automatisierten Zahlentripel verglichen und dieses in weiterer Folge passend verändert werden. PUTNAM und Kollegen unterscheiden hier (immer mit Blick auf das von ihnen vorausgesetzte Teile-Ganzes-Schema) zwischen zwei grundlegenden Typen von Strategien:

– Strategien, bei denen die *Veränderung nur eines Teils* zur Veränderung des Ganzen führt ("change-part-whole-transfomations", wie etwa beim "Verdoppeln plus eins");

– Strategien, bei denen *beide Teile verändert werden* ("change-part-part-transformations"). Hier führen sie einerseits "sharing" an (5+5=10 dient zur Ableitung von 4+6 nach dem Prinzip der "Kompensation" oder "gegensinnigen Veränderung"), andererseits aber auch das Teilschrittverfahren. Sie erklären also die Strategie, 9+6 als 9+1+5 zu lösen, zu einem "Unterfall" des Kompensationsgedankens a+b=(a+1)+(b–1). Die Überlegungen, die Kinder *üblicherweise* beim Teilschrittverfahren anstellen, werden damit wohl *nicht* korrekt wiedergegeben.

Im Rahmen ihrer Befragungen seien nun (kompensatorische) "change-part-part-transformations" etwas häufiger "vollständig erklärt" worden als (kovariante) "change-part-whole-transformations". PUTNAM und Kollegen warnen an dieser Stelle selbst vor einer Verallgemeinerung, da die Kinder im Rahmen ihrer Studie auch insgesamt häufiger zu "change-part-part-transformations" befragt wurden. Zusätzlich darf vermutet werden, dass die Mehrzahl der als "vollständig erklärt" gewerteten "change-part-part-transformations" tatsächlich das Teilschrittverfahren betraf.

PUTNAM und Kollegen vermerken aber ohnedies, dass jene Kinder, die für Ableitungsstrategien des einen Typs eine "complete explanation" gaben, dies zumeist auch für Strategien des anderen Typs taten. Sie schließen daraus, "that knowledge of the two kinds of transformations tends to go together rather than being acquired in a particular developmental sequence" (PUTNAM u.a., S. 279).

An dieser Stelle muss nochmals betont werden, dass PUTNAM und Kollegen von "knowledge" einer Strategie erst dann sprechen, wenn ein Kind eine "complete explanation" liefern kann. Betrachtet man dagegen die zum *ersten Gebrauch* der Strategie nötige "Kenntnis", dann scheint es anderen Studien zufolge sehr wohl "früher" und "später" entwickelte Ableitungsstrategien zu geben.

Die Nichtbeachtung der tatsächlichen Strategie*verwendung* ist der eine Mangel des Modells von PUTNAM und Kollegen. Der andere: Die Autoren nehmen zwar für sich in Anspruch, eine "konzeptuelle Analyse der Teile-Ganzes-Beziehungen, die den Ableitungsstrategien zugrunde liegen", zu leisten (a.a.O., S. 273). Tatsächlich findet aber keine unvoreingenommene Analyse der von den Kindern tatsächlich angewandten (und aus ihren Äußerungen erschließbaren) Konzepte statt, sondern eine Subsumtion der Kinderantworten unter eine vorgefertigte Interpretation auf Grundlage des Teile-Ganzes-Konzeptes. Dass also dieses Konzept (und zwar auf dem Niveau von "number triples") tatsächlich allen Ableitungsstrategien in gleicher Weise zugrunde liege, wird nicht aus den Kinderantworten erschlossen, sondern einfach *vorausgesetzt*.

Tatsächlich scheint es aber gerade im Fall des "Verdoppeln plus eins" wesentlich plausibler, die von den Autoren referierten Kinderantworten als Ausdruck einer "change add-to"-Konzeption des Addierens (und eben nicht eines "part-part-whole"-Denkens) zu interpretieren. So erklärt etwa "Student 44": "Eight [sic!] plus 8 equals 16 and then 8 plus 9 equals 17. You add 1 more" (a.a.O., S. 257). Dieser Antwort zu entnehmen, der Schüler habe das Verhältnis von 16 zu seinen beiden Teilen 8 und 8 und in weiterer Folge die Konsequenz der Vermehrung des einen Teils um 1 reflektiert, ist doch etwas weit hergeholt. Was der Schüler tatsächlich *äußert*, ist eher der *Vergleich zweier unter quantitativen Gesichtspunkten ähnlicher Handlungen* ("you add 1 more"): Wenn man zu 8 noch 8 dazugibt, dann bekommt man 16; wenn man aber 9 (also um 1 mehr als 8) dazugibt, dann erhält man 17 (also um 1 mehr als 16). Auch diese Begründung zeugt natürlich von Einsicht. Sie ist aber nicht gleichzusetzen mit der "Anwendung eines gespeicherten Zahlentripels" (8/8/16) und der gedanklichen "Konstruktion eines neuen Zahlentripels" (8/9/17). Freilich ist denkbar, dass ein solches Zahlentripel vom Kind durch nachträgliche Reflexion gedanklich konstruiert wird; das ist aber wohl nicht die Voraussetzung dafür, aus 8+8=16 das "benachbarte" 8+9=17 zu erschließen.

Zur Beschreibung der kindlichen Konzepte, auf deren Grundlage Ableitungsstrategien angewandt werden, reicht also der abstrakte Verweis auf "Teile-Ganzes-Denken" nicht aus. Zum einen sind mit einem solchen abstrakten Verweis gerade die *spezifischen* Denkweisen nicht erfasst, welche den *einzelnen* Strategien zugrunde liegen. Zum anderen kann so auch nicht erklärt werden, warum ein Kind zwar die eine Strategie bereits verwendet, eine andere aber nicht – obwohl sich doch *sämtliche* Ableitungsstrategien, wie PUTNAM und Kollegen dies vorführen, *aus Sicht kompetenter Erwachsener* als nur unterschiedliche Anwendungen von "Teile-Ganzes-Zusammenhängen" deuten lassen.

Tatsächlich aber bildet sich das "Teile-Ganzes-Denken" auf der Ebene der "mathematics of numbers" wohl gerade erst im Zuge der Verwendung solcher Strategien mehr und mehr heraus: Erst durch die wiederholte *Reflexion von operativen Zusammenhängen* werden Zahlen mehr und mehr als "Zusammensetzung aus anderen Zahlen" bewusst (oder auch nicht, wenn diese Reflexion unterbleibt). Zu erwarten sind also (bei unterschiedlichen Kindern ebenso wie bei ein und demselben Kind im Zuge seiner arithmetischen Entwicklung) *unterschiedliche Niveaus* von Einsicht in die "Triadenstruktur" von Zahlen, denen wiederum unterschiedliche Niveaus von Ableitungsstrategien entsprechen.

Empirische Hinweise für solche unterschiedlichen "Strategieprofile" liefert die Studie von Katherine CANOBI (2004). In qualitativen Interviews mit je 30 britischen Kindern aus "year one" bis "year three" (was in Österreich altersmäßig Zweit- bis ViertklässlerInnen entspricht) erhob CANOBI zunächst die Strategien der Kinder beim Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 18. Auf Grundlage einer Cluster-Analyse unterschied sie dabei drei Gruppen mit unterschiedlichen Strategiepräferenzen: die "flexiblen Rechner" (mit relativ hohem Anteil an Faktenabruf und Ableitungsstrategien), die "effizienten Zähler" (die einen kleinen Teil der Aufgaben durch Faktenabruf, den Großteil aber durch schnelles und relativ sicheres Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen lösten) sowie die "uneffizienten Zähler" (die nur einzelne Aufgaben auswendig wussten, bei ihren Zählstrategien relativ viele Fehler machten und auch noch bei manchen Aufgaben Alles- oder Fingerzählstrategien verwendeten) (a.a.O., S. 86f).

In weiterer Folge sollten die Kinder (ähnlich wie bei PUTNAM u.a. 1990) beurteilen, ob eine bestimmte Aufgabe hilfreich sei zur Lösung einer anderen Aufgabe. Dabei wurden sie sowohl mit kommutativen Zusammenhängen (etwa: "Hilft 6+2=8, wenn ich 2+6 wissen will?") wie auch mit komplementären Zusammenhängen ("Hilft 6+2=8, wenn ich 8–6 wissen will?) konfrontiert. Aus den Häufigkeiten, mit denen die Kinder Zusammenhänge der einen wie der anderen Art erkannten und erläutern konnten, wurden "distinct patterns of conceptual knowledge" erschlossen: Eine "part-whole group" jener Kinder, die zumindest manche komplementäre Zusammenhänge erkannten und erklären konnten (sie umfasste nur 11 der 90 Kinder); eine "commutativity group", die kommutative (nicht aber komplementäre) Zusammenhänge erkannte und auch erklären konnte; und eine "commutativity-judgements group" von Kindern, die solche Zusammenhänge zwar erkannten ("judgement" im Sinne von "ja/nein"), aber nicht näher erläutern konnten (a.a.O., S. 87f).

Es zeigte sich ein signifikanter Zusammenhang zwischen diesem "conceptual profile" und den verwendeten Additions- und Subtraktionsstrategien dahingehend, dass neun der elf Kinder mit dem höchsten "conceptual profile" ("part-whole group") zu den "flexiblen Rechnern" gehörten. Die Kinder der beiden "commutativity groups" zeigten hingegen eine große Varietät bezüglich der bevorzugten Rechenstrategien (a.a.O., S. 89f). CANOBI deutet diese Ergebnisse im Sinne unterschiedlicher "Levels" von "part-whole"-Einsichten:

> *"The conceptual profiles suggest that many children recognise that parts may be added in different orders before learning more difficult part-whole relations involving subtraction"* (a.a.O., S. 90).

Beide Einsichten, jene in die Kommutativität wie jene in die Komplementarität, werden also auch hier (wie bei PUTNAM u.a. 1990) als Einsicht in Teile-Ganzes-Beziehungen gedeutet; es werden aber immerhin unterschiedliche "Stufen der Einsicht" in solche Beziehungen anerkannt. Tatsächlich ist aber wohl ein erstes Kommutativitätsverständnis gar nicht unbedingt Ausdruck eines (numerischen) Teile-Ganzes-Denkens, wie in Kapitel 2.10.3 dargestellt wurde. Wie es sich bei der Komplementarität verhält, ist Thema des folgenden Kapitels.

2.10.6 Subtraktion als Umkehrung der Addition

Die Studie von CANOBI (2004) bestätigt jene von PUTNAM u.a. (1990) darin, dass Ableitungsstrategien für Subtraktionen von den Kindern weit seltener richtig erklärt wurden als Additionsstrategien. Schon zuvor hatten THORNTON (1978) und STEINBERG (1985) bemerkt, dass die Subtraktionsstrategien zumindest in der begrenzten Trainingszeit ihrer Studien weniger erfolgreich vermittelt werden konnten als Additionsstrategien.

PUTNAM und Kollegen führen diesen Unterschied darauf zurück, dass Subtraktionen ein "asymmetrisches mapping of a part and whole rather than the symmetric mapping of two parts for addition" verlangen würden (PUTNAM u.a. 1990, S. 281). Tatsächlich dürften die höheren Schwierigkeiten der Subtraktionsstrategien aber wohl eher darin begründet liegen, dass zwar das "Verdoppeln plus eins" (wie dargestellt) auch auf anderen gedanklichen Wegen zustande kommen mag, dass aber das Ableiten einer Subtraktion aus der inversen Addition nun tatsächlich ohne den Gedanken an ein "number triple" kaum zu haben ist. Nicht die "Asymmetrie" des "mappings" scheint also das Anwenden des Komplementaritätsprinzips für Kinder so schwer zu machen, sondern der Umstand, dass hier nun tatsächlich so etwas wie "mapping" erforderlich ist. Im Einzelnen:

BAROODY und Kollegen weisen darauf hin, dass zwar schon Sechsjährige das von RESNICK (1983) beschriebene "increase/decrease schema" auf gezählte Objekte anwenden. Eine Reihe von Studien (BAROODY und Kollegen erwähnen BISANZ & LEFEVRE 1990, zu ergänzen wären etwa BRYANT, CHRISTIE & RENDU 1999 und – allerdings mit bereits Achtjährigen – SIEGLER & STERN 1998) zeige, dass Kinder schon früh "some sense" dafür beweisen, dass Addition und Subtraktion "counteract each other". Das sei aber noch nicht unbedingt ein "precise and logically coherent understanding of these relations" (BAROODY u.a. 2003, S. 148).

Die genannten Studien untersuchten den Umgang von Kindern nämlich mit einer Sonderform von "inversion problems", in denen dieselbe Zahl zu einer Zahl zunächst addiert und dann wieder von ihr subtrahiert wird (algebraisch: a+b–b). In der Studie von BRYANT u.a. (1999) zeigten schon Fünf- und (noch einmal signifikant häufiger) Sechsjährige „widespread understanding“, dass solche mit Plättchen modellierte Aufgaben kein Rechnen (respektive Zählen) erfordern – und zwar auch dann, wenn in der Modellierung nicht die beiden soeben dazu gegebenen, sondern *zwei andere* Plättchen aus der Gesamtmenge weggenommen werden. BRYANT u.a. nehmen dies als Beleg dafür, dass hier nicht qualitativ ("ich nehme *dasselbe Ding* wieder weg, das ich zuvor dazu gegeben habe, deshalb ist alles wieder so, wie es ursprünglich war"), sondern tatsächlich *quantitativ* ("*anstelle* der beiden dazu gegebenen nehme ich *genau so viele* andere weg, die *Anzahl* bleibt gleich") gedacht werde (a.a.O., S. 201f). BRYANT u.a. bezeichnen diese Einsicht, dass Addition und Subtraktion einander aufheben, als *Voraussetzung* für ein Verständnis der "additive composition of number" (a.a.O., S. 194).

Dem ist entgegenzuhalten, dass ein Kind, welches sich etwa bei 4+3–3 das Rauf- und dann wieder Runterzählen um drei erspart, damit *jedenfalls nicht die Zahl sieben* als (wieder auflösbare) Zusammensetzung aus drei und vier denkt. Denn "sieben" ist ja bei dieser Sorte von "inversion problem" gerade dann nicht im Bewusstsein des Kindes, wenn es dieses erfolgreich löst; es wird in diesem Fall nämlich 4 + 3 gar nicht erst ermitteln.

In der Studie von BAROODY (1999) dagegen ging es um die Inversion einer Addition im eigentlichen Sinn. Und wie berichtet (vgl. Kap. 2.8.2), erkannten dabei viele Kinder noch in der dritten Schulstufe *nicht*, dass eine Subtraktion als Umkehrung der inversen Addition gelöst werden kann. BAROODY nahm dies als Hinweis dafür, dass diese Kinder Zahlen noch nicht als "recomposible triads" verstehen und das Addieren und Subtrahieren noch *nicht* im Sinne von *numerischen* Teile-Ganzes-Beziehungen. Denn wenn etwa acht als Zusammensetzung aus fünf und drei gedacht wird, scheint dies tatsächlich eins mit der Einsicht, dass "8–5=3" und "8–3=5". GRAY und TALL drücken dies in ihrer eigenen Begrifflichkeit wie folgt aus: "In proceptual thinking, addition and subtraction are so closely linked that subtraction is simply a flexible reorganization of addition facts" (GRAY & TALL 1994, S. 125). Das "procept" von GRAY und TALL (vgl. Kap. 2.9.3) lässt sich in Bezug auf natürliche Zahlen durchaus mit FUSONs "recomposible triad" gleichsetzen.

Gerade beim Subtrahieren wird also der oben ausgeführte Unterschied zwischen "mathematics of quantities" und "mathematics of numbers" in besonderer Weise deutlich. BAROODY und Kollegen weisen in diesem Zusammenhang auf die Studie von SOPHIAN & MCCORGRAY (1994) hin, wonach bereits Fünfjährige Einsicht in Teile-Ganzes-Beziehungen zeigen – aber eben im Kontext von Handlungen mit gezählten Objekten. Dem gegenüber würden die eminenten Schwierigkeiten, die noch DrittklässlerInnen mit dem Komplementaritätsprinzip auf numerisch-symbolischer Ebene hätten, deutlich machen,

> *"that young children's intuitive understanding of subtraction and part-whole relations are only loosely connected [...]. That is, intuitively understanding that the starting amount of a take-away situation must be larger than either the amount taken away or the resulting amount is important relational knowledge but not necessarily tantamount to a deep understanding of part-whole relations – that a starting amount such as eight can be decomposed into two parts"* (BAROODY u.a. 2003, S. 149).

Ein Kind kann also sehr wohl ein "intuitives Verständnis" dafür haben, dass beim Subtrahieren von einem Ganzen ein Teil weggenommen wird, und dennoch das numerische "Ergebnis" einer Subtraktion *ohne Bezug zum Ganzen* denken. Es denkt dieses Ergebnis dann als eine *neue* Anzahl, die eben durch Wegnehmen von einer *anderen*, größeren Anzahl entstanden ist. Weder das, was weggenommen wurde, noch das, was übrig bleibt, werden dabei als Teil der ursprünglichen Anzahl reflektiert; und diese ursprüngliche Anzahl wurde durch das Wegnehmen eines Teils ja auch tatsächlich zerstört. Ohne eine Reflexion der Teile im Ganzen kann aber zum Beispiel aus 8–5=3 nicht die "recomposible triad" 3/5/8 gewonnen werden, aus welcher sich wiederum der inverse Zusammenhang zwischen 3+5=8 und 8–5=3 als "einfache flexible Reorganisation" ergeben könnte.

Einen möglichen Weg zur Konstruktion solcher Triaden, also zur *Verknüpfung* von Subtraktionsverständnis und Teile-Ganzes-Denken auf der Ebene der "mathematics of numbers", skizzieren BAROODY und Kollegen ganz im Sinne des oben zitierten Aristotelischen Mottos "Lernen durch Tun":

Kinder mögen im Zuge ihrer Praxis im (zählenden) Lösen von Rechenaufgaben darauf stoßen, dass Additionen durch bestimmte Subtraktionen "aufgehoben" werden. Sie haben vielleicht gerade 5+3=8 gelöst und stoßen nun darauf, dass 8–5=3. Das schafft die *Möglichkeit*, dass sie einen *Zusammenhang* zwischen diesen beiden Rechnungen erkennen und diesen Zusammenhang im Sinne ihres "intuitiven Teile-Ganzes-Schemas" deuten.

Damit diese Möglichkeit auch *Wirklichkeit* wird, müssen sie aber ihre Aufmerksamkeit auf die Identität der an beiden Aufgaben beteiligten Zahlentripel lenken. Diese *Fokussierung der Aufmerksamkeit* wird erleichtert, wenn es sich um ein Zahlentripel handelt, welches im Bereich der Addition bereits *automatisiert* ist. Deshalb wenden (wie BAROODY 1999 feststellte, vgl. Kap. 2.8.2) viele Kinder die Komplementarität von Addition und Subtraktion zunächst auch nur im Bereich der Verdoppelungsaufgaben an. Umgekehrt könne "laborious calculation", also das Angewiesensein auf Zählstrategien auch im Bereich der Addition, das Arbeitsgedächtnis in einer Weise fordern, "that there is insufficient attention to detect relations between addition and subtraction combinations" (BAROODY u.a. 2003, S. 149).

BAROODY betont zu Recht, dass die Wahrscheinlichkeit für solche Entdeckungen in jedem Fall deutlich erhöht werden kann, wenn sie sich nicht als mehr oder weniger zufällige Nebenprodukte von "Rechenübungen" an ungeordneten Additionen und Subtraktionen einstellen (oder eben auch nicht), sondern wenn das Komplementaritätsprinzip zum Gegenstand eines "more structured discovery learning" gemacht wird. Für ein solches werden etwa inverse Additionen und Subtraktionen gezielt zusammengestellt und zum Gegenstand von Diskussionen über mögliche Lösungswege gemacht (BAROODY 2006, S. 29).

Gegen oder zumindest ergänzend zu BAROODY und Kollegen muss festgehalten werden, dass wohl auch im Bereich des Komplementaritätsprinzips erste Entdeckungen auch ohne ausgeprägtes "Triaden-Denken" möglich sind. Gerade die oben paraphrasierten Ausführungen von BAROODY und Kollegen machen dies (wohl gegen die intendierte Aussage der Autoren) deutlich: So wie die Autoren den möglichen Entwicklungsgang schildern, hält das Kind zunächst ja durchaus an seinem "Take-away"-Verständnis des Subtrahierens fest. Es erkennt aber vielleicht, dass dieses *Wegnehmen* das Resultat eines vorangegangen *Dazugebens* wieder aufhebt. Und es kann dies als "short-cut" nutzen, um sich eine mühsam-rückwärtszählende Lösung der Subtraktion zu ersparen. In diesem Fall werden also nicht unbedingt schon *Zahlen* als *Zusammensetzungen aus anderen Zahlen* gedacht. Es genügt vielmehr, wenn ein Kind *Rechnungen als Handlungen* denkt, die durch andere Handlungen aufgehoben werden können.

Dieser Unterschied auf der *konzeptuellen* Ebene sollte sich freilich auf der *prozeduralen* Ebene in einer noch eingeschränkten Flexibilität niederschlagen. Denn für ein an "Triaden" denkendes Kind sind a+b=c, b+a=c, c–a=b, c–b=a, a+_=c usw. tatsächlich nur unterschiedliche Formulierungen desselben Zusammenhangs dreier Zahlen. Denkt das Kind aber bei a+b=c nur an das "Dazugeben" einer Anzahl, welches durch das "Wegnehmen" derselben Anzahl in c–b auch wieder aufgehoben werden kann, dann ist schon der Zusammenhang zwischen c–b und c–a kein unmittelbarer. Und es ist fraglich, ob Aufgaben wie _–b=a auf diesem konzeptuellen Niveau gelöst werden können. Auch dazu fehlen freilich Detailuntersuchungen.

Und noch eine dritte Möglichkeit – neben dem bereits ausgeprägten numerischen Teile-Ganzes-Denken und dem weniger abstrakten Konzept "Handlung und Aufhebung dieser Handlung" – sollte bedacht werden, wenn ein Kind eine Subtraktion rasch löst und in der Beschreibung seines Rechenweges auf die inverse Addition verweist: BAROODY (1999) beschreibt, dass viele Kinder die "complementary tasks" nur bei den Umkehrungen von hochgradig automatisierten Verdoppelungen lösten. Nun ist aber das Hersagen eines Additionssatzes (zumal bei Kindergartenkindern) mitunter nicht mehr als das Abrufen eines gespeicherten "verbalen Musters" ohne jeden weiteren Bedeutungsgehalt (vgl. RADATZ u.a. 1996, S. 83). Und *dafür* scheinen sich gerade die Verdoppelungen in besonderer Weise zu eignen; es sind hier ja tatsächlich nur *zwei* verschiedene Wörter zu speichern, wobei das erste *wiederholt* wird; es handelt sich also um ein *eingängiges* verbales Muster.

Ebenso könnte die *Umkehrung* einer Verdoppelung in der zugehörigen Subtraktion als nicht näher reflektiertes verbales Muster erkannt und abgespeichert werden. Das Kind könnte also "vier plus vier ist acht, acht minus vier ist vier" abspeichern, ohne dabei an das inverse Verhältnis von "Dazugeben" und "Wegnehmen" derselben Anzahl, geschweige denn an ein Teile-Ganzes-Verhältnis zu denken. Ein Hinweis auf ein solches "verbales Musterlernen" könnte darin bestehen, dass dasselbe Kind andere gleichfalls hochgradig automatisierte Additionen, die aber nicht demselben verbalen Muster der Wiederholung eines Summanden folgen (etwas "sechs und eins ist sieben"), *nicht* als Ableitungs-Basis für Subtraktionen verwendete. Mehr Klarheit (auch dies mit den bereits mehrfach erläuterten Einschränkungen) könnten hier wohl nur qualitative Interview liefern, etwa in dem von PUTNAM u.a. (1990) gewählten Setting.

2.10.7 Strategien auf Grundlage von kovarianten Zusammenhängen zwischen zwei Subtraktionen

PUTNAM u.a. (1990) ließen in ihrer Studie auch Ableitungen beurteilen, denen kovariante Zusammenhänge zwischen zwei Subtraktionen zugrunde liegen: Bei gleichbleibendem Subtrahenden wurde der Minuend verändert, mit entsprechender Veränderung der Differenz, algebraisch: a–b=c → (a+x)–b=c+x bzw. a–b=c → (a–x)–b=c–x. Wie erwähnt, waren nur wenige Kinder in der Lage, die Zulässigkeit solcher Strategien zu erklären (vgl. Kap. 2.9.7). In der Interventionsstudie von STEINBERG wurden auch solche Strategien direkt unterwiesen, von den Kindern aber kaum übernommen.

Eine Analyse dieser Strategien macht deutlich, dass hier wohl tatsächlich höhere Anforderungen gestellt werden als bei den bislang behandelten Ableitungsstrategien – einfach deshalb, weil die Ableitungsbasis nun selbst eine Subtraktion ist. Subtraktionen wurden aber in allen vorliegenden Studien seltener durch Faktenabruf gelöst als Additionen. Die Chance dafür, dass eine Aufgabe als Ableitungsbasis genutzt wird, scheint aber wiederum vom Grad ihrer Automatisation abzuhängen (vgl. BAROODY 1999 zum Komplementaritätsprinzip).

Diese Chance steigt offenbar nicht wesentlich, wenn eine Subtraktion a–b=c (die in weiterer Folge als Ableitungsbasis für a+x–b dienen soll) aus einer bereits automatisierten Addition c+b=a abgeleitet werden kann. In den Interviews bei PUTNAM u.a. (1990) wurde dies so vorexerziert. Doch um dies nachvollziehen zu können, hätten die Kinder einen Zusammenhang zwischen *drei Aufgaben* (Addition → Subtraktion 1 → Subtraktion 2) herstellen müssen, was nur wenigen gelang.

2.10.8 Strategien auf Grundlage kompensatorischer Zusammenhänge

FUSON schreibt den Ableitungsstrategien, die auf der Kompensation gegensinniger Veränderungen fußen, ein höheres konzeptuelles Niveau zu als etwa dem "Verdoppeln plus eins" (FUSON 1992a, S. 96). Gemeint sind Strategien wie

– "sharing" beim Addieren; algebraisch: a+b=c → (a–x)+(b+x)=c ("gegensinniges Verändern", vgl. etwa PADBERG 2005, S. 92f)
– "sharing" beim Subtrahieren: a–b=c → a–(b+x)=c–x oder auch a–b=c → a– (b–x)=c+x
– "maintain difference": a–b=c→(a+x)–(b+x)=c oder auch a–b=c→(a–x)–(b–x)=c

Alle diese Strategien wurden Kindern in den Interviews von PUTNAM u.a. (1990) zur Beurteilung vorgelegt. "Sharing" als Additionsstrategie wurde dabei von 66 Prozent der Kinder "vollständig erklärt". Zum Vergleich: Für die Strategie "Verdoppeln plus eins" (Kovarianz) lieferte nur etwa die Hälfte der Kinder eine "complete explanation". Für "sharing" als Subtraktionsstrategie und "maintain difference" lieferten jeweils etwa 25 Prozent der Kinder eine "complete explanation", weitere 25 Prozent eine "partial explanation". Demgegenüber wurden "doubles–1" (etwa 14–7=7 → 13–7=6, also ein kovarianter Zusammenhang) nur von etwa 12 Prozent der Kinder "vollständig erklärt"; weitere 45 Prozent lieferten hier eine "partial explanation". Auch in STEINBERGS Studie wurden Kompensationsstrategien beim Subtrahieren nicht seltener verwendet als Kovarianzstrategien; beim Addieren war aber "sharing" klar seltener als etwa "Verdoppeln plus eins".

Diese Ergebnisse scheinen FUSONS Einschätzung des relativen Schwierigkeitsgrades von Kovarianz- und Kompensationsstrategien zu widersprechen. Zu bedenken ist aber, dass von PUTNAM und Kollegen nicht die Häufigkeit der Verwendung solcher Strategien beim Rechnen erhoben wurde, sondern die Fähigkeit, vorgezeigte Strategien zu erläutern; das konnten insgesamt nur sehr wenige Kinder. Man könnte nun vermuten, dass Kinder, die überhaupt in der Lage sind, Strategien "vollständig zu erklären", bereits einen solchen Grad von Einsicht in quantitative Zusammenhänge erreicht haben, dass sich für sie die unterschiedliche Schwierigkeit von Kovarianz- und Kompensationsstrategien nicht mehr auswirkt. (Berücksichtigt man zudem auch die "partial" explanations", wurden in Summe die Kovarianzstrategien doch etwas häufiger erklärt.)

Getrennt von den wenigen dazu verfügbaren empirischen Hinweisen scheint FUSONS Annahme, dass Kompensationsstrategien konzeptuell anspruchsvoller seien, jedenfalls plausibel:

"Sharing" beim Addieren erfordert auf Grundlage eines "change-add to"-Konzepts der Addition den Vergleich *zweier* Vermehrungs-Handlungen. Diese unterscheiden sich aber sowohl hinsichtlich der Ausgangsanzahl als auch hinsichtlich der hinzukommenden Anzahl; *beide* Unterschiede müssen festgehalten und als einander neutralisierend erkannt werden. Im "part-whole"-Konzept ist diese Kompensation durch die "Klammer" des Ganzen, bei dem ein Teil nur zulasten des anderen vergrößert werden kann, vermutlich leichter nachvollziehbar.

Auch "Sharing" beim Subtrahieren erfordert auf "take away"-Basis den Vergleich zweier Handlungen. Der Kompensationsgedanke lautet hier: "Je mehr ich wegnehme, umso weniger bleibt übrig." bzw. "Je weniger ich wegnehme, umso mehr bleibt übrig". Das scheint insofern sogar einfacher nachvollziehbar als das "sharing" beim Addieren, als die Ausgangsmengen der beiden Wegnehm-Handlungen (anders als beim "sharing"-Addieren) hier gleich sind. Zu berücksichtigen ist die Auswirkung nur *einer* Veränderung (dass nämlich nun mehr oder weniger weggenommen wird).

"Maintain difference" ist auf "take away"-Basis wohl nur nachvollziehbar als das Nacheinander einer kovarianten *und* einer kompensatorischen Veränderung. Der Gedankengang könnte, an einem Beispiel durchgeführt, etwa so lauten: "Wenn ich zehn habe und fünf wegnehme, bleiben fünf. Wenn ich elf, also um eins mehr habe, und weiterhin fünf wegnehme, bleibt um eins mehr übrig, also sechs (Kovarianz). Wenn ich aber nicht nur fünf, sondern um eins mehr wegnehme, also sechs, dann bleiben nicht sechs, sondern eins weniger, also fünf übrig (Kompensation)." All das zu überblicken, stellt wohl hohe Anforderungen schon alleine ans Arbeitsgedächtnis, das die Ausgangsrechnung während aller mentalen Veränderungen präsent halten muss.

Die Einsicht in "maintain difference" (also in das "Monotoniegesetz der Subtraktion") bleibt aber auch dann anspruchsvoll, wenn ein Kind bereits über "Zahlentripel" und darauf aufbauend über ein numerisches "part-whole"-Konzept der Subtraktion verfügt. Der Gedanke der Differenz ist zwar im "Zahlentripel" bereits als Möglichkeit angelegt, aber noch nicht zwingend mitgedacht: Wer 8 als Zusammensetzung aus 5 und 3 denkt, *kann* auch mitdenken, dass 8 "um 5 mehr" ist als 3. Dennoch ist dies ein zusätzlicher, für Kinder keinesfalls selbstverständlicher Gesichtspunkt; STERN weist zu Recht darauf hin, dass "Vergleichsaufgaben ein fortgeschrittenes Zahlverständnis" erfordern, welches sie als "Relationalzahl" bezeichnet (STERN 2003, S. 119f; ähnlich FRITZ und RICKEN 2008, S. 38-42).

Aber erst dieses *Konzept der Differenz* zweier Zahlen eröffnet auch die Möglichkeit, das Monotoniegesetz durch den *Vergleich zweier Differenzen* (die gleich bleiben, wenn Minuend und Subtrahend kovariieren) zu entdecken. Ob überhaupt und wenn, wie häufig "maintain difference" von Kindern unterschiedlichen Alters tatsächlich ohne direkte Unterweisung als Lösungsstrategie eingesetzt wird, ist fraglich. PUTNAM u.a. (1990) untersuchen ja den tatsächlichen Gebrauch nicht; bei STEINBERG (1985) und THORNTON (1990) wurden "maintain difference" weder unterrichtet noch als von den Kindern verwendete Strategie erfasst, und andere Studien unterscheiden noch weniger zwischen den einzelnen Ableitungsstrategien.

2.10.9 Strategien für Aufgaben mit Zehnerüber- bzw. –unterschreitung

Additive Grundaufgaben mit Zehnerüber- bzw. –unterschreitung erfordern gesonderte Betrachtung. Zwar können auch solche Aufgaben "einfach nur auswendig gemerkt" werden; sie stehen *in diesem Fall* hinsichtlich der zugrunde liegenden konzeptuellen Voraussetzungen auf einer Stufe mit "einfach nur gemerkten" Aufgaben im Zahlenraum bis zehn.

Alle anderen Strategien (Alleszählen; Weiterzählen/Runterzählen/Zählend Ergänzen; Ableiten) können aber nur dann auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang erfolgreich angewandt werden, wenn gewisse prozedurale und/oder konzeptuelle Voraussetzungen erfüllt werden, die über das im Zahlenraum bis zehn Geforderte hinausreichen. Das betrifft auch schon die Zählstrategien.

2.10.9.1 Zählstrategien für Aufgaben mit Zehnerüberschreitung

"Counting all" wie "counting on" erfordern bei Summen über zehn selbstverständlich, dass ein Kind die Zahlwortreihe auch über zehn hinaus fortsetzen kann. Beim "counting on" muss dies notwendigerweise bereits auf dem Niveau der "breakable" und "numerable chain" möglich sein (vgl. FUSON 1992a, S. 98). "Counting down" erfordert zusätzlich Sicherheit beim Aufsagen der Zahlwörter in umgekehrter Reihenfolge von achtzehn bis "unter den Zehner".

"Counting all" mit Summen über zehn ist mit Fingern als Zählmaterial nur möglich, wenn Kinder mit "finger patterns" arbeiten und zudem einzelne Finger innerhalb einer Aufgabe mehrfach verwenden. So kann etwa "7+8" alleszählend so gelöst werden, dass zunächst sieben Finger mit "eins, zwei, … sieben" einzeln (oder auch als "Fingerbild" simultan) ausgestreckt werden. Dann könnten, beginnend mit dem achten Finger, mit "eins, zwei, … acht" acht weitere Finger einzeln ausgestreckt werden. Dabei muss das Kind aber fünf der bereits für die Darstellung des ersten Summanden verwendeten Finger (also die gesamte "erste Hand") ein zweites Mal benützen. Das so erzielte Fingermuster (die Finger der "ersten Hand" sind beim zweiten Gebrauch erneut zur Gänze ausgestreckt worden) muss nun für ein "counting all" solange im Kurzzeitgedächtnis gespeichert werden, bis die dafür verbrauchten Finger, erneut von "eins" beginnend, zur Gänze noch einmal ausgezählt werden (fünf davon werden dann doppelt gezählt).

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, dass das Kind sich für das Fingermuster "eine volle Hand" als eine "zweite mögliche Bedeutung" neben "fünf" nun auch bereits "fünfzehn" gemerkt hat und dies unmittelbar als Ergebnis der Rechnung nennt. Die so geschaffene "Vieldeutigkeit" von Fingermustern ist freilich auch eine Fehlerquelle. Beispielsweise können nun drei ausgestreckte Finger (je nachdem, wie dieses Fingerbild zustandegekommen ist) für "drei", "acht", "dreizehn" oder auch "achtzehn" stehen. Das Überschreiten der Zehn-Finger-Grenze stellt für manche Kinder zumindest anfangs (und mitunter auch noch in höherern Schulstufen; vgl. GRAY & TALL 1994, S. 131; von neuropsychologischer Seite DOMAHS, KRINZINGER und WILLMES 2008) ein großes Problem dar, weshalb Aufgaben mit Zehnerübergang (anders als Aufgaben im Zahlenraum bis zehn) möglicherweise nur mit "externen Zählobjekten" (Würfeln, Plättchen) gelöst werden können (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 40). Manche Kinder nehmen aber auch zusätzlich ihre Zehen als Zählmaterial in Gebrauch (vgl. Kap. 8.4.2.3), andere stellen sich zusätzliche "imaginary fingers" vor (GRAY 2003, S. 70).

2.10.9.2 "Plus-Eins-Strategien" für Aufgaben mit Zehnerüberschreitung

Ableitungsstrategien benötigen eine Ableitungsbasis. Um Additionen mit Zehnerüberschreitung ableiten zu können, müssen Kinder also auch bereits (andere) Additionen mit Zehnerüberschreitung bzw., als Basis für Additionen mit der Summe elf, Additionen mit der Summe zehn automatisiert haben. Ist letzteres der Fall, kann z.B. 4+7 nach der bereits behandelten "Plus-Eins-Strategie" aus 4+6 abgeleitet werden. Bezüglich der konzeptuellen Voraussetzungen unterscheidet sich dies nicht wesentlich von der Ableitung etwa von 3+4 aus 3+3. Das Kind muss aber selbstverständlich wissen, dass elf "um eins mehr als zehn" ist – oder zumindest, dass "nach zehn elf kommt" (vgl. Kap. 2.10.5).

Im Zahlenraum bis zehn wird die "Plus-Eins-Strategie" am häufigsten als "Verdoppeln plus eins" angewandt, auf der Grundlage, dass die Verdoppelungen bis inklusive 5+5 häufig schon früh auswendig gemerkt werden. Das trifft zwar auf die Verdoppelungen von 6+6 bis 9+9 offenbar nicht in derselben Weise zu (vgl. CUMMING & ELKINS 1999, S. 161f), kann aber durch gezielten Unterricht mit hoher Erfolgsquote gefördert werden (vgl. etwa RIGHTSEL & THORNTON 1985; FEINBERG 1990, S. 39). Sind Ableitungsbasis und Sicherheit in der Zahlwortreihe auch bis 20 gegeben, ist die Ableitung etwa von 7+8 aus 7+7 objektiv nicht schwerer als die Ableitung von 3+4 aus 3+3. Dennoch gilt auch hier FUSONs bereits erwähnte Feststellung, dass Kinder ihre Strategiewahl auch in Abhängigkeit von der Größe der beteiligten Zahlen treffen (FUSON 1992a, S. 97).

Aufgaben mit dem Summanden 9 können vorteilhaft mit der "Minus-Eins-Strategie" als Nachbaraufgaben von "Plus-10-Additionen" gelöst werden ("addition 9s" bei THORNTON 1978, S. 217; "+9-facts" bei GARNETT 1992, S. 214, "Neunervorteil" bei GERSTER 2009a, S. 265). Das setzt aber (über die "Minus-Eins-Strategie" hinaus) voraus, das die "Plus-10-Additionen" selbst bereits automatisiert oder zumindest rasch und sicher gelöst werden. Das wiederum kann auf unterschiedlichem konzeptuellem Niveau erfolgen:

Natürlich erschließt sich "3+10=13" dann leicht, wenn ein Kind bereits in Stellenwert-Kategorien denkt. "3+10" erfordert dann lediglich ein Zusammensetzen von Stellen: "3 Einer und 1 Zehner sind 1 Zehner und 3 Einer, also 13". Die Entwicklung von Stellenwertverständnis umfassend darzustellen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen (vgl. dazu etwa GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 80-99). Es wurde aber bereits darauf hingewiesen, dass Kinder aus China, Japan und Südkorea auch in dieser Hinsicht ihren AlterskollegInnen aus den USA zumeist überlegen sind, wofür in erster Linie sprachliche in Kombination mit didaktischen Faktoren verantwortlich sein dürften (vgl. Kap. 2.6). HENRY und BROWN (2008, S. 161) berichten, dass nur 28 Prozent der untersuchten US-amerikanischen Kinder gegen Ende des ersten Schuljahres ein "robustes Stellenwertkonzept" demonstriert hätten. Aus dem deutschsprachigen Raum liegen hierzu keine vergleichbaren Studien vor. Aber wie in den USA ist es auch hierzulande üblich, dass Kinder zweistellige Zahlen im Unterricht zunächst nur im begrenzten Zahlenraum bis 20 verwenden; VAN DE WALLE bemerkt zu Recht, dass diese Begrenzung einer Einsicht in das Stellenwert*prinzip* entgegensteht:

> *"The numbers between 10 and 20 are not an appropriate place to discuss place-value concepts. [...] Say to yourself, 'One ten'. Now think about that from the perspective of a child just learning to count to 20! What could one ten possibly mean when ten tells me how many fingers I have and is the number that comes after nine? How can it be one?"* (VAN DE WALLE 2004, S. 129).

Zumindest im zweiten Schulhalbjahr werden auch in Österreich in der Regel bereits Additionen mit Zehnerüberschreitung im Unterricht behandelt (siehe dazu aber Kap. 7). Zu diesem Zeitpunkt ist nach dem oben Gesagten damit zu rechnen, dass viele Kinder zweistellige Zahlen noch nicht in den Kategorien "Zehner" und "Einer" denken (vgl. auch GAIDOSCHIK 2003b, S. 136-139). Nun können Kinder aber auch ohne eigentliches Stellenwertdenken in Aufgaben wie "10+3=13" (bzw. verbal "zehn und drei ist dreizehn") eine "Regel" erkennen im Sinne dessen, was für BAROODY als "principle" oder "rule" einen wesentlichen Faktor für automatisiertes oder quasi-automatisiertes Abrufen von "basic number combinations" darstellt (BAROODY 1985). So könnte ein Kind etwa ein *visuelles Muster* ("bei 10+3 wird die 0 in 10 durch 3 ersetzt") registrieren und speichern; beim mündlichen Rechnen entspricht dem ein verbales Muster ("zehn/drei/drei-zehn") welches freilich bei den Zahlwortbildungen "elf" und "zwölf" fehlt. Auch solches vorwiegend prozedurale Wissen ohne tiefere Einsicht in das Stellenwertsystem kann wohl als Ableitungsbasis für "+9-facts" durchaus ausreichen.

Denkbar ist aber auch, dass ein Kind zwar noch kein eigentliches Stellenwertkonzept entwickelt hat, aber die Zahlen von elf bis neunzehn doch immerhin als Zusammensetzungen aus "zehn und noch etwas" versteht – so, wie es (auf der Stufe der "recomposible triads") auch die Zahlen *bis* zehn als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen zu denken lernen kann. Dabei mag die Dekomposition in "10+x" noch keinen Vorrang haben gegenüber anderen Dekompositionen (so könnte 12 etwa auch oder sogar vorrangig als 6+6 gedacht werden). Wenn aber ein Kind Zahlen überhaupt schon als Zusammensetzungen aus Zahlen denkt, dann erleichtern die genannten visuellen und sprachlichen Muster die Dekomposition in "10+x" wohl selbst dann, wenn die Rolle der Zehn in unserem Zahlensystem aufgrund der Begrenzung des Unterrichts auf den Zahlenraum bis 20 noch gar nicht klar sein kann.

2.10.9.3 Das "Teilschrittverfahren"

Das bereits mehrfach erwähnte "Teilschrittverfahren" ("going through ten" bei PUTNAM u.a. 1990, S. 250 oder STEINBERG 1985, S. 340; "make ten" bei THORNTON & SMITH 1988, S. 8 oder LEUTZINGER 1999, S. 17; vgl. Kap. 2.6) nimmt innerhalb der Strategien für Zehnerübergänge insofern eine Sonderrolle ein, als es im deutschsprachigen Raum traditionell bevorzugt (und oft sogar als *einzige* Strategie für den Zehnerübergang) behandelt wurde und im gegenwärtigen Unterricht wohl zuweilen immer noch so behandelt wird (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 25.) Tatsächlich stellt diese Strategie aber von allen nicht-zählenden Varianten des Zehnerübergangs wohl die höchsten prozeduralen und konzeptuellen Anforderungen (vgl. KRAUTHAUSEN 1995, S. 88; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 25). Als vorteilhaft gegenüber einer Zählstrategie kann es von einem Kind im Grunde nur empfunden werden, wenn dieses Kind bereits

– vom ersten Summanden ausgehend sicher und schnell auf zehn ergänzen kann;
– den zweiten Summanden sicher und schnell in zwei Zahlen "zerlegen" kann, und zwar passend genau so, dass die "erste Portion" zusammen mit dem ersten Summanden zehn ergibt;
– während des ersten Teilschrittes ("bis zehn") die "zweite Portion" des zweiten Summanden im Arbeitsgedächtnis behalten kann;
– die zweite Portion zur Zwischensumme 10 ohne Zählen addieren kann;
– bei all diesen Überlegungen und Rechenschritten nicht den Plan verliert (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 44; FLOER 1996, S. 55).

STEINBERG, in deren Interventionsstudie "going through ten" unterrichtet wurde, berichtet von großen Schwierigkeiten der Kinder mit dieser Strategie, gerade auch auf Grundlage eines fehlenden Stellenwertverständnisses (STEINBERG 1985, S. 347f, vgl. Kap. 2.9.2). Auch KRAUTHAUSEN berichtet von den "Klagen" vieler LehrerInnen darüber, "welche Schwierigkeiten Kinder damit [dem Teilschrittverfahren; Anmerkung M.G.] hätten", und hält dazu fest: "Teilweise handelt es sich dabei um 'hausgemachte' Probleme – insbesondere dann, wenn die Kinder auf *ein* Verfahren festgelegt werden" (KRAUTHAUSEN 1995, S. 87f). In einer kleinen Studie von PADBERG (1993) wurde die Aufgabe 7+9 am Ende des ersten Schuljahres von allen 6 Schülern, die von der Lehrerin als "leistungsstark" eingestuft worden waren, mit dem Teilschrittverfahren gelöst. Von den fünf Schülern, die die Lehrerin als "schwach" eingestuft hatte, wählte dagegen nur einer das Teilschrittverfahren, vier lösten 7+9 zählend (mit Hilfe der Finger bzw. von Zählmaterial). Auch bei diesen Schülern war offenbar ausschließlich das Teilschrittverfahren für Zehnübergänge im Unterricht thematisiert worden.

Diese (trotz aller Warnungen von fachdidaktischer Seite; vgl. Kap. 4.6) im deutschsprachigen Raum nach wie vor häufige Festlegung auf das Teilschrittverfahren erfolgt, wenn sie denn überhaupt bewusst und nach Abwägung der Vor- und Nachteile erfolgt, vermutlich deshalb, weil diese Strategie als einzige "universell" ist: Sie kann unabhängig von der Größe der beteiligten Zahlen für jede Addition mit Zehnerübergang genutzt werden, lässt sich als günstige Kopfrechenstrategie auf Zehnerübergänge jenseits des Zahlenraums 20 erweitern und analog auch für das "Zehnerunterschreiten" bzw. "Ergänzen-über-10" bei Subtraktionen anwenden. In der bereits erwähnten Studie von TORBEYNS u.a. (2004; vgl. Kap. 2.9.7) zeigten gerade die als "weak" eingestuften SchülerInnen eine Vorliebe für das Teilschrittverfahren und verwendeten das (im Unterricht gleichfalls behandelte) "Verdoppeln plus eins" für Additionen wie 6+7 oder 7+8 signifikant seltener als ihre als "moderate" bzw. "strong" eingestuften MitschülerInnen. Das zeigt einerseits, dass die dem Teilschrittverfahren innewohnenden Schwierigkeiten auch für schwächere SchülerInnen überwindbar sind. Andererseits scheint es diesen schwerer zu fallen, aus mehreren Verfahren das für die jeweiligen Zahlen günstigste auszuwählen. Denn dass "Verdoppeln plus eins" bei den dafür in Frage kommenden Zahlenkombinationen tatsächlich vorteilhaft ist, kommt in der Studie von TORBEYNS u.a. gleichfalls zum Ausdruck; die Bearbeitungszeiten waren bei diesem Verfahren (gegenüber dem Teilschrittverfahren) deutlich kürzer (a.a.O., S. 325).

2.10.9.4 Zehnerüberschreitung mit der "Kraft der Fünf"

Eine weitere Strategie für den Zehnerübergang benützt die sogenannte "Kraft der Fünf" ("power of five" bei FLEXER 1986; vgl. KRAUTHAUSEN 1995; GERSTER 2009a, S. 264f). Sie ist dementsprechend nur dann anwendbar, wenn mindestens einer der Summanden größer als 5 ist, der andere mindestens 5 ist. So wird zum Beispiel bei 7+8 wie folgt gerechnet: 7 wird in 5+2 aufgespalten, 8 in 5+3, die Addition der beiden Fünfer ergibt 10, dazu noch 2+3, in Summe 15. FUSON und KWON (1992, S. 154) berichten, dass südkoreanische Kinder Ende des ersten Schulhalbjahres unter anderem (allerdings selten) auch diese Strategie für Zehnerübergänge (die zu diesem Zeitpunkt im Unterricht noch nicht behandelt worden waren) genutzt hätten. Das Verfahren scheint, sofern es im Unterricht in geeigneter Weise behandelt wird, für Kinder mit noch nicht ausgeprägtem Stellenwert-Denken zumindest bei gewissen Zahlen (gerade etwa den Verdoppelungsaufgaben) leichter nachvollziehbar zu sein als das Teilschrittverfahren. Das gilt insbesondere dann, wenn zur Erarbeitung die Hände oder andere Materialien mit Fünfergliederung (etwa sogenannte "Rechenschiffchen") verwendet werden. Denn es drängt sich wegen der rechnerischen Einfachheit (und der Fünfergliederung des Materials) geradezu auf, zwei Fünfer zu einem Zehner zusammenzufassen. Das für viele Kinder beim Teilschrittverfahren nicht einsichtige Ergänzen ausgerechnet auf zehn (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 25) ergibt sich dabei tatsächlich "von selbst" (vgl. GAIDOSCHIK 2009, S. 174ff).

Es fehlen freilich bislang Studien darüber, wie Kinder, die im Unterricht beide Verfahren kennen gelernt haben, damit in weiterer Folge umgehen. In der Studie von PADBERG (1993, S. 4) löste nur ein Schüler (aus einer Gruppe von insgesamt 31) die Aufgabe 7+9 mit der "Kraft der Fünf" (als 5+5+2+4). Doch erstens war dieses Verfahren eben nicht im Unterricht behandelt worden, zweitens drängt sich das Rechnen mit der "Kraft der Fünf" gerade bei dieser Addition kaum auf (andere Additionen mit "einladenderen" Zahlen wurden von PADBERG nicht untersucht).

2.10.9.5 Ableitungsstrategien für Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung

Für *Subtraktionen* mit Zehnerübergang bzw. –unterschreitung kommen folgende Ableitungsstrategien in Frage:

- "Think addition"; diese Strategie ist am ehesten dann zu erwarten, wenn die dazu inverse Addition bereits automatisiert ist (vgl. BAROODY 1999, siehe Kap. 2.8.2). Auch bei den Additionen mit Zehnerübergang ist das am ehesten bei Verdoppelungen der Fall.
- Sofern auch Additionen +10 (auf welcher konzeptuellen Grundlage auch immer, siehe oben) bereits sicher und schnell gelöst werden, ist die Anwendung des Umkehrgedankens auch bei Subtraktionen –10 möglich.
- Jede Subtraktion mit Zehnerübergang kann ihrerseits als Ableitungsbasis für andere Subtraktionen dienen, nach den beschriebenen Strategien auf der Basis kovarianter oder kompensatorischer Zusammenhänge (vgl. oben, Kap. 2.10.7 und 2.10.8). Die besonderen Schwierigkeiten, die etwa PUTNAM u.a. (1990) oder auch STEINBERG (1985) für diesen Bereich dokumentieren, ergeben sich zum Gutteil wohl einfach daraus, dass die untersuchten Kinder die als Ableitungsbasis geforderten Subtraktionen in der Regel noch nicht automatisiert hatten.
- Das Teilschrittverfahren für Subtraktionen im "take-away"-Verständnis (wenn etwa 14–9 als 14–4–5 gerechnet wird) fordert grundsätzlich dieselben Einsichten wie das analoge Additionsverfahren. Der "erste Schritt" mag hier aber sogar leichter nachvollziehbar sein, weil die Größe des ersten Teilsubtrahenden der Einerstelle des Minuenden entspricht und gewissermaßen einfach "abgelesen" oder verbal "abgehört" werden kann (während bei der Addition der erste Teilsummand erst durch Ergänzen bestimmt werden muss).
- SUN und ZHANG (2001, S. 31) beschreiben eine Alternative zum Teilschrittverfahren für Subtraktionen, die in China häufig im Unterricht behandelt werde. Die Aufgabe 13–4 wird dabei beispielsweise wie folgt gelöst: 10–4=6, 6+3=9. Der Minuend wird also in "10+x" aufgespalten (was der ostasiatischen Zahlsprechweise entspricht), der Subtrahend wird von 10 weggenommen, zum Ergebnis dieser "Hilfsrechnung" wird x wieder hinzugefügt, um so das Endergebnis zu erhalten: (10+x)–y = (10–y)+x. HATANO (1982, S. 216) beschreibt dieselbe Strategie als auch in Japan üblich. In Studien aus anderen Ländern ist sie nicht dokumentiert.

Die ausführliche Analyse der verschiedenen Ableitungsstrategien für Additionen und Subtraktionen mit Zehnerübergang sollte deutlich machen, dass die einzelnen Strategien sich erheblich darin unterscheiden, welches Maß an Einsicht vor allem in das Stellenwertprinzip jeweils gefordert ist. Ob und in welcher Weise sich diese Unterschiede in der Häufigkeit ihrer Verwendung und etwa auch in ihrer Fehleranfälligkeit niederschlagen, kann auf Basis der vorliegenden Studien nur in Teilaspekten beurteilt werden. Wie erwähnt, erfassen diese in der Regel nur, ob überhaupt eine Ableitungsstrategie verwendet wurde (eine Ausnahme stellt etwa, wie ausgeführt, die Studie von TORBEYNS u.a. 2004 dar). In vielen Studien werden nicht einmal

Strategien für Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang getrennt ausgewiesen. So gilt für Aufgaben mit Zehnerübergang bis heute in noch einmal gesteigerter Weise, was Karen FUSON vor über 15 Jahren allgemein über die bei ihr auf "Level IV" angesiedelten "derived fact strategies" bemerkt hat: "There has been relatively little work done on Level IV solutions" (FUSON 1992a, S. 95).

2.10.10 Abschließende Bemerkung zur konzeptuellen Analyse unterschiedlicher Rechenstrategien

Gerade auch die Analyse der kindlichen Denkweisen, die den unterschiedlichen "derived fact strategies" zugrunde liegen, hat deutlich gemacht, dass im Bereich der Entwicklung des Rechnens noch großer Forschungsbedarf besteht. Einige besonders wichtig erscheinende Desiderate sollen in Kapitel 2.13 (nach einem kurzen Überblick über neuro- und kognitionspsychologische Beiträge) noch einmal zusammenfassend hervorgehoben werden. Schon an dieser Stelle sei festgehalten, dass nach allen bisherigen Befunden diese Entwicklung in ihrer Komplexität wohl zu viele Varianten zulässt, um mit theoretischem und pädagogisch-praktischem Mehrwert in ein "allgemeingültiges Stufen-Modell" eingefasst werden zu können.

Und das dürfte nicht einfach daran liegen, dass es "bisher kaum umfangreiche Längsschnittstudien zum typischen Erwerb der arithmetischen Leistungen gibt, die die Grundlage derartiger Modelle darstellen können", wie LANDERL und KAUFMANN (2008, S. 86) vermuten. Eher scheint es so zu sein, dass sich der "typische Erwerb" eben "nicht in einen hierarchischen Entwicklungsablauf einordnen" lässt. Denn so wichtig auch weitere Studien und gerade auch Längsschnittstudien in diesem Bereich sind, schon die vorliegenden, im Abschnitt 2.10 dargestellten Arbeiten machen eines sehr deutlich:

> *"Die arithmetische Leistung setzt sich [..] aus sehr unterschiedlichen Komponenten zusammen, […] und Kinder eignen sich diese Komponenten individuell unterschiedlich an"* (LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 86, die Position von DOWKER 2005 referierend).

2.11 Beiträge der Neuropsychologie

Innerhalb der aktuellen neuropsychologischen Forschung zu hirnorganischen Grundlagen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens findet seit gut einem Jahrzehnt das von DEHAENE und COHEN formulierte "Triple-Code-Modell" (DEHAENE 1992; DEHAENE & COHEN 1995) die größte Beachtung. Es soll im Folgenden kurz dargestellt und bezüglich seiner Relevanz für die hier interessierenden Fragen der Entwicklung kindlicher Lösungsstrategien überprüft werden. Eine darüber hinaus gehende Würdigung der neuropsychologischen Forschung zur Zahlenverarbeitung und zum Rechnen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Das "Triple-Code-Modell" wurde ursprünglich zur Erklärung von Auffälligkeiten formuliert, die vor allem bei hirnlädierten Erwachsenen bezüglich einzelner Teilfähigkeiten des Rechnens bzw. der Zahlenverarbeitung beobachtet werden können (vgl. DEHAENE 1999, S. 203-237). So ist etwa bei einzelnen Patienten dokumentiert, dass sie zwar Ziffern, aber keine Zahlwörter lesen können; da diese "Dissoziation" auch in der anderen Richtung beobachtet wurde, spricht die Neuropsychologie hier von einer "Doppel-Dissoziation" (vgl. LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 18f). Zur Erklärung solcher und weiterer Dissoziationen postuliert das Triple-Code-Modell die Existenz dreier getrennter neuronaler "Module" (Funktionseinheiten), die bei jeweils unterschiedlichen Formen des Umgangs mit Zahlen und des Rechnens aktiviert würden, die also gewissermaßen deren "hirnorganisches Substrat" darstellten:

Das "semantische Modul" (vgl. VON ASTER 2005, S. 14; KRAJEWSKI 2003, S. 83f; "analogical magnitude code" bei DEHAENE 1992) sei immer dann aktiv, wenn es beim Umgang mit Zahlen um deren "Semantik", also deren *Bedeutungs*gehalt gehe. Das sei etwa der Fall beim überschlagenden Rechnen, beim Beurteilen der relativen Größe zweier Zahlen, beim "Subitizing" (vgl. Kap. 2.10.1) wie auch beim groben Abschätzen von Mengen (aber etwa nicht beim "exakten Rechnen", siehe das Folgende!). Die "innere Repräsentation" von Quantitäten erfolge bei all diesen Aktivitäten "analog" (daher auch "analoges Modul") auf einem "inneren Zahlenstrahl". Dessen Ausrichtung passe sich im Laufe der individuellen Entwicklung kulturellen Vorgaben an; im westlichen Kulturkreis würden kleinere Zahlen also am inneren Zahlenstrahl "weiter links", größere "weiter rechts" stehen (vgl. DEHAENE 1999, S. 97-100; VON ASTER 2005, S. 21). (Zahlen würden demgemäß als *Punkte* am Zahlenstrahl repräsentiert. "Analog" wird hier also offenbar nicht im Sinne von "[der Größe] entsprechend" verwendet – das wäre ja nur eine Darstellung von Zahlen als *Strecken unterschiedlicher Länge*. Gemeint ist also vermutlich "analog" im Sinne von "kontinuierlich"; vgl. DUDEN 2006.)

Das "sprachlich alphabetische Modul" (VON ASTER 2005, S. 14) oder auch "auditiv-verbale Modul" (KRAJEWSKI 2003, S. 84; "verbal code" oder auch "auditory verbal word frame" bei DEHAENE 1992) sei immer dann beteiligt, wenn Zahlen in der Form von (gehörten, gesprochenen, gedachten) Zahl*wörtern* bearbeitet werden, also etwa beim Aufsagen der Zahlwortreihe, beim Abzählen, aber auch beim "exakten Rechnen". "Additions- und Multiplikationsfakten" seien hier als "verbal gespeicherte Assoziationen" "modularisiert" (VON ASTER 2005, S. 19; VON ASTER 1996, zit. nach GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 225).

Das "visuell-arabische Modul" (VON ASTER 2005; "arabic code" oder "visual arabic number form" bei DEHAENE 1992) schließlich sei die hirnorganische Grundlage der Verarbeitung von Zahlen in Form von Ziffern und insbesondere immer dann aktiv, wenn (schriftlich) mit mehrstelligen Zahlen gerechnet wird. Das erfordere ein

> *"ständiges Hin- und Zurückübersetzen zwischen den beiden genannten Repräsentationsmodulen* [sc. dem visuell-arabischen und dem auditiv-verbalen; Anmerkung M.G.], *wobei dieses Modell explizit asemantische Transkodierungsprozesse zuläßt"* (VON ASTER 1996, zitiert nach GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 225).

Das "semantische Modul" müsse an solchen Prozessen also nicht beteiligt sein, wie überhaupt die einzelnen Module in Folge von Hirnläsionen grundsätzlich "dissoziiert" sein könnten. Beim gesunden Erwachsenen würden die Module aber beim Umgang mit Zahlen und Rechnungen in der Regel zusammenspielen.

"Einige wichtige Vorhersagen dieses Modells" seien in den letzten Jahren durch "Methoden der funktionellen Bildgebung" wie die Positronenemissionstomographie (PET) und vor allem die funktionelle Magnetresonanztomographie (fMRI) in den letzten Jahren "bestätigt" worden (KUCIAN & VON ASTER 2005, S. 60).

Für unsere Forschungsfrage interessiert in besonderer Weise das "auditiv-verbale Modul"; dieses sei ja primär für das "exakte Rechnen" "zuständig". Dazu ist zunächst das Grundsätzliche festzuhalten, dass es sich beim "Triple-Code-Modell" um ein Modell der "neuronalen Zahlverarbeitung" bei *Erwachsenen* handelt. Die Annahmen des Modells beziehen sich also auf das (vorläufige) *Ergebnis* einer Entwicklung, die sich über viele Jahre erstreckt und durch zahlreiche (nicht nur, aber vor allem auch schulische) Einflüsse mitbestimmt wird.

Nun zeigen bildgebende Untersuchungen, dass gesunde Erwachsene "bei sicher beherrschten Additionen mit kleinen Zahlen links-lateralisierte sprachverarbeitende Regionen" aktivieren, während "das überschlagsartige approximative Rechnen" mit erhöhter Aktivität in "intraparietale[n] Regionen auf beiden Seiten" einhergehe (KUCIAN & VON ASTER 2005, S. 64, unter Verweis auf STANESCU-COSSON u.a. 2000).

Dies mag als Bestätigung der Annahme unterschiedlicher "neuronaler Module" für *bereits automatisiertes* Rechnen einerseits, "approximatives" Rechnen andererseits gedeutet werden. Solche Befunde helfen aber nicht für die Klärung der Frage, *wie es dazu kommt*, dass Erwachsene (üblicherweise) Additionen mit kleinen Zahlen *automatisiert haben*, dass sie also die additiven Grundaufgaben (üblicherweise) *wie eingelernte Gedichtzeilen* und insofern tatsächlich *"rein verbal"* abrufen (ohne quantitatives Denken aktivieren zu *müssen*). Diese Befunde helfen daher auch nicht bei der weitergehenden Frage, wie wir Kinder dabei unterstützen können, zu solchen Automatismen zu gelangen (sofern diese denn überhaupt erstrebenswert sind; vgl. dazu Kap. 3).

Mit anderen Worten: Die additiven Grundaufgaben mögen bei Erwachsenen (oder auch schon bei automatisiert rechnenden Kindern) "verbal kodiert" und entsprechend unabhängig von Bedeutung und Verständnis "neuronal modularisiert" sein. Das ist aber selbst das *Resultat* einer – wie auch immer abgelaufenen, wodurch auch immer geförderten – Entwicklung. Und es erlaubt jedenfalls nicht den Rückschluss, dass das *Erlernen* der Grundaufgaben (bis hin zur möglichen Automatisierung) nichts anderes als eine "verbale Leistung" sei, also das Ergebnis des Auswendigmerkens von "Sätzen" ohne Bezug auf deren Bedeutung.

Genau diesen Rückschluss zieht aber offenbar VON ASTER:

> *"Mit dem Erlernen der grundlegenden Zählprinzipien gehen dann auch erste arithmetische Fähigkeiten einher. [...] Dieses Werkzeug ermöglicht es, nun auch Mengen mit großer Genauigkeit zu vereinen (zusammenzählen) oder zu verändern (hinzu- oder wegzählen). Mit zunehmender Übung werden dann arithmetische Fakten nach und nach Bestandteil des Langzeitgedächtnisses [...]"* (VON ASTER 2005, S. 19).

Ohne SIEGLERS Entwicklungsmodell (vgl. Kap. 2.3) zu erwähnen, erklärt VON ASTER das "Modularisieren" von Zahlenfakten im "verbalen Code" hier in ganz ähnlicher Weise zu einem quasi "automatischen" Ergebnis "zunehmender Übung". Und auf Grundlage des hier gebotenen Bildes der Rechenentwicklung kann diese Übung in nichts anderem bestehen als in wiederholtem zählenden Rechnen; zur Kritik an dieser Vorstellung siehe Kapitel 2.3.2.

Auch DEHAENE betrachtet das Erlernen der additiven (und multiplikativen) Grundaufgaben als verbale Merkleistung. Den Schlüssel dazu sieht er aber nicht im Immer-wieder-Zählen, sondern im direkten "Auswendiglernen von Rechentabellen" (DEHAENE 1999, S. 152). Und die Schwierigkeiten vieler Kinder mit den Grundaufgaben liegen für ihn darin begründet, dass gerade auf diese Art des Lernens "die Evolution" uns nicht vorbereitet habe (a.a.O., S. 157):

> *"Unser Gehirn hat deshalb Probleme mit dem Behalten arithmetischer Tatsachen, weil das menschliche Gedächtnis im Gegensatz zu dem eines Computers* assoziativ *ist und viele Einzeldaten miteinander verflechten kann. [...] Wir sind [..] dazu verdammt, mit unangemessenen Störfaktoren und Assoziationen zu leben, die unser Gedächtnis automatisch abruft, auch wenn wir sie lieber unterdrücken möchten"* (DEHAENE 1999, S. 149f).

Das Herstellen von Verknüpfungen wird hier nur in seiner *unbewussten* und *ungewollten* Form besprochen, als Quelle "assoziativer Abruffehler" des Gedächtnisses (vgl. dazu auch Kap. 2.12.2). Dass gerade das *bewusste Verknüpfen* auf Grundlage *verstandener operativer Zusammenhänge* eine wesentliche Rolle beim "Behalten arithmetischer Tatsachen" spielen könnte, wird hier nicht in Betracht gezogen – wohl deshalb, weil *mathematisches Verstehen* und *arithmetische Fakten* gemäß Triple-Code-Modell in voneinander unabhängigen Modulen ihre hirnorganische Grundlage haben sollen.

Dass diese Module dann doch wieder nur "*zum Teil* [Hervorhebung M.G.] voneinander unabhängig und automatisch funktionieren" (DEHAENE 1999, S. 162), ist ein notwendiges Zugeständnis des Modells an die Wirklichkeit, die es erklären will: Erwachsene wie Kinder rechnen nun einmal *zumindest nicht immer* (um es vorsichtig zu formulieren) unter Ausblendung jedes quantitativen Bedeutungsgehalts. Dass dieser Bedeutungsgehalt aber in Form von Ableitungsstrategien *schon beim Lernen* der additiven Grundaufgaben von vielen Kindern auch ohne gezielte Unterweisung genutzt wird, zeigen entwicklungs- und kognitionspsychologische wie fachdidaktische Studien auf Basis von qualitativen Interviews zur Genüge (vgl. Kap. 2.3 bis Kap. 2.10); in DEHAENES wie VON ASTERS Darstellung des Rechnenlernens ist dafür kein Platz.

Dabei liefern offenbar selbst neuropsychologische Studien unter Einsatz funktioneller Magnetresonanztomographie Hinweise dafür, dass noch bei Erwachsenen auch das "exakte Rechnen", sofern es denn eben nicht schon mit "automatisiertem Rechnen" zusammenfällt, mehr ist als das Abrufen verbal gespeicherter Gedächtnisinhalte: KUCIAN und VON ASTER verweisen etwa auf die Untersuchung von KIEFER (1997), der bei Aufgaben des kleinen Einmaleins "nur ein[en] Effekt im linken inferioren Parietalkortex" (wie bei den automatisierten Einspluseinsaufgaben) nachweisen konnte, während bei Multiplikationen mit zweistelligen Zahlen beide inferiore Parietalkortizes aktiv gewesen seien (KUCIAN & VON ASTER 2005, S. 65). Im Sinne des Triple-Code-Modells wird das als Aktivierung des "semantischen Moduls" gedeutet, also als Beteiligung von "mathematischem Verständnis" beim Bewältigen der Rechenaufgabe (a.a.O., S. 64).

Und auch BUTTERWORTH (1999, referiert nach KUCIAN & VON ASTER 2005, S. 65) befindet noch bei *Erwachsenen* im Bereich der additiven Grundaufgaben bis 20 neben direktem Faktenabruf auch "vereinfachende Strategien" (wie die Ableitung von 9 + 6 aus 10 + 5). Diese hätten eine "Aktivierung der semantischen intraparietalen Netzwerke zur Folge". Warum aber sollten dann erst noch *lernende Kinder* nicht ähnliche Strategien etwa auch *für Aufgaben ohne Zehnerübergang* anwenden?

Wenn also Vertreter des Triple-Code-Modells den *Erwerb* der additiven Grundaufgaben als verbal-assoziative Leistung qualifizieren, dann ist das nicht nur ein logisch unzulässiger Kurzschluss vom *Resultat* eines (erfolgreichen) Lernens darauf, wie dieses Lernen abgelaufen ist. Sie vernachlässigen dabei auch neuropsychologische Befunde, die auf Basis des Triple-Code-Modells selbst gewonnen wurden; Befunde, die wiederum mit den Ergebnissen anderer Disziplinen (Entwicklungspsychologie, Fachidaktik) zumindest vereinbar sind.

Freilich ist bei der Beurteilung der pädagogischen Relevanz des Triple-Code-Modells und daran anknüpfender Theoreme zur Herausbildung der "neuronalen Module" zu berücksichtigen, dass "die bildgebende Forschung mit Kindern [...] gerade erst begonnen" hat (KUCIAN & VON ASTER 2005, S. 67). Ob und in welchem Maße aber die künftige Hirnforschung tatsächlich dabei helfen kann, "die normale und die gestörte Entwicklung von Rechenfähigkeiten [...] besser zu verstehen" (a.a.O., S. 70), wird wohl entscheidend davon abhängen, ob NeurowissenschaftlerInnen künftig stärker als bisher auch Ergebnisse und Fragen der pädagogischen und fachdidaktischen Forschung berücksichtigen und zum Ausgangspunkt für eigene Untersuchungen machen:

– Querschnittstudien mit bildgebenden Verfahren, in denen Kinder verglichen werden, von denen aus qualitativen Interviews bekannt ist, dass sie bestimmte Aufgaben entweder zählend oder ableitend oder durch Faktenabruf lösen;
– Längsschnittstudien, in denen "dem Gehirn" verschiedener Kindern im Verlaufe ihrer Rechenentwicklung wiederholt "beim Rechnen zugeschaut" (vgl. KUCIAN & VON ASTER 2005) wird und in denen die gewonnenen Tomogramme mit den Befunden qualitativer Interviews verglichen werden;
– Interventionsstudien, die vor und nach gezielter Unterweisung im Verständnis und Gebrauch von Ableitungsstrategien auch bildgebende Verfahren einsetzen.

Untersuchungen *dieser Art* könnten unser Verständnis des arithmetischen Lernens möglicherweise tatsächlich erweitern oder zumindest vertiefen und absichern. Nur *"möglicherweise"* deshalb, weil bildgebende Verfahren nun einmal nichts anderes leisten können als den Nachweis, *dass* bei bestimmten geistigen Betätigungen bestimmte Bereiche des Cortex in erhöhtem Maße aktiviert sind. Die *besondere Qualität* der Gedanken, die sich ein Individuum beim Rechnen macht, lässt sich aus dem durch funktionelle Magnetresonanztomographie messbaren "Anstieg an Oxyhämoglobin" in bestimmten Hirnregionen (vgl. KUCIAN & VON ASTER 2005, S. 55f) aber wohl nicht erschließen. Diese *Qualität der Gedanken* ist aber entscheidend dafür, ob ein Kind Zusammenhänge zwischen einzelnen Aufgaben erkennen kann oder nicht.

Wenn nun beispielsweise "dyskalkulische" Kinder bei bestimmten Rechenaufgaben offenbar schwächere Aktivitäten in einzelnen kortikalen Regionen zeigen als "gleichaltrige normal entwickelte Kinder" (vgl. VON ASTER 2005, S. 29 unter Verweis auf KUCIAN u.a. 2005), dann ist das aus fachdidaktischer Perspektive wenig überraschend: Die Kinder gehen ja vermutlich tatsächlich *anders mit Zahlen um:* eben vorwiegend *zählend* und kaum faktenabrufend oder Zusammenhänge herstellend. Aber *diesen* Unterschied zwischen "dyskalkulischen" und "normalen" Kindern kennen wir nicht auf Grund funktioneller Magnetresonanztomographie, sondern durch qualitative Interviews und Beobachtung.

Und bildgebende Verfahren können auch nicht erklären, *warum* "dyskalkulische Kinder" (vorwiegend) zählend rechnen: Aus den unterschiedlichen kortikalen Aktivierungsmustern zu schließen, dass *organische Unterschiede* den unterschiedlichen Umgang mit Zahlen *determinieren*, wäre logisch jedenfalls unzulässig. Eine andere, mindestens so plausible Interpretation wäre, dass sich in den unterschiedlichen Aktivierungsmustern nur *organisch manifestiert*, welche Strategien die Kinder verwenden. Und sie verwenden diese Strategien, wie erläutert, stets auf Basis dessen, was sie *bislang über Zahlen und Rechenoperationen gelernt haben*.

Es scheint also in der Tat durchaus fraglich, ob die Hirnforschung zur "neuronalen Zahlverarbeitung" für pädagogisch-didaktische Entscheidungen überhaupt hilfreich sein *kann*. MOSER OPITZ ist wohl zuzustimmen, wenn sie in ihrem Forschungsüberblick festhält, dass für

> *"Hinweise darauf, welche Fördermaßnahmen zu ergreifen sind [...] weiterhin andere Forschung gefragt sein [wird] – Forschung, welche sich mit den konkreten mathematischen Lernprozessen befasst"* (MOSER OPITZ 2007, S. 49).

Aber unabhängig von der Frage nach möglichen *Nutzanwendungen* wäre es ein Gebot der *wissenschaftlichen Objektivität*, bei künftigen Forschungen stärker als bisher zu berücksichtigen, was andere Disziplinen in diesem Bereich an (mehr oder weniger gesichertem) Wissen zusammengetragen haben. Denn wie KAUFMANN und NUERK in ihrem Überblick über die interdisziplinäre Forschung zu Fragen des "numerical development" festhalten:

> *"One problem [...] is that research about numerical development comes from very different research communities that sometimes seem to study numerical development in parallel universes"* (Kaufmann & Nuerk 2005, S. 161).

Und auch in Folgendem ist den beiden Recht zu geben:

> *"We conclude that a stronger integration of these different approaches and models is needed for the future"* (a.a.O., S. 142).

2.12 Beiträge der Kognitionspsychologie

In diesem letzten Abschnitt zum Forschungsstand über die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien wird auf einschlägige Arbeiten aus dem Bereich der Kognitionspsychologie bzw. kognitiven Entwicklungspsychologie eingegangen. Ausführlicher diskutiert werden zunächst Studien zum "Arbeitsgedächtnis", welches seit einigen Jahren eindeutig im Mittelpunkt kognitionspsychologischer Bemühungen um das Rechnen und Rechnenlernen steht; sodann wird auf Modelle zur Repräsentation der arithmetischen Basisfakten im Langzeitgedächtnis eingegangen; schließlich soll die Relevanz aktueller Studien zu mathematikspezifischen "Prädiktoren" späterer Rechenleistungen für unsere Forschungsfrage überprüft werden.

Auf das ältere "Teilleistungskonzept", wonach das Rechnen aus dem Zusammenwirken *nicht mathematikspezifischer* "basaler Teilleistungen" zu erklären sei, wird im Rahmen dieser Arbeit dagegen bewusst nicht näher eingegangen. *Dass* unspezifische kognitive und noch grundlegendere sensorische Fähigkeiten wie Körperschema, taktil-kinästhetische Wahrnehmung, auditive und visuelle Figur-Hintergrund-Differenzierung und visuell-räumliche Wahrnehmung am Rechnen und Rechnenlernen direkt oder indirekt *beteiligt* sind, ist unbestreitbar (vgl. MILZ 2004). Dasselbe gilt aber für *jede* höhere Form geistiger Betätigung. Wollen wir nun die Entwicklung des *mathematischen* Denkens, näher: die Entwicklung des Rechnens im Bereich der additiven Grundaufgaben, besser verstehen, dann müssen wir auch die *konkreten kognitiven Leistungen* untersuchen, die die einzelnen empirisch erfassten Strategien Kindern abverlangen. Nur mit Bezug auf diese konkreten Leistungen kann nämlich, wie GERSTER und SCHULTZ zu Recht einfordern, auch die "Bedeutung einer allgemeinen kognitiven Fähigkeit im Lernprozeß charakterisiert werden" (GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 51).

In aktuellen Studien zum "Arbeitsgedächtnis" wird versucht, diesen konkreten Bezug zur Entwicklung additiver Lösungsstrategien herzustellen; deshalb werden sie im Folgenden näher erörtert. Studien zu anderen basalen Fähigkeiten beschränken sich dagegen zumeist auf die Frage, *ob* statistisch signifikante Zusammenhänge zwischen (auf unterschiedliche Weise erhobenen) mathematischen Leistungen und (auf unterschiedliche Weise erhobenen) basalen Teilleistungen bestehen. Die Befunde dazu sind, wie FRITZ und RICKEN (2008, S. 19) zusammenfassen, "ingesamt [..] widersprüchlich und letztlich nicht [..] ausreichend spezifisch", um Probleme beim Rechnenlernen und, noch spezieller, die dargestellte Vielfalt in der Entwicklung kindlicher Rechenstrategien zu erhellen.

2.12.1 Zum Einfluss des "Arbeitsgedächtnisses"

Aktuelle kognitionspsychologische Arbeiten zur Rolle des Gedächtnisses beim Rechnen und Rechnenlernen greifen in der Regel auf das Modell des Arbeitsgedächtnisses ("working memory") von BADDELEY (1990) zurück, das bereits in Kapitel 2.2.4 kurz erläutert wurde. Daneben wird weiterhin auf die Annahme eines Langzeitgedächtnisses ("long-term memory") mit "praktisch unbegrenzte[r] Speicherkapazität und [..] sehr lange[r] Speicherdauer" im Sinne des älteren Dreispeichermodells von ATKINSON und SHIFFRIN rekurriert (1986, vgl. WINKEL, PETERMANN & PETERMANN 2006, S. 34-37).

Wie genau nun allerdings das Arbeitsgedächtnis in seinen einzelnen Kompenenten ("zentrale Exekutive", "phonologische Schleife" und "visuell-räumlicher Notizblock", vgl. Kap. 2.2.4) am Rechnen beteiligt ist und ob (und wenn ja, wie genau) daher umgekehrt Defizite in einzelnen Bereichen des Arbeitsgedächtnisses Probleme beim Rechnen und Rechnenlernen zumindest teilweise erklären können, darüber gibt es, wie LANDERL, BEVAN und BUTTERWORTH

(2004) in ihrem Forschungsüberblick bemerken, bislang "little agreement". So befanden etwa KOONTZ und BERCH (1996), dass die "forward digit span", also die Anzahl von ungeordneten (einstelligen) Zahlwörtern, die in vorgegebener Reihenfolge fehlerfrei reproduziert werden können, bei "dyscalculic children" signifikant niedriger sei als bei "normalen" Kindern. GEARY, HOARD und HAMSON (1999) hingegen fanden *keine* signifikanten Unterschiede bei der *"forward* digit span*"*, sehr wohl aber bei der "*backward* digit span", also dann, wenn "dyscalculic" bzw. "normal children" die vorgesprochene Zahlwörter in umgekehrter Reihenfolge wiedergeben mussten. Nun wird die "forward digit span" als Indikator für die Kapazität der "phonologischen Schleife" gewertet, die "backward digit span" hingegen als Maß der "zentralen Exekutive". TEMPLE und SHERWOOD (2002) untersuchten *beide* Komponenten des Arbeitsgedächtnisses – und fanden bei *beiden keinen* signifikanten Zusammenhang mit den gleichfalls erhobenen arithmetischen Leistungen der Kinder.

KAUFMANN und NUERK wiederum sehen in ihrem Forschungsüberblick

> *"converging evidence that the negative effects of poor working memory resources are not confined to complex arithmetic skills but are also likely to hamper fact retrieval"* (KAUFMANN & NUERK 2005, S. 157).

Die *pädagogische Relevanz* dieses sich gerade in den letzten Jahren immer weiter verzweigenden Forschungsbereiches ist schwer zu beurteilen, und zwar aus folgenden Gründen:

Zum einen wirken auch Studien zum Zusammenhang zwischen Arbeitsgedächtnis und Rechnen aus pädagogisch-didaktischer Perspektive mitunter wie Arbeiten aus einem "Paralleluniversum" (vgl. Kap. 2.11), in welchem die *geistige Tätigkeit* des Rechnens ohne Beteiligung von *Wille, Motivation*, vor allem aber ohne Bezug zur *konzeptuellen Wissensbasis* des Kindes abzulaufen scheint.

So stützen sich GEARY u.a. (1991; vgl. Kap. 2.5) bei ihrer Hypothese, dass gerade Defizite der *Arbeitsgedächtnis*kapazität für das Festhalten an Zählstrategien verantwortlich seien, auf SIEGLERS Modell, wonach wiederholtes zählendes Rechnen *eigentlich* quasi-automatisch zur Bildung von Gedächtnis-Assoziationen zwischen Aufgabe und Resultat führen müsse. Weil aber nun dieser Effekt bei "mathematically disabled children" *gerade nicht* eintritt, wird von den Autoren angenommen, dass *deren* Arbeitsgedächtnis die "Aufgabe" (etwa "drei plus vier") nicht bis zum Zeitpunkt der "Lösungsfindung" ("sieben") präsent halten könne und es *deshalb* zu keiner "long-term memory representation" komme (GEARY u.a. 1991, S. 795).

Wie bereits in Kap. 2.3.2 angemerkt, stützt hier ein mechanistisches Modell des Lernens das andere: SIEGLER sieht das Speichern der Grundaufgaben als *mechanische* Folge wiederholten

Zählens an; und GEARY und Kollegen finden in einer *gestörten Mechanik des Arbeitsgedächtnisses* den Grund, warum das Speichern bei manchen Kindern trotz wiederholten Zählens doch nicht klappt. Was das zählend rechnende Kind über Zahlen und Rechenoperationen denkt und weiß, wird dabei völlig ausgeblendet, ebenso seine Motivation, sein Interesse – Faktoren, deren Bedeutung nicht nur durch "pädagogische Erfahrung", sondern durch die Gedächtnispsychologie selbst in nach wie vor anerkannten Konzepten anerkannt wird:

– Die Bedeutung der "Elaboration", also des Herstellens von Assoziationen eines zu merkenden mit bereits gemerkten Inhalten (SCHNEIDER & BÜTTNER 2008, S. 489) für das Speichern im Langzeitgedächtnis, ist weithin unbestritten (vgl. WINKEL u.a. 2006, S. 31-36). In dieselbe Richtung weist das Konzept der *Verarbeitungstiefe* (CRAIK & LOCKHART 1972, zitiert nach ZIMBARDO & GERRIG 2004, S. 317f). Eine "tiefe Verarbeitung" oder Elaboration im Kontext der additiven Grundaufgaben wird wohl wesentlich erleichtert, wenn einzelne Basisfakten bereits gemerkt wurden (Bedeutung des *Vorwissens* für weiteres Merken, vgl. SCHNEIDER & BÜTTNER 2008, S. 490ff). An dieses Vorwissen kann aber in jedem Fall nur angeknüpft werden, wenn das Kind ein *tragfähiges Verständnis von Zahlen, Rechenoperationen und deren Zusammenhängen* aufgebaut hat, so dass dieses auch beim Auswendigmerken der Grundaufgaben wirksam wird.
– Das Elaborieren ist ein *aktiver* Prozess, das Kind muss der Bedeutung des zu merkenden Materials und den im Material vorliegenden Zusammenhängen bewusst Aufmerksamkeit widmen. Ein Kind, das (in der nicht-psychologischen Terminologie von GRAY, vgl. Kap. 2.9.3) eine Aufgabe wie "3+4" nur als "process" denkt, darin also lediglich einen "Auftrag zum Zählen" sieht, welcher vollständig erfüllt ist, sobald das "Ergebnis" ermittelt wurde: dieses Kind wird – unabhängig von seinen "Arbeitsgedächtnisressourcen" – schon alleine deshalb keine "Elaboration" des Zahlenfaktums "3+4=7" vornehmen, weil dieses Faktum im Bewusstsein des Kindes als solches gar nicht auftritt.
– Emotionen und damit Motivation spielen für das Behalten im Gedächtnis eine entscheidende Rolle (vgl. etwa LEPACH u.a. 2003, S. 14f); emotional Bedeutsames wird besser erinnert als neutrales (a.a.O., S. 21). Eine soeben (auf welche Weise auch immer) gelöste Grundaufgabe überhaupt als einen zu merkenden Inhalt zur Kenntnis zu nehmen, ist aber wohl die *Minimalbedingung* für einen emotionalen Bezug zu diesem Inhalt. Diese Bedingung wird nach GRAY durch zählendes Rechnen tendenziell gefährdet. Darüber hinaus schwindet, wie GERSTER bemerkt, bei "zunehmender Perfektion" zählender Lösungstechniken "das Bedürfnis, sich Zahlensätze zu merken". Schon alleine deshalb steige das "Repertoire auswendig gewusster Zahlensätze [..] nur sehr langsam oder gar nicht (GERSTER 1994, S. 45).

Mit all dem soll keineswegs bestritten werden, dass das "Kurzzeitgedächtnis" oder, nach dem aktuelleren Modell, das "Arbeitsgedächtnis" mit seinen "Subsystemen" am Rechnen in allen Phasen seiner Entwicklung (vgl. KRAJEWSKI 2008, S. 283f) wesentlich *beteiligt* ist; *keine*

Form des *Denkens* ist ohne Aufmerksamkeit und Gedächtnis *denkbar*. Insofern *können* natürlich auch Defizite im Bereich des Arbeitsgedächtnisses zu Schwierigkeiten beim Rechnen beitragen. Aber wie GRUBE richtigerweise unterscheidet, ist

> *"die Frage des* Einflusses *der Kapazität einer Arbeitsgedächtniskomponente auf die Rechenleistung [..] nicht identisch mit der Frage der* Beteiligung *der Komponente am Rechnen, da eine Komponente am Rechnen beteiligt sein kann, ohne dass ihre Kapazität die Rechenleistung begrenzt"* (GRUBE 2005, S. 109).

Deshalb ist es aber auch problematisch, das bloße Vorliegen eines (wie auch immer ermittelten) "Arbeitsgedächtnis-Defizits" ohne weiteres als *Ursache* eines parallel dazu erhobenen rechnerischen Defizites zu interpretieren. Dabei wird *zumindest* außer Acht gelassen, dass auch andere (möglicherweise bedeutsamere) Faktoren mit im Spiel sein können.

Und das ist vor allem auch *praktisch* bedeutsam, weil sich aus pädagogisch-didaktischer Perspektive ja die Frage stellt, wie Kindern mit reduzierter Arbeitsgedächtniskapazität geholfen werden kann. SIEGEL und RYAN befinden zwar, dass die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses im Alter zwischen sechs und 13 Jahren generell ansteige (SIEGEL & RYAN 1989, nach MOSER OPITZ 2007, S. 58). Es scheint aber nicht möglich zu sein, die individuelle Arbeitsgedächtniskapazität durch Training zu steigern. GEARY und HOARD (2001, S. 644) vermuten jedenfalls als Ursache für (auch das Langzeitgedächtnis betreffende) Gedächtnisdefizite "neurodevelopmental abnormalities" und in manchen Fällen gar "damages", also Hirnläsionen. KRAJEWSKI deutet dies als "*nicht* überwindbares Entwicklungsdefizit" (KRAJEWSKI 2003, S. 92). In einer Studie von ERICSSON und CHASE (1980) bewirkte ein Training der Zahlenspanne im Gesamtumfang von 230 Stunden *keine* Vergrößerung der Kapazität des (von den Autoren im Dreispeichermodell betrachteten) "Kurzzeitspeichers" (ERICSSON & CHASE 1980, zitiert nach PARKIN 2000, S. 230). Die von LEPACH u.a. (2003, S. 36ff) gebotene Übersicht über bislang entwickelte "Trainingsprogramme zur Verbesserung von Gedächtnisleitungen bei Kindern" umfasst mit einer Ausnahme nur Programme, die nicht auf Verbesserungen im Bereich der Kapazität des "*Kurzzeit*-" bzw. "*Arbeits*gedächtnisses" abzielen, sondern sich um die Vermittlung von Strategien für das Speichern im bzw. den Abruf aus dem *Langzeit*gedächtnis bemühen; ebendies beansprucht auch das von LEPACH u.a. selbst vorgelegte "REMINDER"-Training (a.a.O., S. 40ff). Die eine Ausnahme betrifft ein von BEE-GÖTTSCHE (1992) veröffentlichtes Programm zur "Legasthenieprävention", welches unter anderem auch beansprucht, das "verbale Kurzzeitgedächtnis" zu steigern (im Arbeitsspeicher-Paradigma also die Kapazität der "phonologischer Schleife", vgl. GRUBE 2005, S. 108). Gerade diesbezüglich ergaben Evaluationsstudien aber *keinen* signifikanten Leistungszuwachs infolge des Trainings (BEE-GÖTTSCHE 1993, nach LEPACH u.a. 2003, S. 38).

Reduziert sich also die pädagogische Relevanz der Studien zu möglichen Arbeitsgedächtnis-einflüssen darauf, neben Defiziten im Bereich anderer "basaler Teilleistungen" (siehe oben) ein weiteres *unspezifisches*, weil zwangsläufig über das Rechnen hinaus wirksames "Weißwarum" für Lernschwierigkeiten anzubieten, gegen das aber leider nichts unternommen werden könne? Das hängt wohl entschieden davon, ob überhaupt und in welcher Form bisherige und künftige Ergebnisse dieses Forschungszweigs mit den Befunden anderer Disziplinen (und anderer Bereiche der Gedächtnispsychologie selbst) in Zusammenhang gebracht und behauptete Einflüsse des Arbeitsgedächtnisses mit Bezug auf einzelne Rechenstrategien und deren unterschiedliche konzeptuelle Basis spezifiziert werden.

So vermuten zum Beispiel GEARY und SIEGLER selbst, dass Ableitungsstrategien dem Merken der (zunächst noch abgeleiteten) Aufgaben förderlich seien, und zwar gerade deshalb, weil die zu speichernden "Informationen" beim *raschen* Ableiten eher im Arbeitsgedächtnis präsent seien als beim zeitaufwändigeren zählenden Rechnen (GEARY u.a. 1996, vgl. Kap. 2.6). Das ist nun wieder sehr mechanistisch gedacht und berücksichtigt nicht, dass das Ableiten gerade auch im Sinne der "Elaboration" der zu speichernden Information bedeutsam sein kann, als bewusst-aktive "Vernetzung" in der Wissensbasis. In jedem Fall aber erscheint als pädagogisch-didaktische Konsequenz auch unter diesem Gesichtspunkt *gerade nicht* das (von SIEGLER propagierte; vgl. Kap. 2.3) Einüben von zählenden Lösungsstrategien plausibel, sondern das Erarbeiten von Verständnis für Ableitungsstrategien und ein daran anschließendes Training zur Steigerung der Geläufigkeit und Geschwindigkeit in der Anwendung dieser Strategien. Ob solche didaktisch-methodischen Designs aber tatsächlich geeignet sind, gerade auch Kindern mit eingeschränkter Arbeitsgedächtniskapazität in weiterer Folge auch das Auswendiglernen der additiven Basisfakten zu erleichtern (oder vielleicht gar erst zu ermöglichen), ist eine lohnende, bislang aber von der einschlägigen Forschung nicht gestellte Frage.

Weitere Forschungsdesiderate betreffen das Subsystem des "visuell-räumlichen Skizzenblocks". Dessen Rolle für das Rechnen ist selbst für aktuelle Vertreter dieses Forschungszweiges "auf Grund der unzureichenden Befundlage bisher schwer einzuschätzen" (GRUBE 2005, S. 110; ähnlich ROICK & HASSELHORN 2005, S. 237). Es scheint plausibel, dass diese Arbeitsgedächtniskomponente am "Visualisieren" beteiligt ist, ob darunter nun das Herausbilden visueller Repräsentationen von strukturierten Zahldarstellungen verstanden wird wie bei GERSTER (etwa 1994, S. 38f; ähnlich WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 75; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 245ff) oder aber das Erinnern des Schriftbildes von Zifferngleichungen wie bei HANISCH (1990, S. 38). Für beide Formen des "Visualisierens" werden Wirkungen auf das Automatisieren der Grundaufgaben angenommen; deren mögliche Abhängigkeit von Maßen des "räumlich-visuellen Skizzenblocks" wäre ein lohnender Gegenstand künftiger Studien zum Arbeitsgedächtnis.

2.12.2 "Einfaches Rechnen" und Langzeitgedächtnis

Die Speicherung von Inhalten im Langzeitgedächtnis wird durch "Lern- und Gedächtnisstrategien" gefördert (vgl. etwa PARKIN 2000, S. 73-85; WINKEL u.a. 2006, S. 32; LEPACH u.a. 2003, S. 23; SCHNEIDER & BÜTTNER 2008, S. 486-489). Am Beispiel des "Elaborierens" wurde dies bereits für das Merken von additiven Grundaufgaben ausgeführt (vgl. Kap. 2.12.1). Auch die in gedächtnispsychologischen Studien als förderlich erkannten Strategien des "verbalen Wiederholens" und des "kategorialen Organisierens" (vgl. LEPACH u.a. 2003, S. 23) lassen sich auf diesen Lernbereich anwenden. Wenn etwa BAROODY (2006), THORNTON (1978), VAN DE WALLE (2004) und viele andere anregen, dass die zu lernenden Grundaufgaben in "Aufgabenfamilien" organisiert werden sollten, also danach, mit welcher Ableitungsstrategie sie jeweils vorteilhaft zu lösen sind, dann ist dies durchaus auch als eine spezifische Form des "kategorialen Organisierens" von zu merkenden Inhalten zu verstehen.

Die besondere Bedeutung des Elaborierens und Kategorisierens besteht darin, dass diese nicht nur als *Merkstrategien*, sondern auch als *Strategien für den zielgenauen Abruf* wirksam werden können. Solche Abrufstrategien sind aber gerade bei diesem spezifischen Gedächtnisinhalt von größter Wichtigkeit. Denn die Basisfakten werden, wie ASHCRAFT in seinem Forschungsüberblick als "broad consensus" einschlägiger Studien festhält, letztlich durch eine "associative or network representation" im Langzeitgedächtnis gespeichert (ASHCRAFT 1995, S. 11; vgl. auch LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 38ff). In einem solchen "Netzwerk" werden die "Ergebniszahlen" der additiven (und auch multiplikativen) Grundaufgaben als "Knoten eines Netzes" vorgestellt, die durch mehr oder weniger stark ausgeprägte "Stränge" oder Verbindungswege mit den "Operanden" (Summanden bzw. Faktoren) und – je nach Grad der "Elaborierung" beim "Enkodieren" – wohl auch mit anderen Grundaufgaben verknüpft sind.

Nach dem Modell der "sich ausbreitenden Aktivierung" (vgl. GERSTER 1994, S. 39) führt nun die Aktivierung des Netzes an einer Stelle ("Eingabe" der Aufgabe) zur Aktivierung weiterer damit assoziierter Netzknoten und im erfolgreichen Fall letztlich zur Aktivierung und "Ausgabe" des richtigen Ergebnisses.

DEHAENE beschreibt "Vor- und Nachteile", die dieses "assoziative Gedächtnis" beim Abrufen von gespeicherten Inhalten habe. Der Vorteil bestehe darin, dass wir "aufgrund einer vagen Reminiszenz" in der Lage seien, "ein ganzes Knäuel von Erinnerungen" zu entwirren. Für das Lernen der arithmetischen Basisfakten sieht DEHAENE jedoch ein deutliches Überwiegen der Nachteile – in einem solchem Ausmaß, dass er, wie bereits erwähnt, sogar die grundsätzliche "Eignung des Gehirns" für das Lernen von "Additions- und Multiplikationstabellen" in Frage stellt (vgl. Kap. 2.11). Die hochgradige visuelle wie klangliche Ähnlichkeit der "Zahlenfakten" mache sie nämlich in besonderer Weise für "unangemessene Störfaktoren und Assoziationen" anfällig, die "unser Gedächtnis automatisch abruft, auch wenn wir sie lieber unterdrücken möchten". Als Beispiel nennt DEHAENE etwa die Assoziation des *Produkts* zweier Zahlen, wenn deren *Summe* abgerufen werden sollte, was zu Abruffehlern wie "2+3=6" führen könne (DEHAENE 1999, S. 148-152).

Was DEHAENE dabei offenbar nicht bedenkt ist die Möglichkeit, den "assoziativen Charakter" des Gedächtnisses beim Lernen der Grundaufgaben *produktiv zu nutzen*, wie dies etwa BAROODY in seiner "number sense view" vertritt (z.B. BAROODY 2006, vgl. Kap. 2.8). Die Assoziationen zwischen einzelnen Zahlenfakten werden dabei nicht unbewusst-unwillkürlichen "Interferenzen" (vgl. ZIMBARDO & GERRIG 2004, S. 316) überlassen, sondern *im Sinne einer Elaboration* der zu merkenden Einzelfakten ganz bewusst und gezielt als Lern- und in weiterer Folge auch als Abrufstrategie eingesetzt. Für letzteres empfehlen etwa HOPE, LENTZINGER und REYS ein gezieltes "Zuordnungstraining", bei dem Kinder für einzelne Additionen jeweils darüber nachdenken sollen, mit welcher der zuvor erarbeiteten Ableitungsstrategien diese vorteilhaft gelöst werden können (HOPE, LENTZINGER & REYS 1988, nach GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 376f; vgl. auch GERSTER 2005, S. 231f).

Auch in diesem Bereich ist die mangelnde Vernetzung von didaktischen und gedächtnispsychologischen Forschungsbemühungen zu bedauern: Wie bereits mehrfach angemerkt, wurde die von FachdidaktikerInnen postulierte förderliche Wirkung eines gezielten Strategieunterrichts auch für das Speichern im und für den Abruf aus dem Langzeitgedächtnis bislang nur in Ansätzen einer empirischen Überprüfung unterzogen. Auf der anderen Seite werden aber fachdidaktische Überlegungen zum Lernen der Grundaufgaben in kognitionspsychologischen Arbeiten in der Regel nicht oder nur am Rande berücksichtigt. Variablen des Unterrichts – wie etwa die Frage, ob und wie intensiv Ableitungsstrategien erarbeitet und trainiert wurden – werden in kognitionspsychologischen Studien dementsprechend zumeist nicht erhoben. (Eine gewisse Ausnahme stellt die mehrfach erwähnte Studie von GEARY u.a. 1996 dar.) Assoziationen zwischen einzelnen Basisfakten kommen in den Modellen der Gedächtnispsychologie daher im Wesentlichen nur als mögliche Interferenzen und Störfaktoren vor.

Pädagogisch relevant ist in jedem Fall die gedächtnispsychologische Erkenntnis, dass Gedächtnisstrategien von sechsjährigen Kindern selten spontan verwendet werden. Erst

> *"im Alter zwischen sechs und neun Jahren werden verschiedene Gedächtnisstrategien erprobt und zunehmend ohne fremde Anleitung eingesetzt"* (LEPACH u.a. 2003, S. 24).

Selbst eine so grundlegende Speicherstrategie wie das "rehearsal", also das (vielleicht auch nur leise oder "innerliche") verbale Wiederholen eines Inhaltes, der gemerkt werden soll, wird nach FLAVELL, BEACH & CHINSKY (1966, nach LEPACH u.a. 2003, S. 23) nur von etwa 60 Prozent der Sechsjährigen (aber etwa 85 Prozent der Zehnjährigen) *spontan,* also auch ohne direkte Unterweisung oder gezieltes Vormachen, genutzt. Andererseits konnten etwa SODIAN, SCHNEIDER und PERLMUTTER (1986, nach LEPACH u.a. 2003, S. 24) zeigen, dass selbst eine anspruchsvolle Gedächtnisstrategie wie das "kategoriale Organisieren" bereits mit Vierjährigen erarbeitet und erfolgreich trainiert werden kann. Als didaktische Konsequenz sollten also im mathematischen Erstunterricht dort, wo es um das Auswendigmerken von Fakten geht, auch Gedächtnisstrategien mit allen Kindern thematisiert und nötigenfalls gezielt erarbeitet bzw. gefestigt und verfeinert werden.

Unklar sind dagegen die pädagogische Relevanz wie auch der Erkenntnisgewinn des Befundes, dass der "*schnelle Abruf von Zahlenfakten aus dem Langzeitgedächtnis* [Hervorhebungen im Original]" eine "Kovariate schwacher Rechenleistungen" sei, wie dies KRAJEWSKI (2008, S. 284) unter Berufung auf GEARY, HAMSON und HOARD (2000), JORDAN, HANICH und KAPLAN (2003) und KRAJEWSKI und SCHNEIDER (2006) festhält. "Schwache Rechenleistungen" bestehen nun einmal auch darin, dass Zahlenfakten (wenn überhaupt) nur langsam aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden können. Warum das so ist, gälte es gerade zu erklären. Wenn als Erklärung dafür nun ein "direktes Defizit beim Abruf von Fakten aus dem semantischen Netzwerk" herangezogen wird (so KRAJEWSKI 2008, S. 284 über GEARY u.a. 2000), so ist das eine offenkundige Tautologie.

In den Bereich möglicher Gedächtniseinflüsse gehört auch der "Zahlenspeed", den KRAJEWSKI (2005, S. 63-65) als "unspezifischen Prädiktor" mathematischer Leistungen anführt. "Zahlenspeed" steht für ein Konglomerat unterschiedlicher Teilfähigkeiten, die ihrem *kognitiven Inhalt* nach mit *Zahlen* und dem *Zahlverständnis* zum Teil gar nichts, zum Teil nur bedingt zu tun haben: Was unter diesem Titel erhoben wurde, war einerseits die Geschwindigkeit bei der Benennung von *Würfelbildern*. Gemessen wurde also eine Mischung aus Simultan- und Gestalterfassung, die keinen klaren Rückschluss auf das *Zahlverständnis* eines Kindes erlaubt (vgl. Kap. 2.10.1). Zweitens geht in den "Zahlenspeed" die Geläufigkeit im Lesen von *Ziffern* ein. Diese werden von KRAJEWKSI zwar "Zahlbilder" genannt, ihre Kenntnis ist aber tatsächlich natürlich keine Komponente des *Zahl*wissens, sondern der Vertrautheit mit *Symbolen*. Drittens mussten die Zahlen von eins bis zehn, die in Ziffernform auf einem Stück Papier im Durcheinander angeordnet waren, möglichst rasch in aufsteigender Reihenfolge mit einem Bleistift verbunden werden. Das erfordert neben (erneut) *Ziffernkenntnis* und (immerhin) dem Wissen um die *Zahlenreihe* offenkundig auch in hohem Maße *feinmotorische und visuelle Fähigkeiten* (vgl. KRAJEWSKI 2003, S. 135f, dazu die Testaufgaben S. 244f).

Angesichts solcher Heterogenität der als "Zahlenspeed" erhobenen Leistungen fällt es schwer, die von KRAJEWSKI erhobenen statistischen Zusammenhänge inhaltlich in irgendeiner Weise sinnvoll zu interpretieren.

2.12.3 Aktuelle Studien zu "Prädiktoren" späterer Mathematikleistungen

Die im voranstehenden Abschnitt kritisierte Kategorie "Zahlenspeed" ist nur eines von mehreren Konstrukten, die in der vielzitierten Studie von KRAJEWSKI (2003) als "Prädiktor" der Mathematikleistungen ausgewiesen werden. Als "spezifische Pradiktoren" nennt KRAJEWSKI das "mengen und zahlenbezogene Vorwissen" von Kindern bei Schuleintritt (KRAJEWSKI 2005, S. 63); und auch darunter fasst sie eine Reihe von recht unterschiedlichen Teilfähigkeiten zusammen.

Unter dem Titel *"Mengenvorwissen"* wurden unter anderem die "Fähigkeit zur Seriation" und die "Invarianz der Anzahl" erfasst. Erstere wurde mit Aufgaben überprüft, bei denen die Kinder tatsächlich *Anzahlen* von Punkten ermitteln und ordnen bzw. den *Flächeninhalt* von Blumenabbildungen *visuell vergleichen* mussten. Zur Überprüfung der Invarianz wurden in Anlehnung an PIAGET unter anderem zwei parallele Reihen von je sechs Holzwürfeln gebildet, wobei die Abstände zwischen den einzelnen Würfeln zunächst in beiden Reihen identisch und die beiden Reihen daher gleich lang waren. Dann wurden die Würfel der einen Reihe zusammengeschoben; die Kinder mussten nun beurteilen, ob in der (nun kürzeren) Reihe "weniger, mehr oder genau so viele" Würfel seien wie in der (nun längeren) zweiten Reihe.

Unter dem Titel "Zahlenvorwissen" wurden unter anderem Fertigkeiten im Aufsagen der Zahlwortreihe vorwärts und rückwärts (von "zehn" weg) erhoben sowie das "arabische Zahlwissen", worunter KRAJEWSKI die Kenntnis der *Ziffern* und auch schon der *Ziffernschreibweise zweistelliger Zahlen* versteht. Miterfasst wurde unter diesem Titel aber auch Vertrautheit im Umgang mit Geld. Schließlich wurde als Teil des "Zahlenvorwissens" unter dem Titel "Rechenfertigkeiten" tatsächlich eher das Verständnis für "word problems" erfasst. Für die Durchführung der dabei geforderten Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn stand mehrheitlich Zählmaterial zur Verfügung, wobei aber die Lösungsstrategie nicht festgehalten wurde (KRAJEWSKI 2003, S. 233-242).

Für diese beiden Konstrukte des "Mengen- und Zahlenvorwissens" ermittelte KRAJEWSKI "erstaunlich hohe Zusammenhänge mit den Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit" (KRAJEWSKI 2005, S. 63). So korreliere der

> *"Gesamtwert im Mengen- und Zahlenvorwissen [..] zu .68 mit den Mathematikleistungen am Ende der ersten Klasse und noch zu .54 mit den Leistungen am Ende der vierten Klasse. Dieser Zusammenhang blieb auch dann erhalten, wenn man zudem die Intelligenz der Kinder heranzog und die Korrelationen zwischen Mengen-Zahlenvorwissen und Mathematikleistungen um die Intelligenz der Kinder bereinigte"* (a.a.O., S. 63).

Krajeweski interpretiert dies dahingehend, dass die Intelligenz sich nur "indirekt über das Mengenvorwissen und das Zahlenvorwissen" (und über die von ihr gleichfalls als "unspezifischer" Prädiktor genannten Gedächtnisfähigkeiten, siehe Kap. 2.12.2) auf die späteren Mathematikleistungen auswirke (a.a.O., S. 64). Das steht im Einklang mit Ergebnissen der SCHOLASTIK-Studie, wonach zwischen Intelligenz und Mathematikleistungen zwar ein statistisch bedeutsamer Zusammenhang bestehe, die "mathematische Problemlösekompetenz in der Sekundarstufe" aber "eher das Ergebnis des akkumulierten mathematischen Wissens als der aktuellen Intelligenz" sei (STERN 2003, S. 127; ähnlich FRITZ & RICKEN 2008, S. 20).

Zu ganz ähnlichen Ergebnissen gelangt die Längsschnittstudie von WEIßHAUPT, PEUCKER und WIRTZ (2006): Auch hier wurde einerseits das "mathematische Vorwissen" (mit ähnlichen Aufgaben wie das "mengen- und zahlenbezogene Vorwissen" bei KRAJEWSKI), andererseits die Intelligenz erhoben. Und auch diese Studie kommt zum Schluss, dass das *fachspezifische Vorwissen* zu Schulbeginn "eine sehr gute Vorhersage der schulischen Rechenleistung" (in diesem Fall gemessen am Ende des ersten Schuljahres) ermögliche, Maße der *allgemeinen Intelligenz* dagegen "keinen darüber hinausgehenden inkrementellen Vorhersagewert" aufwiesen (a.a.O., S. 236).

Zu einer unter fachdidaktischer Perspektive bedeutsamen Relativierung und Präzisierung dieser Ergebnisse gelangt DORNHEIM in ihrer Prädiktorstudie: Demnach ist das "spezifische *Zahlen*-Vorwissen" (und eben nicht in derselben Weise auch das *Mengen*-Vorwissen oder das *Ziffern*-Vorwissen) der "Hauptprädiktor der Rechenleistung der 1. und 2. Klasse der Grundschule" (vgl. DORNHEIM 2008, S. 526). Als "Vorläuferfertigkeiten der Rechenleistung" wurden in dieser Studie also vor allem "die Beherrschung der Zahlwortreihe, das schnelle Erfassen strukturierter Anzahlen und komplexe Leistungen in Verbindung mit dem Teile-Ganzes-Konzept" erfasst (DORNHEIM 2008, S. 528).

Inwieweit tragen solche Studien zu einem besseren Verständnis der Entwicklung des mathematischen Denkens bei? Grenzen sind diesbezüglich zunächst einmal durch die Art und Weise gezogen, wie "mathematische Leistung" hier ermittelt wird. In den genannten Studien wurde diese jeweils an den im DEMAT 1+ (KRAJEWSKI, KÜSPERT & SCHNEIDER 2002) erreichten Punktewerten gemessen; bei KRAJEWKSI 2003 kam zusätzlich eine Vorversion des DEMAT 2+ (KRAJEWSKI, LIEHM & SCHNEIDER 2004), bei DORNHEIM 2008 gleichfalls der DEMAT 2+ zum Einsatz. Dabei handelt es sich um standardisierte Gruppentests, die, wie KRAJEWSKI selbst festhält, keine Aussage erlauben über die "Strategien, welche die Kinder beim Lösen der Aufgaben einsetzten" (KRAJEWSKI 2003, S. 212).

Auch die bei KRAJEWSKI zusätzlich erhobene "Schnelligkeit des Abrufes arithmetischer Fakten" (a.a.O., S. 141) lässt keinen präzisen Rückschluss auf die Rechenstrategien der Kinder zu. Wie dargestellt, mögen gerade im ersten Schuljahr routinierte "zählende Rechner" bei solchen Geschwindigkeitsmessungen besser abschneiden als Kinder, die Ableitungsstrategien verwenden und darin vermutlich höheres mathematisches Verständnis zum Ausdruck bringen (vgl. die Kritik am "chronometrischen Ansatz" in Kap. 2.2.3). Freilich aber steigt durch diese (auch im DEMAT erfolgende) Betonung des Faktors "Zeit" als einem wesentlichem Kriterium von "Leistung" die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine (wenn auch noch so unscharfe; siehe oben) Variable wie "Zahlenspeed" sich dann als "Prädiktor" ausweisen lässt.

Die wesentliche Einschränkung der pädagogischen Relevanz solcher Studien liegt aber darin, dass sie zwar mit quantitativen Verfahren "Prädiktoren" ausweisen, aber deren Rolle im arithmetischen Lernprozess qualitativ nicht weiterverfolgen können. Doch erst wenn wir wissen, auf welche Weise und bei welchen konzeptuellen und/oder prozeduralen Entwicklungsschritten eine als "Prädiktor" ausgewiesene frühe Kompetenz im Verlauf des weiteren mathematischen Lernens (wenn überhaupt) wirksam wird, können wir dies allenfalls bei der Gestaltung des mathematischen Erstunterrichts bzw. der Frühförderung berücksichtigen.

Freilich: Eine solche qualitative Einordnung ist von vornherein ausgeschlossen, wenn in einem "Prädiktor" inhaltlich höchst unterschiedliche Teilaspekte kindlichen Wissens zu einer statistischen Größe vermengt werden, wie dies in der Studie von KRAJEWSKI zu kritisieren ist. So ist etwa *eine* Teilaufgabe zum "Mengenvorwissen" bei KRAJEWSKI (wie auch beim "mathematischen Vorwissen" bei WEIßHAUPT u.a.) die "Invarianz der Anzahl". Diese wurde, wie oben dargestellt, in Anlehnung an PIAGET überprüft. Nun wurde aber "kaum ein Experiment von PIAGET [..] so häufig diskutiert und auch repliziert wie die Invarianzaufgaben" (MOSER OPITZ 2001, S. 48). Die Fachdidaktik hat sich dabei zwischenzeitlich zu dem "Forschungskonsens" (a.a.O., S. 51) durchgearbeitet, dass a) höchst unsicher ist, was überhaupt in solchen Aufgaben gemessen wird und b) der Erfolg eines Kindes in solchen Aufgaben keine notwendige Voraussetzung für den Erwerb eines tragfähigen Zahlbegriffs darstellt (vgl. MOSER Opitz 2001, S. 48-59).

Diese Kritik am Konzept der "Invarianz" wird von KRAJEWSKI in ihrem Überblick über "psychologische Ansätze" zwar referiert (KRAJEWSKI 2003, S. 40-43, 57f, 67f). Dennoch bestimmt sie für ihre eigene Studie das "Mengenvorwissen" *zum Teil* eben auch über eine Variante des PIAGET-Versuchs. In *dieselbe* Prädiktorvariable fließt bei KRAJEWSKI über die "Käferaufgabe" (a.a.O., S. 233) aber auch ein, ob ein Kind *Anzahlen* von sechs, sieben und acht Punkten unterscheiden und ordnen kann, wobei die Anordnung der Punkte sowohl durch zählende wie auch quasi-simultane Anzahlerfassung möglich ist.

Nun soll aber *beides in gleicher Weise* als Teil desselben "Prädiktors" die spätere Mathematikleistung vorhersagen. Wie soll das inhaltlich interpretiert, welche didaktischen Schlussfolgerungen sollen daraus gezogen werden? Spricht es dafür, im Kindergarten bzw. zu Schulbeginn an der Invarianz zu arbeiten? Dagegen steht der (mit zahlreichen Studien und guten Argumenten begründete) Konsens der Fachdidaktik, den GINSBURG (1989, S. 97) mit dem Rat "Don't waste time on the training of conservation!" zusammenfasst (vgl. auch MOSER OPITZ 2001, S. 51). Oder erweist sich der "Prädiktor" vielleicht gerade deshalb als solcher, weil darin über die Käferaufgabe auch anzahlverständiges Zählen miterfasst wurde? Soll also eher letzteres gefördert werden, und das "Invarianztraining" zur Gänze unterbleiben? Die qualitative Widersprüchlichkeit des "Prädiktors" vereitelt jede pädagogisch-didaktische Nutzanwendung.

Ähnlich uneinheitlich und daher vielfältig interpretierbar ist bei KRAJEWSKI der Prädiktor "Zahlenvorwissen" bestimmt: Die fachdidaktisch-entwicklungspsychologische Forschung zur Entwicklung von Zahlverständnis und Rechenfähigkeiten erlaubt sehr differenzierte Aussagen darüber, *inwiefern* das *Beherrschen der Zahlwortreihe* eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Rechnen darstellt. Diese Forschung macht auch klar, dass die in KRAJEWSKIS Studie den Kindern gestellte Frage, *welche Zahl "genau nach der 5"* kommt, uns *keinen* Aufschluss darüber liefert, ob ein Kind auch weiß, was "um 1 mehr als 5" ist (vgl. Kap. 2.10). In KRAJEWSKIS "Zahlenvorwissen" sind nun aber unter anderem diese beiden Aspekte von Zahlwissen erfasst und im Punktewert konfundiert mit der *Ziffern*kenntnis und der Kompetenz im Lösen einfacher "Rechengeschichten". Alles zusammen ergibt *einen* "Prädiktor" späterer Mathematikleistungen; aber was davon in welcher Gewichtung, und warum?

Dass etwa ein Kind, das sich (in welchem Kontext auch immer) früh für *Zahlen* interessiert, mit größerer Wahrscheinlichkeit (aber nicht notwendiger Weise) auch bereits früh *Ziffern* unterscheiden kann, ist plausibel. Statistisch mag deshalb frühe Ziffernkenntnis als Prädiktor (oder Teil eines Prädiktors) erscheinen. Dennoch sagt Ziffernkenntnis oder –unkenntnis nichts darüber aus, was ein Kind über *Zahlen* denkt. Anders als die römischen Zahlzeichen sind die indisch-arabischen Ziffern ja gänzlich abstrakte Symbole. Die *Ziffer* 8 enthält beispielsweise (anders als das Zeichen VIII) keinen Hinweis darauf, dass die *Zahl* acht aus den Zahlen fünf und drei besteht. Zu Recht wundert sich deshalb GERSTER darüber, dass in Broschüren von Schulbehörden unter "differenzierte Erarbeitung der *Zahl* acht" Ausführungen zur Erarbeitung der *Ziffernschreibweise* zu finden sind (GERSTER 2009a, S. 253). Welche Bedeutung sollen wir nun also dem Ziffernlernen in der Frühförderung bzw. im Erstunterricht beimessen, wenn wir erfahren, dass das "arabische Zahlwissen" zu Schuleintritt sich statistisch als Prädiktor der späteren Mathematikleistung erweisen lässt?

Zum einem sind die "Prädiktoren" bei KRAJEWSKI also inhaltlich uneinheitlich bis widersprüchlich bestimmt, und sie umfassen zum Teil auch Kompetenzen, die für das weitere mathematische Lernen tatsächlich von untergeordneter Bedeutung sind, wie sich bei qualitativer

Analyse unschwer erkennen lässt. Aber selbst bei jenen Prädiktor-Anteilen, die sich (wie etwa die Sicherheit in der Zahlwortreihe) auch qualitativ als *wesentliche* Voraussetzung darstellen lassen, ist festzuhalten, dass es sich dabei eben auch nur um eine *Voraussetzung* handelt – und noch nicht um erfolgreiches mathematische Lernen selbst. Andere Voraussetzungen, die beim Lernen vermutlich eine mindestens so bedeutende Rolle spielen (wie die Qualität des Unterrichts; das aktuelle Verständnis von Zahlen und Rechenoperationen; die Motivation des Kindes; sein Umgang mit Schwierigkeiten, und vieles mehr) sind in den vorliegenden "Prädiktorstudien" gar nicht erfasst und statistisch wohl auch schwer zu erfassen.

Was aber schließlich aus all diesen Voraussetzungen wird, entscheidet sich erst in deren konkretem Zusammenspiel im Lernprozess. Um Kinder in diesem Prozess zu unterstützen, hilft uns das Wissen, dass es sich bei diesem und jenem um einen "Prädiktor" handle, selbst dann nicht weiter, wenn im Prädiktor tatsächlich wesentliche inhaltliche Voraussetzungen erfasst sind. Dafür müssen wir genau wissen, *in welcher Weise* diese und jene Voraussetzung im Prozess des Lernens tatsächlich wirksam wird (oder im Einzelfall auch nicht). Und zum Glück wissen wir da ja auch schon das eine oder andere, wie die Darstellung des diesbezüglichen Forschungsstandes in Kapitel 2.10 (bei allen offenen Fragen) deutlich gemacht hat.

Wenn sich also KRAJEWSKI (wie auch WEIßHAUPT u.a. 2006, S. 244) in der Schlussfolgerung, dass durch eine "Frühförderung mathematischer Kompetenzen [...] schulischen Rechenschwierigkeiten [...] frühzeitig *vorgebeugt* werden kann" (KRAJEWSKI 2005, S. 68), mit aktuell akzentuierten Bemühungen der Grundschuldidaktik trifft (vgl. etwa WITTMANN 2003; STEINWEG 2008; GRÜßING & PETER-KOOP 2006), dann muss klar festgehalten werden: Prädiktorstudien können zur Klärung der didaktisch entscheidenden Frage, *welche* Kompetenzen von Kindergartenkindern *in welcher Weise* gefördert werden sollten, wenig beitragen.

2.13 Zusammenfassung und Formulierung offener Fragen

Die vorliegende Forschung zur Entwicklung kindlicher Rechenstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben lässt sich in einigen wesentlichen, darin weitgehend übereinstimmenden Befunden wie folgt zusammenfassen:

– Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben verläuft bis ins Erwachsenenalter hinein individuell höchst unterschiedlich.
– Kinder verwenden in der Regel *in jeder Phase* dieser Entwicklung (zumeist bis ins Erwachsenenalter hinein) *jeweils mehr als nur eine* Strategie, sei es, dass sie Aufgaben verschiedenen Typs auch mit verschiedenen Strategien lösen, sei es, dass sie Aufgaben desselben Typs oder sogar dieselbe Aufgabe einmal mit dieser, das nächste Mal mit jener Strategie zu bewältigen versuchen.

- Dennoch durchlaufen die meisten Kinder eine Abfolge von Phasen, in denen sich jeweils eine bestimmte *Hauptstrategie* identifizieren lässt.
- Die Entwicklung von Rechenstrategien ist eng verflochten mit der Entwicklung von Denkweisen zu Zahlen, Rechenoperationen und operativen Zusammenhängen. Ein und dieselbe Strategie kann allerdings einhergehen mit unterschiedlichen Konzepten, nicht nur im banalen Fall des Auswendigwissens, das für sich genommen ohnedies keinen Rückschluss auf das Zahl- und Operationsverständnis eines Kindes zulässt. Bisherige Versuche, die Entwicklung im Bereich des Zahl- und Operationsdenkens in einem "allgemeingültigen Modell", in einer Hierarchie von einheitlich zu durchlaufenden Stufen abzubilden, sind wenig überzeugend ausgefallen. Kinder gelangen offenbar auf höchst unterschiedlichen Wegen zu ihren auch in diesem Bereich gar nicht einheitlichen (vorläufigen) Konzepten.

Bezüglich der genannten Phasen und den ihnen zugehörigen Hauptstrategien lässt sich zusammenfassend das Folgende festhalten:

- Die *früheste* Hauptstrategie ist in der Regel das *Alleszählen.*
- Auch ohne gezielte Unterweisung gehen die meisten Kinder im Laufe der Zeit zu Strategien des *Weiter*- bzw. *Rückwärtszählens* über.
- Von so gut wie allen Kindern werden *neben* dem Anwenden von Zählstrategien zumindest einzelne Aufgaben schon früh *auswendig gemerkt* und in weiterer Folge durch *Faktenabruf* gelöst. Faktenabruf wird bei vielen Kindern im Laufe der Zeit zur Hauptstrategie. In welchem (Schul-)Alter dies bei welchen Kinderanteilen erfolgt, ist national sehr unterschiedlich, ebenso, wie groß der Anteil jener Kinder ist, die auch in fortgeschrittenem Alter (Untersuchungen reichen bis in die achte Schulstufe) noch in einem hohen Maße an Zählstrategien festhalten. Diese Unterschiede sind vermutlich nicht nur, aber auch durch nationale Unterschiede in der Didaktik und Methodik des Rechenunterrichts begründet.
- Viele Kinder lösen im Laufe ihrer Entwicklung vorübergehend oder auch dauerhaft manche Grundaufgaben durch *Ableitungsstrategien*, sie erschließen also das Ergebnis dieser Aufgaben aus anderen, bereits auswendig gemerkten. Wie oft und von welchem Anteil der Kinder Ableitungsstrategien genutzt werden, hängt offenbar stark vom Unterricht ab. Zumindest manche Kinder scheinen Ableitungsstrategien ohne gezielte Förderung gar nicht oder nur ganz vereinzelt und/oder erst in höheren Schulstufen zu nutzen.

Vor diesem Forschungshintergrund sollen nun aus den zahlreichen offenen Fragen jene herausgegeriffen werden, zu deren Beantwortung die vorliegende Arbeit einen Beitrag zu leisten versucht. Dabei soll auch jeweils deutlich gemacht werden, worin die pädagogische Relevanz gerade dieser Fragen besteht.

2.13.1 Das spezifische Interesse am *österreichischen* Status quo

Eine Reihe von Studien (etwa ADAMS & HITCH 1997, GEARY u.a. 1996, FUSON & KWON 1992) belegt teils massive nationale Unterschiede im Bereich der Entwicklung von Rechenstrategien zu den additiven Grundaufgaben. Zusammenhänge mit (national unterschiedlichen) Traditionen der Didaktik und Methodik des Erstunterrichts, aber auch der vor- und außerschulischen Förderung wie auch sprachliche Einflüsse scheinen als Erklärung plausibel. Vor diesem Hintergrund ist zu bedauern, dass aus dem deutschsprachigen Raum nur wenige einschlägige Untersuchungen vorliegen: von fachdidaktischer Seite PADBERG 1993 und PADBERG 1994, zwei in qualitativer Hinsicht verdienstvolle Studien mit allerdings sehr kleinen, keineswegs repräsentativen Stichproben und einer sehr eingeschränkten Auswahl an Rechenaufgaben (vgl. Kap. 2.10.9); von kognitionspsychologischer Seite die methodisch fragwürdigen Studien von GRUBE 2006 (vgl. Kap. 2.2). Aus Österreich liegt keine einzige derartige Untersuchung vor. Es fehlt somit wesentliches Grundlagenwissen für die Gestaltung des mathematischen Erstunterrichts in *österreichischen* Grundschulen.

Daraus ergibt sich für die vorliegende Arbeit die folgende, bei allen weiteren Spezifizierungen durchgehend zu beachtende Forschungsfrage:

– Wie entwickeln sich die Lösungsstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben gerade bei *österreichischen* Kindern?

Diese Frage soll, wie alle folgenden Spezifizierungen, im Rahmen der vorliegenden Arbeit *nur für das erste Schuljahr* beantwortet werden. Die zeitliche Eingrenzung ist schmerzlich mit Blick auf den Forschungsgegenstand, denn die Entwicklung der Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben erstreckt sich nach allen vorliegenden Arbeiten in der Regel über einen wesentlich größeren Zeitraum. Sie ist aber aufgrund der zur Verfügung stehenden Ressourcen unumgänglich.

2.13.2 Angemessene Berücksichtigung des Faktors "Unterricht"

Ein wesentlicher Mangel vieler Studien zur Entwicklung des Rechnens besteht in der ungenügenden Berücksichtigung möglicher Einflüsse durch schulischen Unterricht. Sofern der Unterricht der untersuchten Kinder überhaupt miterfasst wurde, erfolgte dies oft nur sehr oberflächlich oder unter rein quantitativen Gesichtspunkten (etwa: Anzahl der Mathematikeinheiten bei GEARY u.a. 1996). Wesentliche Fragen bleiben in der Mehrzahl der Studien unbeantwortet, etwa: Wie wurde im Unterricht mit zählenden Strategien umgegangen? Welche Materialangebote wurden den Kindern gemacht? Wurden Ableitungsstrategien gezielt unterrichtet? Auf welche Weise?

Ist aber das Unterrichtsgeschehen nicht oder nur unzureichend bekannt, lassen sich Angaben zu Häufigkeiten einzelner Strategien kaum sinnvoll interpretieren. Denn Kinder entwickeln ihre Strategien nicht unbeeinflusst von den Aufgaben, Anregungen, Vorbildern und Rückmeldungen, die sie schon vor und verstärkt nach ihrem Eintritt in die Schule von Erwachsenen erfahren.

Daraus ergeben sich für die vorliegende Arbeit folgende Forschungsfragen:
- In welcher Beziehung stehen die von Kindern bei additiven Grundaufgaben bis zum Ende des ersten Schuljahres gezeigten Lösungsstrategien zu jenen Strategien, die im Unterricht explizit erarbeitet werden (sofern überhaupt bestimmte Lösungsstrategien explizit Gegenstand des Unterrichts sind)?
- In welcher Beziehung stehen diese Lösungsstrategien generell zur Didaktik und Methodik des mathematischen Erstunterrichts, den diese Kinder erhalten, also zu den expliziten und impliziten Zielen dieses Unterrichts und den in diesem Unterricht eingesetzten didaktischen Mitteln?

2.13.3 Möglichst differenzierte Erfassung der Strategien

Viele der vorliegenden Studien erfassen die kindlichen Lösungsstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben nicht ausreichend differenziert, sowohl bezüglich der verschiedenen Aufgaben bzw. Aufgabentypen als auch bezüglich der Strategien:

Nur wenige Studien weisen die Lösungsstrategien auch getrennt für einzelne Aufgaben oder zumindest "Aufgabengruppen" ("fact bundles" bei CUMMING & ELKINS 1999) aus. Nun scheint es aber plausibel, dass manche Aufgaben bzw. Aufgabentypen früher und häufiger automatisiert werden als andere. Für die Verdoppelungsaufgaben bis zumindest 5+5 geht dies etwa aus den Befunden von CUMMING & ELKINS klar hervor. Für Additionen mit der Summe 10, die CARPENTER und MOSER (1984) gleichfalls als bevorzugte Ableitungsbasis nennen, ist das weit weniger klar, wobei freilich anzunehmen ist, dass auch hierbei sehr viel vom Unterricht abhängt. Nun wurden aber speziell die Verdoppelungsaufgaben in vielen Studien (so etwa bei CARPENTER & MOSER 1984, GEARY & BROWN 1991, GEARY, BROWN & SAMARANAYAKE 1991) bewusst nicht gefragt, mit dem Argument, dass bei diesen Aufgaben eine untypische Strategieverteilung zu erwarten sei. Gerade deshalb wäre aber genaueres Wissen in diesem Bereich notwendig. Denn wenn wir besser verstehen wollen, warum manche Kinder Ableitungsstrategien nutzen und andere dies nicht tun, müssen wir auch im Detail darüber Bescheid wissen, welche Aufgaben diese Kinder jeweils bereits automatisiert haben. Nur Aufgaben, die selbst bereits zu einem früheren Zeitpunkt automatisiert wurden, können ja überhaupt als Ableitungsbasis für andere Aufgaben dienen. Wenn nun ein Kind *nicht* ableitet, kann dies daran liegen, dass es den Ableitungszusammenhang nicht erfasst hat; es kann aber auch einfach daran liegen, dass es über keine Ableitungsbasis verfügt (was theoretisch sowohl mit vorhandener wie auch mit fehlender Einsicht in einen Ableitungszusammenhang kombiniert sein kann).

Häufig wurden die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn nicht gesondert ausgewertet (etwa bei GEARY & BROWN 1991, GEARY, BROWN & SAMARAYANAKE 1991, OSTAD 1998), zuweilen wurden auch nur Aufgaben mit Zehnerübergang gefragt (etwa bei PADBERG 1993). Um nun aber die Strategien eines Kindes bei Aufgaben mit Zehnerübergang beurteilen zu können, ist es notwendig, sie mit den Strategien desselben Kindes im Zahlenraum bis zehn zu vergleichen. Denn wenn ein Kind über kein Faktenwissen im Zahlenraum bis zehn verfügt, wird es auch bei Zehnerübergängen vermutlich nur zählend rechnen können. Umgekehrt ist aber denkbar, dass ein Kind die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn automatisiert hat, aber über keine Strategien verfügt, um auch Zehnerübergänge nicht-zählend zu lösen.

Nur in wenigen Studien wird getrennt ausgewiesen, *welche* "derived fact strategies" von den Kindern *auf Grundlage welcher Einsichten und Überlegungen* verwendet werden. Wie die Analyse in Kap. 2.10 ergab, unterscheiden sich einzelne Ableitungsstrategien aber ganz erheblich hinsichtlich der geforderten Einsichten in Zahlen und Zahlzusammenhänge. Zudem kann der Grad an Einsicht, auf dem Strategien wie das Vertauschen der Summanden oder das "Verdoppeln plus eins" ergriffen werden, erheblich variieren. Dabei ist wieder zu beachten, das gerade auch in diesem Bereich Befunde über kindliche Strategien sinnvoll nur dann interpretiert werden können, wenn auf der anderen Seite auch erhoben wird, ob und auf welche Weise die jeweiligen Strategien Thema des Unterrichts waren.

Erst auf der Basis einer auch in Detailfragen differenzierenden Erfassung der Lösungsstrategien lassen sich, wenn überhaupt, unterschiedliche "Strategieprofile" von Kindern identifizieren. Denn bei einer solchen Klassifizierung kann es ja nicht darum gehen, die Vielfalt kindlicher Strategien unter ein vorgefasstes Kategoriensystem zu subsumieren, wie dies bei PUTNAM u.a. (1990) und CANOBI (2004) versucht wurde. Vielmehr kommt es darauf an, solche Kategorien und "Strategietypen" aus der Vielfalt der tatsächlich angewandten Strategien unter Beachtung der jeweils zu Grunde liegenden Denkweisen erst noch zu entwickeln.

Daraus ergeben sich für die vorliegende Arbeit folgende Forschungsfragen:

- Wie entwickeln sich die additiven Lösungsstrategien der Kinder bis Ende des ersten Schuljahres mit Bezug auf einzelne Aufgaben bzw. Aufgabengruppen?
- Werden Aufgaben, die sich unter arithmetischen Gesichtspunkten als "strukturgleich" identifizieren lassen (etwa: Verdoppelungen, Nachbaraufgaben der Verdoppelungen, Additionen mit 1 bzw. 2 als Summanden, Subtraktionen mit der Differenz 1, Halbierungsaufgaben usw.), von einem Kind üblicherweise auch mit gleichen Strategien gelöst?

– Werden bestimmte Aufgaben bzw. Aufgabengruppen üblicherweise früher automatisiert als andere?
– Wie konsistent sind Kinder in der Anwendung von Ableitungsstrategien, d.h. wenden sie eine bestimmte Ableitungsstrategie (wenn überhaupt) durchgängig bei jenen Aufgaben an, die sich mithilfe dieser Strategie vorteilhaft lösen lässt?
– Lassen sich unter den Kindern im Laufe des ersten Schuljahres "Strategietypen" identifizieren, also Gruppen von Kindern, die hinsichtlich der Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben klar darstellbare Gemeinsamkeiten aufweisen? Wenn ja, in welcher Beziehung stehen diese Gemeinsamkeiten auf der Ebene der Strategien (Prozeduren) zu den Konzepten dieser Kinder über Zahlen und Rechenoperationen (soweit diese getrennt von der Strategiewahl in Erfahrung zu bringen sind)?

2.13.4 Untersuchung möglicher Zusammenhänge zwischen frühem Ableiten und frühem Automatisieren

Eine Reihe von AutorInnen postulieren, dass das Nutzen von Ableitungsstrategien in weiterer Folge auch das Automatisieren der Grundaufgaben befördert. Das lässt sich lern- und gedächtnispsychologisch plausibel argumentieren; die bislang dazu vorliegenden Studien (etwa STEINBERG 1985, THORNTON 1990, CHRISTENSEN & COOPER 1992) sind aber von geringer Zahl und auf Grund des gewählten Forschungsdesigns von beschränkter Aussage- und Beweiskraft. Gefordert wären hier wohl Längsschnittstudien vom ersten bis zumindest ins dritte Schuljahr (in diesem Zeitraum scheint es, jedenfalls nach den vorliegenden Studien, bei der Mehrzahl der Kinder im westlichen Kulturkreis zur Automatisierung der additiven Grundaufgaben zu kommen). Dafür geeignet scheint ein Vergleich zwischen Klassen, in denen die additiven Grundaufgabe gezielt über Ableitungsstrategien erarbeitet und trainiert werden, mit Kontrollklassen, in denen diese Aufgaben auf (näher zu bestimmende) "traditionelle Weise" unterrichtet werden. Als alternative Versuchsbedingung könnten weitere Klassen hinzukommen, in denen Maßnahmen des gezielten Auswendiglernens forciert werden, wie sie im deutschen Sprachraum zwar im Bereich des Einmaleins, aber nicht im Bereich des Einspluseins und Einsminus verbreitet zu sein scheinen (s. dazu Kap. 3; zu forschungsethischen Bedenken gegenüber bestimmten Untersuchungsdesigns vgl. Kap. 8.5.5). Aufgrund der Vielzahl schwer kontrollierbarer Störvariablen (Klassenzusammensetzung, Individualität der Lehrperson, Einfluss des Elternhauses…) wären große, sorgfältig gewählte Stichproben erforderlich. All das sprengt bei weitem die Möglichkeiten der vorliegenden Arbeit.

Dennoch gibt es auch in diesem Bereich einige Fragen, zu deren Klärung die vorliegende Arbeit vielleicht einen Beitrag zu leisten vermag und dies jedenfalls anstrebt, etwa:

- Zeichnen sich Zusammenhänge ab zwischen dem Nutzen von Ableitungsstrategien durch ein Kind schon zu Beginn oder gegen Mitte des ersten Schuljahres und dem Ausmaß, in dem dasselbe Kind additive Grundaufgaben bis Ende des ersten Schuljahres automatisiert?
- Vertrauen umgekehrt Kinder, die einzelne von ihnen schon früh auswendig gemerkte Grundaufgaben nicht für Ableitungsstrategien nutzen, am Ende des ersten Schuljahres in höherem Maße auf Zählstrategien als Kinder, die solche Ableitungsstrategien anwenden?
- Zeichnen sich innerhalb der Kinder, die die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn schon im Laufe des ersten Schuljahres weitgehend automatisiert haben, deutliche Unterschiede in der Strategiewahl bei Aufgaben mit Zehnerübergang (Zählstrategien vs. nicht-zählende Ableitungsstrategien) ab? Wenn ja: Lassen sich diese Unterschiede auf konzeptuelle Unterschiede zurückführen, die es erlauben, zwischen Kindern zu differenzieren, die die Aufgaben im Zahlenraum bis zehn (vorwiegend) als "Einzelfakten" auswendiggelernt haben und jenen, die diese Aufgaben (vorwiegend) über "Prinzipien" automatisiert haben ("internalization of relationships or facts", vgl. BAROODY 1985)?

Auf Grundlage der im vorliegenden Kapitel referierten Untersuchungen und der im Anschluss daran geleisteten Analysen ergeben sich zu den oben formulierten Fragen die folgenden Vermutungen, denen im Hypothesen prüfenden Teil dieser Arbeit nachgegangen werden soll:

- Wenn, wie angenommen, das fortgesetzte Ableiten einer Aufgabe für deren Automatisierung förderlich ist (vgl. v.a. Kap. 2.8, 2.9, 2.10.4 und 2.12.2), dann sollten Aufgaben, die zu einem frühen Zeitpunkt (also etwa schon Mitte des ersten Schuljahres) häufiger durch Ableitungsstrategien (und weniger oft durch Zählstrategien) gelöst werden als andere Aufgaben, zu einem späteren Zeitpunkt (also etwa Ende des ersten Schuljahres) auch häufiger durch Faktenabruf gelöst werden.
- Der hohe Einfluss, den entwicklungspsychologischen Studien zufolge das zahlbezogene Wissen zu Schulbeginn auf die spätere mathematische Leistung nimmt (vgl. Kap. 2.12.3), sollte sich bezüglich der Entwicklung der additiven Rechenstrategien dahingehend spezifizieren lassen, dass Kinder, die zu Schulbeginn ein höheres zahlbezogenes Wissen aufweisen, mehr additive Grundaufgaben durch "reifere", also Fakten nutzende Strategien und dementsprechend weniger Aufgaben durch Zählstrategien lösen als Kinder mit geringerem zahlbezogenen Wissen zu Schulbeginn – jedenfalls dann, wenn nicht im Laufe des Schuljahres gezielte Maßnahmen zur Förderung der mit geringerem Wissen gestarteten Kinder ergriffen werden. Das zu Schulbeginn gemessene zahlbezogene Wissen eines Kindes sollte also einen statistisch bedeutsamen Einfluss darauf haben, mit welcher Häufigkeit dieses Kind bereits Mitte des ersten Schuljahres und in weiterer Folge am Ende des ersten Schuljahres additive Grundaufgaben durch Fakten nutzende Strategien löst.
- Nach GRAY (vgl. Kap. 2.9.3) besteht beim zählenden Rechnen zumindest die Gefahr, dass es den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis "verdunkelt" und dadurch die Speicherung von Zahlenfakten im Langzeitgedächtnis erschwert – gerade im Gegensatz zu

SIEGLERS Annahme eines quasi-automatischen Übergangs vom zählenden Rechnen zur Automatisierung (vgl. Kap. 2.3). Sollte GRAY in dieser Frage Recht haben, dann hätten Kinder, die im Laufe des ersten Schulhalbjahres noch keine Alternativen zum zählenden Rechnen entwickelt haben, *eben deshalb* reduzierte Chancen, zu solchen Alternativen im Laufe des zweiten Schulhalbjahres zu gelangen (es sei denn, sie werden ihnen durch gezielte Förderung eröffnet; vgl. Kap. 2.9.1 und 2.9.2). Die Weichenstellung, ob ein Kind zur Automatisierung der Basisfakten gelangt oder aber zählende Strategien verfestigt ("proceptual divide" bei GRAY & TALL 1994, S. 129), müsste demnach also schon relativ früh fallen. Das wiederum müsste seinen Niederschlag finden in einer signifikanten, hohen Korrelation zwischen dem Anteil von additiven Grundaufgaben, die ein Kind Mitte des ersten Schuljahres durch Fakten nutzende Strategien löst, und dem Anteil von additiven Grundaufgaben, die dasselbe Kind am Ende des ersten Schuljahres mit solchen Strategien löst.

– Vorliegende Studien weisen auf einen Einfluss der Geschlechtszugehörigkeit auf die frühe mathematische Leistung (vgl. Kap. 2.6) hin, zudem auf einen Einfluss des Bildungsgrades der Eltern. So zeigen sich etwa in der internationalen Vergleichsstudie TIMSS für Österreich "relativ große" "Leistungsunterschiede zwischen Kindern aus bildungsfernen und bildungsnahen Familien [...] Schüler/innen aus Familien mit zumindest 100 Büchern im Haushalt erreichen 53 Punkte mehr auf der Mathematikskala [...] als Kinder aus Familien mit wenig oder gar keinen Büchern" (http://www.bifie.at/timss-2007-0, 9.12.2009; zum Einfluss u.a. der "Schulbildung der Eltern" auf den "Schulerfolg des Kindes" im Allgemeinen wie auch auf die Mathematikleistung im Besonderen vgl. etwa auch MINSEL 2006, S. 279ff). Daher sollten Geschlechtszugehörigkeit und Bildungsgrad der Eltern als mögliche Einflussvariablen bei den statistischen Hypothesenprüfungen jedenfalls berücksichtigt werden.

Die Forschungsfragen sind also hinsichtlich der zu ihrer Beantwortung geforderten Methoden von unterschiedlichem Charakter: Die in Kapitel 2.13.1 bis 2.13.3 formulierten Fragen erfordern *explorative, qualitative Methoden*. Es geht hier um das Erkunden von international wenig bzw. zu wenig detailliert (und in Österreich ohnedies noch gar nicht) untersuchten Fragen, zu denen sich begründete Vermutungen anstellen, aber vorab keine statistischen Prüfhypothesen ableiten lassen. Die zuletzt in Kapitel 2.13.4 formulierten Annahmen über den Zusammenhang zwischen Ableitungsstrategien und Automatisierung können hingegen aus den bereits vorhandenen Untersuchungen begründet werden; sie verlangen *quantitative Methoden* der statistischen Hypothesenprüfung.

Ehe das zur Beantwortung dieser Forschungsfragen jeweils gewählte Design vorgestellt wird, soll in Kapitel 3 untersucht werden, unter welchen Zielvorgaben (seitens der Schulpolitik wie auch seitens der aktuellen Fachdidaktik) der mathematische Erstunterricht derzeit (zumal in

Österreich) stattfindet. Insbesondere soll dabei geprüft werden, ob und inwieweit der in Kapitel 2 zusammengefasste Forschungsstand zum Erstrechnen in diesen Zielvorgaben Berücksichtigung findet. Daran anschließend soll in Kapitel 4 wenigstens überblicksartig dargestellt werden, welche didaktischen und methodischen Mittel zur Erreichung dieser Ziele von der aktuellen Fachdidaktik empfohlen und wie diese Empfehlungen jeweils begründet werden. Erst vor diesem Hintergrund ist es möglich, die bei der Untersuchung des Unterrichts (siehe die unter 2.12.2 formulierten Forschungsfragen) gewählte Fokussierung auf einige wenige Aspekte des Erstunterrichts hinreichend zu begründen.

3 Frühe Automatisierung der additiven Grundaufgaben: Ein lohnendes Unterrichtsziel?

"Naja, sagte der Zahlenteufel und grinste. Ich will ja nichts gegen deinen Lehrer sagen, aber mit Mathematik hat das wirklich nichts zu tun. Weißt du was? Die meisten Mathematiker können überhaupt nicht rechnen. Außerdem ist ihnen dafür die Zeit zu schade. Für so was gibt es doch Taschenrechner!"

ENZENSBERGER 1997, S. 12

"Eine Aufwertung des Kopf- und halbschriftlichen Rechnens mit allem, was dazugehört, ist also seit einigen Jahren in der fachdidaktischen Diskussion als zukunftsträchtige Richtung gewiesen."

KRAUTHAUSEN 2009, S. 114

Sollen Kinder die Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 20 automatisieren, also "ohne bewußte Steuerung aus dem Langzeitgedächtnis abrufen" (GERSTER 1994, S. 38) können? Die Frage scheint so überflüssig wie die, ob Kinder lesen und schreiben lernen sollen: als Sollens-Frage ohnedies keine *Frage der Wissenschaft*, aber auch gar nicht relevant, weil längst von allen Seiten mit einem klaren "Ja!" beantwortet. Schon Johannes KÜHNEL (1916, S. 259) hält für seine Zeit fest: "Die Notwendigkeit der Einprägung rechnerischer Sätze ist noch niemals bestritten worden." Und gerade in jüngster Zeit wird von FachdidaktikerInnen im deutschsprachigen Raum verstärkt gefordert, das *Auswendigwissen* bzw. die *Automatisierung* der additiven Grundaufgaben (zur weitgehend synonymen Verwendung der Begriffe in der Fachliteratur vgl. Kap. 2.1) *schon früh* als Teilziel des Mathematikunterrichts anzustreben.

So fordert etwa SCHIPPER: "Am Ende des ersten Schuljahres sollten möglichst alle Kinder alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im ZR bis 10 [...] auswendig wissen" (SCHIPPER 2005, S. 7). Und für WITTMANN und MÜLLER sind die Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis 20 ein Teilbereich der "Blitzrechenübungen". Diese Übungen sollen im Unterricht und vor allem auch in der häuslichen Förderung jenem "Grundbestand von Wissenselementen und Fertigkeiten" gewidmet werden, "den die Kinder abschließend auswendig lernen müssen" (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 7). Zur Unterstreichung der Wichtigkeit dieser Übungen regen WITTMANN & MÜLLER 2007 gar zu einer "Blitzrechenoffensive!" an.

Wenn aber nun etwa RADATZ u.a. (1996, S. 84) "dem Auswendiglernen der Grundaufgaben im 1. Schuljahr *wieder* einen höheren Stellenwert zukommen" lassen wollen, dann kommt in dem Wörtchen "wieder" doch auch zum Ausdruck, dass dieses Unterrichtsziel, insbesondere in seiner zeitlichen Dimension (*bis wann* sollen die Grundaufgaben automatisiert sein?), so unumstritten nicht war; international betrachtet ist es das wohl auch heute nicht.

In Kapitel 3.1 wird deshalb zunächst der Versuch unternommen, die Bedeutung des Automatisierens der additiven Grundaufgaben für das weitere *Rechnen* durch Analyse der vier grundsätzlichen Methoden des Rechnens (Kopfrechnen, halbschriftliches, schriftliches und Taschenrechner-Rechnen) *aus der Sache heraus* zu entwickeln.

Daran anschließend werden in Kapitel 3.2 einige zwar nicht gegensätzliche, aber doch zumindest deutlich unterschiedlich akzentuierte Positionen innerhalb der aktuellen Fachdidaktik der Grundschulmathematik zur eingangs gestellten Frage dargestellt und kritisch geprüft.

Kapitel 3.3 widmet sich schließlich der Frage, ob und wie weit aktuelle schulische Richtlinien in Österreich (und im Vergleich dazu in drei deutschen Bundesländern) diesen Stand der fachdidaktischen Debatte widerspiegeln.

Insofern es dabei immer auch um pädagogische und schulpolitische Zielvorstellungen und Werthaltungen, also um *Sollens*-Sätze geht, ist es nicht Sache einer wissenschaftlichen Arbeit, diese zu *bewerten*, also an den eigenen Zielvorstellungen und Werthaltungen zu messen. Sehr wohl aber ist es Aufgabe der Wissenschaft, solche Zielvorgaben in ihren Zusammenhängen begrifflich klar darzustellen und ihre innere argumentative Stringenz, die Passung von behaupteten Mittel-Zweck-Verhältnissen etc. zu überprüfen. *In diesem Sinne* versucht zuletzt Kapitel 3.4, die im Haupttitel von Kapitel 3 gestellte Frage abschließend mit der gebotenen Differenzierung zu beantworten.

3.1 Addieren und Subtrahieren mit mehrstelligen Zahlen als Argument für frühes Automatisieren der Grundaufgaben

Als scheinbar nächstliegendes Argument dafür, die Automatisierung der additiven Grundaufgaben als frühes Lernziel anzustreben, wird häufig die Abhängigkeit des Rechnens in jedem höheren Zahlenraum von der Rechenfertigkeit im Zahlenraum bis 20 angeführt (vgl. etwa RADATZ & SCHIPPER 1983, S. 192f; PADBERG 2005, S. 84). Schon KÜHNEL (1916, S. 259) hält fest: "Selbst das elementare Rechnen mit zweistelligen Zahlen setzt die Geläufigkeit jener einfacheren Rechensätze voraus."

Nun sollte freilich durchaus weitergefragt werden, wofür denn im 21. Jahrhundert wiederum das "elementare Rechnen mit zweistelligen Zahlen" nötig sei – immerhin haben seit KÜHNELS "Neubau des Rechenunterrichts" Taschenrechner weite Verbreitung gefunden, und zumindest auf den ersten Blick scheint der Taschenrechner das Rechnen als Anstrengung des Geistes *überflüssig* zu machen. Aber auch für die neben dem Taschenrechner verbleibenden drei anderen "grundsätzliche[n] Methoden für die Bewältigung von Rechenanforderungen" im zwei-und mehrstelligen Zahlenbereich (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 43) – also für das "Kopfrechnen", das "halbschriftliche Rechnen" und das "schriftliche Rechnen" – soll im Folgenden erst noch geprüft werden, ob und inwiefern sie "Geläufigkeit" im Bereich der Grundaufgaben tatsächlich zwingend *voraussetzen.* In der sachlogischen Analyse dieser Methoden muss wieder unterschieden werden zwischen ihren vorwiegend *prozeduralen* Voraussetzungen (den dafür erforderlichen Rechen*fertigkeiten*) und ihren *konzeptuellen* Voraussetzungen (dem *Verständnis* von Zahlen, Stellenwerten und Rechenoperationen, das nötig ist, um zwei- und mehrstellige Zahlen in der jeweiligen Weise zu verknüpfen).

3.1.1 Automatisierung der Grundaufgaben: notwendige Bedingung oder günstige Voraussetzung des schriftlichen Rechnens?

Zunächst ist festzuhalten: Wer als Argument für das Automatisieren der additiven Grundaufgaben erst das *Rechnen im höheren Zahlenbereich* bemüht, scheint gegen das zählende Rechnen *im Zahlenbereich bis 20* keine grundsätzlichen Bedenken zu haben. Und es ist ja auch unbestreitbar, dass zählendes Rechnen, wenn es um die *Ermittlung der Lösung* einer Plus- oder Minusaufgaben geht, ein prinzipiell taugliches Mittel darstellt (vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 130). Die Lösungs*geschwindigkeit* wird zwar häufig hinter der bei Faktenabruf (und geübtem Ableiten) zurückbleiben. Aber gerade im begrenzten Zahlenraum der Grundaufgaben ist dieser Nachteil gleichfalls begrenzt. Zudem können "Zähltechniken [..] trainiert und perfektioniert werden" (GERSTER 1994, S. 45), und nicht wenige "zählende Rechner" erreichen darin eine bemerkenswerte Geläufigkeit und Geschwindigkeit (GAIDOSCHIK 2003a, S. 35).

Schwerer ins Gewicht fällt wohl die gegenüber dem Faktenabruf konstatierte *erhöhte Fehleranfälligkeit* zählender Strategien (vgl. PADBERG 2005, S. 84, GERSTER 1994, S. 45). Während Automatisierung ja gerade darin besteht, bewusste Steuerakte überflüssig zu machen, erfordert die Auflösung in einzelne Zählschritte *dauerhaft* Konzentration. Deshalb ist aber auch die Fehlerquote beim zählenden Rechnen *dauerhaft* in hohem Maße *konzentrationsabhängig*: Bei Nachlassen bzw. Überforderung der Konzentration droht Fehlerhäufung. Dazu kommt die Möglichkeit *systematischer* Zählfehler (vgl. LORENZ & RADATZ 1993, S. 116). Aber auch das ist wohl durch Unterricht beeinflussbar: Zählfehler können durch bewusst angewandte Strategien des "keeping track" minimiert werden. Und auch *solche* Strategien könnten ja (sofern die Kinder sie nicht von sich aus entdecken) im Unterricht gezielt vermittelt und trainiert werden, wie dies etwa Karen FUSON auch tatsächlich anregt (FUSON 1992a, S. 122ff, vgl. Kap. 2.9.6).

Wenn nun aber Zählstrategien im Bereich der Grundaufgaben eine *prinzipiell taugliche* Rechenmethode sein sollen, warum dann nicht auch im ZR 100 und darüber hinaus? Schließlich rechnen wir in einem dezimalen Stellenwertsystem. Dieses erlaubt die Reduktion der rechnerischen Anforderungen jeder beliebigen Addition oder Subtraktion auf eine Zahlenverknüpfung im ZR 20, genauer: im ZR 18. Und genau diese Reduktion ist bei den (in Österreich gemäß Lehrplan im dritten Schuljahr vermittelten) Algorithmen der schriftlichen Addition und Subtraktion zum Prinzip erhoben: Bei schriftlicher Addition zweier Zahlen ist als Teiladdition maximal 9+9=18, bei schriftlicher Subtraktion als Teilsubtraktion maximal 18–9=9 (bzw. bei dem in Österreich gemäß Lehrplan verbindlichen Ergänzungsverfahren maximal 9+__=18) gefordert. Ein Kind, das im Bereich der Grundaufgaben mit Zählstrategien zu richtigen Lösungen kommt, kann also im Rahmen der Algorithmen des schriftlichen Rechnens auch in beliebigen höheren Zahlenräumen zählend addieren und subtrahieren (vgl. RUSSELL & GINSBURG 1984, S. 241). Es hat dann zwar dieselben bereits genannten relativen Nachteile gegenüber einem Kind, das die Grundaufgaben bereits automatisiert hat. Es ist aber zumindest auf den ersten Blick nicht zu erkennen, dass der erhöhte Zahlenraum den zählenden Rechnern im Rahmen des schriftlichen Rechnens *zusätzliche* Schwierigkeiten aufbürdet. Dass zählendes Rechnen mit dem Addieren und Subtrahieren im zwei- und mehrstelligen Zahlenraum *unvereinbar* und deshalb umgekehrt die Automatisierung der Grundaufgaben dafür *zwingend geboten* sei, muss also mit Blick auf die schriftlichen Normalverfahren als *Übertreibung* zurückgewiesen werden.

Was aber sehr wohl zu bedenken ist: Auch eine durch zählendes Rechnen gegenüber dem Faktenabruf nur geringfügig erhöhte Fehlerwahrscheinlichkeit an jeder einzelnen Stelle einer mehrstelligen Addition oder Subtraktion potenziert sich zu einer *deutlich* erhöhten Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb der Gesamtaufgabe *zumindest ein* Zählfehler passiert, womit dann aber eben auch das *Gesamtergebnis* falsch würde (vgl. GERSTER 1994, S. 93; die dort für das schriftliche Multiplizieren angestellte Wahrscheinlichkeitsrechnung ist auf das schriftliche Addieren übertragbar). Es ist schon deshalb wenig erstaunlich, dass Kinder, die die additiven Grundaufgaben nicht (weitgehend) automatisiert haben, beim schriftlichen Addieren und Subtrahieren nicht nur langsamer sind, sondern auch höhere Fehlerquoten aufweisen (vgl. CUMMING & ELKINS 1999, S. 150; LEFEVRE u.a. 1996, S. 224).

Hinzu kommt: Wie RADATZ und SCHIPPER anmerken, kann der hohe Konzentrationsaufwand, den zählende Rechner bei den Teilrechnungen aufbringen müssen, dazu beitragen, dass sie vermehrt *Verfahrens*fehler begehen, also Fehler beim Zusammenfügen der Teilschritte zu einem Ganzen (RADATZ & SCHIPPER 1983, S. 193; ähnlich GERSTER 1994, S. 45). Zwar ist das Normalverfahren der Addition in seinem Ablauf recht einfach zu merken, auch für Kinder, die das zugrunde liegende Bündelungsprinzip nicht verstanden haben. Das schriftliche Addieren und (mit Abstrichen, die vor allem durch die höhere Komplexität des Verfahrens zu erklären sind) auch das schriftliche Subtrahieren werden daher in der Regel auch von jenen Kindern erlernt und leidlich beherrscht, die noch im dritten Schuljahr im Bereich der additiven Grundaufgaben zählend rechnen (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 51f).

Additives Rechnen ist aber natürlich auch im Rahmen der schriftlichen Normalverfahren im multiplikativen Bereich gefordert:

- Beim schriftlichen Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator (im österreichischen Lehrplan für das dritte Schuljahr vorgesehen) müssen zu den Teilprodukten, die Stelle für Stelle zu ermitteln sind, Überträge von der jeweils nächstkleineren Stelle addiert werden. Hier muss also zu einer in der Regel zweistelligen Zahl eine einstellige Zahl *im Kopf* addiert werden; dabei kann es auch zu Zehnerübergängen kommen.
- Dasselbe gilt für das schriftliche Multiplizieren mit zweistelligem Multiplikator (im vierten Schuljahr). Bei diesem müssen zusätzlich die beiden Teilprodukte, die sich aus der Multiplikation des Multiplikanden mit der Zehnerstelle und danach mit der Einerstelle des Multiplikators ergeben, abschließend *schriftlich* addiert werden.
- Beim schriftlichen Dividieren mit einstelligem Divisor (in Österreich im dritten Schuljahr) wird Stelle für Stelle zunächst dividiert und danach der Rest ermittelt. Die Restermittlung erfordert eine Subtraktion (Teildividend minus Produkt des Teilquotienten mit dem Divisor; in der Regel sind dies zwei zweistellige Zahlen). Bei der in Österreich verbreiteten (freilich nicht durch den Lehrplan festgelegten) Variante des schriftlichen Dividierens mit verkürzter Schreibweise erfolgt diese Restermittlung als *Ergänzung im Kopf* (vgl. GAIDOSCHIK 2008). Ein Kind muss also von einer (in der Regel zweistelligen) Zahl auf eine (in der Regel gleichfalls zweistellige) Zahl im Kopf ergänzen und dabei immer wieder auch Zehnerübergänge bewältigen.
- Dasselbe gilt für das schriftliche Dividieren mit zweistelligem Divisor (in Österreich, anders als in vielen anderen Nationen, im vierten Schuljahr mit *beliebigem* zweistelligem Divisor lehrplanverbindlich). Hier kommt noch eine weitere Schwierigkeit hinzu: Für die Restermittlung muss der (Teil-)Quotient mit dem nunmehr zweistelligen Divisor multipliziert werden; vom Produkt dieser Multiplikation wird dann auf den (Teil-)Dividenden ergänzt. Bei der in Österreich verbreiteten verkürzten Schreibweise erfolgt diese Restermittlung Stelle für Stelle. Dafür ist es notwendig, zunächst das Produkt aus (Teil-)Quotient und Einerstelle des Divisors zu bilden und von diesem aus zu ergänzen. Dabei gibt der Teildividend nur die Einerstelle jener Zahl vor, auf die zu ergänzen ist. Die Zehnerstelle muss also jeweils passend erst bestimmt werden. Das Arbeitsgedächtnis wird hier also noch einmal um einiges stärker belastet als beim Dividieren mit einstelligem Divisor.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die schriftlichen Normalverfahren im multiplikativen Bereich zum Teil noch deutlich höhere Anforderungen im Bereich des additiven Rechnens stellen als die Normalverfahren für die schriftliche Addition und Subtraktion. Denn während bei letzteren der Zahlenraum bis 18 (außer bei Additionen mit mehr als zwei Summanden) bei keiner Teilrechnung überschritten wird, sind im Zuge schriftlicher Multiplikationen und Divisionen laufend auch Additionen und Ergänzungen im darüber hinausgehenden zweistelligen Bereich zu bewältigen. Hinzu kommt, dass diese Additionen und Ergänzungen mit Zahlen zu tätigen sind, die (beim schriftlichen Multiplizieren) gar nicht oder (beim schriftlichen Dividieren) nur zum Teil auf dem Papier notiert sind. Es handelt sich hier also um *Kopfrechnen* auch in dem Sinne, dass die (idealerweise durch Faktenabruf von Einmaleinsaufgaben) durch das rechnende Kind selbst generierten Zahlen *im Arbeitsgedächtnis gespeichert* und *ohne schriftliche Stütze* rechnerisch weiterverarbeitet werden müssen. Wenn aber das Weiterverarbeiten darin besteht, dass das Kind *zählend* addiert oder ergänzt, dann ist schon wegen des Fehlens einer schriftlichen Stütze die Gefahr einer "kumulativen Überforderung" des Arbeitsgedächtnisses groß. Erheblich verstärkt wird diese Gefahr dadurch, dass das Kind gleichzeitig auch noch den komplexen Ablauf der Verfahrensschritte kontrollieren muss. Es ist schon deshalb wenig erstaunlich, dass gerade das schriftliche Dividieren für viele zählende Rechner anhaltend eine kaum überwindbare Hürde darstellt (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 55f und S. 63).

3.1.2 Zählendes Rechnen als vor allem *konzeptuelles* Hemmnis beim "halbschriftlichen Rechnen"

Betrachtet man das "halbschriftliche Rechnen" nur seiner *äußeren Form* nach, dann scheint alles, was zu den rechnerischen Anforderungen beim "schriftlichen Rechnen" gesagt wurde, unverändert auch hier zu gelten. Denn *äußerlich* zeichnet sich das halbschriftliche Rechnen nur dadurch aus, dass die Zahlen nicht (wie beim schriftlichen Rechnen üblich) stellengerecht untereinander, sondern *nebeneinander* aufgeschrieben werden. Die räumliche Anordnung der Ziffern diktiert aber natürlich nicht, wie mit diesen Ziffern zu verfahren ist. Auch nebeneinander angeordnete Zahlen *können* also nach den Algorithmen der schriftlichen "Normalverfahren" addiert und subtrahiert werden. Und gerade schwächere SchülerInnen tun dies (oft wohl in Befolgung eines gut gemeinten "Rechentricks" ihrer Eltern) mitunter schon lange vor Behandlung der schriftlichen Normalverfahren im Unterricht (vgl. SCHIPPER 2009, S. 132). (In Österreich wird halbschriftliches Rechnen vorwiegend im zweiten Schuljahr sowie im ersten Halbjahr des dritten Schuljahres im Unterricht behandelt, also zeitlich *vor* dem schriftlichen Rechnen.)

Die "weitgehend einvernehmliche Akzeptanz der Aufwertung halbschriftlichen Rechnens in der fachdidaktischen Diskussion", die KRAUTHAUSEN (2009, S. 105) konstatiert, beruht freilich auf einem gänzlich anderen Verständnis des halbschriftlichen Rechnens. Im direkten Anschluss an Überlegungen, die schon KÜHNEL einprägsam formuliert hat (vgl. KÜHNEL 1916, S. 211ff), geht es der aktuellen Fachdidaktik beim "halbschriftlichen Rechnen" gerade *nicht* um das Einüben eines "Quasi-Normalverfahrens", *nicht* um ein algorithmisches Abarbeiten von Zahlen, die auf dem Papier aus irgendeinem Grund in unpraktischer Weise nebeneinander angeordnet werden. Seine Berechtigung erhält das halbschriftliche Rechnen in dieser Konzeption vielmehr gerade in *Abgrenzung* zum formelhaft-starren schriftlichen Rechnen: "Halbschriftliches Rechnen" wird angestrebt als "flexibles, je auf die Besonderheit der vorliegenden

Aufgaben und des Zahlenmaterial bezogenes Rechnen unter Verwendung geeigneter Strategien" (BAUER 1998, S. 180). Um aber flexibel zwischen verschiedenen halbschriftlichen Strategien wählen zu können, muss ein Kind zum einen die einzelnen in Frage kommenden Strategien jeweils für sich rechnerisch bewältigen. Zum anderen muss es beurteilen können, bei welchen Zahlen welche Strategie angemessen ist. Ist all dies für ein im Bereich der Grundaufgaben zählend rechnendes Kind möglich? Oder ist für das halbschriftliche Rechnen nun tatsächlich die *Automatisierung* der Grundaufgaben eine *zwingende* Voraussetzung?

Überprüfen wir zunächst die rein *rechnerischen* Anforderungen, die mit den "Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens" verbunden sind. WITTMANN und MÜLLER (1994, S. 87) stellen diese an den Aufgaben 38+45 bzw. 96–57 vor:

Da ist zunächst die Hauptstrategie *"Schrittweise":* Die Beispielsaufgabe 38+45 wird in dieser Strategie als 38+40+5 gerechnet, für 96–57 wird der Rechenweg (96–50)–7 gewählt. Als rechnerische Voraussetzung dafür sollte ein Kind Zahlenbeziehungen im Zahlenraum bis neun analog auf Zehnerzahlen übertragen können (wenn 3+4=7, dann 38+40=78). Zusätzlich bedarf es einer Strategie für die "Zehnerüberschreitung" bzw. "Zehnerunterschreitung". Wird als solche das "Teilschrittverfahren" (vgl. KRAUTHAUSEN 1995, S. 87f) gewählt, erfordert dies das sichere additive Zerlegen der Zahlen bis neun sowie das Ergänzen auf zehn bzw. das Wegnehmen von zehn. Das *Auswendigwissen* der additiven Zahlverknüpfungen *bis zehn* stellt also bei dieser Methode zweifelsfrei eine wesentliche Erleichterung dar. Darüber hinaus auch die Zahlverknüpfungen *bis 20* automatisiert zu haben, ist für die Hauptstrategie "Schrittweise" weder notwendig noch hilfreich, weil bei dieser Strategie Zehnerübergänge im Zahlenraum größer als 20 durch Ergänzen auf den nächsten Zehner (mit Zerlegung des zweiten Summanden) bzw. durch Wegnehmen bis zum Zehner (mit Zerlegung des Subtrahenden) und nicht durch Rückgriff auf eine bereits automatisierte Aufgabe mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20 bewältigt werden.

Im Unterschied dazu stellt bei der von WITTMANN und MÜLLER angeführten Hauptstrategie *"Zehner extra, Einer extra"* (38+45 als [30+40]+[8+5] bzw. 96–57 als [90–50]+[6–7]) das Auswendigwissen der Additionen nicht nur bis zehn, sondern tatsächlich bis 20 zumindest eine deutliche *Erleichterung* dar. Die in der Beispielaufgabe an der Einerstelle auftretende Addition mit Zehnerüberschreitung ist aber alternativ auch mittels Teilschrittverfahren oder einem anderen Verfahren für den Zehnerübergang (vgl. Kap. 2.9.9) lösbar. Subtraktionen mit Zehnerunterschreitungen im ZR bis 20 ergeben sich bei dieser Hauptstrategie nicht. (Die Subtraktion 6–7 wird aufgelöst in "Ich muss noch 1 von 90–50=40 wegnehmen"; vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994a, S. 88.) Wird nun "Zehner extra, Einer extra" unter Anwendung einer Zusatzstrategie für den Zehnerübergang durchgeführt, ergeben sich anstelle von sonst drei nötigen Teilrechnungen (30+40, 8+5, 70+13) zumindest deren vier (30+40, dann etwa 8+2 und

10+3, schließlich 70+13). Das spricht gegen die Brauchbarkeit eines solchen Vorgehens beim reinen *Kopfrechnen*, bei dem Zwischenschritte nicht aufgeschrieben werden (dazu später). Aber es spricht nicht unbedingt auch gegen seine Brauchbarkeit beim *halbschriftlichen* Rechnen, das ja gerade "gestütztes Kopfrechnen" (RADATZ u.a. 1998, S. 42) sein *soll*.

Die dritte Hauptstrategie *"Aufgabe vereinfachen"* ist in sich vielfältig. Allen Varianten gemeinsam ist, dass mit Blick auf das Zahlenmaterial passende operative Beziehungen genutzt werden. So kann die Addition 38+45 nach dem "Gesetz von der Konstanz der Summe" (WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 87) mit Hilfe der einfacheren Addition 40+43 gelöst werden, denn 38+45 = (38+2) + (45–2). Ebenso wäre denkbar, zunächst 45+40 zu rechnen und dann in einem zweiten Schritt 2 zu subtrahieren, denn 38+45 = 45+38 = 45+(40–2) (vgl. RADATZ u.a. 1998, S. 43). In beiden Fällen ist es wiederum unzweifelhaft hilfreich, wenn die Grundaufgaben im Zahlenraum *bis zehn* automatisiert sind. Bei analoger Übertragung auf das Rechnen mit Zehnern ermöglichen sie das schnelle und sichere Bewältigen aller bei dieser Methode geforderten Teilschritte. Auf Aufgaben mit Zehnerübergang im Zahlenraum *bis 20* wird hingegen bei der Strategie "Aufgabe vereinfachen" *nicht* zurückgegriffen.

Dasselbe gilt auch für die letzte von WITTMANN und MÜLLER (1994, S. 87) angeführte Hauptstrategie des halbschriftlichen Rechnens, das *"Ergänzen"*. Wer die an zitierter Stelle genannte Beispielaufgabe 96–57 tatsächlich als 57+__=96 lösen will (was gerade bei dieser Aufgabe *nicht* unbedingt naheliegt), tut sich natürlich leichter, wenn er die geforderten Teilaufgaben 57+__=60, 60+__=90, 90+__=96 jeweils durch (dekadische Analogien nutzenden) Rückgriff auf bereits automatisierte Zahlverknüpfungen im Zahlenraum bis zehn lösen kann. Auf Grundaufgaben mit Zehnerübergang bis 20 wird bei der Beispielaufgabe *nicht* zurückgegriffen. Bei *anderen* Zahlen könnte dies der Fall sein, etwa wenn 53+__=96 in den Schritten 53+__=60, 60+__=90, 90+__=96 gelöst würde. In diesem Fall wäre zunächst 7, dann 30, dann 6 zu ergänzen. Die gesuchte Differenz zwischen 53 und 96 könnte dabei in den Teilschritten 7+30=37, 37+6=43 oder aber 7+6=13, 30+13=43 ermittelt werden. Nur bei der zweiten Variante erfolgt ein Rückgriff auf eine Grundaufgabe im Zahlenraum bis 20. Ohnedies wäre aber 53+__=96 wohl vorteilhafter (weil ohne Zehnerübergang) in den Schritten 53+__=93, 93+__=96 zu lösen.

Bei der Analyse der rechnerischen Anforderungen der vier grundlegenden Strategien des halbschriftlichen Rechnens wird zweierlei deutlich:

Erstens reduzieren *alle* Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens (durch Nutzung der dekadischen Analogien) die *rechnerischen* Anforderungen für das Addieren und Subtrahieren von zwei- und mehrstelligen Zahlen letztlich auf Grundaufgaben im Zahlenraum *bis zehn*.

Sind diese Aufgaben *automatisiert*, erleichtert dies das halbschriftliche Rechnen in beliebigen Zahlenräumen ganz entscheidend. Grundaufgaben mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20 ergeben sich als Teil der Gesamtrechnung hingegen *nicht zwingend*.

Zweitens ist das *Auswendigwissen* der additiven Grundaufgaben eine zweifellos *äußerst hilfreiche*, aber (wie schon beim schriftlichen Rechnen) keine *unumgängliche prozedurale* Voraussetzung für das Bewältigen der *rechnerischen* Anforderungen des halbschriftlichen Rechnens. Auch die hierbei zu bewältigenden Teilrechnungen können *grundsätzlich* auch durch Zählstrategien bewältigt werden. Diese müssen dafür freilich um das zählende Rechnen mit Zehnern (bzw. Hundertern …) erweitert werden. Dafür gibt es verschiedene, von Kindern auch tatsächlich praktizierte Varianten: So können etwa "drei Zehner plus vier Zehner" weiterzählend als "vier, fünf, sechs, sieben: *sieben* Zehner!" addiert werden. Aber auch ein Weiterzählen um Zehnerschritte ist möglich: "38+40" als "*48, 58, 68,* 78; Ergebnis: 78". Darüber hinaus muss bei einzelnen Strategien die Zahlwortreihe vorwärts wie rückwärts im jeweiligen Zahlenraum verfügbar sein (im Beispiel 57+__=96 etwa für das zählende Ergänzen von 57 auf zunächst 60).

Wenn nun aber das halbschriftliche Rechnen keine prinzipiell höheren Anforderungen an die *Rechenfertigkeit* stellt als das schriftliche, warum sind dann "zählende Rechner" zwar den schriftlichen Normalverfahren der Addition und Subtraktion zumeist durchaus gewachsen, beim halbschriftlichen Rechnen im zweiten und zu Beginn des dritten Schuljahres aber oft heillos überfordert (vgl. BAUER 1998; KRAUTHAUSEN 2009, S. 108; RADATZ u.a. 1998, S. 76-81; LORENZ & RADATZ 1993, S. 117)?

Zum einen drückt sich *hierin* nun wohl tatsächlich eine *"kumulative" Überforderung* aus. Denn die beim halbschriftlichen Rechnen geforderten Rechenschritte können zwar jeweils für sich auch zählend bewältigt werden. Sie erfordern dann aber ein solches Maß an Konzentration, dass diese "für die Planung von Lösungsschritten […] nicht mehr zur Verfügung steht" (GERSTER 1994, S. 45). Der "Planungsaufwand" ist nun aber beim halbschriftlichen Rechnen wesentlich höher als beim schriftlichen, schon deshalb, weil das Kind beim halbschriftlichen Rechnen (selbst wenn es "quasi-schriftlich" Stelle für Stelle abarbeitet) jeweils neu überlegen und entscheiden muss, welche Ziffern miteinander zu verknüpfen sind. Diese Überlegung entfällt beim schriftlichen Rechnen bei Beachtung der stellengerechten Anordnung. Darum scheint bei den schriftlichen Verfahren (auch wenn GERSTER an der zitierten Stelle eigentlich über diese spricht) die "kumulative Überforderung" weit weniger ins Gewicht zu fallen als beim halbschriftlichen. Und deshalb empfehlen auch manche Fachdidaktiker, als "letztes Mittel [...] um einem rechenschwachen Kind die Möglichkeit zu bieten, schwierige Aufgaben der Addition/Subtraktion im Hunderterraum […] zu lösen", diesem Kind das halbschriftliche Rechnen zu "ersparen" und die schriftlichen Verfahren bereits im zweiten Schuljahr zu erarbeiten (RADATZ u.a. 1998, S. 77; ähnlich LORENZ & RADATZ 1993, S. 117; relativierend dagegen KRAUTHAUSEN 2009, S. 108).

Die oftmals konstatierte Überforderung zählender Rechner mit dem halbschriftlichen Rechnen (und weniger mit dem schriftlichen Rechnen) ist aber wohl gar nicht in erster Linie prozedural-quantitativ zu begründen. Nicht die "*größeren* Zahlen" und die "*Vielzahl* der Zählakte" führen in erster Linie zur Überforderung zählender Rechner beim halbschriftlichen Rechnen. Diese Überforderung dürfte vielmehr vor allem daran liegen, dass die Lösungsfindung mittels Zählstrategien eine *grundsätzlich andere konzeptuelle Qualität* hat als jene, auf die es zumindest beim *flexiblen* halbschriftlichen Rechnen ankommt. Nicht (oder nicht in erster Linie) die kumulierten *rechnerischen* Schwierigkeiten machen den entscheidenden Unterschied, warum das halbschriftliche Rechnen für zählende Rechner zur oft unüberwindlichen Hürde wird. Sondern deren *eingeschränktes Verständnis von Zahlen und Rechenoperationen* steht einer flexiblen, an das Zahlenmaterial angepassten Strategiewahl entgegen. Dieses eingeschränkte Zahl- und Operationsverständnis liefert aber ein wichtiges Argument gegen das zählende Rechnen unabhängig vom Zahlenraum. Das soll im Folgenden näher ausgeführt werden.

SELTER (2000, S. 228) charakterisiert das halbschriftlichen Rechnen (wie das Kopfrechnen) als "Zahlenrechnen" im Gegensatz zum "Ziffernrechnen" der schriftlichen Normalverfahren (vgl. dazu auch KRAUTHAUSEN 1993; 2009; GERSTER 2007; 2009b). Nun haben wir es natürlich sowohl beim schriftlichen wie beim halbschriftlichen Rechnen ebenso mit Ziffern wie auch mit Zahlen zu tun: Auch wer eine schriftliche Addition löst, rechnet ja Stelle für Stelle mit (einstelligen) *Zahlen*. Der grundsätzliche Unterschied zum halbschriftlichen Rechnen besteht aber erstens darin, dass beim schriftlichen Rechnen mit zwei- oder mehrstelligen Zahlen diese gar nicht *als* (zwei- oder mehrstellige) *Zahlen gedacht* werden müssen. Die *Größe* der gesamten Zahl spielt beim Ausrechnen nämlich keine Rolle: Addiert werden jeweils nur die einstelligen Zahlen, welche durch die einzelnen *Ziffern* symbolisiert werden. Zweitens ist der Rechenvorgang beim schriftlichen Rechnen das Befolgen eines *Algorithmus*, also einer von der Größe der Zahlen (und Ziffernwerte) unabhängigen, Stelle für Stelle in gleicher Weise auszuführenden "Abfolge von eindeutig bestimmten Elementaranweisungen" (vgl. ZIEGENBALG 1996, S. 23). Beim halbschriftlichen Rechnen dagegen ist es *möglich*, den Rechenweg dem jeweiligen Zahlenmaterial anzupassen; und erst die *Nutzung* dieser Möglichkeit macht nach aktueller fachdidaktischer Lehrmeinung seinen didaktischen *Wert* aus (vgl. GERSTER 2009b, S. 269; KRAUTHAUSEN 2009, S. 111; PADBERG 2005, S. 194-202).

Eine solche Flexibilität im Anwenden halbschriftlicher Strategien setzt aber zumindest dreierlei voraus:

- das *Beachten der Größe der beteiligten Zahlen* (und nicht nur ihrer einzelnen Ziffernwerte) sowie den *flexiblen Umgang mit Stellenwerten.* Deren Zusammenhang muss durchschaut werden, um etwa bei x+199 zu erkennen, dass dieses vorteilhaft als (x+200)–1 gelöst werden kann;
- das zumindest implizite *Wissen um die Rechengesetze*, die den konzeptuell unterschiedlich anspruchsvollen Strategien des vorteilhaften Rechnens zugrunde liegen, wie die Kommutativität (a+b=b+a) und Assoziativität (a+[b+c]=[a+b]+c) der Addition, die inverse Beziehung zwischen Addition und Subtraktion (a+b=c → c–b=a), die Monotonie der Subtraktion (a–b=c → [a+x)] – [b+x] = c) und dergleichen mehr;
- einen *"Zahlenblick"*, also die Fähigkeit, zu erkennen, welche der unterschiedlichen Strategien für die gerade behandelten Zahlen tatsächlich ein vorteilhaftes Rechnen ermöglicht (vgl. MENNINGER 1992, S. 18; SCHÜTTE 2002; RATHGEB-SCHNIERER 2006, 78f).

KRAUTHAUSEN und SCHERER fassen diese hohen Anforderungen des geschickt-flexiblen halbschriftlichen Rechnens wie folgt zusammen:

> *"Halbschriftliches Rechnen setzt ein solides Zahlverständnis voraus und macht, v. a. im Zusammenhang mit geschicktem Rechnen, vielfachen Gebrauch von Zahlvorstellungen, Zahlbeziehungen und Rechengesetzen"* (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 47).

Ein "solides Zahlverständnis", so das Ergebnis der in Kapitel 2.10 auf Basis der Arbeiten von GRAY, RESNICK, FUSON, GERSTER und anderen geleisteten Analyse, besteht auf dieser Stufe der arithmetischen Entwicklung aber wesentlich darin, natürliche Zahlen als "Zusammensetzungen aus Zahlen" zu verstehen. Die Analyse in Kapitel 2.10 hat gleichfalls gezeigt, dass "zählendes Rechnen" *für sich genommen* die Entwicklung eines solchen Verständnisses behindert. Das Wesentliche dieser Analyse sei an dieser Stelle als Grundlage für die hier anzuschließenden Überlegungen zu begründbaren Zielen des mathematischen Erstunterrichts noch einmal zusammengefasst:

Ein Kind, das zählend rechnet, behandelt Zahlen *im Zuge der Zählhandlung* gerade *nicht flexibel* als Zusammensetzungen *aus anderen Zahlen*, sodass *ein und dieselbe Zahl* jeweils unterschiedlich aus anderen Zahlen zusammengesetzt gedacht wird (acht aus fünf und drei, aber auch vier und vier, sechs und zwei usw.). Sondern die verschiedenen Zahlen werden im zählenden Rechnen unterschiedslos behandelt als Zusammensetzung aus *lauter einzelnen Einsen*; die Rechenzahlen werden gewissermaßen *"atomisiert"*. Eben diese Atomisierung legt die Kinder aber wiederum auf das zählende Rechnen fest (es sei denn, sie haben eine bestimmte Zahlverknüpfung bereits abrufbar im Gedächtnis gespeichert). *Zählendes Rechnen erschwert also den Blick auf Teile-Ganzes-Beziehungen* jenseits der Atomisierung in Einsen; und ohne Rückgriff auf Teile-Ganzes-Beziehungen bleibt für das Addieren und Subtrahieren (neben dem Auswendigwissen) nur das zählende Rechnen.

Wenn aber auch in der Zähl*handlung* selbst Zahlen *nicht* als Zusammensetzungen aus Zahlen behandelt werden, so besteht doch immer auch die Möglichkeit einer nachträglichen oder begleitenden *Reflexion* der Beziehung von "Aufgabe" und "Ergebnis" im Sinne einer Teile-Ganzes-Beziehung. Der scheinbare Teufelskreis "eingeschränktes Zählverständnis bedingt zählendes Rechnen, welches wiederum das eingeschränkte Zahlverständnis prolongiert" ist also eben nur ein *scheinbarer*, er kann sehr wohl durchbrochen werden; andernfalls könnte ja *kein* Kind zu einem "soliden Zahlverständnis" gelangen. Aber damit das gelingt, muss das Kind (ob nun selbsttätig oder mithilfe gezielter Unterstützung) über den Standpunkt der reinen "procedure" des Zählens hinausgelangen und sein Denken den zugrunde liegenden mathematischen Objekten ("procepts", vgl. GRAY & TALL 1994, s. Kap. 2.9.3) zuwenden (vgl. dazu auch PROBST & WANIEK 2003, S. 73-77). Gerade das geschieht aber dann, wenn das Kind (ob selbsttätig oder angeleitet) über *Beziehungen* zwischen Aufgaben nachdenkt. Und umgekehrt trägt das Nutzen solcher Beziehungen für Ableitungsstrategien, so jedenfalls die Überzeugung von BAROODY, GRAY und anderen (vgl. Kap. 2.8 und 2.9), entscheidend dazu bei, dass das Kind mehr und mehr Aufgaben automatisiert und deshalb auf das weitere Ableiten (und ohnedies auf zählendes Rechnen) immer weniger angewiesen sein wird.

Dieser Analyse zufolge ist es also zumindest unwahrscheinlich, dass ein Kind mit "solidem Zahlverständnis" noch in höheren Schulstufen im Bereich der additiven Grundaufgaben in nennenswertem Umfang auf Zählstrategien angewiesen ist.

Umgekehrt wäre demnach zu erwarten, dass ein Kind, das die Grundaufgaben noch in höheren Schulstufen zu einem wesentlichen Anteil zählend löst, vermutlich auch in seinem Zahl*verständnis* und in weiterer Folge in seinen Einsichten in *operative Zusammenhänge* erhebliche Defizite aufweist. Für den Zusammenhang zwischen *Zahlverständnis* und zählendem Rechnen in höheren Schulstufen liefert etwa die Studie von DORNHEIM einen bestätigenden Hinweis: Die als "rechenschwach" klassifizierten Kinder der untersuchten Stichprobe zeigten noch am Ende der zweiten Klasse gravierende Defizite im "Subtest 'Zahlzerlegung' [..], der auf dem Verständnis des Teile-Ganzes-Konzepts beruht"; diese Kinder lösten "nur etwas mehr als 50 % der Zahlzerlegungsaufgaben", die eigentlich für die erste Klasse vorgesehen waren (DORNHEIM 2008, S. 419). Und SCHÄFER ermittelte in ihrer Studie mit als "rechenschwach" eingestuften SchülerInnen der Eingangsstufe der Hauptschule ein signifikant besser entwickeltes Operationsverständnis für die Subtraktion (wie auch die Multiplikation) in der Untergruppe der nicht-zählend rechnenden Kinder gegenüber der Untergruppe der zählend rechnenden Kinder (SCHÄFER 2005, S. 207f).

Gerade dieser Zusammenhang zwischen Defiziten im Zahl- und Operationsverständnis und dem zählenden Rechnen dürfte aber (neben häufig hinzu tretenden Defiziten im Verständnis des Stellenwertsystems; vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 43), wie bereits angedeutet, der wesentlichere Grund dafür zu sein, warum zählende Rechner mit dem halbschriftlichen Rechnen in der Regel überfordert sind: Zwar ist die *rechnerische Durchführung* der Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens auch zählend möglich (wenn auch hohe Konzentration erfordernd, zeitraubend und fehleranfällig). Aber das mit dem zählenden Rechnen in höheren Schulstufen zumeist einhergehende eingeschränkte *Zahl- und Operationsverständnis* erschwert das *Verständnis* (und daher auch die *flexible* Anwendung) dieser Strategien. Zu diesem Schluss gelangt etwa auch FLOER in seiner Abwägung der Nachteile des zählenden Rechnens:

> *"Nicht zuletzt kann über das Zählen keine Einsicht in Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge (Rechengesetze) entwickelt werden. Diese Einsichten aber sind die unabdingbaren Voraussetzungen für bewegliches Rechnen"* (FLOER 1996, S. 33).

Wenn dies aber stimmt, dann folgt daraus für den mathematischen Erstunterricht:

- Wer dafür argumentieren will, dass Kinder möglichst schon im Laufe des ersten Schuljahres das zählende Rechnen überwinden sollten, muss und sollte dafür nicht erst und nicht vordergründig die beim Rechnen in höheren Zahlenräumen bei fortgesetzter Anwendung von Zählstrategien drohenden *rechnerischen* Schwierigkeiten bemühen. Denn erstens können *diese* Schwierigkeiten, wie gesehen, durch die schriftlichen Normalverfahren zumindest relativiert werden. Zweitens und vor allem wird bei dieser Argumentation vernachlässigt, dass der *wesentlichere* und *umfassendere* Nachteil des fortgesetzt zählenden Rechnens bereits im Zahlenraum bis 20 wirksam wird, auch wenn das betroffene Kind in der Klasse vielleicht erst beim halbschriftlichen Rechnen durch anhaltende Verständnisschwierigkeiten und Fehlerhäufung auch tatsächlich auffällig werden mag. Dieser *wesentlichere* Nachteil besteht darin, dass Kinder, die (vorwiegend) zählend rechnen, Gefahr laufen oder dieser Gefahr bereits erlegen sind, wichtige *Einsichten in Zahlen, Zahlbeziehungen, operative Zusammenhänge und Rechengesetze* zu verpassen. Ihnen fehlen dann aber entscheidende Voraussetzungen nicht nur für ein flexibles Anwenden der Strategien des halbschriftlichen Rechnens, sondern auch für weitere wesentliche Ziele des Mathematikunterrichts in der Grundschule; Ziele, über die in der aktuellen Fachdidaktik weitgehend Übereinstimmung besteht und auf die in Kapitel 3.1.2 näher eingegangen wird.
- Wenn das entscheidende Argument gegen Zählstrategien darin besteht, dass sie die Ausbildung eines soliden Zahlverständnisses behindern, dann ist auch klar, dass die von den "drill theorists" (vgl. Kap. 2.9) empfohlene Überwindung des zählenden Rechnens durch *reines Auswendiglernen der Grundaufgaben* (also ohne Rücksichtnahme darauf, was das Kind über Zahlen und Rechenoperationen denkt) selbst dann, wenn sie erfolgreich sein sollte, *keine* Lösung des *wesentlichen* Problems des zählenden Rechnens darstellen würde. Denn das Zahlverständnis bleibt vom Auswendiglernen von Zahlensätzen ja unberührt; und *Einsicht* in Zahlbeziehungen und Rechengesetze entsteht nicht dadurch, dass Einzelfakten dem Langzeitgedächtnis überantwortet werden.

3.1.3 Zählendes Rechnen als (weitgehende) Verhinderung des Kopfrechnens mit zwei- und mehrstelligen Zahlen

Alles Rechnen, selbst das Eintippen in einen Taschenrechner, ist insofern *Kopf*rechnen, als es einen denkenden Kopf braucht, um es durchzuführen; und auch beim halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen werden alle Teilrechnungen "im Kopf" (und nicht von einem Taschenrechner) erledigt. Als *Kopfrechnen* wird aber in der Fachdidaktik nur jene "Methode für die Bewältigung von Rechenanforderungen" bezeichnet, bei der "*ohne eine Notation von Zwischenschritten* die Lösung einer Aufgabe im Kopf erfolgt" (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 43; Hervorhebung M.G.).

Die Bedeutung, die dem Kopfrechnen in der aktuellen Fachdidaktik beigemessen wird, besteht nun nicht einfach in seiner Mittelfunktion für das schriftliche und halbschriftliche Rechnen (für beides stellt, wie gesehen, das automatisierte Kopfrechnen im Bereich der Grundaufgaben eine zwar nicht unerlässliche, aber doch günstige Voraussetzung dar). Wie KRAUTHAUSEN und SCHERER festhalten, kommt dem Kopfrechnen vielmehr gerade deshalb "auch im Zeitalter des Taschenrechners und Computers" eine "herausragende Bedeutung" zu, weil es untrennbar mit dem Ziel verbunden ist,

> *"Kinder zu sogenannten Zahlenalphabeten zu erziehen, ihnen* number sense*, ein Gefühl für Zahlen und den Umgang mit ihnen zu vermitteln"* (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 43; Hervorhebung im Original).

Dem Kopfrechnen wird mit ebendieser Begründung etwa auch im englischen "National Numeracy Project", einer schulpolitischen Reaktion auf wiederholt schwache Ergebnisse englischer SchülerInnen in internationalen Vergleichsstudien, eine zentrale Rolle beigemessen: "The ability to calculate mentally lies at the heart of numeracy" (STRAKER 1999, S. 43).

Folgt man nun BREIDENBACH, dann ist Kopf*rechnen* mit der Anwendung von Zählstrategien *prinzipiell unvereinbar*. Ein Kind, welches eine Aufgabe – im Kopf und ohne Notation von Zwischenschritten, mit richtigem Ergebnis – durch Anwendung einer Zählstrategie gelöst hat, hat nach BREIDENBACH nämlich "gar nicht gerechnet. Denn Rechnen heißt, eine Aufgabe durch Vollzug von Denkakten lösen", während eine zählende Lösungsfindung bloß "mechanisch" erfolge (BREIDENBACH 1956, S. 130 bzw. S. 81; ähnlich GRIESEL 1971, S. 182, und BESUDEN 1999, S. 78). Nun ist zwar auch der (schließlich immer *bewusst* und *zielgerichtet* erfolgende) Einsatz von Zählstrategien ein "Vollzug von Denkakten" (auch wenn es freilich *andere* Denkakte sind als etwa beim Einsatz einer Ableitungsstrategie). Die Formulierung "denkendes Rechnen" als Gegensatz zum "zählenden Rechnen" (etwa auch bei KRAUTHAUSEN 1995) ist deshalb problematisch. Was sich aber tatsächlich empirisch feststellen und sachlogisch begründen lässt, ist die *weitgehende praktische Unvereinbarkeit* von Zählstrategien und *Kopf*rechnen bei Rechenaufgaben höherer Komplexität, welche nicht nur, aber wesentlich auch eine Frage des Zahlenraums ist.

Zunächst empirisch: Kinder, die im Bereich der Grundaufgaben zählend rechnen, vermeiden es in der Regel so weit wie möglich, Additionen und Subtraktionen im zwei- und mehrstelligen Bereich im Kopf zu rechnen – ausgenommen vielleicht Rechnungen des Typs ZE + E bzw. ZE – E, welche sie dann zumeist durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu lösen versuchen (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 60). *Sicherer* fühlen sie sich jedoch zumeist mit den schriftlichen Verfahren.

Sachlogisch sind diese Schwierigkeiten einfach zu erklären:

Grundsätzlich kann das zählende Addieren oder Subtrahieren einer zweistelligen Zahl mit oder ohne Beachtung der Zweistelligkeit erfolgen. "Zählend ohne Beachtung der Zweistelligkeit" bedeutet, dass beispielsweise bei einer Addition "plus dreizehn" tatsächlich *dreizehn* Zählschritte erfolgen müssen. Es ist leicht einzusehen, dass das beim Weiterzählen erforderliche "keeping track" hier und erst Recht mit noch größeren Summanden an Grenzen (der Konzentration, der verfügbaren Zählhilfen, der Motivation) stößt. Dieselben Grenzen sprechen noch deutlicher dagegen, in diesem Zahlbereich noch mit Alleszähl-Strategien zu operieren.

Zählendes Rechnen mit Beachtung der Zweistelligkeit ist etwa bei jenen Kindern zu beobachten, die beim Kopfrechnen (wie beim schriftlichen Verfahren) zunächst die Einer, dann die Zehner zählend zu verknüpfen versuchen. Dabei übersteigen zwar die an jeder Stelle zählend zu lösenden Rechnungen (wie beim schriftlichen Rechnen) nie den Zahlenraum bis 18. Wenn die Strategie "Zehner extra, Einer extra" (vgl. Kap. 3.1.1.2), welche von leistungsschwachen Kindern offenbar bevorzugt wird (vgl. BENZ 2007, S. 54), aber beim *Kopf*rechnen verwendet wird, dann muss das an einer Stelle ermittelte Zwischenergebnis jeweils im Arbeitsgedächtnis *(*im Subsystem des "phonologischen Speichers"; vgl. SCHERMER 2002, S. 127) präsent gehalten werden, während an der anderen Stelle weiter gerechnet wird.

Die Strategie "Zehner extra, Einer extra" ist deshalb für das *halbschriftliche* Rechnen zwar grundsätzlich geeignet. Sie ist aber als *Kopf*rechenstrategie selbst dann ungünstig, wenn die dabei anfallenden Teilaufgaben automatisiert sind, einfach deshalb, weil sie mehr Rechenschritte und deshalb einen höheren Merk- und Konzentrationsaufwand erfordert als etwa die Strategie "Schrittweise" (vgl. BENZ 2005, S. 52). Wenn nun aber ein Kind diese Teilaufgaben auch noch *zählend* lösen muss, dann übersteigen die Anforderungen der Gesamtaufgabe fast zwangsläufig die Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses. Denn das Arbeitsgedächtnis kann zwar im Subsystem der "phonologischen Schleife" Informationen durch fortgesetztes "rehearsal" grundsätzlich beliebig lang aufrechterhalten. Wenn aber dieses Subsystem bei einem zweiten oder dritten Rechenschritt über längere Zeit mit dem Durchführen einer Zählstrategie beschäftigt ist, drohen zuvor ermittelte Zwischenergebnisse oder auch die nur auditiv aufgenommenen Ausgangszahlen verloren zu gehen, da die Behaltedauer des phonetischen Speichers ohne Rehearsal eng begrenzt ist (vgl. GRUBE 2005, S. 108).

Die Anforderungen an das Arbeitsgedächtnis wären bei der Strategie "Schrittweise" und erst recht bei Nutzung von Rechenvorteilen ("Aufgabe vereinfachen") zwar wesentlich geringer. Wie aber schon in Kapitel 3.1.1.2 ausgeführt wurde, ist gerade zählendes Rechnen eine denkbar schlechte Voraussetzung dafür, das für die flexible Anwendung von Rechenstrategien unerlässliche solide Zahl- und Operationsverständnis zu erlangen. Schon deshalb ist es wenig wahrscheinlich, dass diese das Arbeitsgedächtnis "schonenden" Strategien von zählenden Rechnern beim Kopfrechnen angewandt werden.

Wenn also Kopfrechnen über den engen Bereich der Grundaufgaben hinaus als Ziel des Mathematikunterrichts definiert wird, dann muss konsequenterweise als Mittel zur Erreichung dieses Ziels auch die Überwindung des zählenden Rechnens im Bereich der additiven Grundaufgaben angestrebt werden.

Mehr noch: Ein *flüssiges* Kopfrechnen im zwei- und mehrstelligen Bereich ist wohl nur dann möglich, wenn die Grundaufgaben zumindest im Zahlenraum bis zehn tatsächlich *automatisiert* sind. Denn selbst ein rasches Ableiten beansprucht das Arbeitsgedächtnis in höherem Maße als ein direkter Faktenabruf. Beim Kopfrechnen ist aber das Arbeitsgedächtnis ohnedies mit dem Planen der Rechenschritte, dem Präsenthalten aller Zwischenergebnisse und (bei rein auditiver Präsentation der Aufgabe) auch noch mit dem Behalten der Ausgangszahlen gefordert. Daher ist hier die Gefahr einer kumulativen Überforderung für Kinder, die für Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn noch Ableitungsstrategien benötigen, noch einmal erheblich größer als für jene, die diese Aufgaben vollständig automatisiert haben (vgl. GOLDMAN u.a. 1998, S. 224). Die weiter gehende Automatisierung auch noch der Aufgaben im *Zahlenraum bis 20* mit Zehnerübergang schafft hingegen (wie schon beim halbschriftlichen Rechnen) auch beim Kopfrechnen nur dann eine zusätzliche Erleichterung, wenn die Strategie "Zehner extra, Einer extra" gewählt wird – eine Strategie, die aus den bereits ausgeführten Gründen für das Kopfrechnen aber wenig empfehlenswert ist.

Freilich sollte sorgfältig abgewogen werden, Kopfrechenaufgaben *welcher Komplexität* man Kindern überhaupt zumuten will, gerade wenn man das Kopfrechnen mit Blick auf die Förderung von *number sense* betreibt: Dieser mit "Zahlensinn" übersetzte Begriff ist ja "schwer fassbar und schwierig auf den Punkt zu bringen" (SOWDER 1992, S. 15, zitiert nach LORENZ 2002, S. 67). Doch gerade die konkrete Abgrenzung von *grundlegenden* Kopfrechenfertigkeiten, die als Bestandteil von "Zahlensinn" gelten können, von darüber hinausgehenden "erweiterten" Fertigkeiten könnte einen Beitrag zur Operationalisierung dieses Begriffes leisten.

Tatsächlich werden im Blitzrechen-Kurs von WITTMANN und MÜLLER solche konkreten Kopfrechenziele bis ins vierte Schuljahr hinein definiert. Sie sind jeweils "bezogen auf die fundamentalen Ideen der Arithmetik" (a.a.O.) und können daher legitimer Weise im Zusammenhang mit der Entwicklung von "number sense" diskutiert werden (einen Gesamt-Überblick geben WITTMANN und MÜLLER 2007, S. 12-19; siehe auch KRAUTHAUSEN und SCHERER 2007, S. 45):

– Das Kopfrechnen im additiven Bereich beschränkt sich im Rahmen des Blitzrechen-Kurses auf Rechnungen, bei denen (in wachsenden Zahlenräumen) an jeweils nur einer Stelle addiert bzw. subtrahiert wird; dabei sind aber auch Stellenübergänge zu bewältigen (also etwa 45+7 in der zweiten Schulstufe, 687+60 in der dritten, 720 000–80 000 in der vierten, vgl. WITTMANN & MÜLLER 2007, S. 14-19). Kopfrechnen dieser Komplexität ist wiederum unerlässlich für die Bewältigung von *überschlagenden* Additionen und Subtraktionen in höheren Zahlenräumen (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 267ff; PADBERG 2005, S. 216f). Für zählende Rechner sind aber aus den genannten Gründen auch solche Kopfrechnungen eingeschränkter Komplexität *kaum noch* zu bewältigen. Sie sind aber wohl auch für jene Kinder, die noch im Zahlenraum 10 Ableitungen benötigen, aufgrund der kumulativen Belastung des Arbeitsgedächtnisses zumindest *mit großen Schwierigkeiten* verbunden.
– Flüssiges additives Kopfrechnen ist seinerseits Voraussetzung für Kopfrechnen im multiplikativen Bereich. Schon die *Erarbeitung des kleinen Einmaleins* erfordert unter anderem ein sicheres additives Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100 (vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 115) − jedenfalls dann, wenn sie nicht als Auswendiglernen von Malreihen, sondern "ganzheitlich" unter Nutzung von Kernaufgaben erfolgt, wie es in der aktuellen Fachdidaktik weitgehend einhellig empfohlen wird (vgl. etwa GERSTER 1994, S. 94-100; WITTMANN & MÜLLER 1994a, S. 110-121; VAN DE WALLE 2004, S. 168-172; PADBERG 2005, S. 128-134; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 31-38).
– Für das *überschlagende Rechnen im multiplikativen Bereich* wäre wohl wünschenswert, auch Aufgaben des Typs E ▪ ZE (oder etwa auch E ▪ HZ) im Kopf bewältigen zu können. Unter Anwendung des Distributivgesetzes lassen sich solche Aufgaben in zwei Multiplikationen zerlegen, für deren Bewältigung jeweils das kleine Einmaleins und das Wissen um dekadische Analogien genügt. Die abschließend notwendige Addition der Teilprodukte erfordert aber erneut Kopfrechnen in einer Komplexität, die eine Automatisierung der Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn fast zwingend erfordert.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass *flüssiges* Kopfrechnen im höherzahligen Bereich (und damit auch das *überschlagende* Rechnen) ohne die weitgehende *Automatisierung* der additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn kaum machbar ist. Stärker noch als das halbschriftliche (und erst recht als das schriftliche) Rechnen ist es also gerade das Kopfrechnen im zwei- und mehrstelligen Bereich, welches Argumente dafür liefert, die

Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn (aber nicht mit gleicher Dringlichkeit auch die bis 20) tatsächlich schon früh zu *automatisieren*. *Wie früh* diese Automatisierung aber erfolgen sollte, hängt wiederum davon ab, ab wann man Kinder mit solchen komplexeren Kopfrechenaufgaben konfrontieren will. Dieser Frage wird in Abschnitt 3.2.2 noch näher nachgegangen.

3.1.4 Die Bedeutung des (nicht-zählenden) Kopfrechnens im Zeitalter des Taschenrechners

KRAUTHAUSEN und SCHERER halten in ihrem Kapitel zu Möglichkeiten des *didaktisch sinnvollen* Einsatzes von Taschenrechnern in der Grundschule fest:

> *"Es sollte unseres Erachten nicht länger die Frage sein,* ob *der Taschenrechner eingesetzt werden soll, sondern eher* wie.*"* (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 267; Hervorhebungen im Original; gleichlautend der Standpunkt der NCTM nach DICK 1988, S. 39, vgl. Kap. 3.2.1)

Dennoch ist für Österreichs VolksschülerInnen der Taschenrechner *in der Klasse* (wohl kaum aber beim Lösen der *Hausübungen*) derzeit wohl noch weitgehend *tabu (*vgl. aber das im Schuljahr 2008/2009 erstmals auch in Österreich zugelassene Lehrwerk "Die Matheprofis 4", welches den Einsatz des Taschenrechners an einigen Stellen ausdrücklich vorsieht, vgl. SCHÜTTE 2007, S. 62; S. 96f).

Nicht die Sinnhaftigkeit des Taschenrechnereinsatzes in der Volksschule soll aber an dieser Stelle diskutiert werden (vgl. dazu auch PADBERG, 2005, S. 312-320; WITTMANN & MÜLLER 1994b, S. 3f; SPIEGEL 1988), sondern die Frage, ob und auf welche Weise die Existenz des Taschenrechners als allgegenwärtiges (und früher oder später auch im Unterricht zugelassenes) Rechenhilfsmittel bei der Festlegung von Zielen für den Rechenunterricht der Grundschule berücksichtigt werden sollte. Die Antwort darauf ist in der Besprechung des Kopfrechnens als Voraussetzung des überschlagenden Rechnens in Kapitel 3.1.3 freilich implizit schon gegeben worden; sie muss an dieser Stelle nur noch ausgeführt werden:

- *Gerade deshalb*, weil in der Schule wie im Alltag früher oder später für exakte Berechnungen mit mehrstelligen Zahlen auf den Taschenrechner zurückgegriffen wird, ist es wichtig, über gute Kopfrechenfertigkeiten zu verfügen. Denn flüssiges Kopfrechnen ist eine wesentliche Voraussetzung für überschlagendes Rechnen; dieses ist notwendig, um (nie restlos vermeidbare) Fehler beim Eintippen in den Taschenrechner wenigstens dann zu erkennen, wenn das Ergebnis dadurch grob falsch wird. Wer also beim Benützen des Taschenrechners nicht *gewohnheitsmäßig überschlagend mitrechnet*, bleibt dem *Hilfs*gerät *hilflos* ausgeliefert (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 269; PADBERG 2005, S. 313-316).

– Den Taschenrechner, sobald er "erlaubt" ist, für *jede* Rechnung (ohne Ansehung der konkreten Rechenanforderung) zu nutzen, *verringert* die Rechengeschwindigkeit (weil vieles im Kopf schneller zu rechnen ist) und *erhöht* die Fehlerwahrscheinlichkeit (weil man sich beim Eintippen immer auch *ver*tippen kann). Gefragt ist also in Schule wie Alltag ein *überlegter* Einsatz des Taschenrechners; dieser setzt aber "Selbstvertrauen der Kinder in ihre eigenen Kopfrechenfertigkeiten" (und als dessen Grundlage natürlich tatsächlich vorhandene Kopfrechenfertigkeiten) voraus (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 269).

WINTER fasste dieses Paradoxon, dass gerade der *Taschen*rechner das *Kopf*rechnen in neuer Weise wichtig macht, schon 1987 wie folgt zusammen:

> *"Zwar wollen wir heute keine Zeit damit verschwenden, die Kinder für einen Wettstreit gegen die Taschenrechner rüsten zu wollen […] Wohl aber erfordert […] der sinnvolle Einsatz von Taschenrechnern klare Vorstellungen von der Größe von Zahlen in Stellenwertdarstellung, Geläufigkeit im Überschlagrechnen und damit sichere Kenntnis der Basisfacts* [sic!]*[...]Durch die Existenz der Taschenrechner wird das Erlernen von Rechenfertigkeiten also nicht überflüssig, wohl aber werden die Akzente anders gesetzt* (WINTER 1987, S. 58).

3.1.5 Zusammenfassender Befund über die Bedeutung automatisierter Grundaufgaben für das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen

Die eingangs zitierte Auffassung KÜHNELS, dass "Geläufigkeit" im Bereich der additiven Grundaufgaben eine *unerlässliche* Voraussetzung für das Addieren und Subtrahieren im zwei- und mehrstelligen Bereich darstelle, kann nach sachlogischer Analyse der vier Rechenmethoden zusammenfassend wie folgt relativiert bzw. präzisiert werden:

– Die *rein rechnerischen* Anforderungen des schriftlichen und des halbschriftlichen Rechnens *können* auch mit Zählstrategien leidlich bewältigt werden. Eine Automatisierung der Grundaufgaben stellt also keine *notwendige*, freilich aber eine *günstige* Voraussetzung für das schriftliche und halbschriftliche Rechnen mit zwei- und mehrstelligen Zahlen dar, sie macht diese weniger konzentrationsaufwändig, in der Regel schneller und weniger fehleranfällig.
– Für das *Kopfrechnen* mit zwei- und mehrstelligen Zahlen (und damit auch für das darauf aufbauende überschlagende Rechnen) stellt die Automatisierung der Grundaufgaben tatsächlich eine *weitgehend* unerlässliche Voraussetzung dar. Denn durch die beim Kopfrechnen im höheren Zahlenbereich verlangte Speicherung von Zwischenergebnissen droht eine Überforderung des Arbeitsgedächtnisses, wenn dieses zugleich auch noch mit der Abwicklung von Zählstrategien für einzelne Teilrechnungen belastet wird.
– Die individuell unterschiedlichen, aber grundsätzlich beschränkten Ressourcen des Arbeitsgedächtnisses liefern im Kontext des Kopfrechnens (aber nicht unbedingt im Kontext des schriftlichen und halbschriftlichen Rechnens) auch Argumente dafür, dass die Grundaufgaben zumindest im Zahlenraum bis zehn tatsächlich *automatisiert* werden sollten. Wer

im zwei- und mehrstelligen Bereich flüssig Kopfrechnen will, sollte also im Zahlenbereich bis zehn wohl auch nicht mehr auf das *Ableiten* als Ersatz für Faktenabruf angewiesen sein (es sei denn, dieses Ableiten erfolgt so hochgradig automatisiert, dass es vom direkten Faktenabruf praktisch nicht mehr zu unterscheiden ist; vgl. BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 104 und Kap. 2.8.1).

– Gerade ein überlegter, kontrollierter Einsatz des Taschenrechners erfordert (überschlagendes) Kopfrechnen im zwei- und mehrstelligen Bereich. Der Taschenrechner liefert also tatsächlich *zusätzliche* Argumente für das Automatisieren der additiven Grundaufgaben.
– Was die *konzeptuelle* Seite des Rechnens betrifft: Die schriftlichen Normalverfahren können auch ohne tiefere Einsicht als "Befolgen von Regeln" eingeübt werden. Ein *flexibles* halbschriftliches Rechnen ist hingegen ebenso wie ein *flexibles* Kopfrechnen (und damit überschlagendes Rechnen beim kontrollierten Taschenrechnereinsatz) nur auf Grundlage eines soliden Zahl- und Operationsverständnisses möglich. Dieses wiederum kann sich kaum entwickeln, wenn ein beständig zählend rechnendes Kind keine über die Zerstückelung der Zahlen in lauter Einsen hinausreichenden Teile-Ganzes-Beziehungen und darauf gründenden operativen Zusammenhänge beachtet. *Dieser grundsätzliche Nachteil* des zählenden Rechnens kommt aber bereits im Bereich der additiven Grundaufgaben zum Tragen und wirkt sich nicht nur beim Rechnen, sondern auch bei weiteren Inhalten des Mathematikunterrichts negativ aus, wie im folgenden Kapitel zu zeigen sein wird.

3.2 Die Bewertung der Automatisierung der additiven Grundaufgaben in der aktuellen fachdidaktischen Zieldiskussion

Wie bereits ausgeführt, kann es nicht in den Bereich dieser Arbeit fallen, die bestehende Diskussion um Zielsetzungen des Mathematikunterrichts an eigenen Wert- und daraus abgeleiteten Zielvorstellungen zu messen oder um solche zu ergänzen. Es soll aber dargestellt werden, welchen Stellenwert die Automatisierung der additiven Grundaufgaben (bzw. umgekehrt die Überwindung des zählenden Rechnens im Bereich der Grundaufgaben) in dieser aktuellen Diskussion einnimmt, ob die dafür vorgebrachten Argumente in sich schlüssig erscheinen und ob dabei sachliche bzw. lern- und entwicklungspsychologische Erkenntnisse angemessen berücksichtigt werden.

Dabei wird zunächst auf die Zielvorgaben des US-amerikanischen "National Council of Teachers of Mathematics" (NCTM) eingegangen – deshalb, weil die vom NCTM seit Ende der 1980er Jahre mit großem Engagement und in zahlreichen Veröffentlichungen geführte Diskussion über Ziele und Standards des Mathematikunterrichts großen Einfluss auf analoge Bestrebungen im deutschen Sprachraum hatte und darin weiter fortwirkt. Anschließend werden Positionen innerhalb der deutschsprachigen Fachdidaktik dargestellt und überprüft.

3.2.1 Das Beherrschen der Grundaufgaben im Kontext von "mathematical proficiency" in der Zieldefinition der NCTM

Eine umfassende Darstellung der Position der NCTM findet sich etwa bei KILPATRICK, SWAFFORD und FINDELL 2001. Dort wird als Ziel des Mathematikunterrichts "mathematical proficiency" (etwa: "Tüchtigkeit") ausgegeben, definiert über fünf "strands" ("Stränge"):

– "conceptual understanding", also das Verstehen von mathematischen Begriffen ("concepts"), Operationen und Beziehungen;
– "procedural fluency", definiert als "skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately";
– "strategic competence", gefasst als die Fähigkeit, mathematische Probleme zu formulieren, darzustellen und zu lösen;
– "adaptive reasoning", worunter die NCTM die Fähigkeit für "logical thought, reflection, explanation, and justification" versteht; und schließlich
– "productive disposition", definiert als "a habitual inclination to see mathematics as sensible, useful, and worthwile" (a.a.O., S. 5).

Diese fünf "Stränge" sind, wie auch explizit festgehalten wird, untrennbar miteinander verwoben ("intertwined", a.a.O. S. 5). Bei näherer Betrachtung scheint *keiner* der von der NCTM propagierten Stränge mit dem Festhalten an Zählstrategien vereinbar zu sein, letztlich aber auch keiner mit dem bloßen Auswendiglernen der Grundaufgaben ohne Rücksicht auf Zahl- und Operationsverständnis:

– Weder zählendes Rechnen noch bloßes Auswendigwissen der Grundaufgaben genügen der Forderung nach "procedural *fluency*": Zählendes Rechnen steht wegen seiner prinzipiellen Fehleranfälligkeit tendenziell im Widerspruch zur Forderung nach "fehlerfreier" ("accurate") Ausführung und kann wegen seiner relativen Langsamkeit kaum "effizient" genannt werden. Dass es auch um die "Flexibilität" zählender Rechner schlecht bestellt ist, war Gegenstand des voranstehenden Abschnitts. Aber auch das bloße Auswendigwissen bietet wohl keine hinreichende Voraussetzung für die angestrebte "flexibility" bei jenen Aufgaben, die über den engen Bereich der Grundaufgaben hinausgehen.
– "Conceptual understanding" und "strategic competence" *im Bereich der Arithmetik* leiden, wie gesehen, unter der "Atomisierung der Rechenzahlen" beim zählenden Rechnen und sind beim Auswendiglernen von Rechensätzen zumindest nicht Thema. ("Conceptual unerstanding" und "strategic competence" in *anderen* Bereichen der Grundschulmathematik, etwa der Geometrie, mögen davon unberührt sein.)
– Wenn (wie ausgeführt) anhaltendes zählendes Rechnen die Entwicklung eines soliden Zahlverständnisses behindert, dann bringen zählende Rechner *im Bereich der Arithmetik* auch denkbar schlechte Voraussetzungen für die Weiterentwicklung von "logical thought, reflection, explanation, and justification" mit.

– Und wie sollte eine "productive disposition" gegenüber der Arithmetik aufkommen bei Kindern, für die der Umgang mit Zahlen stets verbunden ist mit mühsamen, konzentrationsaufwändigen Zählprozeduren? Wenn aber das zählende Rechnen abgelöst wird lediglich durch einsichtsloses Auswendigwissen von Rechensätzen, wird die "Neigung", Mathematik als etwas "Vernünftiges" und "Wertvolles" zu sehen, dadurch kaum gesteigert werden, eher im Gegenteil: Wie etwa GINSBURG (1989, S. 128) anmerkt, besteht beim forcierten Auswendiglernen von Zahlenfakten die Gefahr der Abkoppelung vom "informellen Wissen", welches Kinder in die Schule mitbringen (und welches sie in der Regel zum zählenden Lösen von Additionen und Subtraktionen befähigt, noch ehe das Addieren und Subtrahieren im Unterricht behandelt wurden, vgl. Kap. 2.10.1). Auf diese Weise könne ein Kind zu einer "conception of number facts as meaningless words to be memorized" gelangen (a.a.O.), mit womöglich dauerhaften Schäden für sein Bild der Mathematik, aber auch für sein Selbstbild im Falle seines absehbaren Scheiterns an der so gründlich missverstandenen Mathematik (vgl. GAIDOSCHIK 2009, S. 177).

Umgekehrt ist es in sich schlüssig, dass die NCTM im Bereich der Arithmetik (und dort im Teilziel "developing proficiency with whole numbers", KILPATRICK u.a. 2001, S.6) gerade den Ableitungsstrategien ("thinking strategies") eine herausragende Rolle zuweist:

> *"When given instruction that emphasizes thinking strategies, children are able to develop the strands of proficiency in a unified matter"* (KILPATRICK u.a. 2001, S. 7).

Denn

– Ableitungsstrategien basieren ja auf "conceptual understanding" von Zahlen und Rechenoperationen und vertiefen dieses weiter;
– Unterrichtsexperimente wie die von THORNTON (1978; 1990) und STEINBERG (1985) liefern zumindest Hinweise dafür, dass ein auf Ableitungsstrategien fokussierender Unterricht auch entscheidend zur "procedural fluency" beiträgt (vgl. Kap. 2.9);
– das Verstehen und (flexible) Anwenden von Ableitungsstrategien ist ein wesentlicher Bestandteil von "strategic competence" im Umgang mit ganzen Zahlen (wobei "strategic competence" natürlich weit darüber hinausreicht);
– das Erarbeiten von Einsicht in Ableitungsstrategien ist zugleich ein Beitrag zur Förderung von "adaptive reasoning";
– und schließlich: Kinder, die Ableitungsstrategien anwenden, nutzen dabei ihr vorhandenes (aus ihren informellen Vorkenntnissen weiter entwickeltes) Wissen über Zahlen und Rechenoperationen. Sie erleben dieses Wissen also zumindest im Kontext der Arithmetik als "sensible" und "useful" und damit mit einiger Wahrscheinlichkeit wohl auch als "worthwile", haben somit zumindest eine gute Chance, eine "productive disposition" für Mathematik (zumindest für den Teilbereich der Arithmetik) zu entwickeln.

Die Position der NCTM zu den additiven Grundaufgaben lässt sich somit weitgehend zusammenfassen in einer Empfehlung, die GINSBURG schon 1989 formulierte:

> *"Use the number facts to introduce the child to interesting arithmetic ideas. This meaningful approach will help the child learn what is primary – the ideas – and will also show what is secondary, namely the number facts"* (GINSBURG 1989, S. 143).

Soweit der Versuch, die "strands" der NCTM in die bisher in dieser Arbeit geleisteten Analysen einzuordnen. Wie aber konkretisiert die NCTM selbst ihre allgemeinen Überlegungen zur "mathematical proficiency" für den hier interessierenden Bereich der additiven Grundaufgaben und da wieder für die einzelnen Schulstufen? Die diesbezüglichen Empfehlungen der NCTM sind zum einen den "Principles and Standards for School Mathematics" (NCTM 2000) zu entnehmen. Dort heißt es im "Number and Operations Standard for Grades Pre-K-2":

> *"In prekindergarten through grade 2 all students should [...] develop fluency with basic number combinations for addition and subtraction"* (http://my.nctm.org/standards/content.aspx?id=3098, 9.12.2009).

Als Bedingung für "fluency" drängt die NCTM nun aber in ihren weiteren Ausführungen zu den Standards *nicht* auf das *Automatisieren* der additiven Grundaufgaben bis zum Ende der zweiten Schulstufe; ja sie empfiehlt sogar explizit, in diesem Altersbereich das *Weiterzählen* bzw. *zählende Ergänzen* als Lösungsstrategien aus den SchülerInnen "hervorzulocken":

> *"By* fluency *we mean that students are able to compute efficiently and accurately with single-digit numbers. Teachers can help students increase their understanding and skill in single-digit addition and subtraction by providing tasks that (*a*) help them develop the relationships within subtraction and addition combinations and (*b*) elicit counting on for addition and counting up for subtraction and unknown-addend situations"* (a.a.O., S. 83)

Erst im "Number and Operations Standard for Grades 3–5" heißt es dann:

> *"When students leave grade 5, they should be able [...] to efficiently recall or derive the basic number combinations for each operation, and to compute fluently with multidigit whole numbers"* (http://www.nctm.org/standards/membercontent.aspx?id=3626, 9.12.09).

Im Gegensatz zu der in Kapitel 3.1 geleisteten Analyse sieht die NCTM in ihren Standards also das Festhalten an Zählstrategien noch bis in die zweite Schulstufe hinein *nicht* im Widerspruch zur Entwicklung eines tragfähigen Zahl- und Operationsverständnisses: Ohne darauf einzugehen, ob und wie weit sich diese beiden Empfehlungen inhaltlich miteinander vertragen, plädiert sie für *beides* – allerdings mit zeitlicher Befristung.

Schlüssig an diesen Empfehlungen ist auf Basis der NCTM-Definition von "mathematical proficiency" sicherlich die darin enthaltene Ablehnung eines "*bloßen* Auswendiglernens" der additiven Grundaufgaben, also die *Betonung*, dass die Rechenstrategien auf dem Zahlverständnis der Kinder ("thinking about, and understanding of, numbers", http://www.nctm.org/standards/membercontent.aspx?id=3514, S. 83, 9.12.09) aufbauen müssen. Was aber übersehen oder zumindest vernachlässigt wird, ist die Gefahr, dass gerade das fortgesetzte zählende Rechnen die Einsicht in operative Zusammenhänge erschwert. Bei all dem scheint, wenn auch unausgesprochen, die (wissenschaftlich nicht fundierte) Annahme zugrunde zu liegen, dass (manche? viele?) Kinder damit überfordert sein könnten, die additiven Grundaufgaben schon im Laufe des ersten oder spätestens zweiten Schuljahres nichtzählend, also entweder durch Faktenabruf oder durch eine Ableitungsstrategie, zu lösen.

Im Jahr 2006 hat nun aber die NCTM die "Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics" (NCTM 2006) herausgegeben. Die "Focal Points" sollen die älteren "Principle and Standards" laut NCTM weder ablösen noch in irgendeiner Weise korrigieren; letztere blieben "the comprehensive reference on developing mathematical knowledge across the grades" (a.a.O., S. 1). Die "Focal Points" sollen lediglich klarere Vorgaben zu den *curricularen Inhalten einzelner Schulstufen* (a.a.O. S. 8) liefern. Bezüglich der additiven Grundaufgaben ist nun aber tatsächlich nicht einfach nur eine Ergänzung, sondern eine Korrektur festzuhalten. Denn einer der "Grade 2 Curriculum Focal Points" für "Number and Operations" lautet explizit:

> *"Developing quick recall of addition facts and related subtraction facts and fluency with multidigit addition and subtraction"* (a.a.O., S. 14).

Während also den "Standards" noch Ende des zweiten Schuljahres auch zählendes Rechnen Genüge tut, wenn es denn bei einem Kind in Kombination mit "understanding" auftritt, ist mit den "Focal Points" offenbar selbst rasches Ableiten in diesem Alter nicht mehr vereinbar: Diesen gemäß soll am Ende von Grade 2 ausschließlich "quick recall" vorherrschen und nicht mehr (nicht einmal ergänzend) auch die Anwendung von Ableitungsstrategien; letztere sollen aber im "Brennpunkt" des Unterrichts im ersten Schuljahr stehen (a.a.O. S. 13). In den "Standards" gilt dagegen noch Ende der fünften Schulstufe das Ableiten von Grundaufgaben als eine Variante von "Effizienz".

Wir haben es hier also nicht nur mit einer "Tempoverschärfung" der "Focal Points" gegenüber den "Standards" zu tun, sondern tatsächlich mit einer Neubewertung der Frage, ob "computational" bzw. "procedural fluency" auch in höheren Klassen noch mit dem (schnellen) Ableiten von Grundaufgaben in Ergänzung zum Faktenabruf vereinbar sei. Und dennoch sollen die "Principles and Standards" *neben* den "Focal Points" als "definitive reference" (a.a.O., S. 8) ihre Gültigkeit behalten – ein Widerspruch, den die NCTM entweder selbst nicht als solchen wahrnimmt (was unwahrscheinlich ist) oder für nebensächlich hält (was er angesichts der Implikationen für die Unterrichtsgestaltung aber wohl nicht ist). Möglicherweise drückt sich darin aber auch nur aus, dass der Diskussionsprozess innerhalb der NCTM zu den hier verhandelten Fragen noch nicht abgeschlossen ist. Dass insbesondere die Frage, wie im mathematischen Erstunterricht mit Zählstrategien umgegangen werden solle, innerhalb der US-amerikanischen Fachdidaktik umstritten ist, wurde ja bereits in Kapitel 2.9 deutlich.

Zusammenfassend kann festgehalten werden:

- Die NCTM betrachtet "computational" bzw. "procedural fluency" als wichtiges Teilziel des Mathematikunterrichts, welches aber nur im Einklang mit (und keinesfalls auf Kosten von) anderen Teilzielen verfolgt werden solle.
- Diese anderen Teilziele ("conceptual understanding", "strategic competence", "adaptive reasoning" und "productive disposition") schließen ein *bloßes* Auswendiglernen der Basisfakten aus und begründen zugleich den hohen Stellenwert von Ableitungsstrategien im frühen Arithmetikunterricht. Die in den ersten Schuljahren tolerante Haltung der NCTM zu Zählstrategien steht dazu zumindest in einem Spannungsverhältnis.
- Bezüglich der Frage, ob überhaupt bzw. bis zu welchem Alter das *Auswendigwissen* der additiven Grundaufgaben oder aber lediglich deren *schnelles und sicheres Lösen* unter Einschluss von Ableitungsstrategien angestrebt werden solle, bestehen Unstimmigkeiten zwischen den einschlägigen, in gleicher Weise aktuelle Gültigkeit beanspruchenden Veröffentlichungen der NCTM. In den neueren wird das "rasche Abrufen" der additiven Grundaufgaben unmissverständlich als wichtiges Ziel bis Ende des zweiten Schuljahres definiert.

3.2.2 Auswendigwissen der Grundaufgaben als *bedingtes* Unterrichtsziel in der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik

Bereits in der Einleitung zu Kapitel 3 wurde festgehalten, dass innerhalb der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik breiter Konsens besteht in der Auffassung, dass die additiven Grundaufgaben *automatisiert* werden sollten und dass dieses Ziel bereits früh (schon bis Ende des ersten Schuljahres) erreicht werden sollte. Noch nicht eingegangen wurde auf die Frage, wie diese Zielvorgabe begründet und ins Verhältnis gesetzt wird zu anderen (vielleicht übergeordneten) Zielen des frühen Mathematikunterrichts; dies soll im Folgenden nachgeholt werden. Dabei kann keine Vollständigkeit in der Erfassung aktueller fachdidaktischer Positionen angestrebt werden. Ausführlich gewürdigt werden die deutlich unterschiedlich argumentierten und akzentuierten Zielvorgaben in drei verbreiten Handbüchern (RADATZ u.a. 1996; WITTMANN & MÜLLER 1994a, 1994b, weitergeführt in WITTMANN & MÜLLER 2004 und zuletzt WITTMANN & MÜLLER 2007; GERSTER 1994, weitergeführt etwa in GERSTER 2005 und GERSTER 2009a). Inhaltlich sind damit auch die Positionen anderer AutorInnen (etwa PADBERG 2005; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007; HASEMANN 2003) weitgehend abgedeckt.

3.2.2.1 Die Position von RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING

RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE und EBELING begründen ihr Eintreten für das "Auswendiglernen der Grundaufgaben im 1. Schuljahr" (RADATZ u.a. 1996, S. 84) wie folgt: Zählende Rechenstrategien trügen die Tendenz zur Verfestigung in sich. Zwar könnten Kinder damit das erste und (mit wachsenden Schwierigkeiten) auch noch das zweite Schuljahr "überstehen", jedoch:

> *"Im dritten Schuljahr versagt dann jede zählende Rechenstrategie – und ein Umlernen in Richtung heuristischer bzw. operativer Strategien ist dann nur noch unter erheblichen Mühen und geduldigem Lernen von Anfang an möglich – wenn überhaupt"* (RADATZ u.a. 1996, S. 36).

Es komme deshalb darauf an, die Kinder schon im ersten Schuljahr von zählenden Rechenstrategien wegzubekommen. Die Alternative zum zählenden Rechnen sei aber

> *"im 1. Schuljahr – entgegen weit verbreiteter mathematikdidaktischer Lehrmeinung – in erster Linie nicht die Entwicklung heuristischer bzw. operativer Strategien, sondern die Erweiterung des Bestands an auswendig gewussten Aufgaben"* (a.a.O., S. 84).

Demgegenüber ist festzuhalten:

– Dass das zählende Rechnen "im dritten Schuljahr versagt", ist, wie dargestellt, eine verkürzende, die wesentlichen Nachteile des fortgesetzt zählenden Rechnens gerade nicht treffende Darstellung.
– Zählendes Rechnen tendiert gerade deshalb zur "Verfestigung", weil beständig zählend rechnende Kinder wichtige Einsichten über Zahlen und Rechenoperationen zu verpassen drohen. Das Problem dieser Kinder ist also nicht einfach nur die "Gewöhnung mit der Zeit", sondern besteht vor allem darin, dass sie wichtige Voraussetzungen nicht entwickeln, die das Automatisieren der Grundaufgaben erleichtern.
– Was GRAY 1991 in der Tat festhält, ist lediglich, dass vor allem "leistungsschwächere" (a.a.O., S. 84) Kinder *von sich aus* keine Ableitungsstrategien entwickeln. Das berechtigt aber nicht zu der Schlussfolgerung, dass nicht auch diese Kinder solche Strategien bei geeignetem Unterricht verstehen und in weiterer Folge selbstständig anwenden können.

RADATZ u.a. scheinen aber gerade diesen Schluss zu ziehen. Sie setzen jedenfalls, immer noch unter Berufung auf GRAY 1991, wie folgt fort:

> *"Diese Befunde sprechen dafür dem Auswendiglernen der Grundaufgaben im 1. Schuljahr wieder einen höheren Stellenwert zukommen zu lassen. Das in der Vergangenheit nicht selten verpönte Auswendiglernen des kleinen Einspluseins und Einsminuseins hat auch in einem modernen Anfangsunterricht seine Berechtigung"* (RADATZ u.a. 1996, S. 84).

Diese Argumentation ist in sich inkonsistent: Bezüglich der Ableitungsstrategien wird betont, dass leistungsschwächere Kinder solche Strategien nicht selbstständig entwickeln würden.

Genau dasselbe gilt aber auch für das Auswendigmerken: Auch das kommt "nicht von selbst". In beiden Fällen wird also eine Kompetenz ohne gezielte Unterrichtsmaßnahmen von vielen Kindern nicht erreicht. Im Fall des Auswendigmerkens soll das für eine forcierte Behandlung im Unterricht sprechen. Warum nicht auch im Falle des Ableitens?

Tatsächlich liefern ja Studien wie die von PUTNAM u.a. (1990) und STEINBERG (1985) starke Hinweise dafür, dass sehr wohl auch leistungsschwächere SchülerInnen Ableitungsstrategien verstehen und anwenden können (vgl. Kap. 2.9.7 bzw. 2.9.2). Und die Studie von STEINBERG ebenso wie etwa auch die Studien von THORNTON (1978; 1990; vgl. Kap. 2.9.1) liefern darüber hinaus Hinweise auch dafür, dass gerade die gezielte Behandlung des Ableitens im Mathematikunterricht das Automatisieren befördern kann, was gedächtnispsychologisch erklärbar ist als Unterstützung der Enkodierung im Langzeitgedächtnis durch das Herstellen von Assoziationen zwischen neu zu merkenden mit bereits gemerkten Inhalten (vgl. Kap. 2.12.1).

Gerade wer, wie RADATZ u.a. es tun, das Auswendig*wissen* der additiven Grundaufgaben (möglichst bereits am Ende des ersten Schuljahres) für ein wichtiges *Ziel* hält, hätte also vermutlich einigen Grund, das gezielte Erarbeiten und konsequente Trainieren des Ableitens als *Mittel* zur Erreichung dieses Ziels zu empfehlen – selbstverständlich nicht im Gegensatz zum Auswendigwissen, sondern als dessen Ergänzung und Erweiterung. Dass es kein Gegensatz sein kann, geht ja schon alleine daraus hervor, dass zumindest einige automatisierte "Kernaufgaben" vorausgesetzt sind, damit ein Kind (bei Einsicht in operative Zusammenhänge) erfolgreich aus diesen Aufgaben ableiten kann.

Tatsächlich empfehlen RADATZ u.a. an *anderen* Stellen ihres Handbuchs sehr wohl, auch Ableitungsstrategien zu "thematisieren" (a.a.O., S. 83), und halten als "Ziel des Unterrichts" im ersten Schuljahr fest,

> *"die Kinder [...] allmählich zum Auswendigwissen (zunächst nur einiger weniger Grundaufgaben) und zu heuristischen Strategien zu führen"* (a.a.O., S. 83).

Aber auch hier beschränken sie sich auf ein "und", wo ein "durch Unterstützung von" dem Stand der fachdidaktischen Forschung wohl eher entsprechen würde. Heuristische Strategien werden *neben* dem Erlernen der Basisfakten tendenziell als ein *weiterer* Lerngegenstand behandelt, und das sind sie ja selbstverständlich *auch*: Ableitungsstrategien sind auch *für sich* bedeutsam, nicht nur als Mittel zum Zweck, das Rechnen zu erleichtern. Dass sie aber bei entsprechender Behandlung im Unterricht (die allerdings über ein "Thematisieren" vermutlich deutlich hinausgehen müsste) gerade auch hilfreich für das Auswendigmerken sein könnten, wird von RADATZ u.a. offenbar nicht in Betracht gezogen. Auswendiglernen und Ableitungsstrategien werden in ihrem Handbuch *begrifflich* entkoppelt: Das Auswendigwissen der Basisfakten wird als Ergebnis einer "Merkleistung" besprochen, als Resultat einer *Zusatzveran-*

staltung, die ohne *inneren* Bezug dazu stattfindet, was ein Kind über Zahlen und operative Zusammenhänge denkt. Konsequenterweise entsteht deshalb bei RADATZ u.a. aber auch die Sorge, dass das Auswendigwissen zu einem "*bloßen* Auswendigwissen" ohne Verständnisgrundlage werden könnte:

> *"Am Ende des 1. Schuljahres sollen die Kinder das kleine Einspluseins und Einsminuseins im Zahlenraum bis 20 auswendig wissen [...] selbstverständlich auf Grundlage eines Verständnisses von Addition und Subtraktion"* (a.a.O., S. 83).

Bemerkenswert an diesem Zitat ist auch, dass RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE und EBELING explizit ein Auswendiglernen *sämtlicher* additiver Grundaufgaben schon im ersten Schuljahr empfehlen. Demnach hätten also auch Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres manche Grundaufgaben (etwa solche mit Zehnerübergang) noch durch Ableitungsstrategien lösen, dieses Ziel verfehlt – obwohl auch diese Kinder offenkundig nicht mehr der Gefahr unterliegen, Zählstrategien zu verfestigen, jener Gefahr also, die von RADATZ u.a. zunächst als Begründung ihrer Zielvorgabe angeführt worden war. Hier liegt eine weitere Inkonsistenz in ihrer Argumentation vor (vgl. dazu auch die Relativierung der oben zitierten Zielvorgabe wenige Seiten später: RADATZ u.a. 1996, S. 105 empfehlen den Einsatz von "1+1-Wendekarten [...], deren Ergebnisse die Kinder *ab Ende des 1. und im Laufe des 2.* Schuljahres auswendig lernen sollten"; Hervorhebungen M.G.)

Zusammenfassend ist festzuhalten: RADATZ u.a. sprechen explizit dem *Auswendiglernen* der Grundaufgaben das Wort. Weil aber das Auswendiglernen *für sich genommen* (anders als das Ableiten) das "Verständnis von Addition und Subtraktion" nicht in sich einschließt, verspüren RADATZ u.a. selbst die Notwendigkeit, dieses Verständnis als *zweites* wichtiges Ziel zu betonen, welches bei der Verfolgung des ersten nicht aus den Augen verloren werden dürfe.

3.2.2.2 Die Position von WITTMANN & MÜLLER

Auch WITTMANN und MÜLLER warnen in der Erläuterung ihres "Blitzrechenkurses" vor einem "Auswendiglernen" der additiven Grundaufgaben ohne Verständnisgrundlage:

> *"Vor einem Missverständnis muss dringend gewarnt werden: Der Blitzrechenkurs ist kein bloßer Kurs zum Auswendiglernen von Rechensätzen. Alle Blitzrechenübungen werden vielmehr ganz bewusst auf einer breiten Anschauungsgrundlage und Nutzung von Beziehungen* entwickelt. *Sie zielen auf die Entwicklung von* Zahlvorstellungen *und auf* Verständnis.
>
> *Ein zu früher Übergang von der Grundlegung zur Automatisierung ist für den Lernprozess schädlich und muss vermieden werden"* (a.a.O., S. 14; Absatz und Hervorhebungen im Original).

Wie schon erwähnt, umfasst das "Blitzrechnen" bei WITTMANN und MÜLLER jenen "Grundbestand von Wissenselementen und Fertigkeiten […], den die Kinder abschließend auswendig lernen müssen" (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 7); dazu gehören im ersten Schuljahr auch die Aufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins. Das Auswendigwissen wird dabei aber nicht als Zweck für sich, sondern explizit als *Mittel für einen höheren Zweck* betrachtet; WITTMANN und MÜLLER erläutern dies mit einem Vergleich aus dem Bereich der Musik:

> *"Die Blitzrechenübungen entsprechen den Finger- und Tonleiterübungen. Die Erforschung von Mustern in produktiven Übungen, bei Zahlexpeditionen oder der Denkschule usw. ist dem Spielen schöner Musikstücke vergleichbar"* (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 14).

Dem "Spielen schöner Musikstücke" entspricht im Mathematikunterricht nach WITTMANN und MÜLLER das "aktiv-entdeckende Lernen", bei dem Kinder Einsicht in wichtige "Grundideen der Arithmetik" gewinnen sollen (a.a.O., S. 7). Dazu gehören unter anderem "Rechengesetze, Rechenvorteile" und "arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster" (a.a.O., S. 8), wie überhaupt der "fachliche Rahmen" dieser Unterrichtskonzeption von der Idee der Mathematik als "Wissenschaft von Mustern" (vgl. DEVLIN 2002) bestimmt wird:

> *"Muster dienen als Nährboden für die allgemeinen Lernziele Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren und Formulieren, und über schöne Muster können die Kinder auch die Ästhetik der Mathematik und den im besten Sinn spielerischen Umgang mit Mathematik erfahren"* (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 9).

Das Verhältnis von Auswendiglernen und aktiv-entdeckendem Lernen (worunter die Grundideen der Arithmetik als Inhalte dieses Lernens mit verstanden sind) wird von WITTMANN und MÜLLER nun wie folgt näher bestimmt:

> *"Aktiv-entdeckendes Lernen und die Automatisierung von Wissenselementen und Fertigkeiten sind keine Gegensätze, sondern bedingen einander. Aktiv-entdeckendes Lernen schafft die Verständnisgrundlage, die für die Automatisierung notwendig ist, und umgekehrt bildet automatisiertes Wissen die notwendige Grundlage für aktiv-entdeckende Lernprozesse auf der nächst höheren Stufe"* (a.a.O., S. 13).

Dazu ist anzumerken: Wäre *Verständnis* tatsächlich eine *notwendige* Grundlage für die Automatisierung, dann könnte ein "*zu früher* Übergang zur Automatisierung" gar nicht eintreten: Automatisierung könnte sich in diesem Fall *notwendigerweise* frühestens erst einstellen, wenn das Verständnis bereits abgesichert wurde. Das Attribut "notwendig" ist hier also eine Übertreibung. Sie ist nachvollziehbar mit Blick auf das Anliegen, das WITTMANN und MÜLLER vermutlich in dieser für Grundschullehrkräfte konzipierten Schrift verfolgen: nämlich in deutlichen Worten davor zu warnen, das *bloße* Auswendiglernen *anstelle* von Verständnis zu forcieren, und ebenso deutlich dafür zu werben, dem Verständnis jenen Stellenwert einzuräumen, der ihm gemäß dem Zielkatalog der aktuellen Fachdidaktik gebührt (vgl. Kap. 4).

An dieser Stelle soll aber die Sache selbst geprüft werden, *sine ira et studio*, also auch ohne Rücksichtnahme darauf, was in der LehrerInnenfortbildung Not tut. Im Sinne einer solchen Prüfung wurden in Kapitel 2.9 und 2.10 empirische Hinweise dafür gesammelt und wurde auch inhaltlich dafür argumentiert, dass ein auf Verständnis gründendes, durch Übung gefestigtes Ableiten von Grundaufgaben aus Kernaufgaben das Automatisieren *erleichtert*, also eine *günstige* Voraussetzung dafür darstellt. Dass es aber eine *unabdingbare* Voraussetzung sei, dass also das Automatisieren der Grundaufgaben *ausschließlich* auf Basis einer "Einsicht in Prinzipien" und nicht zumindest in Ansätzen *auch* als "Auswendiglernen von Einzelfakten" ohne (tiefere) Einsichten in arithmetische Grundideen möglich sei, wurde bereits in der Kritik an BAROODYS "schema-based view" als wenig plausibel (und empirisch nicht belegt) zurückgewiesen (vgl. Kap. 2.8). Gerade *weil* Automatisieren (zumindest bis zu einem gewissen Grad) tatsächlich auch ohne Verständnis möglich ist, warnen ja WITTMANN und MÜLLER davor, den Blitzrechenkurs als verständnis-fernes Automatisieren zu verstehen.

Prüfen wir die zweite Seite des von WITTMANN und MÜLLER behaupteten *wechselseitigen Bedingungsverhältnisses*: Das Automatisieren der additiven Grundaufgaben sei "notwendige Grundlage für aktiv-entdeckende Lernprozesse auf der nächst höheren Stufe". Dabei ist zu berücksichtigen, dass im Einspluseins und Einsminuseins als Teilübungen des Blitzrechenkurses im ersten Schuljahr keine weitere Einschränkung vorgenommen wird; die Rede ist schlicht von "Plusaufgaben" und "Minusaufgaben" (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2007, S. 12f). Demnach "müssen" gemäß der Zielvorgabe von WITTMANN und MÜLLER (wie gemäß jener von RADATZ u.a. 1996, vgl. Kap. 3.2.2.1) offenbar *sämtliche* additive Grundaufgaben (also auch alle Additionen und Subtraktionen mit Zehnerübergang) schon bis Ende des ersten Schuljahres "auswendig" gewusst werden. Inwiefern ist nun eine so weitreichende Automatisierung "notwendige Grundlage" für "aktiv entdeckendes Lernen auf höherer Stufe"?

– Nehmen wir zunächst als einen curricular naheliegenden Bereich das flexible, auf Einsicht in Rechengesetze gründende und diese Einsicht vertiefende Rechnen mit zweistelligen Zahlen im zweiten Schuljahr. In Kapitel 3.1.2 wurde nachzuweisen versucht, dass zum einen das *zählende* Rechnen tatsächlich (vorwiegend wegen seiner Implikationen für das Zahl- und Operationsverständnis) wesentlichen Zielen im Wege steht, die mit dem halbschriftlichen Rechnen verfolgt werden. Weiters wurde argumentiert, dass für die Hauptstrategien des halbschriftlichen Rechnens das Auswendigwissen der Grundaufgaben im Zahlenraum bis einschließlich 10 eine wesentliche *Erleichterung* darstellt. Die Analyse hat aber auch ergeben, dass das darüber hinausgehende Auswendigwissen auch noch der Aufgaben mit Zehnerübergang bei drei von vier Hauptstrategien *keinen zusätzlichen Vorteil* verschafft. Aus dem halbschriftlichen Rechnen lassen sich also unschwer gewichtige Argumente *gegen das zählende Rechnen* gewinnen, aber nicht zwangsläufig für das *Auswendigwissen sämtlicher* Grundaufgaben. Denn auch das (rasche, sichere) *Ableiten* von zumindest einzelnen Grundaufgaben ist zumindest mit *diesem* "Lernprozess auf nächsthöherer Stufe" gut vereinbar. Zweifelsohne schafft das Auswendigwissen hier aber gewisse *Vorteile.* Diese sind aber bereits durch Auswendigwissen der Grundaufgaben im Zahlenraum *bis zehn* gegeben, sofern dies kombiniert ist mit sicheren, weitgehend automatisiert ablaufenden (nicht-zählenden) Ableitungsstrategien für Aufgaben mit Zehnerübergang.

– Erst bei den schriftlichen Normalverfahren lässt sich tatsächlich argumentieren, dass das Auswendigwissen auch noch der Additionen mit Zehnerübergang *zweckmäßig* ist im Sinne einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisses (vgl. GERSTER 1994, S. 45); *unabdingbar notwendig* ist es, wie in Kapitel 3.1.1 dargestellt, auch dafür nicht. Was die Subtraktionen mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20 betrifft: Der österreichische Lehrplan sieht im dritten Schuljahr für das schriftliche Subtrahieren verpflichtend das *Ergänzungsverfahren* vor. *Dabei* entlastend wäre das Auswendigwissen *aller* Aufgaben des kleinen Einsminuseins nur dann, wenn diese konsequent *als Ergänzungsaufgaben* gewusst würden. Ohnedies aber sind die schriftlichen Normalverfahren in einem Mathematikunterricht, der der Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens verpflichtet ist, in ihrer Bedeutung stark relativiert, werden doch in dieser Konzeption halbschriftliches Rechnen und Kopfrechnen mit guten Argumenten als "wichtigste Rechentypen" des Grundschulunterrichts angesehen (vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994b, S. 3). Umso weniger lässt sich gerade auf Basis des "aktiv-entdeckenden Lernens" rechtfertigen, dass das *Auswendigwissen* (noch dazu schon bis Ende des ersten Schuljahres) auch alle *Grundaufgaben mit Zehnerübergang* umfassen sollte.

Nun ist das *flexible* Rechnen unter Erforschung und Ausnutzung von Rechenvorteilen, die ihrerseits auf Rechengesetzen beruhen, freilich nur *ein* Teilziel innerhalb der umfassenden Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens. Aber auch für andere "inhaltliche" und "allgemeine" Lernziele (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 7), die in diesem übergeordneten "fachlichen Rahmen" der "Mathematik als Wissenschaft von den Mustern" angesiedelt sind, lassen sich die oben argumentierten *Relativierungen* aufrecht erhalten:

– Das fortgesetzte *zählende Rechnen* behindert die Entwicklung von Zahl- und Operationsverständnis, so wie es selbst Ausdruck davon ist, dass das Kind Zahlstrukturen und operative Zusammenhänge nicht benutzt (vgl. Kap. 2.10). *Deshalb* sind wesentliche Grundideen der Arithmetik wohl nur zu erreichen, wenn Kinder das zählende Rechnen überwinden. Auch die im Lehrplan höherer Schulstufen vorgegebenen Inhalte sprechen dafür, dass diese Überwindung nach Möglichkeit schon im ersten Schuljahr erfolgen sollte. *Daraus* folgt aber nicht zwingend, dass die additiven Grundaufgaben bereits im ersten Schuljahr *zur Gänze automatisiert* werden müssen. Ziele wie das Erkennen von Rechengesetzen und Rechenvorteilen, das Verstehen von Mustern und Strukturen sind mit dem *Ableiten* von zumindest einigen (noch) nicht automatisierten Grundaufgaben, gerade solchen mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20, nicht nur absolut *vereinbar*. Mehr noch: Solche Ziele werden, wenn ein Kind Ableitungsstrategien verwendet, *uno actu* mit dem Rechnen erfüllt.

- Dass die additiven Grundaufgaben tatsächlich *in ihrer Gesamtheit* bereits im ersten Schuljahr *automatisiert* (und nicht nur unter Einschluss von Ableitungen *nicht-zählend beherrscht*) werden, ist also zwar eine *förderliche*, aber wohl keine *unabdingbare* Voraussetzung für "aktiv-entdeckende Lernprozesse auf höherer Stufe". So konnte etwa STEINWEG in ihrer Studie über die Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses zeigen, dass "auch Kinder, die 'schlecht' rechnen oder gewisse Rechenverfahren noch nicht beherrschen, [..] durchaus Muster erkennen und beschreiben" können. Freilich zeige sich beim Zahlenmusterverständnis aber "der positive Einfluss einer guten Rechenkompetenz" (STEINWEG 2001, S. 261). Wer die von WITTMANN und MÜLLER formulierten Unterrichtsziele teilt, muss also schon deshalb auch die Rechenkompetenz fördern: wegen ihres positiven Einflusses auf die Erreichung übergeordneter mathematischer Zwecke. Dennoch sollte der begriffliche Unterschied zwischen *günstiger* und *notwendiger* Bedingung nicht missachtet werden, nicht nur aus Gründen der theoretischen Exaktheit, sondern vor allem auch in pädagogisch-praktischer Hinsicht. Denn eine *notwendige* Bedingung darf unter keinen Umständen vernachlässigt werden, da per definitionem alles weitere von ihr abhängt. Eine *förderliche* Bedingung muss aber sinnvoller Weise stets ins Verhältnis gesetzt werden zum gesamten Gefüge aus Bedingungen und Zwecken. Dabei kann sich ergeben, dass es noch andere, gleichfalls förderliche oder vielleicht auch tatsächlich notwendige Bedingungen gibt, deren Herstellung den angestrebten übergeordneten Zwecken besser dient, also *zweckmäßiger* ist.
- Selbst als *förderliche* Bedingung lässt sich das *frühe* Automatisieren der Grundaufgaben nur im Zahlenraum *bis zehn* schlüssig argumentieren. Darüber hinaus auch Additionen und Subtraktionen mit Zehnerübergang auswendig zu wissen, erleichtert zwar das schriftliche Rechnen (s.o.). Dass diese weiter reichende und deshalb wohl auch nur mit höherem Übungsaufwand erreichbare Automatisierung aber für das flexible halbschriftliche Rechnen, das Begreifen von Rechengesetzen, das Erkennen, Beschreiben und Fortsetzen von Mustern oder für andere in der Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens wesentliche Ziele des Mathematik-, respektive Arithmetikunterrichts hilfreich wäre, ist wenig plausibel und wird von WITTMANN und MÜLLER jedenfalls nicht hinreichend argumentiert. Und wenn man tatsächlich aus den schriftlichen Verfahren ein Argument für die Automatisierung auch der Additionen und Ergänzungen mit Zehnerübergang herleiten möchte, so könnte man damit den Kindern jedenfalls noch bis ins dritte Schuljahr hinein Zeit lassen.

3.2.2.3 Die Position von GERSTER

GERSTER kleidet *seine* Zielvorgabe für die Behandlung der additiven Grundaufgaben in drastische Worte:

> *"Zählmethoden als alleinige oder vorwiegend praktizierte Lösungsstrategie bei Kindern über das erste Schuljahr hinaus zu tolerieren ist unterlassene Hilfeleistung und bewirkt, dass sich Unterschiede zwischen schwachen und befähigten Schülern ständig vergrößern"* (GERSTER 1994, S. 46).

Wer eine Methode nicht "tolerieren" will, tritt üblicherweise für deren *Verbot* ein. Aus GERSTERS Schriften geht freilich deutlich hervor, dass es ihm fernliegt, Kindern eine Strategie verbieten zu wollen. Das Zitat, einem "Handbuch zur Grundschulmathematik" entnommen, richtet sich vielmehr an *Lehrkräfte*, die offenbar möglichst eindringlich davor gewarnt werden sollen, über zählendes Rechnen *hinwegzusehen* und es zu betrachten als etwas, das sich "einfach so gibt" (GERSTER 1994, S. 43, unter Verweis auf LORENZ & RADATZ 1986). Da dem aber nicht so ist, erklärt GERSTER es für ein wesentliches Ziel des Arithmetikunterrichts schon des ersten Schuljahres, zählendes Rechnen für die Kinder *überflüssig* zu machen. Die Kinder sollen also erkennen, dass nicht-zählende Rechenstrategien für sie selbst von *Vorteil* sind:

> *"Will man der Entwicklung von 'Rechenschwächen' vorbeugen, müssen* im Unterricht von Anfang an [..] *Vorstellungen von Zahlen und vom Rechnen entwickelt werden, die günstigere Rechenstrategien nahelegen – und das sind vor allem* nicht zählende*"* (GERSTER 2009a, S. 262; Hervorhebungen im Original; vgl. auch GERSTER 2005, S. 220).

Ähnlich wie RADATZ u.a. (1996) begründet GERSTER sein entschiedenes Plädoyer für ein frühes Überwinden des zählenden Rechnens also mit dem Hinweis auf die Gefahr, dass sich Zählstrategien schon bald verfestigen können:

> *"Wenn sich ein Kind zum 'Zähler' entwickelt hat, sind Hilfsmaßnahmen ab Ende des zweiten Schuljahres sehr aufwendig und oft wenig erfolgreich"* (GERSTER 1994, S. 45f, unter Verweis auf LORENZ & RADATZ 1993, S. 117).

GERSTER zieht daraus freilich eine *andere* (zumindest deutlich *anders akzentuierte*) Konsequenz als RADATZ u.a. oder WITTMANN und MÜLLER: Er empfiehlt nicht das *Auswendiglernen* der additiven Grundaufgaben schon im ersten Schuljahr, sondern das *gezielte Erarbeiten nicht-zählender Rechenstrategien* auf Grundlage eines zuvor sicher gestellten Verständnisses von Zahlen und Rechenoperationen nach dem Teile-Ganzes-Konzept (GERSTER 2005, S. 210-231; GERSTER 2009a, 262-268; in der Anlage ähnlich, aber noch nicht so stringent GERSTER 1994). Das *Auswendigwissen* der Grundaufgaben nennt GERSTER in der älteren Darstellung zwar noch explizit als "Ziel" (GERSTER 1994, S. 46); als Begründung gibt er an, dass dies später bei komplexeren Berechnungen eine wichtige Entlastung des Arbeitsgedächtnisses bewirke (a.a.O., S. 39). Der Weg zum *Auswendigwissen* führt für ihn aber schon 1994 nicht über das *Auswendiglernen*, sondern über das "Trainieren von Abrufpfaden in numerischen Netzwerken" (a.a.O., S. 39). Es sollen also, so GERSTER, nicht *Einzelaufgaben auswendig gelernt*, sondern es soll das Nutzen von *Ableitungsstrategien automatisiert* werden (a.a.O., S. 55ff.).

In späteren Darstellungen nennt er als Ziel des frühen Arithmetikunterrichts dann auch nicht mehr das *Auswendigwissen*, sondern "die *rasche, mühelose Abrufbarkeit* der Basisfakten zur Vermeidung der Überlastung des Arbeitsgedächtnisses" (GERSTER 2009a, S. 267) und spricht davon, dass ein Kind das kleine Einsundeins dann

> *"beherrscht […], wenn es die Ergebnisse jeder der 121 Aufgaben rasch (d.h. innerhalb maximal drei Sekunden), sicher und mühelos aus dem Langzeitgedächtnis abrufen kann"* (GERSTER 2005, S. 231).

GERSTER nähert sich damit den Positionen VAN DE WALLEs oder auch BAROODYs an, die mit noch größerer Deutlichkeit das *Beherrschen der Grundaufgaben* ("mastery of facts") als Ziel des Arithmetikunterrichts wie folgt definieren:

> *"Mastery of a basic fact means that a child can give a quick respone (in about 3 seconds) without resorting to nonefficient means, such as counting"* (VAN DE WALLE 2004, S. 156).
>
> *"Number-combination proficiency or mastery should be defined broadly as including any efficient strategy, not narrowly as fact retrieval"* (BAROODY 2006, S. 30).

Das *rasche und sichere Ableiten* einer Grundaufgabe aus einer anderen (welche selbst als "Ableitungsbasis" auswendig gewusst wird) ist bei VAN DE WALLE und BAROODY also explizit als *Variante* des "Beherrschens der Basisfakten" in der Zieldefinition mit eingeschlossen. Implizit gilt dies wohl auch für GERSTER, wenn er den zeitlichen Rahmen mit drei Sekunden festlegt: *Direkter* Faktenabruf geht zumeist schneller (vgl. ASHCRAFT 1995). Dass GERSTER dennoch von "*Abruf* aus dem Langzeitgedächtnis" spricht, ist damit insofern vereinbar, als er Ableitungsstrategien einerseits als "Voraussetzung […] für die Einspeicherung im Langzeitgedächtnis" und andererseits als "*Abrufhilfen* für Ergebnisse von Einsundeinsaufgaben" (GERSTER 2005, S. 232; Hervorhebung im Original) bespricht. Diese mögliche Doppelfunktion von Ableitungsstrategien wurde bereits in Kapitel 2.12.2 näher beleuchtet. Sie kann dazu führen, dass im Einzelfall objektiv wie subjektiv nicht mehr unterschieden werden kann zwischen einem *direkten* Abruf aus dem Langzeitgedächtnis und einem *indirekten* Abruf mittels einer hochgradig automatisierten (und daher vom Ausführenden nicht mehr *bewusst* angewandten) Ableitungsstrategie (vgl. auch BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 104).

Bei GERSTER wird also (und deutlicher noch bei VAN DE WALLE und BAROODY) erstens das Ziel des frühen Arithmetikunterrichts von "Auswendigwissen" auf "Beherrschen" ("fact mastery") verschoben: Das rasche und sichere Ableiten wird in die Zieldefinition mit aufgenommen. Zweitens (und im Zusammenhang damit) erfolgt eine *klare Festlegung bezüglich der Mittel*, die zur Erreichung dieses Ziels eingesetzt werden sollen: Es sind dies jene Ableitungsstrategien, auf die später (sofern kein direkter Abruf erfolgt) als Abrufhilfen zurückgegriffen werden kann. Diese Strategien sollen im Rahmen einer "systematischen Erarbeitung des gesamten kleinen Einsundeins im Unterricht" gezielt behandelt werden (GERSTER 2005, S. 231; Näheres zu GERSTERS Vorschlägen bezüglich der Erarbeitung siehe Kapitel 4).

Ziel und *Mittel* des frühen Arithmetikunterrichts sind bei GERSTER damit untrennbar miteinander verbunden: Der Weg (das einsichtige Verwenden von Ableitungsstrategien) ist zu einem guten Teil auch schon das Ziel. Das bildet einen bedeutsamen Unterschied zur Konzeption des Arithmetikunterrichts bei RADATZ u.a. wie auch jener bei WITTMANN und MÜLLER: Auch von diesen werden Ableitungsstrategien zwar berücksichtigt, auch bei diesen spielt das Erarbeiten, Verstehen und Anwenden operativer Zusammenhänge eine wesentliche Rolle. Aber in ihren Konzeptionen steht das *Auswendigwissen* (und eben nicht "fact mastery") als ein frühes Teilziel *neben* den anderen (höher bewerteten) Teilzielen "Verständnis" (RADATZ u.a. 1996, S. 83) bzw. "aktiv-entdeckende Lernprozesse auf der nächst höheren Stufe" (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 13). Eben dieses *Nebeneinander* zweier Teilziele macht es für RADATZ u.a. notwendig, vor dem "bloßen Auswendiglernen ohne Verständnis" zu warnen und lässt es WITTMANN und MÜLLER geraten erscheinen, einem "zu frühen Übergang von der Grundlegung zur Automatisierung" entgegen zu treten (a.a.O., S. 13).

Solche Warnungen sind aber nur notwendig, wenn *beim Automatisieren selbst* kein Rückbezug auf die Verständnisgrundlage stattfindet. Hält man sich dagegen mit GERSTER (oder BAROODY, VAN DE WALLE...) daran, nicht Einzelfakten, sondern Ableitungsstrategien zu automatisieren, dann ist gar nicht absehbar, wie *dieses* Automatisieren "zu früh" erfolgen könnte. Denn um Ableitungsstrategien überhaupt verstehen und anwenden zu können, benötigt ein Kind ja genau jene gesicherten "Zahlvorstellungen und [..] Verständnis", die WITTMANN und MÜLLER durch ein verfrühtes *Auswendiglernen* gefährdet sehen (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 13). Manche Kinder werden diese Verständnisgrundlage für das Ableiten vermutlich früher, die anderen später erwerben; die einen werden daher auch *das Ableiten* früher, die anderen später *automatisieren*. Da aber in GERSTERS (BAROODYS, VAN DE WALLES...) Konzeption gerade das Herstellen operativer Zusammenhänge automatisiert werden soll, kann *diese Art des Automatisierens* (wenn es denn erfolgreich ist) nie losgelöst vom Verständnis für Zahlen und deren Zusammenhänge erfolgen; eine Warnung vor einer *übereilten* Automatisierung ist deshalb *in diesem Fall* überflüssig.

3.2.2.4 Zusammenfassung der Gemeinsamkeiten

Nach dem Herausstreichen der Unterschiede sollen abschließend aber auch noch einmal die wesentlichen *Gemeinsamkeiten* in den Konzeptionen und Zieldefinitionen von GERSTER, RADATZ u.a. sowie WITTMANN und MÜLLER hervorgehoben werden:

- Alle drei Konzeptionen für den arithmetischen Erstunterricht messen dem frühen Überwinden zählender Lösungsstrategien einen hohen Stellenwert bei.
- In allen drei Konzeptionen wird einem "bloßen Auswendiglernen" ohne Verständnisgrundlage eine klare Absage erteilt.
- In allen drei Konzeptionen wird – wenn auch in unterschiedlicher Form und mit beträchtlich unterschiedlicher Gewichtung – den Ableitungsstrategien ("heuristischen Strategien"

bei RADATZ u.a., der "Nutzung von Beziehungen" und dem "operativen Üben" bei WITTMANN & MÜLLER) hohe Bedeutung beigemessen.

Wie weit findet nun dieser weitreichende Konsens der deutschsprachigen Fachdidaktik bezüglich wichtiger Ziele des frühen Arithmetikunterrichts Berücksichtigung in einschlägigen schulischen Bestimmungen? Diese Frage wird im folgenden Kapitel, vorrangig mit Blick auf Österreich, näher untersucht.

3.3 Die Behandlung der additiven Grundaufgaben in Lehrplänen und Bildungsstandards

3.3.1 Österreich

Seit der Lehrplanreform 2003 differenziert der österreichische Lehrplan für Volksschulen auch in Mathematik nicht mehr zwischen erster und zweiter Schulstufe, sondern legt Unterrichtsziele für die "Grundstufe I" fest, welche die beiden ersten Schulstufen umfasst (BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR 2008). Bezüglich der additiven Grundaufgaben werden dort unter "Rechenoperationen" folgende Ziele bis Ende der zweiten Schulstufe formuliert:

> *"Gewinnen der additiven Rechenoperationen ohne Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung vorerst im kleineren Zahlenraum ohne und mit Notation der Rechensätze […]*
>
> *Erweitern der additiven Rechenoperationen bei steigendem Schwierigkeitsgrad mit Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung im größeren Zahlenraum"* (a.a.O., S. 147).

Worin genau das "Gewinnen" der additiven Rechenoperationen besteht, wird im Lehrplan nicht näher ausgeführt. Die Wortwahl – *Gewinnen* der *Operationen* – rückt das *Erarbeiten* des Operations*verständnisses* in den Vordergrund. Mit welchen *Strategien* Kinder die additiven Rechenaufgaben bis Ende der Grundstufe I vorzugsweise lösen sollten, legt der Lehrplan nicht fest. Operative Zusammenhänge finden insofern Erwähnung, als deren "Erkennen" explizit als Lehrplanziel festgehalten wird (a.a.O., S. 147). Zudem wird "operatives Üben, zB Tausch-, Nachbar-, Umkehr-, Zerlegungsaufgaben" unter den "Schwerpunkte[n] bis zum Ende der 2. Schulstufe angeführt" (a.a.O., S. 146). Auf die Möglichkeit, operative Zusammenhänge als *Lösungsstrategie* zu nutzen, wird im Lehrplan aber nicht eingegangen. Auch die Ausführung zum "Erweitern der additiven Rechenoperationen" als nächster Stufe nimmt nicht Bezug auf bestimmte Lösungsstrategien, welche etwa bei der Zehnerüber- und Zehnerunterschreitung anzustreben wären.

Das setzt sich fort in den Lehrplanvorgaben für die dritte Schulstufe, wo zwar das "Sichern der Grundaufgaben im additiven Bereich" gefordert wird (a.a.O., S. 152). Es lässt sich aber auch dort keine nähere Zielangabe finden bezüglich der Lösungs*strategien*, die bei diesen Grundaufgaben vorzugsweise anzuwenden seien. Im Lehrplan für die 4. Schulstufe werden die additiven Grundaufgaben nicht mehr erwähnt, Thema sind das schriftliche Rechnen sowie das mündliche Rechnen "mit steigendem Schwierigkeitsgrad" im mehrstelligen Zahlenraum.

Auch der "Kommentar zum Lehrplan der Volksschule" (WOLF 2004) spricht nur von einem nicht näher spezifizierten "Sichern der *additiven Grundaufgaben*", welches als "wesentliches Ziel bis spätestens zu Beginn der Erarbeitung der schriftlichen Rechenverfahren" (a.a.O., S. 518) genannt wird.

Diese durchgehende *Nichtbeachtung der Strategiefrage* im Bereich der additiven Grundaufgaben ist vor allem auch deshalb bemerkenswert, als sie in deutlichem Kontrast steht zu dem, was der österreichische Volksschullehrplan zu den "Rechenoperationen im multiplikativen Bereich" ausführt. Hier wird nämlich bereits für die Grundstufe I über die "*Erarbeitung* des Einmaleins und Einsineins" hinaus ein "weit gehendes *Automatisieren* von Grundaufgaben, insbesondere des kleinen Einmaleins" gefordert (BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR 2008, S. 147; Hervorhebungen M.G.). Und für die dritte Schulstufe heißt es dann ganz explizit: "Sichern der Grundaufgaben im multiplikativen Bereich: Einmaleins – *Automatisierung*" (a.a.O., S. 152; Hervorhebung M.G.).

Zwischenfazit: Der österreichische Lehrplan für Volksschulen legt zwar als klares Ziel fest, dass die Aufgaben des "kleinen *Einmaleins*" bis Ende der zweiten Schulstufe "weit gehend" und bis Ende der dritten Schulstufe vollständig automatisiert sein sollen. Bezüglich der Aufgaben des "kleinen *Einspluseins*" und "kleinen *Einsminuseins*" aber ist eine solche Automatisierung *kein* explizites Lehrplanziel. Der Lehrplan enthält bezüglich der für die Lösung der additiven Grundaufgaben anzustrebenden *Strategien* überhaupt *keine* Zielvorgabe; die Überwindung von "zählendem Rechnen" ist im Lehrplan *zumindest nicht explizit* als Ziel für österreichische Volksschulen festgeschrieben.

Die additiven Grundaufgaben finden auch Erwähnung in den "Bildungsstandards", welche das österreichische Unterrichtsministerium, darin internationalen Beispielen folgend, Anfang 2009 verordnet hat (BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH 2009). Die Bildungsstandards sollen für die "Nahtstellen der Bildungslaufbahn" (LUCYSHYN & SCHATZL 2004., S. 1), also für die 4. und 8. Schulstufe, "die notwendigen Vergleichsmaßstäbe" für die schulpolitisch gewünschte "interne und externe Evaluation" der Unterrichtsergebnisse liefern (a.a.O., S. 1); sie

> *"legen fest, welche Kompetenzen Schülerinnen und Schüler an wesentlichen Inhalten nachhaltig erworben haben sollten. Sie konzentrieren sich dabei auf die Kernbereiche eines Unterrichtsfaches und beschreiben die erwarteten Lernergebnisse […]. Bildungsstandards konkretisieren eine normative Erwartung, auf die die Schule hinarbeiten soll"* (a.a.O., S. 1).

Direkte Erwähnung finden die additiven Grundaufgaben in den Standards für die vierte Schulstufe im Abschnitt "Inhaltliche mathematische Kompetenzen" und dort im "Kompetenzbereich: Arbeiten mit Operationen". Unter "Mündliches Rechnen sicher beherrschen" wird gefordert, dass Kinder Ende der vierten Schulstufe die "additive[n] Grundaufgaben im Zahlenraum 20 […] sicher und schnell beherrschen" (BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH 2009). Darüberhinaus sollten sie in der Lage sein, "nicht automatisierte Rechenoperationen in Teilschritten" und "Ergebnisschätzungen mit Hilfe von Überschlagsrechnungen" durchzuführen (a.a.O.). Die darin implizit bereits enthaltene Forderung nach *Verständnis* der Rechenoperationen und von operativen Zusammenhängen wird unter "Die vier Grundrechnungsarten und ihre Zusammenhänge verstehen" auch explizit aufgestellt. Demnach sollten Kinder "über Einsicht in das Wesen von Rechenoperationen" verfügen, die "Zusammenhänge zwischen den Grundrechnungsarten erklären" sowie "Umkehroperationen" und "Tausch-, Nachbar- und Analogieaufgaben verwenden" können (a.a.O.).

Die Bildungsstandards sollen sich laut Gesetzestext zwar "aus den Lehrplänen [...] ableiten lassen" (a.a.O.). Zumindest im Bereich der additiven Grundaufgaben gehen sie über die im Lehrplan formulierten Ziele "Gewinnen" (Lehrplan für die Grundstufe I) und "Sichern" (Lehrplan für die 3. Schulstufe) aber wohl tatsächlich hinaus:

- Die Bildungsstandards fordern ein "sicheres und schnelles Beherrschen" der Grundaufgaben. Dass dabei an ein (zumindest weitgehendes) *Automatisieren* der additiven Grundaufgaben gedacht ist, wird deutlich durch die weitere Forderung, dass Kinder "nicht automatisierte Rechenoperationen in Teilschritten durchführen" können sollten. Das erlaubt den Umkehrschluss, dass es sich bei den zuvor genannten Grundaufgaben im Zahlenraum bis 20 um "automatisierte Rechenoperationen" handeln sollte, dass also "sicheres und schnelles Beherrschen" tatsächlich synonym mit "Automatisierung" verwendet wird.
- Zudem wird (anders als im Lehrplan) in den Bildungsstandards *kein Unterschied* in der Zielformulierung für die additiven und multiplikativen Grundaufgaben gemacht: Während der Lehrplan nur für die letzteren Automatisierung fordert, sollen gemäß Standards *beide* in gleicher Weise "sicher und schnell beherrscht" werden.

Vor einer zusammenfassenden Würdigung der in Lehrplan und Bildungsstandards für den österreichischen Unterricht formulierten Zielvorgaben wird im nächsten Abschnitt zunächst auf vergleichbare Bestimmungen in Deutschland eingegangen.

3.3.2 Deutschland

In Deutschland sind Lehrpläne Bundesländersache; die additiven Grundaufgaben werden in den Grundschul-Lehrplänen der einzelnen Länder durchaus unterschiedlich behandelt. Auf drei Bundesländer soll wegen ihren gegenüber Österreich deutlich klarer formulierten und anders akzentuierten Lehrplanbestimmungen näher eingegangen werden.

3.3.2.1 Bayern

Der bayerische Grundschullehrplan (vgl. BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUR, http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=e3e56d177fef177dcfcd7910ffa68941, 9.12.2009) differenziert die Lehrplanziele im Bereich der Grundschulaufgaben sehr genau bezüglich der *Lösungsstrategien*, die in bestimmten *Teilbereichen* auf bestimmten *Jahrgangsstufen* jeweils anzustreben sind:

– Demnach sollen bereits auf der Jahrgangsstufe 1 die " Zerlegungen im Zahlenraum bis zehn" wie auch die "Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 10 und deren Umkehrung" jeweils explizit *automatisiert* werden. Dass damit kein "bloßes Auswendiglernen" gemeint ist, macht der Zusatz "Rechengesetze und Rechenstrategien entdecken, Rechenwege beschreiben" deutlich (a.a.O., S. 91).
– Bei Aufgaben mit Zehnerüber- und -unterschreitung macht der Bayerische Lehrplan eine klare Unterscheidung: Die *Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben* im Zahlenraum bis 20 sollen bereits auf der Jahrgangsstufe 1 automatisiert werden. Ansonsten gilt als Ziel dieser Jahrgangsstufe aber: "*Mit Zehnerüberschreitung addieren und subtrahieren*. Verschiedene Rechenwege entdecken, beschreiben und notieren" (a.a.O., S. 94). Aufgaben mit Zehnerübergang sollen also durch Ableitungsstrategien gelöst werden, wobei diese explizit nicht auf das "Teilschrittverfahren" (vgl. Kap. 2.10.9) beschränkt bleiben sollen ("*verschiedene* Rechenwege").
– Auf der Jahrgangstufe 2 wird diese Unterscheidung innerhalb der additiven Grundaufgaben aufgegeben. Nun wird es Ziel des Unterrichts, *sämtliche* "Einspluseinssätze mit Ergebnis bis 20 und deren Umkehrung [zu] automatisieren" (a.a.O., S. 95).

In dieser differenzierten Behandlung der additiven Grundaufgaben besteht völlige Übereinstimmung zwischen dem Bayerischen Lehrplan und den Empfehlungen etwa von SCHIPPER (2005, S. 7). SCHIPPER seinerseits ist an dieser Stelle deutlich zurückhaltender als noch RADATZ u.a. (1996, S. 83), welche ohne jede Einschränkung gefordert hatten, dass *sämtliche* Einspluseins- und Einsminuseinsaufgaben bereits am Ende des 1. Schuljahres auswendig gewusst werden sollten (vgl. Kap. 3.2).

3.3.2.2 Nordrhein-Westfalen

Bei aller Differenziertheit der Zielvorgaben wird im bayerischen Lehrplan nicht näher erläutert, *warum* explizit auf *Automatisierung* der additiven Grundaufgaben Wert gelegt wird. Anders in den aktuellen "Richtlinien und Lehrpläne[n] zur Erprobung für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen" (MINISTERIUM FÜR SCHULE, JUGEND UND KINDER DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN 2003). Hier werden "unmittelbar abrufbare Kenntnisse (wie die Aufgaben des Einspluseins)" mit der Begründung gefordert, dass diese die "Basis allen Rechnens" bilden würden (a.a.O., S. 76). Das Rechnen selbst wiederum wird im Rahmen einer übergeordneten "zentralen Zielsetzung" behandelt:

> *"Die zentrale Zielsetzung im Bereich Arithmetik besteht in der Ausbildung von Verständnis, Sicherheit und Flexibilität im Umgang mit Zahlen und mit Rechenoperationen"* (a.a.O., S. 75).

Wie der bayerische Lehrplan fordern auch die nordrhein-westfälischen "Richtlinien und Lehrpläne" explizit die *Automatisierung* der "Zahlensätze des kleinen Eins*plus*eins" (a.a.O., S. 78; Hervorhebung M.G.). Für deren *Umkehrungen* (also für die *Minus*aufgaben) wird das *Üben "bis zur Geläufigkeit"* zum Ziel erhoben (a.a.O., S. 78; Hervorhebung M.G.). Diese sprachliche Differenzierung wird in den "Richtlinien und Lehrplänen" nicht begründet, so dass unklar bleibt, ob "Geläufigkeit" und "Automatisierung" als Synonyme zu verstehen sind. Immerhin denkbar ist, dass damit tatsächlich eine *Abstufung* in der Zielsetzung angestrebt wird, die etwa auch LORENZ und RADATZ empfehlen und wie folgt formulieren und begründen:

> *"Beim Lernen der Subtraktionsaufgaben bis 20 sollte man bedenken, dass auch die allermeisten Erwachsenen nicht alle Lösungen dieser Grundaufgaben [...]automatisiert nennen können. Es reicht völlig [...] wenn sie die Kernaufgaben beherrschen [...]. Davon lassen sich die restlichen Aufgaben ableiten"* (LORENZ & RADATZ 1993, S. 133).

Ein nicht unwesentlicher Unterschied zum bayerischen Lehrplan ergibt sich daraus, dass die nordrhein-westfälischen "Richtlinien und Lehrpläne" Ziele nur für die "Klassen 1 und 2" gemeinsam ausweisen. Es fehlt also eine gesonderte Zielvorgabe, die (wie in Bayern) festlegt, wie weit die additiven Grundaufgaben bereits in Klasse 1 zu automatisieren sind. Ohne dass deshalb die Bedeutung der frühen Automatisierung relativiert würde, ist der zeitliche Spielraum für das Erreichen dieses Ziels in Nordrhein-Westfalen also weiter bzw. flexibler.

3.3.2.3 Hessen

Der "Rahmenplan Grundschule" des Bundeslandes Hessen (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM, http://www.hessisches-kultusministerium.de/irj/HKM_Internet?cid=5df05f498ea6a7b1f8b10a875c9983ca, 9.12.2009) ist für diese Arbeit insofern von besonderem Interesse und wird deshalb gesondert erwähnt, als hier explizit auf das zählende Rechnen als

"Gegenpol" zur angestrebten Automatisierung der additiven Grundaufgaben eingegangen wird. In den Ausführungen zum "Addieren und Subtrahieren" heißt es da:

> *"Dabei ist darauf zu achten, daß die Kinder vom (ab)zählenden Rechnen hingeführt werden zum denkenden und anwendungsorientierten Rechnen mit Hilfe von strukturierten Mengenbildern, Nachbar-, Tausch- und Umkehraufgaben, durch Zerlegen in Teilschritte, Erkennen und Anwenden von Analogien. Dies gilt besonders für das Überschreiten der Zehnerzahlen (und später auch der Hunderter- und Tausenderzahlen). Dabei sind unterschiedliche Vorgehensweisen möglich und erwünscht"* (a.a.O., S. 152).

Der Begriff "denkendes Rechnen" wurde bereits als problematisch kritisiert (vgl. Kap. 3.1.3). Bemerkenswert ist aber, dass hier das Festhalten an Zählstrategien nicht nur implizit (durch das Drängen auf Automatisierung der Grundaufgaben), sondern auch ganz explizit Erwähnung findet; die schulischen Zielvorgaben würden demnach explizit verfehlt, wenn ein Kind am zählenden Rechnen hängen bliebe.

Vergleichsweise dürftig fallen dann allerdings die weiteren Hinweise zur Erarbeitung der additiven Grundaufgaben aus: Diese sollten im "1./2. Schuljahr" von den Kindern "verstehen" gelernt werden, das "1+1" sollte in diesem zeitlichen Rahmen "zunächst handelnd, dann gedächtnismäßig im Zahlenraum bis 100" erlernt werden (a.a.O., S. 153). Nun wird das Hessische Kultusministerium wohl kaum fordern, dass Kinder sämtliche Plusaufgaben im "Zahlenraum bis 100" *automatisieren*. "Gedächtnismäßig" kann also nur heißen, dass beim Plusrechnen in diesem Zahlenraum durchgehend auf automatisierte Grundaufgaben zurückgegriffen werden soll. Zu diesen selbst finden sich aber keine ähnlich differenzierten Zielvorgaben wie in den analogen Bestimmungen Bayerns oder Nordrhein-Westfalens.

3.3.3 Vergleich der schulischen Zielvorgaben zu den additiven Grundaufgaben in Österreich und Deutschland

Das Interesse dieser Arbeit gilt dem arithmetischen Erstunterricht in *Österreich*. Auf die schulischen Bestimmungen in drei deutschen Bundesländern wurde nur deshalb näher eingegangen, weil durch den Vergleich die Besonderheiten der in Österreich geltenden Zielvorgaben deutlicher hervortreten:

– Die erst Anfang Jänner 2009 erlassenen, schon deshalb den Unterricht bislang nicht bestimmenden neuen *Bildungsstandards* definieren das "schnelle und sichere Beherrschen" nicht nur der multiplikativen, sondern mit gleicher Formulierung auch der additiven Grundaufgaben als Kompetenz, über die Kinder am Ende der vierten Schulstufe "in der Regel verfügen sollten". Die Bildungsstandards geben damit für das Ende des vierten Schuljahres ein Ziel für die Rechenfertigkeit im Bereich der additiven Grundaufgaben vor, das die aktuelle fachdidaktische Diskussion in diesem Bereich klar widerspiegelt.

– Der in Österreich gültige *Lehrplan* aber widmet der Frage, mit welcher Strategie bzw. welchen Strategien Kinder die additiven Grundaufgaben lösen sollen, keine Beachtung. Er spricht lediglich von einem nicht näher bestimmten "Gewinnen" und späteren "Sichern" der Grundaufgaben. "Automatisieren" ist im Lehrplan explizit nur für die multiplikativen Grundaufgaben gefordert. Damit wird die gemäß der aktuellen Fachdidaktik entscheidende Bedeutung, welche der *frühen* Überwindung von Zählstrategien für die weitere Entwicklung nicht nur von Rechenfertigkeiten, sondern des Zahl- und Operationsverständnisses und damit der Grundlagen der gesamten weiteren arithmetischen Entwicklung zukommt, im geltenden Lehrplan nicht angemessen berücksichtigt.
– Dass schulische Zielvorgaben bezüglich der additiven Grundaufgaben auch wesentlich umfassender und detailreicher formuliert werden können, zeigen die Beispiele aus Bayern, Nordrhein-Westfalen und Hessen. Diese halten unmissverständlich fest, dass das Ziel des frühen Arithmetikunterrichts in der Überwindung von Zählstrategien (in Hessen explizit, in Bayern und Nordrhein-Westfalen implizit) und in der Automatisierung additiver Grundaufgaben bestehen sollte (in Bayern im Zahlenraum bis zehn und bei den Verdoppelungen bis 20 bereits im ersten Schuljahr, in den beiden anderen Bundesländern bis spätesten Ende des zweiten Schuljahres). Die deutschen Lehrpläne entsprechen damit in diesem Punkt grosso modo dem Stand der fachdidaktischen Diskussion, wobei die unterschiedlichen Bestimmungen in Detailfragen (Automatisierung schon bis Ende des ersten oder erst bis Ende des zweiten Schuljahres, Automatisierung nur der Additionen oder auch der Subtraktionen mit Zehnerübergang) sich jeweils auch auf unterschiedliche Positionen innerhalb dieser Diskussion berufen könnten.
– Ein Weiteres ist festzuhalten: Dass es wichtig sei, zählende Lösungsstrategien *frühzeitig* zu überwinden, wenn deren *Verfestigung* bei zumindest einem Teil der zählenden Rechner verhindert werden soll, ist Konsens innerhalb der aktuellen Fachdidaktik (vgl. Kap. 3.2). Wenn also die österreichischen Bildungsstandards unter den Zielen bis Ende des vierten Schuljahres das "schnelle und sichere" Beherrschen der additiven Grundaufgaben anführen, dann muss von fachdidaktischer Seite ergänzt werden, dass dieses Ziel nur erreicht werden kann, wenn das zählende Rechnen bereits wesentlich früher durch nicht-zählende Strategien abgelöst wird. Deshalb ist es *aus der Sache heraus konsequent*, dass die schulischen Bestimmungen in den genannten deutschen Bundesländern die Automatisierung der additiven Grundaufgaben als Ziel der ersten oder spätestens zweiten Schulstufe unmissverständlich festschreiben. Dies nicht zu tun, ist aus denselben Gründen ein klarer *Mangel des österreichischen Lehrplans.*

An dieser Stelle sollte nicht mehr geleistet werden als eine sachliche Analyse schulischer Zielvorgaben und deren Vergleich mit den Zielvorstellungen, die in der aktuellen fachdidaktischen Literatur formuliert und begründet werden. Ob und auf welche Weise die dabei festgestellten Unterschiede des geltenden österreichischen Lehrplans zu den Zielvorgaben deutscher Bundesländer in der schulischen Realität auch tatsächlich unterschiedlich wirksam werden, wäre lohnendes Thema einer eigenen Untersuchung. Wieweit in Österreich approbierte Schulbücher und die Einstellungen österreichischer LehrerInnen die Besonderheiten des österreichischen Lehrplans in diesem Bereich widerspiegeln, ist eine der Fragen, denen im Rahmen des empirischen Teils dieser Arbeit (vgl. Kap. 7) nachgegangen wird. Der theoretische Rahmen für diese Untersuchungen sollte hiermit abgesteckt sein.

3.4 Konsequenzen für die Begründung von Zielen im arithmetischen Erstunterricht

Auf Grundlage der in diesem Kapitel geleisteten Analysen lässt sich die eingangs gestellte Frage, ob die frühe Automatisierung der additiven Grundaufgaben ein lohnendes Unterrichtsziel sei, zusammenfassend wie folgt beantworten:

3.4.1 Argumente im Hinblick auf rechnerische Kompetenzen

Wenn eines der Ziele des Mathematikunterrichts der Grundschule darin besteht, dass Kinder *rechnen* lernen, muss als *Mittel* dafür konsequenterweise auf eine *frühe Ablösung vom zählenden Rechnen* und in weiterer Folge auch auf die *Automatisierung* der additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn (nicht unbedingt aber bis 20) hingearbeitet werden. Dieses Zweck-Mittel-Verhältnis stellt sich aber je nach Rechenmethode mit unterschiedlicher Dringlichkeit dar:

– Beim *schriftlichen* Addieren und Subtrahieren fallen die Nachteile des zählenden Rechnens vergleichsweise noch am wenigsten ins Gewicht. Sie bestehen im Wesentlichen in erhöhtem Konzentrationsaufwand, verringerter Lösungsgeschwindigkeit und erhöhtem Fehlerrisiko. Noch hinderlicher ist das zählende Rechnen bei den additiven Teilrechnungen, die im Rahmen des schriftlichen Multiplizierens und vor allem Dividierens anfallen, da hier (anders als beim schriftlichen Addieren und Subtrahieren) der Zahlenraum bis 18 in der Regel überschritten wird. Zudem drohen aufgrund der komplexeren Algorithmen Verfahrensfehler durch kumulative Überforderung des beim zählenden Rechnen mehr als beim Faktenabruf geforderten Arbeitsgedächtnisses.
– Das additive *halbschriftliche* Rechnen (sofern es nicht einfach als quasi-schriftliches Rechnen mit starr eingeübten "Rechenvorschriften" betrieben wird) wie auch das additive *Kopfrechnen* im zwei- und mehrstelligen Bereich erfordern Flexibilität in der Auswahl einer dem jeweiligen Zahlenmaterial angemessenen Strategie. Diese sollte im Idealfall ein vorteilhaftes Rechnen ermöglichen, zumindest aber mathematisch zulässig sein. Solche Flexibilität verlangt ein solides Verständnis von Zahlen, Rechenoperationen und operativen Zusammenhängen, wie es von Kindern, die dauerhaft an Zählstrategien festhalten, in

der Regel nicht entwickelt wird. Wer also, wie es die aktuelle Fachdidaktik weitgehend geschlossen tut, gerade die Kompetenz im halbschriftlichen Rechnen und Kopfrechnen für wesentlich erachtet, muss umso mehr darauf hinarbeiten, dass Kinder das zählende Rechnen schon im Bereich der additiven Grundaufgaben hinter sich lassen.

– Der Einsatz eines Taschenrechners kann das *exakte* Rechnen Stelle für Stelle ersetzen. Für den *kontrollierten* Einsatz des Taschenrechners ist es aber unumgänglich, die Ergebnisse der Tipp-Prozedur *überschlagend* kontrollieren zu können; das wiederum erfordert ein sicheres überschlagendes Kopfrechnen auch im mehrstelligen Zahlenraum. Wer dagegen auf den Taschenrechner *angewiesen* ist, weil er *nicht* kopfrechnen kann, ist dem Taschenrechner zugleich auch *ausgeliefert*. Gerade aus dem (zumindest in höheren Schulstufen, vor allem aber auch im Alltag) verbreiteten Einsatz von Taschenrechnern lassen sich also weitere Argumente dafür gewinnen, dass es zweckmäßig ist, dass Kinder schon früh Alternativen zum zählenden Rechnen und in weiterer Folge auch Automatismen im Bereich der additiven Grundaufgaben erwerben.

Soweit es um die Erarbeitung der oben angesprochenen *konzeptuellen* Voraussetzungen für ein flexibles halbschriftliches und Kopfrechnen geht, steht tatsächlich die *Überwindung des zählenden Rechnens* im Vordergrund; die *Automatisierung* der Grundaufgaben ist dafür zunächst noch nicht zwingend. Gerade das *Ableiten als nicht-zählende Alternative* zum Faktenabruf kann sogar als erste Form jener flexiblen Strategieauswahl betrachtet werden, die später beim halbschriftlichen Rechnen und Kopfrechnen im höheren Zahlenraum angestrebt wird.

Gerade beim *Kopf*rechnen im zwei- und mehrstelligen Bereich tritt dann freilich auch hochgradige Geläufigkeit im Bereich der additiven Grundaufgaben zumindest im Zahlenraum bis zehn als *prozedurale* Voraussetzung hinzu. Da hier Zwischenergebnisse (und eventuell auch die Rechenzahlen selbst) im Arbeitsgedächtnis gespeichert werden müssen, besteht nicht nur für zählende Rechner, sondern auch für Kinder, die Grundaufgaben noch mit merkbarem Konzentrationsaufwand und Zeitverzug ableiten müssen, die erhöhte Gefahr einer Überforderung ihrer Arbeitsgedächtniskapazität (bzw., im Paradigma des Kurzzeitgedächtnisses, die Gefahr, dass einzelne Rechenschritte so lange dauern, dass zuvor ermittelte Zwischenergebnisse bzw. die jeweils noch nicht behandelten Stellen für das Weiterrechnen nicht mehr verfügbar sind). Beim halbschriftlichen Rechnen ist diese Gefahr durch die Möglichkeit, Zwischenergebnisse und auch ganze Teilrechnungen schriftlich festzuhalten, deutlich reduziert.

Dieser Unterschied in den Anforderungen beim Kopfrechnen und halbschriftlichen Rechnen sollte beachtet werden bei der Beurteilung der Zeitvorgaben, die an didaktische Zielvorgaben da und dort geknüpft werden. Ohnedies lernt kein Kind deshalb schneller, weil Erwachsene meinen, es sollte ein bestimmtes Lernziel bis zu diesem oder jenem Zeitpunkt erreicht haben. Pädagogisch-didaktisch geboten sind aber *relative* Zeitvorgaben, die sich aus der zu lernenden Sache ergeben, wenn nämlich ein bestimmtes Lernziel bereits erreicht sein sollte, ehe ein darauf aufbauendes weiteres Lernziel sinnvoll in Angriff genommen werden kann.

In diesem Sinne sollte *Kopfrechnen* im zwei- und mehrstelligen Bereich einem Kind aus den genannten Gründen erst dann zugemutet werden, wenn es die additiven Grundaufgaben (zumindest im Zahlenraum bis zehn) tatsächlich *automatisiert* hat. *Halbschriftliches* Rechnen mit zweistelligen Zahlen hingegen verträgt sich eher damit, dass eventuell auch noch im Zahlenraum bis zehn einige Grundaufgaben durch Ableitungsstrategien gelöst werden.

Sofern man also Kindern nicht bereits im ersten Schuljahr oder zu Beginn des zweiten Schuljahres *Kopf*rechnen jenseits des Zahlenraum bis 20 abverlangen will (was jedenfalls durch den Lehrplan weder in Österreich, noch in den drei in Kapitel 3.3 besprochenen deutschen Bundesländern gefordert wird), ergibt sich auch keine lehrplan-immanente Begründung dafür, dass *alle* Kinder *alle* Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn (und schon gar nicht bis 20) bereits am Ende des ersten Schuljahres *auswendig* können müssen. *Wesentlicher* wäre (für das langfristige Ziel "Flexibilität im halbschriftlichen Rechnen und Kopfrechnen), dass möglichst *alle* Kinder im Laufe des ersten Schuljahres ein *solides Zahl- und Operationsverständnis* erwerben (was, wie ausgeführt, eine Ablösung vom zählenden Rechnen voraussetzt).

Für die weitergehende *vollständige Automatisierung* der Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn könnte, im Einklang mit den bis Ende des zweiten Schuljahres formulierten Lehrplanzielen, auch noch in den ersten Monaten des zweiten Schuljahres Zeit sein. Die noch weitergehende Automatisierung auch der Grundaufgaben mit Zehnerübergang besitzt mit Blick auf die bislang formulierten Ziele nicht dieselbe Dringlichkeit. Zweifelsfrei stellt sie aber für das Rechnen in höheren Zahlenräumen, mit welcher Methode immer dieses erfolgt, besonders aber beim schriftlichen Rechnen eine wesentliche *Erleichterung* dar. *Als solche* ist sie auch ein lohnendes Unterrichtsziel *nach* Erreichung der Automatisierung im Zahlenraum bis zehn.

3.4.2 Argumente im Hinblick auf weitere "Grundideen der Arithmetik"

Dass Rechnen mit Mathematik "wirklich nichts zu tun habe", wie es ENZENSBERGERS "Zahlenteufel" in dem diesem Kapitel als Motto vorangestellten Zitat behauptet, ist freilich (wie der Rest dieses Zitats) eine provokante Übersteigerung. Was der Autor damit im Sinne hatte, ist aber wohl Kritik an einer Sorte von Mathematikunterricht, der das Rechnen als Einüben von (selbst nicht thematisierten) Algorithmen der schriftlichen Normalverfahren in den Mittelpunkt stellt. Aber natürlich *kann* Rechnen sehr viel mit Mathematik, verstanden als "Wissenschaft von den Mustern" (vgl. Kap. 3.2.2), zu tun haben. Das gilt auch im engeren Sinn, mit Blick auf die Entwicklung von rechnerischen Kompetenzen selbst: Die beim Kopf- und halbschriftlichen Rechnen angestrebte *Flexibilität* ist ja nur zu erreichen, wenn Kinder auf Basis eines soliden Zahl- und Operationsverständnisses Einsicht in Rechengesetze erlangen und diese in weiterer Folge (auf Basis eines "Zahlenblicks") auch selbstständig anwenden können.

Während hier gewissermaßen *Mathematik* (bzw. mathematische Einsichten) als *Mittel für den rechnerischen Zweck* vonnöten sind, wurde in Kapitel 3.2 gezeigt, dass umgekehrt gewisse *rechnerische Kompetenzen* schon früh als *Mittel für übergeordnete mathematische Zwecksetzungen* erforderlich sind (sofern denn solche mit dem Mathematikunterricht an Grundschulen verknüpft werden). Aber auch hier ergab sich eine Differenzierung, die bei der Formulierung von Zielvorgaben beachtet werden sollte:

Zählende Lösungsstrategien erschweren nachhaltig das Erkennen und Anwenden bzw. Fortsetzen von "arithmetische[n] Gesetzmäßigkeiten und Muster[n]", einer der für die Konzeption des "aktiv-entdeckenden Lernens" nach WITTMANN und MÜLLER zentralen und den gesamten Unterricht der Grundschule tragenden "Grundideen der Arithmetik" (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 7ff, s. Kap. 3.2.2). *Anhaltend zählendes* Rechnen steht daher auch im Widerspruch zu den "strands" von "mathematical proficiency" nach der Zieldefinition der NCTM (s. Kap. 3.2.1) und allen anderen, Verständnis und Einsicht betonenden Zielkatalogen für den Mathematikunterricht an Grundschulen, welche die aktuelle fachdidaktische Diskussion beherrschen. Wer diese Ziele teilt (und das tun auch die jüngst erlassenen Bildungsstandards für Österreich), der muss als eines der Mittel zur Erreichung dieser Ziele anstreben, dass Kinder *zählende Strategien überwinden*. Angesichts der *Gefahr einer Verfestigung* von Zählstrategien einerseits, der *Abhängigkeit weiterer Lehrplanziele* von der Überwindung zählender Strategien andererseits sollte diese Überwindung des zählenden Rechnens wenn möglichst schon im Laufe des ersten Schuljahres weit gediehen sein.

Auch aus dieser Argumentationslinie folgt freilich nicht zwingend, dass Kinder *sämtliche* additiven Grundaufgaben auch schon im Laufe des *ersten* Schuljahres *automatisieren* müssen. Gerade das als gleichfalls nicht-zählende Alternative zur Verfügung stehende *Ableiten* von Grundaufgaben aus einigen wenigen Kernaufgaben (die ihrerseits dann freilich sehr wohl automatisiert sein müssen) kann mit einiger Berechtigung als frühe Verwirklichung der arithmetischen Grundideen "Rechengesetze, Rechenvorteile" und "arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster" (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 8) betrachtet werden. Zumindest ist das Ableiten wenigstens bis zum Ende des ersten Schuljahres mit einem Unterricht, der diesen Grundideen nachgeht, bestens vereinbar. Das aktiv-entdeckende Lernen auf höheren Stufen und in höheren Schulstufen (etwa das Entdecken von Mustern im zwei- und mehrstelligen

Bereich) wird aber erschwert, wenn die additiven Grundaufgaben bis zehn in diesen höheren Schulstufen noch nicht automatisiert sind. Wer der Überzeugung ist, dass Kinder in ihrer weiteren Beschäftigung mit Mathematik insgesamt davon profitieren, wenn sie die additiven Grundaufgaben zumindest bis zehn tatsächlich *automatisiert* haben, kann also mit einiger Berechtigung den zeitlichen Spielraum für die Erreichung dieses weiter gesteckten Zieles (ohne deshalb das Ziel als solches zu relativieren) bis ins zweite Schuljahr hinein ausdehnen.
Wer mit den hier angeführten Argumenten für eine frühe Ablösung vom zählenden Rechnen eintritt, muss sich konsequenterweise zugleich auch *gegen* ein "*bloßes* Auswendiglernen" der Grundaufgaben stark machen, ein Auswendiglernen also, das ohne Rücksichtnahme darauf forciert wird, ob ein Kind operative Zusammenhänge zwischen den zu merkenden Aufgaben oder auch nur die operative Bedeutung dieser Aufgaben versteht oder nicht. Denn ein solches Auswendigmerken könnte, sofern es für sich genommen erfolgreich wäre, allenfalls als Mittel zur Beschleunigung und Fehlerreduktion beim schriftlichen Rechnen taugen. Es wäre aber vermutlich schon nicht mehr hilfreich für ein flexibles halbschriftliches und Kopfrechnen und auch sonst kaum tauglich als Mittel, um Mathematik als "Wissenschaft von den Mustern" erfolgreich betreiben zu können.

Wer aber wie einst WHEELER meint, man könne doch zunächst die "number combinations" als vorerst bedeutungslose Wortketten drillen und sie nachträglich mit "number concepts" füllen (vgl. WHEELER 1939, S. 311 und Kap. 2.9), also in einem ersten Schritt gewissermaßen nur die *Werkzeuge* fürs Mathematiktreiben produzieren, um sich danach gut gerüstet an die eigentliche Mathematik zu machen, der übersieht wohl dreierlei:

Erstens kann das Entdecken und Nutzen operativer Muster das Automatisieren der Basisfakten, also den Erwerb der angestrebten Werkzeuge, wesentlich *erleichtern;* warum sollten wir Kindern diese Erleichterung vorenthalten?

Zweitens betreibt ein Kind, das sich diese Werkzeuge durch das Nutzen von operativen Mustern erwirbt, dabei *selbst schon Mathematik*; wenn es uns aber darum geht, dass Kinder mathematisch tätig sind, warum dann nicht schon beim Lernen der arithmetischen Basisfakten?

Drittens ist zu befürchten, dass Kinder, denen wir solche Muster zunächst vorenthalten und das Auswendiglernen von für sie weitgehend bedeutungslosen Wortketten zumuten, danach kaum noch Lust haben werden, die *Mathematik* zu entdecken, die schon hinter diesen Wortketten steckt und mit ihrer Hilfe im Weiteren betrieben werden kann (vgl. GAIDOSCHIK 2009c, S. 12 und GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 40).

Soweit also die *begründbaren Zielvorgaben* für die Behandlung der additiven Grundaufgaben in den beiden ersten Schuljahren: begründbar aus übergeordneten Zielvorstellungen für den

Mathematikunterricht an Grundschulen einerseits, aus der Abhängigkeit mathematischen Lernens auf höheren Stufen von bestimmten Lernvoraussetzungen andererseits. In der Analyse dieser Zielvorgaben sind zwangsläufig immer wieder auch schon Anmerkungen dazu eingeflossen, welche didaktisch-methodischen Mittel zur Erreichung der Ziele seitens der aktuellen Fachdidaktik empfohlen werden. Diese Frage soll nun als letzte im Rahmen des Theorieteils im nächsten Kapitel noch ausreichend detailliert und systematisch behandelt werden. Erst vor diesem Hintergrund lassen sich manche der Entscheidungen, die im empirischen Teil dieser Arbeit zu treffen waren, hinreichend erklären bzw. manche der Ergebnisse der empirischen Untersuchungen auch angemessen interpretieren.

4 Fachdidaktische Empfehlungen für den Arithmetikunterricht im ersten Schuljahr

"Didaktische Anregungen, recht verstanden, sind niemals Rezepte mit Wirkungsgarantie, sondern eher Wahrscheinlichkeitsaussagen. Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen und Lehren zu erhöhen, das ist aber gewiss nicht wenig!"
KRAUTHAUSEN 2009, S. 114

Kapitel 3 hat gezeigt: In der deutschsprachigen Fachdidaktik besteht weitgehend Einigkeit darüber, dass die Überwindung des zählenden Rechnens und die Automatisierung der additiven Grundaufgaben zumindest im Zahlenraum bis zehn im Arithmetikunterricht schon bis Ende des ersten Schuljahres angestrebt werden sollten. Welche didaktisch-methodischen *Mittel* am besten geeignet seien, diese *Ziele* mit möglichst vielen Kindern zu erreichen, ist "auch – oder gerade – unter Experten durchaus strittig" (HASEMANN 2003, S. 55). Die Frage kann ja auch nur im Rahmen einer Gesamtkonzeption des mathematischen Anfangsunterrichts angemessen beantwortet werden, und wie MAIER mit Blick auf die "Geschichte der Zahlbegriffs-Methodik" feststellt,

> *"läßt sich wohl kaum ein Thema des schulischen Mathematikunterrichts finden, zu dessen Behandlung im Unterricht mehr methodische Konzepte entwickelt worden wären, als zum Aufbau des Zahlbegriffs im mathematischen Anfangsunterricht"* (MAIER 1990, S. 111).

Nun kann es nicht Aufgabe der vorliegenden Arbeit sein, diese Geschichte nachzuzeichnen (vgl. dazu MAIER 1990, S. 111-133; HASEMANN 2003, S. 55-61; RADATZ & SCHIPPER 1983, S. 26-47) oder auch nur die veröffentlichten aktuellen Positionen umfassend darzustellen. Ziel des vorliegenden Kapitels ist es aber, Kriterien herauszuarbeiten für eine fachdidaktisch fundierte Beurteilung des Arithmetikunterrichts jener Kinder, deren Strategieentwicklung im Rahmen dieses Dissertationsprojektes empirisch untersucht wurde. Dafür sollte es genügen, einige fachdidaktische Grundpositionen darzustellen, über die – bei allen Differenzen in Detailfragen – sich in den letzten zehn bis zwanzig Jahren doch ein zumindest breiter Konsens innerhalb deutschsprachiger FachautorInnen hergestellt hat; ein Konsens, der wohl PADBERG (2005, S. 29) in seiner "Didaktik der Arithmetik" dazu bewogen hat, von *dem* "gegenwärtigen Anfangsunterricht" zu sprechen.

Vermutlich wollte PADBERG damit aber nicht behauptet haben, dass die in fachdidaktischen Veröffentlichungen der jüngeren Zeit weitgehend einheitlich vertretenen Positionen tatsächlich immer dem entsprechen, was auch nur in der Mehrzahl der ersten Grundschulklassen im deutschsprachigen Raum tagtäglich *im Arithmetikunterricht gegenwärtig* ist. Nicht Unterrichts*realität* und *gegenwärtige Praxis* sind also Gegenstand der folgenden Ausführungen, sondern die *Empfehlungen und Anregungen*, die die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik zur Gestaltung des Arithmetikunterrichts im ersten Schuljahr formuliert. Ob und wie weit die Unterrichtspraxis in *(Nieder-)Österreich* diesen Empfehlungen folgt, wird auf dieser Grundlage in Kapitel 7 dargestellt werden.

4.1 Vom Zählen zu einer strukturierten Zahlauffassung

Dass "bei Schulanfang den vielfältigen Vorerfahrungen der Kinder zu den Zahlen Rechnung getragen werden sollte", musste 1983 noch von RADATZ und SCHIPPER (im Anschluss an WINTER 1981) der damals zumindest in "den meisten Schulbüchern" vorherrschenden *Vernachlässigung des Zählens* entgegengehalten werden (vgl. auch RADATZ 1982). Seit damals scheint sich aber zum Umgang mit den mathematischen Kompetenzen von SchulanfängerInnen folgender Konsens innerhalb der fachdidaktischen Literatur durchgesetzt zu haben:

Kinder bringen in der Regel weitreichende Vorkenntnisse unter anderem zur Zahlwortreihe und zum anzahlbestimmenden Zählen mit. So konnten zum Beispiel rund 97 Prozent von 1138 SchulanfängerInnen in der einflussreichen Untersuchung von SCHMIDT (1982) die Zahlwortreihe fehlerfrei bis mindestens "zehn", 70 Prozent bis mindestens "zwanzig" aufsagen und etwa 60 Prozent die Aufforderung "Lege sechzehn Plättchen!" korrekt erfüllen. Nachfolgende Untersuchungen (etwa SCHMIDT & WEISER 1982; SELTER 1995; GRASSMANN u.a. 1995; HENGARTNER & RÖTHLISBERGER 1995; HASEMANN 2003) bestätigten wiederholt, dass SchulanfängerInnen gerade in diesen Bereichen, aber auch schon beim (meist zählenden) Lösen von Additionen und Subtraktionen "*hohe* arithmetische Grundkenntnisse [haben], die wir nicht einfach ignorieren dürfen" (PADBERG 2005, S. 27; Hervorhebung im Original).

SCHIPPER weist zu Recht mit Nachdruck darauf hin, dass die oben zitierten Studien bei genauerer Analyse deutlich machen, dass

> *"in Anlehnung an den Sprachgebrauch von* CARRAHER/CARRAHER/SCHLIEMANN (1985) *viele Schulanfänger [..] gute 'Straßenmathematiker', jedoch noch keine guten 'Schulmathematiker'"* seien (a.a.O., S. 134).

Ihre "teilweise gut ausgeprägte Fähigkeit" zur Lösung arithmetischer Aufgaben bestehe also vor allem im Anwenden von "informellen, zumeist wohl zählenden Verfahren" im Rahmen von "kontextgebundenen Aufgaben" (a.a.O., S. 138) und dürfe deshalb mit Blick auf die Ziele des Anfangsunterrichts auch nicht überschätzt werden. Denn in diesem gehe es ja (siehe Kapitel 3) gerade darum, ein "auf Verständnis gegründete[s], flexible[s] Umgehen mit Zahlen und Rechenoperationen" und damit eben auch ein *nicht-zählendes* Lösen der additiven Grundaufgaben zu erreichen (a.a.O., S. 134).

Damit bringt SCHIPPER in seiner Warnung vor dem "Mythos" der "hohen mathematischen Kompetenzen" von SchulanfängerInnen aber nur pointiert zum Ausdruck, was innerhalb der aktuellen fachdidaktischen Diskussion ohnedies als Konsens gelten darf: An die oft weit reichende Kenntnis der Zahlwortreihe und die vorhandene Kompetenz der SchulanfängerInnen im Abzählen und zählenden Rechnen muss im Anfangsunterricht *konstruktiv angeschlossen* werden – aus Gründen der Motivation der Kinder (vgl. schon KÜHNEL 1916, S. 159; aktuell etwa HASEMANN 2003, S. 62; PADBERG 2005, S. 30; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 8), aber vor allem auch deshalb, weil das Zählen nun einmal tatsächlich

> *"fundamental für den Erwerb erster arithmetischer Fertigkeiten [ist] und [..] ein wichtiges Glied darstellen [kann] in der Kette der Entwicklungsschritte zur Einsicht in vielfältige Zahlbeziehungen"* (GERSTER 1994, S. 45; vgl. auch GAIDOSCHIK 2007, S. 14).

Vorkenntnisse *aufgreifen* heißt aber freilich nicht, sich mit ihnen auch schon zufrieden zu geben: Der Anfangsunterricht muss gerade dafür Sorge tragen, dass diese "Kette der Entwicklungsschritte" vom Zählen hin zu einer "Einsicht in vielfältige Zahlbeziehungen" von den Kindern auch tatsächlich geknüpft wird; er muss den Fortschritt von der "Straßenmathematik zur Schulmathematik" dadurch befördern, dass er Kinder von der rein oder vorwiegend zählenden Zahlbehandlung weiter zu führen versucht hin zur Einsicht in *Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen*.

Mit letzterem verlassen wir zwar vielleicht in der *Formulierung* den Boden des einleitend behaupteten "breiten Konsenses" innerhalb der deutschsprachigen Fachdidaktik. Tatsächlich ist es vor allem GERSTER, der (in Übersetzung entsprechender Formulierungen von RESNICK, siehe Kap. 2.10.4) das im arithmetischen Erstunterricht anzustrebende Zahlverständnis in die Worte "Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen" (etwa GERSTER 2009a, S. 267; GERSTER 2005, S. 235) oder auch "Zahlen im Teile-Ganzes-Konzept (etwa GERSTER 2009a, S. 267) fasst. *In der Sache* drückt er damit aber *cum grano salis* dasselbe aus

– wie WITTMANN und MÜLLER, wenn sie schon früh die "Entwicklung einer *strukturierten Zahlvorstellung*" (WITTMANN und MÜLLER 2004a, S. 22; Hervorhebung im Original) anstreben;
– oder wie SCHERER, wenn sie im Anschluss an WITTMANN und MÜLLER die Wichtigkeit von Übungen zur "strukturierten Zahlerfassung" gerade auch für "lernschwache" Kinder betont (etwa SCHERER 1999, S. 162);
– oder wie KRAUTHAUSEN wenn er vom "Aufbau [..] eminent wichtiger mentaler Bilder" auf der Basis einer "*strukturierten* [Zahl-]Darstellung" (KRAUTHAUSEN 1995, S. 95; Hervorhebung im Original) spricht;
– oder wie RADATZ u.a., wenn sie eine "Systematisierung der Vorkenntnisse" fordern, die wesentlich darin bestehe, dass Kinder Zahlen "in ihrer operativen Struktur erfassen" und das "Beziehungsgeflecht der Zahlen untereinander erarbeiten" (RADATZ u.a. 1996, S. 48f);

– oder wie LORENZ, wenn er davon spricht, dass Zahlen

  "nur in der Beziehung zu anderen Zahlen [existieren], die Zahl '9' lässt sich nicht allein denken, sondern nur als zwischen 8 und 10 liegend, als Dreifaches von 3, zwischen 1 und 10, aber nahe an 10 usw." (LORENZ 2003b, S. 107);

– oder wie SCHÜTTE, wenn sie zu dem von ihr verfassten Schulbuch (SCHÜTTE 2000) erläutert:

  "Übergeordnetes Prinzip ist die Schulung des 'Zahlenblicks', d.h. die Aufgaben sollen nicht sofort gerechnet, sondern auf ihre Struktur bzw. auf Beziehungen zu den anderen Aufgaben hin betrachtet und verändert werden" (SCHÜTTE 2002, S.5).

Mit dieser Auflistung (die unschwer verlängert werden könnte) soll nicht durchgestrichen werden, dass in den unterschiedlichen Formulierungen im Detail auch durchaus unterschiedliche Sichtweisen oder zumindest Gewichtungen zum Ausdruck kommen. Die konkreten Anregungen für die Erarbeitung des jeweils als "solide" oder "tragfähig" verstandenen Zahlverständnisses fallen dann bei den genannten AutorInnen auch keinesfalls identisch aus. Sie tragen aber in wesentlichen Bereichen gemeinsame Züge, auf Basis einer grundsätzlichen Übereinstimmung darüber, dass es bei der Behandlung der Zahlen im arithmetischen Anfangsunterricht *wesentlich* um das Erarbeiten von "Strukturen" und "Beziehungen" zu gehen habe und dass deshalb das "Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen [..] zu den wichtigsten Aktivitäten im Anfangsunterricht" gehört (RADATZ u.a. 1996, S. 70; ähnlich PADBERG 2005, S. 42).

Diese grundsätzliche Übereinstimmung bezüglich des früh anzustrebenden Teilziels ("Zahl als Zusammensetzung" bzw. "strukturierte Zahlvorstellung" bzw. "Zahl als Beziehungsgeflecht" usw.) führt zu einer grundsätzlichen Übereinstimmung (erneut: *cum grano salis*) auch bezüglich der *Unterrichtsaktivitäten*, die zur Erreichung dieses Teilziels angeraten werden:

Einschlägige Veröffentlichungen der letzten Jahre empfehlen in der Regel, Kinder in den ersten Schulwochen (neben einer "Festigung und Vertiefung des Zählens", PADBERG 2005, S. 31) gezielt zu einer *strukturierten, nicht-zählenden* Anzahl*erfassung* hinzuführen ("Quasi-Simultanerfassung" bei GERSTER, z.B. 2009a, S. 251). Da aber nur Anzahlen bis vier tatsächlich "simultan" erfasst werden können (vgl. Kap. 2.10.1), erfordert das eine *bewusste Gliederung* von Repräsentanten größerer Anzahlen in simultan erfassbare Teilanzahlen. Eine frühe Unterrichtsaktivität, die in der aktuellen Literatur angeregt wird, besteht deshalb darin, Kinder dazu anzuregen, zunächst ungeordnete Mengen durch Umgruppieren so zu ordnen, dass ihre Teilanzahlen "mit einem Blick" erfasst werden könne (vgl. GERSTER 2005, S. 211; WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 24-30; RADATZ u.a. 1996, S. 66-70).

Auch wenn Kinder *mit bereits gegliederten Darstellungen von Zahlen konfrontiert* werden, erfordert dies ein *bewusstes Wahrnehmen* der Teilanzahlen und ein *wissendes Zusammensetzen* dieser Teilanzahlen zum Zahlganzen. Ein "*wissendes* Zusammensetzen" ist dies deshalb, weil man beispielsweise in einer Darstellung der Acht als Doppel-Vier ja nur jeweils die Vier simultan erfassen kann. Die Erkenntnis, dass es sich um insgesamt acht handelt, wird daraus nur, wenn man eben bereits vorher wusste, dass acht aus zweimal vier besteht. Andernfalls müsste man die Gesamtanzahl selbst dann zählend ermitteln, wenn man die Teilanzahlen simultan erfasst hat.

Bei solchen Übungen zur quasi-simultanen Erfassung gegliederter Zahldarstellungen im Zahlenraum bis zehn wird in der Regel empfohlen, den *Darstellungen mit Fünferstruktur* besondere Beachtung zu widmen. In Anlehnung an FLEXER (1986) hat sich in diesem Zusammenhang der Begriff "Kraft der Fünf" eingebürgert (etwa KRAUTHAUSEN 1995; WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 33; GERSTER 2009a, S. 264). Nun können zwar Anzahlen von fünf für sich genommen gar nicht mehr sicher simultan erfasst werden (vgl. Kap. 2.10.1). Kinder können aber lernen (oder wissen es schon, weil sie die Zahl ihrer Finger an beiden Händen *bewusst wahrgenommen* haben), dass fünf die Hälfte von zehn ist. In weiterer Folge können sie lernen, gegliederten Zahldarstellungen im Zehnerfeld *quasi-simultan* zu erfassen. Dass dabei eine volle Reihe fünf (und daher zwei volle Reihen zehn) sind, wird also nicht im eigentlichen Sinne simultan erfasst, sondern muss (sofern es nicht zählend ermittelt werden soll) *gewusst* werden – gewusst als eine Besonderheit dieses per Konvention (und aus guten Gründen) im Unterricht bevorzugt verwendeten Darstellungsmittels (vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 58ff).

Dass die Fünf im Zehnerfeld nicht durch eine bloße Wahrnehmungsleistung erfasst werden kann, ist – im Sinne des Zwecks, der mit diesem Mittel verfolgt wird – durchaus von Vorteil: Geübt werden soll ja ohnedies nicht das Abrufen einer bei den meisten Kindern ohnedies vorhandenen Fähigkeit zur Simultanerfassung, sondern das *Nachdenken über Zahlen als Zusammensetzungen* aus anderen Zahlen. Dass hierbei der Zahl fünf eine besondere Rolle zukommt, liegt an unserem Stellenwertsystem, das die Zehn, also die Doppelfünf als Bündelungszahl verwendet. Zum Training werden je nach Autor etwa "Blitzblick-Übungen" mit Zehnerfelddarstellungen (GERSTER 2009a, S. 263) oder "Kurzzeitübungen am Rechenrahmen" (mit farblicher Fünfergliederung der Kugeln; RADATZ u.a. 1996, S. 71) oder Übungen mit "Wendekarten" (auf denen die Zahlen als Punktemuster mit Fünfergliederung dargestellt werden; WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 32) angeregt.

Bei all dem geht es freilich *nicht* um die Verabsolutierung jeweils nur einer Zahldarstellung (acht *nur* als fünf und drei, sieben *nur* als fünf und zwei usw.). Ziel ist die "Ausbildung und *flexible* Nutzung mentaler Bilder" (KRAUTHAUSEN 1995, S. 100; Hervorhebung M.G.), denn:

> *"Nur wenn beispielsweise die Zahl 8 den Kindern in ihrer ganzen operativen Struktur als 1+7, 2+6, 4+4 usw. im Bewusstsein ist, dann gelingen auch Rechenoperationen der 8 schnell und mühelos über Zahlzerlegungen und –zusammensetzungen"* (RADATZ u.a. 1996, S. 70).

Übungen zur *flexiblen* Zahlzerlegung nehmen daher in weiterer Folge in *allen* aktuellen Konzeptionen für den mathematischen Anfangsunterricht eine zentrale Rolle ein (vgl. etwa RADATZ u.a. S. 70-74; die durchgehende Übung "Zerlegen" im Rahmen des Blitzrechenkurses bei WITTMANN & MÜLLER 2004a, eingeführt auf S. 82; das Training unterschiedlicher Sichtweisen an Zehnerfelddarstellungen bei GERSTER 2005, S. 213f; die Betonung des Zerlegens von Zahlen bei PADBERG 2005, S. 41).

Zusammenfassend:
So wichtig es aktuellen Konzeptionen zur Gestaltung des arithmetischen Anfangsunterrichts ist, die oft weit reichenden Zählkompentenzen von SchulanfängerInnen aufzugreifen, so sehr betonen sie doch die Notwendigkeit, schon früh auf ein *gegliedertes* (strukturiertes, Teilanzahlen erkennendes) Erfassen und Denken von "Zahlen als Zusammensetzungen aus Zahlen" hinzuarbeiten. Als Arbeitsmittel werden deshalb für den Anfangsunterricht vorwiegend *strukturierte Materialien* empfohlen, dabei vor allem solche, die die "Kraft der Fünf" betonen.

4.2 Gezieltes Erarbeiten nicht-zählender Rechenstrategien

Übereinstimmung besteht in der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik nicht nur darüber, *dass* die Ablösung von zählenden Rechenstrategien spätestens bis Ende des ersten Schuljahres für die gesamte weitere arithmetische Entwicklung von größter Bedeutung ist (s. Kap. 3.2.3). Übereinstimmend wird auch festgehalten, dass diese Ablösung (jedenfalls bei einem großen Teil der Kinder) "nicht von selbst" kommt, sondern *gezielte Maßnahmen im Unterricht* erfordert. Welche Aktivitäten dafür besonders geeignet seien, wird durchaus unterschiedlich gesehen. Das betrifft, wie dargestellt (s. Kap. 3.2.3) insbesondere auch die Bedeutung, die dem *Auswendiglernen* beigemessen wird. Ein grundsätzlicher Konsens besteht aber darin, dass *Ableitungsstrategien* eine zentrale Rolle spielen sollen ("heuristische Strategien" bei PADBERG 2005, S. 88-93, RADATZ u.a. 1996, S. 83f sowie HASEMANN 2003, S. 99-102; "operatives Abwandeln" bei WITTMANN & MÜLLER 1994, S.37-41). Sowohl der gründsätzliche Konsens wie die Unterschiede in Detailfragen werden im Folgenden an drei Konzeptionen des frühen Arithmetikunterrichts verdeutlicht.

4.2.1 Ableitungsstrategien in der Konzeption von GERSTER

GERSTER rät zu einer "systematische[n] Erarbeitung des gesamten kleinen Einsundeins" (GERSTER 2005, S. 231) unter *konsequenter Nutzung von Ableitungsstrategien* (ausführlich 2005, ähnlich schon 1994). Dafür empfiehlt er die Behandlung folgender "nicht zählende[r] Rechenstrategien" (a.a.O., S. 220):

– "Zehnersummen und Nachbaraufgaben": Die Zehnersummen oder "Zehnerpartner" (wie 7+3 oder 4+6) könnten durch "Blitzblick-Übungen" (s. Kap. 4.1) an Zehnerfelddarstellungen erarbeitet werden; davon abgeleitet könnten Nachbaraufgaben nach dem Gedanken "um eins mehr" bzw. "um eins weniger" (also etwa 4+5= 9, 4+7 =11) gelöst werden (a.a.O., S. 220f).
– "Verdoppeln", "Verdoppeln plus eins", "Verdoppeln plus zwei": Für das Verdoppeln der Zahlen sechs bis neun empfiehlt GERSTER die "Kraft der Fünf" (vgl. Kap. 2.10.9). Die Verdoppelungen zumindest im Zahlenraum bis zehn gehörten ohnedies "häufig zu den ersten Aufgabentypen, welche Kinder auswendig wissen" (a.a.O., S. 221). Deshalb würden sich Verdoppelungen in besonderer Weise dafür eignen, als "Ableitungsbasis" für Nachbaraufgaben um eins (etwa 6+7 als 6+6+1) bzw. auch um zwei (etwa 6+8 als 6+6+2) zu dienen (a.a.O., S. 221-224).
– "Null, eins und zwei als Summanden": Diese Additionen sind auch weiterzählend schnell gelöst, sofern Kinder bei Additionen wie 2+7 oder 1+8 die Summanden bewusst vertauschen, was gegebenenfalls gezielt zu erarbeiten sei. Für GERSTER geht es aber im Sinne der Entwicklung von *Rechen*strategien wesentlich darum, dass Kinder die Beziehungen "eins mehr" und "zwei mehr" mitdenken (a.a.O., S. 224f).
– "Zehnervorteil mit Erweiterungen": Ausgehend von der Erkenntnis, dass Aufgaben wie 10+7 und auch 7+10 lediglich das *Zusammenfassen* einer Zehnerportion und von zusätzlichen Einern zu *einer* zweistelligen Zahl erfordern ("Zehnervorteil"), können davon in weiterer Folge Aufgaben wie 7+9 ("Neunervorteil") oder auch 7+8 ("Achtervorteil") abgeleitet werden (a.a.O., S. 225-228).
– "Fünfer-Vorteil mit Erweiterungen": Additionen mit fünf als einem Summanden sind im Zahlenraum bis zehn lösbar durch Rückgriff auf die zuvor (s. Kap. 4.1) vorrangig behandelten Zahlzerlegungen mit fünf: Wenn beispielsweise 8 als 5+3 gespeichert ist, ergeben sich daraus unmittelbar die Additionen 5+3 und 3+5. Bei den Additionen 5+6 bis 5+9 und den zugehörigen Tauschaufgaben ist dann aber auch der Zehnerübergang mittels der "Kraft der Fünf" unschwer zu bewältigen. Auch alle Additionen mit zwei Summanden größer als fünf ließen sich, so GERSTER, durch Aufspalten in (5+x) und (5+y) und anschließendes vorteilhaftes Zusammensetzen ([5+5]+[x+y]) "bequem" ausrechnen (a.a.O. S. 228).

Als Grundlage für die Erarbeitung dieser Strategien empfiehlt GERSTER, *zunächst* "Zahlvorstellungen nach dem Teile-Ganzes Konzept" (a.a.O., S. 210-215) und das damit zusammenhängende Verständnis der Rechenoperationen "im Sinne des Teile-Ganzes-Konzeptes"

(GERSTER 2009a, S. 267; GERSTER 2005, S. 215-219) aufzubauen. In weiterer Folge sollte im Unterricht versucht werden, Kinder die oben beschriebenen Ableitungszusammenhänge *selbst entdecken* zu lassen:

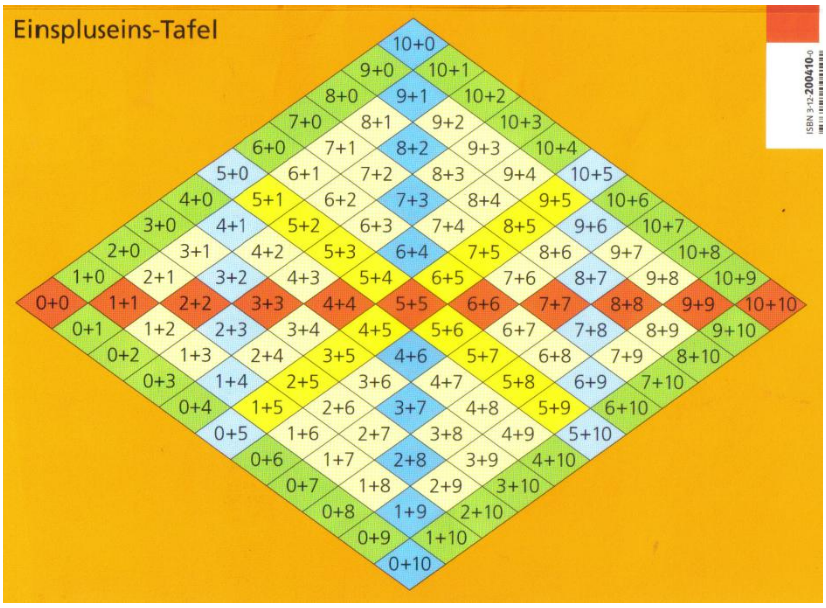
> *"Bei offenem Unterricht und geeignetem Einsatz von Arbeitsmitteln finden Kinder alle obigen Strategien. Sie sollten deshalb auch diskutiert und geklärt werden"* (GERSTER 2005, S. 231).

In Anlehnung an US-amerikanische Fachdidaktiker (v.a. VAN DE WALLE 2004, vgl. auch BAROODY 2006, ISAACS & CARROLL 1996) stellt GERSTER damit das Erarbeiten von Ableitungsstrategien geradezu ins *Zentrum* des arithmetischen Erstunterrichts (ähnlich, bei anderer Bewertung der Bedeutung *visueller* mentaler Bilder, GAIDOSCHIK 2007). Dass GERSTER den Ableitungsstrategien in weiterer Folge auch eine Doppelfunktion als *Speicher- und Abrufhilfen* für das *Automatisieren* zuschreibt, dass er also gar nicht das Automatisieren *einzelner* Aufgaben empfiehlt, sondern in konsequenter Fortführung der *Erarbeitung* des Einspluseins dazu rät, das "*einsichtige Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlensätzen*" zum Gegenstand des automatisierenden Übens zu machen (GERSTER 2009a, S. 268; Hervorhebungen im Original), wurde bereits in Kapitel 3.2.2 als *Besonderheit* seiner Konzeption hervorgehoben.

4.2.2 Ableitungsstrategien in der Konzeption von WITTMANN & MÜLLER

Zur Konzeption des frühen Arithmetikunterrichts bei WITTMANN und MÜLLER gehört wesentlich auch die "Einspluseins-Tafel" (Abb. 1). Dabei handelt es sich um ein "Aufgabendisplay", an Hand dessen über "den operativen Zusammenhang zwischen den 121 Aufgaben des '1+1'" im Sinne des "aktiv-entdeckenden Lernens" geforscht und nachgedacht werden soll (vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 43-51).

Abbildung 1: Einspluseins-Tafel aus Wittmann & Müller 2004b, hintere Umschlagseite



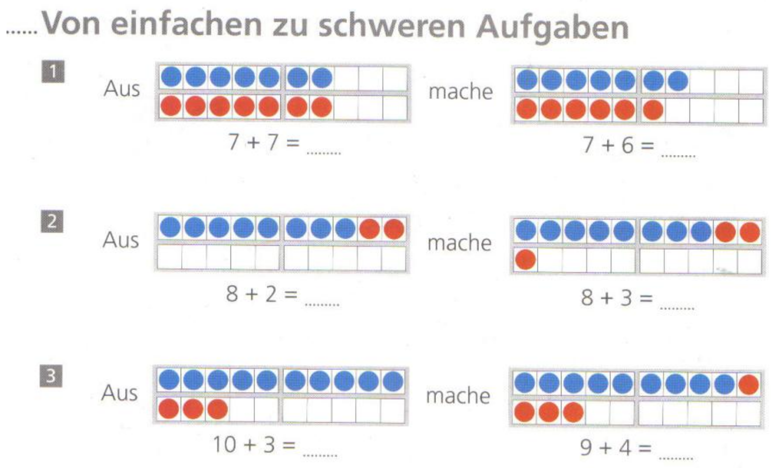
Durch ihre Farbgebung macht die Einspluseins-Tafel "Kernaufgaben" deutlich,

> *"die für das Erlernen des Einspluseins besonders wichtig sind. [...] Wer die Kernaufgaben und die Randaufgaben beherrscht, kann die restlichen Aufgaben operativ erschließen"* (a.a.O., S. 44f.)

Als Kernaufgaben dienen also die "Verdoppelungsaufgaben" (rot markiert), die "Plusaufgaben mit 5" (gelb), die "Zehnerergänzungen" (dunkelblau); dazu noch die hellblau markierten "Fünfer- bzw. Fünfzehnerergänzungen". Letztere seien "keine klassischen Kernaufgaben", sie unterstützten "jedoch das Rechnen mit der 'Kraft der Fünf'" (a.a.O., S. 44).

Zur *Erarbeitung* der Ableitungsbeziehungen zwischen Kernaufgaben und Nachbaraufgaben empfehlen WITTMANN und MÜLLER unter anderem Aktivitäten mit Wendeplättchen am Zwanzigerfeld: Durch Dazugeben oder Wegnehmen bzw. auch Umlegen von Plättchen sollen Kinder dabei aus der Darstellung einer "Kernaufgabe" eine davon abgeleitete Aufgabe bilden. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel aus dem "Zahlenbuch 1":

Abbildung 2: Teil einer Schulbuchseite aus Wittmann & Müller 2004b, S. 50



In weiterer Folge werden solche und weitere operative Zusammenhänge thematisiert in "operativen Aufgabenserien" ("Päckchen mit Pfiff" nach WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 49; "schöne Päckchen" nach WITTMANN & MÜLLER 2004b, etwa S. 50, vgl. Kap. 4.5). Dabei ist es von entscheidender Bedeutung, dass die Kinder nicht einfach Aufgabe für Aufgabe lösen, sondern das in der Aufgabenserie enthaltene "Muster", den operativen Zusammenhang der Einzelaufgaben, auch tatsächlich bewusst wahrnehmen. Die "Muster" sollen also (wie auch in der Konzeption von GERSTER, s.o.) in der Klasse jeweils besprochen und diskutiert werden (Näheres dazu Kap. 4.3).

Die im "Handbuch produktiver Rechenübungen" (WITTMANN & MÜLLER 1994) vorgestellten und theoretisch begründeten, im "Zahlenbuch 1" (WITTMANN & MÜLLER 2004a, 2004b) in der Aufbereitung eines Schulbuches weitergeführten Übungen und Aufgabenstellungen an

Hand der Einspluseins-Tafel können also als eine – im Vergleich zu den erläuterten Vorschlägen von GERSTER – *andere Form* der Erarbeitung und des Übens von *Ableitungsstrategien* im Bereich der additiven Grundaufgaben betrachtet werden. Bedeutsam erscheinende Unterschiede zur Konzeption GERSTERS ergeben sich aber vor allem in zwei Punkten:

1) Operative *Zusammenhänge* werden in GERSTERS Konzeption explizit als nicht-zählende Lösungs*strategien* thematisiert. *"Als Strategie thematisieren"* heißt: GERSTER drängt darauf, dass ein Kind dann, wenn es mit einer noch nicht automatisierten Aufgabe konfrontiert wird, "strategisch denken", also selbstständig entscheiden können solle, aus welcher bereits automatisierten Aufgabe es mittels welchen verstandenen operativen Zusammenhangs die gefragte Aufgabe ableiten kann. Denn die einzelnen operativen Zusammenhänge für sich (etwa im Kontext "schöner Päckchen") verstanden zu haben, garantiert noch nicht, angesichts einer *isolierten* Grundaufgabe selbst entscheiden zu können, auf *welchen* dieser Zusammenhänge *als Strategie* für die Lösung *dieser bestimmten* Aufgabe vorteilhaft zurückgegriffen werden kann. Deshalb nimmt nach Erarbeitung der einzelnen Strategien gerade das Üben der *Strategieauswahl* in der Konzeption von GERSTER einen wichtigen Platz ein (vgl. GERSTER 2005, S. 230). Das wird bei WITTMANN und MÜLLER (insbesondere in der Umsetzung im "Zahlenbuch 1") zumindest nicht ebenso explizit deutlich.

2) *Automatisieren* heißt für GERSTER wesentlich gerade das *Automatisieren des Denkens in operativen Zusammenhängen* (s. o.). Im "Zahlenbuch 1" von WITTMANN und MÜLLER stehen operative Zusammenhänge zwar im Zentrum der *Erarbeitung* arithmetischer Kompetenzen wie auch im Zentrum der mit der Erarbeitung untrennbar verbundenen (vgl. Kap. 4.6) operativ strukturierten Übungen. Innerhalb des *"Blitzrechenkurses"*, der im "Zahlenbuch" explizit dem *automatisierenden* Üben gewidmet ist, spielen operative Zusammenhänge aber keine erkennbare Rolle. Der Weg zur Automatisierung wird von den Autoren im "Handbuch produktiver Rechenübungen", der konzeptionellen Grundlage des "Zahlenbuchs", nur äußerst knapp erläutert:

> *„**Grundlegungsphase**: Die Übung wird mit dem jeweiligen Stoff eingeführt, erarbeitet und während des Lernprozesses* ***unter ständigem Anschauungsbezug****, immer wieder durchgeführt.*
>
> ***Automatisierungsphase**: **Nach Abschluss des Lernprozesses** werden die Kinder unter zunehmendem Verzicht auf äußere Hilfen zum denkenden Rechnen, d. h. zum Rechnen an verinnerlichten Vorstellungen der Zahlreihe, des Zwanzigerfeldes usw. geführt. Dabei werden sie angeregt, sich zu bemühen, die Schnelligkeit ihrer Antworten immer mehr zu steigern“* (WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 75; Hervorhebungen im Original).

Für die hier vor allem interessierende Blitzrechenübung "Plusaufgaben" bedeutet das gemäß Lehrerband von "Zahlenbuch 1" in der Grundlegungsphase das Folgende: "Das erste Kind legt eine Plusaufgabe am Zwanzigerfeld mit Plättchen, ein zweites Kind nennt die Aufgabe mit Ergebnis" (WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 106). Der "ständige Anschauungsbezug" besteht hier also darin, dass Kinder die zu lernenden Aufgaben in strukturierten Darstellungen am Zwanzigerfeld optisch präsent haben. Ob sie das Ergebnis dabei durch quasi-simultane Zahlerfassung, durch Abzählen der Plättchen, durch Faktenabruf oder durch Ableitung aus einer bereits gespeicherten Aufgabe lösen, bleibt damit aber offen; es wird zumindest in der "Grundlegung" des Blitzrechenkurses gemäß der oben zitierten Anleitung im Lehrerband wie auch gemäß der Umsetzung im Schülerband (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004b, S. 49) nicht zum Thema gemacht. Der "ständige Anschauungsbezug" lädt allerdings wohl eher dazu ein, die Lösung durch Quasi-Simultanerfassung oder durch Abzählen zu ermitteln und *nicht* durch eine Ableitung. Umgekehrt wäre die Darstellung im Zwanzigerfeld wohl kein geeignetes Mittel, um das Ableiten anzuregen (dafür wäre wohl eher das Zusammenstellen von Aufgabenpaaren nach einem bestimmten operativen Zusammenhang geeignet, vgl. etwa GERSTER 1994, S. 57f).

Wenn nun aber die "Grundlegung" nicht (oder zumindest nicht in zweckmäßiger Weise) auf das Herstellen gedanklicher Zusammenhänge zu schon automatisierten Aufgaben abzielt, was soll dann bei "zunehmendem Verzicht auf äußere Hilfen" die Lösung einer noch nicht automatisierten Aufgabe ermöglichen? Dazu findet sich bei WITTMANN und MÜLLER nur der knappe Hinweis auf "verinnerlichte Vorstellungen der Zahlreihe, des Zwanzigerfeldes usw.". Wenn sich nun aber ein Kind das in der Grundlegungsphase verwendete Zwanzigerfeld im weiteren Verlauf nur noch vorstellt: Wie sollte es "an" dieser Vorstellung rechnen? Plausibler Weise ist das nur in genau der Form denkbar, in der das Kind bereits in der Grundlegungsphase *am tatsächlich vorliegenden* Zwanzigerfeld "gerechnet" hat. SCHIPPER weist wohl zu Recht daraufhin, dass nur jene Strategie "verinnerlicht" werden kann, die zuvor "äußerlich" war. Deshalb sollten im Arithmetikunterricht "die Handlungen am Material mit den angestrebten Verfahren strukturell übereinstimmen" (SCHIPPER 2003b, S. 223).

Nun kann das Zwanzigerfeld, wie besprochen, aber auch für zählendes Rechnen genutzt werden. Und sofern ein Kind die Plusaufgaben in der Grundlegungsphase am Zwanzigerfeld immer wieder zählend gelöst hat, wird es "bei zunehmendem Verzicht" auf die "äußere Hilfe" des Zwanzigerfelds vermutlich nichts anderes tun können, als nun *innerlich* (rein verbal) zählend zu rechnen oder anstelle der Plättchen *die Finger als Zählhilfe* zu benutzen, ob offen oder heimlich.

Und selbst dann, wenn ein Kind in der Grundlegungsphase das Ergebnis einer Plusaufgabe am Zwanzigerfeld quasi-simultan (nicht-zählend) "abgelesen" hat, bleibt fraglich, ob es *später* auch *ohne Blick* auf die am Zwanzigerfeld dargestellte Aufgabe in der Lage ist, das Ergebnis nicht-zählend zu ermitteln. Denn die gedankliche Leistung, eine *vorgegebene* Zahldarstellung quasi-simultan zu *interpretieren*, ist zu unterscheiden von der darüber hinausgehenden Leistung, zu einer symbolisch und/oder verbal vorgegebenen Addition die *Vorstellung* ihrer Darstellung am Zwanzigerfeld selbstständig zu *konstruieren*, um dann *an dieser Vorstellung* die Aufgabe nicht-zählend zu lösen. Diese weitergehende Leistung kann vermutlich dadurch gefördert werden, dass Kinder wiederholt dazu angehalten werden, ihre *Interpretationen von* (d.h.: ihre *Gedanken zu*) am Zwanzigerfeld dargestellten Additionen zu verbalisieren und dabei auch operative Zusammenhänge dieser Additionen mit anderen, vielleicht bereits automatisierten Additionen oder auch mit vielleicht bereits automatisierten Teile-Ganzes-Zusammenhängen zu reflektieren, wie dies etwa GERSTER (2009, S. 264f) empfiehlt. Aber man würde die Leistung, die Kinder bei der gedanklichen Konstruktion solcher Zusammenhänge zu erbringen haben, gehörig unterschätzen, wollte man annehmen, dass sich solche Konstruktionen bei *allen* Kindern auch ohne solche gezielte Förderung schon alleine dadurch einstellen, dass sie "unter ständigem Anschauungsbezug, immer wieder" Plusaufgaben mit Hilfe des Zwanzigerfeldes lösen.

Wenn diese gedanklichen Konstruktionen aber unterbleiben, werden auch jene Kinder, die *mit Hilfe* der Zwanzigerfelddarstellung eine Addition nicht-zählend lösen, *ohne diese* Hilfe vermutlich auf Zählstrategien zurückgreifen müssen. Auch bei diesen Kindern ist also, ebenso wie bei Kindern, die das Zwanzigerfeld als Zählhilfe benützen, nicht ersichtlich, wie die im "Blitzrechenkurs" unter dem Titel "Plusaufgaben" angeregte Übung den Übergang von der "Grundlegung" zur "Automatisierung" fördern sollte – außer vielleicht dadurch, dass sie sich die dabei geübten Additionen durch *häufige Wiederholung* ("Übt so immer wieder" im Schülerband, WITTMANN & MÜLLER 2004b, S. 49) irgend wann einmal "einfach merken". Das ist, wie besprochen, durchaus *möglich*; das Merken wird aber durch diese Form des Übens *nicht erleichtert*, da ja das Elaborieren, also das für langfristiges Merken so wichtige Herstellen von Zusammenhängen zwischen zu merkenden und bereits gemerkten Inhalten (s. Kap. 2.12.2), dabei nicht gezielt gefördert wird.

Zugleich bestünde bei *dieser* Form des Automatisierens dann aber wohl tatsächlich die Gefahr, dass Einspluseins-Sätze ohne tieferes Verständnis der Zusammenhänge auswendig gelernt werden. *Zumindest in solchen Fällen* scheint dann auch die Sorge berechtigt, dass das Automatisieren "zu früh" erfolgen könnte. Wie bereits in Abschnitt 3.2.2.3 angedeutet, kommt darin aber wohl auch ein *Mangel dieser Konzeption* des Automatisierens zum Ausdruck: Sie berücksichtigt in unzureichender Weise, welche Rolle die *jeweils konkrete* Verwendung von Anschauungsmaterial durch das Kind einerseits, das *gedankliche Konstruieren von Zusammenhängen* zwischen noch zu merkenden und bereits gemerkten Inhalten andererseits beim Automatisieren der arithmetischen Basisfakten spielt.

Die hier an den Anleitungen zum "Blitzrechnen" im Lehrerband und an der Umsetzung im Schülerband von "Zahlenbuch 1" geübte Kritik gilt *nicht* in gleicher Weise auch für die *Interpretation* des "Blitzrechnens" durch KRAUTHAUSEN und SCHERER: Diese sprechen explizit davon, dass es "*zunächst* um die Automatisierung der Kernaufgaben" gehe und "die Automatisierung dieser Kernaufgaben [..] *dann auch* die Automatisierung der restlichen Aufgaben" stütze (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 111; Hervorhebungen M.G.). Doch auch bei KRAUTHAUSEN und SCHERER wird das entscheidende weitere Vorgehen ("*dann auch*") nicht weiter ausgeführt.

4.2.3 Ableitungsstrategien in der Konzeption von RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING

Auch RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE und EBELING schreiben den Ableitungsstrategien einerseits hohe Bedeutung zu und schlagen vor, im Rahmen von "operativen Übungen"

> *"eine Aufgabe nie isoliert für sich, sondern immer im Zusammenhang mit einer ganzen 'Aufgabenfamilie' zu behandeln. Auf diese Art und Weise reduziert sich die Anzahl der zu lernenden Aufgaben auf eine überschaubare Anzahl von 'Aufgabenfamilien'"* (RADATZ u.a. 1996, S. 85).

Auch sie wenden diesen Gedanken andererseits nicht konsequent auf das automatisierende Üben an. So werden in ihrem Handbuch zwar zahlreiche "operative Übungen" beschrieben (a.a.O., S. 84-89). Dabei werden operative Zusammenhänge aber nicht als *Lösungsstrategien* thematisiert. Das schließt nicht aus, dass Kinder die in diesen Übungen behandelten Zusammenhänge selbstständig auch dazu nutzen, um noch nicht automatisierte Aufgaben aus bereits automatisierten abzuleiten. Ein *gezieltes Hinarbeiten* darauf, dass sie das tun, findet in diesen Übungen aber nicht statt. Dass RADATZ u.a. für das Automatisieren dann *zusätzliches* "Auswendiglernen" (etwa mit Hilfe von "1+1-Wendekarten", durch die die Aufgaben "eingeprägt" werden sollen: RADATZ u.a. 1996, S. 105) anregen, wurde bereits in Kap. 3.3.2 kritisiert.

4.2.4 Zusammenfassung

Vergleicht man die im deutschsprachigen Raum in den letzten Jahren veröffentlichten fachdidaktischen Empfehlungen zum arithmetischen Anfangsunterricht, so zeigen sich durchaus markante Unterschiede bezüglich der expliziten Darlegung, *wie wichtig* Ableitungsstrategien im Gesamtgefüge des Unterrichts sind und *in welcher Form* sie deshalb behandelt werden sollten. *Dass* sie wichtig sind und dass ihre Entdeckung deshalb nicht den spontanen Einsichten der Kinder überlassen werden darf, wird freilich in allen drei oben näher untersuchten Konzeptionen deutlich zum Ausdruck gebracht, ebenso aber auch etwa bei KRAUTHAUSEN und SCHERER (2007), PADBERG (2005), HASEMANN (2003) und anderen. PADBERG (2005) hält deshalb wohl zu Recht als ein Charakteristikum des "gegenwärtigen Anfangsunterrichts" (besser wohl: der gegenwärtigen *Fachdidaktik des Anfangsunterrichts*, siehe dazu die Einleitung zu Kapitel 4) fest:

> *"Man [ist] bemüht, möglichst bald – nachdem ein gewisser Vorrat an Einspluseinsaufgaben auswendig beherrscht wird – zu 'heuristischen' Strategien überzugehen"* (PADBERG 2005, S. 84).

4.3 Vorrang der Strategie-Reflexion gegenüber dem "Lösen von Rechenaufgaben"

Die dritte Übereinstimmung aktueller Unterrichtsentwürfe ergibt sich recht direkt aus den beiden bereits ausgeführten; sie muss daher an dieser Stelle lediglich noch verdeutlicht werden: Wenn Kinder von einer (ausschließlich oder vorwiegend) zählenden Zahlverwendung weggeführt und zum Erkennen, Verstehen und Nutzen von operativen Zusammenhängen hingeführt werden sollen, dann ist es unumgänglich, ihr *Denken* über Zahlen und ihre *Strategien* selbst zum wesentlichen Inhalt des frühen Arithmetikunterrichts zu machen. Es geht dann also nicht einfach darum, *dass* Kinder Additionen und Subtraktionen *lösen* und dass sie Summen und Differenzen *korrekt ermitteln*. Sondern es geht wesentlich darum, *wie* sie das tun, welche *Strategien* sie dabei anwenden, welche *Überlegungen* hinter diesen Strategien stecken, welche *Schlüsse* und *Erkenntnisse* sie aus den Ergebnissen ziehen, usw. Denn:

> *"Das Verwenden von Zählstrategien wird unterstützt, wenn im Unterricht einseitig das Finden der richtigen Lösung und nicht auch die vielfältigen Lösungswege betont werden"* (PADBERG 2005, S. 89).

SCHIPPER hält den damit geforderten Wandel "von der gegenwärtig weit verbreiteten Produktorientierung [...] zu einem Unterricht, der sehr viel stärker die Lernprozesse der Kinder in den Mittelpunkt der Betrachtung rückt", für "die wohl wichtigste Veränderung des Mathematikunterrichts in der Grundschule in der nächsten Zukunft" (SCHIPPER 2002, S. 137). Im Sinne dieser Prozessorientierung werden etwa "Strategiekonferenzen" vorgeschlagen (SCHIPPER 2002, S. 137; auch als "Rechenkonferenzen" bezeichnet, etwa bei PADBERG 2005, S. 88): Die Kinder werden dazu motiviert, nach Bearbeitung einer Aufgabenreihe einander (etwa im Sitzkreis) zu erläutern und zu demonstrieren, auf welche Weise sie die Aufgaben gelöst haben, welche Beobachtungen sie dabei gemacht, welche Überlegungen sie dazu angestellt haben. Zur Anregung von Unterrichtsgesprächen mit demselben Zweck dienen etwa auch Abbildungen in Schulbüchern wie "Zahlenbuch 1" (WITTMANN & MÜLLER 2004, etwa auf S. 48) oder "Mathematikus 1" (LORENZ 2000b, etwa auf S. 65), auf denen Kinder zu sehen sind, die auf offenkundig unterschiedliche Weise eine bestimmte Aufgabe gelöst haben, verknüpft mit der Frage: "Wie rechnen die Kinder?", die dann weitergeführt wird mit der Frage: "Wie rechnest du?" (WITTMANN & MÜLLER 2004, S. 48). Ähnlich forderte schon KÜHNEL, "von Anfang an" den "aus der Betrachtung der Sachlage entspringende[n] eigene[n] Gedanke[n]" der Kinder zu "unterstütz[en], förder[n], ermutig[en]", und gibt dazu etwa die folgende Unterrichtsanregung: "Die Kinder rechnen vor, wie sie die 10 zerlegen und den Zehner ergänzen. Es ist aber auch bald die Anregung zu geben: 'Wer kann es anders?'" (KÜHNEL 1916, S. 284; vgl. dazu auch KÜHNELS Bemerkung: "Ein selbstständiges Suchen, Finden und Verstehen mehrerer Lösungswege, das müssen wir an die Stelle der alten Normalverfahren setzen; es ist wirklich ein Zauberstab, dies Wörtchen: Wer kann es anders?" KÜHNEL 1949, zitiert nach WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 86).

Dass solche und ähnliche Unterrichtsmaßnahmen über das engere *inhaltliche Lernziel* der *Bewusstmachung* von Zahlstrukturen, operativen Zusammenhängen und damit der Wegführung von Zählstrategien hinaus wesentlich sind für das Erreichen von *allgemeinen Lernzielen* des Mathematikunterrichts ("allgemeinen mathematischen Kompetenzen" in der Sprache der Bildungsstandards; vgl. BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH 2009, S. 5f), liegt in der Natur der Sache: Allgemeine Kompetenzen wie das in den österreichischen Bildungsstandards geforderte "Kommunizieren" ("Mathematische Sachverhalte verbalisieren und begründen", a.a.O., S. 5), um die es hier in besonderer Weise *auch* geht, lassen sich nicht anders entwickeln als an *konkreten mathematischen Inhalten* (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 7). Und arithmetische "Muster" – Zahlstrukturen und operative Zusammenhänge – bieten sich für einen *frühen* Einstieg in das "Kommunizieren" in besonderer Weise an.

4.4 Ganzheitliche Behandlung von Zahlenräumen

Auch die vierte Übereinstimmung kann sachlogisch aus den beiden erstgenannten abgeleitet werden. PADBERG fasst sie wie folgt zusammen:

> *"Heute besteht [..] weithin Konsens, die Zahlen des Zwanzigerraumes nicht kleinschrittig gestuft oder gar schrittweise Zahl für Zahl einzuführen, sondern schon unmittelbar zu Beginn des Schuljahres den Zahlenraum bis zehn oder sogar den kompletten Zwanzigerraum als Ganzes, kurz 'ganzheitlich', in Angriff zu nehmen. [...] Dieser Konsens hat bewirkt, dass die in den letzten Jahren neu konzipierten Schulbücher bei der Thematisierung der Zahlen 'ganzheitlich' vorgehen"* (PADBERG 2005, S. 29).

Inwiefern sich dieses "ganzheitliche" Vorgehen zwar nicht zwingend, aber doch mit guten Gründen aus dem Ziel ergibt, Kinder vor der Verfestigung zählender Lösungsstrategien zu bewahren, erläutert etwa GERSTER:

> *"Will man der Fixierung auf zählendes Rechnen vorbeugen, darf man den Zahlenraum, in welchem die Kinder rechnen, nicht zu lange auf die Zahlen bis sechs oder zehn beschränken. Denn die Vorteile* nicht zählender *Strategien gegenüber zählendem Rechnen werden erst bei etwas größeren Zahlen (also etwa im Zahlenraum bis 20) deutlich. Zwar verwendet gute Methodik grundlegende Nichtzähl-Strategien auch schon im Zah-*

> *lenraum bis sechs, dennoch ist für Kinder in diesem engen Zahlenraum die Versuchung groß, am zählenden Rechnen festzuhalten* (GERSTER 2005, S. 220; Hervorhebung im Original).

Mit ähnlichen Argumenten warnt SCHERER vor einem "lange[n] Verweilen im Zahlenraum bis 5 oder 6", und dies gerade auch im Unterricht mit "lernschwachen" Kindern (SCHERER 1999, S. 11).

Zum einen wird also mit Verweis auf die *Motivation* der Kinder begründet, warum ein Arithmetikunterricht, der Kindern die Verwendung von Ableitungsstrategien nahelegen will, auch eine "ganzheitliche" Behandlung des Zahlenraums bis 20 erforderlich mache: Ein kleinerer Zahlenraum stelle, so GERSTER, eine "Versuchung" zum zählenden Rechnen dar. Auch SCHERER hält fest, dass die enge Begrenzung des Zahlenraums die Kinder dazu "*verleitet* [...], die Strategie 'Abzählen' statt 'Bündeln' oder 'Strukturieren' zu verwenden" (SCHERER 1999, S. 11; Hervorhebung im Original).

Zum anderen lässt sich argumentieren, dass der ganzheitliche Zugang auch *unmittelbar kognitiv* förderlich ist, also nicht nur über die höhere Motivation das Verstehen erleichtert, sondern *die zu verstehende Sache selbst* klarer vor Augen treten lässt. Denn der größere Zahlenraum bietet mehr Möglichkeiten, um einen bestimmten operativen Zusammenhang zu variieren. "Muster" werden aber generell leichter erkannt, wenn sie "großflächig" (und nicht nur in engen Ausschnitten) dargeboten werden, das "Musterhafte" tritt durch häufigere Wiederholung deutlicher hervor. Dass etwa die Differenz zweier Nachbarzahlen stets eins ist, kann natürlich auch im "Zahlenraum bis sechs" untersucht werden, wie GERSTER in oben stehendem Zitat einräumt. Aber es erleichtert vermutlich das Verständnis dieses Zusammenhangs, wenn er auch an 10–9 und 8–7 (und warum nicht auch an 18–17?) erfahren werden kann; umgekehrt ist 10–9 um nichts "schwieriger" als etwa 5–4, sofern eben die Lösung über den Zusammenhang mit der Umkehroperation und nicht durch eine Zählstrategie gefunden wird (vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 133). Und wenn es als Voraussetzung für weitere Lernschritte vor allem auch darum geht, die Beziehungen der anderen Zahlen gerade zu den Zahlen 5 und 10 schon früh als wesentliche Strukturen im Zahlendenken der Kinder zu verankern (s. Kap. 4.1), dann führt an der ganzheitlichen Behandlung des Zahlenraums zumindest bis zehn ohnedies kein Weg vorbei: Wer Kindern Strukturen näher bringen möchte, muss diese Strukturen doch zumindest *anbieten* (und in weiterer Folge natürlich entsprechende Aktivitäten daran anschließen, vgl. Kap. 4.1). In den Worten von SCHERER:

> *"Vom Lerninhalt und Lernzielen her gesehen (hier: Strukturieren der Zahlen in Fünfer oder Zehner) sind größere Zusammenhänge erforderlich, das Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten kann daher in diesem Fall eher kontraproduktiv wirken"* (SCHERER 1999, S. 11; ganz ähnlich MOSER OPITZ & SCHMASSMANN 2002, S.9).

Ob nun aber tatsächlich gleich zu Schulbeginn oder zumindest bald danach der gesamte Zahlenraum bis 20 oder zunächst nur der Zahlenraum bis zehn als "Ganzheit" behandelt werden solle, wird durchaus unterschiedlich gesehen. Betrachtet man neuere deutsche *Schulbücher,* so wird dort jedenfalls "am häufigsten der Zahlenraum bis zehn" und nur "in einigen Schulbüchern auch schon sehr rasch der gesamte Zwanzigerraum ganzheitlich in den Blick genommen" (PADBERG 2005, S. 29). Dafür dürften freilich nicht nur (und wohl nicht einmal in erster Linie) fachdidaktische Argumente ausschlaggebend sein: Der ganzheitliche Zugang bedeutet nun einmal einen markanten Bruch mit früheren Lehrgewohnheiten (vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 16f). Auch RADATZ u.a., welche "Sympathie für die neueren, flexibleren Ansätze" bekunden, sehen sich deshalb in ihrem 1996 erschienenen Handbuch veranlasst, "auch Vorschläge für den tradierten Weg", also für eine kleinschrittige(re) Behandlung der Zahlen bis 20, zu machen – aus der "Grundüberzeugung" heraus,

> *"dass der Wechsel zu einem Unterricht, der die Kinder die Arithmetik eher in ganzheitlichen Sach- und Sinnzusammenhängen in Gebrauch nehmen lässt, sich vor allem für die beteiligten Lehrkräfte nicht als Bruch vollziehen darf"* (RADATZ u.a. 1996, S. 47).

Was hier als *Sorge vor einer Überforderung der Lehrkräfte* (welche natürlich nicht im Interesse der Kinder sein kann) vorgetragen wird, dürfte wohl vom Standpunkt der *Schulbuchverlage* aus zur Überlegung führen, dass sich neue Schulbücher *besser verkaufen* lassen, wenn der Bruch mit alten Gewohnheiten *zumindest weniger radikal* ausfällt, wenn also zunächst nur der Zahlenraum bis zehn (dieser aber dann als "Ganzheit") behandelt wird.

Aber auch *Sorge vor einer Überforderung (mancher) Kinder* wurde ins Spiel gebracht. WITTMANN und MÜLLER begründeten ja *ihr* Eintreten für die ganzheitliche Behandlung des Einspluseins, bei der sie im deutschsprachigen Raum Anfang der 1990er Jahre Pionierarbeit geleistet haben, unter anderem wie folgt:

> *"Die sofortige Betrachtung des gesamten Zwanzigerraumes und darüber hinaus vom ersten Schultag an [...] ist heute durch repräsentative Untersuchungen an Tausenden von Schulanfängern abgesichert. Die übergroße Mehrheit der Kinder verfügt bereits über so gute Zahlkenntnisse im Zahlbereich bis 10 und darüber hinaus, daß es eine künstliche Einengung wäre, die Zahlen vom Fünferraum aus Schritt für Schritt 'einzuführen'"* (WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 17).

Nun ist dieses "Anknüpfungsmotiv" (SCHIPPER 2002, S. 121) nicht das einzige, auch gar nicht das wesentliche Argument von WITTMANN und MÜLLER: Die "ganzheitliche Behandlung von Rahmenthemen, z.B. des Einspluseins" ist für die beiden vielmehr eine unabdingbare Erfordernis im Rahmen ihrer übergeordneten Konzeption des "aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens": Dieses

> *"verlangt eine ständige Durchdringung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele und lässt sich daher nicht in einem kleinschrittigen Unterricht verwirklichen, in dem der Stoff Häppchen für Häppchen vermittelt wird"* (WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 9).

Das aktiv-entdeckende Lernen benötigt freilich, so WITTMANN und MÜLLER weiter in Anknüpfung an DEWEY, einen fachlichen Rahmen, denn "aus dem Nichts kann [..] nichts entwickelt werden" (DEWEY 1902/1976, S. 282f., übersetzt von WITTMANN, zit. nach WITTMANN 1996). Die mathematischen "Lernangebote" müssen im Unterricht also "fachlich schlüssig strukturiert werden" (WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 11); die für das Erlernen des kleinen Einspluseins bedeutsame Fünfer- und Zehnerstruktur entfaltet ihre "Kraft" ("Kraft der Fünf", "Kraft der Zehn") aber wohl tatsächlich erst so richtig im Zahlenraum bis 20 (vgl. auch das oben zitierte Argument von GERSTER 2005). Dass der Zwanzigerraum von Anfang an thematisiert wird, bedeutet für WITTMANN und MÜLLER aber "keinesfalls", dass "das bewährte Prinzip 'Vom Leichten zum Schweren' [..] aufgehoben [wird]. Es wird nur anders realisiert als traditionell üblich" (a.a.O, S. 10). Es wird also natürlich nicht erwartet, dass Kinder von Anfang an alle im Zahlenraum bis 20 möglichen Rechnungen lösen können (wobei etwa 10+10 für viele SchulanfängerInnen leichter sein wird als vielleicht 2+4). Es soll ihnen aber von Anfang an "eine Gesamtübersicht über die Aufgaben" (a.a.O., S. 10) und damit Einblick in deren strukturelle Zusammenhänge ermöglicht werden.

Weil nun aber das Lernen im Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens in dieser Weise nicht als "Nachbauen einer Mauer", sondern als "Knüpfen eines Netzes" verstanden wird, welches im Unterricht "in mehreren Durchgängen" zu organisieren sei, sehen WITTMANN und MÜLLER auch in "Lücken an einer Stelle [..] keineswegs ein Hindernis für den Ausbau des Netzes an einer anderen Stelle" (a.a.O., S. 6):

> *"Da der Lernprozess die Lernziele immer wieder neu und von einer anderen Seite aus ansteuert, gibt es für die Kinder genügend Möglichkeiten um ihre Lücken allmählich zu schließen"* (a.a.O., S. 9f).

Man wird der Konzeption von WITTMANN und MÜLLER also nicht gerecht, wenn man die ganzheitliche Behandlung des Zwanzigerraums auf das "Anknüpfungsmotiv" (und schon gar auf das "Motiv der curricularen Innovation" um der Innovation willen) verkürzt, wie dies SCHIPPER (2002) zumindest implizit tut. Aber natürlich spielt auch das "Anknüpfungsmotiv" eine Rolle: Denn auch wenn im weiteren Verlauf des Lernens über "die Lücken hinweg" "Wissensfäden" gespannt werden können (WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 6), so ist es doch plausibel, dass – um im Bild zu bleiben – Lücken mitunter auch zu groß sein können, um sich noch so ohne weiteres überspannen zu lassen. Und in jedem Fall benötigt ein Wissens-Netz auch Start-Punkte, von dem aus die Fäden weiter geknüpft werden können. Eben deshalb ist es WITTMANN und MÜLLER ja auch wichtig, auf die "guten Zahlkenntnisse" der "übergroßen Mehrheit der Kinder" hinzuweisen, welche durch "repräsentative Untersuchungen an Tausenden von Schulanfängern" abgesichert seien.

Nun hält aber SCHIPPER (vgl. auch Kap. 4.1) dagegen, dass diese Untersuchungen vor allem auch eine "extrem große Leistungsheterogenität" (SCHIPPER 2002, S. 138) zum Ergebnis hätten und dass eine "genauere Betrachtung der Befunde" zeige,

> *"dass die Überschreitung des Zahlenraums bis 10 bei der Mehrzahl der einschlägigen Aufgabenstellungen [...] mit einem deutlichen Rückgang der durchschnittlichen Lösungshäufigkeit verbunden ist"* (SCHIPPER 2002, S. 123).

Das nimmt nichts zurück von den oben ausgeführten Argumenten, die *von der Sache wie auch von den Kindern her* klar gegen eine kleinschrittige Erarbeitung eines "Zahlenraums bis 5", dann bis 6, bis 7 usw. sprechen. Und auch SCHIPPER will sich an dieser Stelle nicht gegen "die Auflösung der in der Vergangenheit sicher viel zu starr eingehaltenen Zahlenraumgrenzen" (a.a.O., S. 128) aussprechen. Er weist aber wohl zu Recht darauf hin, dass die aktuellen Studien zum mathematischen Vorwissen von SchulanfängerInnen in neuer, differenzierter Form vor allem auch "das alte Differenzierungsproblem" (a.a.O. S. 138) deutlich machten.

Es lässt sich also fragen, ob es zwischen der "künstlichen Einengung" des Fünferraums und der "sofortigen Betrachtung des Zwanzigerraumes" nicht noch einen Mittelweg geben kann, der zumindest für manche Kinder vielleicht als "Einstiegszahlenraum" förderlicher wäre, zumindest im Sinne eines "Arbeitsraumes", der nach dem Vorschlag von POHLE und REISS im Erstunterricht anders zu behandeln sei als der (in der Regel weit darüber hinaus gehende) "Zählraum" (vgl. POHLE & REISS 1988, S. 29). Auch über *diese* Argumentation (und nicht nur aus Sorge vor einer Überforderung der *Lehrkräfte* oder aus kommerziellen Berechnungen der *Verlage*) lässt sich also auf die ganzheitliche Behandlung zunächst des Zahlenraums nur bis 10 (und erst später auch bis 20) kommen, ohne dass freilich die Zahl zehn dabei als "absolute Grenze" zu behandeln wäre. Das hier weiter auszuführen, würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen (vgl. dazu etwa GAIDOSCHIK 2003b, S. 136-139; GAIDOSCHIK 2007, S. 162ff).

Es geht hier aber auch nur darum, einige Grundpositionen herauszustreichen, in welchen sich die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik bezüglich des arithmetischen Anfangsunterrichts weitgehend einig ist. In kaum einem Punkt ist diese Einigkeit so deutlich ausgeprägt wie in der *Ablehnung* eines *kleinschrittig-segmentierten* "Einführens" der Zahlen und in der *Befürwortung* einer *ganzheitlichen* Behandlung des Zahlenraums *zumindest bis zehn*. Das kleinschrittige Vorgehen kann zwar auf eine lange Tradition verweisen (vgl. dazu HASEMANN 2003, S. 70-73; RADATZ & SCHIPPER 1983, S. 26-47), es wird aber, zusammengefasst,

– weder den (geänderten) Vorkenntnissen und Erwartungen der Kinder gerecht
– noch den Anforderungen dessen, was von diesen Kindern gelernt werden soll, nämlich Zahlen in ihren Zusammenhängen mit anderen Zahlen und Rechnungen in ihren Zusammenhängen mit anderen Rechnungen zu verstehen. Dieses Verständnis wird durch die Zerstückelung des Zahlenraums bis 10 nicht erleichtert, sondern erschwert.

4.5 Keine Festlegung auf das "Teilschrittverfahren" für den Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20

Auch diese fünfte Übereinstimmung ergibt sich sachlogisch zwingend aus den bereits genannten, sie soll aber wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Unterrichtsgestaltung als eigener Punkt hervorgehoben werden: Die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik empfiehlt einhellig, den Kindern für die Bewältigung von Zehnerübergängen im Zahlenraum bis 20 nicht *eine* Strategie *vorzugeben* (traditionell war dies dann das "Teilschrittverfahren", vgl. Kap. 2.10.9). Die Kinder sollten vielmehr dazu angeregt werden, unter Verwendung geeignet strukturierter Materialien (Wendeplättchen im Zwanzigerfeld etwa bei WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 33-41 oder KRAUTHAUSEN 1995, S. 87-90; Zwanziger-Rechenrahmen etwa bei RADATZ u.a. 1996, S. 102f) zunächst *eigene Rechenwege* zu entdecken und zu erproben, diese in Strategie-Konferenzen auszutauschen, zu diskutieren und zu reflektieren und sie in weiterer Folge gegebenenfalls in Richtung ökonomischerer, "eleganterer" Strategien weiterzuentwickeln (vgl. außer den oben genannten Autoren etwa auch GERSTER 1994, S. 53-56; GERSTER 2005, S. 220-231; HASEMANN 2003, S. 97f; PADBERG 2005, S. 88-93; für eine entsprechende Umsetzung im Schulbuch etwa auch LORENZ 2000b, S. 65).

Dass dabei für den Zehnerübergang (zumal im Zahlenraum bis 20) auch langfristig nicht nur das "Teilschrittverfahren", sondern eine Vielzahl nicht-zählender Strategien vorteilhaft verwendet werden können, wurde bereits in Kap. 2.10.9 dargestellt. *Alle* diese Verfahren sollten deshalb, so die Empfehlung der aktuellen Fachdidaktik, im Unterricht aufgegriffen bzw. (sofern sie nicht ohnedies von Kindern selbsttätig entdeckt werden) als sinnvolle Variante des Zehnerübergangs vorgestellt werden. In Kap. 2.10.9 wurde ausgeführt, dass und inwiefern das "Teilschrittverfahren" besonders hohe Anforderungen stellt. Wird nur dieses eine Verfahren im Unterricht behandelt, sind deshalb gerade jene Kinder von Überforderung bedroht, die noch Schwächen im Bereich dieser Anforderungen zeigen (vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 175ff). Dies ist ein weiteres wichtiges Argument gegen die ausschließliche oder auch nur bevorzugte Behandlung des "Teilschrittverfahrens" im ersten Schuljahr (vgl. KRAUTHAUSEN 1995, S. 88; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 25; HASEMANN 2003, S. 97f).

Die *Behandlung* verschiedener Strategien für den Zehnerübergang bedeutet im Übrigen nicht, dass *alle* Kinder sich auch *alle* diese Strategien dauerhaft aneignen müssen. Zwar lassen sich für jede dieser Strategien Aufgaben angeben, bei denen sie besonders vorteilhaft oder "elegant" angewandt werden können (etwa die "Kraft der 10" bei Aufgaben des Typs x+9, die "Kraft der 5" bei Verdoppelungen mit Zehnerüberschreitung, das "Verdoppeln plus eins" bei den Nachbaraufgaben der Verdoppelungen, usw.), und dass Kinder ihre Rechenstrategien möglichst flexibel in Abstimmung auf das jeweilige Zahlenmaterial anwenden, wird als wichtiges Unterrichtsziel gesehen. KRAUTHAUSEN warnt aber auch zu Recht vor der

> *"illusorische[n] Praxis, derzufolge jedes Kind jede alternative Strategie und alle nur erdenklichen Wege vollends verstehen muss und bei jeder Rechenanforderung bewusst durchspielt. Es kann also nicht das Ziel sein, vor lauter Flexibilität und Reflexion die Praktikabilität und auch eine gewisse Ergebnisorientierung völlig aus dem Blick zu verlieren"* (KRAUTHAUSEN 2009, S. 111; ähnlich HASEMANN 2001, S. 98).

4.6 Vorrang operativer Übungsformen

Zuletzt soll in dieser (keine Vollständigkeit anstrebenden) Darstellung von Übereinstimmungen innerhalb der gegenwärtigen deutschsprachigen Fachdidaktik noch auf das Üben eingegangen werden. KRAUTHAUSEN und SCHERER halten dazu fest:

> *"Während in der Vergangenheit Lernen und Üben getrennt, z.T. als Gegensatz gesehen wurden, wird in der aktuellen* Theorie der Übung *diese als* integraler Bestandteil des Lernprozesses *gesehen"* (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 112, unter Verweis auf WINTER und WITTMANN; Hervorhebungen im Original).

Die im Zitat angesprochene "Trennung von Lernen und Üben" in einem demnach eben *nicht mehr zeitgemäßen* Arithmetikunterricht wurde von WITTMANN als "Flut der 'bunten Hunde' und der 'grauen Päckchen'" mit treffenden Argumenten kritisiert (WITTMANN 1994). Als "graue Päckchen" bezeichnet er dabei Aufgabenfolgen oder ganze Aufgabenseiten, innerhalb welcher die einzelnen Aufgaben "in der Regel beziehungslos aufgereiht" sind (a.a.O., S. 159):

> *"Die zu lernenden Wissenselemente und Fertigkeiten werden zuerst an Beispielen und Musteraufgaben erläutert und dann durch eine Vielzahl von Klein- und Kleinstaufgaben eines bestimmten Typs mit meistens genau festgelegtem äußerem Format ('Musterlösung') eingeübt"* (a.a.O., S. 159).

"Bunte Hunde" unterscheiden sich davon nur äußerlich; auch hierbei handelt es sich um

> *"eine Serie von gleichförmigen Aufgaben [...], die insofern willkürlich zusammengestellt [sind], als jede Aufgabe sich durch eine andere Aufgabe des gleichen Typs ersetzen ließe, ohne daß dies an der Serie etwas ändern würde"* (a.a.O., S. 161).

Der Unterschied zum "grauen Päckchen" besteht lediglich in der vorgeblich "kindgemäßen" Gestaltung als "spielerische" Übungsform, indem etwa den Lösungszahlen bestimmte Farben zugewiesen werden, mit welchen die Kinder abschließend eine den Rechnungen beigefügte Zeichnung (im Namen gebenden Beispiel die eines Hundes) bunt ausmalen dürfen (oder müssen) (a.a.O., S. 161).

Beiden Übungstypen hält WITTMANN entgegen, dass

– durch die künstliche Engführung der geübten Inhalte, durch das "massierte" Üben nur jeweils *eines* Schrittes, *Denken und Rechnen "entkoppelt*" würden;

- der *Schüler in Passivität* gedrängt werde, da er daran gewöhnt werde, "abzuwarten, bis ihm Rezepte [...] erklärt werden. Auch die Kontrolle für die Richtigkeit von Lösungen wird auf den Lehrer verlagert".
- sie *nicht langfristig wirksam* seien, weil das "monotone Üben stereotyper Aufgaben [..] zum kurzfristigen oberflächlichen Anlernen von Mechanismen" verführe;
- sie *nicht zur "Entwicklung höherer Lernziele" beitrügen*, weil sie "keine Gelegenheit [bieten], an Problemsituationen probierend-entdeckend heranzugehen sowie Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen und Strukturen aufzuspüren" (a.a.O., S. 161f).

Mit engerem Bezug auf das hier besonders interessierende *Üben der additiven Grundaufgaben* ist zu ergänzen bzw. hervorzuheben:
- Das Wesen der "grauen Päckchen" und "bunten Hunde" ist die *Beliebigkeit* und *Austauschbarkeit* der einzelnen Aufgaben innerhalb einer Aufgabenserie. *Operative Zusammenhänge* und damit das *Ableiten* aus Kernaufgaben *können* in dieser Form des Übens also per definitionem keine Rolle spielen. Operative Zusammenhänge mögen in einer solchen Konzeption des Arithmetikunterrichts zwar getrennt von den Übungen (in der "Erarbeitungsphase") thematisiert worden sein. Doch das *Denken in solchen Zusammenhängen* wird beim Bearbeiten "grauer Päckchen" *gerade nicht geübt.* Freilich können auch "graue Päckchen" nicht *verhindern*, dass manche Kinder die zusammenhanglos dargebotenen Grundaufgaben auch mit Hilfe von Ableitungsstrategien lösen. Aber "graue Päckchen" und "bunte Hunde" fördern dies nicht, sie legen diese Lösungsstrategie in keiner Weise nahe.
- Zu erwarten wäre vielmehr das Folgende: Jene Aufgaben im Rahmen eines "grauen Päckchens" oder "bunten Hundes", die ein Kind bereits automatisiert hat (bei denen also objektiv auch gar kein Übungsbedarf mehr besteht!) werden entsprechend problemlos aus dem Gedächtnis abgerufen. Alle anderen Aufgaben werden mit hoher Wahrscheinlichkeit zählend gelöst. Denn zwischen den Aufgaben besteht ja gerade kein operativer Zusammenhang, der eine Ableitung *nahe legen* würde. Ein Kind müsste also selbstständig und *gegen die vorgegebene Struktur* der Aufgabenserie einen passenden Zusammenhang herstellen. Außerdem müsste es die dafür nötige Ableitungsbasis bereits automatisiert haben. Denn anders als bei operativ strukturierten Übungen (siehe unten) ist in einem grauen Päckchen eine Aufgabe *in der Regel eben nicht* als Ableitungsbasis für die unmittelbar danach gereihte Aufgabe geeignet. Das Ableiten ist also, wie ausgeführt, zwar auch im Rahmen eines "grauen Päckchens" *möglich*, aber gerade bei den noch vorwiegend zählend rechnenden Kindern wenig wahrscheinlich; diese rechnen ja deshalb zählend, weil sie nur wenige Aufgaben schon automatisiert haben und *aus eigenem Antrieb* nicht oder kaum ableiten. Üben in Form von "grauen Päckchen" und "bunten Hunden" ist daher gerade bei Kindern, die auf zielführendes Üben besonders angewiesen wären, mit einiger Wahrscheinlichkeit nichts anderes als ein Einüben und damit ein weiteres *Verfestigen von Zählstrategien* – also jener

Strategien, deren Überwindung ein wesentliches Ziel des arithmetischen Anfangsunterrichts darstellt (vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 132ff).

Der Gegen-Entwurf zu den "grauen Päckchen" und "bunten Hunden" besteht in *strukturierten Übungen*. KRAUTHAUSEN und SCHERER unterscheiden in Anlehnung an WITTMANN (1992, S. 180f; WITTMANN verweist seinerseits auf WINTER 1984a) "drei Arten der Strukturierung", von denen mit Bezug auf unseren Gegenstand mehr noch als das "problemstrukturierte" und das "sachstrukturierte" vor allem das "operativ strukturierte" Üben interessiert. Bei diesem ergibt sich

> *"die Beziehung der Aufgaben untereinander [...] aus der systematischen Variation der Aufgaben und der Daten/Zahlen in den Aufgaben; die Ergebnisse stehen in einem gesetzmäßigen, einem operativen Zusammenhang"* (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 124f).

Dieser Zusammenhang erschließt sich Kindern freilich nicht von selbst: Auch "schöne Päckchen" können lediglich "Aufgabe für Aufgabe" abgearbeitet werden, ohne dass das Kind die zugrunde gelegte Struktur wahrnimmt. Und die Strukturierung kann gegen den damit verbundenen Übungszweck auch gewissermaßen "missbraucht" werden durch eine bloß "mechanische Reproduktion einmal durchgeführter Muster" (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 110), wenn also ein Kind an einem "schönen Päckchen" zwar die *Regelhaftigkeit der Ergebnisse* erkennt und diese nutzt, um sich bei den Folgeaufgaben das "Ausrechnen" zu ersparen, dabei aber gerade nicht über die *Regelhaftigkeit der Aufgabenserie* selbst nachdenkt. Letzterem kann entgegengewirkt werden durch "Variationen oder auch das zufällige Einstreuen einer Aufgabe [..], die das entsprechende Muster durchbricht" (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 110 unter Verweis auf WITTMANN & MÜLLER 2004b, S. 50, wo Kinder erstmals im "Zahlenbuch 1" gezielt auch mit "Schönen Päckchen?" konfrontiert werden, also mit Aufgabenserien, deren Struktur an einer Stelle absichtsvoll eine "Störung" aufweist). Auch die Gestaltung schöner Päckchen als *offene Aufgaben* (vgl. SCHERER 1999, S. 15f) kann dazu beitragen, dass Kinder sich die jeweils zu Grunde liegende operative Struktur deutlicher bewusst machen. Bei dieser offenen Variante sind nur die ersten zwei oder drei Aufgaben einer operativen Reihe vorgegeben, die Kinder sollen diese selbst (beliebig weit oder bis zum Erreichen einer vorgegebenen Anzahl von Aufgaben) fortsetzen (vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 140).

Vor allem aber hängt die Wirksamkeit schöner Päckchen ganz und gar davon ab, ob und in welcher Form sie genutzt werden als Anlässe, um Kinder untereinander und mit der Lehrkraft über die in ihnen enthaltenen Strukturen *sprechen und diskutieren* zu lassen und damit *Reflexionen* über die zu Grunde liegenden Zusammenhänge anzuregen: "Beziehungen zwischen den Aufgaben besprechen", "Muster besprechen" und dergleichen lauten denn auch die Kurzanweisungen in den Fußzeilen der entsprechenden Übungsseiten im "Zahlenbuch 1" (etwa

WITTMANN & MÜLLER 2004b, S. 50). Strukturiertes Üben und die bereits erläuterten "Strategiekonferenzen" (Kap. 4.3) sind also untrennbar miteinander verbunden: Um Strategieentdeckungen im Bereich der additiven Grundaufgaben in der Klasse diskutieren zu können, müssen diese erst bei möglichst vielen Kindern angeregt werden. Operativ strukturierte Übungen bieten dafür gute Gelegenheiten, weil die operative Struktur Kinder dazu einlädt oder zumindest gute Voraussetzungen dafür schafft, Aufgaben durch Ableitungsstrategien zu lösen. Umgekehrt werden neue Strategien abseits des vertrauten zählenden Rechnens zumindest von manchen Kindern wohl nur entdeckt und in weiterer Folge auch angewandt, wenn sie dazu (etwa durch das Beispiel anderer Kinder, aber natürlich auch durch gezielte Anregungen durch die Lehrkraft) im Rahmen von Strategiekonferenzen immer wieder ermutigt werden bzw. dafür Vorbild erhalten.

Freilich gilt auch hier wieder: Die Übereinstimmung innerhalb der aktuellen Fachdidaktik betrifft das *Prinzip, dass* (vorwiegend) strukturiert und daher im Bereich der additiven Grundaufgaben vor allem auch *operativ strukturiert* geübt werden soll; vgl. dazu neben den dazu bereits angeführten AutorInnen etwa auch RADATZ u.a. 1996, S. 84-89; PADBERG 2005, S. 94ff; SCHERER 1999, S. 11-17. Was dann unter "operativem Üben" im Einzelnen verstanden und wie dieses in die Gesamtkonzeption des Arithmetikunterrichts eingebunden wird, ist durchaus wieder höchst unterschiedlich. Die Übereinstimmung reicht aber immerhin so weit, dass neue deutsche Schulbücher (sofern sie sich an der aktuellen Fachdidaktik orientieren; schon wegen der in Kap. 4.4 angesprochenen Verlagsinteressen ist das nicht in allen Fällen gewährleistet) erkennbar darum bemüht sind, sich nicht dem Vorwurf auszusetzen, eine "Flut der grauen Päckchen und bunten Hunde" auf die Kinder loszulassen. Es ist also zum Standard geworden, auf den Übungsseiten zu den additiven Grundaufgaben vor allem auch "schöne Päckchen" zu bieten (vgl. etwa GIERLINGER 2001; RINKENS & HÖNISCH 2003; MAIER 2004; BECHERER & SCHULZ 2005). Die Qualität und Konsequenz der Umsetzung reichen freilich selten an das als Prototyp bereits mehrfach genannte "Zahlenbuch 1" heran (WITTMANN & MÜLLER 2004b, Erstauflage 1994).

4.7 Zusammenfassung und Anmerkungen zur "Evaluation" der übereinstimmend empfohlenen Unterrichtsmaßnahmen

Der Vergleich aktueller, in den letzten zehn bis 15 Jahren im deutschsprachigen Raum veröffentlichter fachdidaktischer Empfehlungen zur Gestaltung des arithmetischen Anfangsunterrichts zeigt weitgehende Übereinstimmung wenigstens in den folgenden, für das Thema der Arbeit in besonderer Weise relevanten Bereichen: Es wird allgemein geraten,

1) von den Zahlwort- und Zählkenntnissen der Kinder ausgehend diese möglichst früh zu einer strukturierten Zahlauffassung, zu einem Verständnis von "*Zahlen als Zusammensetzungen aus Zahlen*" hinzuführen;
2) die Ablösung vom zählenden Rechnen durch die *gezielte Erarbeitung von Ableitungsstrategien* zu fördern;
3) den Lösungsstrategien der Kinder mindestens ebensoviel Aufmerksamkeit zu widmen wie der Lösungsrichtigkeit und Kinder in *Strategiekonferenzen* immer wieder zu motivieren, ihre Strategien einander und damit sich selbst bewusst zu machen;
4) die Zahlen nicht kleinschrittig "einzuführen", sondern zumindest den Zahlenraum bis zehn (wenn nicht sogar den Zahlenraum bis 20) von Anfang an *"ganzheitlich"* zu behandeln;
5) für das Lösen von Aufgaben mit Zehnerübergang *nicht nur das "Teilschrittverfahren"*, sondern auch andere nicht-zählende Strategien im Unterricht gezielt zu behandeln;
6) das Üben und das Erarbeiten von mathematischen Einsichten zu verzahnen, was für das Üben der additiven Grundaufgaben ein vor allem auch *operativ strukturiertes Üben* in "schönen Päckchen" und absichtsvoll gestörten "schönen Päckchen?" erforderlich macht.

Nun ist die weitgehende *Übereinstimmung* der aktuellen Fachdidaktik in diesen Empfehlungen freilich noch kein Beweis für deren *"Richtigkeit"*. Wir sind hier im Bereich der "Entwicklung und Evaluation substantieller Lehreinheiten" (WITTMANN 1995, S. 357; vgl. die Einleitung zu Kapitel 2); "Richtigkeit" kann in diesem Bereich zweierlei bedeuten:

– *innere Konsistenz der Argumente*, mit denen ein Mittel-Zweck-Verhältnis zu den deklarierten Unterrichtszielen begründet wird;
– *empirisch überprüfte Wirksamkeit* im Sinne der deklarierten Unterrichtsziele.

Ob hingegen die Unterrichtsziele selbst "richtig" sind, ist immer auch eine Frage von Werthaltungen, schul- und gesellschaftspolitischen Überzeugungen, Auffassungen über das "Wesen der Mathematik" und dergleichen und *insofern* keine *wissenschaftlich* zu klärende Frage (vgl. die Einleitung zu Kap. 3).

Was nun die *innere Konsistenz der Argumente* betrifft, so scheint diese für die genannten sechs Punkte *im Prinzip* gegeben zu sein. Sofern in Detailfragen Unstimmigkeiten bei einzelnen AutorInnen bestehen, wurden diese an der jeweiligen Stelle auch angemerkt.

Mit Bezug auf die *empirische Überprüfung der Wirksamkeit* ist die Fachdidaktik wohl insgesamt in einer schwierigen Lage, was etwa COWAN (in einem Forschungsüberblick gerade zum frühen arithmetischen Lernen!) zu der resignativen Äußerung veranlasst: "Mathematics education continues to be more a matter of faith than of fact" (COWAN 2003, S. 68). Das unterschlägt zwar, dass wir in vielen Bereichen der Mathematikdidaktik (zumindest überall dort, wo es um die innere Konsistenz von Argumenten geht – siehe oben!) schon jetzt keinesfalls auf Glauben angewiesen sind. Doch empirische Studien, die *in methodisch befriedigender*

Weise überprüfen, ob und in welchem Maße bestimmte Unterrichtsmaßnahmen tatsächlich die mit ihnen verfolgten Ziele erreichen, sind aus einer Vielzahl von Gründen (siehe dazu BAUERSFELD 2000) schwer zu verwirklichen.

Immerhin liegt aber zur relativen Wirksamkeit eines am "Zahlenbuch 1" orientierten Erstunterrichts, eines Unterrichts also, der die oben genannten Empfehlungen in der weiter gefassten Konzeption des "aktiv-entdeckenden und sozialen" Lernens (vgl. Kap. 4.4) zu verwirklichen versucht, eine Untersuchung von MOSER OPITZ in Schweizer Kleinklassen (Sonderklassen für Lernbehinderte bzw. für Kinder mit partiellen Entwicklungsverzögerungen) vor. Verglichen wurden je 34 Kinder aus Kleinklassen, in denen (in methodisch kontrollierter Weise) nach dem "Zahlenbuch 1" unterrichtet wurde, mit solchen, deren Unterricht sich an einem "traditionellen" Lehrbuch für Kleinklassen orientierte, womit unter anderem ein ausführlicher "pränummerischer Vorspann" (vgl. Kap. 2.12.3), eine kleinschrittige Einführung der Zahlen und gerade *keine* gezielte Erarbeitung einer strukturierten Zahlauffassung verbunden waren. Es ergab sich ein signifikant höherer (durch Vergleich von Pre- und Posttest gemessener) Lernzuwachs der in den "Zahlenbuch"-Klassen unterrichteten Kinder im Laufe des ersten Schuljahres gerade auch in der Variable "richtig gelöste Operationen ohne Abzählen", das heißt: Die Ablösung von zählenden Lösungsstrategien gelang den Kindern in den "Zahlenbuch"-Klassen signifikant besser als in den Kontrollklassen (MOSER OPITZ 2001, S. 123-162).

Zumindest für den Sonderfall des Unterrichts in Kleinklassen für Kinder mit erschwerten Lernbedingungen lassen sich also auch empirische Belege dafür anführen, dass die in Kapitel 4.1 bis 4.6 diskutierten Unterrichtsmaßnahmen und Prinzipien der Gestaltung des arithmetischen Erstunterrichts *tatsächlich wirksam* sind in Hinblick auf das in Kapitel 3 ausgeführte, im Rahmen dieser Arbeit vorrangig interessierende *engere* Ziel einer *frühen* Ablösung vom zählenden Rechnen. Belege für die Wirksamkeit dieser und daraus abgeleiteter Prinzipien in *höheren* Schulstufen und für *weiter* gefasste Zielsetzungen eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts liefert etwa die Studie von SCHERER 1995; eine Fülle von eindrucksvollen empirischen *Dokumenten* dieser Wirksamkeit (freilich nicht im Sinne empirisch-quantitativer Studien) findet sich etwa bei HENGARTNER 1999, HENGARTNER u.a. 2006 und HIRT & WÄLTI 2008. Insgesamt muss aber wohl COWAN Recht gegeben werden, wenn er in seinem Forschungsüberblick festhält:

> *"Although modern mathematics educators assume that instruction in principles will expedite development of number-combination mastery and addition strategies, clear evidence is lacking"* (COWAN 2003, S. 67).

Wie bereits in Kap. 2.13.4 angemerkt, besteht hier also noch reichlich Forschungsbedarf.

5 Formulierung der Hypothesen

5.1 Globale inhaltliche Hypothesen

Auf Grundlage des in Kapitel 2 dargestellten Forschungsstandes und der daran angeschlossenen Analysen lassen sich, über die in Kapitel 2.13.1 bis 2.13.3 formulierten *qualitativen* Fragestellungen für den explorativen Teil dieser Studie hinaus, die folgenden globalen "inhaltlichen Hypothesen" (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 12) als Grundlagen für eine statistische Hypothesenprüfung ableiten:

Erste inhaltliche Hypothese:
Es wird angenommen, dass das zahlbezogene Wissen, über das ein Kind zu Beginn seines ersten Schuljahres verfügt, einen statistisch bedeutsamen Einfluss darauf hat, in welchem Ausmaß dieses Kind im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres beim additiven Rechnen im Zahlenraum bis zehn Fakten nutzende Strategien anwendet.

Zweite inhaltliche Hypothese:
Es wird angenommen, dass die Geschlechtszugehörigkeit eines Kindes und der Bildungsgrad seiner Eltern einen statistisch bedeutsamen Einfluss darauf haben, in welchem Ausmaß dieses Kind im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres beim additiven Rechnen im Zahlenraum bis zehn Fakten nutzende Strategien anwendet.

Dritte inhaltliche Hypothese:
Es wird angenommen, dass die Rechenfähigkeit eines Kindes am Ende des ersten Schuljahres (gemessen an der Anzahl von nicht-trivialen Grundaufgaben, die dieses Kind durch Fakten nutzende Strategien löst) mit seiner Rechenfähigkeit zu Beginn des ersten Schuljahres, noch stärker aber mit seiner Rechenfähigkeit zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres korreliert.

Vierte inhaltliche Hypothese:
Es wird angenommen, dass das wiederholte Ableiten einer additiven Grundaufgabe deren Automatisierung befördert und dass deshalb Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie lösen, diese Grundaufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant häufiger automatisiert haben als Kinder, die dieselbe Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch ein Zählstrategie lösen.

Diese globalen inhaltlichen Hypothesen werden im weiteren Verlauf dieser Studie (vgl. Kapitel 9) mit den im folgenden Abschnitt formulierten statistischen Hypothesen (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 12) getestet.

5.2 Statistische Prüfhypothesen

Im Folgenden werden der besseren Lesbarkeit wegen jeweils nur die Alternativhypothesen formuliert; die zugehörigen Nullhypothesen ergeben sich jeweils als Negation der Alternativhypothese. Die zur Prüfung dieses Hypothesen gewählten statistischen Verfahren werden in Kapitel 6.6 vorgestellt und erläutert, die Darstellung der Ergebnisse der Hypothesenprüfung erfolgt in Kapitel 9, deren Diskussion in Kapitel 10.

5.2.1 Prüfhypothesen zum Einfluss des zu Beginn des ersten Schuljahres vorhandenen zahlbezogenen Wissens auf die Entwicklung der Rechenstrategien im ersten Schuljahr

Die erste inhaltliche Hypothese wird zum Zweck der statistischen Hypothesenprüfung durch die statistischen Hypothesen $H1_1$ und $H1_2$ wie folgt präzisiert:

1. Hypothese ($H1_1$):
Es wird angenommen, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je besser sie (gemessen an der höchsten beim Aufsagen der Zahlwortreihe vorwärts erreichten Zählzahl) zu Beginn des ersten Schuljahres die Zahlwortreihe vorwärts beherrschen (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

2. Hypothese ($H1_2$):
Es wird angenommen, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr strukturierte Zahldarstellungen sie zu Beginn des ersten Schuljahres quasi-simultan erfassen (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

5.2.2 Prüfhypothesen zum Einfluss von Geschlechtszugehörigkeit und Bildungsgrad der Eltern auf die Strategiepräferenz zu Beginn bzw. am Ende des ersten Schuljahres

Die zweite inhaltliche Hypothese wird durch die statistischen Hypothesen $H1_3$ und $H1_4$ präzisiert:

3. Hypothese ($H1_3$):
Es wird angenommen, dass Buben im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen als Mädchen (zur Begründung vgl. Kap. 2.7 und Kap. 2.13.4).

4. Hypothese ($H1_4$):
Es wird angenommen, dass Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen als Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad (zur Begründung vgl. Kap. 2.13.4).

5.2.3 Prüfhypothesen zum Zusammenhang der Strategiepräferenz am Ende des ersten Schuljahres mit der Strategiepräferenz zu Beginn bzw. Mitte des ersten Schuljahres

Die dritte inhaltliche Hypothese wird durch die statistischen Hypothesen $H1_5$ und $H1_6$ präzisiert:

5. Hypothese ($H1_5$):
Es wird angenommen, dass Kinder am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des ersten Schuljahres durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

6. Hypothese ($H1_6$):
Es wird angenommen, dass Kinder am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr nicht-triviale Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

5.2.4 Prüfhypothesen zum Zusammenhang zwischen den Strategien, mit denen dieselben Aufgaben Mitte und Ende des ersten Schuljahres von denselben Kindern gelöst werden

Die vierte inhaltliche Hypothese wird durch die statistischen Hypothesen $H1_7$ und $H1_8$ präzisiert:

7. Hypothese ($H1_7$):
Es wird angenommen, dass Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf lösen als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Weiterzählen gelöst haben (zur Begründung siehe v.a. Kapitel 2.8, 2.9, 2.10.4, 2.12.2 sowie Kap. 2.13.4).

8. Hypothese ($H1_8$):

Es wird angenommen, dass Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf lösen als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Finger-Teilzählen oder Alleszählen gelöst haben (zur Begründung siehe v.a. Kapitel 2.8, 2.9, 2.10.4, 2.12.2 sowie Kap. 2.13.4).

6 Design und Durchführung der empirischen Studien

"Zwei plus sieben?" – "Neun!" – "Wie hast du das so schnell herausgefunden?" – "Da habe ich im Hirn kurz nachgedacht, und dann ist die Flüssigkeit mit neun hergeronnen."

DAVID erläutert seine Lösungsstrategie für 2+7, Mitte seines ersten Schuljahres

Zur Klärung der in Kapitel 5 formulierten und erläuterten Forschungsfragen wurden im Verlauf des Schuljahres 2006/2007 in vier Bereichen Daten erhoben:

- Im Rahmen einer *Längsschnittstudie* wurden mit anfangs 159, durchgehend 139 ErstklässlerInnen aus 20 verschiedenen Volksschulen (22 Klassen) jeweils zu Beginn, Mitte und Ende des Schuljahres *qualitative Interviews* durchgeführt.
- Die im Unterricht dieser Kinder verwendeten Mathematik-Schulbücher (fünf unterschiedliche Titel) wie auch die in Schul- und Hausübungsheften sowie Übungsblatt-Mappen von den Kindern im Laufe des Schuljahres zusätzlich bearbeiteten Rechenaufgaben wurden einer *qualitativen Inhaltsanalyse* unterzogen.
- Die 22 LehrerInnen der Kinder wurden am Ende des Schuljahres mittels Fragebogen vorwiegend zu didaktisch-methodischen Aspekten ihres Unterrichts befragt.
- Die Eltern der Kinder wurden am Ende des Schuljahres mittels Fragebogen vorwiegend zum häuslichen Üben vor Schuleintritt und während des Schuljahres befragt.

Die Gewinnung der Stichprobe, die in den vier Bereichen verwendeten Erhebungsinstrumente und die Modalitäten ihres Einsatzes sollen im Folgenden mit der gebotenen Genauigkeit dokumentiert werden ("Verfahrensdokumentation" als Gütekriterium qualitativer Forschung, vgl. MAYRING 2002, S. 144f).

6.1 Längsschnittstudie zur Entwicklung der Lösungsstrategien im Laufe des ersten Schuljahres

6.1.1 Stichprobengewinnung

Im Bemühen um Repräsentativität wurden die im Rahmen der Längsschnittstudie zu befragenden Kinder durch eine zweistufige Zufallsstichprobe (vgl. ATTESLANDER 2003, S. 304-307) gewonnen. Angestrebt wurde eine Stichprobe von 160 ErstklässlerInnen deutscher Muttersprache aus 20 verschiedenen Schulen; bei dieser Entscheidung waren folgende Überlegungen leitend:

- Das Sprachverständnis ist einer (von vielen) Einflussfaktoren der arithmetischen Entwicklung (vgl. etwa LORENZ 2003a, S. 47f). Bei Kindern nicht-deutscher Muttersprache scheinen (gerade im ersten Schuljahr) Defizite im Sprachverständnis wahrscheinlicher als bei Kindern deutscher Muttersprache. Ein methodisch kontrollierter Vergleich der Strategieentwicklungen bei Kindern deutscher und nichtdeutscher Muttersprache wäre vermutlich von pädagogisch hoher Relevanz, hätte aber den Rahmen dieses Projektes gesprengt; daher die Einschränkung auf Kinder deutscher Muttersprache.
- Um die Vergleichbarkeit zu wahren, sollten *alle* befragten Kinder ihr erstes Schuljahr absolvieren (keine Vorschulklasse, keine Rückstellung).
- Die Gesamtanzahl der Kinder sollte die Prüfung der in Kapitel 5 erläuterten statistischen Hypothesen erlauben, wobei freilich zu erwarten war, dass die für die Prüfung signifikanter Effekte nötigen Zellenumfänge auf Grund der beschränkten Personalressourcen bei der Erhebung (s.u.) nicht für alle interessierenden Merkmalskombinationen zu gewährleisten sein würden.
- Die nicht vollständig kontrollierbaren unterrichtsbezogenen Einflussvariablen sollten durch Verteilung der Kinder *auf möglichst viele* unterschiedliche Klassen so weit wie möglich gestreut werden.
- *Wie viele* Klassen einzubeziehen möglich war, ergab eine rein pragmatische Überlegung: Für die Erhebungen standen nur zwei Interviewer (ich selbst und eine Kollegin mit gleichfalls langjähriger Erfahrung im Führen qualitativer Interviews) zur Verfügung. Die Interviewer konnten sich von ihren beruflichen Verpflichtungen nicht mehr als dreimal je zwei Wochen lang für die Durchführung der Interviews freimachen. Innerhalb von zwei Wochen sind pro Interviewer zehn Schulbesuche möglich, an einem Vormittag können (mit den nötigen Zeitreserven) maximal acht halbstündige Interviews geführt werden.

Auf Grundlage dieser Überlegungen wurden in einem ersten Schritt mittels Urnenverfahren (vgl. ATTESLANDER 2003, S. 306) aus der Gesamtliste der damals 651 im „Schulführer“ des Landesschulrates für Niederösterreich verzeichneten niederösterreichischen Volksschulen (LANDESSCHULRAT FÜR NIEDERÖSTERREICH, http://www.lsr-noe.gv.at/schulen-in-noe.html, 9.12.2009) 20 plus 10 Schulen ausgelost. Niederösterreich wurde deshalb gewählt, weil es in Bezug auf den Anteil von Kindern mit nichtdeutscher Muttersprache, auf die Mischung von kleineren und größeren Schulen sowie von städtischen und ländlichen Wohngebieten für Gesamtösterreich typischer ist als etwa Wien. Repräsentativität kann die Studie aber freilich nur für Niederösterreich in Anspruch nehmen. Im Weiteren wurde wie folgt verfahren:

Die LeiterInnen der 20 zuerst gelosten Schulen wurden brieflich über das Projekt informiert und um Teilnahme gebeten. Zur Klärung offener Fragen folgten Telefongespräche mit den SchulleiterInnen und den LehrerInnen, die im Untersuchungszeitraum eine erste Klasse führen würden. Eine der 20 Schulen wollte (ohne Angabe von Gründen) nicht teilnehmen, die an 21. Stelle geloste Schule komplettierte daher diese erste Zufallsauswahl.

In der Mehrzahl der teilnehmenden Schulen wurde im Schuljahr 2006/2007 nur jeweils *eine* erste Klasse geführt. In den Schulen mit zwei oder drei ersten Klassen wurde per Zufallsentscheidung (Spielwürfel) festgelegt, welche dieser ersten Klassen am Projekt teilnehmen sollte. In zwei Schulen mussten beide erste Klassen einbezogen werden; in einem Fall war der Anteil an Kindern nichtdeutscher Muttersprache so hoch, dass die gewünschte Anzahl von 8 Kindern deutscher Muttersprache nur durch Zufallsauswahl aus beiden Klassen zustande kam. Die andere Schule war aus nicht näher erläuterten Gründen zur Teilnahme an der Studie nur bereit, wenn Kinder aus beiden ersten Klassen an den Befragungen teilnehmen durften.

Aus den SchülerInnenlisten der teilnehmenden Klassen wurden Kinder nichtdeutscher Muttersprache sowie jene Kinder, die bereits ihr zweites Pflichtschuljahr begannen, ausgenommen. Aus den restlichen Kindern wurden im Urnenverfahren je 8 Kinder (bzw. je 4 Kinder aus den beiden Parallelklassen, siehe oben) zur Teilnahme an den Befragungen ausgewählt. Die Eltern waren zuvor mittels Informationsbriefen über das Projekt informiert und um Zustimmung zur Teilnahme ihrer Kinder gebeten worden. Die Zustimmungsquote lag in allen Klassen über 90 Prozent, in den meisten Klassen bei 100 Prozent. In insgesamt fünf Fällen wurde ein Kind gelost, dessen Eltern ihre Zustimmung (aus nicht ermittelbaren Gründen) verweigert hatten; in diesem Fall rückte das nächstgeloste Kind nach.

Eine der teilnehmenden Klassen umfasste nur sieben Kinder (der ersten Schulstufe innerhalb einer Mehrstufenklasse), die alle an der Befragung teilnahmen. Die Ausgangsstichprobe bestand also aus 159 Kindern, die auch tatsächlich alle beim ersten Schulbesuch befragt werden konnten. 20 Kinder fehlten bei zumindest einem der beiden folgenden Besuche, teils wegen Krankheit, teils wegen Schulwechsels. In der Auswertung berücksichtigt wurden nur jene 139 Kinder, die an allen drei Befragungen teilnahmen.

6.1.2 Beschreibung der Stichprobe

Unter den 139 Kindern der ausgewerteten Stichprobe sind 70 Buben und 69 Mädchen. Ihr Alter zu Schulbeginn reichte von 5 Jahren 10 Monaten bis zu 7 Jahren 1 Monat (Mittelwert 6 Jahre 6 Monate, Standardabweichung 3,7 Monate).

Das Wohnmilieu der Stichprobe ist überwiegend ländlich; die Mehrheit der Kinder wohnt in Gemeinden mit weniger als 5000 Einwohnern. Tabelle 5 gibt die Übersicht über die gesamte Stichprobe.

Tabelle 5: Verteilung der Stichprobe auf Gemeinden unterschiedlicher Größe

	Häufigkeit	Prozent
weniger als 1000 Einwohner	14	10,1
1000 bis 5000 Einwohner	77	55,4
5000 bis 30 000 Einwohner	41	29,5
mehr als 30 000 Einwohner	7	5,0
Gesamt	139	100,0

Alle Kinder der Stichprobe hatten den Kindergarten besucht, im Schnitt zweieinhalb Jahre lang (Standardabweichung 7 Monate). Die Größe der von den Kindern besuchten Klassen reichte von 12 bis 31 SchülerInnen (Mittelwert 19, Standardabweichung 4); 14 Kinder (aus zwei teilnehmenden Schulen) besuchten eine Zweistufenklasse (gemeinsamer Unterricht der ersten und zweiten Schulstufe).

6.1.2.1 Mögliche Einschränkungen der Repräsentativität

Die Ermittlung der Stichprobe durch Zufallsauswahl sollte, wie dargestellt, Repräsentativität bezüglich der Grundgesamtheit "niederösterreichische ErstklässlerInnen deutscher Muttersprache in ihrem ersten Schuljahr" gewährleisten. Insbesondere wurde darauf abgezielt, dass in der Gesamtstichprobe Kinder mit unterschiedlichen *rechnerischen* Leistungsniveaus entsprechend der Häufigkeit dieser Leistungsniveaus in der Grundgesamtheit vertreten seien. Um ein über das Auswahlverfahren hinausgehendes Kriterium (von begrenzter Aussagekraft; s.u.) zur Beurteilung der diesbezüglichen Qualität der Stichprobe zu erhalten, wurden die Lehrkräfte am Ende des ersten Schuljahres um eine Einschätzung dazu gebeten, welchem rechnerischen Leistungsniveau sie die aus ihrer Klasse an den Befragungen teilnehmenden Kinder im Vergleich zur Gesamtklasse zuordnen würden. Dafür wurden fünf Kategorien angeboten:

– "gehört im Rechnen zu den Allerbesten dieser Klasse"
– "über dem Durchschnitt"
– "Durchschnitt"
– "unter dem Durchschnitt"
– "gehört im Rechnen zu den Schwächsten dieser Klasse".

Gemessen an den auf diese Weise eingeholten Beurteilungen der Lehrkräfte muss die vorliegende Stichprobe wohl als verzerrt im Sinne einer Überrepräsentierung leistungsstärkerer Kinder eingeschätzt werden. Denn 38 der 139 befragten Kinder (27,3 Prozent) gehörten nach dem Urteil ihrer Lehrkraft zu den Allerbesten ihrer Klassen, 49 weitere (35,3 Prozent) lagen demgemäß über dem Klassendurchschnitt. Diesen insgesamt 62,6 Prozent als "überdurchschnittlich" eingestuften Kindern stehen 11 Kinder (7,9 Prozent) gegenüber, die als unterdurchschnittlich, und 5 Kinder (3,6 Prozent), die als "zu den Schwächsten" ihrer Klassen gehörig eingeschätzt wurden. 36 Kinder (25,9 Prozent) wurden als "durchschnittlich" beurteilt.

Die Objektivität und Validität dieser Einschätzungen kann nicht beurteilt werden. Studien zur Notengebung zeigen, dass "auch in einem vermeintlich doch so eindeutigen Fach wie Mathematik" nicht nur dieselben Leistungen von unterschiedlichen Lehrpersonen unterschiedlich beurteilt werden, sondern dass es "auch vergleichbare Schwankungen in den Einschätzungen ein und derselben Person" gebe (SUNDERMANN & SELTER 2006, S. 18, unter Verweis auf INGENKAMP 1995 und BIRKEL 2005). Die Möglichkeit ähnlicher Verzerrungen muss auch mit Bezug auf die hier eingeholte Einschätzung des rechnerischen Leistungsniveaus der Kinder berücksichtigt werden.

6.1.3 Zeitlicher Ablauf

Die Kinder wurden im Laufe ihres ersten Schuljahres dreimal befragt:

- Die jeweils ersten Interviews mit den Kindern fanden in der zweiten bis fünften Schulwoche statt. Diese erste Befragungsrunde sollte so weit wie möglich das schulisch noch nicht beeinflusste Vorwissen der Kinder erheben. Die Lehrkräfte stimmten den Interviews im Interesse einer ersten Eingewöhnung der Kinder aber erst frühestens Ende der zweiten Schulwoche zu. Der Plan, zwischen ersten und letzten Befragungen nicht mehr als die beim vorliegenden Verhältnis von Interviewern und besuchten Schulen (zwei zu 20) unvermeidlichen zwei Wochen (zehn Schultage) verstreichen zu lassen, um die Vergleichbarkeit der Daten bestmöglich zu wahren, konnte nicht ganz eingehalten werden, da eine Lehrerin darauf bestand, dass die Kinder ihrer Klasse erst zu Beginn der fünften Schulwoche befragt würden.
- Die zweite Befragungsrunde fand in der zweiten und dritten Woche des zweiten Halbjahres statt,
- die abschließende dritte in der drittletzten und vorletzten Woche des Schuljahres.

6.1.4 Zur Erhebungsmethode

Ziel der Befragungen war es, einen möglichst genauen, detailreichen Einblick in die von Kindern beim Lösen additiver Aufgaben angewandten Strategien und die den Strategien zu Grunde liegenden Denkweisen zu erhalten. Beim ersten Interview sollte zudem das Vorwissen der Kinder in einer Reihe von mathematik-relevanten Bereichen erhoben werden. Als Erhebungsmethode kam dafür nur eine dem Untersuchungsgegenstand angepasste Variante des *qualitativen Interviews* in Frage (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 308-315). Im Bereich der Entwicklungspsychologie und Pädagogik hat sich dafür die Bezeichnung "klinisches Interview" eingebürgert, auch "revidierte klinische Methode" nach PIAGET genannt (vgl. SELTER & SPIEGEL 1997, S. 100-112). Das Wort "klinisch" verrät die Herkunft aus der psychiatrischen Diagnostik, wirkt aber gerade bei Untersuchungen mit Schulkindern unpassend; zu Anwendungen für mathematik-didaktische Fragen vgl. etwa GINSBURG 1997 oder WITTMANN 1982.

Das "klinische Interview" ist ein *halbstandardisiertes* Verfahren: Grundlage des Gesprächs ist ein zuvor ausgearbeiteter Fragebogen, der mit allen ProbandInnen in derselben vorgegebenen Reihenfolge durchgegangen wird. Alle Interviewten erhalten zu jedem Gegenstand des Gesprächs jeweils dieselbe Ausgangsfrage, ihnen stehen zur Beantwortung dieser Frage dieselben Hilfsmittel zur Verfügung. Das Ziel, *qualitative* Aussagen über Denkprozesse (und nicht nur *quantitative* über Lösungszeiten und Fehlerquoten) zu gewinnen, macht es aber unumgänglich, mit den unterschiedlichen Antworten (oder auch Nicht-Antworten: manche Kinder bleiben vorerst stumm) gerade *nicht standardisiert*, sondern *flexibel* umzugehen. Es gilt, jeweils in einer Weise nachzufragen, die geeignet erscheint, die Interviewten zum "lauten Denken" (vgl. LORENZ & RADATZ 1993, S. 20) zu bewegen bzw. dem, was bereits gesagt wurde, aber noch nicht eindeutig interpretiert werden kann, weiter auf den Grund zu gehen.

Weil es aber (nicht nur für Kinder) mitunter schwierig ist, das eigene Denken zu verbalisieren (LORENZ & RADATZ 1993, S. 60f), kommt man nicht darum herum, den Interviewten immer wieder auch "Angebote" zu unterbreiten, wie sie möglicherweise gedacht haben könnten. Das wiederum erfordert, "während des Interviews […] Hypothesen über die Gedanken" der Interviewten zu bilden (SELTER & SPIEGEL 1997, S. 101). Dieser Versuch einer "kommunikativen Validierung" (vgl. MAYRING 2002, S. 147) birgt freilich die Gefahr, dass das Kind letztlich einer Variante zustimmt, die seine tatsächlichen Gedanken nicht richtig wiedergibt, sei es im Bestreben "to satisfy the interviewer" (vgl. BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 104), sei es, weil seine metakognitiven Kompetenzen tatsächlich nicht ausreichen, um den eigenen Gedankengang auch nur korrekt wiederzuerkennen. Dazu kommen mögliche Interviewereffekte (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 246), die im Falle unseres Untersuchungsgegenstandes auch von so grundsätzlicher Art sein können, dass die Interviewsituation selbst (alleine mit einem weitgehend fremden Menschen rechnen zu sollen) ein Kind dazu bringen kann, andere (vermutlich ihm "sicherer" erscheinende) Lösungsstrategien zu wählen als sonst (vgl. SVENSON & SJÖBERG 1983, S. 124).

Das "qualitative Interview" ist also selbst bei bester Gesprächsführung weit davon entfernt, verlässlich "valide Daten" zu liefern (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 199), also die Sicherheit zu bieten, das "unverfälschte Denken" der Befragten zu erheben. Es ist aber wohl die *einzige* Methode, mit der wir überhaupt zu *didaktisch verwertbaren* Aussagen über kindliche Rechenstrategien gelangen können.

Zwar wurde, wie in Kapitel 2.2 dargestellt, in der Vergangenheit auch versucht, aus den Lösungs*zeiten* der Kinder Rückschlüsse auf ihre Lösungs*strategien* zu ziehen. Doch es hätte nicht erst des Nachweises bedurft, dass das Mitteln von Lösungszeiten unterschiedlicher Kinder über unterschiedliche Aufgaben statistische Artefakte nach sich zieht (SIEGLER 1987, vgl.

Kap. 2.2.3), um die "chronometrische Methode" als unbrauchbar für die pädagogisch-didaktische Grundlagenforschung zu erweisen.

Denn die Verzerrungen chronometrischer Studien ergeben sich ja nicht erst durch das von SIEGLER kritisierte "data averaging": *In keinem einzigen Fall* lässt sich aus der Lösungszeit mit Sicherheit ermitteln, wie die Lösung zustandegekommen ist. Zählende Strategien nehmen nicht zwangsläufig mehr Zeit in Anspruch als etwa Ableitungen (zumal, wenn diese noch nicht routiniert ablaufen). Selbst Faktenabruf muss nicht stets "wie auf Knopfdruck" erfolgen, während andererseits geübtes "counting on from larger" bei Summanden bis 3 auch innerhalb von 1 bis 2 Sekunden zu einer Lösung führen kann. Und wenn, wie in dieser Studie, ein Hauptinteresse gerade auch den *qualitativen Unterschieden* einzelner Ableitungsstrategien gilt, dann führt an einer Befragung der Kinder ohnedies kein Weg vorbei: Diese können, wenn überhaupt, immer nur auf Grundlage verbaler Protokolle rekonstruiert werden.

6.1.4.1 Zur Validität qualitativer Interviews

Freilich ist es nicht ratsam, sich *ausschließlich* auf die Selbstauskünfte der Kinder zu stützen (wie dies etwa HENRY und BROWN taten, vgl. HENRY & BROWN 2008, S. 161). Denn natürlich ist GRUBE (2006, S. 62) recht zu geben, wenn er unter Verweis auf RUSSO, JOHNSON & STEPHENS (1989) "aufgrund der unsicheren Korrespondenz von tatsächlich ablaufenden Prozessen und den subjektiv erfahrenen oder rekonstruierten Prozessen" zur Vorsicht mahnt. Mit Bezug auf unseren Untersuchungsgegenstand sind unterschiedliche Gründe denkbar, warum die Auskunft eines Kindes durch "errors of omission" (Verschweigen, wie tatsächlich gedacht wurde) oder "errors of commission (e.g. reporting mental events that did not occur)" (RUSSO u.a. 1989, S. 1989) invalide sein kann, unter anderem die folgenden:

- Ein Kind, das durch verdecktes oder sogar offenes Zählen zur Lösung gelangt ist, mag angeben, es habe die Antwort "einfach auswendig gewusst", weil

  > *"this justification was a relatively easy way to satisfy the interviewer, she was already infected with our cultural bias against using counting strategies to add, or she wanted to appear smart"* (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 114).

- Ein Kind mag umgekehrt eine Aufgabe durch Faktenabruf lösen, aber beim Erläutern des Lösungsweges eine Zählstrategie vorführen, weil es die Interviewsituation falsch interpretiert und meint, es müsse dem Interviewer *beweisen* bzw. *begründen*, dass bzw. warum sich eine bestimmte Lösungszahl ergibt; und die Zählstrategie erscheint ihm eben als bestmöglicher Beweis, auch wenn es selbst nicht mehr auf zählendes Rechnen angewiesen ist.
- Aus demselben Grund mag ein Kind, obwohl es eine Lösung direkt aus dem Gedächtnis abgerufen hat, angeben, es habe die Aufgabe aus einer anderen erschlossen.
- Umgekehrt mag ein Kind eine Aufgabe zwar abgeleitet, dies aber bereits mit einer solchen Selbstverständlichkeit und Routine getan haben, dass ihm der Unterschied zum Faktenabruf tatsächlich gar nicht mehr bewusst ist.

Ein qualitatives Interview bietet aber auch eine Reihe von Möglichkeiten, um die Wahrscheinlichkeit einer validen Erhebung kindlicher Lösungsstrategien entscheidend zu erhöhen. Erstens werden die Kinder ja nicht nur und auch nicht zwangsläufig nach jeder einzelnen Rechnung zu ihrem Lösungsweg *befragt*, sondern vor allem (und dies tatsächlich bei *jeder* Rechnung) während des Lösungsprozesses *beobachtet.* Die Aufzeichnung auf Video (s. Kap. 6.1.6) erlaubt es, sich bei wiederholtem Abspielen einmal auf die Mimik, dann auf die Gestik (leichtes Fingerzucken und ähnliches) des Kindes zu konzentrieren. Zählstrategien können auf diese Weise in der Regel auch dann verlässlich identifiziert werden, wenn das Kind beim Zählen (aus welchen Gründen auch immer) auf Finger oder Würfel verzichtet, denn auch "inneres Zählen" ist zumeist am leichten Mitnicken des Kopfes oder am angestrengten Fixieren des Blickes erkennbar (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 34f). Umgekehrt birgt das Befragen in Fällen, wo die Beobachtung ohnedies klare Hinweise auf die verwendete Lösungsstrategie geliefert hat, die Gefahr der "reactivity" (vgl. RUSSO u.a. 1989, S. 760): Das Kind mag beim "zweiten Lösungsversuch", der durch das Nachfragen provoziert wird, tatsächlich anders vorgehen als ursprünglich. Das spricht dafür, nur dort nachzufragen, wo dies tatsächlich notwendig ist, um den Rechenweg näher zu bestimmen.

Zweitens liefert die *Lösungszeit*, so wenig sie für sich genommen über den Lösungsweg aussagt, *in Kombination mit der Beobachtung* in manchen Fällen dann doch ein weiteres Außenkriterium zur Prüfung der Validität eines verbalen Protokolls. Ein Kind, das etwa für die Addition 3+4 gut vier Sekunden braucht *und* dabei angestrengt auf seine auf der Tischplatte ausgestreckten zehn Finger blickt, hat vermutlich an diesen Fingern gezählt – auch wenn es vielleicht (etwa "um klug zu erscheinen", vgl. BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 114) zu Protokoll gibt, die Aufgabe "einfach gewusst" zu haben.

Schließlich lassen sich Missverständnisse der Art, dass ein Kind meint, es müsse die Richtigkeit seiner Lösungen *beweisen* (s.o.), in der Regel *im Gespräch* aus der Welt schaffen. Auch uneindeutige verbale Protokolle wie "das habe ich im Kopf gemacht" können meist durch Nachfragen geklärt werden. Kinder, die Zählstrategien verheimlichen (wollen) (s.o.) oder (warum auch immer) Auskünfte über ihre Gedanken zunächst verweigern, können durch offenes Ansprechen ihres Verhaltens, vor allem aber auch durch Bekunden von Wertschätzung und ehrlichem Interesse seitens des Interviewers ("Ich finde das toll, wie du das machst, aber ich habe es noch nicht ganz verstanden. Ich würde so gerne wissen, wie du da draufgekommen bist!") so gut wie immer zu Kooperation und Offenheit gegenüber dem Interviewer motiviert werden ("Nähe zum Gegenstand", "Interessenannäherung" bei MAYRING 2002, S. 146).

6.1.4.2 Zur Frage der Reliabilität qualitativer Interviews

Während zur Prüfung der *Validität* der Kinderaussagen mit Beobachtung und Zeitmessung wenigstens in vielen Fällen Außenkriterien herangezogen werden können, steht der Anwendung des klassischen Gütekriteriums der *Reliabilität* (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 195) die untersuchte Sache selbst ganz prinzipiell entgegen. Denn wie schon CARPENTER und MOSER (1984, S. 189) beobachtet haben, wenden Kinder mitunter selbst innerhalb ein und derselben Sitzung bei Aufgaben desselben Typs oder sogar derselben Aufgabe unterschiedliche Strategien an. Das Modell der Testhalbierungs-Reliabilität (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 197) lässt sich deshalb auf die Untersuchung kindlicher Lösungsstrategien grundsätzlich nicht anwenden. Und da Kinder ihre Lösungsstrategien, zumal im Laufe des ersten Schuljahres, in der Regel weiterentwickeln (und bei einzelnen Aufgaben vielleicht sogar innerhalb kurzer Zeiträume), versagt hier auch das Modell der Re-Test-Reliabiltät (vgl. MAYRING 2002, S. 141f).

Das verweist auf ein noch viel grundsätzlicheres Problem der Erforschung kindlicher Strategieentwicklung, das umso stärker hervortritt, in je größeren zeitlichen Abständen wir Kinder zu ihren Rechenstrategien befragen: Wenn es im Wesen der kindlichen Strategieentwicklung liegt, mitunter auch dieselben Aufgaben im Zeitraum von wenigen Stunden oder Tagen mit unterschiedlichen Strategien zu lösen, dann können wir auch nicht mit Sicherheit sagen, ob der in der Momentaufnahme eines Interviews gezeigte *Strategie-Mix* eines Kindes überhaupt charakteristisch dafür ist, mit welchem Strategie-Mix dieses Kind außerhalb der Interviewsituation im selben Zeitraum gerechnet hat (vgl. dazu und zum Dilemma, in das man gerät, wenn man einen Ausweg aus diesem Problem sucht, auch Kapitel 8.5.4.2).

Wenn also GEARY u.a. festhalten:

> *"Several previous studies have demonstrated that children can accurately describe problem-solving strategies in arithmetic, if they are asked immediately after the problem is solved"* (GEARY u.a. 1991, S. 790, unter Verweis auf SIEGLER 1987),

dann sehen sie wohl allzu großzügig über die tatsächlich mit verbalen Protokollen verbundenen Schwierigkeiten und Unsicherheiten hinweg. Wird diesen aber in der oben ausgeführten Weise Rechnung getragen, dann dürfen wir doch hoffen, dem kindlichen Denken durch "qualitative Interviews" recht nahe zu kommen. In ihren Geist "eintreten" zu wollen, wie dies GINSBURGS *"Entering the Child's Mind"* (GINSBURG 1997) verheißt, wäre wohl ohnedies vermessen.

6.1.5 Design der Interviews

Jede der drei Befragungsrunden erforderte einen eigenen Interviewleitfaden, wobei ein Teil der Fragen bei allen drei Interviews gleich war. Urfassungen der im Folgenden erläuterten Interview-Leitfäden wurden im Schuljahr 2005/2006 (jeweils in den Schulwochen, für die sie konzipiert waren) einem Pretest unterzogen (an fünf Kindern einer ersten Klasse in einer Schule, die *nicht* an der Hauptuntersuchung teilnahm). Änderungen der hier erläuterten Leitfäden gegenüber den Urfassungen betrafen einerseits den Umfang (der jeweils reduziert wurde). Andererseits wurde versucht, einzelne Leitfragen kindgerechter zu formulieren.

6.1.5.1 Interview 1

Schon vor den ersten Interviews war aufgrund vorliegender empirischer Untersuchungen aus dem deutschsprachigen Raum (etwa GRASSMANN u.a. 1995; HASEMANN 2003; HENGARTNER & RÖTHLISBERGER 1995; R. SCHMIDT 1982; SCHMIDT & WEISER 1982, 1986; SELTER 1995;) zu vermuten, dass auch österreichische SchulanfängerInnen (über die bislang keine einschlägigen Untersuchungen vorliegen) vielfach bereits über weitreichende Kompetenzen in den Bereichen Mengenvergleich, Zählfertigkeiten, Ziffernkenntnis verfügen und auch schon "eine – bisweilen bereits beachtliche – Rechenfähigkeit und -fertigkeit bei Additions- wie Subtraktionssituationen" (SCHMIDT 2009, S. 84; ähnlich SELTER & SPIEGEL 1997, S. 20-24) mitbringen. Zugleich zeigen die genannten Studien aber auch eine "extrem große Leistungsheterogenität" (SCHIPPER 2002, S. 138). Um Überforderungen (auch der Aufmerksamkeitsspanne) zu vermeiden, wurden deshalb beim ersten Interview nur insgesamt zehn Additionen und Subtraktionen gefragt; Tabelle 6 zeigt die Aufgaben in der Reihenfolge, in der sie von den Kindern bearbeitet wurden.

Tabelle 6: In Interview 1 gefragte Additionen und Subtraktionen in der Reihenfolge ihrer Bearbeitung durch die Kinder

Aufgabe 1/1	2+2		Aufgabe 6/1	8–5
Aufgabe 2/1	3+3		Aufgabe 7/1	4+4
Aufgabe 3/1	3+4		Aufgabe 8/1	8–4
Aufgabe 4/1	1+6		Aufgabe 9/1	10–9
Aufgabe 5/1	2+5		Aufgabe 10/1	5+5

Die Auswahl gerade dieser Aufgaben erfolgte theoriegeleitet, nach folgenden Überlegungen:

Verdoppelungen

Die Aufgaben 2+2, 3+3, 4+4 und 5+5 wurden gewählt, weil hier am ehesten schon bei SchulanfängerInnen Faktenwissen zu erwarten war. Ob einzelne Kinder solche Rechensätze nur als "Gedichtzeilen ohne tiefere Bedeutung" eingelernt hatten (vgl. Kap. 2.10), sollte unter anderem auch der Vergleich mit ihrem Vorgehen bei anderen Aufgaben deutlich machen. In der englischsprachigen Forschung wurden die Strategien bei diesen "tie"-Aufgaben oft nicht erhoben (vgl. CARPENTER & MOSER 1984, S. 181; GEARY u.a. 1991, S. 790) mit dem Argument, dass hier *untypischerweise* Faktenabruf vorherrsche. Dadurch blieb in diesen Studien aber ungeklärt, *wie häufig* und wie *früh* diese Aufgaben tatsächlich automatisiert sind; zudem fehlte damit eine wichtige Grundlage zur Beurteilung der Strategien bei Aufgaben wie 3+4 (s.u.).

Nachbaraufgabe einer Verdoppelung

Die Addition 3+4 sollte Aufschluss darüber geben, ob ein Kind den Zusammenhang zur unmittelbar davor gefragten Aufgabe 3+3 erkennt und als Rechenhilfe nutzt (vgl. Kap. 2.10.5).

Aufgaben zur Überprüfung des Tauschgedankens

Die Aufgaben 1+6 und 2+5 sollten zeigen, ob ein Kind die Kommutativität der Addition nutzt. 1+6 erlaubt zudem die Beurteilung, ob und wie alleszählende Kinder das Problem der "Hand-Grenze" meistern (vgl. Kap. 2.10.1). 2+5 kann zur Verwendung von "finger patterns" (vgl. Kap. 2.10.1) einladen und ermöglicht so die Differenzierung, welche sonst vielleicht noch alleszählenden Kinder bei geeigneten Zahlen auf solche Fingermuster zurückgreifen.

Aufgaben zur Überprüfung des Umkehrgedankens

Aus demselben Grund wurde 8–5 als eine von drei Subtraktionen für die Befragung ausgewählt. Die beiden anderen Subtraktionen 10–9 und 8–4 sollten deutlich machen, ob der Umkehrgedanke (10–9 als Umkehrung von 9+1, 8–4 als Umkehrung von 4+4) genutzt wird.

Zur Reihenfolge der Aufgaben

8–4 wurde bewusst unmittelbar nach 4+4 gefragt, 3+4 bewusst unmittelbar nach 3+4, mit folgender Überlegung: Es war unsicher, wie viele Kinder 3+3 und 4+4 zum Zeitpunkt des ersten Interviews bereits automatisiert haben würden. Die Einsicht in einen *Ableitungszusammenhang* (Kovarianz, Umkehrgedanke) kann aber nur beurteilt werden kann, wenn sicher gestellt ist, dass das Kind über die Ableitungsbasis verfügt. Daher sollte das Kind 3+3 bzw. 4+4 jeweils gerade gelöst haben, bevor ihm die Nachbar- bzw. Umkehraufgabe gestellt wurde. Zudem sollte der Interviewer unmittelbar vor der Aufgabe 3+4 den gesamten Rechensatz 3+3=6 und unmittelbar vor 8–4 den Rechensatz 4+4=8 laut und deutlich vorsprechen, entweder als Wiederholung der gerade vom Kind ermittelten Lösung oder auch als Korrektur bzw. Klarstellung, sollte das Kind 3+3 bzw. 4+4 falsch oder gar nicht gelöst haben. (Davon abgesehen, sollten Rechenfehler nicht kommentiert, sondern lediglich verzeichnet werden.) Durch diesen Hinweis sollte nach Möglichkeit sichergestellt werden, dass "3+3=6" bzw. "4+4=8" noch im Arbeitsgedächtnis verfügbar ist, wenn das Kind zu "3+4" bzw. "8-4" befragt wird.

Im Übrigen sollten die erwartungsgemäß leichtesten Aufgaben zu Beginn (2+2) und am Ende (5+5) einen motivierenden Einstieg und einen befriedigenden Abschluss dieses – was die Gefahr der Überforderung einzelner Kinder betrifft – heikelsten Interviewteiles sicherstellen.

Aufgaben zur Überprüfung von mengen- und zahlbezogenen Kenntnissen

Noch vor den Rechenaufgaben (die als vermutlich schwierigerer Teil des Interviews an dessen Ende gestellt wurden) erfolgte die Überprüfung von mengen- und zahlbezogenen Kenntnissen und Fähigkeiten der Kinder.

Die *Kenntnis der Zahlwortreihe vorwärts* wurde mit der Aufforderung "Zähle so weit, wie du kannst!" ermittelt, die *Kenntnis der Zahlwortreihe rückwärts* durch "Probiere, von zehn rückwärts zu zählen!" sowie (falls das Rückwärtszählen von zehn möglich war) "Probiere, von zwanzig rückwärts zu zählen!"

Die Frage "Zeige mit bitte so schnell du kannst ... Finger!" diente zur Überprüfung der *Finger-Zahl-Bewusstheit* (vgl. Kap. 8.1.4). Dabei sollten die Kinder nacheinander folgende Anzahlen mit den Fingern darstellen: fünf, zehn, neun, vier, acht, sechs, sieben.

Die mit dem *resultativen Zählen* ("Abzählen" und "Auszählen, vgl. SCHMIDT 2009, S. 77) zusammenhängenden Fähigkeiten wurden in einer Aufgabensequenz wie folgt überprüft: Zunächst wurden die Kinder aufgefordert: "Lege mir bitte aus diesem Korb hier genau zehn Würfel hin!" Daran angeschlossen erfolgte eine Überprüfung der *kardinalen Bewusstheit* und *Anzahlkonstanz* (vgl. Kap. 2.10.1): Unmittelbar nach dem Hinlegen der Würfel sollte das Kind sagen, "wie viele Würfel jetzt da liegen". Ein nochmaliges Zählen der Würfel als Reaktion auf diese Frage kann darauf hindeuten, dass das Kind noch kein sicheres kardinales Zahlverständnis hat (vgl. Kap. 2.10.1). Eine denkbare Alternativerklärung ist freilich, dass das Kind lediglich durch die Frage verunsichert ist und/oder meint, die Frage sei eine Aufforderung zu nochmaligem Zählen (obwohl es bereits weiß, wie viele es sind). In weiterer Folge wurden die vom Kind hingelegten Würfel vor den Augen des Kindes (mit dem Hinweis: "Pass' auf, was ich mache!") "durchgemischt", also in ihrer Anordnung verändert. Dann wurde gefragt: "Kannst du sagen, wie viele es *jetzt* sind?" Diese Versuchsanordnung scheint insgesamt zur Beurteilung des Bewusstseins der "Anzahlkonstanz" oder "kardinalen Invarianz" besser geeignet als der klassische PIAGETsche Invarianzversuch (vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 334). Letzterem wird – auch getrennt von der Frage der Relevanz der "Invarianz" sensu PIAGET für die Zahlbegriffsentwicklung, vgl. Kap. 2.12.3 – wohl zu Recht mangelnde Validität vorgeworfen (vgl. dazu etwa MOSER OPITZ 2001, S. 48-51).

Die *Spontanerfassung* der Anzahlen drei und vier bei ungeordneten Punkten (vgl. Kap. 2.10.1) wurde mittels Aufgabenkärtchen (etwa DIN-A7, siehe Anhang 1) überprüft; die Kärtchen wurden dabei etwa eine Sekunde lang aufgedeckt (vgl. Kap. 8.1.2.5).

Gleichfalls mit Aufgabenkärtchen (etwa DIN-A7, siehe Anhang 2) wurde die *Quasi-Simultanerfassung* (vgl. Kap. 2.10.1) bei folgenden strukturierten Punkte-Darstellungen überprüft: Würfel-Fünf; acht Punkte in der Anordnung Würfel-Vier plus Würfel-Vier; neun Punkte in der Anordnung Würfel-Fünf plus Würfel-Vier; sieben Punkte in der Anordnung Würfel-Fünf plus Würfel-Zwei; sechs Punkte in der Anordnung Würfel-Drei plus Würfel-Drei. Das Kind durfte diese Kärtchen ohne Zeitlimit sehen, dabei wurde aber beobachtet, ob die Augen (oder auch ein Finger) zählend von Punkt zu Punkt wandern. Im Zweifelsfall wurde das Kind befragt, *wie* es auf die genannte Anzahl gekommen sei ("Wie bist du da so schnell draufgekommen?"). Diesem Vorgehen wurde gegenüber einer nur kurzen Darbietung ("Blitzblick", vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 346) deshalb der Vorzug gegeben, weil der Pretest zu Beginn des Schuljahres 2005/2006 (n=5) erwarten ließ, dass viele SchulanfängerInnen *nicht* zur Quasi-Simultanerfassung dieser Punktedarstellungen imstande sein würden. Würde in diesem Fall aber durch die Blitzblick-Darbietung lediglich vermerkt, ob Quasi-Simultanerfassung vorliegt oder nicht, ginge wertvolle Information verloren. Denn manche SchulanfängerInnen zeigen zwar keine Blitzblick-Erfassung der sieben als fünf und zwei, zählen aber doch vom spontan erfassten "fünf" ausgehend um zwei weiter, während andere (obwohl auch sie die Würfel-Fünf isoliert spontan erfassen) bei fünf und zwei alleszählend vorgehen.

Vom ursprünglichen Vorhaben, noch weitere zahlbezogene Fähigkeiten (etwa Weiterzählen und Zurückzählen von verschiedenen Zahlen ausgehend) zu erheben, wurde nach dem Pretest Abstand genommen, da sich zeigte, dass bei langsamer arbeitenden SchulanfängerInnen Gefahr bestand, die Aufmerksamkeitsspanne zu überschreiten.

6.1.5.2 Interview 2

Tabelle 7 gibt die bei Interview 2 gefragten Rechenaufgaben in der Reihenfolge ihrer Bearbeitung wieder.

Tabelle 7: In Interview 2 gefragte Additionen und Subtraktionen in der Reihenfolge ihrer Bearbeitung durch die Kinder

Aufgabe 1/2	2+2		Aufgabe 9/2	5+5		Aufgabe 17/2	8–4
Aufgabe 2/2	3+3		Aufgabe 10/2	2+7		Aufgabe 18/2	7–5
Aufgabe 3/2	1+6		Aufgabe 11/2	3+5		Aufgabe 19/2	13+3
Aufgabe 4/2	3+7		Aufgabe 12/2	9–1		Aufgabe 20/2	10+7
Aufgabe 5/2	4+4		Aufgabe 13/2	10–5		Aufgabe 21/2	6+6
Aufgabe 6/2	2+5		Aufgabe 14/2	10–9		Aufgabe 22/2	19–9
Aufgabe 7/2	4+6		Aufgabe 15/2	8–5		Aufgabe 23/2	5+8
Aufgabe 8/2	3+4		Aufgabe 16/2	9–8		Aufgabe 24/2	6+7

Es handelt sich um die 10 bereits beim ersten Interview gefragten Aufgaben und 14 weitere. Für Auswahl und Reihenfolge der Aufgaben waren folgende Überlegungen leitend:

Zur Auswahl der zusätzlichen Additionen im Zahlenraum bis zehn

Mit 3+7 und 4+6 wurden zwei Additionen mit der Summe 10 gefragt. CARPENTER & MOSER (1984, S. 196) geben an, Additionen mit der Summe 10 würden (neben Verdoppelungen) gehäuft als Basis für Ableitungen verwendet; in ihrer eigenen Untersuchung wurden solche Additionen aber gerade nicht überprüft. Die Addition 2+7 (neben 1+6) bot eine weitere gute Möglichkeit, um Kinder zu identifizieren, die "counting on from larger" als Strategie nutzen.

Die Addition 3+5 sollte (neben 2+5) helfen, jene Kinder zu identifizieren, die "finger patterns" benützen. Zudem sollte überprüft werden, ob Additionen mit fünf als einem der beiden Summanden ("Kraft der Fünf", vgl. KRAUTHAUSEN 1995) im Allgemeinen früher als andere automatisiert werden.

Zur Auswahl der zusätzlichen Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn

Die Subtraktion 9–1 diente als vermutlich leichte Aufgabe zum Einstieg in das für viele Kinder "unangenehme" Thema "Minusrechnen"; sie konnte Hinweise liefern, ob die Relation "um 1 weniger" (oder auch nur "um 1 in der Reihe zurück") bereits automatisiert ist. 9–8 und 10–5 sollten (neben 10–9) weitere Hinweise dafür liefern, ob ein Kind den Zusammenhang zwischen Addieren und Subtrahieren bzw. das Teile-Ganzes-Konzept bzw. das Konzept "Unterschied" beim Rechnen benützt (vgl. Kap. 8.2.2.5). Es war nämlich anzunehmen, dass die jeweils inversen Additionen 8+1 und 5+5 von vielen Kindern zu diesem Zeitpunkt bereits automatisiert waren. Die Subtraktion 7–5 konnte (zusätzlich zu 8–5) Hinweise dazu liefern, ob "finger patterns" verwendet bzw. Aufgaben, die mit dem Gedanken an die "Kraft der Fünf" gelöst werden können, früher automatisiert werden als andere.

Zur Reihenfolge der Aufgaben im Zahlenraum bis zehn

Die *Reihenfolge* der Aufgaben im Zahlenraum bis zehn wurde aufgrund der gegenüber dem ersten Interview geänderten Ausgangsbedingungen nach anderen Kriterien bestimmt als zu Schulanfang: Aufgrund eines Pretests mit ErstklässlerInnen zu Mitte des vorangegangenen Schuljahres (n = 5) war zu erwarten gewesen, dass beim zweiten Interview manche Aufgaben (etwa die Verdoppelungen) von einer Mehrheit der Kinder bereits durch Faktenabruf gelöst werden würden. Es schien also gesichert, dass die meisten Kinder über die eine oder andere Ableitungsbasis für andere Aufgaben verfügen würden. Ein Hauptinteresse galt aber gerade der Frage, ob Kinder *von sich aus* beim Rechnen Ableitungsstrategien anwenden. Das Herstellen eines Ableitungszusammenhanges sollte ihnen also *dieses* Mal nach Möglichkeit *gerade nicht* durch die Reihenfolge der Aufgaben *nahegelegt* werden. Die von den Rechenaufgaben *getrennt* gestellten *Zusatzaufgaben* (siehe unten) sollten Aufschluss darüber geben, ob ein Kind Zusammenhänge dann erkennt, wenn dies durch die Abfolge erleichtert und das Kind gezielt dazu befragt wird. Auf diese Weise sollte es ermöglicht werden, zwischen der *grundsätzlichen Einsicht* in einen Ableitungszusammenhang und seinem *tatsächlichen Gebrauch* beim Lösen von Rechenaufgaben zu differenzieren.

Zur Auswahl der Aufgaben im zweistelligen Zahlenbereich

Obwohl auf Grund der verwendeten Schulbücher (s. Kap. 7.1) und der naheliegenden Vermutung, dass diese den Unterricht maßgeblich bestimmen (s. Kap. 7.2), zu erwarten war, dass im Unterricht zu diesem Zeitpunkt noch nicht oder erst seit wenigen Tagen im Zahlenraum bis 20 gerechnet werden würde, wurden im zweiten Interview bewusst auch Aufgaben mit weistelligen Zahlen gestellt, mit folgenden Überlegungen:

Die Aufgaben 13+3 und 19–9 sollten Aufschluss darüber geben, ob bereits dekadische Analogien angewandt werden (auf welcher konzeptuellen Grundlage auch immer; siehe Kap. 2.10.9). Es war anzunehmen, dass 3+3 und auch 9–9 von der Mehrzahl der Kinder bereits automatisiert sein würden.

Die Aufgabe 10+7 sollte Hinweise dafür liefern, ob ein Kind bereits erste Einsichten in das System von Zehnern und Einern gewonnen hat (zumindest auf Basis erkannter "verbaler" bzw. "visueller Muster", vgl. Kap. 2.10.9).

Die Addition 6+6 wurde gewählt, weil sie eine hohe Wahrscheinlichkeit für eine bereits automatisierte Aufgabe mit Zehnerübergang bot.

An 6+7 sollte überprüft werden, ob (sofern 6+6 bereits automatisiert ist) die Strategie "Verdoppeln +1" auch auf Aufgaben mit Zehnerübergang übertragen wird.

Die Addition 5+8 kann vorteilhaft mit der "Kraft der Fünf" gelöst werden. Bei weiterzählenden Kindern kann überprüft werden, ob sie für ein vorteilhafteres "counting on from larger" die Summanden vertauschen und so auch Zehnerübergänge meistern.

Zusatzaufgaben zur Einsicht in operative Zusammenhänge

Nach der letzten Rechenaufgabe wurden die Kinder mit Zusatzaufgaben konfrontiert, die getrennt von ihrer Rechenperformanz zusätzlich Rückschlüsse auf ihr konzeptuelles Wissen, insbesondere ihre Einsicht in operative Zusammenhänge ermöglichen sollten. Sie bekamen dabei Kärtchen (etwa DIN-A6) vorgelegt, die jeweils Reihen von operativ zusammenhängenden Aufgaben zeigten (s. Anhang 3):

Zusatzaufgabe 1 zeigte, unter einander angeordnet, die Aufgaben 3+3=__, 3+4 =__, 3+5=__; in der vierten und letzten Zeile waren die Ziffern durch Platzhalter ersetzt (__+__=__). Das Kind sollte sich die drei vorgegebenen Rechnungen "genau anschauen" und überlegen, welche Aufgabe "als nächstes kommen" müsse (dabei wurde auf das leere Additions-Schema gedeutet). Wenn nötig, wurde erläutert, dass "die Aufgaben etwas miteinander zu tun haben"; wenn das Kind erkenne, was das sei, könne es bestimmt die letzte Aufgabe auch noch sagen. In weiterer Folge sollte das Kind begründen, warum es gerade diese Aufgabe sein müsse und wie es das herausgefunden habe. Falls das Kind dies nicht ohnedies schon spontan getan hatte, sollte es nun die Aufgaben ausrechnen. Je nach Lösungsstrategie konnte schon dabei deutlich werden, ob ein Kind den im "schönen Päckchen" thematisierten operativen Zusammenhang als Lösungshilfe verwendet oder aber jede Aufgabe für sich löst (etwa jeweils aufs Neue mit Fingerhilfe zählt). Zuletzt wurde in Anlehnung an PUTNAM u.a. (1990, vgl. Kap. 2.9.7) wie folgt gefragt: "Hier steht 3+3, als nächstes 3+4. Wenn ein Kind 3+4 nicht weiß, und es hat gerade 3+3=6 ausgerechnet: Hilft ihm das für 3+4?" Je nach Gesprächsverlauf wurde zur Absicherung nachgefragt: "Oder muss es 3+4 ganz neu rechnen?"

Zusatzaufgabe 2 wiederholte dieses Vorgehen bei der deutlich anspruchsvolleren (nach dem Prinzip der gegensinnigen Veränderung gebildeten) Serie 4+5=__, 3+6=__, 2+7=__, __+__=__.

Bei Zusatzaufgabe 3 sollte die Serie 10–5=__, 10–6=__, 10–7=__, __–__=__in derselben Weise bearbeitet werden.

Bei Zusatzaufgabe 4 sahen die Kinder zunächst nur das Aufgabenpaar 3+5=8 und 8–5=__ (untereinander angeordnet). Das Kind sollte 8–5 lösen und wurde dabei beobachtet. Dann wurde wie oben beschrieben nachgefragt, ob die eine Aufgabe (3+5=8) dabei helfe, die andere (8–5=__) zu lösen. Schließlich bekam das Kind die Aufgabe 3+6=9 zu sehen und, darunter angeordnet, das leere Schema __–__=__. Unter Verweis auf das aus 3+5=8 und 8–5=__ gebildete Aufgabenpaar wurde das Kind gefragt, ob es wisse, welche Minusaufgabe zu 3+6=9 gehöre; genau so, wie 8–5 zu 3+5=8 gehört, bzw. (sofern das Kind zuvor in 3+5 eine "Hilfe" für 8–5 gesehen hatte) "bei welcher Minusaufgabe 3+6=9 eine Hilfe sei", so wie "3+5=8 ein Hilfe für 8–5=3" gewesen sei.

Frage zur Einstellung zum Rechnen

Zum Abschluss des Gespräches sollte das Kind noch angeben, wie gerne es "Rechnen in der Schule" habe. Dafür wurde ihm ein Kärtchen mit drei Symbolgesichtern vorgelegt, einem "lachenden" (konkaver Mund), einem neutralen (Mund als waagrechter Strich), einem "griesgrämigen" (konvexer Mund) (s. Anhang 4). Mit Tippen auf die jeweils passenden Gesichter wurden drei Antwortmöglichkeiten vorgegeben: "(Rechnen habe ich) sehr gerne", "mittelgerne" und "nicht gerne".

6.1.5.3 Interview 3

Tabelle 8 zeigt alle beim abschließenden dritten Interview gefragten Aufgaben in der Reihenfolge, in der sie von den Kindern bearbeitet wurden. Wie ersichtlich, wurden die bereits in Interview 2 gestellten 18 Aufgaben im Zahlraum bis 10 auch in Interview 3 verwendet. Für die *Reihenfolge* der Aufgabenstellung waren dieselben Überlegungen leitend wie beim zweiten Interview. Die *Auswahl* der 21 zusätzlichen Aufgaben wird im Folgenden begründet.

Tabelle 8: In Interview 3 gefragte Additionen und Subtraktionen in der Reihenfolge ihrer Bearbeitung durch die Kinder

Aufgabe 1/3	2+2		Aufgabe 14/3	9–1		Aufgabe 27/3	10+7
Aufgabe 2/3	3+3		Aufgabe 15/3	10–5		Aufgabe 28/3	6+6
Aufgabe 3/3	1+6		Aufgabe 16/3	10–9		Aufgabe 29/3	5+8
Aufgabe 4/3	3+7		Aufgabe 17/3	8–0		Aufgabe 30/3	3+9
Aufgabe 5/3	2+5		Aufgabe 18/3	8–5		Aufgabe 31/3	8+8
Aufgabe 6/3	4+4		Aufgabe 19/3	9–8		Aufgabe 32/3	6+7
Aufgabe 7/3	3+6		Aufgabe 20/3	7–5		Aufgabe 33/3	11+6
Aufgabe 8/3	5+5		Aufgabe 21/3	10–7		Aufgabe 34/3	15+5
Aufgabe 9/3	3+4		Aufgabe 22/3	8–4		Aufgabe 35/3	19–9
Aufgabe 10/3	2+7		Aufgabe 23/3	9–6		Aufgabe 36/3	20–7
Aufgabe 11/3	4+6		Aufgabe 24/3	8–8		Aufgabe 37/3	16–10
Aufgabe 12/3	0+9		Aufgabe 25/3	7–4		Aufgabe 38/3	12–6
Aufgabe 13/3	3+5		Aufgabe 26/3	13+3		Aufgabe 39/3	14–9

Zur Auswahl der zusätzlichen Additionen im Zahlenraum bis zehn

Die Addition 3+6 wurde als vermutlich "schwer ableitbare" Addition gewählt, die gegebenenfalls "counting on from first" und "counting on from larger" unterscheiden lässt.

Die Aufgaben 0+9, 8–0 und 8–8 sollten eine Einblick erlauben in mögliche Schwierigkeiten mit der Null. Für Kinder höherer Schulstufen sind solche Schwierigkeiten gut dokumentiert, vor allem im Zusammenhang mit dem schriftlichen Rechnen (vgl. GERSTER 1989; KORNMANN, FRANK, HOLLAND-RUMMER & WAGNER 1999; WAGNER 2003). Obwohl außerhalb der engeren Forschungsinteressen dieser Studie gelegen, sollte überprüft werden, ob solche Aufgaben auch schon am Ende des ersten Schuljahres gehäuft Probleme bereiten, zumal dies wenig zusätzliche Zeit in Anspruch zu nehmen versprach..

Zur Auswahl der zusätzlichen Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn

Die Subtraktionen 10–7, 9–6 und 7–4 wurden als vermutlich "schwere" Aufgaben aufgenommen. Denn bei den jeweils inversen Additionen war nicht mit verbreiteter früher Automatisierung zu rechnen (7+3=10 als "Zehnersumme" vielleicht ausgenommen). Alle drei Subtraktionen wären für zählende Rechner vorteilhaft durch "zählendes Ergänzen" zu lösen, sie konnten also Hinweise zum Verbreitungsgrad dieser Strategie liefern.

Zur Auswahl der zusätzlichen Aufgaben im zweistelligen Zahlenbereich

Sofern sich die Lehrkräfte an den verwendeten Schulbüchern orientieren würden, würden Aufgaben mit Zehnerübergang zum Zeitpunkt des dritten Interviews in allen Klassen bereits behandelt worden sein. Zusätzlich zu den sechs schon beim zweiten Interview im Zahlenraum bis 20 überprüften Aufgaben wurden beim dritten Interview noch die folgenden gestellt:

Die Aufgaben 11+6, 15+5 sowie 20–7 und 16–10 sollten weitere Hinweise dazu liefern, wie weit ein Kind zumindest auf prozeduraler Ebene Einsichten in das Zehner-Einer-System gewonnen hat (Nutzung dekadischer Analogien).

Die Aufgabe 8+8 sollte (zusammen mit 6+6 und den im Laufe der Zusatzaufgaben, siehe unten, verwendeten Aufgaben 7+7 und 9+9) die Überprüfung der Verdoppelungen auch im Zahlenraum bis 20 vervollständigen.

Die Aufgabe 12–6 sollte deutlich machen, ob der Umkehrgedanke auch für Aufgaben mit Zehnerunterschreitung genützt wird. 12–6 bot sich dafür in besonderer Weise an, weil damit gerechnet werden konnte, dass 6+6 zu diesem Zeitpunkt von relativ vielen Kindern bereits automatisiert sein würde.

Die Aufgabe 14–9 erlaubt eine Differenzierung von Strategievorlieben von Kindern, die Ableitungsstrategien ergreifen: Hier bietet sich sowohl die Ableitung aus 14–10 wie auch das Teilschrittverfahren an.

Zusatzaufgaben zur Einsicht in operative Zusammenhänge

Wie bei Interview 2 sollten auch beim dritten Interview Zusatzaufgaben, die nach den reinen Rechenaufgaben am Ende des Gesprächs gestellt wurden, noch weitere Hinweise auf das konzeptuelle Wissen liefern:

In Zusatzaufgabe 1 wurde den Kindern zunächst ein Aufgabenkärtchen mit der Addition 7+7 vorgelegt. Die Kinder wurden gefragt, ob sie 7+7 schon auswendig wüssten; wenn nicht, wurde ihnen die Lösung gesagt: "Du hast eh schon so viel gerechnet, ich sag's dir einfach: Sieben und sieben ist vierzehn!" Dann wurde ein Aufgabenkärtchen mit der Addition 7+8 *neben* das Kärtchen mit 7+7 gelegt und, wie bei den Zusatzaufgaben in Interview 2, weiter gefragt, ob 7+7 "eine Hilfe" sei, um die Aufgabe 7+8 zu lösen, inwiefern es eine Hilfe sei, usw. In Zusatzaufgabe 2 wurde analog mit den beiden Aufgaben 9+9 und 18–9 verfahren.

Fragen zur Einstellung zum Rechnen, zu Rechen-Hausübungen und zum Rechnen-Üben

Auch beim dritten Interview sollten die Kinder abschließend an Symbolgesichtern deutlich machen, ob sie Rechnen in der Schule "sehr gerne", "mittelgerne" oder "nicht gerne" hätten. Weiters wurden sie dazu befragt, ob sie in diesem Schuljahr "viel Hausübung" im Rechnen gehabt hätten, ob "Rechen-Hausübungen okay" für sie seien oder ob sie daran etwas störe, ob sie abgesehen von den Hausübungen "zuhause Rechnen üben" und wenn ja, wie, mit wem, wie oft, und ob sie dies gerne machten oder ob sie dabei etwa störe.

6.1.6 Zur Durchführung der Interviews

Die Interviews fanden jeweils vormittags, in der Unterrichtszeit, in diversen, sonst gerade nicht genutzten Zusatzräumen der verschiedenen Schulen (Musikzimmer, Computerraum etc.) statt. Die Kinder wurden dafür nacheinander einzeln aus ihren Klassen geholt.

Die Rechenaufgaben wurden jeweils als Additions- bzw. Subtraktionsterm in symbolischer Form vorgelegt. Dafür gab es Aufgabenkärtchen im Format DIN A-7 (Ziffern in 48-Punkt-Schrift; Beispielkärtchen s. Anhang 5). Beim ersten Interview wurde überprüft, ob die Kinder bereits zu Schulbeginn Ziffern und Operationszeichen lesen können, welche sprachlichen Ausdrücke sie für das Plus- und Minuszeichen gegebenenfalls verwenden, und ob sie diese Ausdrücke selbstständig als Rechenoperation deuten und bearbeiten können. Daher wurde ihnen das erste Additionskärtchen (2+2) und später das erste Subtraktionskärtchen (8–5) mit folgenden Worten vorgelegt: "Schau einmal dieses Kärtchen an: So etwas habt ihr, glaube ich, in der Schule noch gar nicht gelernt. Vielleicht hast du es trotzdem schon einmal gesehen?" Je nach Reaktion eines Kindes wurde gegebenenfalls weitergefragt: "Weißt du, was das ist?" "Kannst du vorlesen, was da steht?" "Weißt du, was man da machen soll?" "Kannst du sagen, was dabei herauskommt?" "Kannst du mir das vorzeigen, mit deinen Fingern oder mit diesen Würfeln?" (Für diesen Zweck waren ca. 30 farblose Holzwürfel mit einer Kantenlänge von etwa 2 cm in einem Behälter am Tischrand aufgestellt.) Auch bei jenen Kindern, die beim Kärtchen "2+2" sofort "Vier!" oder "Zwei plus zwei ist vier!" oder "Zwei und zwei ist vier!" sagten, wurde nachgefragt: "Kannst du mir erklären, was das bedeutet? Kannst du mir mit deinen Fingern oder Würfeln vorzeigen, warum das vier ist?"

Sofern ein Kind mit "2+2" bzw. später "8–5" nichts anfangen konnte, wurde zunächst nachgefragt, ob es die einzelnen Zeichen kenne und lesen könne; unbekannte oder für das Kind unsichere Ziffern wurden vorgelesen. Wenn aber das Kind mit dem *Operationszeichen* nichts anfangen konnte, wurde dieses zunächst wie folgt erläutert: "Das heißt: Du hast zuerst zwei Würfel. Dann sollst du noch zwei Würfel dazugeben." bzw. "Das heißt: Du hast zuerst acht Würfel. Davon sollst du fünf Würfel weggeben."

Wenn einem Kind nach dieser Erläuterung immer noch unklar war, was es zu tun habe, wurde die Aufgabe in Anlehnung an die "Schachtelaufgaben" von SELTER und SPIEGEL (SELTER & SPIEGEL 1997, S. 20f, nach den "box tasks" von HUGHES 1986, S. 25-36) wie folgt präsentiert: Die *Ausgangsanzahl* der Addition oder Subtraktion wurde für das Kind mit den Holzwürfeln zunächst offen modelliert. Die Würfel wurden dann mit der Hand zugedeckt. Dann wurden dem Term entsprechend zwei weitere Würfel unter die Hand geschoben bzw. fünf Würfel weggenommen und offen hingelegt. Die Handlung war also jeweils wahrnehmbar, das Kind konnte aber die resultierende Anzahl nicht sehen. Zur Ermittlung konnte es aber natürlich auf seine Finger oder andere Würfel zurückgreifen.

Sofern ein Kind trotz dieser Einkleidung nicht wusste, was es tun solle (was zu Schulbeginn selten, aber doch vorkam – bei Minus häufiger als bei Plus), wurde es ihm an dieser Aufgabe offen mit Material gezeigt und erläutert. Die nächste Aufgabe desselben Typs (Addition bzw. Subtraktion) wurde dann erneut als Würfelaufgabe formuliert und das Kind ermutigt, die Aufgabe in der soeben gezeigten Weise mit Material zu lösen. Sofern dem Kind nun wieder nicht klar war, was es tun solle, wurden, um unnötige Frustration zu vermeiden, keine weiteren Aufgaben dieses Typs gestellt und diese und die restlichen Aufgaben dieses Typs mit "'Kann ich nicht' oder dergleichen" (vgl. Kap. 6.1.7) gewertet.

Nach der ersten gelösten Aufgabe (2+2) wurde dem Kind erläutert: "Ich hätte gerne, dass du jetzt noch andere Aufgaben für mich rechnest. Ich möchte nämlich ganz genau herausfinden, wie Kinder so etwas machen. Deshalb werde ich dich immer fragen, wie du draufgekommen bist und was du dir dabei gedacht hast. Du kannst dabei deine Finger oder diese Würfel hier verwenden. Zeige mir dann bitte immer ganz genau, was du mit den Fingern oder mit den Würfeln machst!"

Die weiteren Aufgabenkärtchen wurden dann jeweils nacheinander aufgedeckt, *gleichzeitig* wurde die Aufgabe vorgelesen. Dabei wurde stets jene sprachliche Form ("plus" oder "und" bzw. "minus", "weg" oder "weniger") verwendet, die zuvor vom Kind selbst beim ersten Additions- bzw. Subtraktionskärtchen gewählt worden war. Sofern das Kind bei einer der weiteren Aufgaben nicht von sich aus seine Strategie erläuterte bzw. vorzeigte, wurde es jeweils aufs Neue dazu aufgefordert und ermutigt. Sofern das Kind bei einer der weiteren Aufgaben nicht wusste, was zu tun sei, wurde ebenso vorgegangen wie bei der jeweils ersten Addition bzw. Subtraktion (sprachliche Einkleidung als Würfelaufgabe, eventuell auch Präsentation als "Schachtelaufgabe").

Die Verwendung der Würfel als *Zählmaterial* war für die Kinder bei allen drei Interviews möglich, die Würfel blieben jeweils in einem Behälter während des gesamten Interviews am Tisch sichtbar. Die Kinder wurden aber nicht gedrängt, sie zu verwenden. Wenn ein Kind Schwierigkeiten bekundete, erhielt es den Hinweis: "Vielleicht kannst du es mit den Würfeln machen? Oder vielleicht helfen dir die Finger dabei?"

Das Vorgehen bei den Zusatzaufgaben wurde bereits bei der Erläuterung ihres Inhalts (Kap. 6.1.4) beschrieben.

Alle Gespräche wurden mittels einer auf Stativ fix montierten Videokamera zur Gänze in Bild und Ton dokumentiert.

6.1.7 Zur Auswertung der Interviews

Das bei der Bearbeitung der gefragten additiven Grundaufgaben gezeigte Lösungsverhalten wurde für jede einzelne Aufgabe getrennt festgehalten nach folgenden drei Gesichtspunkten: Lösungsrichtigkeit, Lösungsdauer, Lösungsstrategie.

Die *Lösungsrichtigkeit* wurde in 3 Kategoreien erfasst als "richtig", "falsch" oder "nicht bearbeitet".

Die *Lösungsdauer* wurde gemessen als die Zeitsspanne vom Zeitpunkt der Aufgabenstellung (wie beschrieben, wurde die Aufgabe möglichst zeitgleich verbal und visuell durch das Aufdecken des jeweiligen Aufgabenkärtchens präsentiert) bis zur *definitiven* Antwort durch das Kind. Zuweilen gaben Kinder ihre Antwort zögerlich und korrigierten sich wenig später selbst, ohne eine verbale oder nonverbale Reaktion des Interviewers/der Interviewerin erhalten zu haben. In diesem Fall wurde die Dauer bis zur Äußerung der letztlich vom Kind selbst für richtig gehaltenen Antwort (und auch nur die Richtigkeit *dieser* Antwort bzw. auch nur die zu *dieser* Antwort führende Strategie) festgehalten. Die Zeitmessung erfolgte anhand der im Video mitlaufenden Uhr in Sekunden. Eine exaktere Messung (Zehntel- oder gar Hundertstelsekunden wie in chronometrischen Studien, vgl. Kap. 2.2) schien verzichtbar, da die Lösungsdauer für sich genommen, wie in Kap. 6.1.4 ausgeführt, ohnedies von nur begrenzter Aussagekraft ist und lediglich als Außenkriterium zur Validierung der durch Beobachtung und Befragung ermittelten Lösungsstrategie herangezogen wurde.

Die *Lösungsstrategien* wurden unter eine der folgenden acht Kategorien subsumiert:

– Faktenabruf
– Ableitung
– Nicht-zählender Fingergebrauch
– Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen bzw. zählendes Ergänzen
– Finger-Teilzählen
– Alleszählen bzw. "Take away"
– Raten, Fehlspeicherung oder dergleichen
– "Kann ich nicht!" oder dergleichen

Fälle, die keine vertretbar verlässliche Zuordnung erlaubten, wurden unter "Keine klare Zuordnung möglich" kodiert.

6.1.7.1 Gewinnung der Kategorien für die Erfassung der Lösungsstrategien

Die genannten Strategie-Kategorien wurden im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse theoriegeleitet am Material selbst entwickelt ("induktive Kategorienbildung", vgl. MAYRING 2002, S. 114-121). Das in den videografierten Interviews dokumentierte Lösungsverhalten wurde dafür in einem ersten Durchlauf nach den aus der Theorie abgeleiteten Selektionskriterien "Faktenabruf ja/nein", "Ableitung ja/nein", "welche Ableitungsstrategie, wie erläutert?", "Einsatz von Material (Finger/Würfel) ja/nein", "Details der Materialverwendung", "Zählstrategie ja/nein", "Details der Zählstrategie" unter Berücksichtigung individueller Besonderheiten qualitativ erfasst. Dabei wurden zunächst 84 Varianten der Lösungsfindung unterschieden. Diese wurden in einem zweiten Durchlauf unter die genannten acht Kategorien subsumiert.

Dass es sich dabei im Wesentlichen um jene Kategorien handelt, die auch in der Forschungsliteratur immer wieder genannt werden (vgl. Kap. 2), liegt in der Natur der Sache. Lediglich die Unterscheidung von fingergestützten Strategien, wie sie hier mit "nicht-zählender Fingergebrauch" einerseits, "Finger-Teilzählen" andererseits vorgenommen wurde, ist in vorliegenden Studien unüblich (vgl. aber BAROODY 1987, SIEGLER & ROBINSON 1982). Sie erwies sich aber als notwendig im Sinne des spezifischen Forschungsinteresses (siehe Kapitel 2.13.3 und Kapitel 5). Dass die Strategie des "Finger-Teilzählens" (vgl. Kap. 6.1.7.2), eine bei niederösterreichischen Kindern besonders häufig beobachtete Variante des zählenden Rechnens, in US-amerikanischen Studien kaum eine Entsprechung findet, mag daran liegen, dass diese Strategie bei US-amerikanischen Kindern vielleicht tatsächlich nicht oder nur selten Verwendung findet. Dass die spezielle Art und Weise des Fingergebrauchs beim Rechnen auch kulturell bedingt sein kann, zeigt etwa auch die Studie von FUSON & KWON 1992.

6.1.7.2 Kodierregeln für die Zuweisung der acht Strategie-Kategorien

"Faktenabruf" wurde immer dann kodiert, wenn ein Kind die *richtige* Antwort innerhalb von höchstens zwei Sekunden gab *und* dies mit "Habe ich einfach gewusst!" oder ähnlichen Äußerungen kommentierte *und* keinerlei äußere Anzeichen einer (vielleicht auch nur verbalen) Zählhandlung erkennbar waren.

"Ableitung" wurde kodiert, wenn ein Kind selbst (in der Regel nachträglich) eine Ableitungsstrategie zu Protokoll gab *und* keinerlei äußere Anzeichen einer Zählhandlung erkennbar waren. In der Regel erfolgte die Lösung in solchen Fällen mit einer gewissen zeitlichen Verzögerung, die als Phase des Nachdenkens über den Ableitungszusammenhang gedeutet werden konnte, und häufig verbunden mit einem Gesichtsausdruck und in einer Tonlage, die eine gewisse Befriedigung ("Ich hab's!") über die durch Nachdenken gefundene Lösung auszudrücken schien. Anders als bei "Faktenabruf" erfolgte die Kodierung von "Ableitung" (wie auch alle anderen Kodierungen) unabhängig von der *Lösungsrichtigkeit*. Voraussetzung einer Kodierung als "Ableitung" war aber, dass das Kind einen *korrekten Ableitungszusammenhang* zu Protokoll gab. So wurde zum Beispiel "7–5=3, weil 3+5=7" (Monika zu t2) als "Ableitung" (mit falscher Lösung) gewertet, hingegen "3+6=7, weil 2+5=6" (Philipp zu t3) als "Raten, Fehlspeicherung oder dergleichen" (siehe weiter unten). Für die qualitative Auswertung wur-

de jeweils auch vermerkt, *welche* Ableitungsstrategie mit welcher *näheren Erläuterung und Begründung* zur Anwendung kam.

"Nicht-zählender Fingergebrauch" wurde kodiert, wenn ein Kind zunächst die Ausgangszahl einer Rechenoperation (erster Summand bzw. Minuend) nicht-zählend (also durch *eine* simultane Ausstreckbewegung) mit den Fingern darstellte, die Operation als Dazugeben oder Wegnehmen nicht-zählend mit den Fingern (in der Regel also mit "Handpaketen" von Fingern) durchführte und auch das Ergebnis nicht-zählend am resultierenden "Fingermuster" ermittelte (vgl. Kap. 2.10.1).

"Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen" wurde kodiert, wenn diese Strategie (vgl. Kap. 2.1) entweder bereits in der Beobachtung klar hervortrat (Kind zählt hörbar von der Ausgangszahl ausgehend weiter oder zurück, zusätzlich werden Finger für das "keeping track" verwendet und/oder der Kopf im Takt mitbewegt) oder das Kind sein Vorgehen nachträglich im Sinne des Weiterzählens bzw. Rückwärtszählens erläuterte (siehe dazu auch weiter unten). Für die *qualitative* Auswertung wurde auch vermerkt, ob vom erstgenannten ("counting on from first") oder vom größeren Summanden ("counting on from larger") aus weitergezählt wurde und ob dabei die Finger oder Würfel für das "keeping track" verwendet oder aber "im Kopf" (rein verbal) gezählt wurde. Die Fälle, in denen Kinder Subtraktionen durch "Weiterzählen" vom Subtrahenden zum Minuenden lösten, wurden für die quantitative Auswertung gleichfalls als "Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen" kodiert, für die qualitative Auswertung aber davon getrennt als "zählendes Ergänzen" erfasst.

"Finger-Teilzählen" wurde kodiert, wenn das Kind die Ausgangszahl einer Rechenoperation zwar nicht-zählend mit den Fingern darstellte, die Operation selbst aber zählend durchführte, indem es die Finger einzeln ausstreckte bzw. umklappte und dabei von eins beginnend mitzählte, bis die dem zweiten Summanden bzw. Subtrahenden entsprechende Zahl erreicht war. Das Ergebnis wird bei dieser Strategie wieder nicht-zählend am resultierenden "Fingermuster" abgelesen (vgl. Kap. 2.10.1).

Die Kodierung von *"Alleszählen"* (bzw. *"Take away"* bei Minus; vgl. Kap. 2.1) erfolgte analog zum "Weiterzählen", wobei ein "Alleszählen" ohne Materialverwendung (welches also nicht schon beim Lösen der Aufgabe selbst klar beobachtet werden konnte) äußerst selten war.

"Raten, Fehlspeicherung oder dergleichen" wurde kodiert, wenn das Kind ohne erkennbare Zählhandlung und ohne dass in der Befragung irgendeine andere Strategie ermittelt werden konnte eine falsche Antwort gab, wobei dies in der Regel sehr rasch (innerhalb von zwei Sekunden) erfolgte. In vielen Fällen gab das Kind in der Befragung auch tatsächlich zu Proto-

koll, es habe "einfach irgendeine Zahl" genannt oder auch "Das habe ich geraten!". Das "scoring in context" (vgl. BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 110) ergab dann häufig, dass dieses "Raten" nicht bloß auf eine Rechnung beschränkt blieb sondern vom selben Kind im Verlauf des Interviews mehrfach angewandt wurde. In anderen Fällen schien das Kind wirklich davon überzeugt zu sein, dass die Antwort richtig sei; hier dürfte also tatsächlich eine *Fehlspeicherung* vorliegen. Da dies im Einzelfall oft nicht sicher unterschieden werden konnte, der Unterschied aber für die hier wesentlichen Fragen auch gar nicht von Bedeutung erscheint, wurde für die quantitative Auswertung auf eine getrennte Kodierung verzichtet.

"'Kann ich nicht!' oder dergleichen" wurde kodiert, wenn ein Kind die Bearbeitung einer Aufgabe von sich aus verweigerte oder mittendrin abbrach, ohne eine Lösung zu nennen, oft mit einem Kommentar wie "Das kann ich nicht!" oder "Das ist mir zu schwer!" oder dergleichen. In solchen Fällen wurde das Kind in der Regel zwar ermutigt, die Aufgabe (etwa mit Material) noch einmal zu probieren. Wenn dies aber aufgrund der bis dahin gezeigten Performanz als aussichtslos erschien und/oder wenn zu befürchten war, dass durch das Beharren auf einem weiteren Versuch die Motivation des Kindes verloren gehen könnte, wurde darauf auch verzichtet und die Aufgabe entsprechend kodiert. In diesen Fällen wurden Lösungsrichtigkeit und Lösungsdauer als "nicht bearbeitet" gewertet.

6.1.7.3 Zur Auswertung der Videografien

Die äußerst zeitaufwändige *Auswertung* der Videografien, also vor allem auch die *Zuweisung* der einzelnen Aufgabenbearbeitungen zu den oben erläuterten Strategie-Kategorien, erfolgte durchgängig durch den Verfasser. Bei jeweils 15 durch Zufallsauswahl bestimmten Interviews eines jeden Erhebungsdurchgangs (also bei etwa jedem zehnten Interview, das sind in Summe 1095 Strategiezuweisungen) erfolgte eine unabhängige Zweitauswertung durch eine Kollegin mit langjähriger Erfahrung im Führen qualitativer Interviews. Der nachträgliche Vergleich der Zuweisungen erbrachte eine Übereinstimmung in 1029 Fällen (94 Prozent) − ein ähnlich hoher Wert wie etwa bei CANOBI (2004, S. 86), der darauf hinweist, dass die Zuweisungskriterien hinreichend eindeutig und präzise sind, sodass auf eine durchgängige Doppel- oder gar Mehrfachauswertung verzichtet werden konnte.

Die wenigen Nichtübereinstimmungen (66 Fälle) betrafen einerseits Fälle, wo sehr schnelle nicht-zählende Lösungen (innerhalb einer Sekunde) von einem Auswerter als Faktenabruf, vom anderen als Ableitung gewertet wurden (28 Fälle). Das Kind hatte hier jeweils eine Ableitung zu Protokoll gegeben, doch dies konnte auch als nachträgliche "Rechtfertigung" eines tatsächlich bereits automatisierten Abrufs aus dem Langzeitgedächtnis gedeutet werden. Letztlich wurden diese Fälle zumeist als Ableitung gewertet. Der vorliegenden Arbeit geht es ja gerade auch darum, mögliche Zusammenhänge zwischen Strategie*verständnis* und Rechenfertigkeiten näher zu untersuchen. Auch wenn ein Kind eine Ableitung im Einzelfall tatsächlich nur im Sinne einer nachträglichen Rechtfertigung vorgebracht haben sollte, so zeigt sich darin ja doch auch, dass ihm diese Strategie *konzeptuell grundsätzlich zur Verfügung steht*. Dies sollte mit der Kodierung als Ableitung im Zweifelsfall auch festgehalten werden.

Schwieriger war die Entscheidung in einigen jener 25 Fälle, die ein Auswerter als Faktenabruf, der andere als Weiterzählen (vom größeren Summanden) beurteilte. In diesen Fällen hatten die Kinder selbst ihre Lösung als inneres Weiterzählen erläutert, doch waren im Video keine äußeren Anzeichen einer Zählhandlung erkennbar, und die Lösungsdauer war sowohl mit verbalem Zählen als auch mit (etwas verzögertem) Faktenabruf vereinbar. Auch hier war denkbar, dass die Kinder die Lösung tatsächlich aus dem Gedächtnis abgerufen hatten und ihr verbales Protokoll nur als Versuch zu werten ist, dem Interviewer nachträglich die Richtigkeit des Ergebnisses zu "beweisen". In einigen dieser Fälle wurde letztlich auf "Keine eindeutige Zuordnung möglich" kodiert, bei anderen (mit einer gewissen Unsicherheit) zumeist im Sinne des verbalen Protokolls des Kindes entschieden. Ein Anhaltspunkt dafür war das Lösungsverhalten bei anderen Aufgaben ("scoring in context", s.o.), dies aber im vollen Bewusstsein, dass auch der Vergleich mit dem Lösungsverhalten bei anderen Aufgaben desselben Typs keine valide Zuordnung eines unsicheren Einzelfalles garantiert, da nun einmal Kinder auch innerhalb eines Interviews auch bei Aufgaben desselben Typus immer wieder unterschiedliche Strategien anwenden (vgl. CARPENTER & MOSER 1984, s. Kap. 2.4).

6.1.8 Schwierigkeiten und Fehler bei Durchführung der Längsschnittstudie

Trotz penibler Vorbereitung und langjähriger Erfahrung beider Interviewer in der Durchführung qualitativer Interviews passierten im Laufe der insgesamt mehr als 400 Gespräche mit mehr als 10.000 Einzelfragen zahlreiche Verstöße gegen die Regeln der Gesprächsführung – Verstöße, die durch die Videografien nachträglich schmerzlich deutlich wurden. Immer wieder waren bei einzelnen Aufgaben die Nachfragen nicht frei von Suggestionen, immer wieder wurden bei einzelnen Aufgaben Nachfragen zu früh abgebrochen und dadurch für die Auswertung wertvolle Informationen nicht eingeholt.

Nun liegt es im Wesen qualitativer Interviews, dass beständig spontane Entscheidungen gefordert sind, auf Grundlage von spontanen Hypothesen darüber, was im Kopf des Interviewten vor sich geht. Dass sich manche Frage nachträglich als zumindest ungeschickt herausstellt, ist wohl unvermeidlich. Zumindest einige dieser Fehler oder Ungeschicklichkeiten wären aber vermutlich nicht passiert, wenn eine bescheidenere Stichprobengröße gewählt worden wäre. Durch die Vorgabe, an einem Vormittag acht Interviews durchbringen zu müssen, entstand mitunter (in Abhängigkeit davon, wie flott oder langsam die Kinder die Aufgaben bewältigten) ein zeitlicher Druck, der die erwähnten Unzulänglichkeiten provozierte.

Die dadurch bedingten Unschärfen in der Erfassung der kindlichen Lösungsstrategien betrafen freilich in der Regel nur Details in der Durchführung einer bestimmten Strategie, also etwa die genaue *Begründung* einer Ableitungsstrategie oder die Frage, *wie genau* die Finger als Zählhilfe eingesetzt wurden und dergleichen. Die Zuordnung einer Aufgabenbearbeitung zu einer der übergeordneten Strategiekategorien war davon also in der Regel nicht betroffen, wie auch die hohe Übereinstimmung der Zuordnungen bei jenen Aufgaben zeigt, die von beiden Interviewern unabhängig voneinander kategorisiert wurden. Die Verwertbarkeit der erhobenen Daten für die quantitativen Fragestellungen (s. Kap. 5 und 9) scheint also durch die genannten Unzulänglichkeiten nicht gefährdet. Wo ihretwegen im Rahmen der qualitativen Auswertung Fragen offen bleiben müssen, wird jeweils darauf hingewiesen (s. Kap. 8).

6.2 Analyse der Schulbücher und zusätzlichen Übungsaufgaben

Schon im Zuge der Erstgespräche mit den teilnehmenden KlassenlehrerInnen (s. Kap. 6.1.1) wurde auch jeweils erhoben, welche Schulbücher in den Klassen der befragten Kinder Verwendung finden würden. Diese Erhebung ergab die folgende Verteilung (Tabelle 9):

Tabelle 9: Im Unterricht der befragten Kinder verwendete Mathematik-Schulbücher

Titel	Autor(en), Teilbände, Erscheinungsjahre	Klassen	Kinder
Zahlenreise 1	BRUNNER u.a. (2004a-c, 2005)	12	69
Zahlen-Zug 1	BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. (2005a-c, 2001)	5	36
Mein erstes Mathematikbuch	EDER, JAROLIM & SCHÖN (2001a-c)	2	13
Matheblitz 1	AG MATHEMATIK (2003a-e)	2	13
Funkelsteine 1 Mathematik	FRIEDL (2004a, 2004b, 2005)	1	8

Das deutliche Übergewicht des Schulbuches „Zahlenreise 1“ in der Stichprobe entspricht dem Marktanteil dieses Unterrichtswerkes in Österreich zur Zeit der Untersuchung (laut Verlagsangaben bei ca. 50 %, vgl. FRACCARO 2006, S. 28). "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" sind im selben Verlag erschienen und über weite Strecken inhaltlich identisch; die Unterschiede beschränken sich im Wesentlichen auf das Layout und die Aufteilung auf zwei ("Mein erstes Mathematikbuch") bzw. drei ("Matheblitz 1") Teilbände.

Diese fünf Schulbücher wurden ebenso wie die dazu erhältlichen Lehrerbegleithefte einer qualitativen Inhaltsanalyse (vgl. MAYRING 2003; MAYRING 2002, S. 114-121) unterzogen, begrenzt auf einige wenige, für die Forschungsfragen relevante Bereiche. Innerhalb der Grundformen qualitativer Inhaltsanalyse handelte es sich also um eine theoriegeleitete *Strukturierung* (dazu und zum Weiteren vgl. MAYRING 2002, S. 114-121) des Text-, Bild- und Aufgabenmaterials, welches den Inhalt dieser Schulbücher ausmacht. Die Bestimmung der Strukturierungsdimensionen erfolgte auf Basis der in Kapitel 4 ausgeführten Übereinstimmung der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik mit Bezug auf einige grundsätzliche Empfehlungen, denen der Arithmetikunterricht im ersten Schuljahr folgen solle. Im Einzelnen wurden die Schulbücher nach folgenden Gesichtspunkten analysiert:

1. *Behandlung von Zahlenräumen*

Wie in Kapitel 4.4 dargestellt, empfiehlt die aktuelle Fachdidaktik weitgehend übereinstimmend und mit Nachdruck die ganzheitliche Behandlung des Zahlenraums zumindest bis 10, wenn nicht bis 20. Entsprechen die genannten Schulbücher dieser Empfehlung? Was findet sich dazu in den Lehrerbegleitbänden? Zur Analyse dieser Dimension erübrigt sich eine über diese Fragen hinausgehende Formulierung eines Kategoriensystems; Übereinstimmung bzw. Nichtübereinstimmung mit der genannten fachdidaktischen Empfehlung lassen sich unschwer und unzweifelhaft dem Aufbau der jeweiligen Schulbücher und den Erläuterungen des Lehrerbegleitbandes entnehmen. Die Ergebnisse dieses Teils der Analyse werden in Kap. 7.1.1 im Detail dargestellt.

2. *Erarbeitung bzw. Absicherung einer strukturierten Zahlauffassung und nicht-zählender Rechenstrategien*

Die aktuelle Fachdidaktik empfiehlt, ErstklässlerInnen (wenn noch nötig) gezielt darin zu unterstützen, von einer rein zählenden zu einer strukturierten Zahlauffassung und in weiterer Folge letztlich zu einem Denken von "Zahlen als Zusammensetzungen aus Zahlen" zu gelangen (vgl. Kap. 4.1). *Auf dieser Grundlage* wird weiters empfohlen, gezielt hinzuarbeiten auf die Ablösung vom zählenden Rechnen, welches die Kinder in der Regel bereits als Lösungsstrategie in die Schule mitbringen. Im Interesse dieser Ablösung von Zählstrategien wird der Behandlung operativer Zusammenhänge und darauf beruhender Ableitungsstrategien allgemein eine hohe Bedeutung zugemessen (vgl. Kap. 4.2 und 4.3).

Wie weit lassen sich nun Schulbücher auch bezüglich dieser Strukturierungsdimension so analysieren, dass der Forderung intersubjektiver Überprüfbarkeit Genüge getan wird? Methodisch unproblematisch scheint in jedem Fall die *inhaltliche Analyse der Lehrerhandbücher* dahingehend, ob in ihnen die Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien überhaupt als ein wichtiges *Ziel* des Mathematikunterrichts im ersten Schuljahr deutlich gemacht wird und, wenn ja, welche didaktisch-methodischen Maßnahmen zur Erreichung dieses Zieles empfohlen werden. Die Übereinstimmung oder Nichtübereinstimmung dieser Empfehlungen mit jenen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik lässt sich am Text selbst unschwer feststellen. Die Beurteilung, wie weit diese Empfehlungen dann allenfalls auch auf den *Schulbuchseiten* adäquat *umgesetzt* werden, kann im Einzelfall wohl nicht mit derselben Klarheit und Eindeutigkeit vorgenommen werden.

Auch die Kriterien *dieser* Beurteilung müssen sich jedenfalls aus den theoretischen Ausführungen von Kapitel 4 ableiten lassen. Ihre detaillierte Erläuterung kann aber sinnvoller Weise nur entlang der jeweiligen konkreten Inhalte erfolgen, also im Rahmen der Darstellung der Ergebnisse dieses Teils der Schulbuchanalyse (s. Kap. 7.1.2).

3. Behandlung des "Zehnerübergangs"

Wie in Kapitel 4.5 ausgeführt, rät die aktuelle Fachdidaktik eindringlich davon ab, zur Bewältigung von Zehnerübergängen im Zahlenraum 20 ausschließlich das in Kapitel 2.10.9 erläuterte Teilschrittverfahren zu thematisieren. Stattdessen wird empfohlen, eine Vielzahl von nichtzählenden Strategien für den Zehnerübergang (die "Kraft der Fünf", das "Verdoppeln plus eins" und andere Strategien; vgl. Kap. 2.10.9) mindestens gleichrangig zum Teilschrittverfahren zu behandeln. Die Übereinstimmung mit dieser Empfehlung lässt sich unschwer durch Text- und Bildanalyse der dem Zehnerübergang gewidmeten Seiten der genannten Bücher wie auch der diesbezüglichen Textstellen in den Lehrerbegleitheften prüfen. Die Ergebnisse dieses Teils der Schulbuchanalyse werden in Kapitel 7.1.3 dargestellt.

4. Gestaltung der "Übungspäckchen"

Wie dargestellt, warnt die aktuelle Fachdidaktik vor einer "Flut grauer Päckchen und bunter Hunde" (WITTMANN 1994, vgl. Kap. 4.6) und rät stattdessen, beim Üben der additiven Grundaufgaben operativ strukturierten Übungen ("schönen Päckchen") den Vorrang zu geben. Für die Identifikation von "schönen Päckchen", "grauen Päckchen" und "bunten Hunden" lassen sich klare Kodierregeln festlegen. Auf deren Grundlage wurde für jedes Schulbuch die Anzahl und das Verhältnis von operativ strukturierten und unstrukturierten Übungspäckchen ermittelt. Die Ergebnisse dieses Teils der Schulbuchanalyse werden in Kapitel 7.1.4 dargestellt, dort werden auch die Kodierregeln erläutert und theoretisch begründet.

5. Schaffen von Anlässen für das Kommunizieren und Argumentieren von Lösungswegen

Die letzte der in Kapitel 4 dargestellten, in der aktuellen Fachdidaktik übereinstimmend ausgesprochene Empfehlungen betrifft das Abhalten von "Strategiekonferenzen" oder ähnliche Maßnahmen, durch die die SchülerInnen dazu angeregt werden sollen, miteinander und mit der Lehrkraft über die zur Lösung additiver Grundaufgaben angewandten Strategien zu kommunizieren und diese dabei vertieft zu reflektieren. Um dieser Empfehlung zu folgen, sind

Lehrkräfte freilich nicht auf die Anregungen eines Schulbuches angewiesen. Ob das Schulbuch aber solche "Strategiekonferenzen" oder Ähnliches anregt, sei es durch Hinweise im Lehrerhandbuch, sei es durch entsprechende Impuls-Abbildungen oder Aufforderungen im SchülerInnenbuch, kann als Qualitätsmerkmal des Lehrwerks gewertet werden und fand deshalb als letzte Dimension in der Inhaltsanalyse der Schulbücher Berücksichtigung. Die Ergebnisse dieses Teils der Schulbuchanalyse werden in Kapitel 7.1.5 dargestellt.

6.3 LehrerInnenbefragung

Den 22 Lehrkräften der befragten Kinder wurde nach der letzten Interviewrunde ein Fragebogen übergeben und im Detail erläutert. Die Lehrkräfte wurden gebeten, den Fragebogen alleine in Ruhe auszufüllen und an den Projektleiter zu schicken. 21 Lehrkräfte kamen dieser Bitte nach, eine Lehrerin sandte ohne Angabe von Gründen nur Teil 1 des Fragebogens ausgefüllt zurück und ließ sich (erneut ohne Angabe von Gründen) auch durch ein Telefonat nicht dazu bewegen, auch Teil 2 (der nähere Fragen zur Unterrichtsgestaltung beinhaltet, s. Kap. 6.3.2) nachzusenden. Es konnten also nur 21 Fragebögen vollständig ausgewertet werden.

Das Mittel der *schriftlichen Befragung* (anstelle eines durch Fragebogen strukturierten Einzelinterviews; vgl. ATTESLANDER 2003, S. 120-195) wurde gewählt aus pragmatischen Erwägungen und im Interesse einheitlicher Erhebungsbedingungen. In den Vorgesprächen war nämlich deutlich geworden, dass ein Gespräch unmittelbar nach Unterrichtsschluss des letzten Befragungstages wegen Terminproblemen der Lehrkräfte mehrheitlich nicht möglich sein würde. Die Schulen für das Einzelgespräch neuerlich zu besuchen, hätte aber wegen der großen Entfernungen, die jeweils zurückzulegen waren (im Schnitt 145 km pro Schulbesuch), eine unverhältnismäßig hohe zeitliche und finanzielle Zusatzbelastung bedeutet.

6.3.1 Das Erhebungsinstrument

Der Fragebogen war zweigeteilt. Teil 1 enthielt neben Fragen zur Person (Anzahl der Dienstjahre, Ausbildung, mathematikspezifische Fortbildungen) offene wie auch geschlossene Fragen zur Verwendung des Schulbuches im Mathematikunterricht, zur Beurteilung des verwendeten Schulbuches durch die Lehrkraft, Skala-Fragen zur Häufigkeit bestimmter Aktivitäten im Mathematikunterricht des abgelaufenen Schuljahres, schließlich offene Fragen zum Umgang mit und zur Beurteilung von verschiedenen arithmetischen Arbeitsmaterialien. Teil 2 bestand aus geschlossenen Fragen zu den verschiedenen additiven Rechenstrategien: Die Lehrkraft sollte jeweils angegeben, ob und wie lange sie eine bestimmte Rechenstrategie im Unterricht des abgelaufenen Jahres aktiv gefördert oder geduldet habe oder ob sie versucht habe, Kinder von bestimmten Strategien abzubringen. Der gesamte Fragebogen ist als Anhang

6 beigefügt. Die Ergebnisse der schriftlichen Befragung werden in Kapitel 7.2 dargestellt und kommentiert.

6.3.2 Schwierigkeiten und Fehler bei der Durchführung der LehrerInnenbefragung

Nachträglich betrachtet war es ein Fehler, die Befragung nicht in Form von Einzelinterviews durchzuführen. Auch wenn die ausgefüllten Fragebögen deutlich machen, dass die Fragen durchwegs hinreichend verstanden wurden und auch andere mit schriftlichen Befragungen üblicherweise verbundene Nachteile (wie etwa geringe Rücklaufquote oder unvollständige Angaben; vgl. ATTESLANDER 2003, S. 175f) *nicht* auftraten, hätte das Gespräch vermutlich doch erheblich bessere Möglichkeiten geboten, Einblicke in die Unterrichtsgestaltung zu gewinnen. Vor allem hätten die Befragten auf manche Inhomogenität ihrer Antworten (s. Kap. 7.2) direkt angesprochen werden können. Das wiederum hätte mit größerer Klarheit deutlich gemacht, welche Antworten (vermutlich) als "sozial erwünscht" zu werten sind (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 233).

6.4 Elternbefragung

Etwa zwei Wochen vor der letzten Interviewrunde erhielten die Eltern der befragten Kinder über Vermittlung der Lehrkraft einen Fragebogen mit der Bitte, diesen bis zum Termin des letzten Interviews ausgefüllt der Lehrkraft zu übergeben. 138 der 139 Eltern kamen dieser Bitte nach, 131 Fragebögen waren vollständig ausgefüllt, nur bei 7 Fragebögen fehlten Angaben zu einzelnen Fragen. Der eine fehlende Fragebogen konnte trotz Vermittlung der Lehrkraft auch nachträglich nicht eingeholt werden.

6.4.1 Das Erhebungsinstrument

Der Fragebogen diente in erster Linie zur Erhebung der höchsten abgeschlossenen Schulbildung der Eltern (geschlossene Fragestellung). Darüber hinaus wurde erfragt, ob und wie lange das Kind den Kindergarten besucht habe. Schließlich wurden Skalafragen gestellt zur Häufigkeit und Dauer des häuslichen Rechnen-Übens, zum zeitlichen Aufwand für Mathematik-Hausübungen sowie zur Motivation des Kindes in Hinblick auf den Schulbesuch im Allgemeinen, das Üben und Erledigen von Hausübungen für Mathematik im Besonderen. Der gesamte Fragebogen ist als Anhang 7 beigefügt; die Ergebnisse werden in Kap. 7.3 dargestellt.

6.4.2 Schwierigkeiten und Fehler bei der Durchführung der Elternbefragung

Wie von vorneherein zu erwarten war, sind die Angaben der Eltern (gerade zur besonders interessierenden Häufigkeit und Dauer des häuslichen Rechnen-Übens) mit Vorsicht zu interpretieren. Das wird deutlich durch den Vergleich mit den Angaben der Kinder selbst. Diese wurden beim zweiten und dritten Interview jeweils auch dazu befragt, ob und wie lange sie zuhause rechnen übten. Freilich ist auch bei den Antworten der Kinder mit Verzerrungen zu rechnen. Wenn aber (was des Öfteren der Fall war) ein Kind angibt, dass zuhause "jeden Tag" geübt werde, seine Eltern aber im Fragebogen ankreuzen, mit dem Kind würde zuhause "nie" rechnen geübt, dann können zumindest nicht beide Antworten stimmen; damit sind aber beide Antworten für quantitative Forschungsfragen wenig brauchbar. Gerade der Vergleich von Kinder- und Elternangaben ist aber für qualitative Fragestellungen dennoch nicht ohne Interesse. Eine Erhebungsmethode, die eine *objektive* Erfassung des häuslichen Übungsaufwandes gewährleistet, scheint ohnedies praktisch kaum realisierbar zu sein.

Weniger fraglich erscheint die Zuverlässigkeit der Angaben der Eltern zu ihrer höchsten abgeschlossenen Schulbildung. Freilich hätte eine Erhebung des Bildungsstatus der Eltern mittels der Schülerstammblätter jeden Zweifel beseitigt, dieses Ansinnen wurde von den Schulen mit Verweis auf Datenschutzbestimmungen jedoch zurückgewiesen. Unter den gegebenen Rahmenbedingungen hatten die Eltern aber wohl wenig Grund für falsche Angaben: Ihnen war volle Anonymität zugesagt worden, und die ihnen ausführlich bekannt gemachte Zwecksetzung des Forschungsprojekts bot keinen Anlass, an dieser Zusage zu zweifeln. Zudem war ihnen von mir zugesichert worden, nach Abschluss der Befragungen darüber informiert zu werden, welche Erkenntnisse diese über den mathematischen Entwicklungsstand ihres Kindes gebracht haben, und gegebenenfalls auch Anregungen für sinnvolle Fördermaßnahmen zu erhalten (eine Zusicherung, die selbstverständlich auch eingehalten wurde). Die Kooperation der Eltern konnte von diesen also mit gutem Grund als auch in ihrem eigenen Interesse liegend betrachtet werden; wohl deshalb wurden auch mit einer Ausnahme alle Fragebögen ausgefüllt. Dennoch kann natürlich nicht ausgeschlossen werden, dass einzelne Eltern im Fragebogen ihren Bildungsstatus falsch dargestellt haben.

Die im Fragebogen erbetenen Angaben zur aktuellen Berufstätigkeit der Eltern blieben unvollständig bzw. zu ungenau, um – wie zunächst angestrebt – den bildungsrelevanten *Sozial*status ermitteln zu können (vgl. BAUER 1972, nach REISINGER 2003, S. 357 und S. 198); in den statistischen Modellen berücksichtigt wurde letztlich nur *Bildungs*status der Eltern in der bewusst sparsamen Form einer zweistufigen Skala ("beide Eltern ohne Matura" bzw. "mindestens ein Elternteil mit Matura", vgl. Kap. 5 und 9).

6.5 Im qualitativ-explorativen Teil gewählte Methoden

Die Analyse der didaktisch-methodischen Qualität der im Unterricht der interviewten Kinder eingesetzten Mathematik-Lehrbücher erfolgte, wie bereits erläutert (vgl. Kap. 6.2), nach der Methode der "Qualitativen Inhaltsanalyse" (vgl. MAYRING 2003; MAYRING 2002, S. 114-121); deren Ergebnisse werden in Kapitel 7 dargestellt.

Für die qualitativ-explorative Auswertung der Längsschnittstudie kamen in Kapitel 8.1 bis 8.4 neben Verfahren der deskriptiven Statistik (Ausweis von absoluten und relativen Häufigkeiten, Mittelwerten und Medianen, Standardabweichungen) vereinzelt auch explorative Signifikanzprüfungen (T-Test für Mittelwertvergleiche, vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 280ff) zum Einsatz, selbstverständlich ohne den Anspruch, damit Aussagen über die Grundgesamtheit treffen zu können.

Zur Gewinnung der in Kapitel 8.5 dargestellten sechs Typen von Kindern mit unterschiedlichen Strategiepräferenz wurde die Methode der "empirisch begründeten Typenbildung" herangezogen (vgl. etwa KELLE 1994; KELLE & KLUGE 1999; BIKNER-AHSBAHS 2003). Diese sei in ihren Grundüberlegungen im Folgenden kurz erläutert.

6.5.1 Zur Methode der empirisch begründeten Typenbildung

Die Methode der empirisch begründeten (Ideal-)Typenbildung wurde in jüngerer Zeit von BIKNER-AHSBAHS als "methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung" propagiert (BIKNER-AHSBAHS 2003) und von ROTTMANN für eine Fragestellung im Bereich der Didaktik der Grundschulmathematik angewandt (ROTTMANN 2006). Sie wird an dieser Stelle lediglich in ihren Grundzügen vorgestellt werden; für eine umfassende Diskussion siehe etwa KLUGE (2000), BIKNER-AHSBAHS (2003) und ROTTMANN (2006, S. 107-128).

Die empirisch begründete Typenbildung in der auch von ROTTMANN genutzten Form geht auf KELLE und KLUGE zurück (vgl. KELLE 1994; KELLE & KLUGE 1999, KLUGE 1999, KLUGE 2000). KLUGE ihrerseits ordnet ihr "Stufenmodell empirisch begründeter Typenbildung" (KLUGE 2000, Absatz 10) in eine Tradition der empirisch-qualitativen Sozialforschung ein, die von Max WEBER (1921/1984) ausgehend über die "Typologische Operation der Reduktion" nach BARTON und LAZARSFELD (vgl. LAZARSFELD 1937, LAZARSFELD & BARTON 1951) zur "Prozeßstrukturanalyse" nach GERHARDT (1986) und der "Typologischen Analyse" nach KUCKARTZ (1988) reicht (vgl. KLUGE 1999, S. 262-265; KLUGE 2000). Als wesentlichen methodologischen Fortschritt ihres Stufenmodells beanspruchen KELLE und KLUGE die damit verknüpfte Forderung, die jeweils verwendeten Typenbegriffe klar zu definieren und die durch Regeln geleitete Gewinnung der Typen aus der Empirie "systematisch und nachvollziehbar" (vgl. KLUGE 2000, Absatz 1) darzustellen.

Als "Typus" definiert KLUGE eine "Teil- oder Untergruppe" (KLUGE 2000, Absatz 2) von Objekten oder Individuen innerhalb einer Gesamtheit, die sich von den anderen Teilgruppen (den anderen "Typen") derselben Gesamtheit nach folgenden Kriterien unterscheiden lassen:

– Die Elemente oder Vertreter desselben Typus müssen "interne Homogenität" (KLUGE 1999, S. 42) aufweisen, also größtmögliche Ähnlichkeit hinsichtlich

  > *"einer Kombination von Merkmalsausprägungen, wobei jedoch zwischen den einzelnen Merkmalsausprägungen nicht nur empirische Regelmäßigkeiten (Kausaladäquanz), sondern (2.) auch inhaltliche Sinnzusammenhänge (Sinnadäquanz) bestehen sollten"* (KLUGE 2000, Absatz 2; Hervorhebungen im Original).

– Die einzelnen Typen müssen "externe Heterogenität" (KELLER & KLUGE 1999, S. 78) aufweisen, also voneinander möglichst klar und eindeutig unterschieden werden können; ein Individuum oder Element soll also klar und eindeutig *entweder* dem einen *oder* dem anderen Typus zugeordnet werden können.

Die Forderung nach "Kausaladäquanz" und "Sinnadäquanz", die bereits von WEBER in seinen Ausführungen zum "Idealtypus" erhoben wurde (WEBER 1921/1984, S. 27ff), verweist auf die Herkunft der Methode aus der Soziologie, der es ja wesentlich darum geht, *soziales Handeln* zu erklären. "Sinnadäquanz" heißt dabei für WEBER, dass ein Typus sozialen Handelns "in einen Sinnzusammenhang gestellt" werden müsse; Kausaladäquanz bedeutet demgegenüber, dass sich "gute Handlungsgründe" für die "Entfaltung" dieses Typus in der Realität finden lassen müssen (BIKNER-AHSBAHS 2003, S. 212, unter Verweis auf WEBER 1921/1984, S. 27ff).

Allgemeiner und für unseren Forschungsgegenstand, die Unterscheidung von Typen der Strategiepräferenz am Ende des ersten Schuljahres, passender wäre von *empirisch* begründeten Typen zu fordern, dass in ihrer Formulierung, also in der Festlegung der typenbildenden Merkmalsausprägungen, "empirische Analysen mit theoretischem (Vor-)Wissen verbunden werden" müssen (KLUGE 2000, Absatz 5). KLUGEs "Stufenmodell empirisch begründeter Typenbildung" formuliert nun "Regeln" dafür, wie diese Verbindung von Vorwissen und empirischen Analysen im "Prozeß der Typenbildung" methodisch kontrolliert zu leisten sei. Die folgende Darstellung des Stufenmodells folgt im Wesentlichen KLUGE 2000 (Abs. 6 bis 14) sowie der zusammenfassenden Darstellung bei ROTTMANN 2006 (S. 109-128).

Stufe 1, die "Erarbeitung relevanter Vergleichsdimensionen", besteht in der Gewinnung jener "Merkmale bzw. Vergleichsdimensionen, die der Typologie zugrundegelegt werden sollen". Dafür ist zunächst eine (freilich selbst immer schon durch das theoretische Vorwissen geleitete) Einzelfallanalyse zu leisten, bei der die "charakteristischen Grundzüge jedes Falls" (KLUGE 1999, S. 267) herauszuarbeiten sind. Erst im Anschluss daran können durch "Fallvergleich und Fallkontrastierung" (KELLE & KLUGE 1999, S. 75) jene Merkmalsbereiche identifiziert werden, die im nächsten Schritt eine *aus dem Datenmaterial begründete* Gruppierung der Fälle erlauben. Die Merkmalsbereiche, die in weiterer Folge die Typisierung begründen, werden also

> *"bei qualitativen Studien erst im Laufe des Auswertungsprozesses anhand des Datenmaterials – sowie des theoretischen (Vor-)Wissens – erarbeitet und 'dimensionalisiert'"* (KLUGE 2000, Abs. 7).

Der Prozess der Typenbildung ist somit eine Kombination aus "subsumtiver" und "abduktiver Kodierung" (vgl. KELLE & KLUGE 1999, S. 59): Einerseits werden die Einzelfälle zunächst freilich nach Maßgabe jener Kategorien analysiert, die aus der zum untersuchten Gegenstand vorliegenden Theorie abzuleiten sind (subsumtiv); keine Forscherin, kein Forscher kann ihr/sein Vorwissen ausblenden. Andererseits ist gerade deshalb Offenheit gefordert für die Möglichkeit, dass sich Einzelfälle unter die vorab gewählten Kategorien nicht angemessen einordnen lassen:

> *"In diesem Fall entsteht die Notwendigkeit, eine neue (Sub-)Kategorie zu konstruieren, welche dem Sachverhalt in höherem Maße gerecht wird (vgl. KLUGE 2000). Ein entsprechendes Vorgehen kennzeichnet die abduktive Kodierung"* (ROTTMANN 2006, S. 115; Hervorhebung im Original).

Auf Stufe 2, der "Gruppierung der Fälle und Analyse der empirischen Regelmäßigkeiten", wird gewissermaßen die "Trennschärfe" des auf Stufe 1 aus den Einzelfällen abstrahierten Kategorienschemas an den konkreten Einzelfällen überprüft. Mithilfe der gewählten Vergleichskategorien werden innerhalb der Gesamtheit Gruppen von Individuen gebildet, die hinsichtlich der definierten Merkmalsbereiche die Forderung "interner Homogenität" erfüllen. Zudem muss aber der Vergleich der so konstituierten Gruppen eine "genügend hohe externe Heterogenität" sicherstellen, das heißt: die "entstehende Typologie" muss "genügend Heterogenität bzw. Varianz im Datenmaterial" abbilden (KLUGE 2000, Abs. 8).

Auf Stufe 3, der "Analyse der inhaltlichen Sinnzusammenhänge und Typenbildung", muss dem *Erklärungsanspruch* Genüge geleistet werden, der mit der empirischen Typenbildung verbunden ist. Es geht ihr ja nicht nur um *Beschreibung* der untersuchten Phänomene, sondern darum, durch Generierung von Theorien und daraus abgeleiteten Forschungshypothesen einen Beitrag zu deren Erklärung zu leisten (KLUGE 2000, Abs. 9). BIKNER-ASBAHS spricht in diesem Zusammenhang von der "Funktion von Idealtypenbildung, [...] einer Hypothesengenerierung die Richtung zu weisen" (BIKNER-ASBAHS 2003, S. 215). Analog zur Rede von "inhaltlichen Sinnzusammenhängen" (die wieder auf die Herkunft der Methode aus der Soziologie verweist) lässt sich allgemeiner fordern: Die unterschiedlichen Kombinationen von Merkmalen, die jeweils einen Typus begründen, müssen hinsichtlich *inhaltlicher* Zusammenhänge analysiert werden. Zu prüfen ist, ob sich auf Grundlage der Typologie Theorien entwickeln lassen, warum gerade *diese* Merkmalskombinationen in der untersuchten Wirklichkeit anzutreffen sind; ob es also *sachliche* Gründe dafür gibt, warum eine bestimmte Ausprägung des einen Merkmals in Kombination mit einer bestimmten Ausprägung eines anderen Merkmals auftritt; Theorien, die ihrerseits erlauben, Forschungshypothesen für eine empirische Überprüfung zu generieren. KLUGE betont, dass gerade auch die Suche nach solchen Erklärungen

> *"meist zu weiteren Merkmalen (Stufe 1) [führt], die bei der Typenbildung berücksichtigt werden müssen, so daß der Merkmalsraum ergänzt und die sich nun ergebende Gruppierung erneut auf empirische Regelmäßigkeiten (Stufe 2) und inhaltliche Sinnzusammenhänge hin untersucht wird (Stufe 3)"* (KLUGE 2000, Abs. 9).

Dabei sei jeweils gezielt nach möglichen "'widersprechenden' oder abweichenden Fällen" (KLUGE 1999, S. 278) innerhalb der Gesamtheit zu suchen, welche es gegebenenfalls notwendig machen, die Hypothesen über inhaltliche Zusammenhänge zu revidieren und/oder die Kategorien zu erweitern (vgl. KELLE 1994, S. 302).

Auf der abschließenden Stufe 4, der "Charakterisierung der gebildeten Typen", werden dann die "konstruierten Typen umfassend anhand ihrer Merkmalskombinationen sowie der inhaltlichen Sinnzusammenhänge charakterisiert" (vgl. KLUGE 2000, Absatz 12) und mit einer möglichst treffenden Kurzbezeichnung versehen (vgl. KLUGE 1999, S. 280).
Für diese Charakterisierung wurden, wie KLUGE kritisiert, in älteren Studien "verschiedene Typenbegriffe verwendet", wobei mitunter "der Typusbegriff gar nicht explizit definiert" wurde (KLUGE 2000, Abs. 1). KLUGE fordert dagegen eine klare begriffliche Festlegung, durch welche Art von "Typus" die ermittelten Gruppen innerhalb der Gesamtheit jeweils beschrieben werden. In Frage kommen dafür im Wesentlichen "Prototypen" und "Idealtypen".

Als *Prototyp* definieren KELLE und KLUGE jene in der Realität zu findenden Fälle, "die die Charakteristika jedes Typus am besten 'repräsentieren': 'man kann an ihnen das Typische aufzeigen und die individuellen Besonderheiten dagegen abgrenzen'" (KELLE & KLUGE 1999, S. 94). Denn es geht freilich kein Individuum (Besonderes) im Allgemeinen auf; am Prototyp finden sich also immer auch Abweichungen vom "eigentlich" Typischen.

Dieses wiederum ist als *Idealtypus* in keinem Individuum in Reinform anzutreffen: Der Idealtypus ist "in seiner begrifflichen Reinheit [...] nirgends in der Wirklichkeit empirisch vorfindbar" (WEBER 1922/1985, S. 191), es handelt sich um einen "reinen Fall, der durch die realen Fälle näherungsweise beschrieben werden kann, bei dem [..] zugleich aber auch von

Konsistenz störenden Merkmalen" abgesehen wird (BIKNER-ASBAHS 2003, S. 216, unter Verweis auf KNIPPING 2003). KELLE und KLUGE weisen auf die Gefahr hin, dass diese "idealtypische Zuspitzung" dazu führen könne,

> *"daß nicht nur die Unterschiede zwischen den einzelnen Fällen und ihrem Idealtypus, sondern auch zwischen den Fällen größer erscheinen, als sie z.B. wären, wenn man sich stärker an 'durchschnittlichen' Kriterien orientieren würde"* (KELLE & KLUGE 1999, S. 96).

Das spricht aber wohl nicht (wie KELLE und KLUGE offenbar meinen) gegen die Verwendung von Idealtypen, sondern für deren unmissverständliche *Deklaration* als *Ideal*typen sowie deren behutsame *Interpretation* als *theoretische Konstrukte.* Deren Funktion besteht gerade auch darin, "zur Bildung von Hypothesen oder zur Formulierung weiterer Fragen an[zu]regen, die der Entwicklung einer Theorie [...] die Richtung weisen können" (BIKNER-ASBAHS 2003, S. 216). Die Gewinnung von Idealtypen ist also *nicht Abschluss, sondern erster Schritt* einer Theoriebildung; die an die Typologie anschließenden Überlegungen zur Erklärung der "inhaltlichen Sinnzusammenhänge" sind durch Folgestudien einer empirischen Überprüfung auszusetzen. Die Suche nach Prototypen kann als Teilschritt in diesem Prozess verstanden werden, die Bildung von Idealtypen als "Idealisierung von Prototypen" (BIKNER-ASBAHS 2003, S. 215).

Für die vorliegende Untersuchung wurden daher bewusst sowohl Prototypen als auch Idealtypen formuliert. Die hier abstrakt-allgemein beschriebenen vier Stufen der Typenbildung werden in Kapitel 8.5.1 am konkreten Material durchgeführt.

6.6 Zur Hypothesenprüfung gewählte Methoden

Die Prüfung der in Kapitel 5.2 erläuterten Hypothesen $H1_1$ bis $H1_4$ erfolgte durch eine univariate Kovarianzanalyse mit Messwiederholung, die nach der von SPSS 15.0 für Varianzanalysen angebotenen Methode des Allgemeinen Linearen Modells (ALM, Gesättigtes Modell, Typ III) berechnet wurde. Dieses ist bei ungleichen Zellenumfängen, wie sie im vorliegenden Fall gegeben sind, der älteren "klassischen Methode nach R.A. FISHER" vorzuziehen (vgl. ZÖFEL 2003, S. 215f). Die einzelnen Verfahrensschritte werden im Zuge der Darstellung der Ergebnisse der Hypothesenprüfung in Kapitel 9.1 im Detail erläutert.

Die Prüfhypothese $H1_5$ und H_6 postulieren jeweils signifikante positive Korrelationen zwischen zwei metrisch skalierten Variablen. Da diese im vorliegenden Fall nicht normalverteilt sind (vgl. Kap. 9.2), erfolgte die Prüfung durch Berechnung der Rangkorrelation nach Spearman (vgl. ZÖFEL 2003, S. 156).

Die Prüfhypothese $H1_7$ und H_8 schließlich postulieren statistisch bedeutsame Unterschiede zwischen der Häufigkeit, mit der Kinder, die eine bestimmte Grundaufgabe Mitte des Schuljahres durch Ableitung gelöst haben, dieselbe Grundaufgabe am Ende des Schuljahres durch Faktenabruf lösen, auf der einen Seite, und der Häufigkeit, mit der Kinder, die dieselbe Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Weiterzählen bzw. durch Finger-Teilzählen oder Alleszählen gelöst haben, diese Aufgabe am Ende des Schuljahres durch Faktenabruf lösen, auf der anderen Seite. Die Überprüfung erfolgt mittels Chi-Quadrat-Tests, der Methode der Wahl für die Prüfung von Zusammenhängen zweier nominal-skalierter Variablen (vgl. ZÖFEL 2003, S. 179).

7 Schulische und familiäre Rahmenbedingungen der Strategieentwicklung

"Real comprehension of a concept [...] implies its reinvention by the child [...] It is important first that the child should have been able to find, by himself, the reasons for the truth that he is expected to understand, and second, that he should have at least partially reinvented it for himself. That naturally does not mean that the teacher is useless, but his role ought to consist less in giving 'lessons' than in organizing situations provoking investigation."

PIAGET 1972, S. 7, zit. nach GINSBURG 1989, S. 96f

In Kapitel 2.13.2 wurde als ein Mangel der meisten vorliegenden Studien zur Entwicklung von Rechenstrategien im Bereich additiver Grundaufgaben festgehalten, dass diese Studien zu wenig (wenn überhaupt) deutlich machen, welchen Einflüssen die untersuchten Kinder im Mathematikunterricht und durch außerschulische Förderung ausgesetzt waren. Nun sind das Unterrichtsgeschehen wie auch die vor- und außerschulischen Einflüsse wohl zu komplex, als dass wir sie je in allen für das kindliche Lernen wesentlichen Dimensionen methodisch befriedigend erfassen könnten – selbst dann, wenn die Ressourcen weit weniger eng begrenzt wären als bei der vorliegenden Arbeit. Was diesbezüglich aber im Rahmen dieser Arbeit geleistet werden konnte und in diesem Kapitel, als Vorspann und Bezugsrahmen zu den in den Interviews erhobenen Rechenstrategien, dargestellt wird, ist das Folgende:

Dass das verwendete *Schulbuch* die Gestaltung des Mathematikunterrichts wesentlich mitbestimmt, ist eine plausible Vermutung. Bei bloßen Vermutungen sollte es freilich in einer wissenschaftlichen Arbeit nicht bleiben: Wie stark und in welcher Weise der Unterricht der untersuchten Kinder tatsächlich am jeweils verwendeten Schulbuch orientiert war, wurde deshalb durch einen LehrerInnenfragebogen (s. u.) in Erfahrung zu bringen versucht. Auf Grundlage der zuvor geleisteten und in Kapitel 7.1 dargestellten *Analyse der didaktisch-methodischen Qualität* der verwendeten Schulbücher ermöglicht dies zumindest *begründete* Vermutungen über die didaktisch-methodische Qualität auch des geleisteten Mathematik-Unterrichts selbst.

Weitere Rückschlüsse auf die Unterrichtsgestaltung sind (mit der gegenüber Selbstauskünften gebotenen Vorsicht) möglich auf Grundlage der weiteren Angaben, die die Lehrkräfte im Fragebogen zu wesentlichen didaktisch-methodischen Aspekten ihres Mathematikunterrichts gemacht haben; diese werden in Kapitel 7.2 zusammen mit den Angaben der Lehrkräfte zur Verwendung und Beurteilung der Schulbücher dargestellt.

Kapitel 7.3 versucht, in Zusammenschau von Schulbuchanalyse und LehrerInnenbefragung, eine abschließende Einschätzung der didaktisch-methodischen Komponente des Mathematikunterrichts, den die interviewten Kinder im ersten Schuljahr erfahren haben.

Der Elternfragebogen diente in erster Linie dazu, den Bildungsstatus der Eltern der interviewten Kinder in Erfahrung zu bringen. Die darüber hinaus erhobenen Auskünfte der Eltern zum häuslichen Üben müssen, wie bereits eingeräumt (vgl. Kap. 6.4), mit größter Vorsicht interpretiert werden. Diesem Unterfangen ist Kapitel 7.4 gewidmet.

7.1 Ergebnisse der Schulbuchanalyse

Wie in Kapitel 6.2 dargestellt, kamen im Unterricht der untersuchten Kinder fünf verschiedene Schulbücher zum Einsatz. Diese wurden jeweils für sich einer qualitativen Inhaltsanalyse unterzogen; zu den dabei gewählten Strukturierungsdimensionen vgl. Kap. 6.2. Die Ergebnisse der Analyse werden zunächst nach den einzelnen Strukturierungsdimensionen getrennt dargestellt. Im Anschluss daran folgt eine zusammenfassende Gesamtbeurteilung der didaktisch-methodischen Qualität der Schulbücher.

7.1.1 Zur Behandlung von Zahlenräumen

In den Lehrerbegleitheften der fünf analysierten Schulbücher wird jeweils eine "Jahresplanung" vorgeschlagen. Diese enthält (mit unterschiedlicher Genauigkeit) auch Angaben dazu, wie viele Schulwochen der Arbeit in einem bestimmten Zahlenraum jeweils zu widmen seien. Tabelle 10 gibt einen Überblick über diese Jahresplanungen und die entsprechenden Gewichtungen von Seiten innerhalb der einzelnen Schulbücher.

Die Tabelle macht deutlich, dass in *keinem* der analysierten Schulbücher der Zahlenraum bis zehn ganzheitlich behandelt wird. Im "Zahlen-Zug 1" wird immerhin ab etwa der 8. Schulwoche im gesamten Zahlenraum bis zehn gearbeitet, in "Funkelsteine 1" ab der 12. Woche. Die drei anderen Bücher, darunter die in 11 von 22 Klassen verwendete "Zahlenreise 1", führen nach einem etwa zweimonatigen Verweilen im "Einstiegszahlenraum" 4 bzw. 5 die weiteren Zahlen bis 10 einzeln und mit längeren Übungsphasen im jeweiligen "neuen Zahlenraum" ein und öffnen auf diese Weise den Zahlenraum erst im zweiten Schulhalbjahr bis zur Zahl 10.

Tabelle 10: Behandlung von Zahlenräumen in den untersuchten Schulbüchern

Titel	Einstiegs-Zahlenraum (ZR)	Anzahl der Wochen, die für Einstiegs-ZR geplant sind	Anzahl der Seiten, die dem Einstiegs-ZR gewidmet sind	Weiteres Vorgehen im Zahlenraum bis zehn	Anzahl der Wochen, in denen höchstens im ZR bis 10 zu arbeiten ist	Anzahl der Seiten, auf denen der ZR bis 10 nicht überschritten wird
Zahlenreise 1	ZR bis 4	8 bis 9 Wochen ("bis Allerheiligen")	Erarbeitungsteil (ET): 13 von 83 S. Übungsteil (ÜT): 19 von 137 S.	☞ Zahlen 5 bis 10 einzeln eingeführt, jeweils längeres Verweilen im "neuen" ZR ☞ im ET 3 bis 5 Seiten für jeden "neuen" ZR ☞ im ÜT 7 bis 12 Seiten für jeden "neuen" ZR ☞ etwa in 21. Schulwoche wird Zahl 10 "eingeführt"	mehr als 21 Wochen (wird in "Jahresplanung" nicht genauer ausgewiesen)	ET: 41 von 83 S. ÜT: 78 von 137 S.
Zahlen-Zug 1	ZR bis 5	etwa 4 Wochen (wird in der Jahresplanung nicht genauer ausgewiesen)	Hauptbuch: 20 von 186 S. Arbeitsheft: 7 von 39 S.	☞ Zahlen 6 bis 10 werden einzeln in rascher Folge (etwa eine Seite für jede weitere Zahl) eingeführt ☞ etwa in 8. Schulwoche wird Zahl 10 "eingeführt"	16 Wochen ("Jahresplanung" umfasst nur 34 Schulwochen, also etwa bis Semester)	Hauptbuch: 93 von 186 S. Arbeitsheft: 29 von 39 S.
Mein erstes Mathematik-buch	ZR bis 4	7 bis 8 Wochen	35 von 206 S.	☞ Zahlen 5 bis 10 werden einzeln eingeführt ☞ gemäß "Jahresplanung" im Begleitheft 4 Wochen für ZR 5, dann 2 bis 3 Wochen für jeden weiteren "neuen" ZR bis 10 ☞ etwa in 22. Schulwoche wird Zahl 10 "eingeführt"	24 Wochen	112 von 206 S.
Mathe-blitz 1	ZR bis 4	8 Wochen	Arbeitsbuch (AB): 30 von 160 S. Übungsbuch (ÜB): 6 von 48 S.	☞ Zahlen 5 bis 10 werden einzeln eingeführt ☞ gemäß "Jahresplanung" im Begleitheft jeweils 2 bis 3 Wochen für jeden "neuen" ZR ☞ etwa in 21. Schulwoche wird Zahl 10 "eingeführt"	23 Wochen	AB: 91 von 160 S. ÜB: 28 von 48 S.
Funkelsteine 1 Mathematik	ZR bis 6	7 Wochen	Arbeitsheft (AH): 19 von 103 S. Arbeitsbuch (AB): 19 von 95 S.	☞ Zahlen 7 bis 10 werden einzeln eingeführt ☞ gemäß "Jahresplanung" im Begleitheft 2 Wochen für ZR 7, dann je 1 Woche für ZR 8 und ZR 9 ☞ etwa in 12. Schulwoche wird Zahl 10 "eingeführt"	18 Wochen ("Jahresplanung" umfasst nur 34 Wochen, also etwa bis zum Anfang des 2. Semesters)	AH: 56 von 103 S. AB: 51 von 95 S.

Dieses kleinschrittige Vorgehen, zumal in der Extremform der drei zuletzt erwähnten Bücher, widerspricht klar den in Kapitel 4.4 ausgeführten Empfehlungen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik. Dass diese Gegenposition aus tiefster Überzeugung eingenommen wird, macht etwa das Lehrerbegleitheft zur "Zahlenreise 1" deutlich. Dort formulieren die AutorInnen folgendes "Grundprinzip" eines ihrer Ansicht nach "erfolgreichen Mathematikunterrichts": "Nur kleinste Lernschritte sichern den Erfolg!" (BRUNNER u.a. 2005, S. 9). WITTMANN hatte den (in der deutschsprachigen Fachdidaktik mittlerweile durchgehend vollzogenen) Paradigmenwechsel in dieser Frage gerade mit einer luzid argumentierten Polemik gegen das "Prinzip der kleinen und kleinsten Schritte" eingeleitet (WITTMANN 1994, S. 159; erstmals veröffentlicht 1990; vgl. Kap. 4.4).

Die analysierten Schulbücher befinden sich mit ihrem Festhalten an genau diesem Prinzip also in deutlichem Widerspruch zur aktuellen Fachdidaktik; in den Lehrerbegleitheften findet sich allerdings kein Hinweis darauf, dass dies den AutorInnen auch bewusst wäre. In den weitgehend wortidentischen (s. Kap. 6.2) Begleitheften zu "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" wird sogar (wie gesehen: contrafaktisch) als "besondere[s] Kennzeichen des Buches" die "Berücksichtigung aktueller Tendenzen im Mathematikunterricht der Grundschule" behauptet (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 2; AG MATHEMATIK 2003e, S. 3) und dies unter anderem wie folgt ausgeführt:

> *"Auf Vorerfahrungen, Kenntnisse und Fertigkeiten des Schulanfängers (z.B. Zahlwortreihe, Zählfähigkeit, Simultanerfassung, teilweise vorhandener Zahlbegriff) wird verstärkt Rücksicht genommen"* (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 2).

Wie sich eine solche Rücksichtnahme mit der kleinschrittigen Einführung der Zahlen bis 10 vertragen soll, wird freilich nicht ausgeführt (zu den bei SchulanfängerInnen tatsächlich erwartbaren, über fünf in der Regel deutlich hinaus reichenden Zahlwortkenntnissen vgl. Kap. 8.1.1).

Bezüglich der weiteren Behandlung von Zahlenräumen gibt es zwischen den analysierten Büchern keine nennenswerten Unterschiede: Frühestens ab dem zweiten Schulhalbjahr ist in allen Büchern die Erweiterung auf den Zahlenraum bis 20 vorgesehen, daran angeschlossen eine nochmalige Erweiterung auf den Zahlenraum bis 30. Auf den letzten Buchseiten werden dann noch die Zehnerzahlen bis 100 behandelt. Gerade auch die gesonderte Behandlung des Zahlenraums bis 30 entspricht gleichfalls nicht den Empfehlungen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik (vgl. etwa PADBERG 2005, S. 30; KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 8), doch fällt dies außerhalb des Bereichs dieser Arbeit und wird daher hier nicht weiter verfolgt.

7.1.2 Zur Behandlung von Zahlstrukturen und Rechenstrategien

In diesem Teil der Schulbuchanalyse wird der Frage nachgegangen, ob und in welcher Form in den Schulbüchern den Empfehlungen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik entsprechend auf eine strukturierte Zahlauffassung, das flexible Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen aus Zahlen, auf Einsicht in operative Zusammenhänge und letztlich die Überwindung des zählenden Rechnens hingearbeitet wird (vgl. Kap. 4.1 und 4.2). Die Darstellung erfolgt für jedes Buch getrennt, geordnet nach dem Verbreitungsgrad der Bücher in den Projektklassen.

7.1.2.1 Analyse von "Zahlenreise 1"

Im gesamten Lehrerbegleitheft zur "Zahlenreise 1" (BRUNNER u.a. 2005) findet sich *kein einziger expliziter* Hinweis darauf, dass die Überwindung zählender Rechenstrategien ein erstrebenswertes Ziel im Mathematikunterricht des ersten Schuljahres wäre. Als *impliziten* Hinweis lassen sich zwei Stellen interpretieren, an denen das "Beherrschen" von Zahlzerlegungen und

Ergänzungen auf 10 als Voraussetzung für das "Zehnerüberschreiten" genannt werden (a.a.O., S. 9 und S. 17). Zudem werden Kopiervorlagen der additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn angeboten, die der "Automatisation dieser Rechnungen [dienen]" sollen (a.a.O., S. 46). Automatisation wird dabei als Ergebnis "ständiger Wiederholung und Übung" (a.a.O., S. 9) betrachtet. Es findet sich im gesamten Lehrerbegleitheft kein Hinweis darauf, dass das *Herstellen von Beziehungen* zwischen den Grundaufgaben, das *Lernen in Zusammenhängen* dem Automatisieren dienlich sei.

Tatsächlich werden operative Zusammenhänge sowohl im Lehrerbegleitheft wie auch im Schülerbuch kaum behandelt. Zwar wird im Lehrerbegleitheft in den Ausführungen zum "Zahlenraum von 5 bis 9" behauptet, dass die "Probleme [?] der Tauschaufgaben, der Umkehraufgaben [...] jeweils bei einem neuen Zahlbegriff dazu erarbeitet" werden (a.a.O., S. 14). Tatsächlich findet sich im "Erarbeitungsteil" genau eine Seite mit Tauschaufgaben (bei Behandlung des "Zahlenraums 5", BRUNNER u.a. 2004a, S. 24). Der "Übungsteil" bietet dazu zwei Seiten (eine im "Zahlenraum 5", BRUNNER u.a. 2004b, S. 29, und eine weitere im "Zahlenraum 10", BRUNNER u.a. 2004c, S. 74) sowie ein vereinzeltes Übungspäckchen (zwei Aufgabenpaare im "Zahlenraum 8", a.a.O. S. 57). Umkehraufgaben werden sowohl im Erarbeitungsteil als auch im Übungsteil auf jeweils genau einer Seite thematisiert, nämlich im "Zahlenraum 9" (BRUNNER u.a. 2004c, S. 63). Diese Seiten sollen der Hefteinteilung und Jahresplanung nach etwa zu Beginn des zweiten Schulhalbjahrs behandelt werden. Bis dahin wird also, folgt man dem Schulbuch, zwar ausgiebig subtrahiert, ohne aber auf den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion einzugehen.

Andere operative Zusammenhänge, etwa das Prinzip der "Nachbaraufgabe" (vgl. Kap. 2.10.5) oder das der "gegensinnigen Veränderung" (vgl. Kap. 2.10.8), finden im Lehrerbegleitband *überhaupt keine Erwähnung* und werden auch auf den Seiten des Schulbuches *an keiner Stelle* behandelt.

Wenn aber das Ableiten aus bereits gewussten Aufgaben in der "Zahlenreise 1" kein Thema ist, ja wenn nicht einmal die konzeptionelle *Voraussetzung* des Ableitens, also die Einsicht in operative Zusammenhänge, in angemessener Form berücksichtigt wird: Mit welcher Strategie sollten Kinder dann jene additiven Grundaufgaben lösen, die sie noch nicht automatisiert haben? Die auf den Seiten des Schulbuchs mehrfach gegebene und im Lehrerhandbuch bekräftigte Antwort auf diese Frage lautet: "Lege und rechne!" (Erstmals zu lesen bei der Addition 1+3; BRUNNER 2004a, S. 24.)

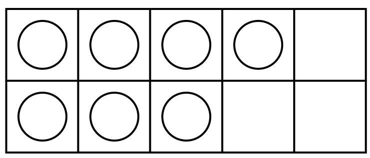
Die AutorInnen empfehlen also, dass die Kinder die additiven Grundaufgaben dadurch lösen, dass sie diese *vollständig mit Material modellieren.* Dies soll *zumindest während der gesam-*

ten "Erarbeitung" der Zahlen bis 10 so gehandhabt werden: "Es muss aber unbedingt immer auch gelegt werden" (BRUNNER u.a. 2005, S. 29). Dieses Vorgehen entspricht grundsätzlich dem "Alleszählen", der einfachsten Rechenstrategie, die viele Kinder bereits zu Schulbeginn zugunsten ökonomischerer Strategien hinter sich gelassen haben (vgl. Kap. 2.10.1).

Nun legen die AutorInnen aber Wert darauf, dass dieses "Legen" mit "Scheiben" auf einem "Legebrettchen" erfolgen solle; dieses Material wird vom Verlag ergänzend zum Schulbuch zum Kauf angeboten. Das Legebrettchen bietet ein Zehnerfeld (zwei Reihen zu je fünf Legeplätzen) und könnte also für eine quasi-simultane Zahlerfassung genutzt werden. Auch im Schulbuch werden die Zahlen bis zehn in der Mehrzahl der Zahldarstellungen als Punktemuster im Zehnerfeld dargestellt; letzteres soll als Abbildung des Legebrettchens interpretiert werden. (Daneben finden sich in der "Zahlenreise" auch zahlreiche unstrukturierte Zahldarstellungen, die bei Zahlen größer als vier oder fünf eine zählende Anzahlermittlung notwendig machen, darunter das "Zahlenmaskottchen Waupi", durch welches etwa die Zahl acht mit neun [!] ungegliedert linear angeordneten Kugeln dargestellt wird – die neunte bildet den Kopf des Maskottchens! Vgl. a.a.O., S. 10.)

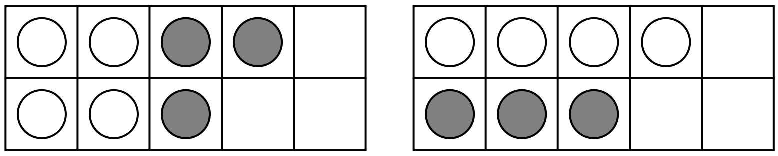
Als abgebildete Zehnerfeld-Darstellung wird nun auf den Schulbuchseiten für jede Zahl durchgehend *nur genau eine Variante* angeboten. Ebenso *darf* das Legen der Plättchen in die Felder des Legebretts nach Intention der AutorInnen nur auf genau eine Art erfolgen. Das Lehrerbegleitheft formuliert dazu nämlich folgende "Anleitung zum richtigen Legen": "Die Scheiben werden nun immer von oben nach unten und von links nach rechts gelegt" (a.a.O., S. 10f). Auf diese Weise ergibt sich also als *einzige* von der "Zahlenreise" *erlaubte* Darstellung beispielsweise der Zahl sieben das folgende Punktemuster:

Abbildung 3: Einzig "erlaubte" Darstellung der Zahl sieben gemäß "Legeanordnung" der "Zahlenreise", vgl. Brunner u.a. 2005, S. 10f



Es ist klar, dass diese Zahldarstellung ungünstig gewählt wäre, wollte man die in der aktuellen Fachdidaktik viel beschworene, durch das Zehnersystem begründete "Kraft der Fünf" (KRAUTHAUSEN 1995, vgl. Kap. 4.1) thematisieren. Das ist aber auch gar nicht beabsichtigt; die "Kraft der Fünf" wird auch sonst in der "Zahlenreise" an keiner Stelle behandelt. Freilich böte auch die von der "Zahlenreise" gewählte Darstellung die Möglichkeit, sieben als Struktur, als *Zusammensetzung aus anderen Zahlen* zu thematisieren. In diesem Fall läge das quasi-simultane Erfassen der sieben als "vier und drei" und die Thematisierung *dieser* Zusammensetzung näher; dafür bieten sich zwei verschiedene Sichtweisen derselben Darstellung an:

Abbildung 4: Zwei Sichtweisen der sieben als "vier und drei" an derselben Zahldarstellung



Dass solche Sichtweisen aber nicht durch die Darstellung "erzwungen" werden, sondern vielmehr vom Kind aktiv in die Darstellung "hineingesehen" oder vielmehr "hineingedacht" werden müssen, wurde bereits ausgeführt; ebenso, dass deshalb geeignete Aktivitäten *im Umgang mit* strukturierten Zahldarstellungen gefordert sind, wenn man erreichen will, dass möglichst alle Kinder solche Sicht- und Denkweisen entwickeln (vgl. Kap. 4.1). In der "Zahlenreise" findet sich aber weder im Lehrerbegleitheft irgendein Hinweis dazu, dass es wichtig wäre, auf eine quasi-simultane Anzahlerfassung der Zahldarstellungen im Zehnerfeld hinzuarbeiten, noch werden im Schulbuch an irgendeiner Stelle Aktivitäten zum Training dieser quasi-simultanen Anzahlerfassung angeregt.

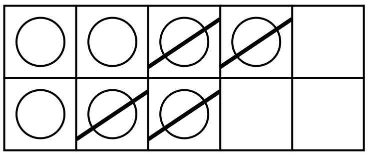
Was leisten nun *auf dieser Grundlage* das Legebrett bzw. die Zehnerfelddarstellungen im Schulbuch als Veranschaulichung bzw. Erarbeitungsmaterial? Was bedeutet also die Aufforderung "Lege und rechne!" bzw. "Zeichne Kreise!" und "Streiche Kreise weg!" *unter diesen Umständen* für die Entwicklung von Rechenstrategien?

Betrachtet man zunächst das Addieren, so kann das Legen der die Summanden repräsentierenden Scheiben auf das Legebrett bzw. das Zeichnen von Kreisen in das Zehnerfeld im Grunde *immer nur* zählend erfolgen. Ein Kind könnte allerdings die gelegte bzw. gezeichnete *Gesamtmenge* quasi-simultan erfassen, sich also für die Ergebnisermittlung neuerliches Zählen ersparen. Wie dargestellt, bietet die "Zahlenreise" allerdings keine Anregungen dafür, diese Quasi-Simultanerfassung zu erarbeiten und zu üben. Und im Lehrerbegleitheft gibt es zwar eine penible "Legeanordnung", aber keinen Hinweis darauf, dass die Lehrkraft darauf achten sollte, ob Kinder die Summe einer gelegten Addition quasi-simultan oder zählend erfassen. Sofern ein Kind nicht von sich aus zur Quasi-Simultanerfassung schon fähig ist *und* diese auch anwendet (Kompetenz und Performanz können auch hier auseinander fallen!), läuft "Lege und rechne!" also tatsächlich auf ein Training der Strategie "Alleszählen" hinaus.

Doch selbst *wenn* ein Kind die durch Legen gebildete Summe schlussendlich quasi-simultan erfasst, hat es *damit allein* noch keine Strategie erworben, um dieselbe Aufgabe auch ohne Hilfe des Legebrettes nicht-zählend lösen zu können. Denn der Bezug der gelegten "Summe" zur Zahl 10 bzw. 5, der ja erst dem Kind das quasi-simultane "Ablesen" am Legebrett erlaubt, hat sich hier gleichsam mechanisch durch das (zählende) Hinlegen einzelner Scheiben ergeben. Dieser Bezug ist also *nicht das Resultat eines aktiven Nachdenkens* über Zahlbeziehungen, sondern *äußere Folge einer zählenden Handlung*. Und es ist keinesfalls garantiert, dass das Kind nach vollzogener Handlung diesen Bezug nachträglich reflektiert und Aufgabe und Ergebnis (also die resultierende Darstellung am Legebrett) auch gedanklich zueinander in Beziehung setzt. Bedenkt man die kindliche Absicht, eine Aufgabe lösen zu wollen, um sich sofort an die nächste Aufgabe zu machen, dann ist es sogar eher unwahrscheinlich, dass eine solche Reflexion stattfindet. Ohne diese Reflexion kommt es aber, wie in Kapitel 2.10.4 näher ausgeführt wurde, nicht zur gedanklichen Konstruktion von "Zahlentripeln"; erst diese gedankliche Konstruktion würde in weiterer Folge das nicht-zählende Lösen der Aufgabe ermöglichen. Was auch ohne diese Konstruktion *möglich* bleibt, ist freilich das Auswendigmerken im Zuge oftmaliger Wiederholung. Das Merken wird dabei aber nicht unterstützt, da die für das Enkodieren im Langzeitgedächtnis so wichtige Elaboration der zu merkenden Inhalte nicht stattfindet (vgl. Kap. 2.12.1 und 2.12.2).

Wie stellt sich das von der "Zahlenreise" empfohlene Vorgehen bei Subtraktionen dar? Auch für diese erteilt das Lehrerbegleitheft genaue Legevorschriften. Diesen zufolge solle "die Menge, die wegkommt, [..] nach rechts vom Brettchen geschoben" werden (a.a.O., S. 11). Wie nun in der bildhaften Umsetzung dieser Vorschrift (a.a.O., S. 10) im Schülerbuch noch klarer hervortritt, sollen die Kinder dabei die quasi-simultan erfassbaren Strukturen *explizit nicht* dazu nutzen, um die Lösung nicht-zählend zu ermitteln. Das lässt sich exemplarisch an der Subtraktion 7–4 verdeutlichen: Die Kinder werden hier explizit dazu angeleitet, die vier wegzunehmenden Scheiben "von rechts beginnend" (a.a.O., S. 11) *einzeln* wegzunehmen bzw. in der entsprechenden Abbildung im Schulbuch (BRUNNER u.a. 2004a, S. 32) vier Kreise von rechts oben *einzeln* durchzustreichen (siehe Abbildung 5).

Abbildung 5: Darstellung von 7–4 gemäß "Anleitung" der "Zahlenreise", vgl. Brunner u.a. 2004a, S. 32



Dabei würde es sich gerade bei der Rechnung 7–4 auf Grundlage der hier gewählten Zahldarstellung anbieten, entweder die vier Punkte der oberen Reihe oder die vier Punkte der ersten und zweiten Spalte am linken Rand (Würfelvier) als *einen Vierer* aus der Ganzheit des Siebeners herauszulösen oder auch nur wegzudenken, wie es GERSTER als eine Variante der Hinführung zu nicht-zählenden Lösungsstrategien empfiehlt (vgl. GERSTER 2009a, S. 265f).

Folgt man hingegen den Vorschlägen der "Zahlenreise", dann soll die in der Zahldarstellung enthaltene Struktur *gerade nicht* zur Vermeidung eines zählenden Vorgehens genutzt werden. Vielmehr müssen Kinder, die gemäß "Anleitung" vorgehen, zuerst den Minuenden hinlegen bzw. zeichnen, um dann den Subtrahenden *als vier einzelne* Scheiben bzw. Kreise, und das heißt: *zählend* wegzunehmen bzw. durchzustreichen. Lediglich die Differenz (das "Ergebnis") *kann* bei dieser Aufgabe wieder simultan erfasst werden. Wenn aber in der Wegnehm-Handlung selbst zählend vorgegangen wird, dann ist sie auch keine förderliche Grundlage für die Entwicklung nicht-zählender mentaler Subtraktionsstrategien (SCHIPPER 2003b, S. 223, vgl. Kap. 4.2) und birgt im Gegenteil das Risiko, Zählstrategien zu verfestigen.

Zusammenfassung:
Die Autorinnen der "Zahlenreise" geben im Lehrerbegleitheft zwar (wenn auch nur implizit und ohne nähere Erläuterungen) zu erkennen, dass sie das *Automatisieren* der additiven Grundaufgaben für wichtig halten. Als Hilfestellung dafür bieten sie aber lediglich Kopiervorlagen für Rechenkärtchen an, mit denen die Grundaufgaben offenbar als isolierte Einzelfakten auswendig gelernt werden sollen; nähere Ausführungen zum Einsatz dieser Rechenkärtchen fehlen. In der *Erarbeitung* der additiven Grundaufgaben kommen zwar (wenn auch unter konsequenter Missachtung der "Kraft der Fünf") strukturierte Zahldarstellungen im Zehnerfeld zum Einsatz. Diese werden aber *gerade nicht* für das Erarbeiten nicht-zählender Rechenstrategien genutzt, im Gegenteil: Die "Anleitungen" des Lehrerbegleitheftes zum "richtigen Legen" bzw. zur zeichnerischen Darstellung von Additionen und Subtraktionen sind nichts anderes als Anleitungen zum zählenden Materialgebrauch. Sie leisten damit einer Verfestigung zählender Strategien eher Vorschub, als dass sie einen Beitrag zu deren Überwindung leisten könnten.

7.1.2.2 Analyse von "Zahlen-Zug 1"

Auch im "Lehrerband" zum "Zahlen-Zug 1" wird an keiner Stelle *explizit* ausgeführt, dass das *nicht-zählende* Lösen der Grundaufgaben ein wesentliches Unterrichtsziel des ersten Schuljahres sei. Unter den "Lernzielen", die in der "Jahresplanung" aufgeführt werden, findet sich zwar "Addition und Subtraktion im Zahlenraum 10 *beherrschen*" (BUBLAT, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2001, S. 4; Hervorhebung M.G.). Dieses wird als Ziel bereits für die 9. bis 11. Schulwoche (!) angeführt. Und als Ziel bis zum Ende des ersten Schuljahres nennt das Autorenteam "Beherrschen des kleinen Einspluseins" (a.a.O., S. 6). Was aber genau unter "Beherrschen" zu verstehen ist, wird nicht erläutert. Gerade die Zielvorgabe für die 9. bis 11. Schulwoche lässt Zweifel daran aufkommen, dass damit (vollständige) "fact mastery" oder gar das (vollständige) Auswendigwissen verstanden wird. Aber tatsächlich wird im Lehrerband eben an keiner Stelle *explizit* darauf eingegangen, welche Lösungsstrategien mit den Kindern in welchem zeitlichen Rahmen angestrebt werden sollten.

Diese *mangelnde Klarheit* bezüglich der angestrebten Ziele und der dafür einzusetzenden didaktisch-methodischen Mittel zieht sich durch den gesamten Lehrerband. So werden zwar die Zahlen bis zehn im Schulbuch fast durchgängig mit der "Kraft der Fünf" strukturiert dargestellt (allerdings nicht im fixen Bezugsrahmen eines Zehnerfeldes, sondern durch linear angeordnete rote oder auch blaue Kreise; bei Zahlen größer als fünf sind jeweils fünf Kreise durch einen weißen Punkt in der Mitte als Einheit betont). Und diese Darstellung wird im Lehrerband auch explizit damit begründet, dass so "das ausschließliche Abzählen" vermieden werde (a.a.O., S. 1). Es fehlt aber jeder Hinweis darauf, dass dazu immer noch die keinesfalls selbstverständliche, aktive Interpretationsleistung der Kinder vonnöten ist (vgl. Kap. 4.1); und dementsprechend fehlen im Lehrerband auch Anregungen dazu, wie diese nicht-zählende Anzahlerfassung im Unterricht gezielt erarbeitet werden könnte.

Weiters finden sich in den (äußerst knapp gefassten) Bemerkungen "Zur Konzeption" des Schulbuches im Lehrerband auch einige Hinweise darauf, dass dem Autorenteam die Bedeutung von Ableitungsstrategien für das angestrebte "Beherrschen" des Einspluseins durchaus bewusst ist. So werden als "Leitideen für die Zusammenstellung der Aufgaben" unter anderem genannt: "Stützaufgaben als Hilfe herausstellen" sowie "Gesetzmäßigkeiten entdecken und anwenden" (a.a.O., S. 2). Auch wird festgehalten, dass "erste Einsichten zu einem Geflecht von Beziehungen zwischen Zahlen und Rechenoperationen ausgebaut werden" sollten und der "flexible Umgang mit Zahlen" gefördert werden solle (a.a.O., S. 2). Und in der "Jahresplanung" werden auch folgende Lernziele formuliert (auch diese bereits für das Ende des ersten Schulhalbjahres): "Gesetzmäßigkeiten beim Rechnen entdecken und als Rechenhilfe nutzen (Aufgabe und Tauschaufgabe)" sowie "Zu einem Sachverhalt vier verwandte Aufgaben bilden (Aufgabe, Tauschaufgabe, zwei Umkehraufgaben)" (a.a.O., S. 4).

All das lässt sich gut *in Einklang bringen* mit der Konzeption eines arithmetischen Erstunterrichts, der gezielt den Aufbau einer strukturierten Zahlauffassung, die Entwicklung von Einsicht in operative Zusammenhänge und *auf dieser Grundlage* die Ablösung vom zählenden Rechnen durch gezieltes Erarbeiten von Ableitungsstrategien verfolgt. *Deutlich und unmissverständlich formuliert* wird dieses Zweck-Mittel-Verhältnis aber im gesamten Lehrerband nicht. Die angestrebte Einsicht in operative Zusammenhänge steht in der Jahresplanung als ein weiteres Ziel *neben* dem (nicht näher ausgeführten) "Beherrschen" der Grundaufgaben, wird nicht als das entscheidende Mittel zum Erreichen dieses Zieles deutlich.

Ähnlich zwiespältig fällt die Beurteilung der Erarbeitungsseiten im Schulbuch aus: Zwar werden die Zahlen bis 10, wie erwähnt, fast durchgängig mit Fünfer-Struktur dargestellt. Es findet sich aber keine einzige Seite, auf der angeregt wird, dass die Kinder *selbst* Mengen so strukturieren sollen, dass Anzahlen quasi-simultan erfassbar werden. Es wird auch an keiner Stelle angeregt, dass strukturierte Darstellungen tatsächlich quasi-simultan erfasst werden sollten bzw. dass quasi-simultane Erfassen geübt werden sollte. Strukturierte Zahl*darstellungen* werden also zwar angeboten, aber nicht erkennbar genutzt, um eine strukturierte Zahl*auffassung* auch bei jenen Kindern zu befördern, die einer solchen Förderung noch bedürfen.

Dem "Zerlegen" der Zahlen bis 10 in zwei Teilportionen sind zahlreiche Schulbuchseiten gewidmet. Dabei finden sich (ganz anders als etwa bei den Zerlegungsaufgaben der "Zahlenreise") auch zahlreiche "schöne Zerlegungspäckchen", innerhalb derer also eine Zerlegung aus der vorhergehenden nach dem Prinzip der gegensinnigen Veränderung gewonnen werden kann (etwa 5 zunächst als 1+4, dann als 2+3, dann als 3+2 usw.; vgl. BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2005a, S. 21). Diese "schönen Päckchen" sind aber *durchwegs bereits vollständig vorgegeben*, das heißt: Die Aufgabe des Kindes ist darauf beschränkt, jeweils die zweite Portion zu einer bereits angegebenen ersten Teilportion einer Zahl zu finden. An keiner Stelle muss das Kind selbst im Rahmen einer *offenen* Zerlegungsreihe (vgl. Kap. 4.5) unter Beweis stellen, dass es dieses Prinzip der gegensinnigen Veränderung auch *selbstständig* anwenden kann, um eine Zahl *systematisch* in allen möglichen Varianten in zwei Teilportionen aufzuteilen. Zudem werden keine Zerlegungspäckchen mit einer absichtsvollen "Störung" innerhalb der sonst durchgehaltenen operativen Struktur angeboten (vgl. Kap. 4.5).

Dem Zerlegen in Form schöner Päckchen, wie es der "Zahlen-Zug 1" vorsieht, haftet damit etwas Schematisches an, zumal auch an keiner Stelle des Schülerbuches wie auch des Lehrerbandes explizit angeregt wird, die Struktur der "schönen Päckchen" selbst zum Gegenstand von Reflexion und Kommunikation zu machen. Freilich *kann* die Lehrkraft solches Reflektieren und Kommunizieren in der Verwendung des Schulbuches jederzeit von sich aus anregen. Das Schulbuch fordert sie dazu aber nicht explizit auf; und wenn sie es nicht von sich aus tut, dann bleibt das Prinzip der "gegensinnigen Veränderung" vermutlich trotz all der "schönen" Zerlegungspäckchen zumindest manchen Kindern verborgen.

Zwar wird dem Zerlegen von Zahlen im Schülerbuch breiter Raum gewidmet, erst spät und auch da nur auf zwei Schulbuchseiten wird aber der Zusammenhang zwischen dem Zerlegen und dem Addieren wie auch Subtrahieren im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts hergestellt (BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2005a, S. 70f; gemäß "Jahresplanung" in BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2001, S. 3 ist die Behandlung dieser Seiten für die 12. bis 16. Schulwoche vorgesehen). Unter der Überschrift "Umkehraufgaben" (BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2005a, S. 84ff) wird dann gerade *nicht* auf das Teile-Ganzes-Konzept zurückgegriffen: Die Subtraktion als Umkehrung einer Addition wird hier ausschließlich *dynamisch* (Wegnehmen als handelndes "Aufheben" eines zuvor erfolgten Dazugebens) und nicht auch *statisch* (Addition und Subtraktion als unterschiedliche Betrachtungsweisen desselben Zahlentripels, vgl. Kap. 2.10.6) gedeutet. Das Potenzial von Zahlzerlegungen für das Ableiten von Additionen und Subtraktionen aus gewussten Zahlstrukturen wird damit nicht oder zumindest nicht konsequent genutzt.

Überhaupt werden *Ableitungsstrategien als solche*, wird also das *aktive Nutzen* von operativen Zusammenhängen für das nicht-zählende Lösen von noch nicht automatisierten Grundaufgaben, im "Zahlen-Zug 1" *nicht behandelt*. (Eine Ausnahme bildet das "Teilschrittverfahren" für den Zehnerübergang; s. dazu Kap. 7.1.3.) Dieses Urteil lässt sich wie folgt begründen:

Zwar werden im "Zahlen-Zug 1" operative Zusammenhänge wie Tauschaufgaben, Nachbaraufgaben und Umkehraufgaben weitaus deutlicher und in größerem Umfang als in der "Zahlenreise" auf einer Reihe von Schulbuchseiten explizit zum Thema gemacht (etwa BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2005a, S. 60; S. 69ff; S. 84ff). Dabei finden sich zumindest auch einige offene Aufgabenstellungen, in deren Bearbeitung immerhin deutlich werden kann, ob ein Kind den jeweils thematisierten Zusammenhang selbstständig auf andere Zahlentripel *übertragen* kann (etwa a.a.O., S. 71). Es dominieren aber Aufgabenseiten mit durchgängig vorgegebenen Aufgabenpäckchen. Diese sind zu einem deutlich höheren Anteil als in den anderen vier Unterrichtswerken operativ strukturiert (s. Kap. 7.1.4). Viele der Aufgabenpäckchen in "Zahlen-Zug 1" *könnten* also von der Lehrkraft verwendet werden, um operative Zusammenhänge zu thematisieren. Dass genau dieses Thematisieren erst den eigentlichen Mehrwert operativer Übungspäckchen ausmachen würde (vgl. Kap. 4.6), wird aber im Lehrerband nicht explizit ausgeführt (vgl. aber Kap. 7.5). Operative Zusammenhänge werden in "Zahlen-Zug 1" also zwar *behandelt*, es wird aber nicht konsequent darauf hingearbeitet, dass diese Zusammenhänge von den Kindern auch tatsächlich bewusst wahrgenommen und selbstständig angewandt werden.

Schöne Päckchen mit Nachbaraufgaben sind im "Zahlen-Zug 1" fast durchgängig so aufgebaut, dass zunächst 1, dann 2, dann 3 usw. addiert bzw. subtrahiert wird. Solche Päckchen könnten zwar dafür genutzt werden, um das *Prinzip* der Nachbaraufgabe herauszuarbeiten (wobei ein *Herausarbeiten*, wie ausgeführt, über das bloße *Anbieten* solcher Päckchen hinausgehen müsste). Diese Päckchen sind aber kaum geeignet, um Kindern das Nutzen von Nachbaraufgaben als *Ableitungsstrategien* nahe zu bringen. Denn um etwa die Aufgabe 3+4 zu lösen, wäre es zwar vorteilhaft, auf das (in der Regel schon früh automatisierte) 3+3 zurückzugreifen. Ein mit 3+1 beginnendes, mit 3+2 fortgesetztes und über 3+3 bis 3+4 weitergeführtes "Addieren in kleinen Schritten" (vgl. BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2005a, S. 60) wäre aber rechenökonomisch sogar weniger vorteilhaft, als die Aufgabe 3+4 gleich durch Weiterzählen ("vier, fünf, sechs, sieben") zu lösen. Kinder werden im "Zahlen-Zug 1" aber nie vor die Aufgabe gestellt, aus einer bereits automatisierten "einfachen" Aufgabe die (vielleicht noch schwerere) Nachbaraufgabe *gezielt* abzuleiten (wie dies etwa im "Zahlenbuch 1" geschieht, vgl. etwa WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 50). Dazu passt, dass die Verdoppelungsaufgaben, welche sich in besonderer Weise als Basis für ein solches gezieltes Ableiten von Nachbaraufgaben eignen würden (vgl. Kap. 2.10.5), im "Zahlen-Zug 1" erst sehr spät zum Gegenstand gezielter Betrachtung gemacht werden (BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2004b, S. 70; gemäß BUBLAT, FÜRNSTAHL & HÖNISCH 2001, S. 5 ist diese Schulbuchseite für die 28. bis 29. Schulwoche vorgesehen). Und auch dort ist zwar das Verdoppeln, *nicht* aber die Strategie "Verdoppeln plus 1" Thema.

Zusammenfassung:
Im "Zahlen-Zug 1" werden die Zahlen bis 10 zwar konsequent mit Fünfer-Struktur dargestellt. Es wird aber nicht in erkennbarer Weise auch darauf hingearbeitet, dass diese Struktur von den Kindern bewusst wahrgenommen und in weiterer Folge für nicht-zählendes Rechnen genutzt wird. Operative Zusammenhänge werden im Schulbuch zwar durchgängig behandelt, und das Autorenteam weist im Lehrerband auch darauf hin, dass operative Zusammenhänge auf der Basis von "Stützaufgaben" auch als "Rechenhilfe" von Bedeutung seien. Die Schulbuchseiten sind aber nicht dafür geeignet (und auch erkennbar gar nicht dafür konzipiert), Kinder darin zu unterstützen, *Ableitungsstrategien* zu entwickeln, also operative Zusammenhänge *gezielt* zum Ableiten von "schweren" aus "einfachen" Aufgaben zu nützen. Auch im Lehrerband finden sich *keine* konkreten Hinweise darauf, wie eine solche Unterstützung im Unterricht organisiert werden könnte. Überhaupt werden bezüglich der anzustrebenden Rechenstrategien im Lehrerband keine eindeutigen Aussagen getroffen. Es finden sich zwar eine Reihe von Hinweisen, die vermuten lassen, dass das Autorenteam das Überwinden zählender Strategien im Laufe des ersten Schuljahres für erstrebenswert erachtet. Dies wird aber an keiner Stelle explizit ausgesprochen, noch wird in irgendeiner Weise auf die Nachteile aufmerksam gemacht, die Kindern bei Verfestigung von Zählstrategien drohen.

7.1.2.3 Analyse von "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1"

Wie erwähnt, handelt es sich bei diesen beiden Büchern um zwei im Wesentlichen inhaltsgleiche Varianten derselben Grundkonzeption (vgl. Kap. 6.2). Sie werden an dieser Stelle daher gemeinsam behandelt. Zitiert wird in der Regel aus "Mein erstes Mathematikbuch", welches die Vorlage für "Matheblitz 1" war. Auf letzteres wird nur in den wenigen Punkten gesondert eingegangen, in denen es von seiner Vorlage abweicht.

In den "Begleitheften" zu beiden Unterrichtswerken findet sich nicht der geringste Hinweis darauf, dass die Ablösung von zählenden Rechenstrategien erstrebenswert sei, und an keiner Stelle wird deutlich gemacht, dass das jeweilige Lehrwerk bei dieser Ablösung Unterstützung bieten wolle. Eher trifft das Gegenteil zu: Addieren wird sowohl im Begleitheft als auch in den Kopf- und Fußzeilen des Schulbuchs immer wieder als "Zuzählen" bezeichnet, Subtrahieren ebenso häufig als "Wegzählen". Dass es sich dabei nicht nur um eine *sprachliche* Ungenauigkeit handelt, dafür gibt es eine Vielzahl von Hinweisen:

So sind die Schulbuchseiten voll mit Aufgabenpäckchen, die gemäß Fußzeile "mit Hilfe von" Abbildungen gelöst werden sollen. Diese Abbildungen sind mehrheitlich unstrukturiert, sie *können* also (sofern sie tatsächlich als Lösungshilfe benützt werden) gar nicht anders verwendet werden denn als *Zähl*hilfe. Typische Beispiele hierfür bieten etwa EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001a, S. 58; S. 60; S. 67-70; S. 72; S. 78ff; S. 85f; S. 88; S. 93.

Weiters soll dem Begleitheft zufolge im Klassenunterricht das "Hantieren mit konkretem Material" der Arbeit mit dem Schulbuch vorangehen (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 2). Im Begleitheft finden sich dazu zahlreiche konkrete Anregungen, bezogen jeweils auf einzelne Schulbuchseiten (a.a.O., S. 20-60). Auch dabei kommen *fast ausschließlich unstrukturierte Materialien* zum Einsatz (Einerwürfel, Gegenstände des Alltags; zum Zahlenstrahl siehe weiter unten). An keiner Stelle wird darauf hingewiesen, dass es wichtig sei, auf eine Strukturierung dieser Materialien und in weiterer Folge auf eine strukturierte Zahlerfassung hinzuarbeiten. Dazu passt, dass die "Kraft der Fünf" in beiden Lehrwerken *kein Thema* ist – sieht man davon ab, dass bei der Einführung der Zahlen acht und neun neben zahlreichen unstrukturierten Zahldarstellungen auch jeweils genau *eine* Abbildung der Fingerdarstellungen dieser Zahlen zu finden und die Zahlen von sechs bis zehn auf genau *einer* Schulbuchseite (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001b, S. 3) als Stangen aus farblich unterschiedenen 5+x Würfeln dargestellt sind – eine Darstellung, die im übrigen Buch nicht wieder aufgegriffen wird.

Das "Hantieren mit unstrukturiertem Material" für sich genommen kann aber allenfalls einen Beitrag zur Entwicklung und Festigung des *Operationsverständnisses* leisten. Wenn es dagegen um die Entwicklung von nicht-zählenden *Lösungsstrategien* geht, dann ist, wie bereits ausgeführt, selbst das Hantieren mit *strukturiertem* Material nicht hinreichend (s. Kap. 7.1.2.1).

Das gilt aber umso mehr noch für das Hantieren mit *unstrukturiertem* Material, das ja bei Zahlen größer als vier oder fünf nur noch eine zählende Anzahlbestimmung erlaubt. Die Autorenteams beider Bücher berufen sich bei ihren Empfehlungen auf die "operative Methode" nach PIAGET, "der Denken als Verinnerlichung des Handelns" sieht (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 2). Sie übersehen offenbar, dass die Betonung dabei auf *Verinnerlichung* liegt: Selbst wenn die Verinnerlichung gelingt (wozu Reflexion erforderlich ist!), kann wohl nur das verinnerlicht werden, was zuvor *äußerlich* war (vgl. SCHIPPER 2003b, S. 222f, s.a. Kap. 7.1.2.1). Sofern daher Kinder mit Material stets nur zählend hantieren, können sie *aus diesen Materialhandlungen heraus* auch nur zählende Rechenstrategien verinnerlichen.

Doch zählendes Rechnen wird von den Autorenteams beider Bücher offenbar nicht einfach unbedachter Weise hingenommen, sondern tatsächlich explizit *angestrebt*. Das machen die Ausführungen im Begleitheft zum Gebrauch des Zahlenstrahls deutlich. Der durchnummerierte Zahlenstrahl wird in beiden Schulbüchern bereits im "Zahlenraum 4" und ab da häufig *als Lösungshilfe* den (mehrheitlich "grauen"; vgl. Kap. 7.4) Übungspäckchen beigestellt wird:

> *"Analog dem Impulsbild [auf welchem ein Junge die Markierungen eines Zahlenstrahls abschreitet; Anm. M.G.] wird die Operation als Bewegungsvorgang in der Klasse dargestellt. [...] In weiterer Folge entsteht im vorstellenden Denken des Kindes die Addition als ein Vorwärtsschreiten, die Subtraktion in der Folge als ein Rückwärtsschreiten auf dem Zahlenstrahl"* (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 6).

Da sich die Autorenteams nicht weiter darüber äußern, kann über ihre Beweggründe für diese – vor dem Hintergrund der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik doch erstaunliche – Haltung gegenüber dem zählenden Rechnen nur spekuliert werden. Es scheint aber, dass sie die Frage, mit welchen *Strategien* Kinder Aufgaben lösen, zumindest im ersten Schuljahr einfach *nicht für wichtig* halten – so als ob diese Frage sich im weiteren Verlauf des kindlichen Lernens von selbst in Wohlgefallen auflöse (was sie ja bei all jenen Kindern, die ohne gezielte Förderung das zählende Rechnen hinter sich lassen, auch tatsächlich tut; bei vielen anderen aber, wie in Kap. 2 dargestellt, auch bis in die Sekundarstufe hinein nicht).

Was die Autorenteams beider Schulbücher hingegen sehr wohl als *wichtig* erkennen und daher in den Begleitheften mit Nachdruck als Ziel des Unterrichts herausstreichen, ist "aktiv-praktisches Tun, [..] Verstehen des Operationsgefüges, [..] Beziehungsdenken und Erkennen von Zusammenhängen" (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 2). Dass nun aber "aktiv-praktisches Tun" nicht automatisch zu einem "Verstehen des Operationsgefüges" führt, wurde bereits mehrfach ausgeführt. Entscheidend sind die Qualität dieses Tuns und vor allem die Qualität der Reflexion darüber. Welche Aktivitäten also werden angeregt, um Kindern das "Beziehungsdenken und Erkennen von Zusammenhängen" zu erleichtern?

Die Autorenteams nehmen für ihre Bücher in Anspruch, dass die "Einführung der Zahlen nicht durch isolierte Behandlung" erfolge, sondern "sehr bald [..] die Beziehungen der Zahlen zueinander hergestellt" würden. Tatsächlich macht es die extrem kleinschrittige Einführung der Zahlen, die in beiden Büchern gewählt wird (s. Kap. 7.1), den Kindern wohl eher *schwerer*, den Zahlenraum 10 als Beziehungsgefüge zu verstehen (vgl. Kap. 4.4). Aber natürlich kann man versuchen, Kinder auch im "Zahlenraum 5", dann "Zahlenraum 6" usw. dabei zu unterstützen, Zahlen in ihren Beziehungen zueinander zu verstehen, also als "Zusammensetzungen aus anderen Zahlen". Was aber wird ihnen in "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" dafür geboten? Wie bereits erwähnt, überwiegen in beiden Büchern *unstrukturierte Zahldarstellungen.* Aber auch bei den Darstellungen, die durch ihre Struktur eine quasi-simultane Anzahlerfassung erlauben, wird diese Struktur im Buch nicht thematisiert. Auch das Begleitheft regt an keiner Stelle dazu an, quasi-simultanes Erfassen strukturierter Zahldarstellungen zum Thema des Unterrichts zu machen und in weiterer Folge zu üben.

Dem Zerlegen von Zahlen sind in beiden Schulbüchern zahlreiche Aufgabenpäckchen gewidmet. Dabei handelt es mehrheitlich um "graue Päckchen" (vgl. Kap. 7.1.4). Auch die seltenen "schönen Zerlegungspäckchen" (etwa EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001a, S. 30, Aufgabe 1; teilweise auch S. 67, Aufgabe 1) werden *nicht* dafür genutzt, um das Prinzip der "gegensinnigen Veränderung" zum Gegenstand der Erarbeitung zu machen. Die einzelnen Zerlegungsmöglichkeiten werden also nie in ihrem wechselseitigen operativen Zusammenhang behandelt. Das schließt nicht aus, dass Kinder, die wiederholt solche grauen Päckchen abarbeiten, dabei zu einem "Beziehungsdenken und Erkennen von Zusammenhängen" gelangen; aber sie werden durch solche Päckchen darin wohl kaum wirkungsvoll unterstützt.

In den Begleitheften wird für beide Lehrwerke "operatives Vorgehen bei der Entwicklung von Rechenoperationen" beansprucht (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 6). Laut Begleitheft werden in den Schulbüchern "reichhaltige Beziehungsgeflechte zwischen den einzelnen Operationen hergestellt", etwa jene zwischen "Ausgangsoperation" und "Umkehroperation", "Ausgangsoperation" und "Tauschaufgabe" oder auch "Ausgangsoperation" und "Nachbaraufgabe" (a.a.O., S.6). Tatsächlich finden sich in den Schulbüchern neben einer deutlichen Mehrheit "grauer Päckchen" (vgl. Kap. 7.4) auch einzelne Übungspäckchen, in denen erkennbar Tauschaufgaben, Umkehraufgaben, seltener auch Nachbaraufgaben thematisiert werden. Die dabei gewählten Veranschaulichungen sind oft fragwürdig. So werden etwa zur Veranschaulichung der Kommutativität von 6+3 und 3+6 zwei *unterschiedliche* Darstellungen der Zahl neun (einmal mit sechs roten und drei blauen, daneben mit drei roten und sechs blauen Würfeln) *nebeneinander* gestellt (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 85). Die *Identität* von 6+3 und 3+6 wird auf diese Weise gerade *nicht* dargestellt. Adäquater wäre wohl eine Veranschaulichung, bei der 6+3 und 3+6 als *nur unterschiedliche Sichtweisen* derselben zweifärbigen Darstellung interpretiert werden können (wie etwa bei MAIER 2004, S. 38).

Der *wesentlichere* Mangel in der Umsetzung des "operativen Prinzips" in "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" liegt aber darin, dass (ähnlich wie im "Zahlen-Zug 1", vgl. Kap. 7.1.2.2) operative Zusammenhänge zwar (gelegentlich) in "schönen Päckchen" *vorkommen*, aber nur äußerst selten auch erkennbar zum *eigentlichen Inhalt* gemacht werden. An *keiner Stelle* des Schulbuches findet sich ein Hinweis darauf, dass die Kinder ein "schönes Päckchen" nicht einfach Aufgabe für Aufgabe abarbeiten, sondern über die zu Grunde liegende operative Gesetzmäßigkeit auch nachdenken und diskutieren sollten. Ohne solches Nachdenken und Diskutieren ist aber zu erwarten, dass viele Kinder die "schönen" Päckchen einer Übungsseite ohne größeren Erkenntnisgewinn abarbeiten als die (auf den meisten Seiten deutlich überwiegenden) "grauen" Päckchen daneben. Die Begleithefte machen zwar darauf aufmerksam, dass "die methodische Kompetenz beim Lehrer, nicht beim Buch" liege und "die soziale Gestaltung des Unterrichtes" durch den Lehrer selbst zu bestimmen sei (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 2). Die Qualität eines Schulbuches kann aber wohl dennoch unter anderem auch daran gemessen werden, ob es (durch die Gestaltung der Schulbuchseiten wie auch durch explizite Anregungen im Begleitheft) deutlich macht, dass erst das kommunikative Herausarbeiten der operativen Struktur von "schönen Päckchen" deren eigentlichen Wert ausmacht (vgl. Kap. 4.4).

Zusammenfassung:
In den Lehrwerken "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" wird an keiner Stelle erkennbar darauf hingearbeitet, dass Kinder Anzahlen, die über den engen Bereich der Simultanerfassung hinausgehen, quasi-simultan (also im Wissen um Zahlstrukturen) erfassen. Zahlen werden als "Zusammensetzungen aus anderen Zahlen" insofern thematisiert, als dem Zahlenzerlegen zahlreiche Übungspäckchen gewidmet werden. Diese sind fast ausschließlich "grau", der operative Zusammenhang der einzelnen Zerlegungen einer Zahl (das Prinzip der "gegensinnigen Veränderung" ist nicht Thema. Andere operative Zusammenhänge (Tauschaufgaben, Nachbaraufgaben, Umkehraufgaben) *kommen* zwar in jedem der kleinschrittig eingeführten "Zahlenräume" auf zahlreichen Schulbuchseiten immer wieder aufs Neue *vor*. Es wird aber im Schulbuch und durch die Anregungen des Begleitheftes wenig dazu beigetragen, dass diese operativen Zusammenhänge von den Kindern auch tatsächlich wahrgenommen und reflektiert werden und nicht in der *daneben* dominierenden "Flut grauer Päckchen und bunter Hunde" (WITTMANN 1994) untergehen. Das *gezielte* Anwenden von operativen Zusammenhängen zum Ableiten von noch nicht automatisierten Aufgaben ist ebenso wenig Thema wie etwa im "Zahlen-Zug 1". Anders als dort wird aber in "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" nicht einmal angedeutet, dass und wie es im Laufe des ersten Schuljahres zu einer Automatisierung von Grundaufgaben kommen sollte. Vielmehr finden sich in den Begleitheften beider Schulbücher deutliche Hinweise darauf, dass die Autorenteams zählendes Rechnen auch noch am Ende des ersten Schuljahres nicht nur für unbedenklich halten, sondern sogar für eine Lösungsstrategie, die (etwa durch entsprechenden Einsatz des Zahlenstrahls) von der Lehrkraft aktiv gefördert werden solle.

7.1.2.4 Analyse von "Funkelsteine 1 Mathematik"

"Funkelsteine 1 Mathematik" ist das einzige der hier analysierten Schulbücher, in dessen Lehrerband die Automatisierung der additiven Grundaufgaben klar und unmissverständlich als eines der Ziele des frühen Mathematikunterrichts genannt wird:

> *"Das sichere Beherrschen des kleinen Einspluseins (Addition und Subtraktion) ist eine Voraussetzung für das Rechnen im größeren Zahlenraum. Die Aufgaben müssen automatisiert, d.h. sicher und rasch aus dem Gedächtnis abrufbar sein"* (FRIEDL 2005, S. 19).

Die im Lehrerband formulierten "Gedanken zum Kopfrechnen" lassen allerdings viele Fragen offen: Die Autorin rät zu regelmäßigem Kopfrechentraining, dabei würden Kinder mit "Teilleistungsschwächen im Bereich der auditiven Wahrnehmung" aber "die *Visualisierung* als Gedächtnisstütze" benötigen, andernfalls würde ihnen das Üben nicht weiterhelfen (a.a.O., S. 19, Hervorhebung im Original). Unter Visualisierung versteht FRIEDL nun aber nicht wie etwa GERSTER (2005, S. 214) die Fähigkeit der Kinder, sich strukturierte Zahldarstellungen vorzustellen und mittels dieser Vorstellung Additionen und Subtraktionen im Teile-Ganzes-Konzept zu lösen. Sondern Visualisierung meint hier lediglich, dass die beim Kopfrechnen zu lösenden Aufgaben als Ziffernterm "an der Tafel bzw. auf einer Folie" präsentiert werden sollten.

Damit bleibt aber (anders als bei GERSTER) völlig unklar, mit welcher Strategie die Lösung der Aufgaben beim Üben erfolgen solle; denn der Ziffernterm wie beispielsweise "3+4" enthält ja (anders als die Vorstellung von drei und vier Punkten im Zehnerfeld) keinerlei Hinweis auf die Lösung "7". Sofern 3+4=7 bereits im Langzeitgedächtnis gespeichert ist *und* das Kind zu jener *Teilgruppe* von SchülerInnen gehört, die sich beim Abrufen der additiven Grundaufgaben diese als Ziffergleichungen vorstellen (vgl. HANISCH 1990, S. 38-41), kann der visuelle Reiz des Ziffernterms 3+4 vielleicht eine *Unterstützung beim Abruf* darstellen. Wenn aber ein Kind diesen Zahlensatz *noch nicht* automatisiert hat und die Aufgabe beim regelmäßigen Kopfrechentraining regelmäßig aufs Neue durch Zählstrategien löst, dann trägt diese Art des Trainings wohl eher zur Verfestigung von Zählstrategien bei als zur angestrebten Automatisierung (vgl. Kap. 2.9.3). Dass aber gerade Kinder mit Übungsbedarf viele Grundaufgaben bei dieser Übungsform immer wieder nur zählend rechnen, ist unvermeidlich, solange sie nicht über die Alternative des Ableitens aus bereits auswendig gewussten Aufgaben (oder die Alternative des Ableitens aus einer im GERSTERschen Sinne "visualisierten", also *gewussten* Zahlstruktur) verfügen.

Alternativen zum zählenden Rechnen – abgesehen von der Automatisierung – sind aber in "Funkelsteine 1 Mathematik" an keiner Stelle Thema:

Das *Ableiten* auf Grundlage operativer Zusammenhänge wird im gesamten Lehrerband nicht behandelt. Anders als in den Lehrerbänden der bislang analysierten Schulbücher findet sich bei FRIEDL nicht einmal ein Hinweis darauf, dass es wichtig sei, auf Einsicht in operative Zusammenhänge (die konzeptuelle Grundlage des Ableitens) hinzuarbeiten.

Zahlstrukturen sind bei FRIEDL nur insofern Thema, als sie begleitend zum Schulbuch als Arbeitsmaterial einen 30er-Rechenrahmen empfiehlt, mit je 10 Perlen auf einer Stange, davon je fünf in einer Farbe. Sie weist auch zu Recht darauf hin, dass diese "deutliche Fünfer- bzw. Zehnergliederung [..] eine quasi-simultane Auffassung der Zahlen von 5 bis 10" *ermöglicht* (FRIEDL 2005, S. 3). Wie bereits mehrfach ausgeführt, bedarf es aber zumindest bei manchen Kindern gezielter Unterrichtsmaßnahmen, damit aus dieser *Möglichkeit* auch *Wirklichkeit* wird, damit diese Kinder also auch tatsächlich zur quasi-simultanen Anzahlerfassung übergehen. Und es bedarf (zumindest bei manchen Kindern) weiterer gezielter Maßnahmen, damit die quasi-simultan erfassbaren Zahlstrukturen auch für nicht-zählendes Rechnen genutzt werden (vgl. Kap. 4.2). Von solchen Unterrichtsmaßnahmen, die über das bloße *Anbieten* eines strukturierten Arbeitsmaterials hinausgehen, ist aber im gesamten Lehrerband nicht die Rede.

Die Autorin weist, auch dies zu Recht, darauf hin, dass "der Rechenrahmen [..] zählendes Rechnen [ermöglicht], gleichzeitig aber auch die Ablösung vom zählenden Rechnen" (a.a.O., S. 3). Sie meint dies aber offenbar nicht als *Warnung* davor, sich darauf zu verlassen, dass alleine schon die *Verwendung des Rechenrahmens* die Ablösung vom zählenden Rechnen *automatisch bewirke*. Es folgen jedenfalls keine Ausführungen dazu, worauf zu achten sei und welche Aktivitäten im Unterricht bzw. in der begleitenden Förderung notwendig seien, damit der Rechenrahmen *nicht* von manchen Kindern nur als Zählhilfe verwendet wird (vgl. dazu ausführlich SCHIPPER 2003b). Sondern FRIEDL scheint es gerade für einen *Vorteil* des Rechenrahmens zu halten, dass er eben auch genau so verwendet werden kann: *als bloße Zählhilfe*. Die Frage, wie dann aber ein Kind, welches den Rechenrahmen immer nur zählend verwendet, zur Ablösung vom zählenden Rechnen kommen solle, wird jedenfalls im Lehrerband gar nicht gestellt und daher auch nicht beantwortet.

Wie weit sind nun aber die Seiten der *Schülerbücher* ("Arbeitsheft" und "Arbeitsbuch") dazu geeignet, die Ablösung vom zählenden Rechnen zu erleichtern?

Die Zahlen von sechs bis zehn werden, wie in Kap. 7.1 dargestellt, kleinschrittig "eingeführt". Auf der jeweils ersten einer Zahl gewidmeten Arbeitsbuchseite ist diese Zahl jeweils in drei verschiedenen Varianten mit klar erkennbarer Fünfergliederung dargestellt: Als Kugeldarstellung am Rechenrahmen, als Fingerdarstellung und als Summe zweier Würfelbilder, wobei einer der beiden Würfel jeweils fünf Punkte zeigt (vgl. FRIEDL 2004a, S. 10; S. 20; S. 24; S. 28; S. 31). Diese strukturierten Darstellungen werden aber in der weiteren Behandlung dieser Zahlen gar nicht aufgegriffen. An keiner Stelle wird die Fünferstruktur als "Kraft" deutlich gemacht, die zur nicht-zählenden Lösung von Grundaufgaben eingesetzt werden kann. Stattdessen wird wiederholt dazu aufgefordert, Subtraktionen durch Wegstreichen einzelner Punkte an unstrukturiert-linearen Punktdarstellungen darzustellen (z.B. FRIEDL 2004a, S. 22, Aufgabe 4; S. 25, Aufgabe 3; FRIEDL 2004b, S. 24, Aufgabe 4). Ergänzungen sollen gelöst werden durch Dazu-Zeichnen von einzelnen Punkten in gleichfalls unstrukturiert-linearen Darstellungen (z.B. FRIEDL 2004b, S. 25, Aufgabe 2; S. 29, Aufgabe 2). Sofern Kinder beim Lösen dieser Aufgaben tatsächlich das eingeforderte Streichen und Zeichnen durchführen, werden sie also zu zählendem Vorgehen geradezu genötigt.

Arbeitsbuch und Arbeitsheft bieten zwar zahlreiche Übungen zum Zerlegen von Zahlen. Doch nur ein einziges Mal (relativ spät, bei "Einführung" der Zahl zehn, FRIEDL 2004b, S. 34) wird dieses Zerlegen auch *systematisch* durchgeführt, sodass also an Hand dieses "schönen Zerlegungspäckchens" das Prinzip der "gegensinnigen Veränderung" im Unterricht thematisiert werden könnte. Dass dies auch wirklich geschehen und die gegensinnige Veränderung in weiterer Folge als Grundlage nicht-zählender Ableitungen genutzt werden sollte, wird im Schulbuch aber auch an dieser Stelle nicht angeregt (auch nicht in den "Fußnote[n] mit Lernzielen", die es der Lehrkraft laut Lehrerband ermöglichen sollen, das Schulbuch "ohne intensive Vorbereitung" einzusetzen; die Autorin hält das offenbar für einen Vorzug ihres Buches, vgl. FRIEDL 2005, S. 1). Alle anderen Übungen zum Zahlenzerlegen sind ohnedies "graue Päckchen" und daher von vorneherein ungeeignet, um das Prinzip der gegensinnigen Veränderung und damit den operativen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Zerlegungen zum Thema zu machen.

Die überwiegende Mehrzahl der Übungspäckchen in "Funkelsteine 1 Mathematik" ist *nicht* operativ strukturiert (vgl. Kap. 7.1.4). Es finden sich im "Arbeitsbuch" genau jeweils *eine* Seite, auf der gebündelt "Tauschaufgaben", und *eine* Seite, auf der gebündelt "Umkehraufgaben" behandelt werden (FRIEDL 2004a, S. 26 bzw. S. 30). Dazu kommt noch genau *eine* Seite im "Arbeitsheft" mit "Verwandten Aufgaben", worunter Tausch- und Umkehraufgaben verstanden werden (FRIEDL 2004b, S. 30). Auf diesen drei Seiten wird Kindern nach einer Reihe von Musteraufgaben immerhin abverlangt, zu einer vorgegebenen Aufgabe selbst die passende Tauschaufgabe bzw. selbst die passende Umkehraufgabe zu finden. Hier wird also, wenn auch nicht unbedingt *Einsicht* in den zu Grunde liegenden operativen *Zusammenhang*, so doch zumindest die eigenständige *Reproduktion eines Aufgabenmusters* abverlangt; eine Leistung, die Kinder sonst in der gesamten Behandlung des Zahlenraums bis 10 in diesem Schulbuch nicht erbringen müssen. Es bleibt aber eben bei diesen drei Buchseiten: Der Gedanke der Tausch- und Umkehraufgaben wird in der weiteren Behandlung des Zahlenraums bis 10 auch in anderer Form nicht mehr aufgegriffen. Was folgt (und was vorangeht) ist mit wenigen Ausnahmen eine "Flut der grauen Päckchen und bunten Hunde" (WITTMANN 1994).

Die wenigen Ausnahmen bilden ganz vereinzelte Übungspäckchen, in denen Nachbaraufgaben vorkommen (etwa FRIEDL 2004a, S. 16, Aufgabe 4; S. 18, Aufgabe 4; FRIEDL 2004b, S. 28, Aufgabe 4; S. 33; Aufgabe 4). An *keiner Stelle* wird aber das *Prinzip* der Nachbaraufgabe (Kovarianz bei der Addition, Kovarianz oder Kompensation bei der Subtraktion) thematisiert oder etwa angeregt, dass Kinder über den vorliegenden operativen Zusammenhang reflektieren und miteinander kommunizieren sollten. Vielmehr sind diese wenigen schönen Päckchen, zwischen all den grauen Päckchen und bunten Hunden, *einfach auch da*, und die "Fußnote mit Lernziel" (siehe oben) hält dazu nur fest: "Plusaufgaben lösen" (etwa FRIEDL 2004a, S. 16) bzw. "Minusaufgaben lösen" (etwa FRIEDL 2004a, S. 18; zur einzigen Ausnahme vgl. Kap.

7.1.5). Dass es aber für zumindest manche Kinder zum Gewinnen von Einsicht in operative Zusammenhänge (und erst recht zum Entwickeln von Ableitungsstrategien) nicht ausreicht, Aufgaben zu "lösen", selbst wenn sie dies im Rahmen eines schönen Päckchens tun, wurde bereits hinreichend dargestellt (vgl. vor allem Kap. 4.2 und 4.4).

Zusammenfassung:
Das Lehrwerk "Funkelsteine 1 Mathematik" erklärt zwar die Automatisierung der additiven Grundaufgaben explizit zu einem frühen Ziel im Mathematikunterricht. Die Empfehlungen, die die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik zur Erreichung dieser Ziele ausspricht, werden aber weder im Lehrerband noch in den Schülerbänden angemessen berücksichtigt; in vielen Punkten wird diesen Empfehlungen sogar deutlich widersprochen. So werden die Zahlen bis zehn *kleinschrittig* (vgl. Kap. 7.1) eingeführt, sie werden *nicht konsequent strukturiert* dargestellt, und es wird nicht erkennbar darauf hingearbeitet, dass Kinder strukturiert dargestellte Zahlen auch tatsächlich *quasi-simultan* erfassen, die darin enthaltenen Zahlzusammensetzungen erkennen und in weiterer Folge für nicht-zählendes Rechnen nutzen. Beim Zerlegen von Zahlen wird auf das Prinzip der *gegensinnigen Veränderung* an keiner Stelle eingegangen. *Tausch- und Umkehraufgaben* kommen auf insgesamt drei Seiten zwar vor, werden aber in der weiteren Behandlung des Zahlenraums bis 10 nicht mehr aufgegriffen. Das Prinzip der *Nachbaraufgabe* ist an keiner Stelle Thema, Additionen und Subtraktionen werden fast durchwegs in Form von *"grauen Päckchen"* und *"bunten Hunden"* geübt (vgl. Kap. 7.1.4). Eine Erarbeitung von *Ableitungsstrategien* (abgesehen vom "Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang", s. Kap. 7.1.3) findet nicht statt.

7.1.3 Zur Behandlung des Zehnerübergangs

Bezüglich der *Ausführlichkeit*, mit der der Zehnerübergang behandelt wird, ergibt sich eine deutliche Zweiteilung innerhalb der fünf analysierten Unterrichtswerke:

"Zahlenreise 1", "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" erachten Aufgaben mit Zehnerübergang für eine *tendenzielle Überforderung* von ErstklässlerInnen. So heißt es etwa im Begleitheft zu "Mein erstes Mathematikbuch": "Die Einführung der Zehnerüberschreitung in ihrer gesamten operativen Komplexität scheint auf der 1. Schulstufe etwas verfrüht zu sein" (EDER, SCHÖN & JAROLIM 2001c, S. 7; wortgleich AG MATHEMATIK 2003e, S. 6; ähnlich BRUNNER u.a. 2005, S. 17). Dennoch wird die Zehnerüberschreitung in diesen drei Schulbüchern behandelt; dies sei aber lediglich als "Vorbereitung" auf eine "vertiefte" Behandlung im zweiten Schuljahr zu verstehen (vgl. BRUNNER u.a. 2005, S. 44; EDER, SCHÖN & JAROLIM 2001c, S. 7). Tatsächlich kommen Aufgaben mit Zehnerübergang in beiden Schulbüchern erst spät vor: In der "Zahlenreise 1" sind sie laut Jahresplanung das vorletzte Thema, deutlich nach

Erweiterung des Zahlenraums bis 30 und dem Üben von "Analogierechnungen bis 30" (vgl. BRUNNER u.a. 2005, S. 51). Im "Erarbeitungsteil" sind dafür nur zwei von 87 Seiten vorgesehen (2,3 Prozent), im "Übungsteil" sechs Seiten von 137 (4,4 Prozent). In der Jahresplanung zu "Mein erstes Mathematikbuch" wird das "Über- und Unterschreiten des ersten Zehners" für die 31. von 39 Schulwochen vorgesehen und danach nicht mehr aufgegriffen (EDER, SCHÖN & JAROLIM 2001c, S. 17). Im Schulbuch sind diesem Thema nur drei von 206 Seiten (1,5 Prozent) gewidmet; "Matheblitz 1" weicht auch in dieser Frage kaum von seiner Vorlage ab.

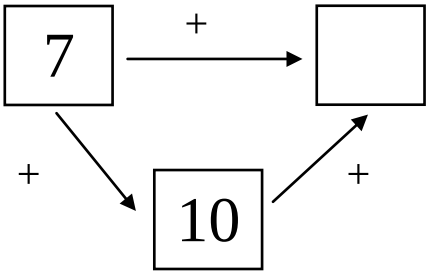
"Zahlen-Zug 1" und "Funkelsteine 1 Mathematik" teilen diese Zurückhaltung in der Behandlung des Zehnerübergangs *nicht*. In den Lehrerbänden zu beiden Büchern wird auf den Zehnerübergang nicht näher eingegangen, mögliche Schwierigkeiten von ErstklässlerInnen mit dem Zehnerübergang finden keine Erwähnung. Die Erarbeitung erfolgt im "Zahlen-Zug 1" gemäß Jahresplanung in der 22. bis 27. Schulwoche, bald nach Beginn des zweiten Schulhalbjahres, in "Funkelsteine 1 Mathematik" ganz ähnlich in der 25. bis 27. Schulwoche. "Zahlen-Zug 1" widmet Aufgaben mit Zehnerübergang 26 von 186 Seiten im Hauptbuch (14 Prozent) und 4 von 39 Seiten im "Arbeitsheft" (10,3 Prozent). In "Funkelsteine 1 Mathematik" sind es 6 von 93 Seiten im "Arbeitsbuch" (6,5 Prozent) und 8 von 103 Seiten im "Arbeitsheft" (7,8 Prozent). Gemessen am Anteil der Aufgabenseiten wird dem Zehnerübergang in "Zahlen-Zug 1" also deutlich mehr Aufmerksamkeit gewidmet als in "Funkelsteine 1 Mathematik", in beiden Schulbüchern aber wieder deutlich mehr als in den drei anderen Lehrwerken, die sich dazu bekennen, dieses Thema im ersten Schuljahr nur "vorbereitend" behandeln zu wollen.

Inhaltlich betrachtet, löst sich diese Zweiteilung weitgehend auf. Denn *alle fünf Schulbücher* zielen *letztlich* auf *nur eine* Strategie für den Zehnerübergang ab, nämlich das Teilschrittverfahren. Dieses wird in drei der fünf Schulbücher zwar eben nur "vorbereitend" behandelt (zur Qualität dieser "Vorbereitung" siehe weiter unten). Die "vertiefte Behandlung" in den für die zweite Schulstufe vorgesehenen Bänden derselben Schulbuchreihen gilt dann aber gleichfalls *ausschließlich* dem Teilschrittverfahren (vgl. BRUNNER u.a. 2004d, S. 17ff, S. 51, S. 57; EDER, SCHÖN & JAROLIM 2001d, S. 2-10; AG Mathematik 2003f, S. 2-9).

7.1.3.1 Die Behandlung des Zehnerübergangs in "Zahlen-Zug 1"

In "Zahlen-Zug 1" sind der *Erarbeitung* des Rechnens "über den Zehner" die Seiten 36 und 37, des Rechnens "unter den Zehner" die Seiten 42 und 43 von "Teil B" (BUBLAT, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2005b) gewidmet. Dabei wird in ikonischen und symbolischen Darstellungen *ausschließlich* das Teilschrittverfahren vorgestellt. Die Kinder sind bei *sämtlichen* Aufgaben auf diesen vier Seiten angehalten, in der "Operatordarstellung" (vgl. Abbildung 6) die Zerlegung des zweiten Summanden bzw. Subtrahenden im Sinne des Teilschrittverfahrens auch wirklich aufzuschreiben.

Abbildung 6: Operatordarstellung des Teilschrittverfahrens, nach Bublath, Fürnstahl, Hönisch u.a. 2005b, S. 36



Bei den weiteren Übungsaufgaben (auf den Seiten 39-41 bzw. 44-53) ist dann jeweils nur noch das Ergebnis gefragt. Die Zerlegung des zweiten Summanden bzw. Subtrahenden im Sinne des Teilschrittverfahrens wird dann aber erneut explizit eingefordert in einer Reihe von Aufgaben auf den Seiten 54 bis 56. In der (bemerkenswert spät erfolgenden) Behandlung des Verdoppelns (Seite 70 von Teil B) findet sich unvermittelt eine Darstellung, die geeignet wäre, das Verdoppeln im Zahlenraum bis 20 mit der "Kraft der Fünf" zu lösen (zwei Sechser mit Fünfergliederung sind auf einem Tafelbild *unter einander* angeordnet). Dies wird aber auf der Schulbuchseite nicht explizit aufgegriffen, und auch im Lehrerband findet sich keine entsprechende Anregung.

7.1.3.2 Die Behandlung des Zehnerübergangs in "Funkelsteine 1 Mathematik"

In "Funkelsteine 1 Mathematik" sind auf den beiden Seiten, die der Erarbeitung des Zehnerübergangs gewidmet sind (FRIEDL 2004a, S. 68f), Aufgaben einerseits am Zwanziger-Rechenrahmen, andererseits im Zwanzigerfeld dargestellt. Mit beiden Materialien ließe sich neben dem Teilschrittverfahren zumindest auch die Zehnerüberschreitung mit der "Kraft der Fünf" unschwer demonstrieren. Das geschieht hier aber *nicht*, dargestellt wird jeweils *ausschließlich* das "Auffüllen" des Zehners (bzw. das "Wegnehmen bis zum Zehner") und das anschließende "Dazugeben (bzw. Wegnehmen) der zweiten Portion" im Sinn des Teilschrittverfahrens. Die Kinder sind in weiterer Folge bei jeweils genau einer Addition bzw. Subtraktion des "Arbeitsbuches" und bei jeweils sieben Aufgaben des "Arbeitsheftes" dazu angehalten, die beiden Teilportionen im Sinne des Teilschrittverfahrens aufzuschreiben. Bei allen weiteren Aufgaben ist nur das Ergebnis einzutragen. Auch in diesem Schulbuch wird bei der späten Behandlung des Verdoppelns (FRIEDL 2004a, S. 76f) unvermittelt eine *andere* Darstellung geboten, indem für die Verdoppelungen 6+6 und 7+7 am Zwanziger-Rechenrahmen jeweils sechs bzw. sieben Perlen (mit Fünfer-Gliederung) *unter einander* abgebildet werden, was ein Ermitteln der Gesamtzahl mit der "Kraft der Fünf" nahelegt. Auch hier wird auf diese Möglichkeit eines alternativen Zehnerübergangs aber nicht explizit eingegangen.

7.1.3.3 Die Behandlung des Zehnerübergangs in "Zahlenreise 1"

In der "Zahlenreise 1" wird angeregt, die Zehnerüberschreitung und Zehnerunterschreitung mit "Zehnerbrett" und "Zehnerstange" handelnd zu erarbeiten (vgl. BRUNNER u.a. 2005, S. 44f). So sollten beispielsweise bei der Aufgabe 8+4 die Kinder zunächst 8 Plättchen auf das Zehnerfeld legen, dann 4 Plättchen neben das Zehnerfeld. Das weitere Vorgehen wird wie folgt beschrieben:

> *"Der Zehner muss zuerst voll gemacht und anschließend* [sc. in eine volle Zehnerstange; Anmerkung M.G] *gewechselt, die Einer über dem Zehner müssen auf das Brettchen gelegt werden. Erst dann kann das Ergebnis abgelesen werden"* (a.a.O., S. 45).

Mit der Festlegung auf ein bestimmtes Material soll hier also ein Vorgehen im Sinne des Teilschrittverfahrens gleichsam "erzwungen" werden (wobei der Zwang freilich nicht im Zehnerfeld, sondern einzig in der "Bedienungsanleitung" begründet liegt). Bei der von der "Zahlenreise" zur Einführung des Teilschrittverfahrens gewählten Aufgabe 8+4 mag diese Strategie auch tatsächlich zweckmäßig sein; bei anderen Aufgaben (etwa 8+8 oder 7+9) wohl weniger. Doch es geht der "Zahlenreise" nicht um das Betrachten und Abwägen von Vor- und Nachteilen einzelner Strategien für einzelne Aufgaben. Denn alternative Strategien kommen für dieses Schulbuch überhaupt nicht in Betracht: "Der Zehner *muss* zuerst voll gemacht werden" – ein "Muss", das klar im Widerspruch zur Sache der *Mathematik* steht, der es, wie WITTMANN gerade auch im Zusammenhang mit dem Zehnerübergang deutlich macht, als "Wissenschaft von den Mustern" wesentlich immer auch um *Freiheit in der Anwendung* von Rechengesetzen geht. Nur die Beachtung der Rechengesetze ist in der Mathematik tatsächlich ein *Muss*. Doch *alle* in Kapitel 2.10.9 dargestellten nicht-zählenden Strategien des Zehnerübergangs (und nicht nur das Teilschrittverfahren) können auf Rechengesetze zurückgeführt und aus diesen abgeleitet werden (vgl. WITTMANN 2008).

Wie in Kapitel 4.5 ausgeführt, trägt aber wohl gerade die von der "Zahlenreise 1" vorgenommene Eingrenzung des Zehnerübergangs auf das quasi verpflichtend anzuwendende Teilschrittverfahren wesentlich dazu bei, dass der Zehnerübergang tatsächlich (wie von den AutorInnen der "Zahlenreise" beobachtet) "den Kindern noch große Schwierigkeiten bereitet" (BRUNNER u.a. 2005, S.17). Diese Schwierigkeiten sind also, wie KRAUTHAUSEN bemerkt, zumindest zum Teil "hausgemachte" (KRAUTHAUSEN 1995, S. 88). Gerade sie dienen der "Zahlenreise 1" nun aber zur Rechtfertigung dafür, den Zehnerübergang im ersten Schuljahr nur "in einfachster Form" vorzubereiten (BRUNNER u.a. 2005, S. 17). Tatsächlich ist jedoch das für diese "Vorbereitung" gewählte Teilschrittverfahren gerade *nicht* "einfach", sondern von allen in Frage kommenden Verfahren, "was die erforderlichen Teilleistungen betrifft, das anspruchsvollste" (KRAUTHAUSEN 1995, S. 88). Worin soll *dann* die "Einfachheit" der in der "Zahlenreise" gewählten "Form" bestehen? Offenbar vor allem darin, dass im ersten Schuljahr nur *wenige* Aufgaben mit Zehnerübergang und diese erst gegen Ende des Schuljahres gelöst werden sollen. Das ist freilich nur im Rahmen des von der "Zahlenreise" durchgängig gewählten Konzepts der "kleinen und kleinsten Schritte" (vgl. Kap. 7.1.1) überhaupt denkbar; Kinder können bei dieser Vorgabe ja im Zahlenraum bis 20 gar keine "großen Schritte" machen, sich gar nicht frei bewegen.

Weiters findet sich im Lehrerbegleitheft die Empfehlung, dass "das Addieren und Subtrahieren von 2, 3, 4, höchstens 5 [..] zur Motivation und Bewältigung dieser Aufgaben wichtig" sei (BRUNNER u.a. 2005, S. 17). "Einfach" soll der Zehnerübergang also dadurch gemacht werden, dass nur ganz bestimmte Aufgaben mit Zehnerübergang ausgewählt werden. Tatsächlich trägt aber das Addieren von "2, 3, 4, höchstens 5" nur insofern zur "Einfachheit" des Zehnerübergangs bei, als bei kleinerem Summanden das *zählende Rechnen* leichter ist. Daraus ließe sich gerade umgekehrt folgern: Wer Kindern die Vorteile nicht-zählender Strategien für den Zehnerübergang deutlich machen möchte, sollte *tunlichst keine* Aufgaben wählen, bei denen das Weiterzählen eine tatsächlich nicht unattraktive Alternative darstellt. Ob 8+4 als 8+2+2 oder als "9,10,11,12" gelöst wird, macht rechenökonomisch wenig Unterschied. Bei 8+9, das nicht-zählend als 8+2+7 (aber auch als 8+8+1 oder 8+10–1) gelöst werden kann oder aber zählend als "10,11,12,13,14,15,16,17,18", fällt dieser Vergleich schon wesentlich klarer zugunsten der nicht-zählenden Verfahren aus. Auch die Empfehlung des Lehrerbegleitheftes, nur "kleine Summanden" zu wählen, dürfte also kontraproduktiv sein, sofern jedenfalls nicht-zählendes Rechnen bei Aufgaben mit Zehnerübergang angestrebt wird. Tatsächlich hält sich aber das Autorenteam selbst schon im Übungsteil nicht mehr an die eigene Empfehlung und gibt im Rahmen grauer Päckchen sehr wohl auch zehnerüberschreitende Additionen mit einem zweiten Summanden größer als 5 vor (vgl. BRUNNER u.a. 2004c, S. 132).

7.1.3.4 Die Behandlung des Zehnerübergangs in "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1"

"Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" sind insofern Sonderfälle, als in diesen beiden Büchern das "Teilschrittverfahren" zwar für den fachdidaktisch versierten Erwachsenen gewissermaßen als "Fernziel" erkennbar ist, für die gemäß Buch arbeitenden Kinder aber gar nicht relevant wird. Aufgaben mit Zehnerübergang kommen hier nämlich *ausschließlich* im Rahmen von "schönen Päckchen" vor, in denen zunächst 1, dann 2, dann 3, dann 4 usw. zur selben Ausgangszahl addiert wird. Auf diese Weise ergibt sich ein "gleitender Übergang über den Zehner". Im Begleitheft wird explizit behauptet, "dass manche Kinder die Zehnerüberschreitungen nur innerhalb dieser Reihenaufgaben lösen können" (EDER u.a. 2001c, S. 7). Diese Behauptung ist in sich widersprüchlich: Wenn Kinder das Prinzip der Nachbaraufgabe verstehen können (dieses wird beim "gleitenden Übergang" ja tatsächlich genutzt), dann könnten sie auch Strategien wie "Verdoppeln plus eins" oder auch "Kraft der Zehn" verstehen. Diese beruhen ja gleichfalls auf dem Prinzip der Nachbaraufgabe, nutzen dieses aber für tatsächlich *vorteilhaftes* Rechnen. Anders als das Ableiten von 6+5 aus der Verdoppelung 5+5 kann hingegen der "gleitende Übergang" von 6+5 mit den Schritten 6+1, 6+2, 6+3, 6+4 und zuletzt 6+5 (EDER u.a. 2001b, S. 44) kaum als "vorteilhafte Strategie" bezeichnet werden. Im Grunde ist dieser "gleitende Übergang" nur in konzeptueller Hinsicht (durch den Bezug auf das Prinzip der Nachbaraufgabe), *nicht aber in der praktischen Durchführung* von der Strategie des "Weiterzählens" zu unterscheiden. Statt mit Kindern daran zu arbeiten, "kraftvolle", ökonomische Strategien für den Zehnerübergang zu entwickeln, wird hier also eine *Variante des zählenden Rechnens* eingeübt; allerdings nur auf drei Buchseiten, ehe das Thema für den Rest des Schuljahres wieder fallengelassen wird.

Inwiefern wird hier dann aber das Teilschrittverfahren überhaupt "vorbereitet", wie das im Begleitheft ja beansprucht wird? Die "Vorbereitung" erfolgt tatsächlich in einer Subtilität, die wohl in aller Regel unbemerkt bleiben wird: Im Begleitheft wird für die Erarbeitung angeregt, eine Reihe von zwölf Sesseln aufzustellen. "Zwischen dem 10. und 11. Sessel ist ein größerer Abstand" (EDER u.a. 2001c, S. 48). Nun sollen zur Darstellung der Einstiegsaufgabe 8 + 3 acht Kinder auf den ersten acht Sesseln Platz nehmen und in weiterer Folge sich drei Kinder nach einander dazusetzen (a.a.O). Warum hier die ersten zehn Sessel räumlich abgegrenzt werden sollen, wird mit keinem Wort begründet. Auf die Abgrenzung wird in der angeregten Handlung auch in keiner Weise Bezug genommen.

Dennoch scheint es dem Autorenteam wichtig, in *irgendeiner* Form das Teilschrittverfahren ("erst bis 10, dann von 10 weiter") wenigstens *anzudeuten*. Entsprechend sind die Darstellungen im Schulbuch gewählt (vgl. EDER u.a. 2001b, S. 44): Einerseits sind hier (dem Erarbeitungsvorschlag des Begleitheftes gemäß) acht Kinder nebeneinander auf Sesseln sitzend abgebildet. Neben dem achten Kind sind noch drei freie Sessel zu sehen, der letzte (elfte) mit etwas Abstand vom zehnten. Daneben sind drei Kinder gezeichnet, die sich auf die freien Sessel hin bewegen. Unterhalb dieses Bildes findet sich auch noch die Abbildung eines bis 12 durchnummerierten Zahlenstrahls, auf dem die Markierung für die Zahl 10 farblich hervorgehoben wird. Beim "gleitenden Übergang", der den Kindern im Aufgabenpäckchen neben dieser Abbildung abverlangt wird, spielt die Zahl 10 aber gerade *keine* besondere Rolle. Es wird beim "gleitenden Übergang" ja gerade *kein* "Zwischenstopp bei 10" angeregt, der "Zehnerübergang" soll im Gegenteil gleichsam *"unmerklich"* erfolgen. Denn im Rahmen des konstruierten Aufgabenpäckchens erfordert die Lösung von 8+3 (mit Zehnerübergang) keine andere Strategie als die Lösung von 8+2 (ohne Zehnerübergang): Beide Aufgaben sollen *auf dieselbe Weise*, nämlich durch den Vergleich mit der jeweils davor gereihten Aufgabe ("um 1 mehr" oder einfach "1 weiter"), gelöst werden.

7.1.3.5 Zusammenfassung

Alle *fünf Schulbücher* thematisieren als Strategie für Additionen und Subtraktionen mit Zehnerübergang *ausschließlich* das Teilschrittverfahren bzw. zielen (soweit sie dieses Verfahren im ersten Schuljahr für tendenziell verfrüht halten) ausschließlich auf das Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang ab. *An keiner Stelle* dieser fünf Bücher wird auch nur eines der alternativen nicht-zählenden Verfahren vorgestellt. Der als "Vorbereitung" auf das Teilschrittverfahren in zwei der fünf Bücher gewählte "gleitende Übergang" erweist sich bei näherer Analyse im Grunde als eine *Variante des weiterzählenden Rechnens*. Alle fünf Bücher befinden sich damit, wenn auch auf unterschiedliche Weise, in deutlichem Widerspruch zu der in Kap. 4.5 begründeten Empfehlung der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik, für den Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20 eine Reihe von nicht-zählenden Strategien zu thematisieren und die Behandlung im Unterricht keinesfalls auf das besonders anspruchsvolle Teilschrittverfahren einzugrenzen.

7.1.4 Qualität der Übungspäckchen

Auf die Qualität der Übungsaufgaben in den einzelnen Schulbüchern wurde zwangsläufig bereits in Kapitel 7.1.2 da und dort eingegangen; sie soll im vorliegenden Abschnitt noch einmal umfassend und im Detail überprüft werden. Für diesen Zweck wurden sämtliche Aufgaben analysiert, die in diesen Schulbüchern den additiven Grundaufgaben gewidmet sind, mit folgenden Einschränkungen:

Alle fünf Bücher behandeln in ihrem ersten Teil (der etwa das erste Schulhalbjahr "abdecken" soll) ausschließlich Aufgaben im Zahlenraum bis höchstens 10. Im zweiten Teil werden dann in *allen Büchern* ausgiebig dekadische Analogien behandelt (vgl. Kap. 7.1). Das Üben im Zahlenraum von 10 bis 20 erfolgt in *allen Büchern* überwiegend in Form von Päckchen, die über viele Seiten hinweg weitgehend gleich aufgebaut sind: Neben oder unter einer Addition oder Subtraktion im Zahlenraum bis zehn ist die analoge Aufgabe im Zahlenraum bis 20 zu lösen, also etwa zuerst 5+4, dann 15+4, daneben 6+3, dann 16+3, daneben 8+1, dann 18+1, usw. (vgl. etwa EDER u.a. 2001b, S. 25). Nach demselben Prinzip wird im letzten Drittel der Bücher auch im Zahlenraum bis 30 verfahren. Auf solche Übungspäckchen und ganze Übungsseiten trifft die Kritik WITTMANNS am "monotonen Üben stereotyper Aufgaben" zu: Es "verführt zum kurzfristigen oberflächlichen Anlernen von Mechanismen und ist daher nicht auf Langzeiterfolge angelegt" (WITTMANN 1994, S. 162). Eine genauere Analyse dieser Teile der Schulbücher fällt aber nicht in den Bereich dieser Arbeit, die ja den additiven *Grund*aufgaben gewidmet ist (vgl. Kap. 2.1). Nun kommen zwar in Päckchen zum Üben dekadischer Analogien zwangsläufig auch additive Grundaufgaben vor. Diese Päckchen sind aber eindeutig einem anderen Zweck gewidmet als dem Üben der Grundaufgaben selbst. Sie

wurden deshalb in der vorliegenden Schulbuchanalyse *nicht* berücksichtigt.
Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 20 mit Zehnerübergang gehören dagegen sehr wohl zu den Grundaufgaben und fallen daher auch in den Bereich dieser Arbeit. Die Art und Weise, wie der Zehnerübergang in den fünf Schulbüchern in Erarbeitungs- und Übungssequenzen behandelt wird, war aber Gegenstand einer eigenen Analyse (siehe oben Kap. 7.1.3). Um die Unterscheidbarkeit der einzelnen Strukturierungsdimensionen dieser Schulbuchanalyse zu gewährleisten, wurden daher die Übungspäckchen zum Zehnerübergang getrennt von den Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn analysiert; ihre Kritik erfolgte in Kapitel 7.1.3. Die hier folgende Auswertung umfasst also ausschließlich die Übungspäckchen im Zahlenraum bis einschließlich 10.

Die Übungspäckchen der Schulbücher wurden (theoriegleitet auf Grundlage der in Kapitel 4.6 erläuterten Positionen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik) nach den folgenden Kodierregeln kategorisiert:

> **"Übungspäckchen":** Als "Übungspäckchen" wurde im Rahmen dieser Schulbuchanalyse jede Gruppe oder Folge von mindestens drei additiven Rechenaufgaben berücksichtigt, die durch das Layout als klar erkennbare Einheit von den anderen Aufgaben derselben Schulbuchseite abgegrenzt ist und die erkennbarer Weise in erster Linie dem Üben von Additionen und Subtraktionen dienen soll. Nicht als Übungspäckchen im Sinne dieser Kodierregel gewertet und daher für diese Analyse nicht erfasst wurden Aufgabengruppen, die in erster Linie zum Erarbeiten und Festigen des Operationsverständnisses dienen sollen (etwa dadurch, dass Kinder bildliche Darstellungen als Additionen oder Subtraktionen deuten oder umgekehrt Rechnungen bildlich darstellen sollen).
>
> **"Schöne Päckchen im eigentlichen Sinn":** Als "schönes Päckchen im eigentlichen Sinn" wurde im Rahmen dieser Schulbuchanalyse ein Übungspäckchen dann gewertet, wenn es die folgenden Kriterien erfüllt: (a) Die einzelnen Aufgaben des Päckchens stehen in einem operativen Zusammenhang; dieser ist im Rahmen des Päckchens entweder durchgängig eingehalten oder aber absichtsvoll an einer Stelle gestört. (b) Auf der entsprechenden Schulbuchseite oder im Lehrerhandbuch wird deutlich gemacht, dass dieser operative Zusammenhang selbst (etwa im Rahmen einer Strategiekonferenz) thematisiert werden solle und/oder das schöne Päckchen ist als offene Aufgabe so gestaltet, dass es vom Kind selbstständig weitergeführt werden muss (zur Begründung dieser Kriterien siehe Kap. 4.6).
>
> **"Schematisch-schönes Päckchen":** Als "schematisch-schönes Päckchen" wird ein Übungspäckchen dann gewertet, wenn es die folgenden Kriterien erfüllt: (a) Die einzelnen Aufgaben stehen in einem durchgängigen operativen Zusammenhang. (b) Das Päckchen lässt sich auch durch "mechanische Reproduktion einmal durchgeführter Muster" (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 110) problemlos und vollständig lösen (s. Kap. 4.6). (c) Weder auf der Schulbuchseite noch im Lehrerhandbuch wird in irgendeiner Form deutlich gemacht, dass der dem Päckchen zu Grunde liegende Zusammenhang im Unterricht thematisiert werden soll.

> **"Graue Päckchen":** Als "graues Päckchen" wird ein Übungspäckchen dann gewertet, wenn die einzelnen Aufgaben in ihrer im Päckchen gebotenen Abfolge in keinem erkennbaren operativen Zusammenhang stehen.
>
> **"Bunte Hunde":** Als "bunter Hund" wird ein Übungspäckchen dann gewertet, wenn die einzelnen Aufgaben in ihrer im Päckchen gebotenen Abfolge in keinem erkennbaren operativen Zusammenhang stehen und die Lösungszahlen in irgendeiner Weise (als Farbcode, als Schlüssel zum Finden von Lösungsbuchstaben etc.) dazu verwendet werden sollen, ein Bild bunt auszumalen oder zu vervollständigen oder ein Buchstabenrätsel zu lösen und dergleichen mehr.
>
> **"Offene Aufgaben mit Strukturvorgaben":** Als "offen mit Strukturvorgabe" wird ein Übungspäckchen dann gewertet, wenn die Kinder aufgefordert sind, selbst Aufgaben zu erfinden oder zu bereits vorhandenen Aufgaben weitere hinzuzufügen und dabei eine vorgegebene operative Struktur zu beachten. Ein Beispiel für eine "offene Aufgabe mit Strukturvorgabe" wäre: "Setze (die Reihe der Zerlegungen der Zahl 8) fort: 0+8, 1+7, ...
>
> **"Offene Aufgaben ohne Strukturvorgaben":** Als "offen ohne Strukturvorgabe" wird ein Übungspäckchen dann gewertet, wenn die Kinder aufgefordert sind, selbst Aufgaben zu erfinden oder zu bereits vorhandenen Aufgaben weitere hinzuzufügen, ohne dass sie dabei die Vorgabe erhalten, eine operative Struktur zu beachten. Ein Beispiel für eine "offene Aufgabe ohne Strukturvorgabe" wäre: "Finde Zerlegungen zur Zahl 8!"

Dass diese Kodierregeln eine hinreichend zuverlässige Erfassung der Übungspäckchen ermöglichen, wurde durch eine Zweitauswertung von zufällig ausgewählten zehn Prozent der Schulbuchseiten durch eine unabhängige Fachdidaktikerin deutlich: Die Übereinstimmung mit den vom Verfasser getätigten Zuordnungen betrug 98 Prozent. Schwierigkeiten beim Anwenden der Kodierregeln ergaben sich fast ausschließlich bei Kodierregel 1: Es lässt sich in den analysierten Schulbüchern nicht immer zweifelsfrei erkennen, welche Aufgaben überhaupt als zusammengehörig konzipiert sind (also ein Übungspäckchen bilden). So kann etwa eine Anordnung von neun Aufgaben in drei Reihen zu je drei Aufgaben (oder in drei Spalten zu je drei Aufgaben?) wie beispielsweise bei BRUNNER 2004a, S. 28 gedeutet werden als *ein* Päckchen mit neun Aufgaben oder aber als *drei* Päckchen mit je drei entweder von links nach rechts oder von oben nach unten zu bearbeitenden Aufgaben.

Diese Unsicherheit kommt freilich nur dort auf, wo zwischen den Aufgaben kein inhaltlicher Zusammenhang besteht, es sich also in jedem Fall *nicht* um operativ strukturierte Aufgaben handelt. Solche Fälle wurden schließlich einheitlich stets als *ein* Päckchen gewertet. Zumeist ist die Zuordnung aber durch eindeutige Abgrenzungen im Layout (Nummerierungen, deutliche Abstände oder auch Trennstriche zwischen Aufgabenblöcken, eine einheitliche grafische Gestaltung als "bunter Hund" und dergleichen mehr) zweifelsfrei möglich. In den seltenen

Fällen, wo die *inhaltliche* Unterscheidung der Übungstypen (Kodierregeln 2 bis 7) nicht eindeutig möglich war, wurde dies durch Zuweisung der Kategorie "keine eindeutige Zuordnung möglich" entsprechend berücksichtigt. Um die Überprüfbarkeit der vorgenommenen Zuweisungen zu gewährleisten, werden sie im Anhang für jedes Schulbuch Seite für Seite ausgewiesen (siehe Anhang 8).

Tabelle 11 zeigt zusammenfassend, in welchen absoluten und relativen Häufigkeiten Übungspäckchen der verschieden Typen in den fünf Schulbüchern vorkommen. Wie erläutert, ist das Schulbuch "Matheblitz 1" im Wesentlichen inhaltsgleich mit "Mein erstes Mathematikbuch"; auf eine eigene Auswertung der Übungspäckchen von "Arbeitsbuch 1" und "Arbeitsbuch 2" von "Matheblitz 1" wurde daher verzichtet. Eine eigene Betrachtung verdient aber das "Übungsbuch", der dritte für die Hand der Kinder bestimmte Teil von "Matheblitz 1". Dieses Übungsbuch liegt in zwei Varianten vor, wobei "Übungsbuch A" laut Begleitheft konzipiert ist "für weniger Begabte oder mit Entwicklungsrückständen versehene Kinder" und "Übungsbuch B" "für durchschnittlich bzw. überdurchschnittlich begabte Kinder" (AG MATHEMATIK 2003e, S. 1). In den Übungsbüchern selbst finden sich jeweils auf der inneren Umschlagseite die Hinweise "mit einfachen Übungen" (Übungsbuch A) bzw. "mit erweiterten Übungen" (Übungsbuch B).

Tabelle 11: Häufigkeit unterschiedlicher Typen von Übungspäckchen in den untersuchten Schulbüchern

Titel	Übungs-Päckchen im ZR 10 insgesamt	Schöne Päckchen i. eigent-lichen Sinn	"Schöne Päckchen", rein schema-tisch	Offen, mit Struktur-vorgabe	Offen, ohne Struk-tur-vorgabe	Graue Päckchen	Bunte Hunde	Nicht Eindeu-tig
Zahlen-reise 1	201 (100 %)	7 (3,5 %)	6 (3,0 %)	0	1 (0,5 %)	171 (85,1 %)	11 (5,5 %)	5 (2,5 %)
Zahlen-Zug 1	335 (100 %)	15 (4,5 %)	100 (29,9 %)	0	32 (9,6 %)	132 (39,4 %)	27 (8,1 %)	29 (8,7 %)
Mein 1. Matheb.	307 (100 %)	2 (0,7 %)	52 (16,9 %)	7 (2,3 %)	6 (2,0 %)	211 (68,7 %)	3 (1,0 %)	26 (8,5 %)
Funkel-steine 1	172 (100 %)	14 (8,1 %)	12 (7,0 %)	0	0	119 (69,2 %)	23 (13,4%)	4 (2,3 %)
M-Blitz 1 ÜB A	74 (100 %)	0	64 (86,5 %)	0	0	9 (12,2 %)	0	1 (1,4 %)
M-Blitz 1 ÜB B	177 (100 %)	0	27 (15,3 %)	0	12 (6,8 %	116 (65,5 %)	0	22 (12,4%)

Tabelle 11 macht neben beträchtlichen Unterschieden in der *absoluten Anzahl* ("Zahlen-Zug 1" etwa bietet fast doppelt so viele Übungspäckchen wie "Funkelsteine 1 Mathematik") auch erhebliche Unterschiede in der *relativen Häufigkeit der einzelnen Typen* von Übungspäckchen deutlich. "Zahlen-Zug 1" nimmt dabei eine Sonderrolle ein. Auch in diesem Schulbuch überwiegen die "grauen Päckchen" und "bunten Hunde" mit zusammen 47,5 Prozent deutlich über die "schönen Päckchen" mit insgesamt 34,4 Prozent. Die "Flut" unstrukturierter Päckchen ist hier aber weniger erdrückend als in den anderen Schulbüchern mit insgesamt 69,7 Prozent

("Mein erstes Mathematikbuch"), 82,6 Prozent ("Funkelsteine 1 Mathematik") und gar 90,6 Prozent ("Zahlenreise 1") Päckchen von Übungsaufgaben ohne erkennbaren operativen Zusammenhang.

Doch auch die relativ häufigen "schönen Päckchen" in "Zahlen-Zug 1" genügen in ihrer überwiegenden Mehrheit *nicht* den Qualitätskriterien der aktuellen Fachdidaktik. Denn es handelt sich fast durchwegs um "*schematisch*-schöne Päckchen", Päckchen also, die ein schematisch-mechanisches Abarbeiten erlauben, wenn nicht sogar provozieren. Dies ist vor allem auch deshalb zu befürchten, weil die Päckchen *nicht* verbunden sind mit irgendeiner Form von Hinweis an die Lehrkraft, dass es wichtig wäre, den zu Grunde liegenden operativen Zusammenhang im Unterricht zu thematisieren. Nur ausnahmsweise wird in "Zahlen-Zug 1" ein operativer Zusammenhang zumindest insofern selbst zum Inhalt der Übung gemacht, als den Kindern abverlangt wird, einer vorgegebenen Aufgabenreihe einen solchen Zusammenhang zu entnehmen und diesen auf andere Zahlen zu übertragen und abzuwandeln (wie etwa auf Seite 71 in Teil A, BUBLAT, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2005a).

Noch deutlicher ist der Überhang von "schematisch-schönen" Päckchen gegenüber "schönen Päckchen im eigentlichen Sinne" in "Mein erstes Mathematikbuch" (und damit auch "Matheblitz 1), während das Verhältnis dieser beiden Typen (auf niedrigem absolutem Niveau) in "Funkelsteine 1 Mathematik" ausgeglichener ist. In "Zahlenreise 1" kommen schöne Päckchen, ob "eigentlich" oder bloß "schematisch", so gut wie gar nicht vor.

"Matheblitz 1" ist ein Sonderfall, der eine genauere Analyse lohnt: Während nämlich in den Hauptteilen ("Arbeitsbuch Teil 1" und "Teil 2") von "Matheblitz 1" (wie in seiner Vorlage "Mein erstes Mathematikbuch") die "grauen Päckchen" und "bunten Hunde" bei weitem überwiegen, herrscht in "Übungsbuch A" gerade umgekehrt eine "Flut der schönen Päckchen"; diese machen 86,5 Prozent aller Übungsaufgaben aus. Dabei handelt es sich allerdings *ohne Ausnahme* um "schematisch-schöne Päckchen", und der Schematismus ist hier in kaum zu überbietender Weise auf die Spitze getrieben. Ein beliebiges Beispiel dafür: Auf Seite 20 ist in Aufgabe 1 zunächst 8–1, dann 8–2, dann 8–3 usw. bis 8–8 zu lösen, wobei zu jeder Subtraktion ein eigener durchnummerierter Zahlenstrahl abgebildet ist, auf dem die Lösung bereits markiert ist und daher einfach abgelesen werden kann. In Aufgabe 2 sind 8–1, dann 8–2, 8–3 usw. bis 8–8 zu rechnen, diesmal illustriert mit Punktedarstellungen, die eine zählende oder auch (quasi-)simultan erfassende Lösung erlauben. *Dasselbe* rein schematische Päckchen (8–1, 8–2 bis 8–8) wird den Kindern auf derselben Seite dann noch ein drittes Mal abverlangt; diesmal sind die Aufgaben *nicht* einzeln auch bildlich dargestellt, ein beigefügter, bis 8 durchnummerierter Zahlenstrahl soll aber wohl notfalls als Zählhilfe verwendet werden (AG MATHEMATIK 2003d, S. 20). Nach demselben Prinzip sind *fast alle* Übungsseiten gestaltet.

Da dieses Vorgehen im Begleitheft zu "Matheblitz 1" nicht erläutert wird, kann über die Beweggründe des Autorenteams nur spekuliert werden. Die Widmung von "Übungsbuch A", nämlich "für weniger Begabte oder mit Entwicklungsrückständen versehene Kinder", lässt vermuten, dass die Verfasser von "Matheblitz 1" "schöne Päckchen" gerade *nicht* als eine Übungsform verstehen, die das Potenzial in sich trägt, Kinder aller "Begabungsstufen" beim Entdecken, Verstehen und Anwenden operativer Zusammenhänge zu unterstützen.

Tatsächlich müssten "schöne Päckchen" ja auch völlig anders gestaltet und völlig anders eingesetzt werden als in "Matheblitz 1", wenn sie dieses Potenzial entfalten sollen. In der vollkommen geistlos-schematischen Form, in der sie in "Übungsbuch A" vorkommen, provozieren sie wohl eher das Gegenteil, also genau jene "mechanische Reproduktion", vor der die aktuelle Fachdidaktik warnt (vgl. Kap. 4.6). *Gerade diese mechanische Reproduktion* scheint das Autorenteam von "Matheblitz 1" aber zu wollen und für die "weniger Begabten" *für angemessen* zu halten. Den "durchschnittlich bzw. überdurchschnittlich begabten Kindern", für die "Übungsbuch B" gedacht ist, wird offenbar eher zugetraut, Aufgaben auch ohne diese Gängelung durch stereotyp vorgegebene Schrittfolgen lösen zu können. Vermutlich deshalb sind die schematisch-schönen Päckchen in "Übungsbuch B" mit 15,3 Prozent deutlich seltener, die "grauen Päckchen" deutlich häufiger. Nun ist *das* – entweder "grau" oder "schematisch-schön" – freilich keine wünschenswerte Alternative und jedenfalls nicht im Sinne der Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik.

Dass aber die "weniger begabten" Kinder durch "Übungsbuch A" von "Matheblitz 1" *keine* zweckmäßige Förderung erfahren, soll noch einmal explizit festgehalten werden: Es mag sein, dass schwächere SchülerInnen diese stereotypen Übungsaufgaben leicht finden; und es wäre nicht verwunderlich, wenn sie sie langweilig finden. Aber die Kinder werden durch dieses mechanische Abarbeiten immer gleich strukturierter Aufgabenreihen in keiner Weise gefordert und daher auch nicht darin gefördert, *selbst* Strategien für das Lösen von Additionen und Subtraktionen zu entwickeln. Würden sie sich aber tatsächlich das eintönige Konstruktionsprinzip der Aufgabenpäckchen in "Übungsbuch A" im Sinne einer *Strategie* zueigen machen, dann liefe das auf zählendes Rechnen hinaus. Denn wer zum Zweck, beispielsweise die Subtraktion 8–4 zu lösen, bei 8–1 beginnt, um sich dann über 8–2 und 8–3 zur eigentlichen Aufgabe vorzuarbeiten, der praktiziert im Grunde nur eine *umständliche Variante des Rückwärtszählens*. Die Widmung "für weniger Begabte" könnte also auf eine "self-fullfilling prophecy" hinauslaufen: Kinder, die aus welchen Gründen immer für "weniger begabt" gehalten werden, werden mit solchen Übungsseiten zum zählenden Rechnen geradezu gedrängt, jedenfalls aber nicht bei der Überwindung des zählenden Rechnens unterstützt. Soll nun in weiterer Folge die Tatsache, dass sie zählend rechnen, als Beleg dafür genommen werden, dass es sich eben um "weniger begabte" Kinder handle?

Zusammenfassung:
In *allen fünf* Büchern überwiegen bei weitem (mit Anteilen zwischen 77,4 in "Zahlen-Zug 1" und 93,5 Prozent in "Zahlenreise 1") Aufgabenpäckchen, die entweder *gänzlich unstrukturiert* sind oder zwar operative Strukturen aufweisen, durch ihre stereotype Gestaltung aber ein rein mechanisches Abarbeiten erlauben (wenn nicht provozieren) und insofern *gerade nicht* das leisten, wofür die aktuelle Fachdidaktik den Einsatz "schöner Päckchen" empfiehlt. Operativ strukturierte Aufgaben sollen ja, so der Konsens innerhalb der aktuellen Fachdidaktik, verwendet werden, um Kinder zum Nachdenken über operative Zusammenhänge und zum selbstständigen Anwenden solcher Zusammenhänge anzuregen. "Schöne Päckchen", die *dieses* Ziel zumindest in Ansätzen erkennen lassen, sind in *allen fünf Schulbüchern* nur vereinzelt zu finden. Dabei sind die Unterschiede in der Häufigkeit (zwischen 0,7 und 8,1 Prozent) durchaus beträchtlich. Diese Unterschiede bewegen sich aber auf einem insgesamt so niedrigen Niveau, dass es kaum berechtigt erscheint, von bedeutsamen *"Qualitätsunterschieden"* im Hinblick auf das Übungsangebot zu sprechen: *Alle fünf Bücher* erfüllen *bei weitem nicht* die Qualitätsmaßstäbe, die die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik für Übungsaufgaben begründet und formuliert hat. In *allen fünf Büchern* sind die Übungsaufgaben weitestgehend so gestaltet, dass – in den Worten WITTMANNs – "Denken und Rechnen entkoppelt" und die "Schüler in Passivität gedrängt" werden und *keine* Gelegenheit erhalten, "Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen und Strukturen aufzuspüren" (WITTMANN 1994, S. 161f; vgl. Kap. 4.6).

7.1.5 Schaffen von Anlässen für das Kommunizieren und Argumentieren von Lösungswegen

Zuletzt soll im Rahmen dieser Schulbuchanalyse noch untersucht werden, ob und wie weit die fünf Lehrwerke die Lehrkraft dabei unterstützen, der Reflexion, Kommunikation und Argumentation von Lösungsstrategien im Mathematikunterricht jenen hohen Stellenwert zukommen zu lassen, der ihnen gemäß aktueller fachdidaktischer Lehrmeinung gebührt (vgl. Kap. 4.3). Die Frage wurde an einzelnen Stellen bereits berührt und soll hier nun gebündelt beantwortet werden.

Wie bereits eingeräumt wurde, hat ein Schulbuch in dieser Hinsicht freilich nur begrenzte Möglichkeiten. Es kann aber immerhin

(a) den *Kindern direkt* Impulse auf den Schulbuchseiten geben, etwa durch
- *direkte Aufforderungen* (Beispiel: "Vergleiche!", nämlich die einzelnen Aufgaben eines "schönen Päckchens", vgl. etwa WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 50);
- *direkte Fragen* (Beispiel: "Wie rechnen die Kinder?", nämlich die abgebildeten Kinder, die auf unterschiedliche Weise eine Aufgabe lösen, vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 48);

(b) die Lehrkraft explizit dazu anregen, mit den Kindern über ihre Strategien zu sprechen, sie auch untereinander diskutieren zu lassen, etwa durch

– *klare Hinweise im Lehrerhandbuch* (vgl. etwa WITTMANN & MÜLLER 2004b, S. 9ff, die Ausführungen unter "Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen"; dazu durchgehend die "Didaktische[n] und praktische[n] Hinweise zu den Schülerbuchseiten", WITTMANN & MÜLLER 2004b, S. 36-220);
– *klare Hinweise und Aufforderungen in den Fußzeilen des Schülerbuchs* (Beispiele: "Lösungswege gemeinsam besprechen", etwa WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 48, Fn. 2; "Beziehungen zwischen den Aufgaben besprechen", etwa WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 50, Fn. 4 und 5; "Muster besprechen", etwa WITTMANN & MÜLLER 2004a, S. 50, Fn. 6 und 7).

Werden solche Möglichkeiten nun von den fünf analysierten Büchern genutzt?

7.1.5.1 Anlässe für Kommunizieren und Argumentieren in der "Zahlenreise 1"

Die Schülerbücher der "Zahlenreise 1" verzichten auf Fußzeilen, die als Erläuterung zu den auf der jeweiligen Seite gebotenen Aufgaben und Abbildungen dienen könnten. Betrachtet man die Aufgaben und Abbildungen selbst, so findet sich *auf keiner einzigen Schülerbuchseite* irgendeine Aufforderung oder Einladung, über Rechenstrategien oder operative Zusammenhänge zu kommunizieren. Auch im Lehrerbegleitheft wird mit keinem Wort darauf hingewiesen, dass das Sprechen über Rechenstrategien und Zusammenhänge für das mathematische Lernen wichtig wäre. Unterrichtsgespräche werden zwar angeregt, etwa für die Erarbeitung von Operationsverständnis (Kinder sollen zu Ziffergleichungen passende Rechengeschichten erzählen, etwa BRUNNER u.a. 2005c, S. 29). *Rechenstrategien* sollen aber, folgt man den AutorInnen, offenbar nicht *diskutiert*, sondern den Kinder *diktiert* werden (vgl. die "Legeanordnung" für das Rechenbrett, die "von allen SchülerInnen unbedingt eingehalten werden" müsse, siehe Kap. 7.2.1.1, oder auch die Festlegung auf das Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang, siehe Kap. 7.1.5).

7.1.5.2 Anlässe für Kommunizieren und Argumentieren in "Zahlen-Zug 1"

Die Schülerbuchseiten von "Zahlen-Zug 1" enthalten keinen einzigen Hinweis darauf, dass in der Klasse über Strategien oder operative Zusammenhänge gesprochen werden sollte. Immerhin findet sich aber im "Lehrerband" eine allgemein gehaltene Aufforderung dazu, "im Alltag des Rechnens [..] pädagogische Situationen [zu] ermöglichen, in denen die Kinder [...] *bei der Sache bleiben*, indem sie mit anderen zusammen denken, sprechen und handeln" (BUBLAT, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2001, S. 7; Hervorhebungen im Original). Was das konkret heißen soll, wird an dieser Stelle nicht näher ausgeführt. Im Absatz davor wird aber angeregt, dass "kognitiv reifere Kinder, die einen Lerninhalt bereits beherrschen", ihren MitschülerInnen "zeigen, 'worum es geht...', 'wie es geht...', 'was man falsch machen kann ...', 'worauf man achten muss...'" (a.a.O.). All das ist im Rahmen des sozialen Lernens sicherlich wertvoll. Wie die im Zitat gewählten Formulierungen zeigen, geht es bei dieser Form der Kommunikation zwischen den Kindern aber wohl kaum um das *Begründen von Zusammenhängen* und Abwägen von *Vor- und Nachteilen verschiedener Strategien*. Dass es aber auch gerade *darum* gehen sollte und die *Lehrkraft* deshalb in der Klasse *gezielt* Gespräche ("Strategiekonferenzen") anregen sollte, in denen *möglichst alle Kinder* (und nicht nur die "kognitiv reiferen") Gelegenheit erhalten, ihre Strategien zu verbalisieren bzw. über operative Zusammenhänge in zuvor gelösten Aufgabenpäckchen zu diskutieren, wird an dieser Stelle nicht erwähnt.

Allerdings wird dann in den "besonderen Hinweisen zu einzelnen Seiten" tatsächlich für zwei Aufgaben im Schulbuch explizit auch ein Gespräch über operative Zusammenhänge angeregt. Es handelt sich nicht um eines der in "Zahlen-Zug 1" so zahlreichen "schematisch-schönen" "Päckchen" in Kolumnenform (vgl. Kap. 7.1.4), die ja unter anderem deshalb nur *schematisch*-schön sind, weil *nicht* zum Nachdenken und Sprechen über die in ihnen enthaltenen Zusammenhänge angeregt wird. Auf den Seiten 34 und 35 von Teil B (BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2004b) finden sich vielmehr Abbildungen von "Mauern", deren "Ziegel" Additionen zeigen, deren erste Summanden und damit die Summen *von oben nach unten* jeweils um eins anwachsen bzw. jeweils um eins vermindert werden und die *innerhalb einer Reihe* nach dem Prinzip der gegensinnigen Veränderung auseinander abgeleitet werden können. Eben diese Zusammenhänge, so der Hinweis im Lehrerband, sollen die "Kinder [..] versuchen, [...] mit eigenen Worten zu beschreiben und zu begründen". Als "weiterführende Übung" wird angeregt, zu fragen, wie die Mauer fortgesetzt werden könne. Ähnliche Mauern finden sich schon auf drei früheren Seiten des Schulbuches. In den Hinweisen des Lehrerbandes zu diesen Seiten werden die Gesetzmäßigkeiten innerhalb der Mauern erläutert, die Lehrkraft wird aber nicht explizit zu Unterrichtsgesprächen darüber angeregt. Festzuhalten bleibt aber, dass im Lehrerband von "Zahlen-Zug 1" immerhin an zwei Stellen explizit, an drei weiteren Stellen zumindest implizit empfohlen wird, Kinder zum Beschreiben und Begründen von operativen Zusammenhängen aufzufordern.

7.1.5.3 Anlässe für Kommunizieren und Argumentieren in "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1"

"Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz 1" bieten auf den Schülerbuchseiten *keine* expliziten Aufforderungen zum Verbalisieren von Rechenstrategien und/oder zum Reden über operative Zusammenhänge. In den Begleitheften wird aber (jeweils anlässlich der "Einführung" einer weiteren Zahl im Rahmen der kleinschrittigen Behandlung des Zahlenraums bis 10) wiederholt angeregt, dass die Kinder zu *einer* vorgegebenen gegliederten Zahldarstellung mehrere Rechnungen finden (und diese dann wohl auch in der Klasse vorstellen) sollen. Angeregt wird hier also die Förderung von Teile-Ganzes-Interpretationen gegliederter Zahldarstellungen sowie von daraus abgeleiteten Teile-Ganzes-Interpretationen von Additionen und Subtraktionen (auch als Ergänzungen). Diese Maßnahme steht für sich genommen im Einklang mit Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik (vgl. Kap. 4.1 und 4.2), ebenso, dass die Kinder dabei zum Sprechen über die von ihnen entdeckten Zusammenhänge aufgefordert werden.

Die dazu in den Schülerbuchseiten abgedruckten Übungsaufgaben provozieren aber durch ihre stereotype Gestaltung in ihrer überwiegenden Mehrzahl ein "mechanisches Abarbeiten". So sind in dem wiederholt gebotenen Aufgabenformat "Jede rechnet anders" (etwa EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001a, S. 60) sämtliche "Sichtweisen" einer bestimmten Zahlzerlegung *immer schon vorgegeben*. Es stehen also etwa neben einer Abbildung von sieben als fünf und zwei die Rechnungen 7=5+_, 5+_=7 und 7–5=_. Die Aufgabe der Kinder beschränkt sich darauf, jeweils die noch fehlende 2 einzutragen. Dieses Schema wird dann an allen Zerlegungsmöglichkeiten der Zahl sieben durchexerziert. Das Besprechen der operativen Struktur anderer "schöner Päckchen", die in diesen Büchern zwar selten, aber immerhin doch vorkommen (s. Kap. 7.4), wird auch im Lehrerband an keiner Stelle angeregt.

An der einzigen Stelle, in der im Lehrerband auf ein schönes Päckchen des Schülerbuches (7+1, 6+2, 5+3 usw. bis 0+8) überhaupt eingegangen wird, erfolgt dies in bezeichnender Weise mit gänzlich anderer Intention: Angeregt wird, dass diese "Aufgaben zuerst durch Legen", in einem zweiten Durchgang "abstrakt" gelöst werden sollten, in einem dritten und vierten Durchgang ins Schul- und auch ins Hausübungsheft geschrieben und dort noch einmal gerechnet und schließlich "zur Kontrolle des erworbenen Könnens [...] in anderer Reihenfolge angeboten werden" sollten. Dabei sollten Kinder jene "Aufgaben, die sie noch nicht abstrakt lösen können, mit Würfeln versuchen" (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001c, S. 41). Kein Wort davon, dass hier ein operativer Zusammenhang (gegensinnige Veränderung) vorliegt, der von Kindern entdeckt werden kann, der zur Unterstützung dieser Entdeckung gezielt zum Thema gemacht werden sollte und der, einmal erkannt, den Rückgriff auf Würfel als Lösungshilfe und damit zählendes Rechnen überflüssig macht. Stattdessen offenbart sich hier die Erwartung, dass *die bloße Wiederholung* derselben Aufgaben die Kinder zur "abstrakten Lösung" befähige (wobei undeutlich bleibt, was mit "abstrakt" gemeint ist; vermutlich denken die Autoren aber an ein Lösen ohne Rückgriff auf konkretes Material; gegen das Lösen durch verbales Zählen ohne Zählhilfen scheinen sie nichts zu haben, vgl. auch Kap. 7.1.2.3).

7.1.5.4 Anlässe für Argumentieren und Kommunizieren in "Funkelsteine 1 Mathematik"

In den Schülerbänden von "Funkelsteine 1 Mathematik" lässt sich auf genau einer Seite eine Fußnote finden, die als Anregung zu einem Gespräch über operative Zusammenhänge gedeutet werden könnte: Zu einem der in diesem Schulbuch seltenen schönen Päckchen findet sich in der Fußzeile des Buches der Hinweis "Aufgaben lösen und den Zusammenhang erkennen" (FRIEDL 2004b, S. 29). Auf allen anderen Seiten, auf denen überhaupt schöne Päckchen vorkommen, sind diese in den Fußzeilen stets nur mit dem Hinweis "Plusaufgaben lösen" oder "Minusaufgaben lösen" versehen (vgl. Kap. 7.1.2.4).

Im Lehrerband zu "Funkelsteine 1 Mathematik" wird an *keiner* Stelle darauf hingewiesen, dass Rechenstrategien diskutiert, operative Zusammenhänge von den Kinder erläutert und begründet werden sollten. In den Ausführungen zu "soziale[n] Verhaltensweisen" heißt es lediglich, dass (neben "ruhigem Arbeiten") auch "Bereitschaft und Fähigkeit zu Partner- und Gruppenarbeit [eingeübt werden müssen]" (FRIEDL 2005, S. 12). Unter den weiteren "Tipps" findet sich: "Kommunikative Verhaltensweisen einüben" (a.a.O., S. 14). Dass die Kommunikation im Mathematikunterricht aber wesentlich auch *mathematische Inhalte* haben sollte, und dass Kinder in "Partner- und Gruppenarbeit" gerade auch über *operative Zusammenhänge* und daraus abgeleitete Rechenstrategien diskutieren sollten – all das wird in den ausführlichen Hinweisen "Zur Unterrichtsgestaltung" (a.a.O., S. 12-19) mit keinem Wort erwähnt.

7.1.5.5 Zusammenfassung

Das von der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik einhellig für wesentlich erachtete erläuternde und begründende Kommunizieren über Rechenstrategien und operative Zusammenhänge wird in keinem der fünf analysierten Bücher in angemessener Weise angeregt und unterstützt. Das ist in sich durchaus konsequent: Die Übungspäckchen dieser Bücher bieten ja in ihrer überwiegenden Mehrheit auch gar keine Zusammenhänge an, über die nachgedacht und gesprochen werden könnte. Und die von allen fünf Büchern betriebene Einengung des Zehnerübergangs auf das Teilschrittverfahren lässt für das Diskutieren von unterschiedlichen Rechenwegen eo ipso keinen Platz. Hier manifestiert sich also in negativer Weise, dass inhaltliche Lernziele (wie das Erkennen und Verstehen operativer Zusammenhänge) und allgemeine Lernziele (wie Kommunizieren und Argumentieren) zwar logisch getrennt, aber unterrichtspraktisch nur gemeinsam verfolgt werden können (vgl. Kap. 4.3).

7.1.6 Zusammenfassende Beurteilung der didaktisch-methodischen Qualität der fünf analysierten Schulbücher

Die Analyse der fünf Schulbücher, die im Unterricht der befragten Kinder Verwendung fanden, hat teils eklatante Widersprüche zu den in Kapitel 4 erläuterten und begründeten Empfehlungen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik deutlich gemacht. Das betrifft grundsätzlich *alle fünf Bücher,* und das grundsätzlich mit Bezug auf *alle sechs* in Kapitel 4 herausgearbeiteten Empfehlungen:

- In *allen* fünf Büchern werden die Zahlen bis 10 kleinschrittig "eingeführt".
- *Keines* der fünf Bücher ist dafür konzipiert, die Erarbeitung einer strukturierten Anzahlerfassung und in weiterer Folge die Erarbeitung des Denkens von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen wirksam zu unterstützen.
- *Keines* der fünf Bücher ist dafür konzipiert, die Erarbeitung von Einsicht in operative Zusammenhängen zwischen den Grundaufgaben und in weiterer Folge deren Nutzung für nicht-zählende Rechenstrategien wirksam zu unterstützen.
- In *allen* fünf Bücher wird für den Zehnerübergang nur das Teilschrittverfahren thematisiert oder zumindest "vorbereitet".
- *Keines* der fünf Bücher liefert konsequent Anstöße und Anregungen dafür, dass Kinder über Rechenstrategien diskutieren und operative Zusammenhänge in Klassengesprächen erläutern und begründen.
- In *allen* fünf Büchern werden die Kinder auf den Übungsseiten mit einer "Flut von grauen Päckchen und bunten Hunden" konfrontiert.

Die *Unterschiede* innerhalb dieser Gemeinsamkeiten sollen damit nicht geleugnet werden. Insgesamt betrachtet, lassen sich in "Zahlen-Zug 1" noch am ehesten Ansätze in Richtung einzelner der genannten Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik erkennen: In diesem Buch wird relativ bald zumindest im gesamten Zahlenraum bis zehn gearbeitet, der Anteil an "schönen Päckchen" ist deutlich höher als in den anderen Schulbüchern, operativen Zusammenhängen wird auch sonst mehr Beachtung gewidmet und es finden sich zumindest vereinzelt auch Anregungen dazu, Kinder zum Erläutern operativer Zusammenhänge zu motivieren. Auch andere Lehrwerke (am wenigsten freilich das meistverwendete) bieten die eine oder andere Anregung im Lehrerband, das eine oder andere Aufgabenpäckchen im Schülerbuch, die vor den Qualitätsmaßstäben der aktuellen Fachdidaktik bestehen können. Wenn aber *alle* diese Bücher, wie jeweils auf den vorderen Seiten festgehalten wird, "mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur [...] für den Unterrichtsgebrauch [...] geeignet erklärt" (vgl. etwa FRIEDL 2005a, S. 2) wurden, dann ist dem auch zu entnehmen, dass das Bundesministerium offenbar *keine* Qualitätsprüfung nach den Kriterien der aktuellen Fachdidaktik vornimmt, ehe es einem Mathematikbuch die Approbation erteilt.

Was heißt das nun aber für den Unterricht der Kinder, die für diese Arbeit zu ihren Rechenstrategien befragt wurden? Es ist klar, dass Schulbücher nur soweit Faktor im Unterricht sind, soweit die Lehrkraft sie zu einem solchen machen. Es wäre ja zumindest denkbar, dass alle oder einzelne LehrerInnen der befragten Kinder die hier analysierten und in der Analyse als unzulänglich erkannten Schulbücher gar nicht oder nur sehr selektiv verwendet und sich in ihrer Unterrichtsgestaltung im Übrigen an den Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik (und nicht an jenen der Lehrerbände) orientiert haben. Dass sie die Schulbücher dennoch für ihre Klasse ausgewählt haben, mag dann daran liegen, dass ihnen vielleicht keine geeigneten Alternativen bekannt waren. Und tatsächlich sind Schulbücher, die sich deutlich stärker als die hier analysierten an der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik orientieren (wie etwa die "Matheprofis 1", SCHÜTTE 2006) erst seit dem Schuljahr 2007/2008 in Österreich für den Unterricht zugelassen.

In jedem Fall ist es nicht zulässig, allein aus dem verwendeten (oder vielleicht ja auch nur für die Klasse bestellten) Schulbuch Rückschlüsse auf den Unterricht selbst zu ziehen. Deshalb wurde ein Reihe von Anstrengungen unternommen, um die *tatsächliche Verwendung der Schulbücher* im Unterricht der befragten Kinder quantitativ und qualitativ möglichst genau in Erfahrung zu bringen. Dies erfolgte einerseits dadurch, dass bei jedem Schulbesuch die Schulbücher der befragten Kinder und zusätzlich ihre Schul- und Hausübungshefte bzw. Arbeitsblattmappen eingesehen wurden. Andererseits wurden die LehrerInnen gebeten, eine Reihe von Fragen zu ihrer Stellung zum Schulbuch und ihrer Verwendung des Schulbuches im Unterricht sowie zu weiteren Aspekten ihrer Unterrichtsgestaltung zu beantworten.

Diesem Teil der empirischen Untersuchungen ist der folgende Abschnitt gewidmet. Im Anschluss daran wird in einer Zusammenschau aus Schulbuchanalyse und den Ergebnissen der LehrerInnenbefragung versucht, zu einer möglichst objektiven Einschätzung des tatsächlichen Unterrichtsgeschehens zu gelangen, oder bescheidener und richtiger: Es wird versucht, jene Aspekte des tatsächlichen Unterrichtsgeschehens zu erfassen, die für die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien von besonderer Bedeutung zu sein scheinen.

7.2 Ergebnisse der LehrerInnenbefragung

7.2.1 Beschreibung der Stichprobe

Befragt wurden 22 Lehrkräfte (vgl. Kap. 6.1), darunter 21 Frauen. Das Dienstalter der Lehrkräfte lag zwischen vier und 37 Dienstjahren (Mittelwert 23,4 Jahre, Median 25 Jahre, Standardabweichung 10,6 Jahre; nur 5 Lehrkräfte hatten weniger als 15 Dienstjahre). Das Dienstalter für sich scheint freilich für die Unterrichtsgestaltung von untergeordneter Bedeutung zu sein; WEINERT und HELMKE befinden dazu im Allgemeinen:

> *"Es gibt im Gegensatz zu anderen Expertisedomänen [...] keinen signifikanten Zusammenhang zwischen der Dauer der Berufstätigkeit von Lehrern, dem Niveau ihres Expertenwissens und ihrem Unterrichtserfolg"* (WEINERT & HELMKE 1996, S. 232).

Auch GERBER, die 175 österreichische VolksschullehrerInnen zu ihrem Mathematikunterricht befragte, fand keine signifikanten Zusammenhänge zwischen dem Dienstalter und den Selbstauskünften der LehrerInnen zu verschiedenen didaktisch-methodisch relevanten Elementen ihres Unterrichts (vgl. GERBER 2007).

Erhoben wurden auch (wieder auf Basis von Selbstauskünften der Lehrkräfte) allfällige zusätzliche Ausbildungen und das Fortbildungsverhalten. Eine Lehrkraft hatte zusätzlich zum Lehramt für Volksschulen auch jenes für Sonderschulen absolviert, zwei hatten ein Hochschulstudium (Psychologie bzw. Sportwissenschaften) begonnen, aber nicht abgeschlossen. Zwei Lehrkräfte gaben an, eine Zusatzausbildung für die Förderung legasthener Kinder, zwei weitere für die Förderung legasthener und rechenschwacher Kinder absolviert zu haben. Die Frage, ob die Lehrkräfte in den letzten sieben Jahren (seit 2000) Fortbildungsveranstaltungen mit Mathematikbezug besucht hätten und wenn ja, in welchem Ausmaß, wurde wie folgt beantwortet (vgl. Tabelle 12):

Tabelle 12: Seit dem Jahr 2000 besuchte Fortbildungsveranstaltungen mit Mathematikbezug nach Selbstauskunft der im Juni 2007 befragten Lehrkräfte (n = 22)

	Anzahl
keine Fortbildung besucht	5 Lehrkräfte
1 oder 2 Fortbildungen besucht	8 Lehrkräfte
3 Fortbildungen besucht	5 Lehrkräfte
5 und mehr Fortbildungen besucht	3 Lehrkräfte
keine Antwort	1 Lehrkraft

7.2.2 Angaben zur Verwendung und Beurteilung des Schulbuches

7.2.2.1 Zufriedenheit mit dem Schulbuch, Übereinstimmung mit dem Lehrerband

Tabelle 13 fasst zusammen, wie die 22 Lehrkräfte das von ihnen verwendete Schulbuch fachlich beurteilt haben.

Tabelle 13: Beurteilung des verwendeten Schulbuches durch die Lehrkräfte (n = 22)

Gesamtnote	Anzahl
"sehr gut"	5 Lehrkräfte
"gut"	12 Lehrkräfte
"befriedigend"	3 Lehrkräfte
"genügend"	1 Lehrkraft
"nicht genügend"	-
keine Bewertung	1 Lehrkraft

Wie die Tabelle deutlich macht, zeigten sich die Lehrkräfte mit den von ihnen verwendeten Schulbüchern in der Regel zufrieden bis sehr zufrieden: Gebeten, ihr Schulbuch nach der Schulnotenskala von 1 (sehr gut) bis 5 (nicht genügend) zu bewerten, vergaben fünf Lehrkräfte die Note 1 und zwölf weitere die Note 2. Nur drei Lehrkräfte beurteilten ihr Schulbuch (zweimal die "Zahlenreise", einmal den "Zahlen-Zug") lediglich mit "befriedigend", eine nur mit "genügend"; eine Lehrkraft enthielt sich der Bewertung. Die durchschnittliche Bewertung lag bei 1,9. Dabei wurden mit Ausnahme von "Funkelsteine 1 Mathematik" (nur von einer Lehrkraft verwendet und von dieser mit 4 beurteilt) alle Bücher etwa gleich gut bewertet.

Ähnlich einheitlich gut fielen die erbetenen Detailbewertungen der Themenreihenfolge (Durchschnittsnote: 2,0), der Themengewichtung (1,9), der didaktischen Qualität der Erarbeitungsseiten (2,0), der didaktischen Qualität der Veranschaulichungen (2,1), der Übungsqualität (1,9) und der Übungsquantität (1,6; die eine Lehrkraft, die die "Funkelsteine" verwendete, vergab hier ein "nicht genügend") aus. Lediglich die Angebote für innere Differenzierung wurden allgemein weniger gut bewertet (Durchschnittsnote: 2,7 bei 13 Bewertungen mit "befriedigend" und drei Bewertungen mit "genügend").

Befragt zum Lehrerbegleitheft, bekundeten 15 von 22 Lehrkräften, die dort gegebenen didaktisch-methodischen Anregungen würden sich "völlig oder weitestgehend" mit ihrer eigenen Linie decken. Vier Lehrkräfte äußerten sich gar nicht zum Lehrerbegleitheft. Nur drei Lehrkräfte hielten – bei einer "im Großen und Ganzen" gegebenen Übereinstimmung – Abweichungen ihrer eigenen Linie von den didaktisch-methodischen Anregungen des Schulbuches fest. Im Einzelnen bemängelte dabei eine Lehrkraft eine Vernachlässigung des Sachrechnens, eine andere die Behandlung von Multiplikation, Division und Zehnerübergang schon im ersten Schuljahr und die dritte die "sehr späte" Behandlung des Zahlenraums bis 20 (die sie, ihren weiteren Auskünften zufolge, gleichwohl im Unterricht mitmachte).

7.2.2.2 Ausmaß der Schulbuchverwendung

Beim zweiten und dritten Interview wurde jeweils auch Einsicht in die Schulbücher, Schulhefte und Übungsblattmappen der Kinder genommen. Dabei zeigte sich, dass die durchgängig für das Arbeiten im Buch konzipierten Schulbücher von den Kindern vor allem im ersten Schulhalbjahr (bis zum zweiten Interview) in der Regel nahezu vollständig (Seite für Seite, Übungspäckchen für Übungspäckchen) durchgearbeitet worden waren. Nur in einer von 22 Klassen waren zu diesem Zeitpunkt mehr als zwei Seiten der Schulbücher nicht vollständig ausgefüllt.

Im zweiten Schulhalbjahr waren Auslassungen etwas häufiger. Sie betrafen aber zumeist ganze Themen: Drei Lehrkräfte behandelten im ersten Schuljahr keine Aufgaben mit Zehnerübergang (s. Kap. 7.2.5). Drei ließen den im Buch thematisierten Einstieg ins Multiplizieren und Dividieren aus, eine nur den ins Dividieren. Zwei Lehrkräfte verzichteten auf alle jene Buchseiten, auf denen Kinder zum Addieren und Subtrahieren am Zahlenstrahl aufgefordert werden. Im Rahmen der von ihnen im Unterricht tatsächlich behandelten Themenbereiche ließen aber nur drei Lehrkräfte einzelne Übungen oder ganze Schulbuchseiten unbearbeitet.

Weitere Aufschlüsse über die Verwendung der Schulbücher im Unterricht ergab eine getrennt erfolgte Befragung der Lehrkräfte zur Häufigkeit verschiedener Aktivitäten in ihrem Mathematik-Unterricht. 12 der 22 Lehrkräfte (54,5 Prozent) gaben dabei an, dass die Aktivität "Kinder arbeiten im Schulbuch oder bearbeiten Aufgaben aus dem Schulbuch im Heft" Bestandteil "(fast) jeder Mathematikstunde" gewesen sei. Keine andere der 22 im Fragebogen angebotenen Aktivitäten wurde auch nur annähernd so häufig als Element jeder oder nahezu jeder Mathematikstunde angegeben. Sieben weitere Lehrkräfte erklärten, dass Arbeiten im Schulbuch üblicherweise zumindest "öfter als einmal pro Woche" vorkam. Nur eine Lehrkraft gab als Häufigkeit dieser Aktivität nur "etwa einmal pro Woche" an. Das scheint (wenn überhaupt) glaubwürdig nur für das zweite Schulhalbjahr, in dem diese Lehrkraft (von ihrem Schulbuch "Zahlen-Zug" abweichend) die Zehnerüberschreitung nicht behandelte. Kinder ihrer Klasse hatten tatsächlich 45 von 93 Seiten des zweiten Bandes (im Wesentlichen jene mit Zehnerschreitungen) nicht bearbeitet, aber *sämtliche* Seiten des ersten Bandes. Offenbar wurde im zweiten Halbjahr in dieser Klasse verstärkt mit Arbeitsblättern gearbeitet; die Häufigkeit von "Kinder bearbeiten Arbeitsblätter" gab die Lehrerin mit "öfter als einmal pro Woche" an.

Die beiden restlichen LehrerInnen gaben an, in ihrem Mathematikunterricht hätten die Kinder "nie oder nur sehr selten" im Schulbuch gearbeitet. Das erscheint wenig glaubwürdig in Zusammenschau mit der Dokumentenanalyse (auch die Kinder dieser beiden Klassen hatten die Schulbuchseiten zu nahezu 100 Prozent durchgearbeitet) und den kontrastierenden Angaben dieser LehrerInnen im vorderen Teil des Fragebogens, wonach die Kinder ca. 95 Prozent bzw. ca. 65 Prozent der Schulbuchseiten in der Klasse bearbeitet hätten.

Dass die Schulbuchseiten der Haupt- oder Erarbeitungsteile der verschiedenen Schulbücher zum weit überwiegenden Teil tatsächlich in den Unterrichtsstunden selbst bearbeitet wurden, geht auch aus den diesbezüglichen Angaben aller anderen Lehrkräfte hervor. Demnach wurden durchschnittlich 79 Prozent dieser Seiten von den Kindern im Rahmen des Klassenunterrichts abgearbeitet. Die Seiten der Neben- oder Übungsteile seien dagegen mehrheitlich als Hausübung (durchschnittlich zu 62 Prozent) aufgegeben worden.

7.2.2.3 Behandlung von Zahlenräumen, Reihenfolge der behandelten Themen

14 der 22 Lehrkräfte gaben an, "durchgehend die im Buch vorgegebene Reihenfolge der Themen" eingehalten zu haben.

Von den acht genannten Abweichungen betrafen sechs die Behandlung der Zehnerüberschreitung: Zwei Lehrkräfte erarbeiteten sie früher als im Buch vorgeschlagen, eine später. Zwei weitere gaben an, die Zehnerüberschreitung im ersten Schuljahr gar nicht behandelt und für das zweite Schuljahr "aufgespart" zu haben, eine weitere erarbeitete die Zehnerüberschreitung "nur mit einem kleinen Teil der Klasse".

Von den restlichen beiden Abweichungen von der Themenreihenfolge des Schulbuches betraf eine die Geometrie. Nur eine Kollegin gab an, in der Erarbeitung des Zahlenraums bis 10 von den Schulbuchvorgaben abgewichen zu sein: Anders als in ihrem Schulbuch ("Zahlenreise 1") vorgesehen, habe sie mit den Kindern in einer ersten Phase ausschließlich Plusrechnungen und erst später auch Minusrechnungen behandelt.

Diese starke *thematische* Orientierung am Schulbuch manifestiert sich auch in der Behandlung der *Zahlenräume* im Unterricht: *21 der 22 Lehrkräfte* wählten den Einstiegszahlenraum in *völliger* Übereinstimmung mit dem von ihnen verwendeten Schulbuch. *Nur eine* Lehrkraft, die "Mein erstes Mathematikbuch" verwendete, wich von den Vorgaben dieses Schulbuches ab, aber nur insofern, als sie die Kinder von Anfang an im Zahlenraum bis fünf (und nicht, wie vom Schulbuch vorgesehen, bis vier) arbeiten ließ (vgl. Kap. 7.1.1).

Tabelle 14 macht deutlich, wie viele Wochen der Arithmetikunterricht in Abhängigkeit vom verwendeten Schulbuch jeweils im gewählten Einstiegszahlenraum eingegrenzt blieb und nach wie vielen Wochen die Zahl 10 erstmals im Unterricht behandelt wurde.

Tabelle 14: Behandlung von Zahlenräumen in den untersuchten Klassen in Abhängigkeit vom verwendeten Schulbuch

Verwendetes Schulbuch	Einstiegs-zahlenraum	Anzahl der Klassen	im Einstiegs-ZR durchschnittlich	erstmalige Behandlung der Zahl 10 nach durchschnittlich
Zahlenreise 1	bis 4	11	7 Wochen	20 Wochen
Zahlen-Zug 1	bis 5	5	6,4 Wochen	11,2 Wochen
Mein erstes Mathematikbuch	bis 4 bis 5	1 1	9 Wochen	22,5 Wochen
Matheblitz 1	bis 4	2	11,5 Wochen	25 Wochen
Funkelsteine 1 Mathematik	Bis 6	1	16 Wochen	18 Wochen

Die *Anzahl der Wochen*, die im jeweiligen Einstiegszahlenraum und den im Folgenden behandelten Zahlenräumen gearbeitet wurde, deckte sich also weitgehend mit den diesbezüglichen Empfehlungen der Lehrerhandbücher. Wenn überhaupt davon abgewichen wurde, dann mehrheitlich in Richtung einer *noch längeren Verweildauer* in Zahlenräumen kleiner als zehn.

In den elf "Zahlenreise"-Klassen wurde gemäß Selbstauskunft der Lehrkräfte durchschnittlich sieben Wochen lang im Zahlenraum bis 4 gearbeitet (Empfehlung im Lehrerhandbuch: acht

Wochen), und es vergingen (gleichfalls nach Selbstauskunft) durchschnittlich 20 Wochen, ehe erstmals die Zahl 10 behandelt wurde (Empfehlung im Lehrerhandbuch: 20 Wochen). Die Angaben von zwei Lehrkräften lagen deutlich unter jenen der anderen neun; demnach hätten diese beiden Lehrkräfte die Zahl 10 in der 14. bzw. 15. Schulwoche eingeführt. Das entspricht aber wohl nicht den Tatsachen; in den Schulübungsheften der Kinder dieser Klassen fand sich die erste Schulübung im Zahlenraum bis zehn jedenfalls erst jeweils in der 18. Schulwoche, also nach den Weihnachtsferien.

In den fünf "Zahlen-Zug"-Klassen wurde der Einstiegszahlenraum bis 5 durchschnittlich 6,4 Wochen lang bearbeitet, und es vergingen durchschnittlich 11,2 Wochen bis zur Einführung der Zahl 10 (Empfehlungen des Begleitheftes: vier bzw. acht Wochen).

Die beiden Lehrkräfte, die "Mein erstes Mathematikbuch" verwendeten, blieben mit ihrer Klasse zehn bzw. acht Wochen im Einstiegszahlenraum 4 bzw. 5 (s.o.) (Empfehlung im Begleitheft: acht Wochen). Bis zur Einführung der Zahl 10 vergingen in diesen Klassen 21 bzw. 24 Wochen (Empfehlung im Begleitheft: 21 Wochen).

Eine der beiden "Matheblitz"-Klassen arbeitete neun Wochen lang im Einstiegszahlenraum bis 4 (das Begleitheft empfiehlt acht Wochen) und behandelte die Zahl 10 erstmals in der 25. Schulwoche (Empfehlung im Begleitheft: 21. Schulwoche). In der anderen "Matheblitz"-Klasse wurde sogar 14 Wochen lang nur im Zahlenbereich bis 4 gearbeitet und erst in der 27. Schulwoche erstmals im gesamten Zahlenbereich bis 10. Die Lehrkraft begründete dies damit, dass die Klasse "mit 5 verhaltensauffälligen von 12 Schülern eine Problemklasse [ist], die das Arbeitstempo stark verlangsamt hat".

Die "Funkelsteine"-Klasse arbeitete 14 Wochen lang im Einstiegszahlenraum bis 6 (Empfehlung des Lehrerbandes: sieben Wochen) und erstmals in der 19. Schulwoche im gesamten Zahlenbereich bis 10 (Empfehlung des Lehrerbandes: in der zwölften Woche).

7.2.2.4 Über das Schulbuchangebot hinausreichende Übungen

Beim zweiten und dritten Schulbesuch wurde jeweils auch versucht, Einblick in die über das Schulbuch hinausreichenden Übungsaufgaben der Kinder zu gewinnen. Das war nicht lückenlos möglich: In drei der 22 Klassen hatten die interviewten Kinder ihre bis zum Interviewzeitpunkt bearbeiteten Übungsblätter bzw. Haus- und Schulübungshefte nicht oder nicht vollständig in der Klasse und konnten diese daher auch nicht vorweisen; dies, obwohl die Lehrkräfte zuvor darum ersucht worden waren, dafür Sorge zu tragen, dass der Interviewer Einsicht in diese Dokumente nehmen könne. In einer Reihe von Klassen wurde ein Teil (in manchen gemäß Lehrkraft der Großteil) des über das Arbeiten im Schulbuch hinaus gehenden Übens als

Freiarbeit im "Stationenbetrieb" organisiert. Die Kinder übten dabei also in weitgehend selbstständiger Einzelarbeit wiederholt etwa an Lernkarteien, mit Lernspielen oder rechneten mit wasserlöslichem Stift auf laminierten Übungsvorlagen, sodass dieser Teil des Übens quantitativ nicht exakt erfasst werden konnte. Die qualitative Analyse der Lernkarteien und Übungsvorlagen an Ort und Stelle ergab, dass es sich dabei fast ausschließlich um "graue Päckchen" und "bunte Hunde" (vgl. Kap. 4.6) handelte.

Genauer erhoben wurden die Übungen in Heften und Arbeitsblattmappen. Diese wurden zum einen im Interesse einer zeitökonomischen Erfassung nach Seiten (nicht nach einzelnen Übungsaufgaben) gezählt; damit sollte aber der quantitative Aspekt hinreichend genau erfasst worden sein. Zum anderen wurden auch diese zusätzlichen Übungsaufgaben nach den bereits in der Schulbuchanalyse angewandten Kodierregeln den in Kap. 7.1.4 erläuterten Kategorien von Übungspäckchen zugeordnet.

Es ergaben sich große Differenzen in der *Quantität* der über das Schulbuch hinaus eingesetzten Übungsaufgaben zu den additiven Grundaufgaben (nur diese wurden erfasst): Sie reichte von vier Zusatzblättern bzw. Übungsseiten in einer Klasse bis zu 78 zusätzlichen Übungsblättern in einer anderen Klassen. Durchschnittlich kamen für das Üben der additiven Grundaufgaben 46,5 zusätzliche Übungsseiten bzw. –blätter zum Einsatz. Die *Qualität* dieses zusätzlichen Übungsangebots war aber wieder sehr einheitlich, es handelte sich (wie schon bei den Übungspäckchen der Schulbücher) überwiegend um unstrukturierte Übungen und nur in wenigen Fällen (4,8 Prozent aller in der beschriebenen Weise erfassten Zusatzübungen) um "schöne Päckchen". Diese wiederum waren fast ausschließlich unter die Sub-Kategorie "schematisch-schön" einzuordnen (vgl. Kap. 7.1.4).

7.2.3 Angaben zum Umgang mit Anschauungs- und Erarbeitungsmaterial

Wie in Kapitel 4.1 ausgeführt, ist die Verwendung insbesondere von *strukturiertem* arithmetischem Material eine hilfreiche (wenn auch keinesfalls schon hinreichende) Voraussetzung für die Erarbeitung und Festigung einer strukturierten Zahlauffassung und in weiterer Folge für die Erarbeitung und Sicherung von nicht-zählenden Rechenstrategien. Die Lehrkräfte wurden deshalb im Fragebogen gebeten, jene Materialien anzugeben, die sie im Unterricht selbst für Demonstrationszwecke verwendet bzw. die sie den Kindern im Unterricht und zur Verwendung bei Hausübungen zur Verfügung gestellt bzw. nahegelegt haben.

Für die Auswertung dieser Angaben wurden alle jene von den Lehrkräften genannten Materialien als "strukturiert" kategorisiert, die eine quasi-simultane Erfassung von Anzahlen größer oder gleich vier erlauben. Das sind etwa das Zehner- und Zwanzigerfeld oder auch "Rechenschiffchen" mit Fünfereinheiten, die mit Wendeplättchen (mit unterschiedlicher Färbung auf den beiden Seiten der Plättchen) befüllt werden; oder auch ein Rechenrahmen mit farblicher Unterscheidung von je fünf Kugeln an einer Zehnerstange; aber auch die Finger, die gewissermaßen auf "natürliche Weise" die Strukturierung mit der "Kraft der Fünf" ermöglichen. Dass solche Strukturen nicht evident sind und eine nicht-zählende Erfassung und Verwendung dieser Materialien daher keinesfalls selbstverständlich ist, sondern mit vielen Kindern erst erarbeitet werden muss, wurde in Kapitel 4.1 bereits dargestellt.

Als "nicht-strukturiert" wurden dagegen alle jene Materialien kategorisiert, mit denen Anzahlen *nicht per se* in simultan-erfassbare Teil-Anzahlen gegliedert dargestellt werden. Darunter fallen etwa Alltagsmaterialien wie Kastanien, Stifte, Holz- oder Plastikwürfel, aber etwa auch Wendeplättchen, sofern diese *nicht* in die Fünfer-Struktur von Rechenschiffchen bzw. des Zehner- und Zwanzigerfeldes eingepasst werden. Freilich können auch solche Materialien *strukturiert werden*; sie können also dafür verwendet werden, Kinder selbst Anzahlen so darstellen zu lassen, dass diese quasi-simultan erfassbar werden. Diese Struktur ist aber nicht eine Eigenschaft des Materials selbst.

Gleichfalls als nicht-strukturiert gewertet wurde der durchnummerierte Zahlenstrahl. Auch dieser böte zwar bei deutlicher Markierung der 5 und 10 die Möglichkeit einer Strukturierung. Und bei Interpretation des Zahlenstrahls als (kardinales) Längenmodell von Zahlen ließen sich auch auf dem Zahlenstrahl Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen und insofern strukturiert darstellen. In keinem der verwendeten Schulbücher wird aber eine solche Interpretation nahegelegt. Der Zahlenstrahl wird dort vielmehr durchgehend als Darstellung des ordinalen Zahlaspekts verwendet, und Kinder werden in diesen Büchern am Zahlenstrahl zu Zählstrategien unter Missachtung aller Zahlstrukturen geradezu aufgefordert (vgl. Kap. 7.1.2.3). Tatsächlich entspricht die zählend-ordinale Verwendung des durchnummerierten Zahlenstrahls wohl auch dem "natürlichen" Zugang von Kindern zu diesem Darstellungsmittel. Insgesamt erscheint der Zahlenstrahl zumindest in *dieser* (durchnummerierten) Form zur Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien und damit für den arithmetischen Erstunterricht wenig geeignet (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 82ff; HÖTHKER & SELTER 1995, S. 124). Das "Zahlenbuch 1" kommt denn auch gänzlich ohne Zahlenstrahl aus (vgl. WITTMANN & MÜLLER 2004a), und Vertreter der aktuellen Fachdidaktik, die wie LORENZ für die frühe Verwendung des Zahlenstrahls als Erarbeitungs- und Darstellungsmaterial eintreten, haben denn auch gerade nicht den *durchnummerierten* Zahlenstrahl, sondern den "*leeren* Zahlenstrahl" oder "Rechenstrich" im Sinne. Auf diesem ist keine Skalierung vorgegeben, er soll ja gerade von den Kindern selbst im Sinne ihrer Zahlvorstellungen und Rechenstrategien erst strukturiert werden (vgl. LORENZ 1977, S. 96 ff).

Ordnet man nun die von den Lehrkräften gemäß Selbstauskunft im Unterricht verwendeten bzw. den Kindern zur Verfügung gestellten Materialien den genannten Kategorien zu, ergibt sich folgendes Bild:

19 von 21 Lehrkräften gaben explizit an, unstrukturiertes Material für Demonstrationszwecke verwendet zu haben (eine Lehrkraft beantwortete diesen Teil des Fragebogens nicht). Das für sich genommen lässt freilich keine Rückschlüsse auf die fachdidaktische Qualität des Unterrichts zu, da unstrukturiertes Material für bestimmte Zwecke (etwa zur Darstellung einer *Operation* oder zur Thematisierung der Nützlichkeit strukturierter Darstellungen) durchaus adäquat ist. Für weitergehende Zwecke wie die Erarbeitung nicht-zählender Lösungsstrategien sollte es aber nicht bei unstrukturierten Materialien bleiben (vgl. SCHIPPER 2003b, S. 224-227; GAIDOSCHIK 2007, S. 77); hierfür sind, wie ausgeführt, strukturierte Materialien, vorzugsweise solche mit Fünferstruktur, zu bevorzugen (vgl. Kap. 4.1).

Der Einsatz auch von solchen strukturierten Materialien (abgesehen von den Fingern; dazu weiter unten) zu Demonstrationszwecken wurde nur von fünf Lehrkräften explizit angegeben. Diese Angaben lassen sich freilich nicht ohne weiteres dahingehend interpretieren, dass die anderen 17 Lehrkräfte *keine* strukturierten Materialien verwendet haben, da die Frage ja offen formuliert war. Aus Sorge, damit einen hohen Anteil von "sozial erwünschten Antworten" zu provozieren (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 233) wurde also nicht explizit danach gefragt, ob *strukturiertes* Material verwendet wurde. Die Lehrkräfte sollten vielmehr ohne weitere Vorgaben angeben, *welche(s) Material(ien)* sie im abgelaufenen Schuljahr im Unterricht verwendet hätten. Das gänzliche Fehlen strukturierter Materialien in den Angaben von 17 Lehrkräften weckt allerdings doch den Verdacht, dass zumindest diese 17 Lehrkräfte dem Unterschied zwischen strukturierten und nicht-strukturierten Materialien nicht jene Beachtung beigemessen haben, die dieser Unterschied aus fachdidaktischer Sicht tatsächlich verdient.

Dieser Verdacht wird weiter erhärtet durch die Antworten der Lehrkräfte auf die gleichfalls offen formulierte Frage nach jenen Materialien, die von den Kindern im Unterricht und bei Hausübungen verwendet werden sollten bzw. durften: Auch hier nannten 19 von 21 Lehrkräften (für den Unterricht) bzw. 18 von 21 Lehrkräften (für Hausübungen) unstrukturierte Materialien, aber nur sechs Lehrkräfte (für den Unterricht) bzw. zwei Lehrkräfte (für Hausübungen) auch strukturierte.

Die Lehrkräfte wurden weiters gefragt, ob sie auf bestimmte Verwendungsweisen der von ihnen angegebenen Materialien Wert gelegt hätten oder ob "jede/r [Schüler/in] das Material wann, auf welche Weise, wie lange, wie oft er/sie wollte" verwendet hätte. Die Fachliteratur (vgl. etwa BAUER 1992) wie auch zahlreiche Gespräche, die der Verfasser in den letzten Jahren mit LehrerInnen geführt hat, weisen darauf hin, dass zur Verwendung der Finger als Erarbeitungsmaterial innerhalb der Lehrerschaft höchst kontroverse Standpunkte existieren. Um dies zu berücksichtigen und nach Möglichkeit näher zu erhellen, wurden die Lehrkräfte im Fragebogen gesondert auch zur Verwendung von Fingern in ihrem Mathematikunterricht befragt. Im Folgenden werden zunächst die Angaben zur Materialverwendung im Allgemeinen, dann jene zur Verwendung der Finger wiedergegeben und kommentiert.

7.2.3.1 Worauf beim Einsatz von *Material im Allgemeinen* Wert gelegt wurde

Elf von 21 Lehrkräften gaben an, sie hätten den Kindern "völlig freie Hand" bei der Verwendung der von ihnen zuvor genannten (und wie erläutert mehrheitlich nicht-strukturierten) Materialien gelassen. Das ist insofern problematisch, als damit gerechnet werden muss, dass zumindest manche Kinder das Material (selbst wenn dieses strukturiert gewesen sein sollte) *unter solchen Umständen* wenn überhaupt, dann lediglich als Zählhilfe verwendet haben werden (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 73). In dieser Weise verwendet, ist Material keine Unterstützung zur Überwindung des zählenden Rechnens, sondern trägt tendenziell zu dessen Verfestigung bei (vgl. Kap. 4.2).

Die anderen zehn Lehrkräfte, die diesen Teil des Fragebogens beantworteten, formulierten zwar verschiedene Gesichtspunkte, die für sie bei der Verwendung von Erarbeitungsmaterial wichtig gewesen seien. *Keine einzige Lehrkraft* ließ aber in diesem Teil des Fragebogens in irgendeiner Weise erkennen, dass sie im Unterricht auf eine nicht-zählende, Strukturen erfassende und Strukturen nutzende Verwendung von (zu diesem Zweck) strukturierten Materialien hingearbeitet hätte.

So war einer Lehrkraft nach eigener Auskunft zwar das Folgende wichtig:

> *"Jeder stellt seinen Lösungsweg (+Material) den andern K.[indern] vor. Wir entscheiden dann gem.[einsam], welches Material wir für dieses Problem verwenden."*

Das erweckt zunächst den Eindruck eines Unterrichts, der Kinder – ganz im Einklang mit der aktuellen Fachdidaktik – zum Finden eigener Lösungswege ermutigt und diese Lösungswege zum Gegenstand des Kommunizierens und Argumentierens in der Klasse macht (vgl. Kap. 4). Auch dass in weiterer Folge offenbar doch eine "gemeinsame Entscheidung" für jeweils ein bestimmtes Material für ein bestimmtes Problem erfolgte, kann fachdidaktisch durchaus berechtigt sein. Ein wichtiger Gesichtspunkt bei der Materialverwendung sollte ja darin bestehen, ob Kinder dadurch beim Entdecken und Finden nicht-zählender Strategien unterstützt werden, und dafür ist eben nicht jedes Material in gleicher Weise geeignet (siehe Kap. 4.2).

Die zitierte Lehrkraft macht im Fragebogen freilich keine Angaben dazu, nach welchen Kriterien diese Entscheidungen für ein bestimmtes Material getroffen wurden. Dieselbe Lehrkraft hatte allerdings im persönlichen Gespräch beim zweiten Besuch Mitte des Schuljahres von sich aus erklärt, sie wolle den Kindern künftig einen "Zahlenstreifen bis 10 geben" (gemeint war ein Zahlenstrahl), "damit sie hüpfen können und nicht die Finger nehmen". Hier sollte also der Intention der Lehrkraft nach das *eine* zählend verwendete Material (Finger) durch ein *anderes*, gleichfalls zählend verwendetes Material (Zahlenstrahl) abgelöst werden. Offenkundig war also das Bestreben, Kinder zu einem *nicht-zählenden* Materialgebrauch zu führen, für diese Lehrkraft *nicht* leitend bei ihren Entscheidungen für oder gegen ein bestimmtes Material. Zugleich wird aber deutlich, dass diese Lehrkraft offensichtlich die zählende Verwendung von Fingern, nicht aber die zählende Verwendung des Zahlenstrahls für problematisch hält; mehr dazu weiter unten.

Auch die von den übrigen neun Lehrkräften formulierten Einschränkungen bzw. Vorgaben für den Materialeinsatz lassen nicht erkennen, dass das Material gezielt für die Erarbeitung einer strukturierten Zahlauffassung und von nicht-zählenden Rechenstrategien genutzt worden wäre. Im Einzelnen wurde von den LehrerInnen dazu das Folgende angemerkt:

(1) "Abwechslung in der Anschauung"
(2) "nur bei schwachen Schülern in der Übungsphase"
(3) "Legematerial: Brettchen von links beginnend belegen"
(4) "Je nach Problemstellung durften die Kinder freie Legeübungen machen od.[er] sie bekommen genaue Anweisungen (Farbe, Formen)."
(5) "Bei der Einführung der Materialien muss damit gearbeitet werden." [Die Betonung liegt hier vermutlich auf *muss*, wohl in gedachter zeitlicher Gegenüberstellung: Anfangs *müssen* die Kinder das Material verwenden, *später* wird es ihnen freigestellt; Anm. M.G.]
(6) "dass alle Kinder mit dem gleichen Material arbeiten, damit die Problemkinder nicht abgelenkt werden"
(7) "keine Materialverwendung bei Rechenübungen und beim Kopfrechentraining"
(8) "Übergang zur Rechenop.[eration] ohne Hilfsmittel bis Ende des 1. Schuljahres"
(9) "nicht zu lange mit Material, Finger 'verschwinden' lassen, nicht zu viel zählen"

Die drei zuletzt zitierten Anmerkungen lassen erkennen, dass diese Lehrkräfte *als Ziel* das *materialfreie* Lösen von Rechenoperationen angestrebt haben (vgl. aber Kap. 7.3.2.2). Nur Anmerkung (9) stellt dabei aber einen Zusammenhang zwischen *materialfrei* und *nicht-zählend* zumindest insofern her, als diese Lehrkraft Wert darauf gelegt habe, dass die Kinder "*nicht zu viel* zählen". Tatsächlich ist es aus fachdidaktischer Sicht wichtig, zwischen "materialfrei" und "nicht-zählend" begrifflich zu unterscheiden. Der Verzicht auf Material ist keinesfalls gleichbedeutend mit nicht-zählendem Rechnen, viele Kinder rechnen verbal-zählend, ohne äußere Zählhilfe (vgl. Kap. 2).

Aber selbst wenn das Ziel tatsächlich, im Einklang mit der aktuellen Fachdidaktik, nicht-zählendes (und nicht nur materialfreies) Rechnen lautet, so ist es natürlich kein taugliches Konzept zur Erreichung dieses Ziels, wenn (in welcher Form?) darauf *geachtet* wird, dass Kinder nicht "*zu lang*" und nicht "*zu viel* zählen". Kinder rechnen ja deshalb zählend, weil ihnen andere Strategien entweder noch nicht zugänglich sind und/oder weil sie in anderen Strategien keinen Vorteil gegenüber dem zählenden Rechnen erkennen. Beide Varianten sind nicht dadurch aus der Welt zu schaffen, dass man zählendes Rechnen ab einem bestimmten Zeitpunkt (wie es in "zu lang" und "zu viel" zumindest angedeutet wird) für unerwünscht erklärt oder sonst auf irgendeine Weise zu unterbinden versucht. Bei einem Kind, das auf Grund seines Zahl- und Operationsverständnisses und mangels Automatisation zählend rechnet, kann das Gebot oder auch nur die nachdrückliche Ermahnung, auf Material zu verzichten, wohl allenfalls zweierlei bewirken: Entweder es bemüht sich, die Lösung durch rein verbales Zählen zu finden. Oder es versucht, Zählhilfen (in der Regel dann die Finger) möglicht unbemerkt zu verwenden (vgl. GAIDOSCHIK 2009b, S. 5). In beiden Varianten wird also weiterhin zählend gerechnet, allerdings mit erheblich erhöhtem Konzentrationsaufwand (zumindest beim verbal-zählenden Rechnen) und vermutlich höherer Fehlerquote. Dass aber zählendes Rechnen nicht einfach durch anhaltend zählendes Rechnen überwunden wird, ist in der Kritik an SIEGLER (vgl. Kap. 2.3) hinreichend erläutert worden.

Es reicht zur Überwindung des zählenden Rechnens also nicht aus und ist tendenziell sogar kontraproduktiv, wenn man Kindern arithmetisches Material *ab einem bestimmten Zeitpunkt* (wie in Anmerkung (8) und (9) angedeutet) *einfach entzieht*. Und auch der in Anmerkung (7) bekundete Materialentzug "bei Rechenübungen" ist nur dann eine zielführende didaktische Maßnahme, wenn zuvor sichergestellt wurde, dass die Kinder Alternativen zum zählenden Rechnen erworben haben und darauf geachtet wird, dass sie diese Alternativen beim Rechnen auch tatsächlich anwenden. Ein Bewusstsein davon, dass gerade arithmetisches Material den Erwerb solcher Alternativen unterstützen kann, dafür aber bestimmte Gesichtspunkte bei der Auswahl und vor allem bei der Verwendung des Materials beachtet werden müssen (vgl. Kap. 4.2), wird aus *keiner* der zitierten Anmerkungen in irgendeiner Weise deutlich.

Deutlich oder zumindest angedeutet werden hingegen einige Positionen zum Einsatz von arithmetischem Material, die aus fachdidaktischer Sicht wenigstens bedenklich, zum Teil auch einfach unhaltbar sind:

Anmerkung (1) erinnert an das "von DIENES in den 60-er Jahren propagierte didaktische Prinzip [..] der Variation der Veranschaulichungsmittel" (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 261). Dieses ist aber, wie KRAUTHAUSEN und SCHERER festhalten, "im Lichte neuerer Erkenntnisse relativiert zu betrachten", denn:

> *"Sparsamkeit* [in der Verwendung von Veranschaulichungsmitteln; Anm. M.G.] *ist insbesondere für schwächere Schülerinnen und Schüler hilfreich, da jedes neue Material eine eigene Fremdsprache darstellt, in die die arithmetischen Operationen übertragen, übersetzt werden müssen. Materialvielfalt ist eher ein Ausdruck von Hilflosigkeit, bestenfalls einer theoretischen Hoffnung"* (LORENZ 2000a, S. 21, zit. nach KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 261).

Aus Anmerkung (2) spricht wohl die Auffassung, dass der Einsatz von arithmetischem Material "nur für die schwachen" SchülerInnen zweckmäßig sei. Material wird hier offenbar lediglich als "eine 'Krücke' für die Schwächeren" (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 255) betrachtet. KRAUTHAUSEN und SCHERER weisen darauf hin, dass gerade diese Haltung, sofern sie den Kindern auch nur "unterschwellig" vermittelt wird, dazu beitragen kann, dass "womöglich auch Kinder das konkrete Handeln verweigern werden, die es aus Sicht der Lehrerin durchaus noch nötig hätten" (a.a.O., S. 255). Zudem lässt diese Anmerkung – die ja Antwort auf die Frage geben soll, worauf die Lehrkraft bei der Verwendung von arithmetischem Material *Wert* gelegt habe – völlig offen, was genau die "schwachen Schüler" denn mit dem Material in der "Übungsphase" getan haben. Als *Zählhilfe* verwendet, wäre das Material *auch und gerade* "für die schwachen" SchülerInnen jedenfalls *keine Hilfe bei der Überwindung des zählenden Rechnens* gewesen (vgl. SCHIPPER 2003b, S. 223 und Kap. 4.2).

Anmerkung (3) gibt die "Legeanordnung" der "Zahlenreise 1" wieder, jenes Schulbuchs also, das diese Lehrkraft im Unterricht verwendet hat. Dass die Befolgung dieser Anordnung einer Anleitung zum zählenden Rechnen gleich kommt, wurde bereits in Kap. 7.1.2.1 kritisiert. Auch die Anmerkungen (4), (5) und (6) bringen zum Ausdruck, dass im Unterricht zwar bestimmte *Vorschriften* für den Umgang mit Material für wichtig gehalten wurden. Nichts deutet aber darauf hin, dass es diesen Lehrkräften dabei auf das quasi-simultane Erfassen von Strukturen und das Entwickeln von nicht-zählenden Strategien angekommen wäre. Anmerkung (5) und vielleicht auch (6) lassen hingegen jene "Überinterpretation und formalistische Handhabung des E-I-S-Prinzips (enaktiv – ikonisch – symbolisch; BRUNER 1974, S. 16f., S. 49)" vermuten, vor der KRAUTHAUSEN und SCHERER warnen. Denn es ist nicht zielführend, Kinder zu Materialhandlungen zu verpflichten, deren Sinn sie nicht einsehen. Aber nur wenn sie den Sinn von Materialhandlungen nicht einsehen, ist es nötig, sie dazu zu *verpflichten*. Da solche Handlungen aus Sicht der Kinder aber mitunter

> *"sehr aufwendig werden, [...] sollte es nicht verwundern, dass Kinder unter solchen Umständen z.B. das Rechnen mit konkreten Material als 'schwierig' einstufen und stattdessen auf andere Methoden zurückgreifen, die durchaus fehleranfälliger sein können"* (KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 255).

Zusammenfassung:
Auf die offen formulierte Frage, worauf sie beim Einsatz von Veranschaulichungs- und Erarbeitungsmaterial im Unterricht Wert gelegt hätte, lässt *keine einzige Lehrkraft* erkennen, dass sie auf quasi-simultanes Erfassen von Zahlstrukturen geachtet und das Material als Mittel zur Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien genutzt hätte (vgl. dazu aber auch Kap. 7.2.4). Zumindest in manchen Klassen wurde offenbar sogar darauf Wert gelegt, dass Materialien für zählende Strategien verwendet wurden. Und in der Mehrzahl der Klassen wurden den Angaben der Lehrkräfte zufolge offenbar zumindest keine gezielten Maßnahmen ergriffen, um zu verhindern, dass Kinder das Material lediglich als Unterstützung für Zählstrategien einsetzen.

7.2.3.2 Worauf beim Einsatz der *Finger* im Arithmetikunterricht Wert gelegt wurde

11 von 21 Lehrkräften gaben explizit an, auch die Finger als Demonstrationsmittel im Unterricht verwendet zu haben. Und 14 von 21 nannten die Finger explizit als eines der Mittel, die die "Kinder selbst [...] im Klassen-Unterricht" verwenden konnten. (Eine Lehrkraft beantwortete diesen Teil des Fragebogens nicht.)

Da die Frage nach den verwendeten Anschauungsmitteln offen gestellt war (s. Kap. 7.2.3.1), kann aus diesen Antworten nicht gefolgert werden, dass die anderen Lehrkräfte die Finger *nicht* als Mittel verwendet bzw. zugelassen haben. Tatsächlich gaben in einer getrennt zu beantwortenden Frage *alle* 21 Lehrkräfte an, dass sie "die Verwendung der Finger im ersten Schuljahr [...] grundsätzlich positiv" sehen. Als Begründung dafür wurde im Wesentlichen genannt, dass die Finger "immer dabei sind" (mit diesen oder ähnlichen Worten von 18 Lehrkräften). Eine Lehrkraft betonte zusätzlich, dass durch die Finger "ZR 5 + ZR 10 ganz toll dargestellt" seien, zwei andere erklärten, die Finger gäben "eine gewisse Sicherheit", zwei hoben hervor, dass dies "für einzelne Kinder" bzw. "rechenschwache Kinder" von besonderer Bedeutung sei.

Wie bereits erwähnt, war und ist die Eignung der Finger als Erarbeitungs- und Veranschaulichungsmittel unter FachdidaktikerInnen umstritten (einen "Überblick über die historische Entwicklung der Diskussion zum Fingerrechnen" liefert BAUER 1992, S. 2f). Es fällt auf, dass sich die im Rahmen dieser Arbeit befragten Lehrkräfte zu den Fingern mehrheitlich akzentuierter äußerten als zu arithmetischem Material im Allgemeinen:

- Zwei Lehrkräfte erklärten, es sei wichtig, dass Kinder die "Finger nicht verstecken" müssen; die Verwendung der Finger dürfe "kein Problem sein" und müsse "in der Klasse und mit Eltern" besprochen werden. Zu anderen Materialien findet sich in den Fragebögen keine vergleichbare Anmerkung.
- Eine dieser beiden Lehrkräfte betonte, dass Kinder "die Finger so lange verwenden [sollen], so lange sie sie brauchen". Sechs weitere machten zumindest keine Anmerkungen, die

darauf schließen lassen, dass sie die Verwendung der Finger in irgendeiner Weise (sei es zeitlich oder durch Hinarbeiten auf eine bestimmte Weise des Einsatzes) gesteuert oder eingeschränkt hätten. Die anderen 14 Lehrkräfte aber erklärten explizit, dass sie "bei der Verwendung der Finger im ersten Schuljahr" bestimmte Gesichtspunkte beachtet hätten; für andere Materialien wurden solche Einschränkungen bzw. Anmerkungen zum näheren Gebrauch nur von 9 Lehrkräften gemacht (s.o.).

Im Einzelnen finden sich in den Fragebögen folgende Anmerkungen zum Einsatz der Finger im Mathematikunterricht, geordnet nach inhaltlichen Übereinstimmungen:

(1) "Nur zu Beginn reines Abzählen, dann möglichst bald alle Zahlen auf Anhieb zeigen können."

(2) "Speichern der Finger als Zahlenbilder"

(3) "Zuerst herunterzählen der Zahlen, später muss Kind z. B. 4 oder 7 als Menge sehen und nicht mehr herunterzählen. Zahlenraum 10 muss automatisiert sein (Ende der 1. Schulstufe)."

(4) "Wie bei anderen Materialien auch: Oft wird leider einem Finger eine 'Nummer' zugeordnet und nicht die Menge gesehen."

(5) "Bis zum Ende des Schuljahres müssen die Kinder im ZR 10 ohne Finger rechnen können!"

(6) "Dass durch häufiges Üben und Festigen im Zahlenraum 10 die Schüler zu einer traumwandlerischen Sicherheit gelangen können und ihre Finger einfach vergessen!"

(7) "[Beachtet werden muss,] dass sie nach einer bestimmten Einarbeitungsphase nur mehr zur Kontrolle nach dem Kopfrechnen verwendet werden."

(8) "1. offensichtlich, 2. versteckt, 3. gedacht. Wenn der ZR 10 gefestigt ist, brauchen die meisten Kinder dann sowieso keine Materialien mehr zum Rechnen."

(9) "Allmählich sollten die Kinder von der Anschauung zur Abstraktion finden (gegen Ende der 1. Schulstufe)."

(10) "Die Kinder sollten auch bei der Verwendung der Finger den Rechenvorgang verstanden haben und nicht bloß nur mechanisch weiterzählen."

(11) "Finger zum Zeigen von Mengen sind O. K., zum Lösen von Problemen sind sie eher als 'BE-GREIF-MITTEL' des Legematerials willkommen."

(12) "Mit Daumen beginnen lassen bei jeder Hand bei Plus-Rechnungen. Bei Wegzählen auf richtige Handhabung achten."

(13) "Finger von links nach rechts verwenden, nicht zählend rechnen."

(14) "Achten auf Reihenfolge." Dazu fertigte die Lehrkraft eine Zeichnung zweier Hände an, in welcher die Finger wie folgt durchnummeriert sind: 1 = linker kleiner Finger, 2 = linker Ringfinger usw. bis 5 = linker Daumen, 6 = rechter Daumen, 7 = rechter Zeigefinger bis 10 = rechter kleiner Finger.

Die Anmerkungen (1) und (2), vielleicht auch (3), implizit wohl auch (4) legen Wert auf eine *nicht-zählende* Verwendung der Finger für die *Darstellung* von Zahlen (vom Rechnen ist dabei nicht die Rede). Tatsächlich kann gerade das Erarbeiten eines "inneren Fingerbildes" wohl ein wichtiger Schritt in der Erarbeitung eines strukturierten Zahl-Denkens sein (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 70-73; GAIDOSCHIK 2007, S. 44-53; STEINWEG 2008, S. 149). Bemerkenswert ist aber, dass nur Anmerkung (4) ein Bewusstsein davon zu erkennen gibt, dass in dieser Hinsicht für die Finger nichts anderes gilt als für jedes andere strukturierte Material auch: Der Bezug zur Fünf bzw. Zehn, der in jeder Fingerdarstellung einer Zahl bis 10 *objektiv* enthalten ist, muss vom Kind *subjektiv erst noch gedanklich konstruiert* werden. Geschieht das nicht, kann das Material nur zählend verwendet werden – aber das betrifft die Finger nicht anders als etwa Wendeplättchen im Zehner- oder Zwanzigerfeld.

Dennoch scheinen manche Lehrkräfte zu meinen, dass *gerade die Finger* zum zählenden Gebrauch gewissermaßen "verleiten", weshalb sie eben entweder *gerade bei den Fingern* (nicht aber bei anderem Material) herausstreichen, diese dürften (zumindest ab einem gewissen Zeitpunkt) nicht (mehr) zählend verwendet werden, oder aber den Fingern wird grundsätzlich misstraut wie von jener Lehrkraft, die in Anmerkung (11) die Finger im Arithmetikunterricht nur gelten lassen will als gewissermaßen körperliche Voraussetzung, um mit "Legematerial" hantieren zu können. Dieses (sachlich unbegründete) Misstrauen in die Finger und das korrespondierende (und ebenso unbegründete) Vertrauen in "Legematerial" wird deutlich in einer Zusatzbemerkung derselben Lehrkraft: Sie sehe Finger als Material zwar insofern "positiv", weil Kinder diese "stets 'zur Hand' haben", aber auch "negativ", weil "zum Lösen von Rechnungen dann das Zählen statt dem Denken im Vordergrund steht". In bezeichnender Weise war es *dieselbe* Lehrkraft, die Mitte des Schuljahres die Kinder zum "Hüpfen auf dem Zahlenstreifen" bringen wollte (s.o.).

Es ist wohl auch Ausdruck eines grundsätzlichen Misstrauens gegenüber den Fingern, dass einige Lehrkräfte gerade in ihren Anmerkungen zu den Fingern (aber nicht in jenen zu anderen Materialien) betonen, dass Rechenaufgaben bis zum Ende des ersten Schuljahres materialfrei gelöst werden sollten. Nur in Anmerkung (3) ist dabei explizit von "Automatisierung" als Alternative zur materialgestützten Lösungsfindung die Rede. Die Anmerkungen (5) bis (9) stellen dagegen in den Vordergrund, dass am Ende des ersten Schuljahres "ohne Finger" gerechnet werden solle. Dass aber "ohne Finger" bei manchen Kindern nur bedeutet, dass sie mit *verbalen* Zählstrategien ihre Konzentration in noch höherem Maße beanspruchen als mit fingergestützten, wurde bereits ausgeführt.

In keiner der Anmerkungen im Fragebogen wird darauf eingegangen, auf welche Weise die zunächst offenbar geduldeten oder gar für nützlich erachteten Finger bis zum Ende des ersten Schuljahres überflüssig werden sollen. Nur in Anmerkung (6) wird die Hoffnung geäußert, dass "häufiges Üben" dieses Resultat zeitigen möge. Aber wie bereits ausgeführt: Wenn "häufiges Üben" nur bedeutet, dass häufig *zählend* gerechnet wird, dann ist nicht absehbar, wie *dieses* Üben ausgerechnet zur Überwindung des zählenden Rechnens beitragen sollte.

Es bleibt noch, die Anmerkungen (12), (13) und (14) begrifflich einzuordnen. Hier erklären drei Lehrkräfte, sie hätten darauf Wert gelegt hätten, dass Kinder die Zahlen bis 10 gemäß einer ganz bestimmten *Zeige-Vorschrift* mit den Fingern darstellen, unter Beachtung einer eindeutigen Zuordnung jeder Zahl bis 10 zu genau einer Fingerdarstellung. Dabei widerspricht die in Anmerkung (12) dargelegte Zeige-Vorschrift jener der Anmerkungen (13) und (14). Keine dieser Lehrkräfte bringt eine Begründung dafür, warum es von Bedeutung sei, dass die Finger genau so und nicht anders verwendet werden, und tatsächlich lässt sich dafür wohl auch keine sachliche Begründung finden. Anmerkungen (13) und (14) entsprechen aber der rigiden Zeige-Vorschrift, die SPINDLER und DREHER als wesentlichen Teil ihrer "Kybernetischen Methode" propagieren (vgl. SPINDLER & DREHER 1996).

Die "Kybernetische Methode" ist von LORENZ (1998) und GAIDOSCHIK (2001a) einer detaillierten Kritik unterzogen worden; hier näher darauf einzugehen, würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Aus den Ausführungen von Kapitel 4 geht aber klar hervor, dass die Verabsolutierung einer bestimmten Zahldarstellung (sieben *nur* als "fünf und zwei", und das *nur* mit den fünf Fingern der linken und Daumen und Zeigefinger der rechten Hand) *in klarem Widerspruch* steht zur einhelligen Empfehlung der aktuellen Fachdidaktik, auf ein *flexibles Verständnis* von "Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen" hinzuarbeiten: Sieben *ist* nun einmal nicht nur "fünf und zwei", sondern ebenso auch "zwei und fünf", "vier und drei", "eins und sechs" usw.. Gerade diese *Vielfalt der Zusammensetzungen* einer Zahl muss daher auch im mathematischen Erstunterricht in geeigneter Weise zum Inhalt gemacht werden (vgl. etwa GERSTER 2005, S. 210-214; GAIDOSCHIK 2007, S. 83-92).

Zusammenfassung:
Ohne dass dies sachlich gerechtfertigt wäre, sehen bei Verwendung der Finger im Erstunterricht deutlich mehr Lehrkräfte die Gefahr einer rein zählenden Verwendung als bei anderen Materialien. Dass die Finger deshalb im Erstunterricht *nicht* verwendet werden sollten, wird im Fragebogen aber von keiner Lehrkraft geäußert; *alle* Lehrkräfte erklärten bei getrennter Fragestellung, dass sie "die Verwendung der Finger im ersten Schuljahr grundsätzlich positiv" sehen. Zwei Drittel der Lehrkräfte formulierten aber gewisse Bedingungen für die Verwendung der Finger (deutlich mehr als für die Verwendung anderer Materialien). Und einige bringen zumindest implizit zum Ausdruck, dass sie spätestens gegen Ende des ersten Schuljahres (in welcher Weise auch immer) darauf gedrängt haben, dass die Kinder ihre Finger *nicht mehr* als Rechenhilfsmittel benützen.

7.2.4 Angaben zur Behandlung einzelner Rechenstrategien im Zahlenraum bis zehn

Ein eigener Teil des Fragebogens war der Frage gewidmet, ob und (wenn ja) auf welche Weise und wie intensiv die Lehrkräfte im Unterricht auf einzelne Rechenstrategien eingegangen sind bzw. ob und wie lange sie einzelne Strategien geduldet haben. Zu diesem Zweck wurden verschiedene Lösungsstrategien zunächst jeweils an einer Beispielaufgabe kurz erläutert. Dann sollte die Lehrkraft sich im ersten Teil der Frage für eine von vier Antwortmöglichkeiten zur Behandlung dieser Strategie im Klassenunterricht entscheiden:

- Antwortmöglichkeit 1: "Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt."
- Antwortmöglichkeit 2: "Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei/kurz nach der Erarbeitung beschränkt."
- Antwortmöglichkeit 3: "Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen."
- Antwortmöglichkeit 4: "Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen."

Im zweiten Teil der Frage zu jeder der vorgestellten Strategien sollten die Lehrkräfte in einer Auflistung der zehn Schulmonate jene Monate ankreuzen, in denen diese Strategie allenfalls erarbeitet und geübt wurde (siehe den gesamten Fragebogen in Anhang 9).

21 der 22 Lehrkräfte füllten diesen, einigen Zeitaufwand erfordernden Abschnitt des Fragebogens aus. 18 taten dies bezüglich des ersten Frageteils jeweils vollständig, drei kreuzten bei einzelnen Lösungswegen keine der vier Antwortmöglichkeiten an. Etwas häufiger unbeantwortet blieb die zweite Frage nach dem Monat bzw. den Monaten, in welchen eine Lösungsstrategie jeweils erarbeitet bzw. geübt wurde. Eine Lehrkraft ließ diese Frage durchgehend unbeantwortet, bei vier weiteren fehlen die entsprechenden Angaben für einzelne Strategien.
Obwohl bei nachträglicher kritischer Betrachtung die Erläuterung der Lösungswege in einzelnen Fällen wohl hätte klarer ausfallen können, gab es keine Hinweise dafür, dass die Lehrkräfte eine oder mehrere Fragen zur Behandlung von Lösungsstrategien im Unterricht nicht hinreichend verstanden hätten.

Im Folgenden werden zunächst nur die Ergebnisse der Befragung zu Lösungsstrategien im Zahlenraum bis zehn dargestellt und erläutert; den Strategien zum Zehnerübergang ist dann ein eigener Abschnitt gewidmet. Tabelle 15 fasst zunächst die Angaben der Lehrkräfte zu den einzelnen Strategien im Zahlenraum bis zehn (unter Ausblendung der Dauer ihrer Behandlung im Unterricht) zusammen. Die zu jeder Strategie häufigste Angabe ist jeweils fett gedruckt.

Tabelle 15: Behandlung verschiedener Lösungsstrategien im Zahlenraum bis zehn nach Selbstauskunft der befragten Lehrkräfte (LK) (n = 21)

Strategie	erarbeitet und längere Zeit gezielt geübt	erarbeitet, nur kurz geübt	nicht erarbeitet, toleriert	nicht erarbeitet, Überwindung angestrebt	keine Angabe
Legen und Zählen mit Material	7 Lehrkräfte (33,3 %)	**8 LK (38,1 %)**	5 LK (23,8 %)	0	1 LK (4,8 %)
Legen mit strukt. Material, quasi-simultane Lösung	**12 (57,1 %)**	4 (19,0 %)	4 (19,0 %)	0	1 (4,8 %)
Weiter- / Rückwärtszählen mit Material	**10 (47,6 %)**	6 (28,6 %)	5 (23,8 %)	0	0
Weiter- / Rückwärtszählen ohne Material	**9 (42,9 %)**	4 (19,0 %)	8 (38,1 %)	0	0
Weiterzählen bewusst von größerer Zahl aus	4 (19,0 %)	5 (23,8 %)	**12 (57,1 %)**	0	0
Tauschaufgabe bei Addition	**13 (61,9 %)**	8 (38,1 %)	0	0	0
Nachbaraufgabe bei Addition	1 (4,8 %)	4 (19,0 %)	**16 (76,2 %)**	0	0
Nachbaraufgabe bei Subtraktion	0	3 (14,3 %)	**18 (85,7 %)**	0	
Umkehraufgabe bei Subtraktion	**8 (38,1 %)**	7 (33,3 %)	4 (19,0 %)	1 (4,8 %)	1 (4,8 %)
Nicht-zählender Fingergebrauch	**11 (52,4 %)**	5 (23,8 %)	4 (19,0 %)	0	1 (4,8 %)

Interpretation:

Zunächst fällt auf, dass die Antwortmöglichkeit "nicht erarbeitet, Überwindung angestrebt" für Strategien im Zahlenraum bis zehn nur ein einziges Mal gewählt wurde – und das überraschenderweise bei einer nicht-zählenden Lösungsstrategie. Hier mag ein Ankreuzfehler vorliegen, doch der gesamte Fragebogen erweckt den Eindruck, dass die betreffende Lehrkraft ihre Antworten grundsätzlich mit Bedacht gab: Sie machte jeweils präzise Angaben zu Erarbeitungszeiträumen und Erarbeitungsdauer einzelner Strategien und nutzte die Antwortmöglichkeiten differenziert in einer Weise, die insgesamt in sich stimmig ist (Erarbeitung zählender Strategien, Nicht-Erarbeitung nicht-zählender Strategien außer "Tauschaufgabe" und "nicht-zählender Fingergebrauch").

Keine einzige Lehrkraft gab also an, dass sie die Überwindung einer der vorgestellten *zählenden* Strategien für Aufgaben im Zahlenraum bis zehn angestrebt hätte – nicht einmal im Falle der einfachsten und aufwändigsten Strategie "Legen und Zählen", die dem Alleszählen (vgl. Kap. 2.1) entspricht. Nun könnte vermutet werden, die Lehrkräfte hätten sich generell gescheut, die "Überwindung" einer kindlichen Strategie als Ziel zu deklarieren, etwa aus Sorge, dies könnte den Eindruck von Intoleranz gegenüber kindlichen Lösungsstrategien erwecken. Tatsächlich wurde aber die Antwortmöglichkeit "Überwindung angestrebt" bei den Strategien für den Zehnerübergang sehr wohl (insgesamt 13-mal) in Anspruch genommen (s. Kap. 7.2.5). Das scheint die bereits durch die Antworten zum Materialeinsatz geweckte Vermutung zu erhärten, dass zählendes Rechnen im Zahlenraum bis zehn mehrheitlich als ein vorübergehendes Phänomen betrachtet wurde, zu dessen *Überwindung* (sofern diese überhaupt angestrebt wurde) es keiner gezielten didaktischen Maßnahmen bedürfe.

Sehr wohl wurden aber gezielte Maßnahmen zur *Erarbeitung* und zum *Einüben* von Zählstrategien für notwendig erachtetet: Den Angaben der Lehrkräfte zufolge wurden solche Maßnahmen in *allen untersuchten* Klassen ergriffen. *Keine einzige Lehrkraft* hat ihren eigenen Angaben zufolge nicht wenigstens eine der vorgestellten Zählstrategien im Unterricht "erarbeitet" und zumindest auch für einige Zeit "gezielt geübt". 13 von 21 gaben an, mindestens eine dieser Zählstrategien auch "über längere Zeit immer wieder gezielt geübt" zu haben.

Die Angaben zu den Monaten, in denen einzelne Zählstrategien erarbeit und geübt worden seien, scheinen darauf hinzuweisen, dass dabei von vielen Lehrkräften eine Art Schrittfolge beachtet worden sein dürfte, von der "einfachsten" Zählstrategie des "Alleszählens" in den ersten Schulmonaten über "Weiterzählen mit Materialhilfe" in späteren Monaten hin zum "Weiterzählen ohne Materialhilfe":

– "Legen und Zählen mit Material" wurde den Fragebögen zufolge in insgesamt 15 Klassen zumindest für einige Zeit "gezielt geübt" (davon in sieben Klassen "über längere Zeit"). In einer dieser Klassen habe sich das Üben auf den September beschränkt, in sieben weiteren sei es bis in den Oktober, in vier weiteren bis in den November hinein fortgesetzt worden. Für spätere Monate wurde "Legen und Zählen" von drei Lehrkräften als Strategie genannt, die "gezielt geübt" worden sei, in einer Klasse sei dies bis in den April hinein erfolgt.
– Das weniger umständliche "Weiterzählen mit Materialhilfe" wurde gemäß Auskunft der Lehrkräfte in insgesamt 16 Klassen und mit (gegenüber dem Alleszählen) deutlicher zeitlicher Verschiebung erarbeitet und geübt: In sechs Klassen bis ins dritte Schulmonat (November) hinein, in je zwei weiteren bis in den Dezember bzw. Februar hinein, und in zwei weiteren bis in den März bzw. April hinein.
– Das "Weiterzählen ohne Materialhilfe" (gemäß Fragebogen in insgesamt 13 Klassen erarbeitet und geübt) wurde in zwei Klassen laut deren Lehrkräften auch noch im zehnten Schulmonat "gezielt geübt".
– "Weiterzählen bewusst von der größeren Zahl ausgehend" wurde den Angaben der Lehrkräfte gemäß in neun Klassen "erarbeitet und gezielt geübt", also in deutlich weniger Klassen als das "Weiterzählen" generell.

Von den vorgestellten *nicht-zählenden* Strategien für Aufgaben im Zahlenraum bis zehn wurde die Strategie "Tauschaufgabe" gemäß Fragebogen von allen 21 Lehrkräften "erarbeitet" und über längere Zeit (13 Nennungen) oder zumindest kurz nach der Erarbeitung (8 Nennungen) "gezielt geübt". Auch die Strategie "Umkehraufgabe" für das Lösen von Subtraktionen war demnach in 15 von 21 Klassen Gegenstand der Erarbeitung und gezielten Übung. Gerade diese beiden operativen Zusammenhänge werden ja auch in den Schulbüchern, an denen der Unterricht aller Klassen sich stark orientierte, mehr oder weniger ausführlich thematisiert, allerdings in einer aus fachdidaktischer Sicht ungenügenden Weise (vgl. Kap. 7.1).

Das Prinzip der Nachbaraufgabe wird hingegen, wie in Kapitel 7.1 dargestellt, in dem in 11 der 22 Klassen verwendeten Lehrwerk "Zahlenreise" *gar nicht* thematisiert und kann in den anderen Schulbüchern zwar hin und wieder in vereinzelt gebotenen schönen Päckchen entdeckt werden (am häufigsten in "Zahlenzug"), es wird aber auch dort an keiner Stelle explizit im Sinne einer nicht-zählenden Lösungsstrategie herausgearbeitet. Wenn also 16 bzw. 18 von 21 Lehrkräften deklarieren, sie hätten die Strategie "Nachbaraufgabe" für die Lösung einer Addition bzw. Subtraktion im Unterricht "nicht erarbeitet", dann scheint sich darin erneut auch die starke Abhängigkeit des Unterrichts vom Schulbuch zu manifestieren. Überhaupt nur eine Lehrkraft gab an, die Strategie "Nachbaraufgabe" für das Addieren (im Fragebogen verdeutlicht am "Verdoppeln plus 1") "erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt" zu haben. Vier weitere haben diese Strategie ihrer eigenen Auskunft zufolge zwar "erarbeitet", aber nur "kurz nach der Erarbeitung" auch geübt. Als Strategie für das *Subtrahieren* wurde "Nachbaraufgabe" überhaupt nur dreimal genannt, jeweils nur mit auf "die Zeit bei bzw. kurz nach der Erarbeitung" beschränkter Übungszeit.

Deutlich mehr Lehrkräfte gaben an, das nicht-zählende Fingerrechnen (vgl. Kap. 2.10.1) im Unterricht erarbeitet und geübt zu haben. Dieses wurde im Fragebogen an Hand der Beispielaufgabe 8–5 erläutert (Kind stellt zunächst die Zahl acht, ohne zu zählen, als "volle Hand und noch drei Finger" dar, nimmt dann, ohne zu zählen, die volle Hand weg und nennt, ohne zu zählen, die Anzahl der verbleibenden Finger als Ergebnis). Elf Lehrkräfte haben dem Fragebogen zufolge diese Art des Rechnens "über längere Zeit immer wieder", fünf weitere zumindest "kurz nach der Erarbeitung" gezielt üben lassen.

Gleichfalls insgesamt 16 Lehrkräfte haben nach Selbstauskunft das Lösen von Additionen mit Hilfe von strukturiertem Material, welches das quasi-simultane "Ablesen" der Lösungszahl erlaubt, erarbeitet und geübt (zwölf "über länger Zeit", vier "kurz nach der Erarbeitung"). Diese Angaben liefern eine wichtige Ergänzung (wohl aber kein Korrektiv) zu den Angaben, die dieselben Lehrkräfte zur Verwendung von Fingern und anderen Materialien an anderer Stelle des Fragebogens gemacht haben (vgl. Kap. 7.2.3): *Direkt* zu einzelnen Strategien befragt, gaben deutlich mehr Lehrkräfte an, auf eine nicht-zählende Verwendung der Finger bzw. anderer Materialien geachtet zu haben, als sie dies bei *offener* Befragung zu den für sie wichtigen Gesichtspunkten der Materialverwendung getan haben. *Daneben* gaben aber *alle* Lehrkräfte an, dass sie Kinder, die zählend rechneten, bis zum Ende des ersten Schuljahres "dabei belassen" und *nicht* versucht haben, sie vom zählenden Rechnen abzubringen.

7.2.5 Angaben zur Behandlung des Zehnerübergangs

Tabelle 16 fasst die Angaben der Lehrkräfte zu den einzelnen Strategien für den Zehnerübergang zusammen. Die zu jeder Strategie häufigste Angabe ist wieder jeweils fett gedruckt.

Die Tabelle berücksichtigt nur 19 der 22 Lehrkräfte, weil eine Lehrkraft auch diesen Teil des Fragebogens nicht ausfüllte und zwei Lehrkräfte angaben, den Zehnerübergang im ersten Schuljahr gar nicht behandelt zu haben. Eine weitere Lehrkraft erklärte, den Zehnerübergang nur mit einem kleinen Teil der Klasse im ersten Schuljahr behandelt zu haben. Sie füllte den Fragebogen zu den Strategien für den Zehnerübergang aus mit der Anmerkung, auf die jeweils deklarierte Weise im zweiten Schuljahr vorgehen zu wollen. Diese entspricht vermutlich auch der Art, wie sie den Zehnerübergang mit dem kleineren Teil der Klasse bereits im ersten Schuljahr behandelte; ihre Angaben sind in der Tabelle jedenfalls mit berücksichtigt.

Tabelle 16: Behandlung verschiedener Lösungsstrategien für den Zehnerübergang im Unterricht nach Selbstauskunft der befragten Lehrkräfte (n = 19)

Strategie	erarbeitet und längere Zeit gezielt geübt	erarbeitet, nur kurz geübt	nicht erarbeitet, toleriert	nicht erarbeitet, Überwindung angestrebt
Alles-Zählen mit Material (explizit zählende Ermittlung der Lösung)	keine Lehrkraft	3 LK (15,8 %)	**10 LK (52,6 %)**	6 LK (31,6 %)
Legen mit struk. Material, quasi-simultane Lösungsermittlung	**9 (47,4 %)**	**9 (47,4 %)**	1 (5,3 %)	0
Legen mit strukturiertem Material, dabei explizit "Auffüllen bis 10"	**9 (47,4 %)**	5 (26,3 %)	5 (26,3 %)	0
Weiterzählen mit Zählhilfe	3 (15,8 %)	4 (21,1 %)	**10 (52,6 %)**	2 (10,5 %)
Weiterzählen ohne Zählhilfe	2 (10,5 %)	1 (5,3 %)	**13 (68,4 %)**	3 (15,8 %)
Teilschrittverfahren ohne Material	**9 (47,4 %)**	4 (21,1 %)	6 (31,6 %)	0
Zehnerübergang mit der "Kraft der Fünf"	0	0	**17 (89,5 %)**	2 (10,5 %)
Zehnerübergang durch "Verdoppeln plus eins"	0	3 (15,8 %)	**16 (84,2 %)**	0
Zehnerübergang mit der "Kraft der Zehn"	0	5 (26,3 %)	**14 (73,7 %)**	0

Interpretation:

Anders als bei den Strategien im Zahlenraum bis zehn wurde für den Zehnerübergang "Alles-zählen" von keiner Lehrkraft als Strategie genannt, die "erarbeit und längere Zeit immer wieder gezielt" geübt worden sei. Tatsächlich wird "Alleszählen" ja in höherem Zahlenraum immer umständlicher und mühsamer. Dennoch wollen drei Lehrkräfte diese Strategie explizit auch für den Zehnerübergang erarbeitet und zumindest kurz nach der Erarbeitung auch geübt haben. Zehn weitere erklärten, sie hätten Kinder "dabei belassen", wenn diese alleszählend Aufgaben mit Zehnerübergang zu bewältigen versuchten. Sechs Lehrkräfte erklärten hingegen, sie hätten Kinder von diesem Lösungsweg abzubringen versucht und gaben damit zu erkennen, dass sie bei Aufgaben mit Zehnerübergang das Festhalten am Alleszählen offenbar für nicht förderlich hielten. Zwei davon taten dies auch bei der Strategie "Zehnerübergang durch Weiterzählen mit Materialhilfe", dieselben zwei und eine dritte Lehrkraft nannten auch "Zehnerübergang durch Weiterzählen ohne Materialhilfe" als einen Lösungsweg, von dem sie Kinder abzubringen versucht hätten. Die überwiegende Mehrzahl der Lehrkräfte hat hingegen das Weiterzählen auch als Strategie für den Zehnerübergang zumindest toleriert (13 von 19 Lehrkräften das Weiterzählen ohne Material als Zählhilfe, 10 von 19 mit Zählhilfe) oder sogar gezielt mit den Kindern erarbeitet (drei Lehrkräfte ohne, sieben mit Zählhilfe).

Die anderen Strategien für den Zehnerübergang, die gemäß Fragebogen über *längere Zeit immer wieder* gezielt geübt wurden, sind allesamt dem Teilschrittverfahren oder dessen Anbahnung zuzuordnen. *Alle 19* Lehrkräfte gaben an, das Teilschrittverfahren in der einen oder anderen Form erarbeitet bzw. angebahnt zu haben:

– Neun erklärten, sie hätten das *zählende* "Auffüllen des Zehners" mit strukturiertem Material *über längere Zeit* üben lassen.
– Sechs dieser neun sowie drei weitere gaben an, sie hätten (zumindest in weiterer Folge) darauf Wert gelegt, dass die Kinder das "Auffüllen" "über längere Zeit immer wieder" zwar mit Material, aber *nicht zählend* durchführten.
– Gleichfalls neun bekundeten, sie hätten das Teilschrittverfahren zunächst mit, dann aber gezielt auch ohne Material "erarbeitet und über längere Zeit immer wieder geübt". Vier weitere ließen das materialfreie Anwenden des Teilschrittverfahren eigenen Angaben zufolge zumindest "kurz nach der Erarbeitung" üben.

Kein einziges der im Fragebogen vorgestellten anderen nicht-zählenden Verfahren für den Zehnerübergang (vgl. Kap. 4.5) wurde den Angaben der Lehrkräfte zufolge im Unterricht "über *längere Zeit immer wieder* gezielt geübt" und nur in wenigen Klassen waren solche alternativen Strategien überhaupt Thema:
– Nur drei von 19 Lehrkräften nannten das "Verdoppeln plus 1" (im Fragebogen vorgestellt an der Beispielsaufgabe 6+7, abgeleitet aus 6+6) unter den Lösungswegen, die in ihren Klassen "erarbeitet" und *"bei/kurz nach der Erarbeitung*" (aber nicht über längere Zeit) geübt worden seien.
– Die Strategie "Zehnerüberschreitung durch Nachbaraufgabe plus/minus 10" ("Kraft der Zehn") wurde im Fragebogen mit der Beispielaufgabe 14–9 (abgeleitet aus 14–10) vorgestellt. Fünf von 19 Lehrkräften gaben an, diese Strategie sei "erarbeitet" und zumindest "bei/kurz nach der Erarbeitung" (aber nicht über längere Zeit) geübt worden.
– Die Strategie "Zehnerüberschreitung durch Zerlegen beider Zahlen in Fünferportionen"

(also mit der "Kraft der Fünf") wurde im Fragebogen am Beispiel 7+7 (abgeleitet aus 5+5 und 2+2) verdeutlicht. *Keine einzige* Lehrkraft gab an, diese Strategie in irgendeiner Weise thematisiert zu haben. Zwei Lehrkräften schien diese Strategie (deren Behandlung von der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik nachdrücklich empfohlen wird, vgl. Kap. 4.5) offenbar geradezu schädlich zu sein. Sie erklärten jedenfalls, sie hätten Kinder, die so rechneten, davon abzubringen versucht. Eine weitere Lehrkraft sah sich veranlasst, im Fragebogen an dieser Stelle ergänzend festzuhalten: "Keines meiner Kinder rechnet so." Tatsächlich hat gerade ein Schüler ihrer Klasse die Strategie "Kraft der Fünf" im dritten Interview nicht nur erfolgreich angewandt, sondern auch mustergültig erläutert und begründet (vgl. Kap 8.4.3.7).

Die Frage, zu welchem *Zeitpunkt* die Zehnerüberschreitung erarbeitet wurde, offenbart bei einigen Lehrkräften mehr oder weniger deutliche *Abweichungen* gegenüber den Empfehlungen des von ihnen verwendeten Schulbuches.

So haben auf der einen Seite, wie schon erwähnt, zwei Lehrkräfte die Zehnerüberschreitung im ersten Schuljahr *gar nicht* behandelt. Freilich verwendeten gerade diese beiden Lehrkräfte Schulbücher, in denen die Zehnerüberschreitung nur "vorbereitend" (im Sinne des Teilschrittverfahrens) behandelt wird (nämlich "Mein erstes Mathematikbuch" bzw. "Matheblitz", vgl. Kap. 7.1.3). Möglicherweise haben sie aber diese Schulbücher ja auch gerade wegen der darin realisierten (und mit ihren eigenen didaktischen Ansichten übereinstimmenden) "Zurückhaltung" in Fragen des Zehnerübergangs gewählt. Und auch die in diesen Schulbüchern vorgeschlagene "Vorbereitung" des Zehnerübergangs haben diese beiden Lehrkräfte ihren eigenen Angaben zufolge nicht mitgemacht. (Auch die Überprüfung der Verwendung der Schulbücher beim jeweils dritten Schulbesuch ergab, dass die Seiten zum Zehnerübergang in diesen Klassen nicht bearbeitet worden waren.)

Eine weitere Lehrkraft verwendete zwar mit dem "Zahlen-Zug" ein Schulbuch, das dem Zehnerübergang im ersten Schuljahr vergleichsweise viele Seiten widmet, gab aber an, mit dem größeren Teil der Klasse diese Seiten nicht behandelt zu haben (auch diese Angabe wird durch die Dokumentenanalyse beim dritten Schulbesuch bestätigt).

Auf der anderen Seite scheinen einige Lehrkräfte den Zehnerübergang deutlich früher erarbeitet und ihm wohl auch in der Folge mehr Zeit gewidmet zu haben, als dies in den von ihnen verwendeten Büchern vorgesehen ist. Das wird deutlich, wenn man die im Fragebogen gemachten Angaben zum Zeitpunkt der Erarbeitung des Zehnerübergangs mit den Vorschlägen zur Jahresplanung vergleicht, die sich in den Lehrerbegleitheften der Bücher finden. Tabelle 17 zeigt, in welchen Monaten der Zehnerübergang laut Auskunft der Lehrkräfte jeweils erarbeitet wurde, und welche Bücher in diesen Klassen jeweils verwendet wurden.

Tabelle 17: Häufigkeit, mit der der Zehnerübergang in einem bestimmten Schulmonat erarbeitet wurde, nach Selbstauskunft der befragten Lehrkräfte (n = 21)

Zehnerüberschreitung erarbeit im...	Häufigkeit	In diesen Klassen verwendetes Schulbuch (Behandlung der Zehnerüberschreitung wird in Jahresplanung empfohlen für...)
Jänner	1 Klasse	"Zahlen-Zug" (März)
März	4 Klassen	je 1-mal "Zahlenreise" (Juni) und "Funkelsteine" (April), 2-mal "Zahlen-Zug" (März)
April	2 Klassen	je 1-mal "Zahlenreise" (Juni) und "Matheblitz" (März/April)
Mai	6 Klassen	5-mal "Zahlenreise" (Juni), 1-mal "Mein erstes Mathematikbuch" (April)
Juni	3 Klassen	jeweils "Zahlenreise" (Juni)
gar nicht	2 Klassen	je 1-mal "Mein erstes Mathematikbuch" und "Matheblitz"
nur mit Teil d. Klasse, ohne Zeitangabe	1 Klasse	"Zahlen-Zug" (März)
keine Angabe	2 Klassen	je 1-mal "Zahlenzug" und "Zahlenreise"

Auch diese Tabelle spiegelt *generell* eine hochgradige Übereinstimmung des Vorgehens in der Klasse mit der Jahresplanung des verwendeten Schulbuches wider: In Klassen, die mit "Zahlen-Zug" und "Funkelsteine" arbeiteten, wurde der Zehnerübergang –in Übereinstimmung mit der in den Begleitheften dieser Bücher empfohlenen Jahresplanung – gemäß Angaben der Lehrkräfte in der Regel deutlich früher behandelt als in den "Zahlenreise"-Klassen.

Gerade bei Lehrkräften, die die "Zahlenreise" verwendeten, zeigen sich aber auch einige teils deutliche Abweichungen von der im Begleitheft vorgeschlagenen Jahresplanung. In diesem Schulbuch wird ja, wie in Kap. 7.1.3 erläutert, die Zehnerüberschreitung nur "vorbereitend" thematisiert, auf wenigen Seiten im letzten Zehntel des Lehrwerks, deren Behandlung in der Jahresplanung des Lehrerbegleitheftes dementsprechend für die letzten Wochen des Schuljahres empfohlen wird. Doch nur drei der elf Lehrkräfte, die die "Zahlenreise" im Unterricht verwendeten, erklärten im Fragebogen, den Zehnerübergang tatsächlich erst im Juni erarbeitet zu haben. Fünf weitere nannten den Mai als Monat der Erarbeitung, je eine den April und März (eine Lehrkraft machte dazu keine Angaben). In drei der elf "Zahlenreise"-Klassen enthielten überdies die begleitend geführten Übungshefte und Übungsmappen der Kinder im zweiten Schulhalbjahr im Wesentlichen nur Aufgaben mit Zehnerübergang. Offenbar empfanden also einige Lehrkräfte, die die "Zahlenreise" verwendeten, die nur "vorbereitende" Behandlung des Zehnerübergangs in diesem Schulbuch für nicht ausreichend und/oder für verspätet. Keine dieser Lehrkräfte hat dies allerdings in jenem Teil des Fragebogens, der ihre Zufriedenheit und inhaltliche Übereinstimmung mit dem Schulbuch abtesten sollte, explizit erklärt.

Die Entscheidung von 3 der 21 Lehrkräfte, den Zehnerübergang mit ihren ersten Klassen (oder zumindest mit dem größeren Teil dieser Klassen) im ersten Schuljahr gar nicht zu erarbeiten, erfordert aus fachdidaktischer Sicht eine differenzierte Beurteilung:

Klar ist, dass ein solches Vorgehen nur denkbar ist in einem kleinschrittig geführten Unterricht, der alleine durch diese Kleinschrittigkeit zentralen Empfehlungen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik widerspricht (vgl. Kap. 4.4). Lässt man nämlich Kinder in offenen, produktiven Übungsformaten eigene Lösungswege entdecken, werden mit einiger Sicherheit auch leistungsschwächere SchülerInnen (und die leistungsstärkeren ohnedies) sehr bald Aufgaben wählen, in denen sich Zehnerübergänge ergeben. Im Unterricht sollte dann darauf hingearbeitet werden, dass möglichst *alle Kinder* solche Aufgaben mit langfristig zielführenden Strategien bewältigen, also mit nicht-zählenden Strategien. Dazu zählt *auch* das Teilschrittverfahren. Dieses wird jedoch gerade leistungsschwächere Kinder im ersten Schuljahr oft noch überfordern (vgl. Kap. 4.5).

Nun ist zu vermuten, dass die drei Lehrkräfte den Zehnerübergang eben deshalb nicht im ersten Schuljahr erarbeitet haben, weil sie eine Überforderung zumindest mancher Kinder durch das Teilschrittverfahren befürchtet haben. Daraus spricht eine erhöhte Sensibilität gegenüber den Schwierigkeiten, die dieses Verfahren oft bereitet (vgl. KRAUTHAUSEN 1995, S. 88).

Die aktuelle Fachdidaktik zieht aus diesen Schwierigkeiten freilich einen gänzlich anderen Schluss: Sie empfiehlt nicht die Verschiebung des Teilschrittverfahrens auf die zweite Schulstufe, sondern die Behandlung (auch) anderer Verfahren für den Zehnerübergang im ersten Schuljahr. Denn zum anderen ist es auch im zweiten Schuljahr aus fachdidaktischer Perspektive nicht ratsam, ausschließlich das Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang zu thematisieren. Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens bleiben dieselben. Und auch wenn zu erwarten ist, dass viele Kinder bis dahin bessere Voraussetzungen erworben haben, um diese Schwierigkeiten zu meistern, gilt in jedem Fall weiterhin, dass die Einengung auf *ein* Verfahren dem Geist der Mathematik grundsätzlich widerspricht (vgl. WITTMANN 2008 und Kap. 7.1.3). Zum anderen steht aber die Nicht-Behandlung des Zehnerübergangs im ersten Schuljahr, wie ausgeführt, im Widerspruch zum Grundprinzip des "aktiv-entdeckenden" Lernens an herausfordernden, das Erkennen von Sinnzusammenhängen ermöglichenden Aufgaben.

7.3 Einschätzung der didaktisch-methodischen Qualität des Mathematikunterrichts der befragten Kinder

7.3.1 Zur Bedeutung des Schulbuches

Die Angaben der Lehrkräfte zur Verwendung des Schulbuches sowie zum Grad ihrer Zufriedenheit und inhaltlichen Übereinstimmung mit diesem Buch liefern im Verein mit der Überprüfung der von den Kindern durchgearbeiteten Bücher starke Hinweise dafür, dass sich der Mathematikunterricht in *allen* Klassen der befragten Kinder in wesentlichen didaktischen Fragen eng am jeweils verwendeten Schulbuch orientiert hat. Durch die in diesem ersten Teil des LehrerInnenfragebogens erhobenen Daten scheint diese enge Orientierung hinreichend abgesichert zumindest

– für die Wahl des "Einstiegszahlenraumes";
– für das Tempo und weitere Vorgehen bei der Erweiterung dieses Einstiegszahlenraumes hin zum Zahlenraum bis zehn;
– für den überwiegenden Charakter der Übungsaufgaben.

Das Schulbuch war in den erfassten Klassen dabei nicht nur wesentliche *geistige* Orientierung für das didaktisch-methodische Vorgehen, sondern offenbar auch *materiell* ein bestimmender Faktor des Unterrichtsgeschehens. Das Arbeiten der Kinder im Schulbuch selbst oder an Aufgaben des Schulbuches war laut Selbstauskunft der Lehrkräfte in den *meisten* Klassen die mit Abstand häufigste Aktivität im Mathematikunterricht, was sich in den zumeist Seite für Seite vollständig durchgearbeiteten Schulbüchern der Kinder entsprechend widerspiegelt.

Die enge Orientierung am Schulbuch wird aber auch deutlich durch die im zweiten Teil des Fragebogens eingeholten Angaben der Lehrkräfte

– zum Umgang mit nicht-zählenden Lösungsstrategien im Zahlenraum bis zehn
– zur Behandlung des Zehnerübergangs.

Demnach wurden, wenn überhaupt, im Wesentlichen nur genau jene nicht-zählenden Strategien (Tauschaufgabe, Umkehraufgabe, Teilschrittverfahren) erarbeitet und über längere Zeit geübt, die auch in den Schulbüchern in der einen oder anderen, gemäß der Analyse in Kapitel 7.1 unzureichenden Weise thematisiert wurden. Nicht-zählende Strategien, die wie das Ableiten von Aufgaben aus einfacheren Nachbaraufgaben oder Alternativen zum Teilschrittverfahren für den Zehnerübergang in den Schulbüchern nicht oder in kaum wahrnehmbarer Weise vorkommen, wurden auch im Unterricht in der Regel nicht erarbeitet und bestenfalls geduldet, mitunter aber sogar als unerwünscht betrachtet.

Eine gewisse Unabhängigkeit *mancher* Lehrkräfte gegenüber dem von ihnen verwendeten Schulbuch ist (im Rahmen der für diese Arbeit interessierenden Stoffbereiche) nur erkennbar bezüglich der Frage, ob überhaupt, zu welchem Zeitpunkt und wie intensiv der Zehnerübergang bereits im ersten Schuljahr im Unterricht behandelt wurde.

Wenn also im Großen und Ganzen angenommen werden muss, dass der Mathematikunterricht der interviewten Kinder in hohem Maße am jeweils verwendeten Schulbuch orientiert war, so ist damit nicht mehr als der didaktisch-methodische *Rahmen* abgesteckt, in dem sich die 22 Lehrkräfte im täglichen Unterrichtsgeschehen bewegt haben. Die gravierenden Mängel, die an diesem Rahmen in Kapitel 7.1 auf Grundlage der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik erkannt und kritisiert wurden, müssen also zwar grundsätzlich auch als Mängel im Mathematikunterricht der interviewten Kinder vermutet werden. Es bleibt aber auch innerhalb dieses Rahmens noch ein großer Spielraum für "gegensteuernde Maßnahmen". Es wäre ja denkbar, dass die Lehrkräfte aufgrund ihrer eigenen fachdidaktischen Kompetenz im Klassenunterricht geeignete Maßnahmen zur Erarbeitung einer strukturierten Zahlauffassung (s. Kap. 4.1), zur Überwindung des zählenden Rechnens (s. Kap. 4.2) und zur Strategie-Reflexion (s. Kap. 4.3) ergriffen haben, obwohl all dies in den von ihnen gewählten Schulbüchern nicht oder nicht in geeigneter bzw. ausreichender Weise (s. Kap. 7.1) thematisiert und angeregt wird.

Freilich spricht auch gegen diese Annahme die Tatsache, dass die Lehrkräfte die von ihnen verwendeten Schulbücher fast durchgehend mit "sehr gut" oder "gut" beurteilt und eine hochgradige Übereinstimmung auch mit dem jeweiligen Lehrerbegleitheft bekundet haben. Dennoch: Während wir die didaktisch-methodische Qualität der Schulbücher selbst mit den Mitteln der qualitativen Inhaltsanalyse auf gesichertem empirischen Boden bis in Detailfragen exakt beurteilen können, muss die Rolle, die diese Schulbücher im Mathematikunterricht der interviewten Kinder tatsächlich gespielt haben, und damit auch die didaktisch-methodische Qualität dieses Unterrichts in weiten Teilen unbestimmt bleiben. Das liegt zum einen daran, dass wir im Rahmen dieser Arbeit (abgesehen von der Überprüfung der von den Kindern durchgearbeiteten Schulbuchseiten) auf die Selbstauskünfte der Lehrkräfte angewiesen sind. Diese können durch sozial-erwünschtes Antwortverhalten ebenso getrübt sein wie durch tatsächlich eingeschränkte Selbstwahrnehmung. Zum anderen liefert das Schulbuch, selbst wenn eine Lehrkraft ihre Anregungen tatsächlich ausschließlich aus diesem bezöge, wie erwähnt nur den Rahmen für ein Unterrichtsgeschehen, das durch eine Vielzahl weiterer Faktoren wesentlich mitbestimmt wird – Faktoren, die für diese Arbeit nur zum Teil erfassbar waren.

7.3.2 Zum Umgang mit Zählstrategien

Wenigstens einige der zuletzt angesprochenen "weiteren Faktoren" des Unterrichtsgeschehens sollten durch jene Teile des LehrerInnenfragebogens erfasst werden, die dem Umgang mit Veranschaulichungs- und Erarbeitungsmaterial sowie einzelnen Lösungsstrategien im Zahlenraum bis zehn gewidmet waren. Welche Hypothesen über die didaktisch-methodische Qualität ihres Unterrichts können aus den Angaben der Lehrkräfte in diesen Teilen der Fragebögen gewonnen werden?

Zunächst ist festzuhalten: *Sämtliche Lehrkräfte* haben gemäß Selbstauskunft auch explizit *Zählstrategien im Unterricht erarbeitet* und zumindest eine Zeitlang auch zum Gegenstand *gezielter Übungen* gemacht. Nun empfiehlt zwar, wie dargestellt, ein Teil etwa der US-amerikanischen FachdidaktikerInnen ganz explizit, mit den Kindern im Anfangsunterricht zunächst Strategien des Weiterzählens (und dabei vor allem die Strategie "Counting on from larger") zu erarbeiten (vgl. Kap. 2.9 und 2.10 sowie Kap. 3.1). Im deutschsprachigen Raum wird diese Position aber, zumindest in der aktuell veröffentlichten fachdidaktischen Literatur, nicht geteilt.

Zwar halten es auch manche deutschsprachige FachdidaktikerInnen für geboten, auf die *Notwendigkeit* einer "Phase des zählenden Rechnens" hinzuweisen. Die diesbezüglichen Äußerungen bleiben allerdings merkwürdig unbestimmt hinsichtlich der damit intendierten praktischen Konsequenzen. So meinen etwa RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE und EBELING in ihrem "Handbuch für den Mathematikunterricht":

> *"Dennoch dürfen die Tatsachen nicht übersehen werden, dass erstens zählende Rechenstrategien wichtige Zwischenschritte auf dem Weg der Konstituierung heuristischer bzw. operativer Strategien sind und dass zweitens manche Kinder zum Zeitpunkt der Einschulung noch nicht genügend Erfahrungen zum zählenden Rechnen haben sammeln können, um auf dieser Basis entwickelter Zählstrategien sich allmählich vom zählenden Rechnen lösen zu können. Das zählende Rechnen scheint für alle Menschen ein wichtiger Zwischenschritt auf dem Wege der Entwicklung weiterführender Strategien zu sein. Wenn wir den Kindern die Möglichkeit nehmen, in diesem Bereich vertraut zu werden, dann nehmen wir ihnen auch die Möglichkeit eine Grundlage für weitere Entwicklungen zu schaffen"* (RADATZ u.a. 1996, S. 40).

Ganz ähnlich äußern sich LORENZ (2003a, S. 105), HASEMANN (2003, S. 63; S. 129) oder auch PADBERG (2005, S. 34). Explizite Anleitungen dazu, mit den Kindern im Erstunterricht zunächst Strategien des zählenden Rechnens erst noch zu erarbeiten und in weiterer Folge einzuüben, findet man bei den genannten Autoren allerdings nicht. So empfehlen etwa RADATZ und KollegInnen, ErstklassenlehrerInnen mögen "sich darauf einstellen", dass anfangs viele Kinder (auch) Zählstrategien anwenden, sie mögen "möglichst differenziert beobachten" und auf Grundlage dieser Beobachtungen die Kinder "bei der Ablösung von zählenden Strategien" unterstützen (RADATZ u.a. 1996, S. 83f). Diese Haltung entspricht der alten pädagogischen Leitlinie, die "Kinder dort abzuholen, wo sie stehen", ist aber weit entfernt davon, zählende Rechenstrategien gezielt zum Gegenstand von Erarbeitungs- und Übungseinheiten zu machen.

Tatsächlich sind die von RADATZ u.a. in diesem Zusammenhang vorgebrachten (und von den anderen oben genannten AutorInnen gleichlautend oder ähnlich vertretenen) Argumente wenig überzeugend:

Zunächst *empirisch*: STEINBERG konnte zeigen, dass nicht-zählende Strategien bei gezielter Erarbeitung auch von Kindern erworben werden, die davor noch auf der Stufe des "Alleszählens" waren. Umgekehrt zeigten sich in ihrer Interventionsstudie gerade jene Kinder "resistent" gegenüber Ableitungsstrategien, die schon zu Beginn des Strategietrainings sicher und schnell in der Strategie "Weiterzählen" waren (STEINBERG 1985, vgl. Kap. 2.9.2). "Vertrautheit" mit Zählstrategien (die sich etwa im Übergang zum weiterzählenden Rechnen äußert; vgl. Kap. 2.3) ist also offenbar *keine* unabdingbare Voraussetzung dafür, die Vorteile nicht-zählender Strategien zu erkennen. Umgekehrt birgt solche Vertrautheit zumindest bei manchen Kindern offenbar das Risiko, dass sie in nicht-zählenden Strategien keinen Vorteil erkennen können.

Didaktisch-methodisch ist, wie VAN DE WALLE gegen den Mainstream der US-Fachdidaktik festhält, zu bedenken, dass Kindern wohl nur schwer begreiflich gemacht werden kann, warum zählendes Rechnen einmal gut, dann aber schlecht sein solle. Zudem seien Zählstrategien überflüssig, wenn von Beginn an nicht-zählende Strategien auf Grundlage von Einsicht in Teile-Ganzes-Beziehungen thematisiert werden (vgl. VAN DE WALLE 2004, S. 164; dazu auch. Kap. 2.9.4).

Der *logische* Mangel der Argumentation, Zählstrategien seien "wichtige Zwischenschritte auf dem Weg der Konstituierung heuristischer bzw. operativer Strategien", besteht darin, dass aus einem zeitlichen *Nacheinander* eine zwingende *Notwendigkeit* konstruiert wird. Es wird ja im Grunde nur festgehalten, dass Kinder üblicherweise zählend rechnen, ehe sie zu heuristischen Strategien finden. *Dass* aber Kinder zunächst zählend rechnen, hat wohl einiges damit zu tun, wie Zahlen im Kindergarten und im Elternhaus üblicherweise präsentiert und thematisiert werden; wie BESUDEN zu Recht festhält, ist daran nichts einfach "natürlich" (vgl. BESUDEN 1995, S. 80). Und dass Kinder später heuristische Strategien anwenden, trifft den vorliegenden Studien zufolge bei weitem nicht für alle zu; viele *bleiben* zählende Rechner (vgl. Kap. 2.13). Aber selbst bei jenen Kindern, die in einer späteren Phase ihrer Entwicklung tatsächlich zu heuristischen Strategien finden, ist die Annahme, dies wäre ohne die zuvor erreichte "Vertrautheit" mit Zählstrategien *unmöglich* gewesen, logisch unzulässig: Nur weil etwas sich *üblicherweise* so oder so entwickelt, ist nicht erwiesen, dass es sich *nicht auch anders* entwickeln könnte (etwa unter anderen Bedingungen wie einer frühen mathematischen Bildung, die von Anfang mindestens so viel Aufmerksamkeit auf Zahl*strukturen* lenkt wie auf die Zahlwort*reihe*).

Das zeitliche Nacheinander auch *inhaltlich* zu begründen, also nachzuweisen, inwiefern gerade das, was Kinder beim zählenden Rechnen lernen, sie dazu befähigen solle, später zu heuristischen Strategien überzugehen, wird von RADATZ u.a. gar nicht erst versucht: Wenn sie behaupten, "je sicherer die Zahlwortreihe beherrscht wird […], desto leichter fällt das zählende Rechnen und die Ablösung von zählenden Strategien des Rechnens" (RADATZ u.a. 1996, S. 55), dann werden offenbar zwei Bereiche miteinander vermengt, deren Unterscheidung didaktisch-methodisch dringend geboten ist: Dass erhöhte Sicherheit in der *Zahlwortreihe* das *zählende Rechnen* erleichtert, ist klar. Und es ist auch nicht zu bestreiten, dass das sichere Beherrschen der Zahlwortreihe eine wichtige Voraussetzung ist für *jedwede* Beschäftigung mit Zahlen, die über den engen Bereich der Simultanerfassung hinausgehen. Auch die Einsicht in Zahlstrukturen, die eine quasi-simultane Zahlerfassung von Anzahlen größer als vier erlaubt, muss ja erst noch gewonnen werden. Die Erarbeitung nicht-zählender Strategien, die solche Strukturen benützen, setzt *insofern* voraus, dass Kinder die Zahlwortreihe beherrschen, genauer: dass sie diese zur *Anzahlbestimmung* einsetzen können. Aber deshalb *erleichtert* das Beherrschen der Zahlwortreihe *für sich genommen* noch lange nicht die Ablösung vom zählenden Rechnen. Und schon gar nicht geht daraus hervor (und wird so explizit in obigem Zitat ja auch nicht behauptet), dass Kinder das *zählende Rechnen* "beherrschen" oder mit diesem "vertraut" sein müssten, um nicht-zählende Strategien verstehen und anwenden zu können.

Aber wie bereits erwähnt: Die von manchen deutschsprachigen FachdidaktikerInnen behauptete Notwendigkeit des zählenden Rechnens mündet bei ihnen in der Regel *nicht* in eine explizite "Didaktik des zählenden Rechnens" (eine gewisse Ausnahme scheint hier Inge SCHWANK zu bilden; vgl. SCHWANK 2003, S. 124-127). Fachdidaktische AutorInnen des deutschen Sprachraums scheuen also zumeist doch davor zurück, in den ersten Schulmonaten gerade das erst einmal einüben zu lassen, was sie selbst noch im Laufe des ersten Schuljahres zu überwinden dringend anraten. Einige AutorInnen aus dem Bereich der Entwicklungspsychologie oder der Sonderpädagogik sehen das durchaus anders. So wird etwa im Förderprogramm "Kalkulie" (vgl. GERLACH, FRITZ, RICKEN & SCHMIDT 2007, etwa S. 140f) oder im "Dortmunder Zahlbegriffstraining" (vgl. MOOG & SCHULTZ 1999; zur Kritik vgl. GAIDOSCHIK 2001b) tatsächlich dazu geraten, mit Kindern im ersten Schuljahr (und eventuell auch darüber hinaus) erst einmal Zählstrategien zu erarbeiten und zu trainieren.

Genau das haben *alle* im Rahmen der vorliegenden Studie befragten Lehrkräfte ihrer eigenen Auskunft zufolge getan. Warum dies schon *für sich genommen* nicht zielführend sein dürfte – jedenfalls dann nicht, wenn das Ziel des ersten Schuljahres "Überwindung des zählenden Rechnens" lautet –, wurde oben im Anschluss an VAN DE WALLE bereits begründet. Das *anfängliche* Üben von Strategien des zählenden Rechnens ließe sich aber (im Sinne der zitierten Anmerkung von RADATZ u.a.) vielleicht noch rechtfertigen als Aufgreifen der "informellen"

Strategien, die Kinder in der Regel bereits in die Schule mitbringen – dann, wenn in weiterer Folge gezielt und intensiv daran gearbeitet worden wäre, Alternativen zum zählenden Rechnen zu erarbeiten. Eben das ist aber aus den Fragebögen nicht erkennbar – eher das Gegenteil.

Hier sind die Anmerkungen der Lehrkräfte zu einzelnen Erarbeitungs- und Veranschaulichungsmitteln zu beachten, im Besonderen zum Einsatz der Finger: Nur 4 von 22 Lehrkräften gaben auf die offen formulierte Frage, worauf sie bei Verwendung der Finger im Arithmetikunterricht Wert gelegt hätten, zu erkennen, dass für sie deren *nicht-zählender* Gebrauch wichtig gewesen sei. Bezüglich anderer Materialien wurde der nicht-zählende Gebrauch von keiner einzigen Lehrkraft als bedeutsam angeführt. Von *keiner* Lehrkraft wird deutlich gemacht, dass sie Materialien (einschließlich der Finger) gezielt zum Erarbeiten nicht-zählender Strategien eingesetzt hätte. Eher erwecken die Fragebögen den Eindruck, dass Material (und in besonderer Weise die Finger) von der überwiegenden Mehrheit der Lehrkräfte im Wesentlichen als *zumindest anfänglich* legitimes und durchaus (insbesondere für "schwächere" SchülerInnen) willkommenes *Hilfsmittel für das zählende Rechnen* betrachtet wurde. Eine der 22 Lehrkräfte gestand dem Material (insbesondere den Fingern) diese Rolle explizit auch bis zum Ende des ersten Schuljahres zu. 12 der 22 Lehrkräfte geben in den Fragebögen aber mehr oder weniger explizit zu erkennen, dass sie es für wichtig halten, dass die Kinder spätestens am Ende des ersten Schuljahres *materialfrei* rechnen (wobei nur eine Lehrkraft dabei explizit von "Automatisierung" spricht).

Das wirft aber die Frage auf, wodurch Kinder bis zum Ende des ersten Schuljahres befähigt worden sein sollen, beim Rechnen ohne das zuvor "erlaubte" Material auszukommen. Wenn ein Kind nämlich dieses Material (zumeist wohl die Finger) dauerhaft nur als Zählhilfe verwendet hat, und zwar deshalb, weil es über nicht-zählende Strategien eben noch nicht verfügt, dann ist der Appell zum Materialverzicht gegen Ende des Schuljahres (ohne dass nicht-zählende Alternativen erarbeitet worden wären) gleichbedeutend mit dem Appell entweder zu heimlichem Fingergebrauch oder aber zu verbalem (innerem) Zählen. Letzteres ist mit einer deutlich erhöhten Beanspruchung des Arbeitsgedächtnisses verbunden, beides trägt *nicht* zur Entwicklung nicht-zählender Rechenstrategien bei.

Die Angaben der Lehrkräfte zum Umgang mit einzelnen Lösungswegen im Unterricht weisen in dieselbe Richtung wie jene zum Umgang mit Anschauungsmaterial: In 12 der 17 Klassen, deren Lehrkräfte dazu nähere Angaben machten, wurden diesen zufolge bis mindestens in den fünften Schulmonat (Jänner) hinein Zählstrategien "gezielt geübt". In sechs Klassen sei dies bis zum Ende des Schuljahres durchgehend geschehen. *Keine einzige Lehrkraft* gab an, sie hätte Kinder vom Anwenden von Zählstrategien im Zahlenraum bis zehn abzubringen versucht.

Von den *Ableitungs*strategien im Zahlenraum bis zehn fanden den Fragebögen zufolge hingegen nur Tauschaufgaben und Umkehraufgaben nennenswerte Beachtung. Die auch in den Schulbüchern kaum behandelte Strategie "Nachbaraufgabe für Plus" (auf der Basis von Kovarianz) wurde demgemäß nur in einer einzigen von 21 Klassen erarbeit und *über längere Zeit* geübt, in 16 von 21 Klassen aber *gar nicht* thematisiert. Die Strategie "Nachbaraufgabe für Minus" kam offenbar in 18 von 21 Klassen im Unterricht überhaupt nicht vor. Selbst die für nicht-zählendes Subtrahieren zentrale Strategie "Umkehraufgabe" ist gemäß den Selbstauskünften der Lehrkräfte in sechs Klassen nicht einmal thematisiert worden. Von den 15 Lehrkräften, die das Prinzip der "Umkehraufgabe" dem Fragebogen zufolge im Unterricht "erarbeitet und gezielt geübt" haben, machten nur 12 Angaben zum Zeitpunkt der Erarbeitung. Acht davon behandelten "Umkehraufgaben" demnach erst im Jänner – im Einklang mit der bereits kritisierten verspäteten (und jedenfalls dort auch didaktisch völlig unzureichenden) Behandlung dieses Themas im Schulbuch "Zahlenreise" (vgl. Kap. 7.1.2).

In einem Zusatzblatt wurden die Lehrkräfte zum Abschluss des Strategie-Fragebogens explizit auch dazu befragt, ob sie "im abgelaufenen Schuljahr [...] gezielt Maßnahmen ergriffen" hätten, "um zu erreichen, dass die Kinder die Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis zehn auswendig lernen". 12 von 22 Lehrkräften verneinten dies, vier machten dazu keine Angaben. Nur sechs gaben an, zu diesem Zweck Maßnahmen in der Klasse durchgeführt zu haben, und fünf davon erklärten, sie hätten auch die Eltern der SchülerInnen in irgendeiner Form angeregt oder beauftragt, mit den Kindern automatisierend zu üben. Nun ist bei Deutung dieses Befundes in Rechnung zu stellen, dass die Formulierung "auswendig lernen" bei manchen Lehrkräften möglicherweise die Assoziation an "*bloßes* Auswendiglernen (unter Missachtung von Einsicht)" geweckt haben mag und sie sich *deshalb* gescheut haben mögen, Unterrichtsmaßnahmen anzuführen, die tatsächlich dem *automatisierenden Üben* (unter Beachtung von Einsicht) gegolten haben. Angesichts der Antworten der Lehrkräfte in den anderen Abschnitten des Fragebogens ist es aber durchaus glaubhaft, dass tatsächlich nicht einmal ein Drittel der Lehrkräfte dem automatisierenden Üben im Zahlenraum bis zehn (in welcher Form auch immer) Beachtung geschenkt hat.

Zusammenfassend lassen sich aus den Fragebögen folgende Hypothesen zum Umgang der befragten Lehrkräfte mit Rechenstrategien im Anfangsunterricht gewinnen:

1) Die Behandlung von Zählstrategien im Zahlenbereich bis 10 erfolgte im Unterricht der interviewten Kinder *nicht* nur im Sinne eines "Aufgreifens von Vorkenntnissen". Vielmehr scheint zählendes Rechnen in der Mehrheit der Klassen zumindest bis zum Ende des ersten Schulhalbjahres (und in zumindest sechs der 22 Klassen während des gesamten ersten Schuljahres) *gezielt geübt* worden zu sein.

2) Die Behandlung von *Ableitungsstrategien* beschränkte sich dagegen mehrheitlich auf jene Strategien, denen in den verwendeten Schulbüchern die eine oder andere Seite gewidmet ist (dort in fachdidaktisch unzureichender Weise, wie in Kapitel 7.1 nachgewiesen wurde). Die aus fachdidaktischer Sicht besonders tragfähige Strategie "Verdoppeln plus 1" wurde in weniger als einem Viertel der Klassen überhaupt behandelt, die für nicht-zählendes Subtrahieren zentrale Strategie "Umkehraufgabe" in mehr als einem Viertel der Klassen gar nicht thematisiert, in mehr als der Hälfte erst sehr spät (nachdem die Kinder bereits mehrerer Monate lang im Unterricht mit Subtraktionen konfrontiert worden waren).
3) Aber auch der anderen Alternative zum zählenden Rechnen, dem *Auswendigwissen* (welches in zumindest beschränktem Umfang ja auch unverzichtbare Grundlage für das Anwenden von Ableitungsstrategien darstellt), wurden nur von einer Minderheit (weniger als einem Drittel) der Lehrkräfte gezielte Maßnahmen im Unterricht und/oder der Einbeziehung des häuslichen Übens gewidmet.

Die Kombination dieser drei Hypothesen – zumindest anfängliche Förderung von Zählstrategien, Vernachlässigung oder zumindest geringe Beachtung von Ableitungsstrategien, dazu aber auch weitgehendes Fehlen gezielter Maßnahmen des automatisierenden Übens im Bereich der additiven Grundaufgaben – verdichtet sich zum Bild eines Mathematikunterrichts, auf den die von PROBST und WANIEK formulierte Charakterisierung zutrifft:

> *"Der Übergang vom anfangs willkommenen Zählen und später (unerwünschten) zählenden Rechnen zu effektiveren und abstrakten Operationen ist didaktisch nicht befriedigend gestaltet, sondern wird dem spontanen Einsehen der Kinder überlassen"* (PROBST & WANIEK 2003, S. 77)

– sofern dieser Übergang, möchte man mit Blick auf die Fragebögen ergänzen, nicht gar durch offen kontraproduktive Maßnahmen wie Anleitungen zum anhaltend zählenden Materialgebrauch noch erschwert wurde.

Falls also die befragten Lehrkräfte nicht-zählendes Rechnen überhaupt als ein *Ziel* des ersten Schuljahres betrachtet haben (was nur wenige explizit festhielten), scheinen sie mehrheitlich der Vermutung anzuhängen, dieses Ziel würde sich im Laufe der Zeit mehr oder weniger *von selbst* einstellen – einfach dadurch, dass die Kinder im Laufe dieses Schuljahres *immer wieder* im begrenzten Bereich der additiven Grundaufgaben rechnen und dabei zu Lösungen gelangen (vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 132f). Auch wenn die Theorie SIEGLERS den Lehrkräften vermutlich nicht bekannt ist, scheint sich ihre im Unterricht wirksame *Alltagstheorie* über das Rechnenlernen mit SIEGLERS (wie in Kapitel 2.3 nachgewiesen: unhaltbarer) Hypothese zu decken, dass wiederholtes zählendes Rechnen letztlich *von selbst* in Rechnen auf Grundlage von Faktenabruf übergehe (vgl. Kap. 2.3).

Auf dieser Grundlage scheinen die in didaktisch-methodischer Hinsicht entscheidenden Fragen,

- mit welchen Strategien die additiven Grundaufgaben überhaupt gelöst werden können,
- welche dieser Strategien von einzelnen Kindern angewandt werden,
- und wie schließlich jene Kinder, die von sich aus *nicht* zu nicht-zählenden Strategien finden, darin unterstützt werden können, es doch zu tun,

von der Mehrzahl der befragten Lehrkräften *gar nicht gestellt* oder zumindest *nicht als Leitfragen* ihrer Unterrichtsgestaltung gesehen worden zu sein. Dazu passt, dass sechs der 21 Lehrkräfte bei *keiner* der vorgeschlagenen Strategien die Antwortmöglichkeit "erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt" wählten. Strategien wurden von diesen Lehrkräften allenfalls "kurz nach der Erarbeitung" geübt oder eben gar "nicht erarbeitet". Auch am "Zusatzblatt für weitere Lösungswege" gaben diese Lehrkräfte (wie alle anderen auch) keine Strategie an, die in ihrem Unterrichts "besonders wichtig" gewesen, im Fragebogen aber nicht berücksichtigt worden wäre. Und tatsächlich: *Zählende* Strategien müssen im ersten Schuljahr in der Regel nicht mehr extra erarbeitet werden, sie werden von den Kindern zumeist bereits in die Schule mitgebracht. Wenn es dann aber im Unterricht nicht von Belang ist, mit *welchen* Strategien Aufgaben gelöst werden, *sofern sie nur irgendwie gelöst* werden, dann erübrigt sich jedes Erarbeiten und gezielte Training einer speziellen Strategie.

Freilich muss zum wiederholten Male eingeräumt werden: Insgesamt erlaubt der Fragebogen keine klaren Aussagen darüber, wie die einzelnen Lehrkräfte ihren Unterricht tatsächlich im Einzelnen gestaltet haben. Nicht einmal über ihre *Einstellungen* zur Frage, ob Kinder im Laufe des ersten Schuljahres das zählende Rechnen überwinden sollten und welche didaktisch-methodischen Maßnahmen sie dabei unterstützen könnten, lässt sich auf Grundlage des Fragebogens umfassend urteilen. Die Fragen zum Einsatz von arithmetischem Material, insbesondere der Finger, waren bewusst offen formuliert worden – in der Annahme, dass gerade bei diesem bekannt "heiklen" Thema geschlossene Fragen eine Vielzahl "sozial erwünschter" Antworten provoziert hätten. Wenn nun aber bei offener Fragestellung nur wenige Fragebögen wenigstens implizite Hinweise darauf enthalten, dass die betreffenden Lehrkräfte gezielte Maßnahmen zur Überwindung des zählenden Rechnens für wichtig gehalten haben, dann lässt sich daraus nicht schließen, dass die anderen Lehrkräfte dies *nicht* getan haben; sie mögen es auch nur für nicht erwähnenswert gehalten haben. Vermutlich hätte, was die *Einstellungen* der LehrerInnen betrifft, ein leitfadengestütztes Interview tiefere Einblicke ermöglicht.

Was aber die tatsächliche Unterrichts*gestaltung* betrifft, sind die Unsicherheiten noch größer. Die Fragebögen liefern nun einmal nur zwar differenzierte, angesichts der Komplexität des Unterrichts aber letztlich doch *zu wenig detaillierte* Selbstauskünfte der befragten Lehrkräfte; keinesfalls leisten sie verlässliche Beschreibungen dessen, was im Unterricht tatsächlich im

Verlauf eines ganzen Schuljahres geschehen ist. Ob eine Strategie, bei der von einer Lehrkraft "erarbeitet und über längere Zeit gezielt geübt" angekreuzt wurde, in ihrem Unterricht tatsächlich Thema war und wenn ja, in welcher Form und welcher Intensität, lässt sich mit den Mitteln dieser Studie nicht überprüfen. Auch hier mag sozial erwünschtes Antwortverhalten eine Rolle spielen, aber auch eingeschränkte Selbstwahrnehmung des eigenen Unterrichts oder ein von den Intentionen des Autors abweichendes Verständnis der im Fragebogen verwendeten Begriffe. Insgesamt scheinen zwar die Angaben der Lehrkräfte zu den verschiedenen Strategien *in sich stimmig* zu sein und auch dem zu entsprechen, was auf Grundlage der Schulbuchanalyse und der Angaben zur Schulbuchverwendung zu erwarten war. Dennoch: Auch diese Teile des Fragebogens berechtigen nur zur Formulierung von *Hypothesen* darüber, wie die Lehrkräfte die gegenständlichen Materialien und Strategien im Unterricht behandelt haben, und selbst diese Hypothesen bleiben in vielen Fragen unbestimmt. Genauere Aufschlüsse und eine Überprüfung der oben formulierten Hypothesen wären wohl nur durch eine über einen längeren Zeitraum betriebene videobasierte Unterrichtsbeobachtung zu gewinnen – ein Forschungsmittel, das die Möglichkeiten dieser Arbeit bei weitem gesprengt hätte.

7.3.3 Zu Unterschieden zwischen den einzelnen Klassen

In Kapitel 7.1 wurde sehr detailliert auf die einzelnen Schulbücher eingegangen und dabei auch den Unterschieden zwischen diesen nachgegangen. In Kapitel 7.2 wurde versucht, auch individuelle Besonderheiten in den LehrerInnenfragebögen herauszuarbeiten. Demgegenüber waren die beiden ersten Abschnitte von Kapitel 7.3 bewusst darauf angelegt, noch einmal zusammenfassend die Gemeinsamkeiten zu betonen, um das Wesentliche, Allgemeine in der Fülle der Details nicht untergehen zu lassen. Und tatsächlich liefert die Analyse ja auch eine Vielzahl von Hinweisen dafür, dass der Mathematikunterricht in den 22 Klassen, aus denen Kinder für diese Studie interviewt wurden, hinsichtlich seiner *didaktisch-methodischen Komponente* einen *überwiegend einheitlichen Charakter* aufwies:

- Die fünf in diesen Klassen verwendeten Schulbücher sind ähnlich kleinschrittig aufgebaut und verfolgen, bei allen Unterschieden in Details der Umsetzung, in allen didaktisch-methodisch für unseren Gegenstand wesentlichen Fragen eine ähnliche Linie.
- Die Lehrkräfte zeigen sich mit wenigen Ausnahmen mit diesen Schulbüchern zufrieden bis sehr zufrieden.
- *Alle* Lehrkräfte (auch die wenigen, die sich mit ihren Schulbüchern weniger zufrieden zeigten) gaben an, sich in wesentlichen didaktisch-methodischen Fragen an diesen Schulbüchern orientiert zu haben.

Es wurde aber bereits eingeräumt, dass auch innerhalb dieses einheitlichen Rahmens erheblicher Spielraum für individuell unterschiedliche Unterrichtsgestaltung besteht; die in Kapitel

7.3.2 formulierten Hypothesen wurden deshalb auch jeweils nur für "die Mehrheit" der befragten Lehrkräfte aufgestellt. *Einzelne* Lehrkräfte gaben durch *einzelne* Antworten Raum für die Vermutung, dass sie in bestimmten didaktisch-methodisch relevanten Fragen einen Standpunkt vertreten, der sich innerhalb dieses gemeinsamen Rahmens dennoch von dem ihrer KollegInnen deutlich abgrenzen lässt. Die für den Untersuchungsgegenstand wesentliche Frage ist nun, ob diese unterschiedlichen Positionen in *Einzelfragen* (bei Gemeinsamkeiten in *anderen* Fragen) es rechtfertigen, von unterschiedlichen Lehrer*typen* zu sprechen in dem Sinne, dass sich die VertreterInnen eines Typus im Hinblick auf ihre Stellung zu wesentlichen didaktisch-methodischen Fragen des arithmetischen Erstunterrichts deutlich unterscheiden gegenüber VertreterInnen anderer Typen (Näheres zur Methode der empirisch begründeten Typenbildung s. Kap. 6.5.1). Auf Grundlage der in den Fragebögen gegebenen Antworten lässt sich dazu nur das Folgende festhalten:

Typus "Laissez-faire"

Bei 18 der 22 Lehrkräfte verdichten sich durch die Zusammenschau ihrer im Fragebogen gemachten Angaben, der von ihnen verwendeten und für zumindest "gut" befundenen Schulbücher wie auch der Analyse der Übungsmappen der von ihnen unterrichteten Kinder die Hinweise dafür, dass ihre Haltung gegenüber den einzelnen Rechenstrategien durch die in Kapitel 7.3.2 formulierten "Hypothesen zum Umgang mit Rechenstrategien im Anfangsunterricht" im Großen und Ganzen zutreffend charakterisiert ist, d.h.: Diese Lehrkräfte scheinen den Standpunkt zu vertreten, dass das zählende Rechnen sich durch fortgesetztes "Üben" (ohne dass darauf geachtet wird, ob dabei nicht nur fortgesetzt zählend gerechnet wird) im Laufe der Zeit "von selbst" in nicht-zählendes Rechnen verwandelt. Zählstrategien scheinen sie zumindest zu Beginn des Schuljahres für etwas zu halten, das mit den SchülerInnen gezielt geübt werden muss; Ableitungsstrategien scheinen in ihrem Unterricht – wenn überhaupt – nur am Rande vorzukommen; in der Regel scheinen aber auch keine gezielten Anstrengungen zum Auswendiglernen der additiven Grundaufgaben ergriffen zu werden.

Im Sinne einer Typologie ließe sich diese Haltung gegenüber der Entwicklung von additiven Rechenstrategien als "Laissez-faire" titulieren, wobei dieses "Gewährenlassen" allerdings offenbar bei vielen VertreterInnen dieses Typs zeitlich begrenzt ist, d.h.: Obwohl nicht-zählende Strategien im Unterricht nicht gezielt erarbeitet wurden, bestand bei vielen VertreterInnen dieses Typus offenbar doch die Erwartung, dass die Kinder spätestens am Ende des ersten Schuljahres nicht-zählend (oder zumindest nicht mehr *offen* zählend) rechnen können. Ob das "Laissez-faire" dann bei einigen Lehrkräften in ein *Verbot* oder zumindest eine "Ächtung" von Zählstrategien umkippte, kann aus den Fragebögen nicht erschlossen werden.

Typus "Erhöhte Strategiebewusstheit"
Bei insgesamt höchstens 4 der 22 Lehrkräfte lassen manche Angaben im Fragebogen eine (gegenüber den anderen Lehrkräften) erhöhte Sensibilität gegenüber der Problematik des zählenden Rechnens vermuten. Auch diese Lehrkräfte bewegten sich im Unterricht freilich in dem Rahmen, der von ihren Schulbüchern mit all den in Kapitel 7.1 aufgezeigten didaktischen Mängeln abgesteckt wird. Sie gaben aber etwa im Fragebogen an, Zählstrategien nur in den ersten Schulmonaten gefördert zu haben; und/oder sie nannten Ableitungsstrategien (zum Teil auch solche, die in ihren Schulbüchern nicht thematisiert wurden) unter jenen Strategien, die sie mit der Klasse "erarbeitet und über längere Zeit gezielt geübt" haben; drei dieser vier Lehrkräfte gaben auch an, zusätzlich gezielt an der Automatisation im Zahlenraum bis zehn gearbeitet zu haben. All das zusammengenommen, scheint es (trotz vieler Gemeinsamkeiten mit dem "Laissez-faire"-Typ in anderen Fragen) gerechtfertigt, diese vier Lehrkräfte einem eigenen Typus zuzuordnen, der etwa (im Vergleich mit dem "Laissez-faire"-Typ) als "Erhöhte Strategiebewusstheit" tituliert werden könnte.

Wohlgemerkt: Auch dieser als vorsichtige *Hypothese* zu verstehende *Versuch* einer Typisierung gründet im Wesentlichen nur auf den *Selbstauskünften* der Lehrkräfte darüber, wie sie im ersten Schuljahr unterrichtet haben. Wieweit den vermuteten *Lehrertypen* auch unterschiedliche Typen von *Unterrichtsgestaltung* entsprochen haben, lässt sich auf dieser Grundlage noch weniger beurteilen. Um eine tatsächlich *empirisch begründete* Typenbildung, wie sie bezüglich der Strategieentwicklung der interviewten Kinder in Kapitel 8.5 durchgeführt wird, auch bezüglich der Einstellungen der Lehrkräfte oder gar bezüglich ihrer tatsächlichen Unterrichtsgestaltung vornehmen zu können, war die vorliegende Untersuchung aber auch nicht konzipiert.

7.4 Ergebnisse der Elternbefragung

Elternfragebögen (vgl. Kap. 6.4) liegen für 138 von 139 Kindern vor; 131 sind vollständig ausgefüllt. Die wesentlichen Ergebnisse der Elternbefragung werden in den folgenden Abschnitten dargestellt; sie erlauben, mit der gegenüber Selbstauskünften gebotenen Vorsicht, einen gewissen Einblick in die häuslichen Rahmenbedingungen des Rechnenlernens. Dem möglichen Einfluss des aus den Elternfragebögen ermittelten Bildungsgrades der Eltern auf die Strategieentwicklung ihrer Kinder wird in Kapitel 9 nachgegangen.

7.4.1 Höchste abgeschlossene Schulbildung

Der Fragebogenteil zur höchsten abgeschlossenen Schulbildung wurde in 137 der 138 abgegebenen Fragebögen von der oder jedenfalls für die Mutter ausgefüllt, in 133 Fällen auch vom

Vater bzw. für den Vater des Kindes. Die Eltern *eines* Kindes beantworteten also die Frage nach ihrer Schulbildung gar nicht. In vier Fällen liegen nur die Angaben für die Mutter vor, in einem dieser Fälle wurde dazu handschriftlich vermerkt, dass der Vater von Mutter und Kind getrennt lebe. Die Tabellen 18 und 19 geben die Angaben der Eltern zu ihrer Schulbildung gemäß den im Fragebogen vorgegeben Kategorien wieder (vgl. dazu Kap. 5.3).

Tabelle 18: Höchste abgeschlossene Schulbildung der Mütter der interviewten Kinder gemäß Selbstauskunft (n = 137)

Höchste abgeschlossene Schulbildung	Anzahl	Prozent
Allgemeine Sonderschule	1	0,7
Volksschule	1	0,7
Hauptschule	10	7,3
Berufsschule mit bestandener Prüfung bzw. Berufsfachschule ohne Matura	88	64,2
Matura	19	13,9
Pädagogische Akademie	6	4,4
Abgeschlossenes akademisches Studium	12	8,8

Tabelle 19: Höchste abgeschlossene Schulbildung der Väter der interviewten Kindergemäß Selbstauskunft (n = 133)

Höchste abgeschlossene Schulbildung	Anzahl	Prozent
Allgemeine Sonderschule	0	0,0
Volksschule	0	0,0
Hauptschule	5	3,8
Berufsschule mit bestandener Prüfung bzw. Berufsfachschule ohne Matura	86	64,7
Matura	28	21,1
Pädagogische Akademie	1	0,8
Abgeschlossenes akademisches Studium	13	9,8

In acht von 133 mit beiden Elternteilen erfassten Familien (6,0 Prozent) haben gemäß Selbstauskunft beide Elternteile ein abgeschlossenes akademisches Studium, in 17 Familien (12,8 Prozent) mindestens ein Elternteil. In 23 Familien (17,3 Prozent) haben beide Elternteile als höchste abgeschossene Schulbildung Matura, in 55 Familien (41,3 Prozent) mindestens ein Elternteil. Auf der anderen Seite des Bildungsspektrums haben in zwei Familien beide Elternteile höchstens die Hauptschule abgeschlossen.

Zur Einordnung dieser Daten: Gemäß Statistik Austria haben 8,4 Prozent der 25- bis 29-jährigen Österreicher bzw. 12,5 Prozent der 25- bis 29-jährigen Österreicherinnen ein akademisches Studium abgeschlossen und weitere 20,4 Prozent (Männer) bzw. 21,6 Prozent (Frauen) dieser Altergruppe als höchste abgeschlossene Schulbildung die Matura abgelegt (Grundlage ist die Volkszählung 2001). Nach derselben Quelle haben in der Altersgruppe der 30- bis 34-Jährigen 10,8 Prozent der Männer bzw. 12,4 Prozent der Frauen ein Studium abgeschlossen und weitere 15,8 Prozent (Männer) bzw. 16,1 Prozent (Frauen) als höchste abgeschlossene Schulbildung die Matura abgelegt (vgl. http://www.statistik.at/web_de/statistiken/ bevoelkerung/volkszaehlungen_registerzaehlungen/bevoelkerung_nach_dem_bildungsstand/022874. html bzw. http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/volkszaehlungen_register zaehlungen/bevoelkerung_nach_dem_bildungsstand/022875.html, 9.12.2009).

Es ist anzunehmen, dass ein Großteil der befragten Eltern diesen beiden Altersgruppen entstammt. (In den beiden nächsthöheren Altersgruppen sind AkademikerInnen und MaturantInnen ohne abgeschlossenes Studium etwas seltener vertreten.) Demnach sind AkademikerInnen insgesamt sowie Frauen mit Matura als höchster abgeschlossener Schulbildung in der Elternstichprobe vermutlich schwach unterrepräsentiert, Männer mit Matura als höchster abgeschlossener Schulbildung vermutlich etwas überrepräsentiert.

7.4.2 Angaben zur Entwicklung der Motivation der Kinder

Die Eltern wurden im Fragebogen um eine Einschätzung der Motivation ihres Kindes in drei Bereichen gebeten:

- die (im Juni des ersten Schuljahres) aktuelle Motivation zum Schulbesuch generell
- die aktuelle Motivation zum Erledigen der Mathematikhausübung
- die aktuelle Motivation zum zusätzlichen häuslichen Rechnenüben

Dabei sollten sie jeweils eine von fünf Antwortmöglichkeiten ankreuzen: "sehr gern", "gern", "ohne besondere Emotionen", "eher ungern", "sehr ungern".

Zusätzlich sollten sie jeweils angeben, ob sich diese Motivation seit Schulbeginn ihrer Einschätzung nach verändert hat; dabei konnten sie unter folgenden fünf Antwortmöglichkeiten wählen: "stark verbessert", "eher verbessert", "nicht verändert", "eher verschlechtert", "stark verschlechtert".

Die Tabellen 20 bis 22 geben zunächst die aktuelle Motivation aus Elternsicht wieder.

Tabelle 20: Generelle Motivation der interviewten Kinder zum Schulbesuchgegen Ende des ersten Schuljahres nach Einschätzung ihrer Eltern (n = 138)

Kind geht in die Schule...	Anzahl	Prozent
sehr gern	69	50,0
gern	54	39,1
ohne besondere Emotionen	11	8,0
eher ungern	3	2,2
sehr ungern	1	0,7

Tabelle 21: Generelle Motivation der interviewten Kinder zum Erledigen der Mathematikhausübunggegen Ende des ersten Schuljahres nach Einschätzung ihrer Eltern (n = 138)

Kind macht die Mathematik-Hausübung...	Anzahl	Prozent
sehr gern	59	42,8
gern	46	33,3
ohne besondere Emotionen	17	12,3
eher ungern	16	11,6
sehr ungern	0	0,0

Tabelle 22: Generelle Motivation der interviewten Kinder zum zusätzlichen Rechnenüben gegen Ende des ersten Schuljahres nach Einschätzung ihrer Eltern (n = 138)

Kind übt zusätzlich rechnen...	Anzahl	Prozent
sehr gern	26	18,8
gern	39	28,3
ohne besondere Emotionen	21	15,2
eher ungern	19	13,8
sehr ungern	3	2,2
entfällt, da zusätzlich nicht rechnen geübt wird	30	21,7

Demnach bescheinigen zwar nur 2,9 Prozent der Eltern ihren Kindern eine geringe Motivation zum Schulbesuch im Allgemeinen, aber immerhin 11,6 Prozent der Eltern geben an, ihr Kind mache die Mathematik-Hausübung "eher ungern", und insgesamt 16 Prozent, ihr Kind übe das Rechnen zuhause "eher ungern" oder sogar "sehr ungern". Wieweit sich diese Abneigung speziell auf das Rechnen oder generell auf schulische Verpflichtungen am Nachmittag bezieht, kann auf Grundlage der Befragung freilich nicht entschieden werden, da verabsäumt wurde, zum Vergleich etwa auch die Einschätzung der Motivation zu Lese- oder Schreibhausübungen bzw. zu zusätzlichen Übungen in diesen Bereichen abzufragen.

Bezüglich der Entwicklung der Motivation zum Schulbesuch bekunden acht Prozent der Eltern eine Verschlechterung seit Schulbeginn, während 12,9 Prozent meinen, die Motivation habe sich "eher verbessert" und 13,8 Prozent, die Motivation habe sich sogar "stark verbessert"; 65,2 Prozent erklärten, die Motivation habe sich "nicht verändert".

Die Einschätzung der Eltern bezüglich der Entwicklung der Motivation zum Erledigen der Mathematik-Hausübung ist sehr ähnlich (8,7 Prozent "verschlechtert" gegenüber insgesamt 25,3 Prozent "verbessert" oder "stark verbessert" bei 65,9 Prozent "nicht verändert"). Bei den Angaben zur Entwicklung der Motivation zum zusätzlichen Rechnenüben nimmt "nicht verändert" mit 69,4 Prozent einen noch einmal etwas höheren Anteil ein, "verschlechtert" mit 6,5 Prozent einen etwas niedrigeren.

Die Kinder wurden beim zweiten und dritten Interview jeweils auch direkt befragt, wie gerne oder ungern sie die Mathematikhausübung machen bzw. zuhause zusätzlich zur Hausübung rechnen üben. Dabei stimmten die Selbstauskünfte der Kinder beim dritten Interview mit den etwa zur gleichen Zeit gegebenen Einschätzungen der Eltern in der überwiegenden Mehrheit der Fälle im Großen und Ganzen überein. Im Fall der Motivation zu Hausübungen war die Auskunft des Kindes nur in neun Fällen (6,5 Prozent von 138 vergleichbaren Angaben) in deutlichem Widerspruch zur Einschätzung der Eltern, bezüglich der Motivation zum Üben gab es solchen deutlichen Widerspruch in zwölf Fällen (8,7 Prozent). Die Abweichungen traten in beide Richtungen auf: In fünf Fällen schätzen die Eltern die Motivation zum Erledigen der Hausübung (ebenso in fünf Fällen zum zusätzlichen Üben) deutlich höher ein, als es das Kind selbst beim letzten Interview bekundete. In vier Fällen (bezüglich der Hausübungen) bzw. in sieben Fällen (bezüglich des zusätzlichen Übens) erklärten umgekehrt die Kinder, sie würden die Hausübungen bzw. das zusätzliche Üben "gerne" machen, während die Eltern ihnen dabei ein "eher ungern" bescheinigt hatten.

7.4.3 Angaben zum zeitlichen Aufwand für Hausübungen

Die Angaben der Eltern zum durchschnittlichen Zeitaufwand für das Erledigen der Mathematik-Hausübung liegen zwischen 3 Minuten (ein Fall) und 60 Minuten (ein Fall). Der Mittelwert beträgt 14,8 Minuten, bei einer Standardabweichung von 8,6 Minuten.

In 79,1 Prozent der Fälle liegen die Antworten bei maximal 15 Minuten, für nur 13 Kinder bei 30 Minuten oder länger. Nur zwei dieser Kinder, die nach Angaben der Eltern für ihre Hausübung durchschnittlich mindestens 30 Minuten benötigten, hatten mehr als 7 von 14 nicht-trivialen Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn automatisiert (vgl. Kap. 8.5.3.3).

7.4.4 Angaben zum Grad der Selbstständigkeit des Kindes beim Erledigen der Hausübung

Insgesamt 84,2 Prozent der Eltern gaben an, ihr Kind habe im ersten Schuljahr nie oder nur selten Hilfe beim Erledigen der Mathematik-Hausübung benötigt. 19 Eltern (13,9 Prozent von 137, die sich dazu äußerten) erklärten aber, ihr Kind habe dabei "oft Hilfe" gebraucht, vier weitere Eltern sogar, ihr Kind habe "(fast) immer Hilfe" benötigt. Immerhin fünf der 19 Kinder, die ihren Eltern zufolge bei der Hausübung "oft Hilfe" benötigt haben, hatten 10 oder mehr von 14 nicht-trivialen Grundaufgaben automatisiert. Auch eines der vier Kinder, die ihren Eltern zufolge "(fast) immer Hilfe" benötigt haben, hatte 12 von 14 nicht-triviale Grundaufgaben automatisiert und gehörte in dieser Hinsicht zu den besten 20 Prozent der Stichprobe.

7.4.5 Angaben zum häuslichen Üben

Wie die Eltern im Fragebogen, wurden auch die Kinder beim dritten Interview gefragt, ob im Laufe des Schuljahres zuhause das Rechnen auch zusätzlich zu den Hausübungen geübt worden sei. Auch in dieser Frage stimmten die Aussagen von Eltern und Kindern in der Mehrzahl der Fälle (in 75,2 Prozent von 137 vergleichbaren Aussagen) überein, Widersprüche oder zumindest deutliche Abweichungen zwischen den Aussagen von Eltern und Kindern waren in diesem Bereich aber deutlich häufiger als in den Aussagen über die Motivation zum Rechnenüben. So erklärten in 23 Fällen (16,8 Prozent) die Kinder, es sei "täglich" oder zumindest "oft" geübt worden, während ihre Eltern "selten" oder sogar "nie" angaben. In 11 Fällen (7,9 Prozent) kreuzten umgekehrt die Eltern an, es sei zumindest einmal pro Woche (manche aber auch "täglich") zusätzlich zur Hausübung geübt worden, während ihre Kinder erklärten, sie hätten zuhause über die Hausübung hinaus gar nicht geübt.

Für diese Abweichungen sind verschiedene Gründe denkbar, etwa

- unterschiedliche Auffassungen der Eltern und ihrer Kinder darüber, was unter "Rechnen üben zusätzlich zur Hausübung " zu verstehen sei. So könnten manche Kinder Übungen, die über die Hausübung zwar hinausgingen, dennoch nicht als solche registriert haben, weil diese vielleicht stets unmittelbar nach der Hausübung gemacht worden sind.
- sozial erwünschtes Antwortverhalten. So könnte es sein, dass manche Eltern zwar während des Schuljahres nicht mit ihren Kindern geübt, beim Ausfüllen des Fragebogens aber gemeint haben, dies sei ein Versäumnis gewesen, welches sie nicht eingestehen wollten. Umgekehrt mögen andere Eltern, die zuhause tatsächlich viel mit ihren Kindern geübt haben, dennoch den Eindruck erwecken wollen, ihr Kind habe zusätzliches Üben nicht oder nur in geringem Ausmaß "nötig gehabt".
- unterschiedliche zeitliche Bezugsrahmen. So könnten manche Kinder ihre Aussagen nur auf die aktuelle Situation bezogen haben, die Eltern aber (wie in der Frage an Eltern wie Kinder intendiert) auf das gesamte Schuljahr; vermutlich wurde aber in den letzten Schulwochen generell weniger geübt als im Durchschnitt des Jahres.

Legt man die Angaben der Eltern zugrunde, dann wurde mit den Kinder dieser Stichprobe während des ersten Schuljahres durchschnittlich 20,55 Minuten pro Woche zusätzlich zur Hausübung Rechnen geübt, bei sehr großer Streuung (Standardabweichung 28,18): Das Minimum lag bei 0 Minuten (für 29 Kinder oder 20,9 Prozent der Stichprobe angegeben), das Maximum bei 180 Minuten (für 1 Kind genannt; mit drei weiteren Kindern sei nach Auskunft ihrer Eltern wöchentlich 120 Minuten zusätzlich zur Hausübung Rechnen geübt worden), der Median bei 10 Minuten.

8 Längsschnittstudie zur Strategie-Entwicklung: Deskriptive Statistik und qualitative Ergebnisse

> *"When the available data are limited to 'hard' measures, such as solution times or percent correct on each problem, a single simple model often can account for most of the variance in the data. This creates a warm feeling within the experimenter, a sense that we are really beginning to understand cognition. When the data include subjects' explanations* [...] *however, the idiosyncrasies of individual performance emerge more clearly and become much harder to ignore."*
>
> SIEGLER & JENKINS 1989, S.11

Bei der nun folgenden deskriptiven und qualitativ-interpretativen Auswertung der Interviews zu den additiven Grundaufgaben wird zunächst in Kapitel 8.1 dargestellt, welche zahlbezogenen Kenntnisse in verschiedenen Bereichen die 139 für diese Untersuchung interviewten Kinder bereits in der ersten Interviewreihe (wenige Wochen nach Beginn des ersten Schuljahres) erkennen ließen. Dabei kommt auch zur Sprache, wie viele Kinder bereits zu Schulbeginn (in der Regel vor Behandlung der Rechenoperationen im Unterricht) ein Verständnis für die additiven Rechenoperationen bzw. Kenntnis von Plus- und Minuszeichen gezeigt haben.

Bei der daran anschließenden Darstellung der Ergebnisse der Interviews zu den additiven Grundaufgaben wird für jeden Interviewtermin (in 8.2 für den ersten, in 8.3 für den zweiten, in 8.4 für den letzten Interviewtermin) in der gleichen Reihenfolge vorgegangen:

- Zunächst wird ein *tabellarischer Überblick* darüber gegeben, wie häufig die einzelnen Grundaufgaben mit den einzelnen Strategien gelöst wurden.
- Anschließend werden die wesentlichen Ergebnisse *mit Bezug auf einzelne Strategien* dargestellt und in ihrem Zusammenhang eingeordnet, wobei aber auf die Ableitungsstrategien vorerst noch nicht im Detail eingegangen wird. Dieser erste Teil der Interviewauswertung wird mit einer Darstellung der Fehlerquote bei den einzelnen Aufgaben abgeschlossen.
- Den *Ableitungsstrategien* ist schließlich jeweils ein eigener Unterabschnitt gewidmet. Dabei werden die wesentlich erscheinenden Beobachtungen zu den verschiedenen Ableitungsstrategien zunächst für sich dargestellt, ehe durch ein "scoring in context" (vgl. BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 110 sowie Kap. 6.1.7) versucht wird, aus der Zusammenschau der *von denselben Kindern* bei unterschiedlichen Aufgaben angewandten Strategien weitere Hinweise dafür zu gewinnen, welche konzeptuellen Voraussetzungen ein Kind erlangt haben muss, um eine bestimmte Ableitungsstrategie anwenden zu können.

Die vorherrschende Perspektive in den Abschnitten 8.2 bis 8.4 ist also jeweils die *Ebene der Aufgaben und Strategien*; die leitende Frage ist, welche Strategien zu den drei Interviewterminen in welcher Häufigkeit bei welchen Aufgaben zum Einsatz kamen. In Kapitel 8.5 erfolgt ein Perspektivenwechsel zur *Ebene der Kinder*: Die Leitfrage lautet nun, wie viele additive Grundaufgaben einzelne Kinder zu jedem Termin mit einzelnen Strategien gelöst haben, wie viele Kinder sich dabei als vorwiegend Fakten nutzende oder vorwiegend zählende Rechner präsentiert haben, und welche Kombination von Strategien (welcher "mix of existing strategies", vgl. SIEGLER & JENKINS 1989, S. 27 und Kap. 2.3.1) von jeweils wie vielen Kindern gezeigt wurde. In diesem Zusammenhang wird abschließend versucht, eine empirisch begründete Typenbildung bezüglich der Strategieentwicklung im ersten Schuljahr vorzunehmen.

Sofern in dieser Arbeit Kinder mit Vornamen genannt werden, ist dies *nicht* ihr richtiger Name: Um ihre Anonymität auch gegenüber Personen, die an den Erhebungen beteiligt waren (Lehrkräfte, Eltern, andere Kinder…), sicherzustellen, erhielten Buben einen anderen Bubennamen, Mädchen einen anderen Mädchennamen.

8.1 Zahlbezogene Kenntnisse zu Schulbeginn

8.1.1 Kenntnis der Zahlwortreihe vorwärts

Die Überprüfung der Kenntnis der Zahlwortreihe vorwärts erfolgte durch die Aufforderung: "Zähle, so weit wie du kannst!" Das wurde von allen Kindern ohne weiteres verstanden und zumeist mit erkennbarem Stolz auf die eigene Leistung ausgeführt. Jene Kinder, die ohne Zählfehler bis "einhundertzwölf" kamen, wurden an dieser Stelle (mit dem Ausdruck angemessener Bewunderung) gestoppt. Es ist zu vermuten, dass diese Kinder die Zahlwortreihe wohl auch noch weiter hätten aufsagen können, was aber für die vorliegende Studie nicht mehr von Interesse war. Kinder, die von sich aus bei einer Zahl kleiner als einhundertzwölf Schluss machten, wurden zunächst dafür gelobt, dann aber gefragt, ob sie vielleicht "sogar noch ein bisschen weiter zählen" könnten. Erst wenn ein Kind auf diese Frage hin nicht mehr weiter machte, wurde die zuletzt genannte Zahl als höchste erreichte Zählzahl festgehalten.

Zählfehler wurden nicht korrigiert, in der Auswertung aber wie folgt berücksichtigt: Wenn der Zählfehler vor Erreichen der Zahl zwanzig gemacht wurde, wurde jene Zahl als höchste erreichte Zählzahl gewertet, bis zu der das Kind fehlerfrei gezählt hat. Sofern ein Kind in der Zahlwortreihe über zwanzig nur *eine, nicht erkennbar systematische* Auslassung machte und danach korrekt fortsetzte, wurde dieser Auslassungsfehler als möglicher Konzentrationsfehler toleriert und deshalb jene Zahl als höchste erreichte Zählzahl gewertet, bis zu der das Kind nach dieser einen Auslassung noch korrekt weiterzählte. Als *systematische Auslassung* wurde etwa das Auslassen von zweistelligen Zahlen mit gleichen Ziffern an Zehner- und Einerstelle (wie etwa in der Zählung "…zweiunddreißig, vierunddreißig, fünfunddreißig…") gewertet.

Tabelle 23 zeigt die von den Kindern zu Schulbeginn demonstrierten Kenntnisse der Zahlwortreihe im Detail.

Tabelle 23: Kenntnis der Zahlwortreihe vorwärts bei 139 niederösterreichischen SchulanfängerInnen

Höchste erreichte Zählzahl	Häufigkeit	Prozent	Kumulierte Prozente		Höchste erreichte Zählzahl	Häufigkeit	Prozent	Kumulierte Prozente
112	12	8,6	8,6		28	5	3,6	70,5
100	**36**	**25,9**	**34,5**		26	2	1,4	71,9
99	1	0,7	35,3		25	1	0,7	72,7
89	1	0,7	36,0		24	1	0,7	73,4
73	1	0,7	36,7		22	1	0,7	74,1
69	3	2,2	38,8		21	1	0,7	74,8
60	1	0,7	39,6		**20**	**4**	**2,9**	**77,7**
59	1	0,7	40,3		19	4	2,9	80,6
58	1	0,7	41,0		18	2	1,4	82,0
49	3	2,2	43,2		17	2	1,4	83,5
48	1	0,7	43,9		16	4	2,9	86,3
40	1	0,7	44,6		15	2	1,4	87,8
39	**15**	**10,8**	**55,4**		14	2	1,4	89,2
38	1	0,7	56,1		13	2	1,4	90,6
37	1	0,7	56,8		12	7	5,0	95,7
30	5	3,6	60,4		11	2	1,4	97,1
29	**9**	**6,5**	**66,9**		10	4	2,9	100,0

Daraus sei hervorgehoben:

– *Kein einziges* der 139 Kinder konnte die Zahlwortreihe *nicht bis mindestens zehn* aufsagen, und nur für vier Kinder war bei dieser Zahl Schluss.
– Nur etwa 22 Prozent der Kinder konnten die Zahlwortreihe nicht bis mindestens zwanzig fehlerfrei aufsagen.
– Die Zahlen 29, 39 und 100 erwiesen sich als bedeutsame Hürden: Wer über 29 hinaus kam (60,4 Prozent taten dies), schaffte es zumeist auch bis mindestens 39 (was 55,4 Prozent aller Kinder taten). Wer es auch noch über 39 hinaus schaffte (44,5 Prozent), schaffte es zumeist auch bis mindestens 100 (34,5 Prozent taten dies).
– Kein Kind, das die Zahlwortreihe auch über "hundert" hinaus mit "hundert(und)eins" korrekt fortsetzen konnte, konnte dann nicht wenigstens noch bis "einhundertzwölf" korrekt weiterzählen (wo der Versuch dann abgebrochen wurde). 36 Kinder (25,9 Prozent) hörten aber bei "hundert" entweder mit dem Zählen auf und erklärte, sie wüssten nicht weiter; oder sie setzten nach "hundert" falsch fort (in der Regel dann mit "einhundert, zweihundert, dreihundert...", vgl. dazu SPIEGEL & SELTER 2003, S. 12).

Diese Ergebnisse entsprechen im Wesentlichen den Erhebungen, die in jüngerer Vergangenheit mit SchulanfängerInnen in Deutschland und der Schweiz gemacht wurden (vgl. Kap. 6.1.5.1). So konnten etwa in der Untersuchung von HASEMANN annähernd gleich viele Kinder

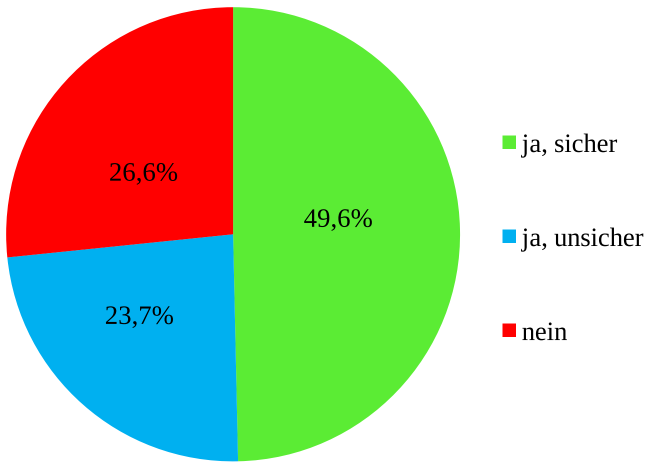
(77 Prozent gegenüber den 78 Prozent in der vorliegenden Untersuchung) mindestens bis zwanzig zählen (vgl. HASEMANN 2003, S. 62). Vor diesem Hintergrund ist die in allen Klassen unter Beachtung diesbezüglicher Schulbuchvorgaben erfolgte Begrenzung des Einstiegszahlenraums auf höchstens fünf (und die mehrheitliche Beibehaltung dieses Einstiegszahlenraumes bis zur achten Schulwoche) (vgl. Kap. 7.1.1 und 7.2.2.3) höchst bedenklich.

8.1.2 Kenntnis der Zahlwortreihe rückwärts

8.1.2.1 Kenntnis der Zahlwortreihe rückwärts von 10 weg

Die Überprüfung erfolgte mittels der Frage: "Kannst du auch schon runterzählen? Probier' doch einmal, von zehn runter zu zählen!" Sofern das Kind daraufhin nicht ohnedies von selbst damit begann, die Zahlwortreihe rückwärts aufzusagen, wurde nachgereicht: "Ich meine es so: Erst sagst du zehn, dann neun…" Wenn das Kind auch dann nicht fortsetzte, wurde noch ein letzter Anstoß gegeben mit "Zehn, dann neun, dann acht…". Wenn nun das Kind immer noch nicht fortsetzte, wurde abgebrochen.

Abbildung 7: Kenntnis der Zahlwortreihe rückwärts, von "zehn" beginnend

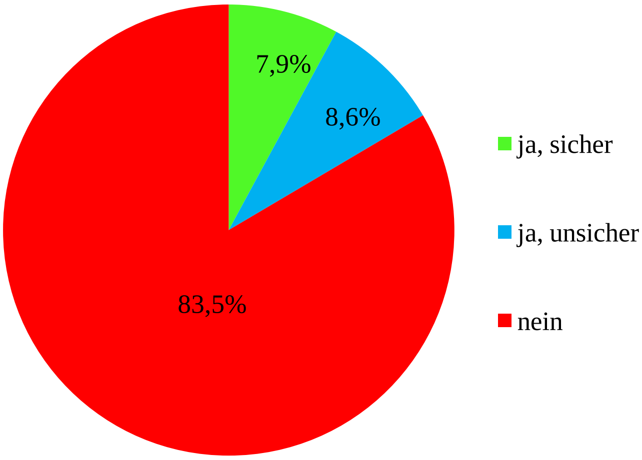


Als "ja, sicher" (49,6 %) wurden alle Kinder erfasst, die höchstens den *ersten* Anstoß ("zehn, neun") benötigten oder auch ganz ohne Anstoß sicher und fehlerfrei bis eins oder auch null fortsetzten. Unter "ja, unsicher" (23,7 %) wurden jene Kinder erfasst, die zwar korrekt bis eins oder null rückwärts zählten, dies aber erst nach dem zweiten Anstoß "zehn, neun, acht" taten und/oder im weiteren Verlauf zögerten, lange nachdenken mussten oder sonst unsicher waren. Kinder, die entweder gar nicht oder fehlerhaft (mit Auslassungen und/oder Richtungswechsel) runterzählten, wurden unter "nein" erfasst (26,6 %) (vgl. Abbildung 7).

8.1.2.2 Kenntnis der Zahlwortreihe rückwärts von 20 weg

Die Überprüfung und Kategorisierung erfolgte analog zu 8.1.2.1., allerdings wurden nur jene Kinder überhaupt gefragt, ob sie "von zwanzig runterzählen" konnten, welche dies zuvor von zehn weg (wenn auch vielleicht unsicher und/oder mit Anstoß) gekonnt hatten. Bei den 26,6 Prozent der Kinder, die auch nicht mit Hilfestellungen von zehn weg hatten runterzählen können (vgl. Abb. 7), wurde nommen, dass sie dies umso niger von zwanzig weg tun den. Diese Kinder sind also in Abbildung 8 als ein Teil der 83,5 % "nein" erfasst. Sicher und ohne Hilfe von "zwanzig" rückwärts zählen konnten 7,9 Prozent der SchulanfängerInnen, mit Hilfe schafften dies weitere 8,6 Prozent.

Abbildung 8: Kenntnis der Zahlwortreihe rückwärts, von "zwanzig" beginnend

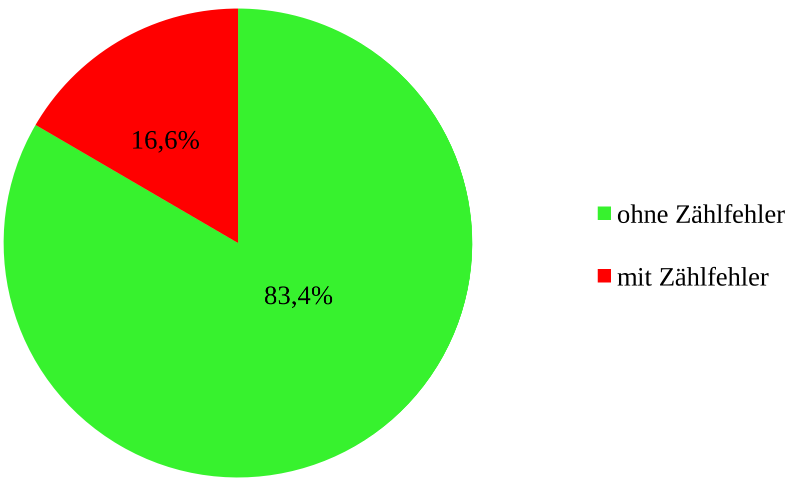


HASEMANN (2003, S. 62) weist für seine Untersuchung nur das Rückwärtszählen von 17 weg aus. Dieses war für 32 Prozent der befragten 300 deutschen Kinder unmittelbar vor Schulbeginn machbar. Das sind deutlich mehr als die in Summe 19,5 Prozent der niederösterreichischen SchulanfängerInnen, die von "zwanzig" zurückzählen konnten.

8.1.3 Anzahlverständiges Zählen

Den Auftrag "Lege mir bitte aus diesem Korb genau zehn Würfel hier auf den Tisch!" führten 115 der 139 Kinder (83,4 Prozent) fehlerfrei durch. 24 Kindern (16,6 Prozent) unterlief dabei ein Zählfehler, indem sie die beim korrekten Abzählen erforderliche Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen Zahlwortreihe und Zähldingen nicht durchgehend einhielten (vgl. Abb. 9)

Abbildung 9: Performanz im resultativen Zählen (10 Objekte) zu Schulbeginn



Unmittelbar nachdem sie die zehn Würfel vor sich auf den Tisch gelegt hatten, bat der Interviewer, ob das Kind bitte noch einmal sagen könne, wie viele Würfel nun da lägen? Die meisten Kinder nannten nun einfach ohne nochmaliges Zählen die richtige Anzahl. 12,9 Prozent der Kinder zählten die zehn Würfel daraufhin erneut ab. Das könnte als Hinweis auf ein noch nicht vorhandenes oder zumindest nicht abgesichertes kardinales Zahlverständnis gedeutet werden (vgl. Kap. 2.10.1). Bei der überwiegenden Mehrzahl dieser Kinder schien es aber durch den Gesprächsfortgang deutlich, dass sie nur deshalb erneut abzählten, weil sie sicher gehen (bzw. dem Interviewer beweisen) wollten, dass sie den Auftrag korrekt ausgeführt hatten. Das in der Literatur für jüngere Kinder beschriebene Phänomen des Zählens ohne jedes Anzahlbewusstsein ("Early counting has no result other than the acitivity of counting", FUSON 1992a, S. 62) konnte bei höchstens zwei Kindern mit einiger Plausibilität vermutet werden.

Nach Klärung der Anzahl der Würfel (unverändert zehn) wurden diese schließlich vom Interviewer mit der Ankündigung "Pass' genau auf, was ich jetzt mache!" vor den Augen des Kindes "durchgemischt", also in ihrer räumlichen Anordnung auf dem Tisch geändert. Dann wurde das Kind erneut gefragt, ob es sagen könne, wie viele Würfel es nun seien. 43 Kinder (30,9 Prozent) zählten auf diese Frage die Würfel noch einmal ab. Dieses Verhalten kann unter Umständen als Hinweis auf eine noch nicht gänzlich abgesicherte Anzahlkonstanz verstanden werden, d.h. als Ausdruck von Nichtwissen oder zumindest von Zweifel, ob die Änderung der räumlichen Anordnung einer Menge auch die Anzahl ihrer Elemente verändern könne (vgl. dazu etwa HASEMANN 2003, S. 12f). Auch hier ist, wie beim klassischen PIAGET-Versuch (s. Kap. 6.1.5.1), freilich denkbar, dass zumindest manche Kinder in dieser Situation nur deshalb noch einmal zählten, weil sie meinten, dass dies von ihnen erwartet werde (und nicht, weil sie tatsächlich nicht gewusst hätten, wie viele Würfel nun da lagen) (vgl. DEHAENE 1999, S. 57-60). Insgesamt sind also die unter der Kategorie "Anzahlkonstanz" erhobenen Daten wohl von nur beschränkter Validität; sie wurden daher letztlich auch nicht in die quantitativen Erklärungs-Modelle aufgenommen.

8.1.4 Finger-Zahl-Bewusstheit

Die Kinder wurden, jeweils mit der Frage "Zeige mit bitte so schnell du kannst ... Finger!", gebeten, nacheinander folgende Anzahlen zu zeigen: fünf, zehn, neun, vier, acht, sechs, schließlich sieben; dabei wurde beobachtet, ob und auf welche Weise sie zur richtigen Anzahl gelangten. Von besonderem Interesse war, ob die Anzahlen a) *simultan*, also mit *einer* spontanen Ausstreckbewegung aller Finger einer Anzahl oder zumindest b) *nicht-zählend*, also mit kurzem Nachdenken, aber ohne zählendes Ausstrecken einzelner Finger gezeigt werden konnten. Tabelle 24 und Tabelle 25 zeigen, wie viele SchulanfängerInnen jeweils wie viele der sieben geforderten Anzahlen simultan oder zumindest nicht-zählend zeigen konnten.

Tabelle 24: Anzahl von niederösterreichischen SchulanfängerInnen (n = 139), die eine bestimmte Anzahl von Anzahlen simultan mit den Fingern zeigen konnten (Maximum: 7)

Von 7 gefragten Anzahlen konnten simultan mit Fingern dargestellt werden:	Von wie vielen Kindern?	Prozent
keine	6	4,3
1	8	5,8
2	25	18,0
3	28	20,1
4	17	12,2
5	25	18,0
6	16	11,5
7	14	10,1

Tabelle 25: Anzahl von niederösterreichischen SchulanfängerInnen (n = 139), die eine bestimmte Anzahl von Anzahlen nicht-zählend mit den Fingern zeigen konnten (Maximum: 7)

Von 7 gefragten Anzahlen konnten nicht-zählend mit Fingern dargestellt werden:	Von wie vielen Kindern?	Prozent
keine	2	1,4
1	2	1,4
2	4	2,9
3	6	4,3
4	12	8,6
5	18	12,9
6	27	19,4
7	68	48,9

Die Tabellen zeigen, dass die Finger-Zahl-Bewusstheit zu Schulbeginn generell recht hoch war. Fast die Hälfte aller Kinder konnte alle sieben gefragten Anzahlen zumindest mit kurzem Nachdenken und ohne erkennbares Zählen richtig mit Fingern darstellen. Es gab aber auch drei Kinder, die nicht einmal die Zahl fünf nicht-zählend darstellen konnten, also offenbar nicht wussten (oder dieses Wissen im Interview zumindest nicht anwandten), dass eine Hand fünf Finger hat. Tabelle 26 zeigt, mit welcher Häufigkeit die einzelnen Zahlen nicht-zählend richtig dargestellt wurden, gereiht nach Häufigkeiten.

Tabelle 26: Häufigkeit, mit der einzelne Anzahlen von niederösterreichischen SchulanfängerInnen (n = 139) nicht-zählend korrekt mit Fingern dargestellt wurden

Zahl	Mit Fingern nicht-zählend korrekt dargestellt von wie vielen Kindern?	Prozent
5	136	97,8
6	127	91,4
10	124	89,2
4	124	89,2
7	116	83,5
8	87	62,6
9	86	61,9

Ein Kind, das nun beispielsweise acht spontan oder zumindest nicht-zählend als "fünf Finger und noch drei" zeigen kann, scheint *zumindest in diesem Kontext* ein gewisses Bewusstsein der Teile-Ganzes-Beziehung von drei, fünf und acht zu haben. Das garantiert aber offenbar nicht den Rückgriff auf diese Teile-Ganzes-Beziehung auch im Kontext des Addierens und Subtrahierens (vgl. Kap. 2.10.1 und GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 108f). Der Frage, ob jene Kinder, die zu Schulbeginn Finger-Zahl-Bewusstheit zeigten, diese auch beim Rechnen zur Anwendung brachten, wird in Kapitel 8.2.2.6 nachgegangen.

8.1.5 Spontanerfassung von Anzahlen bis vier

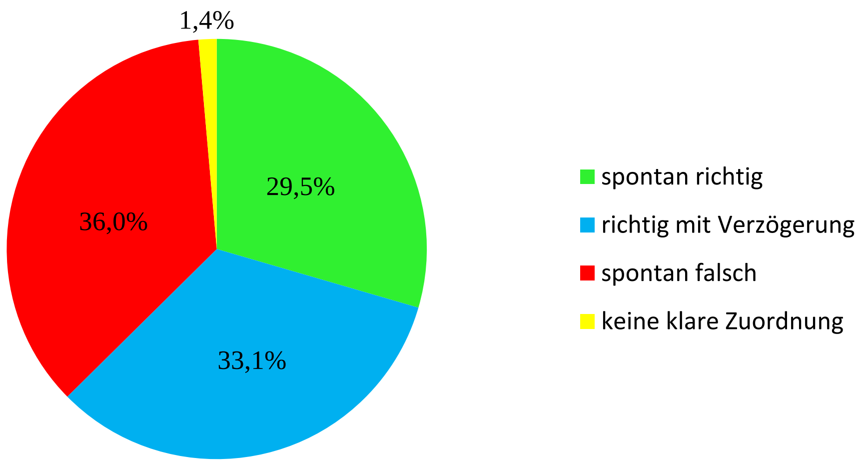
Dass eine eingeschränkte Fähigkeit zur Simultanerfassung von Anzahlen kleiner oder gleich vier (vgl. Kap. 2.10.1) in *ursächlichem* Zusammenhang steht mit Störungen beim Erlernen des Rechnens, ist eine häufig geäußerte Vermutung, auch wenn, so SCHÄFER im Jahr 2005, "es derzeit in Deutschland keine verlässlichen wissenschaftlichen Untersuchungen zur Überprüfung dieser Vermutung" gibt (SCHÄFER 2005, S. 536). SCHÄFER selbst verglich 43 "rechenschwache Kinder der Hauptschul-Eingangsstufe" mit 40 nicht-rechenschwachen AlterskollegInnen und ermittelte eine höchst signifikant längere Reaktionszeit sowie eine signifikant höhere Fehleranzahl der rechenschwachen Kinder beim Erfassen von zwei bis vier Items.

SCHÄFER erfasste in ihrer Studie die Fähigkeit zur Simultanerfassung mittels einer Apparatur, die sicherstellte, dass die Kinder die verschiedenen Punktemengen nur für exakt eine Zehntelsekunde sehen konnten, und mit der die bis zur Nennung der jeweiligen Anzahl verstrichenen Reaktionszeiten auf Hundertstelsekunden genau gemessen werden konnten (vgl. SCHÄFER 2005, S. 537ff). Eine auch nur annähernd ähnlich exakte Erhebungsmethode stand bei der vorliegenden Untersuchung nicht zur Verfügung. Die Erhebung erfolgte vielmehr in denkbar einfachster Form: Kärtchen im Format DIN A7 mit zwei bis vier Punkten (Durchmesser je 1,3 cm) wurden mit der Handfläche verdeckt, mit dem Hinweis "Achtung!" wurde die Hand gehoben, das Kärtchen dem Blick freigegeben, die Hand *sofort* (in weniger als einer Sekunde) wieder gesenkt. Auch diese simple Anordnung erlaubte in den meisten Fällen die unzweifelhafte Unterscheidung von Kindern, die spontan (und offenbar ohne Zählen) richtig antworteten, und solchen, die zögerten, eventuell (wie spätestens auf dem Video sichtbar wurde) auf dem nach dem Abdecken des Kärtchens nur noch *vorgestellten* Bild des Kärtchens *zählten* oder aber spontan eine falsche Antwort gaben. Es ließ sich aber auf diese Weise natürlich nicht wie bei SCHÄFER sicherstellen, dass die Darbietungszeit unterhalb der "kürzesten Reaktionszeiten für Sakkaden (Blicksprünge)" liegt und die Anzahl "tatsächlich 'auf einen Blick', also 'simultan', auf die Netzhaut projiziert" wird (SCHÄFER 2005, S. 537, Fn. 19). Es können daher in der vorliegenden Arbeit auch keine Aussagen zur *Simultanerfassung* der untersuchten SchulanfängerInnen gemacht werden. Die auf die beschriebene Weise erfassten unterschiedlichen Leistungen im schnellen Erfassen von bis zu vier Punkten werden hier lediglich als "Spontanerfassung" besprochen.

Eine solche Spontanerfassung von 3 Punkten in linearer Anordnung zeigten 95 Prozent der befragten Kinder.

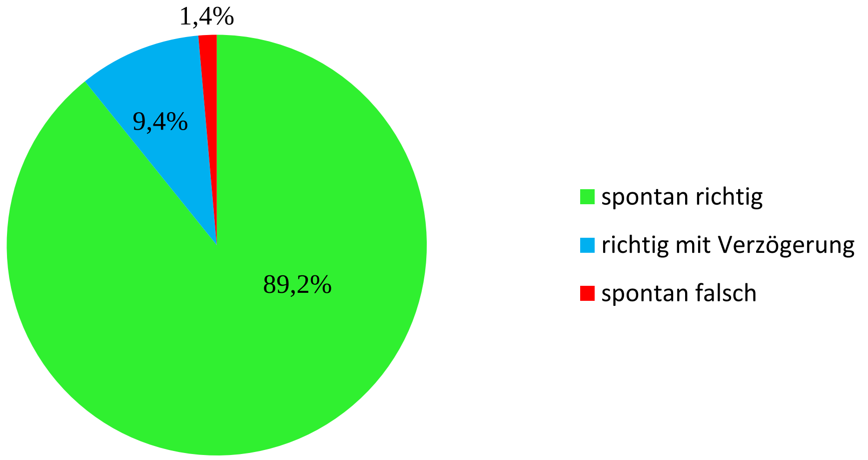
Bei vier linear angeordneten Punkten nannten 29,5 Prozent der Kinder spontan die richtige Anzahl. 33,1 Prozent taten dies mit einer kurzen, aber doch merklichen Verzögerung, 36 Prozent nannten spontan eine falsche Anzahl (zumeist drei oder fünf). Bei 1,4 Prozent (2 Kindern) war keine klare Zuordnung möglich (vgl. Abb. 10).

Abbildung 10: Spontanerfassung von vier linear angeordneten Punkten zu Schulbeginn



Bei Präsentation von vier Punkten in Form der Würfel-Vier nannten 89,2 Prozent der Kinder spontan die richtige Anzahl, 9,4 Prozent taten dies mit kurzer Verzögerung, und nur 2 Kinder (1,4 Prozent) nannten spontan eine falsche Anzahl (vgl. Abb.11).

Abbildung 11: Spontanerfassung von vier im Quadrat angeordneten Punkten zu Schulbeginn



Hierin wird deutlich, dass das Erkennen von Würfelbildern ein von der eigentlichen Simultanerfassung zu unterscheidendes Phänomen ist. Die Würfel-Vier ist offenkundig vielen Kindern als Gestalt vertraut und für sie mit dem Zahlwort "vier" verknüpft, auch wenn sie vier Punkte in gestreckter Anordnung nicht oder nicht sicher simultan erfassen können.

Die durch SCHÄFERS Untersuchung gestützte Vermutung, dass Kinder mit eingeschränkter Simultanerfassung ein erhöhtes Risiko zur Entwicklung anhaltender Rechenschwierigkeiten tragen, ist aus fachdidaktischer Sicht plausibel vor allem mit Blick auf arithmetisches Erarbeitungs- und Veranschaulichungsmaterial. Gutes Material ist strukturiert, im Zahlenraum bis zehn kommt der Strukturierung in zwei Fünfer große Bedeutung zu. Die lineare Fünf ist zwar auch für Kinder mit normal entwickelter Simultanerfassung nicht mehr simultan überschaubar, und auch auch diese Kinder müssen also erst lernen, dass das Zehnerfeld in zwei Fünfer geteilt ist, um die Fünf als "volle Reihe" und darauf aufbauend auch größere Anzahlen "quasi-simultan" (vgl. Kap. 8.1.6) erfassen zu können. Kinder mit eingeschränkter Simultanerfassung tragen aber das Handicap, dass für sie schon das Erfassen von drei oder vier Punkten nicht "selbstverständlich" ist.

Gerade das Zehnerfeld bietet zwar gute Möglichkeiten, dieses Handicap zu kompensieren: Durch den Bezugsrahmen zur Fünf lässt sich drei auch als "zwei Felder sind frei" und vier als "ein Feld ist frei" erfassen. Aber diese "Sichtweisen" (vielmehr: *Denk*weisen) müssen Kinder erst entwickeln. Gezielte Förderung könnte sie darin vermutlich unterstützen (vgl. GAIDOSCHIK 2007, S. 58ff). Findet diese Förderung aber nicht frühzeitig statt, ist das Risiko hoch, dass Kinder mit eingeschränkter Simultanerfassung auch strukturiertes Material im Wesentlichen nur zählend verwenden und auch strukturierte Zahldarstellungen in Schulbüchern im Wesentlichen nur zählend erfassen. Das wiederum reduziert die Chance, dass sie zu einem tragfähigen Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen gelangen und in weiterer Folge nicht-zählende Rechenstrategien entwickeln. Die Gefahr der rein zählenden Materialverwendung bei Anzahlen, die über vier hinaus reichen, besteht freilich auch bei Kindern mit normal entwickelter Simultanerfassung (vgl. etwa Kap. 4.1 und 4.2 sowie Kap. 7.1.2.1).

8.1.6 Quasi-Simultanerfassung von Anzahlen bis neun

Die Quasi-Simultanerfassung strukturierter Darstellungen von Anzahlen größer als vier liegt auf einer anderen Ebene als die Simultanerfassung (vgl. Kap. 2.10.1): Wer etwa zwei Würfel-Vieren "mit einem Blick" als "acht" erfasst, muss bereits *wissen*, dass vier und vier zusammen acht ist; was er tatsächlich *simultan* erfassen kann, sind ja nur die beiden Vieren. Durch Überprüfung der Quasi-Simultanerfassung an ausgewählten Zahldarstellungen im ersten Interview sollte also ermittelt werden, welche Kinder bereits zu Schulbeginn entsprechendes Wissen von bestimmten Zahlzusammensetzungen haben. Durch Vergleich mit ihren Lösungsstrategien bei einzelnen Rechnungen (8–4, 3+3) sollte zudem ermittelt werden, ob sie dieses Wissen gegebenenfalls auch beim Addieren und Subtrahieren anwenden. Wie die Quasi-Simultanerfassung erhoben wurde, wird in Kapitel 6.1.5.1 beschrieben und begründet. Tabelle 27 zeigt, wie viele Kinder jeweils keine, eine, zwei, drei oder alle vier vorgelegten Zahldarstellungen nicht-zählend erfasst haben..

Tabelle 27: Anzahl von niederösterreichischen SchulanfängerInnen (n = 139), die eine bestimmte Anzahl von strukturierten Darstellungen von Anzahlen größer als Fünf nicht-zählend erfassten (Maximum: 4)

Von vier strukturierten Zahldarstellungen wurden nicht-zählend erfasst:	Von wie vielen Kindern?	Prozent
keine	65	46,8
1	24	17,3
2	20	14,4
3	14	10,1
4	16	11,5

Welche Zahldarstellungen in welcher Häufigkeit nicht-zählend erfasst wurden, ist Tabelle 28 zu entnehmen; die Darstellungen sind gereiht nach der Häufigkeit, mit der sie jeweils quasi-simultan erfasst wurden.

Tabelle 28: Anzahl von niederösterreichischen SchulanfängerInnen (n = 139), die einzelne strukturierte Darstellungen von Anzahlen größer als Fünf nicht-zählend erfassten

Zahldarstellung:	Von wie vielen Kindern nicht-zählend erfasst?	Prozent
Sechs als zwei Würfel-Dreien	70	50,3
Acht als zwei Würfel-Vieren	46	33,1
Sieben als Würfel-Fünf und Würfel-Zwei	28	20,1
Neun als Würfel-Vier und Würfel-Fünf	27	19,4

Etwa die Hälfte der Kinder erkannte also die Sechs als Doppel-Drei. Dabei ist zu betonen, dass zur Überprüfung nicht die Würfel-Sechs verwendet wurde, sondern zwei gespiegelte Würfel-Dreien. Es wurde von den Kindern also nicht einfach nur die vom Spielwürfel her vertraute Gestalt wieder erkannt (vgl. aber Kap. 8.2.3.9). Auch die Acht als Doppel-Vier wurde bereits von vielen SchulanfängerInnen (knapp einem Drittel) erkannt.

Die Neun als Würfel-Vier und Würfel-Fünf und die Sieben als Würfel-Fünf und Würfel-Zwei wurden dagegen nur von je etwa einem Fünftel der Kinder quasi-simultan erfasst. 83 Kinder (59,7 Prozent) ermittelten die Sieben in dieser Darstellung dagegen durch Alleszählen, 86 Kinder (61,9 Prozent) taten dies bei der Neun. Dabei ist zu beachten, dass fast alle Kinder (97,8 Prozent) die *isolierte* Würfel-Fünf nicht-zählend erkannten. Wird aber die Würfel-Fünf simultan erfasst, könnte die Anzahlermittlung bei den beschriebenen Darstellungen der Sieben und Neun auch ökonomischer durch *Weiterzählen* von der gewussten Fünf aus erfolgen; das war aber nur bei sieben Kindern für die Sieben bzw. bei vier Kindern für die Neun zu beobachten. Die weit überwiegende Mehrzahl der Kinder, die diese Darstellungen nicht ohnedies bereits quasi-simultan erfassen konnten, war also zumindest *in diesem Kontext* zu Schulbeginn noch auf der Stufe des Alleszählens.

Ob und wie weit die Fähigkeiten im Bereich der Quasi-Simultanerfassung sich in den Strategien beim Addieren und Subtrahieren niederschlagen, wird in Abschnitt 8.2.3.9 dargestellt.

8.1.7 Aufgabenverständis und Kenntnis der Rechenzeichen

104 der 139 Kinder (74,8 Prozent) konnten zu Schulbeginn dem Pluszeichen, aber nur 42 Kinder (30,2 Prozent) auch dem Minuszeichen selbstständig eine Benennung zuordnen.

Für das Pluszeichen wurde dabei mehrheitlich – von 81 der 104 Kinder, die das Zeichen kannten – das Wort "plus" verwendet, 22 Kinder verwendeten "und", zwei Kinder benützten im Laufe des Interviews von sich aus beide Bezeichnungen. Wieweit dabei zumindest in Einzelfällen bereits die im Unterricht verwendete Benennung eine Rolle spielte, kann nicht beurteilt werden. In den meisten Klassen war aber das Pluszeichen zum Zeitpunkt des Interviews gemäß Angabe der Lehrkraft im Unterricht noch nicht behandelt worden.

Von den 42 Kindern, die das Minuszeichen bereits benennen konnten, verwendeten 30 die Bezeichnung "minus", zehn die Bezeichnung "weniger", zwei sagten "weg".

Von der Kenntnis der Symbole zu trennen ist das *Aufgabenverständnis*. 83 Kinder (59,7 Prozent) wussten schon bei den als Zifferntermin dargebotenen Plusaufgaben ohne jede weitere Erläuterung, was zu tun sei, und lösten diese Aufgaben völlig selbstständig (mit welcher Strategie auch immer). 23 weitere Kinder (16,5 Prozent) benötigten zumindest bei der ersten Plusaufgabe die Einkleidung in eine "Schachtelaufgabe" (wie in Kap. 6.1.6 beschrieben), um zu wissen, was zu tun sei; sie lösten die Plusaufgaben aber in weiterer Folge selbstständig.

17 Kindern (12,2 Prozent) gelang es zu Schulbeginn trotz Einkleidung der Additionen in "Schachtelaufgaben" nicht, diese selbstständig zu lösen (vgl. Kap. 6.1.6) – abgesehen von einzelnen Aufgaben wie vor allem 2+2 und 3+3, die zum Teil auch von diesen Kindern (offenbar im Sinne eines auswendig gemerkten "Sprüchleins") insofern "gelöst" wurden, als die richtige Ergebniszahl genannt wurde. Bei den verbleibenden 16 Kindern (11,5 Prozent) war das Aufgabenverständnis uneinheitlich, das heißt: Manche Additionen konnten nach Einkleidung in eine "Schachtelaufgabe" vom Kind selbstständig gelöst werden, andere nicht.

Die drei zu Schulbeginn gefragten Minusaufgaben konnten nur 33 Kinder (23,7 Prozent) völlig selbstständig (ohne jede Erläuterung seitens des Interviewers) lösen. 50 weiteren (36,0 Prozent) gelang dies, nachdem zumindest die erste Minusaufgabe als "Schachtelaufgabe" formuliert wurde. 38 Kinder (27,3 Prozent) konnten die drei Minusaufgaben trotz Einkleidung in "Schachtelaufgaben" nicht selbstständig lösen, 18 Kinder (12,9 Prozent) lösten nur eine oder zwei der Minusaufgaben selbstständig.

Bei der Interpretation der bei Minusaufgaben zu t1 erhobenen Daten muss beachtet werden, dass die Aufgaben *immer auch* als Ziffernterm auf Kärtchen vorlagen. Manche Kinder hielt dies aber offenbar davon ab, sich auf die vom Interviewer gesprochene Einkleidung der Aufgabe als Würfelaufgabe einzulassen. Sie modellierten jedenfalls nicht gemäß der Würfelaufgabe, indem sie etwa von acht Würfeln fünf Würfel wegnahmen. Sondern sie "nahmen", auf den Ziffernterm fixiert, *an diesem* die Ziffer 5 "weg". Manche Kinder deckten dafür die 5 mit dem Zeigefinger zu, oder sie deuteten ein Wegnehmen mit der Hand an. Wird aber im Ziffernterm die 5 weggenommen oder weggedacht, so bleibt die 8 stehen; und genau das – acht – nannten deshalb einige Kinder als Ergebnis der Aufgabe. Vermutlich hätten zumindest manche dieser Kinder die Aufgabe korrekt lösen können, wäre auf das Vorlegen des Ziffernterms verzichtet und die Aufgabe nur verbal als Würfelaufgabe formuliert worden.

8.2 Addieren und Subtrahieren zu Schulbeginn

8.2.1 Häufigkeit einzelner Strategien bei einzelnen Aufgaben

Tabelle 29 zeigt zunächst im Überblick, wie viel Prozent der Kinder die einzelnen Aufgaben beim Interview zu Schulbeginn (t1) mit den einzelnen Strategien gelöst haben.

Tabelle 29: Häufigkeit in Prozent, mit der die interviewten Kinder (n = 139) einzelne Aufgaben zu Schulbeginn mit verschiedenen Strategien lösten

	Fakten-abruf	Ab-leitung	Nicht-zählend mit Fingern	Weiter/ Rück-wärts-zählen	Finger-teil-zählen	Alles-zählen/ "Take away"	Raten/ Fehl-speiche-rung	"Kann ich nicht" o. dgl.	Keine klare Zuord-nung
2+2	**64,7**		0,7	5,0	2,9	*17,3*	2,9	4,3	2,2
3+3	**49,6**			4,3	6,5	*23,7*	7,2	8,6	
5+5	**43,9**		*19,4*	3,6		18,0	5,0	10,1	
4+4	**37,4**		2,9	5,8	2,9	*33,8*	5,8	10,8	0,7
1+6	*17,3*	15,1	1,4	13,7	2,9	**28,1**	5,0	16,5	
2+5	9,4	5,0	13,7	*15,1*	4,3	**28,8**	5,8	14,4	3,6
3+4	4,3	10,8	1,4	8,6	12,2	**38,1**	8,0	*13,7*	2,9
10–9	3,6	7,9	5,8	1,4	*24,5*	23,7	7,2	**25,9**	
8–4	1,4	10,8	17,3		11,5	*24,5*	7,9	**25,9**	0,7
8–5	0,7		21,6	2,2	13,7	**30,2**	4,3	*26,6*	0,7

Die Aufgaben sind von oben nach unten geordnet nach fallender Häufigkeit, mit der sie durch Faktenabruf gelöst wurden. Die bei einer bestimmten Aufgabe häufigste Strategie ist jeweils fett, die zweithäufigste kursiv gedruckt.

8.2.1.1 Faktenabruf

Wie aus Tabelle 29 ersichtlich, war bei den Verdoppelungsaufgaben schon zu Beginn des ersten Schuljahres *Faktenabruf* die häufigste Lösungsstrategie. Alle anderen Aufgaben wurden nur von wenigen SchulanfängerInnern durch Faktenabruf gelöst.

8.2.1.2 Zählstrategien

Innerhalb der Zählstrategien überwog zu Schulbeginn das *Alleszählen*. *Finger-Teilzählen*, die im weiteren Verlauf des Schuljahres häufigste Zählstrategie (vgl. Kap.8.3 und 8.4), war zu Schulbeginn insgesamt noch deutlich seltener (insgesamt 113 Anwendungen von Finger-Teilzählen gegenüber 370 Fällen von Alleszählen bei insgesamt 1390 Lösungsversuchen). Finger-Teilzählen wurde aber gerade bei der Aufgabe 10–9 sogar etwas häufiger verwendet als Alleszählen. Das lässt sich deuten als Ausdruck der etwa auch von SIEGLER befundenen "Anpassungsfähigkeit" der kindlichen Strategiewahl (SIEGLER 2001, S. 123; vgl. Kap. 2.3.1): Gerade bei 10–9 ist Alleszählen (respektive "Take away") besonders aufwändig. Die meisten Kinder wussten aber, dass sie an beiden Händen zusammen genau zehn Finger haben (vgl. Kap. 8.1.2.4). Viele setzten dieses Wissen auch ein, um 10–9 ökonomischer durch Finger-Teilzählen zu lösen.

Weiterzählen wurde zu Schulbeginn noch insgesamt recht selten, aber gerade bei den Aufgaben 1+6 (13,7 Prozent aller Lösungsversuche) und 2+5 (15,1 Prozent) relativ häufig verzeichnet. Auch dies ist als Ausdruck der Strategieanpassung zu deuten: Gerade bei diesen Aufgaben bedeutet Weiterzählen vom größeren Summanden eine erhebliche Ökonomisierung gegenüber dem Alleszählen oder auch Finger-Teilzählen.

8.2.1.3 Vergleich von Zählstrategien und Fakten nutzenden Strategien

In Tabelle 30 werden die drei Varianten des zählenden Rechnens (Weiterzählen, Finger-Teilzählen, Alleszählen) den beiden Varianten von Faktennutzung (Faktenabruf und Ableiten, vgl. Kap. 2.1) gegenübergestellt. Die Aufgaben sind von oben nach unten nach fallender Häufigkeit von Faktennutzung angeordnet.

Tabelle 30: Verteilung von Faktennutzung und Zählstrategien zu Beginn des ersten Schuljahres

	Anteil von Faktennutzung	Anteil von Zählstrategien
2+2	64,7 %	25,2 %
3+3	49,6 %	34,5 %
5+5	43,9 %	21,6 %
4+4	37,4 %	42,5 %
1+6	32,4 %	44,7 %
3+4	15,1 %	58,9 %
2+5	14,4 %	48,2 %
8–4	12,2 %	36,0 %
10–9	11,5 %	49,6 %
8–5	0,7 %	46,1 %
Gesamt:	28,2 %	40,7 %

Wie ersichtlich, wurde zu Schulbeginn bei insgesamt 40,7 Prozent aller Lösungsversuche eine Zählstrategie angewandt, Faktennutzung bei insgesamt 28,2 Prozent. Betrachtet man die Aufgaben im Einzelnen, so überwogen bei sieben der zehn Aufgaben Zählstrategien gegenüber der Faktennutzung. Die Summe der Anteile von Zählstrategien und Faktennutzung weicht dabei deshalb zum Teil beträchtlich von 100 ab, weil die in Tabelle 30 nicht erfassten Strategien "nicht-zählendes Fingerrechnen", "Raten bzw. Fehlspeicherung" und vor allem auch "Kann ich nicht oder dergleichen" zu Schulbeginn noch recht häufig waren (vgl. die beiden folgenden Abschnitte).

8.2.1.4 Nicht-zählendes Fingerrechnen

Die Anpassungsfähigkeit der Kinder in ihrer Strategiewahl zeigt sich auch in der Verwendung der Strategie *"Nicht-zählender Fingergebrauch"*: Diese Strategie wurde am häufigsten bei den Aufgaben 5+5 und 8–5 verwendet, wo ihr rechenökonomischer Vorteil gegenüber dem zählenden Fingergebrauch oder auch dem Alleszählen mit Würfeln besonders deutlich ist. Viele Kinder lösten aber auch 8–4 nicht-zählend mit den Fingern, indem sie von acht als fünf und drei ausgestreckten Fingern zunächst die drei Finger der einen Hand nicht-zählend wegnahmen und dann noch einen Finger der anderen; ähnlich bei 10–9 (erst eine Hand als ganzes weg, dann noch vier Finger der anderen Hand mit *einer* simultanen Bewegung). Gleichfalls häufig, aber deutlich seltener als etwa 8–5, wurde auch 2+5 nicht-zählend mit Fingern gelöst, das heißt in diesem Fall durch Ausstrecken von zwei Fingern an einer, fünf Fingern an der anderen Hand, gefolgt von der Erkenntnis, dass auf diese Weise das bereits bekannte "Fingerbild" der Sieben entstanden ist.

Bei der Aufgabe 8–5 ist der Vergleich zwischen der nicht-zählenden Variante des Fingerrechnens und der Strategie Finger-Teilzählen aufschlussreich. Denn es scheint plausibel, dass Kinder, die 8–5 durch Wegnehmen der ganzen Hand innerhalb der Fingerdarstellung (nicht-zählendes Fingerrechnen) lösen, ihre Fingerdarstellung und das Minuszeichen *anders interpretieren* (und insofern auch die Zahl acht zumindest in dieser Darstellung *anders denken*) als jene Kinder, die beim Finger-Teilzählen nach zuvor simultan erfolgtem Ausstrecken von acht Fingern fünf Finger einzeln umknicken (zunächst die drei Finger der einen Hand, dann noch zwei Finger der ursprünglich vollen Hand). In letzterem Fall scheint die Zahl acht (zumindest in Durchführung dieser Aufgabe) *nicht* als Zusammensetzung aus den Zahlen fünf und drei gedacht worden zu sein, im ersteren Fall sehr wohl.

Die nicht-zählende Variante des Fingerrechnens wurde bei 8–5 zu Schulbeginn von 24 Kindern in Reinform gezeigt. 11 von diesen Kindern (45,8 Prozent dieser Gruppe) zeigten bei wenigstens einer anderen Aufgabe zu Schulbeginn eine Ableitungsstrategie. Dagegen lösten 19 Kinder die Aufgabe 8–5 durch Finger-Teilzählen. Nur 4 dieser 19 Kinder lösten wenigstens eine andere Aufgabe durch eine Ableitungsstrategie (21,1 Prozent dieser Gruppe). Das steht zumindest nicht im Widerspruch mit der oben geäußerten Vermutung, dass sich in der nicht-zählenden Variante des Fingerrechnens oft (aber nicht zwangsläufig) schon ein gewisses Maß von Einsicht in numerische Teile-Ganzes-Beziehungen und damit eine bessere Grundlage für das Verständnis von Ableitungsstrategien manifestiert als in der zählenden Variante.

Dass aber ein Kind diese Einsicht nicht alleine dadurch schon unter Beweis stellt, dass es "acht Finger" als "fünf und drei" mit *einer* Ausstreckbewegung von acht Fingern darstellt, wird durch folgende Gegenüberstellung noch einmal deutlicher: Insgesamt 87 Kinder zeigten bei der isolierten Überprüfung der Fingerdarstellungen (siehe Kap. 8.1.2.4) "acht Finger" spontan oder nach kurzer Überlegung (ohne die Finger abzuzählen) als "fünf und drei". Aber 64 davon (73,6 Prozent) lösten 8–5 entweder zählend oder gar nicht. Umkehrt hatten sieben der 24 Kinder, die später 8–5 durch nicht-zählendes Wegnehmen einer ganzen Hand lösten, zuvor bei der isolierten Überprüfung der Fingerdarstellung "acht Finger" *nicht* simultan als "fünf Finger und drei Finger" dargestellt, d.h. sie hatten entweder alle acht Finger hochgezählt oder zumindest bei fünf, also einer Hand, begonnen und dann *einzeln* noch drei Finger dazugegeben. Dass diese sieben Kinder wenige Minuten später die simultane Darstellung von acht zur Lösung von 8–5 heranzogen, mag daran liegen, dass sie die zuvor zählend gefundene Fingerdarstellung noch im Gedächtnis hatten, oder dass es sich dabei um eine noch nicht abgesicherte Kompetenz handelte, die deshalb nicht immer auch mit der Performanz übereinstimmte. In jedem Fall wird aber auch durch diese sieben Kinder deutlich, dass es für das nicht-zählende Fingerrechnen nicht so sehr auf eine "Fingerfertigkeit" ankommt als vielmehr darauf, wie Kinder ihre Fingerdarstellungen *interpretieren*.

8.2.1.5 Fehlerhaft gelöste und verweigerte Aufgaben

Das Hauptaugenmerk dieser Studie liegt auf den *Strategien*, mit denen ErstklässlerInnen additive Aufgaben bewältigen. Ob sie bei Anwendung dieser Strategien zu richtigen Ergebnissen gelangen, spielt für die *Zuteilung* einer Strategie zu einem Lösungsversuch nur insofern eine Rolle, als "Faktenabruf" nur dort vermerkt wurde, wo auch tatsächlich ein Zahlen*faktum* (also ein *richtiges* Ergebnis) abgerufen wurde (vgl. Kap. 2.1 und 6.1.7). Für die Gesamtbeurteilung der arithmetischen Entwicklung eines Kindes ist es aber natürlich relevant, ob das Kind mit den von ihm gewählten Strategien zu richtigen oder falschen Lösungen gelangt.

Die *Lösungsrichtigkeit* wurde deshalb bei den Interviews zu den einzelnen Lösungsversuchen jeweils mit erhoben. Tabelle 31 zeigt den Prozentsatz *falscher* Lösungen beim ersten Interview. Die Aufgaben sind von links nach rechts nach fallender Häufigkeit falscher Lösungen geordnet. Lösungsversuche, für die "'Kann ich nicht' oder dergleichen" vermerkt wurde, wurden hinsichtlich der Lösungsrichtigkeit nicht als falsch, sondern mit "Keine Lösung" gewertet. Diese bereits in Tabelle 29 ausgewiesenen Lösungsversuche werden hier zur Vervollständigung des Bildes noch einmal angeführt.

Tabelle 31: Häufigkeit in Prozent, mit der einzelnen Aufgaben zu t1 mit falschem Ergebnis bzw. gar nicht gelöst wurden

	Falsche Lösung	Keine Lösung	Insgesamt falsch *oder* nicht gelöst)
8–4	21,6 %	25,9 %	47,5 %
8–5	19,4 %	26,6 %	46,0 %
10–9	18,0 %	25,9 %	43,9 %
2+5	17,3 %	14,4 %	31,7 %
3+4	17,3 %	13,7 %	31,0 %
4+4	17,3 %	10,8 %	28,1 %
1+6	15,1 %	16,5 %	31,6 %
3+3	12,2 %	8,6 %	20,8 %
5+5	9,4 %	10,1 %	19,5 %
2+2	3,6 %	4,3 %	7,9 %
Mittelwert aller Aufgaben:	15,1 %	15,7 %	30,8 %

Dem hohen Anteil an Zählstrategien entsprechend, war die Fehlerquote zu Schulbeginn beträchtlich. Dass sie bei 5+5 niedriger ist als bei 3+3 (obwohl letzteres öfter durch Faktenabruf gelöst wurde), ist damit zu erklären, dass fast ein Fünftel der Kinder 5+5 zu Schulbeginn zwar nicht automatisiert hatte, aber durch nicht-zählenden Fingergebrauch unschwer lösen konnte.

Zu den hier unter "falsche Lösung" ausgewiesenen Lösungsversuchen zählen auch jene, für die als Strategie *"Raten, Fehlspeicherung oder dergleichen"* gewertet wurde. Der Anteil dieser "Strategie" war zu Schulbeginn im Vergleich zu den späteren Interviews recht hoch (siehe Tabelle 29). In den meisten Fällen handelte es sich dabei wohl tatsächlich nicht um eine Fehlspeicherung, sondern um bloßes *Raten*, also um das Nennen einer (weitgehend) beliebigen Zahl. Für sieben Kinder war das zu Schulbeginn gewissermaßen ihre "Hauptstrategie", mit der sie mindestens die Hälfte aller Aufgaben "bewältigten". Das kann durchaus als intelligentes Verhalten interpretiert werden: Wenn Erwachsene auf Fragen wie "zwei und zwei?" eine Zahl hören wollen, dann sollen sie eben eine bekommen, und die Sache ist erledigt.

Die vor allem bei Subtraktionen hohen Anteile von *"'Kann ich nicht' oder dergleichen"* resultieren vor allem aus den bereits erläuterten Schwierigkeiten vieler Kinder mit dem Verständnis der Aufgabe. Dass aber 1+6 häufiger (in 16,5 Prozent der Fälle) mit "Kann ich nicht" zu werten war als etwa 2+5 oder 3+4 (14,4 bzw. 13,7) liegt daran, dass diese Aufgabe sich anders als 2+5 und 3+4 mit Fingern nur schwer alleszählend lösen lässt (vgl. Kap. 2.10.1).

8.2.2 Ableitungsstrategien zu Schulbeginn

Ob überhaupt und wenn ja, wie häufig, in welchen Varianten und mit welchen Begründungen schon SchulanfängerInnen Ableitungsstrategien anwenden, wurde in den bislang vorliegenden Studien kaum untersucht (vgl. GEARY u.a. 1996; BAROODY 1999). HASEMANN 2003 berichtet von einer eigenen Untersuchung mit 40 Kindern in deren letzten Kindergartenjahr. Dabei sollten die Kinder als schwerste Aufgabe im Rahmen von Einzelinterviews auch 5+7 lösen, verpackt nach Art der "Schachtelaufgaben". Zwei Kinder zeigten hier Ableitungsstrategien: Eines rechnete 7+3+2 (Teilschrittverfahren nach Anwendung des Tauschprinzips), das zweite erschloss 5+7 nach dem Prinzip der gegensinnigen Veränderung aus dem auswendig gewussten 6+6 (vgl. HASEMANN 2003, S. 122). Der Autor führt diese beiden Kinder als Beispiele für das "obere" Ende des breiten "Spektrum[s] der individuellen Fähigkeiten" an, mit denen eine Lehrerin am Schulbeginn zu rechnen habe (a.a.O). Eine Einschätzung, wie oft solche "anspruchsvollen heuristischen Strategien" schon bei SchulanfängerInnen angetroffen werden können, lässt sich aus der zitierten Studie freilich nicht ableiten.

In der hier vorliegenden Studie spielten Ableitungsstrategien schon zu Schulbeginn eine durchaus wichtige Rolle, wie Tabelle 32 in einer ersten Übersicht deutlich macht. Die Strategien sind nach fallender Häufigkeit ihrer Anwendung von links nach rechts angeordnet, die Aufgaben nach fallender Häufigkeit, mit der sie abgeleitet wurden, von oben nach unten.

Tabelle 32: Anzahl von Kindern, die zu Beginn des ersten Schuljahres einzelnen Aufgaben mit den genannten Ableitungsstrategien gelöst haben

	Tausch-prinzip (Add.)	Think addition/ Unter-schied	Verdoppeln plus 1	Kompen-sation (Subtr.)	Sonstige Kova-rianz (Add.)	Kompen-sation (Add.)	Summe
1+6	21						21
3+4			14		1		15
8–4		7		8			15
10–9		11					11
2+5	7					1[2]	7 (+1[2])
8–5		1[1]					(1[1])
Summe	28	18 (+1[1])	14	8	1	1[2]	69 (+2[1,2])

[1] falsches Ergebnis bei richtiger Logik, vgl. Kap. 8.2.2.6
[2] unsichere Zuordnung, vgl. Kap. 8.2.2.5

Bei der folgenden Darstellung der Detailergebnisse zur Verwendung von Ableitungsstrategien beim ersten Interview werden (wie auch später für das zweite und dritte Interview) zunächst Ableitungen bei Additionen, im Anschluss daran Ableitungen bei Subtraktionen besprochen. Innerhalb der Rechenarten werden die Strategien nach Häufigkeit ihrer Verwendung gereiht.

8.2.2.1 Das Tauschprinzip als Ableitungsstrategie zu Schulbeginn

Soll das Vertauschen der Summanden als *Ableitungsstrategie* gewertet werden? Bei der Beantwortung dieser Frage müssen auch die Schwierigkeiten der Erhebung berücksichtigt werden. Klar scheint: Wenn ein Kind beispielsweise zur Lösung der Aufgabe 1+6 bewusst einen Summandentausch vornimmt, um im nächsten Schritt 6+1 aus dem Gedächtnis abzurufen (während 1+6 als solches eben noch *nicht* im Gedächtnis gespeichert ist), so entspricht dies der Definition einer Ableitungsstrategie (vgl. Kap. 2.1): Nicht anders als bei den wohl unstrittigen Ableitungen von 3+3 aus 3+4 oder von 8–4 aus 4+4 wird ja auch für 1+6 ein operativer Zusammenhang (Kommutativität) benützt, um eine noch nicht auswendig gewusste Aufgabe aus einer bereits automatisierten Aufgabe abzuleiten. Andererseits gilt aber mit Bezug auf das Vertauschen der Summanden in besonderer Weise, was GRAY und TALL (1994, S. 125) generell festhalten: "On occasion it may be difficult to distinguish between a known fact and a quickly constructed derived fact."

Bei den Interviews zu Schulbeginn schien diese Unterscheidung in den meisten Fällen aber noch recht eindeutig zu sein: Jene Kinder, die bei 1+6 oder auch 2+5 ein Vertauschen der Summanden zu Protokoll gaben, benötigten für die Lösung dieser Aufgaben zumeist deutlich länger als für Aufgaben, bei denen sie "einfach gewusst" oder ähnliches als Strategie nannten. Dass aber das *bewusste* Vertauschen der Summanden zusätzlich Zeit in Anspruch nimmt, ist plausibel. Andererseits lösten diese Kinder 1+6 und 2+5 in der Regel zu rasch, als dass ein inneres (verbales) Alles-Zählen oder inneres Weiterzählen vom kleineren Summanden wahrscheinlich gewesen wäre (bei *äußeren* Anzeichen einer Zählstrategie wurde ohnedies nicht "Tauschaufgabe" protokolliert).

Unter Beachtung dieser Kriterien zur Abgrenzung von Faktenabruf und Zählstrategien wurde bei der Aufgabe 1+6 zu Schulbeginn für 21 Kinder (15,6 %) in Übereinstimmung mit deren Selbstauskunft die Strategie "Tauschaufgabe" festgehalten. Die Lösungszeiten unterstützen diese Selbstauskunft in 19 Fällen, das heißt: Die Lösungszeiten bewegten sich zwischen zwei und fünf Sekunden, was ein Alleszählen von sieben bzw. ein Weiterzählen um sechs Zählschritte nicht ausschließt, aber wenig wahrscheinlich erscheinen lässt. In zwei Fällen lassen die langen Lösungszeiten (12 bzw. 26 Sekunden) zwar Zweifel an der Selbstauskunft der Kinder zu, doch ist ebenso gut denkbar, dass diese Kinder erst nach einigem Nachdenken tatsächlich auf die Idee kamen, statt 1+6 einfacher 6+1 zu ermitteln.

In keinem dieser Fälle waren äußere Anzeichen für das Anwenden einer Zählstrategie zu beobachten. Freilich lässt sich im Falle von 1+6 bzw. 6+1 zwischen Faktenabruf und einem *raschen und rein verbalen Weiterzählen vom größeren Summanden* (im Wissen um die "number-after rule") kaum unterscheiden: Das Nennen der "nächsten Zahl" fällt hier zusammen mit dem Abrufen des Ergebnisses der Addition. Bei Additionen "+1" (aber nur bei diesen!) liegt der Unterschied zwischen "Rechnen" und "(weiter)zählendem Rechnen" also nicht im objektiven *Tun*, sondern in der subjektiven *Interpretation* dieses Tuns, im zu Grunde liegenden Wissen über Zahlen und Rechenoperationen. Rückschlüsse darauf lassen sich allenfalls im Rahmen eines "scoring in context" ziehen (vgl. Kap. 8.2.3.7), müssen aber eben deshalb mit Bezug auf die Einzelaufgabe Spekulation bleiben.

Bei der Aufgabe 2+5 liegen die Chancen, den Unterschied zwischen Faktenabruf und Weiterzählen vom größeren Summanden zu bemerken, ein wenig besser. Bei zwei Zählschritten mag ein verbales Weiterzählen (ohne äußere Zählhilfe) in manchen Fällen am Mitnicken des Kopfes oder ähnlichen Indizien zu bemerken sein, zudem ist die Wahrscheinlichkeit höher, dass ein "fünf: sechs, sieben" weiterzählendes Kind dieses Weitergehen in der Zahlwortreihe selbst als solches wahrnimmt und dann auch zu Protokoll gibt. Eine klare Abgrenzung ist freilich auch hier in vielen Fällen nicht möglich.

Nach den genannten Gesichtspunkten konnte die Strategie "Tauschaufgabe" bei der Aufgabe 2+5 für insgesamt sieben SchulanfängerInnen (5 Prozent) mit einiger Sicherheit verzeichnet werden. *Alle diese sieben* Kinder hatten 1+6 entweder als "Tauschaufgabe" oder durch direkten "Faktenabruf" gelöst.

13 weitere Kinder (9,4 Prozent) lösten 2+5 erkennbar durch rasches verbales Weiterzählen vom größeren Summanden, wählten also eben jene fortgeschrittenere Zählstrategie, die bei 1+6 aus den oben genannten Gründen nicht getrennt von der Strategie "Tauschaufgabe" ausgewiesen werden konnte.

Auch unter Berücksichtigung der Unsicherheiten in der Erfassung scheint deutlich, dass die Strategie "Tauschaufgabe" zu Schulbeginn bei 1+6 deutlich häufiger angewandt wurde als bei 2+5. Vergleicht man ferner, wie viele Kinder sich insgesamt bei der Lösung von 1+6 bzw. 2+5 nicht an die vorgegebene Reihenfolge der Summanden hielten, summiert man also die als "Tauschaufgabe" und die als "Weiterzählen vom größeren Summanden" gewerteten Lösungen, so ergibt dies für 1+6 insgesamt 33 Kinder (23,7 Prozent), für 2+5 insgesamt 20 Kinder (14,4 Prozent). All das steht im Einklang mit der These von BAROODY und TIILIKAINEN (2003, S. 87, vgl. Kap. 2.10.3), dass gerade die Additionen mit dem Summanden 1 eine "Katalysatorfunktion" für die Entwicklung der Strategie "Weiterzählen" (und dann auch der Strategie "Weiterzählen vom größeren Summanden") hätten, diese Strategien also zuerst vor allem bei solchen Additionen zur Anwendung kämen.

Vergleicht man die Strategien bei 1+6 und 2+5 mit jenen bei 3+4, so zeigt sich bei der letztgenannten Aufgabe zu Schulbeginn eine deutlich geringere Häufigkeit von Strategien, die die Reihenfolge der Summanden ignorieren: Nur drei Kinder (2,2 Prozent) lösten 3+4 durch Weiterzählen von "vier" weg, gegenüber neun Kindern (6,5 Prozent), die von "drei" weiter zählten. Das steht im Einklang mit der These von SIEGLER (2001, S. 123, vgl. Kap. 2.3.1), dass Kinder das Weiterzählen vom größeren Summanden zunächst am häufigsten bei Aufgaben anwenden, bei denen der Vorteil gegenüber dem Weiterzählen vom kleineren Summanden tatsächlich besonders groß ist. Ob aber von "drei" um vier Schritte oder von "vier" um drei Schritte weitergezählt wird, macht "zählökonomisch" betrachtet keinen großen Unterschied.

8.2.2.2 Verdoppeln plus eins

Wie erläutert (vgl. Kap. 6.1.5.1), wurde die Aufgabe 3+4 zu Schulbeginn (anders als bei den beiden folgenden Interviews) unmittelbar im Anschluss an 3+3 gefragt. Falls ein Kind 3+3 nicht richtig gelöst hatte, wurde ihm (wie sonst nur noch bei 4+4 als Grundlage für das unmittelbar danach gefragte 8−4) nachträglich zu einer richtigen Lösung verholfen (durch Vorzeigen mit den Fingern oder Würfeln). Für *alle* Kinder wurde dann abschließend "Drei und drei ist sechs!" noch einmal betont wiederholt, ehe ohne weiteren Verzug mit "Und wie viel ist drei und vier?" fortgesetzt wurde.

Unter *diesen Bedingungen* griffen insgesamt 14 Kinder (10,1 Prozent) gemäß eigener Auskunft bei der Lösung von 3+4 auf die Aufgabe 3+3 zurück. Diese Protokolle waren allesamt glaubwürdig vor dem Hintergrund der Beobachtungsdaten: Nichts deutete auf äußeres oder inneres Zählen hin. Andererseits lagen aber die Lösungszeiten im Bereich von zwei bis 20 Sekunden und waren damit länger als bei jenen vier Kindern, die bei 3+4 "einfach gewusst" zu Protokoll gaben und die richtige Antwort tatsächlich innerhalb von etwa einer Sekunde gaben. Zudem ließ die Mimik der Kinder während des Lösungsvorgangs in der Regel konzentriertes Nachdenken erkennen, oft wurde auch eine gewisse Befriedigung über den schließlich gefundenen und genutzten Zusammenhang deutlich. Doris war dieser "Geistesblitz" besonders deutlich anzusehen: Sie begann zunächst mit einer Zählstrategie (drei Finger wurden einzeln aufgeklappt), dann hielt sie kurz inne, schaute zur Decke und gab ihre Antwort, die sie nun offenbar durch gedankliches Herstellen des Zusammenhangs mit dem soeben gelösten 3+3 gefunden hatte, mit erkennbarer Zufriedenheit.

Die Erläuterungen der Kinder geben – nicht immer, aber in vielen Fällen – Aufschluss über die Einsichten und Denkweisen, die hinter diesen Ableitungen stehen:

– Sieben der 14 Begründungen sind eindeutig kardinal-quantitativ, bringen also sprachlich klar zum Ausdruck, dass 3+4 "um eins mehr" ist als 3+3 bzw. dass man zu 3+3 "noch eins dazu" geben muss, um 3+4 zu erhalten. Als Beispiel dafür sei die Begründung von Hannes angeführt: *"Erst habe ich drei und drei, und dann noch eins dazu."*
– In zwei Begründungen steht *sprachlich* eindeutig der Ordinalaspekt im Vordergrund. So erklärt Thomas: *"Weil von die sechs hab ich eins gezählt."* Freilich kann daraus nicht eindeutig geschlossen werden, dass diese beiden Kinder *nur ans Weiterzählen* (vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 140 und Kap. 2.10.5) und nicht zumindest *auch* kardinal-quantitativ gedacht haben.
– Fünf Begründungen sind in dieser Hinsicht sprachlich zweideutig. So erklärt etwa Monika: *"Weil vier und vier ist acht, und drei und drei ist sechs, und wenn ich noch eine Zahl dazu tu, ist es sieben."* In der Formulierung "*dazu* tun" kommt eindeutig kardinales Denken zum Ausdruck, in "*eine Zahl* dazu" aber eher ordinales Denken; denn es wird ja nicht zu sechs *die Zahl sieben* dazugegeben, sondern die *Anzahl eins*. Ähnliche Vermengungen (zumindest sprachlicher Art) von Kardinal- und Ordinalaspekt zeigen noch vier weitere Kinder. Ob dem aber auch ein Unterschied im Zahldenken gegenüber den rein kardinal argumentierenden Kindern zu Grunde liegt, hätte sich (wenn überhaupt) wohl nur durch eine Reihe zusätzlicher Fragen und Aufgaben ermitteln lassen und war jedenfalls nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.
– Auffällig ist, dass vier der 14 Kinder in ihren Begründungen auf "Punkte" Bezug nehmen, etwa Martin: *"Da* [nämlich bei der Aufgabe 3+4] *ist ein Punkt mehr!"* Tatsächlich standen den Kindern bei der Lösung der Aufgaben keine Veranschaulichungen (mit Punkten oder dergleichen) zur Verfügung; die "Punkte", von denen die vier Kinder sprachen, waren also nur vorgestellt. Dabei mag eine Rolle spielen, dass die Rechenaufgaben als letzte Aufga-

benstellung des Interviews unmittelbar im Anschluss an die Aufgaben zur Quasi-Simultanerfassung zu lösen waren. Bei letzteren sollten die Kinder ja an strukturierten Punkte-Darstellungen die Anzahl der Punkte ermitteln, unter anderem an der Darstellung der Sechs in Form von zwei gespiegelten Würfel-Dreien. Möglicherweise wäre die Assoziation von 3+4 mit einer vorgestellten Punkte-Darstellung von 3+3 aber auch ohne diese Vorübung eingetreten.

8.2.2.3 Sonstige Ableitungen von Additionen auf Basis von Kovarianz

Manuel löste die Aufgabe 3+4 zu Schulbeginn unter Rückgriff auf die Aufgabe 5+3 mit folgender Begründung: *"Weil fünf und drei sind acht, und vier und drei sind sieben."* Das ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert:

– Manuel greift *nicht auf die zuletzt* gelöste Aufgabe 3+3 zurück, obwohl er diese Aufgabe spontan durch Faktenabruf gelöst hatte.
– Er hatte aber offenbar auch die Aufgabe *5+3 bereits zu Schulbeginn automatisiert*.
– Das *Tauschprinzip* scheint für ihn selbstverständlich gewesen zu sein. Denn er aktivierte 5+3 zur Lösung von 3+4, was vermuten lässt, dass für ihn 5+3 und 3+5 gleichwertig sind; in weiterer Folge spricht er von 4+3, obwohl die gefragte Aufgabe 3+4 war.
– Seine Ableitung folgt der Logik "ist um eins weniger", die für Kinder in der Regel offenbar weniger nahe liegt als die Logik "ist um eins mehr". Tatsächlich war 3+4 von keinem Kind zu Schulbeginn aus 4+4 abgeleitet worden (wobei freilich zu berücksichtigen ist, dass 4+4 deutlich seltener automatisiert war als 3+3), und es wird sich noch zeigen, dass Kinder im Laufe des gesamten ersten Schuljahres, sofern sie eine Addition aus einer unmittelbaren Nachbaraufgabe ableiteten, dies deutlich öfter nach der Logik "um eins mehr" taten als nach der Logik "um eins weniger".

8.2.2.4 Ableitungen von Additionen auf Basis von Kompensation

Strategien auf Grundlage kompensatorischer Zusammenhänge ("sharing") werden (etwa von FUSON 1992a, S. 96) als konzeptionell generell anspruchsvoller eingeschätzt als solche auf Grundlage von Kovarianz (vgl. Kap. 2.10.8). Dabei liefert die konzeptuelle Analyse der einzelnen Ableitungsstrategien (vgl. Kap. 2.10.8) Argumente für die Vermutung, dass der kompensatorische Zusammenhang zweier Subtraktionen mit gleichem Minuenden ("je mehr ich von derselben Zahl wegnehme, umso weniger bleibt übrig" und umgekehrt) noch leichter zugänglich sein könnte als jener von zwei Additionen (bei "gegensinniger Veränderung" der Summanden um denselben Betrag bleibt die Summe unverändert).

Tatsächlich war "sharing" zu Schulbeginn insgesamt selten und wenn, dann eher als Subtraktionsstrategie zu beobachten (vgl. Kap. 8.2.2.6). Im Bereich der Additionen konnte bei den

Interviews zu Schulbeginn keine einzige Lösung *eindeutig* der Strategie "sharing" zugeordnet werden. Bei zwei Kindern gab es aber mehr oder weniger deutliche Hinweise dafür, dass sie im Sinne dieser Strategie gedacht haben könnten:

– Michael löste die Aufgabe 2+5 nach längerem Nachdenken (13 Sekunden) zwar falsch mit "acht", gab aber unter Verweis auf das unmittelbar zuvor von ihm zählend (richtig) gelöste 1+6 die Begründung: *"Vorher war's sechs plus eins, und jetzt zwei und fünf. Das war weniger* (tippt dabei auf dem Aufgabenkärtchen 2+5 auf die Ziffer 2*), und das* (tippt auf die 5) *war mehr, drum sind's acht."* Hier wurde also im ersten Teil eine korrekte Beschreibung des Zusammenhangs von 1+6 und 2+5 geboten. Die falsche Lösung von 2+5 (bei richtiger Lösung von 1+6) lässt aber fraglich erscheinen, was der Junge tatsächlich gedacht hat; das konnte auch im anschließenden Gespräch nicht zweifelsfrei geklärt werden.
– Stephan hatte schon zuvor 3+4 aus 3+3 abgeleitet. 1+6 wusste er auswendig und äußerte sich etwas indigniert über die ihm zu leicht erscheinende Aufgabe ("ist ja babysch"). Bei 2+5 dachte er kurz nach und sagte dann bestimmt "Sieben!" Als Begründung gab er an: *"Weil ich habe an die vorige gedacht, an die sechs, und dann... (Pause) überspringen... (Pause) und dann... (Pause). Weiß ich einfach!"* Mehr und Klareres war ihm nicht zu entlocken. Möglicherweise hatte Stephan aber an dieser Stelle tatsächlich den Gedanken der "gegensinnigen Veränderung". Hinter dem Wort "überspringen" könnte die Vorstellung eines "Platzwechsels" eines Elementes einer Menge stehen: Wenn sieben Würfel in zwei Teilmengen als eins und sechs gruppiert sind und ein Würfel von der größeren zur kleineren Teilmenge wechselt ("hinüber springt"), dann ändert das nichts an der Anzahl der Elemente der Gesamtmenge. Diese Deutung muss freilich Spekulation bleiben und ist deshalb auch nicht in die quantitative Auswertung eingegangen; dort wurde diese Lösung unter "keine klare Zuordnung möglich" eingereiht.

8.2.2.5 Ableitungen von Subtraktionen nach dem Komplementaritätsprinzip ("think addition") bzw. nach dem "Konzept des Unterschiedes"

Die Schwierigkeiten, die offenbar viele Kinder (noch in höheren Schulstufen) mit dem Gedanken der "Komplementarität" von Addition und inverser Subtraktion haben, waren Gegenstand der Kapitel 2.8.2 und 2.10.6. In der vorliegenden Untersuchung lösten zu Schulbeginn mit einiger Sicherheit elf Kinder (7,9 Prozent) die Aufgabe 10–9 durch "think addition", also durch Rückgriff auf 9+1, oder, was davon kaum abzugrenzen ist, durch Rückgriff auf ihr Wissen, dass neun "um eins weniger" als zehn bzw. dass zehn "um eins mehr" ist als neun, also nach dem Konzept des "Unterschiedes". Für fünf weitere Kinder wurde bei 10–9 Faktenabruf gewertet: Sie nannten die richtige Antwort innerhalb von ein bis zwei Sekunden und gaben an, das Ergebnis "einfach gewusst" zu haben. Wie angemerkt, ist nicht entscheidbar, ob nicht auch das eine oder andere dieser fünf Kinder tatsächlich eine rasche Ableitung aus 9+1=10 vorgenommen und *dies* als "einfach gewusst" zu Protokoll gegeben hat.

Zwei der Kinder, für die an dieser Stelle letztlich "think addition/Unterschied" protokolliert wurde, begannen zunächst mit einer Zählstrategie, brachen diese dann aber ab, weil ihnen offenbar während der Bearbeitung der Aufgabe deren Zusammenhang mit 9+1 in den Sinn kam. Bei einem der beiden Kinder hatte man den Eindruck, dass es diesen Zusammenhang im Verlaufe des Interviews überhaupt zum ersten Mal entdeckte: Der Junge spach das Ergebnis geradezu triumphierend aus und strahlte über das ganze Gesicht, als er nach zwei offenkundig mühsamen Zählschritten (er war im Rückwärtszählen keineswegs sicher) bemerkte, dass er sich das weitere Rückwärtszählen in diesem Fall sparen kann.

Wie in Abschnitt 2.10.5 erläutert, ist "think addition/Unterschied" nicht zwingend schon ein Hinweis auf das Vorliegen eines Teile-Ganzes-Konzepts auf numerischer Ebene. Zumindest in Bezug auf das Zahlentripel 1/9/10 scheint dieses Konzept aber beim Großteil der elf genannten Kinder schon zu Schulbeginn vorgelegen zu haben; das lassen jedenfalls ihre "Begründungen" vermuten. Eine *explizite Erläuterung* des operativen Zusammenhangs findet man darunter freilich (wie schon beim "sharing") nicht. Zwei Typen von Begründungen lassen sich unterscheiden:

– Sechs Kinder argumentierten damit, dass neun um eins weniger sei als zehn, etwa Peter: *"Na so halt, neun ist um eins weniger, und die neun weg, dann müssen es ja nur einer sein."*
– Vier der Kinder verweisen als "Begründung" einfach nur auf die Addition 9+1, als sei es selbstverständlich (für sie ist es das offenbar!), dass daraus 10−9=1 folgt, so etwa Jan: *"Weil neun und eins ist ja zehn!"*

Ein weiteres Kind (Johannes) ließ sich zur Frage, wie er so schnell auf das Ergebnis gekommen sei, nicht mehr entlocken als: *"Zehn, und neun, sind eins!"* Die Beobachtungsdaten (Lösungszeit sechs Sekunden, was kaum ausreicht, um von zehn neun Schritte zurückzuzählen; dabei auch keinerlei äußere Anzeichen einer Zählstrategie) lassen annehmen, dass er die Lösung tatsächlich durch den Zusammenhang mit 9+1 gefunden hat. Es gelang ihm aber noch weniger als den anderen Kindern, diesen Zusammenhang in irgendeiner Weise auch sprachlich zu fassen.

Auch bei der Subtraktion 8–4 wurde die Strategie "think addition" angewandt, von insgesamt sieben Kindern (5 Prozent). Dabei ist zu beachten, dass 10–9 isoliert gefragt wurde (also nicht in zeitlicher Nähe zu 9+1), während ganz gezielt unmittelbar vor 8–4 die Aufgabe 4+4 gestellt worden war (vgl. Kap. 6.1.5.1). Bei 10–9 mussten die Kinder den Zusammenhang zur "Basis-Addition" also völlig selbstständig herstellen, während er ihnen bei 8–4 durch die zeitliche Koppelung in gewisser Weise "nahegelegt" wurde. Dass bemerkenswerter Weise für einige Kinder an dieser Stelle dennoch der Bezug zu 8–5 näher lag, wurde bereits dargestellt.

Auch bei 8–4 lassen die Erläuterungen der Kinder mehrheitlich ein numerisches Teile-Ganzes-Denken vermuten; so etwa bei Jan: *"Wenn man acht…* (Pause) *vier weggibt, vier plus vier sind acht, wenn man vier weggibt, hat man noch mal vier."*

Die Aufgaben 8–4 und 10–9 waren für "think addition/Unterschied" zu Schulbeginn in besonderer Weise prädestiniert, weil die jeweils inversen Additionen bereits zu diesem Zeitpunkt von vergleichsweise vielen Kindern automatisiert waren (4+4 von 37,4 Prozent; 9+1 wurde nicht eigens überprüft, das vergleichbare 1+6 wurde von 39,6 Prozent der SchulanfängerInnen innerhalb von maximal zwei Sekunden gelöst). Vergleicht man nun das Lösungsverhalten bei beiden Aufgaben, so wandten fünf Kinder "think addition" *sowohl* bei 10–9 als auch bei 8–4 an. (Ein weiteres Kind, das 8–4 durch "think addition" löste, hatte 10–9 bereits automatisiert, was freilich auch als sehr schnelles Anwenden der Umkehrstrategie gedeutet werden könnte.) *Nur ein Kind*, das bei 8–4 "think addition" anwandte, ergriff bei 10–9 eine Zählstrategie. Umgekehrt betrachtet, lösten aber von den elf Kindern, die 10–9 durch "think addition" lösten, vier die Aufgabe 8–4 durch "sharing" auf Basis von 8–5, also gleichfalls durch eine Ableitungsstrategie. "Think addition/Unterschied" scheint also für SchulanfängerInnen als Strategie für die Subtraktion zweier Nachbarzahlen näher zu liegen als bei Verdoppelungsaufgaben.

Bei 8–5 wurde "think addition/Unterschied" nur von einem einzigen Kind angewandt; dieser Junge hatte alle anderen neun Aufgaben bereits automatisiert. Nun wurde aber 8–5 als erste Subtraktion im Verlauf des Interviews bewusst *nicht* an die inverse Addition 5+3 gekoppelt, sondern "isoliert" gefragt. Dass "think addition/Unterschied" also bei 8–5 (anders als bei 8–4 und 10–9) nur genau einmal vorkam, lässt vermuten, dass die Addition 5+3 (bzw. das Zahlentripel 8,5,3) zu Schulbeginn weit seltener automatisiert war als 4+4 und 9+1(bzw. die Zahlentripel 4,4,8 und 9,1,10). Dass in den Interviews zu Schulbeginn nicht auch die Aufgabe 5+3 gefragt wurde, ist unter diesem Gesichtspunkt bedauerlich, doch bestand die Sorge, dass viele der SchulanfängerInnen durch zu viele Rechenaufgaben in ihrer Aufmerksamkeitsspanne überfordert werden könnten.

8.2.2.6 Ableitungen von Subtraktionen auf Basis von Kompensation

Acht Kinder (5,8 Prozent) lösten die Aufgabe 8–4 richtig durch den Vergleich mit der Aufgabe 8–5. "Sharing" (vgl. Kap. 8.2.2.4) war damit bei 8–4 häufiger als "think addition". Das ist in zumindest zweierlei Hinsicht bemerkenswert:

– Die Subtraktion 8–4 wurde *unmittelbar* nach der Addition 4+4 gefragt; 8–5 war die Aufgabe *vor* 4+4 gewesen. Es ist also zu vermuten, dass 4+4 im Gedächtnis der Kinder beim Lösen von 8–4 noch eher bzw. stärker präsent war als 8–5.

- BAROODY und Kollegen (1983) vermuten, dass eine Aufgabe mit umso höherer Wahrscheinlichkeit als Basis für eine Ableitung verwendet wird, je stärker sie selbst bereits automatisiert ist (vgl. Kap. 2.8.3). Von den acht Kindern, die für 8–4 auf 8–5 und die Strategie "sharing" zurückgriffen, hatten aber sieben die Aufgabe 8–5 zuvor zählend gelöst. Nur eines dieser Kinder wandte hier die vergleichsweise rasche Strategie "nicht-zählender Fingereinsatz" an. Doch *alle acht* Kinder hatten 4+4 bereits automatisiert. Der Aufwand, den sie für 8–5 betreiben mussten, und die Leichtigkeit, mit der 4+4 für sie zu lösen war, änderte nichts daran, dass für sie der Zusammenhang von 4+4=8 und 8–4=4 offenbar nicht deutlich oder zumindest weniger naheliegend war als der zwischen 8–5=3 und 8–4=4.

Gerade auch beim "sharing" ist es noch einmal wesentlich anspruchsvoller, den operativen Zusammenhang zu erläutern, als ihn gedanklich herzustellen und zu nutzen. Das wird auch aus den Erläuterungen der Kinder deutlich. Die Logik des Zusammenhangs ("*weil* ich weniger wegnehme, *deshalb* bleiben mehr übrig") wird von keinem der Kinder *explizit* ausgesprochen. Typisch ist etwa die Erläuterung von Adriana: *"Wenn ich fünf weggebe, bleiben drei. Und wenn ich vier weggebe, bleiben vier."* "Es ist eben so", ist der Tenor der Begründungen, wobei sich alle acht Kinder auf die Aufgabe 8–5 so beziehen, als sei es selbstverständlich, dass sie *diese* und *nicht* die unmittelbar zuvor gelöste Aufgabe 4+4 als Basis für die Aufgabe 8–5 herangezogen haben.

Welche beachtliche kognitive Leistung diese acht SchulanfängerInnen beim Lösen von 8−4 erbrachten, wird deutlich gerade auch durch *fehlerhafte* Ableitungen, wie etwa bei Simone: *"Vorher hab ich fünf weggegeben, da waren's sieben. Und jetzt nehme ich vier weg, da kann's nur sechs sein."* Durch die Nachfrage wurde deutlich, dass auch dieses Mädchen an das zuvor gelöste 8–5 gedacht und als Ergebnis dieser Aufgabe fälschlicherweise die Zahl sieben in Erinnerung behalten hatte. Daran anschließend schien es ihr klar, dass weniger übrig bleiben müsse, wenn weniger weggenommen wird; vielleicht im (irreführenden) Gedanken an das Addieren, wo ich ja tatsächlich weniger bekomme, wenn ich weniger dazugebe.

8.2.3 "Scoring in context"

8.2.3.1 Verhältnis der einzelnen Ableitungsstrategien zu einander

Die geringe Anzahl von nur zehn zu Schulbeginn gefragten Rechnungen erschwert das "scoring in context" (BAROODY & TIILIKAINEN 2003, S. 110) natürlich erheblich. So ist etwa die Seltenheit von "sharing" als *Additions*strategie von SchulanfängerInnen (sofern diese Strategie zu Schulbeginn überhaupt vorkam; siehe 8.2.2.4) schon deshalb schwer zu beurteilen, weil sich nur eine einzige der gefragten Rechnungen (2+5) überhaupt für "sharing" anbot und gerade für diese Aufgabe, wenn denn überhaupt nicht-zählend gerechnet wird, andere nicht-zählende Strategien (Tauschaufgabe, nicht-zählender Fingereinsatz) vermutlich näherliegen. Trotz dieser durch die Anzahl der Aufgaben gegebenen Einschränkungen ermöglicht die Zusammenschau der Strategien, die dieselben *Kinder* bei verschiedenen *Aufgaben* angewandt hat, zusätzliche Einblicke in das arithmetische Denken dieser Kinder und damit auch in die konzeptuellen Voraussetzungen, die die einzelnen Strategien fordern.

Bezieht man die Strategie "Vertauschen" mit ein, so waren es insgesamt 39 Kinder (28,1 Prozent), die bei zumindest einer Aufgabe eine Ableitungsstrategie anwandten. Ohne Berücksichtigung dieser Strategie nutzten 26 Kinder (18,7 Prozent) bei zumindest einer Aufgabe eine Ableitungsstrategie.

Innerhalb der Gruppe dieser 26 Kinder wurden für zwei Kinder jeweils drei Ableitungen protokolliert, für zwölf Kinder jeweils zwei und für gleichfalls zwölf Kinder genau eine Ableitung. Eines dieser zwölf bei nur genau einer Aufgabe (nämlich 8–5, "think addition") ableitenden Kinder konnte allerdings bereits zu Schulbeginn alle anderen gefragten Aufgaben im Zahlenraum bis zehn auswendig; es hat also vermutlich nur deshalb nicht öfter abgeleitet, weil es dies nicht nötig hatte. (Der Junge zeigte sich im Gespräch von der Einfachheit der Aufgaben enttäuscht und rechnete ungefragt und richtig 45+45, indem er dies in 40+40 und 5+5 zerlegte; er zeigte also gewissermaßen eine weitere Ableitungsstrategie "außer Konkurrenz".)

Bei den anderen elf Kindern, für die *nur genau eine Ableitung* protokolliert wurde, scheint das Folgende bemerkenswert: Acht dieser Kinder leiteten 3+4 aus 3+3 ab, lösten aber 10–9 und 8–4 zählend bzw. mit Fingerhilfe oder konnten diese Aufgabe gar nicht selbständig lösen. Die restlichen drei dieser elf Kinder zeigten ihre eine Ableitung bei 8–4 ("sharing" auf Basis von 8–5). Es gab also deutlich mehr Kinder, die bereits zu Schulbeginn die Strategie "Verdoppeln plus eins" anwandten, bei Subtraktionen aber *nicht* ableiteten, als umgekehrt Kinder, die zwar "sharing" beim Subtrahieren, aber nicht auch "Verdoppeln plus eins" anwandten. Das steht im Einklang mit der in Kap. 2.10.5 bis 2.10.8 geleisteten Analyse, wonach "Verdoppeln plus eins" konzeptuell weniger anspruchsvoll und *deshalb* vermutlich für mehr Kinder bzw. für Kinder im Allgemeinen früher zugänglich ist als "sharing".

Weiters: Es gab Kinder, die nur eine einzige Aufgabe durch Ableitung lösten. In diesen Fällen handelte es sich zumeist um "Verdoppeln plus eins", seltener auch um "sharing". Kinder, welche zu Schulbeginn die Strategie "think addition" anwandten, lösten aber durchgehend *zumindest zwei* Aufgaben mittels einer Ableitungsstrategie.

Genauer: Von den 14 Kindern (10,1 Prozent), für die "think addition" registriert wurde, lösten fünf *beide* dafür prädestinierte Subtraktionen (10–9 und 8–4) mit dieser Strategie. Vier von ihnen lösten zwar 10–9 durch "think addition", 8–4 aber durch "sharing". Vier weitere "think-addition"-Kinder lösten eine der beiden Subtraktionen durch "think addition" und zudem noch 3+4 durch "Verdoppeln plus 1". Und eines dieser Kinder konnte, wie bereits erwähnt, alle anderen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn bereits auswendig, demonstrierte aber "außer Konkurrenz" bei der Aufgabe 45+45 Einsicht in eine weitere Ableitungsstrategie.

Das "scoring in context" scheint also (in Einklang mit der konzeptuellen Analyse in Abschnit 2.10.6) zum einen dafür zu sprechen, dass "think addition" für SchulanfängerInnen in der Regel (in BAROODYs Terminologie) "less salient", also weniger "naheliegend" ist als "Verdoppeln plus eins". Zum anderen – und das war auf Grundlage der konzeptuellen Analyse *nicht* zu erwarten – scheint aber auch "sharing" als Subtraktionsstrategie SchulanfängerInnen näher zu liegen als "think addition". Wenn aber ein Kind schon zu Schulbeginn "think addition" anwandte, dann schien "Ableiten" für dieses Kind bereits den Rang einer mehr als nur vereinzelt angewandten Lösungsstrategie zu haben (was für "Verdoppeln plus eins" und "sharing" nicht in derselben Weise zu beobachten war) – ein weiterer Hinweis dafür, dass "think addition" in der "Hierarchie" der Ableitungsstrategien zu *Schulbeginn* vermutlich die am "wenigsten naheliegende" ist (vgl. aber Kap. 8.3.4). Mehr als Vermutungen sind diesbezüglich aber auf Grund der geringen Anzahl an Aufgaben, die zu Schulbeginn durch eine oder mehrere Ableitungsstrategien gelöst wurden, nicht möglich.

8.2.3.2 Verhältnis von Ableitungsstrategien und Auswendigwissen

Betrachtet man die 26 Kinder, die zu Schulbeginn mindestens eine Aufgabe durch "Verdoppeln plus eins", "sharing" oder "think addition" gelöst haben, für sich, so hatten diese Kinder im Schnitt 4,9 Aufgaben durch Faktenabruf gelöst (in der Regel die vier Verdoppelungen sowie die Aufgabe 1 + 6). Demgegenüber liegt der Mittelwert von bereits zu Schulbeginn automatisierten Aufgaben für die Gruppe der 113 Kinder, die zu Schulbeginn keine Ableitungsstrategie zeigten, bei 1,7. (Der Mittelwert von zu Schulbeginn automatisierten Aufgaben bezogen auf alle 139 Kinder liegt bei 2,3.)

Nun setzt Ableiten voraus, dass das Ergebnis einer anderen Aufgabe bereits *bekannt* ist. Im Kontext des ersten Interviews musste diese andere Aufgabe nicht unbedingt *automatisiert* sein. So ermöglichte die Koppelung von 3+4 an 3+3 auch dann eine Ableitung, wenn 3+3 nicht automatisiert war. Tatsächlich hat aber nur eines der 14 Kinder, die 3+4 aus 3+3 ableiteten, die Aufgabe 3+3 *nicht* durch Faktenabruf gelöst. Das steht in Einklang mit BAROODYs Vermutung, dass Ableiten aus einer Aufgabe dann wahrscheinlicher ist, wenn diese Aufgabe selbst hochgradig automatisiert ist (BAROODY u.a. 1983, S. 166f, und Kap. 2.8.3).

Schon alleine deshalb hätten Kinder, die bereits zu Schulbeginn eine Reihe von Grundaufgaben automatisiert haben, auch bessere Voraussetzungen dafür, Ableitungsstrategien anzuwenden. Zudem kann aber vermutet werden, dass jene Kinder, die zu Schulbeginn deutlich mehr Grundaufgaben auswendig wussten als ihre MitschülerInnen, sich in vielen Fällen bereits im Kindergartenalter intensiver und mit größerem Interesse mit Zahlen beschäftigt hatten. Das wiederum mag ebenso Ausdruck von bereits vorhandenen größeren Kompetenzen in diesem Bereich sein, wie es wohl den weiteren Erwerb solcher Kompetenzen begünstigt hat.

Die größere konzeptuelle Reife, die im Anwenden von Ableitungsstrategien bei einigen SchulanfängerInnen zum Ausdruck kommt, lässt sich also vermutlich zu einem guten Teil auf dieselben Faktoren zurückführen wie das größere arithmetische Faktenwissen derselben Kinder. Zum anderen verbessert höheres Faktenwissen in weiterer Folge die Chancen zum Ableiten. Dieses wieder begünstigt vermutlich das Lernen neuer Zahlenfakten (vgl. Kap. 2.8 und 2.9) – ganz im Einklang mit der These von RITTLE-JOHNSON, SIEGLER und WAGNER ALIBALI, dass sich prozedurales und konzeptuelles Wissen in fortlaufender Wechselwirkung im Sinne eines "iterativen Prozesses" weiterentwickeln (vgl. RITTLE-JOHNSON, SIEGLER & WAGNER ALIBALI 2001, S. 346 und Kap. 2.4). Dass aber überdurchschnittliches Faktenwissen *für sich genommen* noch keine *hinreichende* Bedingung für das Anwenden von Ableitungsstrategien darstellt, wird daran deutlich, dass 39 Kinder zwar mit drei bis sechs zu Schulbeginn auswendig gewussten Rechnungen über dem allgemeinen Mittelwert von 2,3 lagen, aber keine einzige Aufgabe durch Ableitung lösten.

8.2.3.3 Verhältnis von Auswendigwissen und Quasi-Simultanerfassung

Zwei der zehn zu Schulbeginn gefragten Additionen, nämlich 3+3 und 4+4, waren zuvor auch in strukturierter Punktedarstellung zur Überprüfung der Quasi-Simultanerfassung verwendet worden. Die konzeptuelle Analyse der Quasi-Simultanerfassung in Kapitel 8.1.2.6 hatte ergeben, dass Quasi-Simultanerfassung gewissermaßen die Anwendung von bereits vorhandenem Zahlwissen auf eine in der Anschauung vorliegende Menge darstellt. Zu erwarten wäre also, dass jene Kinder, die strukturierte Darstellungen von 3+3 und 4+4 quasi-simultan erfassen, *immer auch* 3+3 und 4+4 *als Additionen* bereits automatisiert haben. Umgekehrt ist es mit dieser Analyse jedoch vereinbar, dass ein Kind zwar 3+3 und 4+4 als Additionen gespeichert hat, die strukturierten Darstellungen aber nicht quasi-simultan erfasst, entweder, weil es Defizite in der Simultanerfassung von drei oder vier Punkten hat, oder weil es im Augenblick des Schauens die geforderte *Interpretation der Anschauung* auf Basis des bereits vorhandenen Zahlwissens nicht leistet. Darin *kann* zum Ausdruck kommen, dass ein Kind "drei und drei ist sechs" *rein verbal* gelernt hat, damit also "nichts weiter" und daher auch keine wahrnehmbaren Punktedarstellungen verbindet.

Tatsächlich haben 55 Kinder zu Schulbeginn sowohl die Addition 3+3 (verbal als "plus-" oder "und"-Aufgabe formuliert) durch Faktenabruf gelöst *als auch* zuvor die strukturierte Darstellung von drei und drei Punkten quasi-simultan erfasst. Elf Kinder lösten zwar die Addition 3+3 durch Faktenabruf, ermittelten die Anzahl der drei und drei Punkte aber zählend. Nur eines dieser Kinder hatte auch eine verzögerte Spontanerfassung von drei Punkten gezeigt. All dies ist in Einklang mit der oben geleisteten Analyse.

Scheinbar im Widerspruch dazu haben aber elf Kinder zu Schulbeginn zwar drei und drei Punkte quasi-simultan als "sechs" erfasst, aber die Addition 3+3 wenig später zählend gelöst. Vier weitere erfassten die sechs Punkte quasi-simultan, nannten aber bei 3+3 spontan eine falsche Lösung. Wie könnte das zu erklären sein? Erstens wohl einfach mit der stets zu bedenkenden Möglichkeit, dass Kompetenz und Performanz (zumal bei noch nicht gefestigter Kompetenz) voneinander abweichen können (vgl. Kap. 2.9.7), etwa weil ein Kind zwar "drei und drei ist sechs" bereits automatisiert hat, in der Situation des Interviews aber lieber zählend "auf Nummer sicher" gehen will. Zweitens aber lag die Addition als Zifferterm vor. Auch wenn die Kinder die Aufgabe zugleich auch verbal geboten bekamen, könnten manche durch den ungewohnten Zifferterm (bei möglicherweise noch gegebenen Unsicherheiten in der Ziffer-Zahlwort-Zuordnung) verunsichert worden sein und *deshalb* bei 3+3 zählend gerechnet haben, obwohl sie "drei und drei ist sechs" bereits auswendig wussten.

Drittens aber mag hier doch eine Rolle gespielt haben, dass die gewählte strukturierte Darstellung von drei und drei Punkten der Würfeldarstellung der sechs ähnelte. Die Würfel-Sechs kann aber wie auch die Würfel-Fünf als *Gestalt*, als "figurale Ganzheit" (vgl. Kap. 2.10.1 und VON GLASERSFELD 1987, S. 261) gelernt werden, *ohne* dass dabei Gliederungen wie drei und drei bei der Würfel-Sechs, vier und eins oder auch drei und zwei bei der Würfel-Fünf *bewusst* wahrgenommen werden müssen. Es ist also kein Widerspruch, wenn ein Kind zwar die Würfel-Sechs als "sechs" spontan erkennt, zugleich aber nicht weiß, dass "drei und drei sechs" ist. Dies kann vielmehr als Hinweis darauf gedeutet werden, dass es die Würfel-Sechs *nur* als "figurale Ganzheit" wahrzunehmen gelernt hat.

Da es keine Würfel-Acht gibt und auch sonst keine gegliederte Darstellung der Acht als Vier und Vier, welche Kindern ähnlich häufig wie die Würfelbilder begegnet, sollte die Kombination "Kind erkennt vier und vier Punkte quasi-simultan als acht, löst aber 4+4 *nicht* durch Faktenabruf" entsprechend seltener vorkommen. Tatsächlich trat diese Kombination auch nur bei vier Kindern auf (und kann dort etwa als Auseinanderfallen von Kompetenz und Performanz beim Lösen von 4+4 gedeutet werden). Dagegen haben 42 Kinder sowohl 4+4 durch Faktenabruf gelöst als auch zuvor die Darstellung von vier und vier Punkten quasi-simultan erfasst. Zehn Kinder lösten zwar 4+4 durch Faktenabruf, ermittelten die Anzahl der Punkte der gegliederten Darstellung aber zählend. Keines dieser Kinder hatte zuvor Probleme beim

Erkennen der Würfel-Vier als "vier" gezeigt. Mögliche andere Gründe für das Abweichen von Quasi-Simultanerfassung und Faktenabruf in solchen Fällen wurden bereits genannt.

8.2.3.4 Verhältnis von Ableitungsstrategien und Zählkompetenzen

22 der 26 Kinder, die zu Schulbeginn im engeren Sinne (ohne Berücksichtigung von Tauschaufgaben) Ableitungsstrategien anwandten, konnten die Zahlwortreihe bis mindestens "hundert" korrekt aufsagen, das sind 84,6 Prozent dieser Gruppe. Alle diese Kinder schafften es bis mindestens "neununddreißig". Von den 113 Kindern, die zu Schulbeginn *nicht* (oder nur im Sinne des Tauschprinzips) ableiteten, beherrschten dagegen nur 26 Kinder (23 Prozent dieser Gruppe) die Zahlwortreihe bis mindestens "hundert". Der Unterschied der Häufigkeiten ist gemäß Fisher-Test höchstsignifikant ($p<0{,}001$, $Z = 5{,}70751$).

Alle 26 zu Schulbeginn ableitenden Kinder konnten die Zahlwortreihe von 10 weg rückwärts aufsagen. Von den 113 zu Schulbeginn *nicht* ableitenden Kindern konnten dies hingegen nur 76 Kinder (67 Prozent dieser Gruppe). 17 der 26 zu Schulbeginn ableitenden Kinder (65 Prozent dieser Gruppe) konnten auch von 20 weg rückwärtszählen; von den 113 Nicht-AbleiterInnen konnten dies nur 6 Kinder (5,3 Prozent dieser Gruppe).

Auch bezüglich der Kompetenzen im Beherrschen der Zahlwortreihe zeigen sich also deutliche Unterschiede zwischen "AbleiterInnen" und "Nicht-AbleiterInnen" zugunsten der "AbleiterInnen", die sich vermutlich in derselben Weise erklären lassen, wie es in Kapitel 8.2.3.2 für die Unterschiede im Faktenwissen versucht wurde.

Doch auch bezüglich der Zählkompetenzen wird deutlich, dass diese *für sich genommen* keine hinreichende Bedingung für das Nutzen von Ableitungsstrategien (welches als Ausdruck eines erhöhten konzeptuellen Niveaus gedeutet werden kann) darstellen: Von den 48 Kindern, die zu Schulbeginn bis zumindest "hundert" zählen konnten, zeigten eben auch 26 Kinder (54 Prozent dieser Gruppe) *keine* Ableitung.

8.3 Addieren und Subtrahieren Mitte des ersten Schuljahres

8.3.1 Häufigkeiten einzelner Strategien im Zahlenraum bis zehn

Tabelle 33 zeigt im Überblick, wie viel Prozent der Kinder die einzelnen Aufgaben zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres mit den einzelnen Strategien gelöst haben. Die Aufgaben sind von oben nach unten geordnet nach absteigender Häufigkeit, mit der sie durch Faktenabruf gelöst wurden. Die bei einer bestimmten Aufgabe häufigste Strategie ist jeweils fett gedruckt, die zweithäufigste kursiv.

Tabelle 33: Häufigkeit in Prozent, mit der die interviewten Kinder (n = 139) einzelne Aufgaben zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres mit verschiedenen Strategien lösten

	Fakten-abruf	Ab-leitung	Nicht-zählend mit Fingern	Weiter/Rück-wärts-zählen	Finger-teil-zählen	Alles-zählen/"Take away"	Raten/Fehl-speiche-rung	"Kann ich nicht" o. dgl.	Keine klare Zuord-nung
2+2	**95,0**		*2,2*		1,4	1,4			*2,2*
5+5	**91,4**		*5,8*	0,7	0,7	1,4			
3+3	**86,3**		3,6	0,7	*5,0*	2,2	2,2		
4+4	**80,6**		1,4	3,6	*8,6*	2,9	2,8		
1+6	**71,2**		2,2	2,9	*20,9*	1,4	1,4		
10–5	**66,2**	3,6	*20,1*	0,7	8,6	0,7			
9–1	**61,9**			8,6	*25,2*	3,6			0,7
8–4	**50,4**	14,4	7,2	0,7	*23,0*	1,4	0,7	1,4	0,7
10–9	**49,6**	9,4	2,9	0,7	*32,4*	0,7	3,6	0,7	
2+5	**48,2**		7,2	13,7	*27,3*		1,4	1,4	0,7
9–8	*36,7*	8,6	6,5	1,4	**37,4**	1,4	6,5		1,4
3+5	**34,5**	2,2	6,5	19,4	30,9	4,3	2,1		
7–5	*28,8*	10,1	15,1	5,0	**33,8**	2,9	2,9		1,4
2+7	*27,3*	3,6	2,9	21,6	**35,3**	6,5	2,9		
8–5	*25,9*	12,9	12,9	4,3	**32,4**	4,3	6,5		0,7
3+4	*24,5*	4,3	5,8	22,3	**33,8**	4,3	4,3		0,7
4+6	*23,7*	3,6	2,9	20,1	**43,2**	1,4	5,1		
3+7	19,4	2,9	5,0	*23,7*	**39,6**	2,2	7,2		

8.3.1.1 Faktenabruf

Die Übersicht macht deutlich, dass *Faktenabruf* zu Beginn des zweiten Halbjahres über alle Aufgaben betrachtet die häufigste Einzelstrategie darstellte. Bei weitem am häufigsten automatisiert waren die Verdoppelungsaufgaben von 2+2 bis 5+5, allerdings mit deutlichen Unterschieden zwischen 95 Prozent (2+2) und 80,6 Prozent (bei 4+4). Wie von vielen AutorInnen vermutet, in ihren eigenen Studien aber nicht überprüft (vgl. Kap. 2.13.3), waren die Verdoppelungsaufgaben also generell schon frühzeitig automatisiert. Immerhin ein knappes Fünftel der Kinder löste aber 4+4 Mitte des ersten Schuljahres *nicht* durch Faktenabruf. Dennoch ist es sinnvoll, die Verdoppelungsaufgaben in der weiteren Auswertung für sich zu betrachten. Die 14 restlichen Aufgaben mit Automatisierungsraten von weniger als 75 Prozent werden deshalb für diese Arbeit als "Mitte des ersten Schuljahres nicht-triviale Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn" definiert und damit von den bereits Mitte des ersten Schulhalbjahres offenbar für die überwiegende Mehrheit der Kinder "trivialen", mit Raten von mehr als 80 Prozent auswendig gewussten Verdoppelungen im ZR bis 10 abgegrenzt.

Bei den in diesem Sinne nicht-trivialen Aufgaben wurde Faktenabruf bei 40,6 Prozent aller Lösungsversuche registriert, mit deutlichen Unterschieden von 70,1 Prozent (bei 1+6, an der Grenze zu "trivial") bis hinunter zu 19,4 Prozent (bei 3+7). Dabei ist (vor allem in Hinblick auf 1+6 und 2+5) zu berücksichtigen, dass (wie in Kap. 8.3.3 begründet wird) ab dem zweiten Interview nicht mehr beansprucht wurde, zwischen Faktenabruf und dem (schnellen) Anwenden des Tauschprinzips als Ableitungsstrategie unterscheiden zu können. Alle spontan (innerhalb von ein bis zwei Sekunden) und ohne Anzeichen eines raschen (Weiter-)Zählens erfolgten *und* richtigen Lösungen wurden daher als "Faktenabruf" gewertet.

Von allen im Zahlenraum 10 gefragten Grundaufgaben wurden die beiden *Additionen mit der Summe 10* (4+6 und 3+7) am seltensten durch Faktenabruf gelöst. CARPENTER und MOSER hatten für ihre Studie vermutet, dass Additionen mit der Summe 10 früher als andere automatisiert würden. Solche Additionen wurden deshalb von CARPENTER und MOSER als vermeintliche Sonderfälle *nicht* in ihrer Studie berücksichtigt (vgl. Kap. 2.4). Die Daten aus der vorliegenden Untersuchung scheinen dem zu widersprechen. Bei deren Interpretation ist aber zu berücksichtigen, dass alle für die vorliegende Studie interviewten Kinder Schulbücher hatten, in denen der Zahlenraum bis zehn in kleinen Schritten erarbeitet wird. In 16 von 22 Klassen waren die Zahl 10 und damit auch Additionen mit der Summe 10 im Schulbuch erst für die Zeit nach Weihnachten vorgesehen (vgl. Kap. 7.1). Diese Additionen waren für den Großteil der interviewten Kinder also ein relativ aktueller Schulstoff.

8.3.1.2 Zählstrategien

Finger-Teilzählen war Mitte des ersten Schuljahres die zweithäufigste Einzelstrategie. Bei den 14 nicht-trivialen Grundaufgaben konnten insgesamt etwa 30,3 Prozent aller Lösungsversuche dem Finger-Teilzählen zugeordnet werden. Bei sieben dieser Grundaufgaben war Finger-Teilzählen die häufigste Einzelstrategie, bei einer weiteren (3+5) nur unwesentlich seltener als Faktenabruf.

Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen oder zählendes Ergänzen machte bei den 14 nicht-trivialen Grundaufgaben in Summe etwa 10,4 Prozent aller Lösungsversuche aus. *Alleszählstrategien* waren demgegenüber zu Mitte des ersten Schuljahres bereits relativ selten (2,5

Prozent aller Lösungsversuche bei den 14 nicht-trivialen Grundaufgaben"). Im Vergleich dazu dominierte in der Studie von CARPENTER und MOSER noch am Ende des ersten Schuljahres das Alleszählen klar gegenüber dem Weiterzählen (CARPENTER & MOSER 1984, S. 191; vgl. Kap. 2.3). In der US-amerikanischen Studie wurden allerdings die Aufgaben im ZR 10 nicht gesondert ausgewiesen. Die niederösterreichischen Kinder wählten Mitte des ersten Schuljahres Alleszählstrategien für Aufgaben mit Zehnerübergang häufiger als für Aufgaben im Zahlenraum bis zehn. Allerdings wurden von ihnen auch Zehnerübergänge deutlich öfter mit Weiterzählstrategien als mit Alleszählstrategien gelöst. Näheres dazu folgt in Abschnitt 8.3.2.

Bei den sieben Additionen mit unterschiedlichen Summanden wurde auch jeweils zwischen "Weiterzählen vom größeren Summanden" und "Weiterzählen vom erstgenannten (kleineren) Summanden" unterschieden. Tabelle 34 zeigt die Anzahl der Fälle und Verteilungen dieser beiden Varianten des "Weiterzählens". Die Aufgaben sind geordnet nach der Häufigkeit, mit der sie durch Weiterzählen gelöst wurden.

Tabelle 34: Verteilung der beiden Varianten von Weiterzählen bei den Additionen mit unterschiedlichen Summanden zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres

Addition	Weiterzählen Insgesamt	vom größeren Summanden	vom erstgenannten Summanden
3+7	33	28	5
3+4	31	20	11
2+7	30	23	7
4+6	28	18	10
3+5	27	23	4
2+5	19	16	3
1+6	4	3	1
Gesamt:	172	131	41

Bei der Interpretation dieser Daten ist zu beachten, dass bei der Aufgabe 1+6 "Weiterzählen vom größeren Summanden" von "Faktenabruf" praktisch kaum unterschieden werden kann, die Unterscheidung hier aber auch kaum relevant ist (vgl. Kap. 8.2.2.1). Die drei hier ausgewiesenen Fälle waren dadurch als "Weiterzählen" deutlich, dass das Kind etwa einen Daumen als Zählhilfe verwendet hat. Weiterzählen vom erstgenannten Summanden ist bei 1+6 natürlich deutlich erkennbar, wurde bei dieser Rechnung aber nur von einem Kind angewandt.

Wie aus Tabelle 34 deutlich wird, war Weiterzählen vom größeren Summanden Mitte des ersten Schuljahres die bei weitem häufigere Variante des weiterzählenden Rechnens. Betrachtet man die Aufgaben im Einzelnen, wird ein weiteres Mal die hohe "Anpassungsfähigkeit in der Strategiewahl" (SIEGLER 2001, vgl. Kap. 8.2.2) deutlich: Gerade bei den Aufgaben 3+4 und 4+6, bei denen der Vorteil durch Weiterzählen vom größeren Summanden relativ gering ausfällt, war auch der Anteil dieser Variante des Weiterzählens mit 64,3 bzw. 64,5 Prozent aller Weiterzählversuche am geringsten. Bei 2+5, 2+7, 3+5 und 3+7, wo die Anzahl der Zählschritte durch Vertauschen der Summanden bei weitem deutlicher reduziert werden kann, wurde eben dies auch deutlich öfter getan (bei bis zu 85,2 Prozent aller Weiterzählversuche bei 3+5).

Die dem Weiterzählen korrespondierenden Subtraktionsstrategien sind das *Rückwärtszählen bzw. das ergänzende Weiterzählen* vom Subtrahenden zum Minuenden (vgl. Kap. 2.1). Die besondere Schwierigkeit des Rückwärtszählens besteht darin, dass hier synchron zwei gegenläufige Zahlreihen zu beachten sind. Das Problem der Gegenläufigkeit besteht hingegen beim zählenden Ergänzen *nicht*; dieses scheint aber konzeptuell anspruchsvoller zu sein (vgl. Kap. 2.10.2). Zur relativen Häufigkeit von Rückwärtszählen bzw. zählendem Ergänzen gibt es gegensätzliche Befunde aus deutschen bzw. US-amerikanischen Studien (vgl. Kap. 2.3).

In der vorliegenden Studie wurden Mitte des ersten Schuljahres Rückwärtszählen und zählendes Ergänzen bei Subtraktionen insgesamt deutlich seltener angewandt als Weiterzählen bei Additionen. Das liegt zum einen einfach daran, dass für die sieben ausgewählten Subtraktionen *insgesamt deutlich seltener Zählstrategien* angewandt wurden als für die sieben ausgewählten nicht-trivialen Additionen. Das mag zunächst überraschen, gilt doch das Subtrahieren gemeinhin als "schwieriger" als das Addieren. In der Studie von HENRY und BROWN etwa waren auch tatsächlich die Anteile von Faktenabruf bei kalifornischen Kindern am Ende des ersten Schuljahres bei den Subtraktionen noch einmal deutlich niedriger als bei den Additionen (vgl. HENRY & BROWN 2008, S. 165f und Kap. 2.9.5).

Bei der Deutung der hier vorliegenden Daten zu niederösterreichischen Kindern ist zu berücksichtigen, dass die Subtraktionen für das zweite Interview bewusst so gewählt worden waren, dass sie mehrheitlich mit relativ naheliegenden Ableitungsstrategien gelöst werden konnten. Das trifft zumindest für 10–9, 10–5, 9–8 und 8–4 zu. Bei der als einfacher Einstieg ins vermeintlich "unangenehme" Subtrahieren gewählten Aufgabe 9–1 kann zwischen Rückwärtszählen und Faktenabruf praktisch kaum unterschieden werden. Richtige Antworten, die ohne zeitliche Verzögerung und ohne erkennbare Zählhandlung gegeben wurden, wurden bei dieser Aufgabe daher generell als "Faktenabruf" ausgewiesen. (Die 12 Fälle, bei denen für 9–1 "Rückwärtszählen" ausgewiesen wurde, waren als solche erkenntlich durch eine deutlich wahrnehmbare, zeitlich entsprechend verzögerte, verbale Zählhandlung: "Neun ... acht!") Und auch die verbleibenden Subtraktionen 8–5 und 7–5 können insofern als "Sonderfälle" betrachtet werden, als hier bei entsprechender Zahlauffassung die "Kraft der Fünf" wirksam werden kann. (Tatsächlich waren bei diesen Subtraktionen sowohl Ableitungsstrategien als auch nicht-zählendes Fingerrechnen relativ häufig; vgl. Kap. 8.3.1.4 und 8.3.2.) Bezogen auf *diese sieben Subtraktionen* war das Subtrahieren für die interviewten Kinder Mitte des ersten

Schulhalbjahres jedenfalls nicht "schwieriger" (gemessen am Anteil gezählter Lösungen) als das Addieren.

Andererseits wird aber deutlich, dass Kinder, sofern sie für eine dieser Subtraktionen überhaupt eine Zählstrategie wählten, dann fast immer auf die Strategie "Finger-Teilzählen" vertrauten. Der Anteil von "Rückwärtszählen" bzw. "zählendem Ergänzen" an allen Zählstrategien für Subtraktionen war also Mitte des ersten Schuljahres deutlich niedriger als der Anteil von Weiterzählen an den Zählstrategien für Additionen. Das lässt sich interpretieren als Ausdruck der oben erwähnten höheren prozeduralen (beim Rückwärtszählen) bzw. konzeptuellen (beim zählenden Ergänzen) Schwierigkeiten der dem Weiterzählen korrespondierenden Subtraktionsstrategien.

Zur Beantwortung der Frage, ob nun Kinder Mitte des ersten Schuljahres beim Subtrahieren eher rückwärts zählen oder eher zählend ergänzen und ob sie dies dem jeweiligen Zahlenmaterial anpassen, liefert die vorliegende Untersuchung nur einige wenige Hinweise. Denn zum einen wurden insgesamt zu wenige Aufgaben mit einer der beiden Strategien gelöst, um allgemeine Aussagen treffen zu können. Zum anderen waren nur wenige Subtraktionen so gewählt, dass beide Strategien verlässlich erfasst werden konnten: Dass bei 9−1 praktisch kaum zwischen Faktenabruf und Rückwärtszählen unterschieden werden kann, wurde bereits erwähnt. Dasselbe gilt bezüglich der Unterscheidung von Faktenabruf und zählendem Ergänzen für 10−9 und 9−8. Von den verbleibenden Subtraktionen wurden 10−5 und 8−4 aus noch zu analysierenden Gründen (Kap. 8.3.3.3) insgesamt relativ selten zählend gelöst.

Bei 8−5 und 7−5 aber waren Rückwärtszählen und zählendes Ergänzen Mitte des ersten Schuljahres etwa gleich häufig (je drei Fälle bei 8−5, vier Fälle von zählendem Ergänzen gegenüber drei Fällen von Rückwärtszählen bei 7−5). Nun erfordert zählendes Ergänzen bei diesen beiden Subtraktionen weniger Zählschritte als Rückwärtszählen; bei Subtraktionen wie 8−3 oder 10−3 ist das anders. Im Sinne der bereits mehrfach deutlich gewordenen "Anpassungsfähigkeit in der Strategiewahl" (SIEGLER 2001, vgl. Kap. 8.2.2) wäre zu vermuten, dass Kinder, die etwa 7−5 durch zählendes Ergänzen gelöst und damit eine zumindest prozedurale Einsicht in die Gleichwertigkeit von Wegnehmen und Ergänzen gezeigt haben, eine Aufgabe wie etwa 10−3, falls überhaupt zählend, dann *nicht* durch zählendes Ergänzen, sondern durch das bei *dieser* Aufgabe ökonomischere Rückwärtszählen gelöst hätten. Die Überprüfung dieser Vermutung muss einer Detailuntersuchung zur Entwicklung von Subtraktionsstrategien überlassen bleiben. Bei der vorliegenden Studie standen andere Fragen im Vordergrund; die (mit Rücksicht auf die Aufmerksamkeitsspanne der Kinder erfolgte) Beschränkung auf insgesamt 24 Aufgaben beim zweiten Interview erlaubte es nicht, innerhalb der Subtraktionen fein genug zu differenzieren, um auch solche Detailfragen beantworten zu können.

8.3.1.3 Vergleich von Zählstrategien und Fakten nutzenden Strategien

Fasst man alle Varianten des zählenden Rechnens (Weiterzählen, Finger-Teilzählen, Alleszählen) zusammen, so wurden 43,2 Prozent aller Lösungsversuche bei den nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch die eine oder andere Zählstrategie gelöst. Demgegenüber machte Faktennutzung, also entweder Faktenabruf oder Ableiten (vgl. Kap. 2.1), insgesamt 46 Prozent der Lösungsversuche aus. Insgesamt 6,9 Prozent aller Lösungsversuche bei den nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn fallen auf nicht-zählendes Fingerrechnen. Betrachtet man die Aufgaben im Einzelnen, so überwogen bei sieben der 14 nicht-trivialen Aufgaben bis 10 Zählstrategien gegenüber der Faktennutzung, wie Tabelle 35 deutlich macht. Die Aufgaben sind darin gereiht nach der Häufigkeit, mit der sie durch Fakten nutzende Strategien gelöst wurden.

Tabelle 35: Verteilung von Zählstrategien und Faktennutzung bei den 14 nicht-trivialen Grundaufgaben im ZR bis 10 zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres

Aufgabe	Anteil von Faktennutzung	Anteil von Zählstrategien
1+6	71,2 %	25,2 %
10–5	69,8 %	10,0 %
8–4	64,8 %	25,1 %
9–1	61,9 %	37,4 %
10–9	59,0 %	33,8 %
2+5	48,2 %	41,0 %
9–8	45,3 %	40,2 %
7–5	38,8 %	41,7 %
8–5	38,8 %	41,0 %
3+5	36,7 %	54,6 %
2+7	30,9 %	63,4 %
3+4	28,8 %	60,4 %
4+6	27,3 %	64,7 %
3+7	22,3 %	65,5 %

8.3.1.4 Nicht-zählendes Fingerrechnen

Im Bereich der zehn Aufgaben, die sowohl zu Beginn wie Mitte des ersten Schuljahres zu lösen waren, nahm die Häufigkeit des nicht-zählenden Fingerrechnens generell deutlich ab. So wurde die Aufgabe 5+5 zu Beginn des Schuljahres von 19,4 Prozent der Kinder durch nicht-zählendes Fingerrechnen gelöst, Mitte des Jahres von 5,8 Prozent; die Aufgabe 8–5 zu Beginn von 21,6 Prozent, Mitte des Jahres von 12,9 Prozent.

Wie zu Beginn des Jahres, wurden auch Mitte des Jahres gerade Aufgaben mit der Zahl fünf als Summand bzw. Subtrahend relativ häufig durch nicht-zählendes Fingerrechnen gelöst, außer den bereits genannten also auch die Subtraktionen 10–5 (Häufigkeit von nicht-zählendem Fingerrechnen Mitte des ersten Schuljahres: 20,1 Prozent) und 7–5 (15,1 Prozent) sowie (deutlich weniger oft) die Additionen 2+5 (7,2 Prozent) und 3+5 (6,5 Prozent). Darin zeigt sich aufs Neue die Anpassungsfähigkeit der Kinder in der Wahl ihrer Lösungsstrategie je nach Charakter der zu lösenden Aufgabe (vgl. SIEGLER 2001).

8.3.1.5 Fehlerhaft gelöste und verweigerte Aufgaben

Tabelle 36 zeigt, wie häufig die einzelnen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn Mitte des ersten Schuljahres falsch gelöst bzw. verweigert wurden (vgl. Kap. 8.2.1.5). Die Aufgaben sind nach der Häufigkeit fehlerhafter Lösungen geordnet.

Tabelle 36: Häufigkeit in Prozent, mit der die einzelnen Aufgaben Mitte des ersten Schuljahres mit falschem Ergebnis gelöst bzw. nicht bewältigt wurden

	Falsche Lösung	Keine Lösung	Insgesamt falsch *oder* nicht gelöst)
4+6	18,0 %	0 %	18,0 %
9–8	17,3 %	0 %	17,3 %
8–5	15,1 %	0 %	15,1 %
2+7	12,9 %	0 %	12,9 %
3+7	12,9 %	0 %	12,9 %
3+4	11,4 %	0 %	11,4 %
7–5	10,8 %	0 %	10,8 %
10–9	8,6 %	0,7 %	9,3 %
8–4	7,2 %	1,4 %	8,6 %
3+5	6,5 %	0 %	6,5 %
4+4	5,0 %	0 %	5,0 %
10–5	3,6 %	0 %	3,6 %
3+3	2,9 %	0 %	2,9 %
2+5	2,9 %	1,4 %	4,3 %
9–1	2,9 %	0 %	2,9 %
1+6	2,2 %	0 %	2,2 %
2+2	0 %	0 %	0 %
5+5	0 %	0 %	0 %
Mittelwert aller Aufgaben:	7,8 %	0,2 %	8,0 %

Bei jenen Aufgaben, die bereits beim ersten Interview gefragt wurden, waren die Fehlerquoten erwartungsgemäß Mitte des Schuljahres in der Regel deutlich niedriger als zu Schulbeginn (vgl. Kap. 8.2.2). Im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben betrug die Fehlerquote Mitte des Schuljahres aber immer noch durchschnittlich 9,5 Prozent, mit zum Teil deutlich höherer Fehlerquote gerade bei jenen Additionen bzw. Subtraktionen, die am öftesten zählend gelöst wurden (4+6, 2+7, 3+7, 3+4 bzw. 9–8, 8–5, 7–5).

Verweigerung ("'Kann ich nicht' oder dergleichen) kam hingegen Mitte des Schuljahres bei Aufgaben im Zahlenraum bis zehn so gut wie gar nicht mehr vor. *Alle* Kinder fühlten sich diesen Aufgaben also offenbar generell gewachsen; bei Aufgaben mit Zehnerübergang war dies nicht der Fall (vgl. Kap. 8.3.2). In den insgesamt fünf Fällen, wo ein Kind eine Aufgabe im Zahlenraum bis zehn nicht lösen wollte, lässt sich kaum ein Zusammenhang zum spezifischen Charakter der Aufgaben (einmal 10–9, je zweimal 8–4 und 2+5) erkennen. Vermutlich gaben die Kinder hier einfach einer Laune nach, und im Interesse der Fortführung des Interviews wurde auch nicht darauf bestanden, dass jede Aufgabe gelöst werden müsse.

8.3.2 Lösungsstrategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres

Die Tatsache, dass beim zweiten Interview auch einige wenige Aufgaben gefragt wurden, die über den Zahlenraum bis zehn hinausreichten, sorgte bei einigen Lehrkräften für Verwunderung. Eine Lehrkraft war sogar zunächst entschieden dagegen mit der Begründung: "Wir haben das noch nicht gelernt!" Sie konnte aber mit dem Hinweis, dass es gerade deshalb interessant sei, wie die Kinder mit solchen Aufgaben umgehen würden, und dass es den Kindern freigestellt werde, die Aufgaben nicht zu bearbeiten, davon überzeugt werden, dass den Kindern durch diesen Teil des Interviews kein Schaden drohe. Tabelle 37 zeigt zunächst die bei den Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres angewandten Strategien im Überblick. Die Aufgaben sind gereiht nach der Häufigkeit, mit der sie durch Faktenabruf gelöst wurden. Die häufigste Strategie ist jeweils fett gedruckt, die zweithäufigste kursiv.

Tabelle 37: Häufigkeit in Prozent, mit der die interviewten Kinder (n = 139) einzelne Grundaufgaben mit Zehnerübergang zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres mit einzelnen Strategien lösten

	Fakten-abruf	Ab-leitung	Nicht-zählend mit Fingern	Weiter-zählen	Finger-Teil-zählen	Alles-zählen	Raten/ Fehl-speiche-rung	"Kann ich nicht" o. dgl.	Keine klare Zuord-nung
6+6	**27,3**	2,2	2,2	*19,4*	16,5	10,1	12,9	7,9	1,4
6+7	0,7	13,7	1,4	15,8	**30,9**	8,6	10,8	*17,3*	0,7
5+8	0,7	2,9	3,6	*22,3*	**30,2**	10,1	10,1	18,7	1,4

Bei der Interpretation der Tabelle ist zu berücksichtigen, dass Aufgaben mit Zehnerübergang zwar in einer der 22 Klassen (entgegen den Erwartungen) bereits im Jänner (also einige Wochen vor dem zweiten Interview), in den anderen aber eben noch nicht im Unterricht thematisiert worden waren (vgl. Kap. 7.2.5).

Wenig überraschend, spielte *Faktenabruf* bei zwei der drei Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres so gut wie keine Rolle. Bei der Verdoppelung 6+6 war Faktenabruf aber schon zu diesem Zeitpunkt die häufigste Strategie. 6+6 wurde zwar deutlich seltener durch Faktenabruf gelöst als die Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn, aber immer noch häufiger als die Additionen 3+4, 3+7 und 4+6, mit denen die Kinder in der Schule zumeist schon längere Zeit konfrontiert worden waren. Die Sonderrolle, die Verdoppelungsaufgaben hinsichtlich der Automatisierung einnehmen, reicht also offenbar über den Zahlenraum 10 hinaus und scheint der schulischen Behandlung vorauszugehen (wie ja auch gerade die Verdoppelungen bis 5+5 bereits zu Schulbeginn relativ oft automatisiert waren; vgl. Kap. 8.2.1).

Fasst man alle Varianten von *Zählstrategien* zusammen, dann wurden bei 45,9 Prozent aller Lösungsversuche für 6+6, bei 55,3 Prozent aller Lösungsversuche für 6+7 und bei 62,6 Prozent aller Lösungsversuche für 5+8 Zählstrategien angewandt. Diese Anteile liegen zwar unter jenen bei manchen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn (vgl. oben Tab. 35), doch es müssen hier auch die hohen Anteile von *"Raten, Fehlspeicherung und dergleichen"* bzw. *"'Kann ich nicht' oder dergleichen"* in Rechnung gestellt werden – zwei "Strategien", die zu diesem Zeitpunkt bei Aufgaben im Zahlenraum bis zehn kaum noch vorkamen (vgl. Kap. 8.3.1.5). Zu Schulbeginn waren sie auch in diesem Zahlenraum noch häufig (vgl. Kap. 8.2.1.5).

Innerhalb der Zählstrategien wiederum war bei den Aufgaben mit Zehnerübergang der Anteil von *Alleszählen* deutlich höher als im selben Interview bei den Aufgaben im Zahlenraum bis zehn. Entwicklungsmäßig betrachtet "frühere" und daher beim ersten Interview noch häufigere Strategien (Verweigern und Raten gegenüber Zählstrategien, innerhalb der Zählstrategien Alleszählen gegenüber dem Weiterzählen) waren also bei den "schwereren" Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres wieder häufiger zu beobachten als mittlerweile bei Aufgaben im Zahlenraum bis zehn – ganz im Einklang mit SIEGLERS Modell von "überlappenden Wellen" in der Strategieentwicklung (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 27; vgl. Kap. 2.3.1).

Ebenso gibt es aber Anzeichen dafür, dass die Aufgabe 6+7 bei manchen Kindern als "challenge problem" gewirkt haben mag (vgl. SIEGLER 2001, S. 127 und Kap. 2.3.2): Mit 13,7 Prozent war der Anteil von *Ableitungsstrategien* bei dieser Aufgabe so hoch wie zu diesem Zeitpunkt sonst nur noch bei 8–4. Freilich ist dabei auch zu bedenken, dass gerade die "guten Rechner" zu diesem Zeitpunkt die Aufgaben im Zahlenraum bis zehn oft schon weitestgehend oder vollständig automatisiert hatten (s. Kap. 8.3.1) und *schon alleine deshalb* dort keine Ableitungen zeigten. Wenn manche dieser Kinder nun bei 6+7 ableiteten, dann heißt das nicht, dass sie erst durch die "Herausforderung" dieser "schwierigen" Aufgabe zum Ableiten motiviert wurden. Plausibler scheint die Vermutung, dass viele der "guten Rechner" auch schon im Zahlenraum bis zehn Ableitungsstrategien ergriffen hatten, nur eben zu einem früheren Zeitpunkt.

Drei Kinder leiteten aber beim zweiten Interview 6+7 aus 6+6 ab und hatten wenige Minuten zuvor 3+4 zählend (3+3 aber durch Faktenabruf) gelöst (vgl. Kap. 8.5.3.4). Zumindest bei diesen Kinder kann vermutet werden, dass sie gerade die Aussicht auf ein vergleichsweise mühsames Weiterzählen um sechs oder sieben Schritte dazu bewogen hat, eine alternative Strategie (Ableiten) zu suchen, während eine solche Überlegung angesichts des relativ mühelosen Weiterzählens bei 3+4 bei offenbar gar nicht erst aufgekommen war. Welche Arten von Ableitungsstrategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres beobachtet werden konnten, wird in Kapitel 8.3.3 im Detail dargestellt.

8.3.2.1 Fehlerhaft gelöste und verweigerte Aufgaben mit Zehnerübergang

Tabelle 38 zeigt, wie häufig die drei Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres falsch gelöst bzw. nicht bewältigt wurden (vgl. Kap. 8.2.1.5).

Tabelle 38: Häufigkeit in Prozent, mit der einzelne Aufgaben mit Zehnerübergang Mitte des ersten Schuljahres mit falschem Ergebnis gelöst wurden

	Falsche Lösung	Keine Lösung	Insgesamt falsch *oder* nicht gelöst)
6+6	35,3 %	7,9 %	43,2
5+8	30,2 %	18,7 %	48,9
6+7	29,5 %	17,3 %	46,8
Mittelwert aller Aufgaben:	31,7 %	14,6 %	46,3

Die hohen Fehlerquoten stehen in Zusammenhang mit dem hohen Anteil an Zählstrategien bei diesen Aufgaben. Auf die besonderen Schwierigkeiten, die das zählende Rechnen beim Überschreiten des Zahlenraums bis 10 bereitet, wurde in Kapitel 2.9.9 bereits kurz eingegangen. Diesbezügliche Beobachtungen aus der dritten, in dieser Hinsicht (wegen der größeren Anzahl an Aufgaben mit Zehnerübergang) aussagekräftigeren Interviewreihe werden in Kapitel 8.4.2.3 dargestellt und kommentiert.

8.3.3 Ableitungsstrategien Mitte des ersten Schuljahres

Tabelle 39 zeigt im Überblick, welche Arten von Ableitungsstrategien Mitte des ersten Schuljahres bei welchen Aufgaben wie häufig angewandt wurden. Die Strategien sind von links nach rechts nach der Häufigkeit ihres Vorkommens geordnet, die Aufgaben von oben nach unten nach der Häufigkeit, mit der sie durch eine Ableitungsstrategie gelöst wurden.

Tabelle 39: Anzahl der Kinder, die Mitte des ersten Schuljahres einzelnen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn mit den genannten Ableitungsstrategien gelöst haben

	"think addition" bzw. "Unterschied"	Verdoppeln plus 1	Kovarianz, Basis ist *keine* Verdoppelung	Kompensation (Addition)	Teilschrittverfahren	Verdoppeln plus 2	Verdoppeln minus 1	Verdoppeln minus 2	Kompensation (Subtraktion)	Kovarianz (Subtraktion)	gesamt
8–4	20										20
6+7		16		1	1		1				19
8–5	17								1		18
7–5	14									1	15
10–9	12								1		13
9–8	12										12
3+4		2	3				1				6
2+7			4	1							5
4+6				3		1		1			5
10–5	5										5
5+8					4						4
3+7			3	1							4
6+6					1	1		1			3
3+5			3								3
gesamt	80	18	13	6	6	2	2	2	2	1	132

Bei der Interpretation der Tabelle ist zu beachten, dass das Anwenden des Tauschprinzips (Kommutativität der Addition) Mitte des ersten Schuljahres *nicht* als Ableitungsstrategie erfasst wurde. In dieser Hinsicht wurden die Interviews zu t2 (und später auch zu t3) bewusst anders ausgewertet als zu t1, aus folgender Überlegung: Zu t1 war das Vertauschen der Summanden in der Regel mit einer gegenüber dem direkten Faktenabruf deutlich längeren Lösungszeit verbunden (vgl. Kap. 8.2.2.1). Anders beim zweiten und dritten Interview: Sofern Kinder zu t2 oder t3 erklärten, sie hätten beispielsweise anstelle von 1+6 tatsächlich 6+1 gerechnet, hatten sie zuvor die Lösung von 1+6 durchwegs ebenso schnell (innerhalb einer Sekunde) genannt wie etwa die Lösung einer bereits automatisierten Verdoppelungsaufgabe.

Die Vermutung liegt nahe, dass zumindest manche dieser Kinder 1+6 tatsächlich in gleicher Weise direkt (ohne Umweg über 6+1) aus dem Gedächtnis abgerufen haben wie etwa 3+3. Ihre Auskunft, sie hätten an 6+1 gedacht, hätte dann eher den Charakter eines nachträglichen "Beweises" bzw. einer "Rechtfertigung", warum sie sich dessen so sicher sein könnten. Sofern aber in solchen Fällen bei 1+6 *tatsächlich* ein bewusstes Vertauschen mit anschließendem Faktenabruf (anstelle eines direkten Faktenabrufs) stattfand, war dieses Vertauschen offenkundig bereits so hochgradig automatisiert, dass die Unterscheidung zwischen Faktenabruf und dem Anwenden einer Ableitungsstrategie im Grunde hinfällig wird: Sie ist dann nicht nur kaum objektivierbar, sondern auch praktisch irrelevant. Für BAROODY fällt beides ohnedies zusammen (vgl. Kap. 2.8). Und in beiden Fällen würde man einem Kind mit Blick auf die so gelöste Einzelaufgabe "fact mastery" nicht absprechen wollen.

Sofern also ein Kind zu t2 oder t3 ohne Anzeichen eines inneren oder äußeren Zählens eine Aufgabe innerhalb von ein bis zwei Sekunden richtig löste, wurde für diese Aufgabe "Faktenabruf" protokolliert, und dies auch dann, wenn das Kind auf die Frage "Wie hast du das so schnell gewusst?" die Tauschaufgabe ins Spiel brachte. 1+6 ist deshalb zwangsläufig unter jenen wenigen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn, für die keine einzige Ableitung registriert wurde. Das war sonst nur noch bei 9–1 und den Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn der Fall, wo Ableitungen plausibler Weise auch nicht zu erwarten waren.

Bezogen auf jene 14 Aufgaben, die für Ableitungen aus den genannten Gründen überhaupt in Frage kamen, entsprechen die registrierten 132 Fälle von Ableitungen einem Anteil von etwa 6,8 Prozent an allen Lösungsversuchen. Das Ableiten einer Subtraktion aus der inversen Addition bzw. aus dem Konzept des Unterschiedes (vgl. Kap. 8.2.2.5) war dabei die am häufigsten anzutreffende Ableitungsstrategie.

Die folgenden Unterabschnitte sind der Detailanalyse des Ableitens Mitte des ersten Schuljahres gewidmet. Dabei werden wieder zunächst Ableitungstrategien bei Additionen, danach bei Subtraktionen besprochen.

8.3.3.1 Additions-Strategien auf der Basis von Kovarianz

Strategien auf Basis von Kovarianz wurden Mitte des ersten Schuljahres am häufigsten bei der vergleichsweise schwierigen Aufgabe 6+7 angewandt. In 16 von insgesamt 17 Fällen dieser Ableitungen handelte es sich um "Verdoppeln plus eins", also das Ableiten von 6+7 aus dem bereits automatisierten oder noch im Gedächtnis präsenten 6+6. (6+6 wurde im Verlauf des zweiten Interviews zuerst gefragt, es folgten 19–9, 5+8 und erst dann 6+7. Tatsächlich leiteten zwei Kinder, die zuvor 6+6 nicht auswendig gewusst hatten, 6+7 dennoch aus 6+6 ab. Dabei mag ihnen die Erinnerung an die zuvor gelöste Aufgabe geholfen haben.)

In 13 dieser 16 Fälle geben die Kinder eine klare, abstrakt-quantitative Begründung für ihr Vorgehen, wie zum Beispiel Katharina: *"Weil sechs und sechs ist zwölf, und nur um eins mehr, ist dreizehn."* Zwei Kinder brachten in ihrer Erläuterung nur zum Ausdruck, dass es "eben so sei", etwa Matthias: *"Weil sechs plus sechs ist zwölf, und sechs plus sieben ist dreizehn."* Nur in einem Fall changiert die Erläuterung (wie häufiger bei den Erläuterungen zu Schulbeginn, vgl. Kap. 8.2.3.2) zwischen Kardinal- und Ordinalaspekt, wenn Tobias wie folgt argumentiert: *"Ich habe... sieben ist eine Zahl mehr als sechs. Und dann habe ich mir einfach gedacht, sechs plus sechs ist zwölf, und dann noch sieben dazu ist dreizehn. Zwölf, dreizehn."*

Nur ein Mädchen leitete 6+7 aus 7+7 ("Verdoppeln minus eins") ab; dieses Mädchen hatte zuvor auch 6+6 (als einziges Kind) aus 7+7 abgeleitet ("Verdoppeln minus zwei"). Sie hatte also zwar 6+6 noch nicht, 7+7 aber sehr wohl bereits automatisiert. Im Gespräch erklärte sie dies damit, dass ihre Schwester im Sommer *"zwei Wochen auf Ferienlager"* gewesen sei und sie sich gemerkt habe, dass *"zwei Wochen vierzehn Tage sind, weil sieben und sieben ist ja vierzehn"*.

Bei 3+4, der zweiten für "Verdoppeln plus eins" gewissermaßen "prädestinierten" Aufgabe, wurde diese Strategie (Ableitung aus 3+3) nur von zwei Kindern zu Protokoll gegeben. Ein weiteres Kind leitete 3+4 durch "Verdoppeln minus eins" aus 4+4 ab.

Drei weitere Kinder wählten als Ableitungsbasis für 3+4 *keine Verdoppelungsaufgabe*:

- Johannes wusste 3+3 und 4+4 auswendig, leitete 3+4 aber aus 2+4 ab: *"Zwei plus vier ist sechs. Und dann muss es eins mehr sein."* Derselbe Junge leitete auch 6+7 nicht aus 6+6 ab, obwohl er 6+6 auswendig wusste, sondern löste diese Aufgabe mit dem Teilschrittverfahren, einer Ableitungsstrategie, die für die meisten Kinder weit weniger "salient" ist als "Verdoppeln plus eins" und Mitte des ersten Schuljahres nur von insgesamt fünf Kindern (bei sechs Rechnungen) angewandt wurde (s.u.).
- Zwei andere Jungen, die gleichfalls 3+3 auswendig wussten, leiteten 3+4 aus 3+5 ab.

Das legt nahe, dass in den Fällen, wo (in Gestalt von anderen bereits automatisierten Aufgaben abseits der Verdoppelungen) alternative Ableitungsbasen überhaupt zur Verfügung stehen, das Ableiten aus einer Verdoppelungsaufgabe für Kinder nicht unbedingt näher liegt als das Ableiten aus einer anderen Nachbaraufgabe.

"Verdoppeln plus zwei" wurde nur in insgesamt zwei Fällen protokolliert: Ein Mädchen leitete auf diese Weise 6+6 aus 5+5 ab, ein Junge 4+6 aus 4+4. Von "Verdoppeln minus zwei" gab es ebenfalls zwei Fällen: Die Ableitung von 6+6 aus 7+7 wurde bereits erwähnt, erstaunlicher noch erscheint die Ableitung von 4+6 aus 6+6 bei einem Jungen.

Das auf Kovarianz beruhende Ableiten aus einer Aufgabe, die *nicht* die unmittelbare Nachbaraufgabe ist, ist mit erhöhten Schwierigkeiten verbunden. Das wird exemplarisch deutlich am Versuch von Christian, 6+6 aus 8+8 abzuleiten. Der Versuch war schon deshalb zum Scheitern verurteilt, weil der Junge von einer Fehlspeicherung ausging: Nach 45 Sekunden angestrengten Nachdenkens, erläuterte er dem Interviewer seine Überlegungen wie folgt: *"Ich glaub, ich hab's eh. Weil acht plus acht ist zwölf."* [Weiteres Nachdenken, nach ca. 10 Sekunden:] *"Zehn! Ich hab's mir eigentlich vorher auch schon gedacht, aber dann war ich mir nicht so ganz sicher, weil vier plus sechs, weil sechs plus vier ist ja auch zehn, da war ich mir nicht so ganz sicher."* Darauf fragte der Interviewer, ob er denn nun sicher sei, dass acht und acht zwölf ergibt. Darauf Christian: *"Ich glaube schon. Weil wenn acht und acht zwölf ist, muss das eigentlich zehn sein."* Ausgehend von der Fehlspeicherung 8+8=12 hat der Junge offenbar geschlossen, dass dann 7+7=11 und 6+6=10 (was ihn in Konflikt mit seiner richtigen Überzeugung brachte, dass 6+4=10). Die Ableitung wäre also auch dann nicht richtig gewesen, wenn er bei seinen Überlegungen von 8+8=16 ausgegangen wäre; und das deshalb, weil er die Differenz zweier benachbarter Verdoppelungen (gemäß dem sonst bei Nachbaraufgaben geltenden Prinzip) mit eins statt mit zwei berücksichtigte.

Bei Analyse der zehn übrigen, nicht von Verdoppelungen ausgehenden Fälle von Ableitungsstrategien auf Basis von Kovarianz interessiert vor allem, ob dabei häufiger eine größere oder kleinere Ableitungsbasis gewählt wurde (ob also für die Ableitung öfter nach dem Gedanken "muss mehr sein" oder "muss weniger sein" vorgegangen wurde). Weiters ist zu prüfen, ob dabei (wie von CARPENTER und MOSER 1984 vermutet, vgl. Kap. 2.3) neben den Verdoppelungsaufgaben auch Additionen mit der Summe 10 häufiger als Ableitungsbasis gewählt werden als andere Additionen. Tatsächlich wurden folgende weiteren Ableitungen auf der Basis von Kovarianz protokolliert:

- In zwei Fällen wurde 3+5 aus 2+5 abgeleitet, in einem Fall aus 3+6.
- In zwei Fällen wurde 3+7 aus 2+7, in einem aus 3+6 abgeleitet.
- In vier Fällen wurde 2+7 aus 3+7 abgeleitet.

Vier Fällen, in denen eine Addition mit der Summe 10 als Ableitungsbasis für eine Nachbaraufgabe diente, stehen also drei Fälle gegenüber, wo eine Addition mit der Summe 10 selbst aus einer anderen Aufgabe abgeleitet wurde. Das sind freilich bei weitem zu wenige Fälle, um daraus eine allgemeine Tendenz abzuleiten. Sie stehen aber zumindest nicht in Widerspruch zur Vermutung, dass Additionen mit der Summe 10 nicht *per se* früher automatisiert werden als andere (und dann in besonderer Weise als Ableitungsbasis dienen können), sondern dass dies wesentlich davon abhängt, ob ein Kind unter den Einflüssen des Unterrichts wie auch der außerschulischen Förderung die Sonderrolle, die diese Additionen in unserem Dezimalsystem ja tatsächlich einnehmen, auch wahrnimmt.

Dass auch hierbei die Möglichkeit von Intervieweffekten bzw. des Abweichens der Performanz von der Kompetenz zu bedenken sind, lehrt das Beispiel von Elena: Elena löste im Verlauf des Interviews zunächst 3+7 offenbar ableitend mit folgender nachträglicher Erläuterung: *"Ich hab sieben und zwei gerechnet, und dann noch eins dazu."* Die Aufgabe 2+7 wurde in den Interviews bewusst erst später gestellt, nach fünf dazwischen geschalteten anderen Additionen. Bei 2+7 nun dachte Elena kurz nach, nannte die richtige Antwort und erklärte: "*Ich hab sieben plus drei gerechnet, und dann eins weniger."* Die Interviewerin konfrontierte Elena an dieser Stelle damit, dass sie doch zuvor 2+7 schon auswendig gewusst habe; darauf antwortete sie: "*Ja, aber dann hab ich's wieder vergessen."*

Dieses Beispiel zeigt, dass wir bei der Interpretation der in den Interviews gewonnenen Daten generell zweierlei berücksichtigen müssen:

- Ein Kind, das eine Aufgabe im Gesprächsverlauf durch Faktenabruf gelöst hat, mag dieselbe Aufgabe *bei anderer Gelegenheit im selben Zeitraum* (Mitte des ersten Schuljahres, aber sogar am Tag desselben Interviews oder während dieses Interviews selbst) *nicht* durch Faktenabruf gelöst haben. Umkehrt ist denkbar, dass ein Kind eine Aufgabe, die es üblicherweise (oder zumindest immer wieder auch) durch Faktenabruf löst, im Interview durch eine Ableitung, aber auch durch eine Zählstrategie bewältigt. Die Interviews können also grundsätzlich nur *Momentaufnahmen der Performanz* liefern. Es liegt in der Natur der kindlichen Rechen*entwicklung*, dass die Lösungsstrategien bei einzelnen Aufgaben oft noch nicht stabil sind, dass also ein und dieselbe Aufgabe einmal mit dieser, dann wieder mit jener Strategie gelöst wird (vgl. Kapitel 2.4). Durch ein Interview mit einer Vielzahl von Aufgaben können wir zwar hoffen, einen Eindruck vom aktuellen "Strategieprofil" eines Kindes zu bekommen, wir dürfen aber nicht meinen, damit für jede einzelne der im Interview verwendeten Aufgaben zu wissen, mit welcher Strategie ein Kind diese Aufgabe jederzeit löst.
- Hinzu tritt ein Intervieweffekt, der aber in ähnlicher Weise immer dann auftritt, wenn ein Kind mehr als nur eine isolierte Aufgabe löst: Die Lösungsstrategie bei nachfolgenden Aufgaben kann durch die zuvor gelösten Aufgaben beeinflusst werden, auch dann, wenn – wie in den vorliegenden Interviews (vgl. Kap. 6.1.5.2) – bei der Abfolge der Aufgaben noch so viel Bedacht darauf genommen wurde, eine solche Beeinflussung zumindest nicht zu befördern. Bei 7+2 an 7+3 zu denken, war dem Mädchen durch den Interviewleitfaden zumindest nicht aufgedrängt worden. Dennoch erinnerte es sich bei 7+3 daran, einige Aufgaben und Minuten zuvor 7+2 gelöst zu haben, und verwendete dies als Ableitungsbasis für 7+3. Ähnliche Fälle gab es in den Interviews mehrfach. Wenn also die Interviews ergaben, dass Mitte des ersten Schuljahres eine bestimmte Aufgabe so und so oft aus einer anderen Aufgabe abgeleitet wurde, dann hat dabei auch die Reihenfolge der Aufgaben im Laufe des Interviews eine Rolle gespielt (eine andere Reihenfolge hätte das Ableiten anders, aber gleichfalls beeinflusst).

8.3.3.2 Additions-Strategien auf Basis von Kompensation

Auch Mitte des ersten Schuljahres haben die Kinder nur wenige Additionen nach dem Prinzip der gegensinnigen Veränderung abgeleitet. Das scheint ein weiteres Mal die konzeptuelle

Analyse zu bestätigen, wonach diese Form des Ableitens anspruchsvoller ist als das Ableiten von Additionen auf Grundlage von Kovarianz (vgl. Kap. 8.2.3.4). Von den insgesamt sechs Fällen betreffen vier Fälle Additionen mit der Summe 10:

– Dreimal wurde 4+6 aus 3+7 abgeleitet (wobei zu bedenken ist, dass im Interview zunächst 3+7, dann zwei andere Additionen, dann 4+6 zu lösen war).
– Einmal wurde umgekehrt 4+6 aus 3+7 abgeleitet.
– Ein Junge leitete 2+7 aus 3+6 ab (3+6 selbst wurde im zweiten Interview nicht gefragt).
– Matthias leitete 6+7 aus 5+8 ab. Dieses hatte er unmittelbar vor 6+7 gelöst, und zwar durch nicht-zählenden Gebrauch seiner Finger. Für 6+7 benötigte er nur drei Sekunden merklich konzentrierten Nachdenkens, seine richtige Lösung *"Auch dreizehn!"* erläuterte er wie folgt: *"Weil wenn das sechs sind und sieben sind, ist es die gleiche* [Rechnung], *nur mit sechs und sieben, wie vorher die – fünf plus acht"*. Auf die Frage des erstaunten Interviewers, woher er wisse, dass es "die gleiche" sei, antwortete er: *"Weil das sind sechs, und sieben dazu, sind dann auch dreizehn. Mir ist dann eingefallen, das eins vom dem* [zeigt dabei auf die 6 des Aufgabenkärtchens) *dann dorthin* [zeigt auf die 7] *gehört."*

8.3.3.3 Teilschrittverfahren

Das Teilschrittverfahren für Additionen mit Zehnerübergang wurde beim zweiten Interview insgesamt sechs Mal angewandt. Wie ausgeführt, waren Aufgaben mit Zehnerübergang zu diesem Zeitpunkt nur in einer Klasse bereits im Unterricht thematisiert worden. Als Strategie für den Zehnerübergang war in dieser einen Klasse nach Auskunft der Lehrkraft zu diesem Zeitpunkt das Teilschrittverfahren unter Verwendung eines strukturierten Materials (Zehnerfeld mit Wendeplättchen) erarbeitet oder zumindest angebahnt worden.

Tatsächlich löste ein Junge dieser Klasse die Aufgabe 5+8 mit dem Teilschrittverfahren, allerdings ohne Material. Er erläuterte sein Vorgehen wie folgt: *"Das* [tippt dabei auf die 8 des Aufgabenkärtchens] *sind um zwei weniger als zehn. Und da* [tippt auf die 5] *sind drei und fünf, ah, drei und zwei. Da hab ich mal zwei dazugegeben, sind's zehn gewesen, und dann habe ich noch drei übrig, sind's dreizehn gewesen."* Hier wurden also mit bemerkenswerter Souveränität einerseits das Kommutativgesetz und andererseits das Teilschrittverfahren in all seiner Komplexität (vgl. Kap. 2.10.9) angewandt. Derselbe Junge hat beim zweiten Interview freilich sämtliche Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Faktenabruf bzw. Ableitung gelöst und 6+7 aus dem bereits automatisierten 6+6 abgeleitet. Vermutlich hätte er 5+8 auch schon vor Behandlung des Teilschrittverfahrens im Unterricht in dieser Form berechnet.

Von den anderen sieben aus dieser Klasse interviewten Kindern wurde das Teilschrittverfahren beim zweiten Interview bei keiner der drei Aufgaben mit Zehnerübergang angewandt. Zwei dieser Kinder hatten 6+6 bereits automatisiert, eines davon leitete daraus 6+7 ab ("Verdoppeln plus eins"). Von diesen insgesamt drei Fällen eines nicht-zählenden Zehnerübergangs abgesehen, wurden die Aufgaben mit Zehnerübergang von diesen sieben Kindern (wie von den meisten Kindern der anderen Klassen) beim zweiten Interview entweder mit einer Zählstrategie oder gar nicht bearbeitet (vgl. Kap. 8.3.2.1).

Aus jenen Klassen, in denen der Zehnerübergang im Unterricht nach Auskunft ihrer Lehrkraft noch nicht behandelt worden war, zeigten vier Kinder beim zweiten Interview das Teilschrittverfahren; ein Mädchen tat dies bei zwei Aufgaben (5+8 und 6+7; 6+6 leitete es aus 5+5 mit dem Gedanken "Verdoppeln plus zwei" ab). Die nachträgliche Erklärung, die dieses Mädchen für 5+8 lieferte, dokumentiert zum einen die hohe Komplexität des Verfahrens, zum anderen lässt sie vermuten, dass dem Kind diese Strategie (wenn nicht doch schon im Unterricht, dann wohl zuhause) an strukturiertem Material bereits nahe gebracht worden war. Das Mädchen antwortete auf die Frage, wie sie das (richtige) Ergebnis herausgefunden habe, wie folgt: "*Dass ich was weg tu. Eigentlich gehört's dazu. Hab ich mir gedacht, weg ist fast das Gleiche wie dazu. Dann hab ich's gewusst."* Die Interviewerin fragte nach: "Hast du mit fünf angefangen oder mit acht?" Darauf das Mädchen: "*Vom Achter angefangen. Von den Eierschachteln eben wieder fünf dazugeben. Da hab ich's drauf getan. Nur drei haben, sind nicht reingepasst. Weil dreizehn ist wie drei."*

Die Unterstützung der Mutter beim Erlernen des Teilschrittverfahrens ist in einem weiteren Fall durch die Erläuterung des Kindes dokumentiert: Simone erklärte ihr Vorgehen bei 5+8 zunächst wie folgt: *"Da hab ich einmal nur fünf gehabt, ist zehn, dann hab ich drei gehabt, ist dreizehn."* Auf die Frage des Interviewers, ob ihr jemand gezeigt habe, dass man so rechnen könne, oder ob sie selbst draufgekommen sei, antwortete das Mädchen: *"Selber draufgekommen. Nur mit der Mama. Die* [Rechnung] *hab ich auch schon einmal daheim gehabt."*

Nur eine der sechs Anwendungen des Teilschrittverfahrens betraf die Aufgabe 6+7. Dieselbe Aufgabe war aber, wie dargestellt, 16-mal mit der Strategie "Verdoppeln plus eins" aus 6+6 und einmal durch "Verdoppeln minus eins" aus 7+7 abgeleitet worden. Zumindest für 6+7 war also die Strategie "Nachbaraufgabe" bei weitem "more salient" als die Strategie "Teilschrittverfahren" – obwohl auch "Nachbaraufgaben" im Unterricht so gut wie gar nicht (und wenn, dann nicht als Strategie für den Zehnerübergang) thematisiert worden waren (vgl. Kap. 7.2.4). Nun kann zwar nicht ausgeschlossen werden, dass zumindest manche der Kinder, die 6+7 aus 6+6 ableiteten, dazu in der häuslichen Förderung angeregt worden waren. Es scheint aber plausibel, dass es sich in vielen Fällen hier wohl tatsächlich um (weitgehend) selbstständig gemachte Strategieentdeckungen der Kinder handelt. Beim Zehnerübergang weitgehend auf sich alleine gestellt, schien den Kindern also Mitte des ersten Schuljahres (zumindest für 6+7 und auf der Grundlage, dass viele 6+6 bereits auswendig wussten) der Zehnerübergang durch "Verdoppeln plus eins" bei weitem näherzuliegen als das Teilschrittverfahren.

8.3.3.4 Ableitungen von Subtraktionen nach dem Komplementaritätsprinzip ("think addition") bzw. nach dem "Konzept des Unterschiedes"

Wie bereits ausgeführt, ist es im Einzelfall schwierig und oft genug unmöglich, zu unterscheiden, ob die Ableitung einer Subtraktion nach dem Komplementaritätsprinzip (aus der inversen Addition), im Wissen um ein Teile-Ganzes-Verhältnis oder nach dem "Konzept des Unterschieds" erfolgt ist (vgl. Kap. 8.2.2.5). In diesem Abschnitt werden jedenfalls *alle* Ableitungen von Subtraktionen besprochen, bei deren Erläuterung Kinder auf die inverse Addition *oder* den zugrunde liegenden Teile-Ganzes-Zusammenhang *oder* den Unterschied von Minuend und Subtrahend Bezug nahmen. *Alle* diese eng verwandten Strategievarianten werden im Folgenden der Lesbarkeit halber unter dem englischen Fachbegriff "think addition" zusammengefasst.

"Think addition" war in den Interviews Mitte des ersten Schuljahres die bei weitem häufigste Ableitungsstrategie. Am öftesten (20-mal) wurde sie bei der Aufgabe 8–4 angewandt, am seltensten (5-mal) bei der Aufgabe 10–5. Das scheint zunächst der These von BAROODY (BAROODY u.a. 1983, BAROODY 1999, vgl. Kap. 2.8.2) zu widersprechen, dass "think addition" umso wahrscheinlicher ist, je besser die zu Grunde liegende Addition bereits automatisiert ist. Denn Mitte des Schuljahres wurde 5+5 von 91,4 Prozent der Kinder durch Faktenabruf gelöst, 4+4 aber nur von 80,6 Prozent der Kinder.

Dass beim zweiten Interview dennoch 8–4 (und nicht 10–5) am häufigsten durch "think addition" gelöst wurde, lässt sich – im Einklang mit BAROODYs oben referierter These – im Sinne einer daran anschließenden, die Daten der vorliegenden Untersuchung berücksichtigenden Forschungshypothese wie folgt deuten:

– Vermutlich haben tatsächlich viele Kinder die Strategie "think addition" an 10–5 früher als an 8–4 entwickelt – allerdings bereits *vor* dem zweiten Interview. Gerade das wiederholte Ableiten mag dazu beigetragen haben, dass sie dann beim zweiten Interview die Aufgabe 10–5 nicht mehr ableiten *mussten*, weil sie diese eben schon automatisiert hatten: Tatsächlich wurde ja 10–5 beim zweiten Interview von 66,2 Prozent der Kinder durch Faktenabruf gelöst, 8–4 nur von 50,4 Prozent.
– Die größere Anzahl von Ableitungen bei 8–4 wäre also zu deuten als Ausdruck davon, dass jene Kinder, denen die Strategie "think addition" überhaupt zugänglich war, häufiger 8–4 als 10–5 noch nicht automatisiert hatten, also auch häufiger bei 8–4 als bei 10–5 eine Ableitung überhaupt noch nötig hatten. Dass sie aber 8–4 *noch nicht* und 10–5 in vielen Fällen *sehr wohl schon* automatisiert hatten, könnte verstanden werden als Folge davon, dass sie 4+4 häufig später als 5+5 automatisiert hatten.
– Die im Vergleich zu anderen Subtraktionen hohe Automatisierungsrate von 8–4 (50,4 Prozent gegenüber etwa 28,8 Prozent bei 7–5 oder 25,9 Prozent bei 8–5) ließe sich in dersel-

ben Weise deuten: 4+4 wurde beim zweiten Interview deutlich häufiger (von 80,6 Prozent der Kinder) durch Faktenabruf gelöst als 2+5 (48,2 Prozent) und 3+5 (34,5 Prozent). *Aus eben diesem Grund* war vermutlich *schon vor dem zweiten Interview* 4+4 für mehr Kinder als Ableitungsbasis für 8–4 in Frage gekommen als 2+5 für 7–5 und 3+5 für 8–5. Und vermutlich *ebendeshalb* war 8–4 beim zweiten Interview für mehr Kinder bereits Bestandteil ihres Faktenwissens: Es war gewissermaßen durch "Elaboration" mittels wiederholter Ableitung im Langzeitgedächtnis befestigt worden (vgl. Kap. 9.3).

Die Überprüfung dieser Forschungshypothese könnte durch eine "mikrogenetische Studie" ("microgenetic approach", vgl. SIEGLER & JENKINS 1989, S. 8-11) versucht werden, bei der dieselben Kinder in zeitlich wesentlich kürzeren Abständen, als es in der vorliegenden Studie möglich war, immer wieder zu denselben Aufgaben interviewt werden (vgl. dazu Kap. 8.5.4.2).

Die verbalen Protokolle zu den mittels "think addition" gelösten Rechnungen lassen unterschiedliche Niveaus von Einsicht in die Ableitungsbeziehung vermuten.

– Da gab es einerseits Kinder, die den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Umkehraufgabe auf Basis eines Teile-Ganzes-Konzepts von Zahlen bemerkenswert klar in Worte fassten, wie etwa Anna, die zunächst 8–5 mit etwas Nachdenken (ohne Verwendung der Finger und ohne auch nur auf die Hände zu schauen) richtig rechnete und dies anschließend wie folgt erläuterte: *"Ich rechne auch manchmal verkehrt. Weil, schau, weil fünf, drei, ist acht* [zeigt es mit Händen]. *Und wenn ich jetzt aber drei weg gib* [lässt die Hand mit den drei Fingern sinken]*, ist wieder fünf übrig."*
– Andere Kinder bringen, ohne auf die Teile-Ganzes-Beziehung in vergleichbarer Weise Bezug zu nehmen, zum Ausdruck, dass sie eine "Plusrechnung umdrehen", wie etwa Max bei der Aufgabe 7–5: *"Das* [Ergebnis] *sehe ich einfach an den Plusrechnungen. Die dreh ich einfach um, und dann kommt zwei raus."* Der Junge spricht hier im Plural; tatsächlich wurden bei ihm aber alle anderen Minusaufgaben beim zweiten Interview als "Faktenabruf" protokolliert. Dabei mag es sich aber eben auch um hochgradig automatisiertes Ableiten gehandelt haben; die praktische Ununterscheidbarkeit war ja bereits mehrfach Thema.
– Häufig folgte auf die Frage "Wie hast du das so schnell herausgefunden!" nicht mehr als das Nennen der inversen Addition – als sei es selbstverständlich und keiner weiteren Erläuterung wert, dass *deshalb* das genannte Ergebnis der Subtraktion stimmen müsse. Exemplarisch für diesen Typ der Erläuterung ist etwa jene von Manuel für seine richtige Lösung der Aufgabe 8–4: "*Weil das das Gleiche ist wie plus. Vier plus vier ist acht."* Dass die Subtraktion die *Umkehrung* der Addition ist, wurde also zwar rechnerisch richtig umgesetzt. Was hier *sprachlich ausgedrückt* wird, ist aber gerade *Identität, Gleichheit,* etwa auch in Formulierungen wie "*Ich habe einfach plus gerechnet"* (Elena).

Dass ein Kind, wie oben dargestellt, eine Subtraktion zunächst ohne Finger rechnete, dann aber die dabei verwendete Ableitungsstrategie mit den (nicht-zählend verwendeten) Fingern *erläuterte*, trat gerade bei den Aufgaben 10–5, 8–5 und 7–5 wiederholt auf. Hier wurde also "nicht-zählender Fingergebrauch" zur *Demonstration* einer *in Gedanken vollzogenen Ableitungsstrategie* verwendet.

Aber auch als *tatsächlich beim Rechnen angewandte* Lösungsstrategie war "nicht-zählender Fingergebrauch" gerade bei den Aufgaben 10–5, 8–5 und 7–5 beim zweiten Interview häufig (mit Anteilen von 20,9 Prozent, 12,9 Prozent und 15,1 Prozent). Zu vermuten ist, dass zumindest für manche jener Kinder, die beim zweiten Interview diese Aufgaben aus der inversen Addition abgeleitet haben, der nicht-zählende Gebrauch der Finger eine *bereits überwundene Vorstufe* zu dieser Ableitungsstrategie dargestellt hat. Die dann nur noch in Gedanken vollzogene Finger-Handlung zur Demonstration auch tatsächlich mit den Fingern vorzuzeigen, läge nahe. Und dass sie beim Lösen der Aufgabe "an die Finger/Hände gedacht" haben, wird von einigen Kindern auch verbalisiert, etwa von Valerie bei der Aufgabe 7–5, die das Mädchen nach kurzem Nachdenken richtig löste und wie folgt erläuterte: *"Habe ich mir so gedacht wie beim Achter* [gemeint: wie zuvor 8–5]. *Die Hand weggedacht."* Eine Überprüfung auch dieser Vermutung könnte nur im Zuge einer mikrogenetischen Studie versucht werden (vgl. oben). Im Rahmen der vorliegenden Studie wird der Vergleich der von denselben Kindern in den drei Interviews bei denselben Aufgaben angewandten Strategien zumindest noch weitere Hinweise liefern (vgl. Kap. 8.5.3.6).

8.3.3.5 Ableitungen von Subtraktionen aus anderen Subtraktionen

Die Ableitung einer Subtraktion aus einer Nachbar-Subtraktion nach dem Prinzip der Kovarianz wurde beim zweiten Interview nur ein einziges Mal protokolliert: Bei 7–5 erläuterte ein Mädchen, es habe *"sechs minus fünf gerechnet."* Auf die Frage, wie ihr das geholfen habe, erklärte sie: *"Na, dass das einfach nur eine Zahl mehr ist."*

Zwei Kinder lösten Subtraktionen durch Rückgriff auf einen kompensatorischen Zusammenhang ("sharing"): Johannes erläuterte seine Überlegungen zu 10–9 wie folgt: *"Zehn minus zehn ist null. Und dann muss es eins weniger sein, dass es eins ist."* Und Benjamin erklärte seinen Lösungsweg zu 8–5 so: *"Weil ich habe gewusst, vier und vier ist acht. Und wenn ich dann eins wegnehme, kommt ja drei raus."*

Zu Schulbeginn war 8–4 noch etwa gleich häufig (acht Mal) aus 8–5 abgeleitet worden wie aus 4+4 (sieben Fälle); und das "scoring in context" lieferte weitere Hinweise dafür, dass "sharing" für SchulanfängerInnen zumindest nicht weniger "salient" war als "think addition" (vgl. Kap. 8.2.3.7). Mitte des Schuljahres war aber die Ableitung einer Subtraktion aus einer anderen Subtraktion mit drei Fällen bei weitem seltener als "think addition" mit 80 Fällen. Und dabei war beispielsweise 8–4 mit 50,4 % von deutlich mehr Kindern bereits automatisiert als 3+5 (34,5 Prozent). 8–4 wäre also mehr Kindern als Ableitungsbasis für 8–5 (nach dem Prinzip der Kompensation) verfügbar gewesen als 3+5 (nach dem Prinzip der Umkehraufgabe). Wenn nun dennoch "think addition" bei weitem häufiger angewandt wurde als "sharing", dann scheint "sharing" für Kinder nach fünf Schulmonaten (anders als zu Schulbeginn) *als Ableitungsstrategie* (selbst bei bereits automatisierter Ableitungsbasis) weniger "salient" zu sein als "think addition".

Das mag auch daran liegen, dass die Strategie "Umkehraufgabe" in den im Unterricht verwendeten Schulbüchern (auf welche Weise auch immer) berücksichtigt wurde, die Strategie "sharing" dagegen nicht (vgl. Kap. 7.1). Es mag aber auch sein, dass das "scoring in context" zu Schulbeginn wegen der geringen Anzahl von Kindern, die zu diesem Zeitpunkt überhaupt ableiteten, die relative Schwierigkeit von Ableitungsstrategien verzerrt wiedergibt. Denn jene wenigen Kinder, die bereits zu Schulbeginn ableiteten, dokumentierten damit wohl ein bei weitem überdurchschnittliches Maß an Einsicht in operative Zusammenhänge. Möglicherweise liegt also den konzeptuell weitest entwickelten ErstklässlerInnen zwar "sharing" ebenso nahe wie "think addition", ist aber für die Mehrzahl der Kinder (wie es beim zweiten Interview den Anschein hatte) dennoch weniger "salient" als das Umkehrprinzip.

8.3.4 "Scoring in context"

8.3.4.1 Vergleich der Strategien derselben Kinder bei verschiedenen Subtraktionen

Der Vergleich der Lösungsstrategien bei den sechs Subtraktionen, die beim zweiten Interview für "think addition" in Frage kamen (10–9, 9–8, 10–5, 8–4, 8–5, 7–5), kann Hinweise dafür liefern, ob Kinder dazu tendieren, Aufgaben mit Strukturgemeinsamkeiten (Grobstruktur: Subtraktionen; Feinstrukturen: Differenz zweier Nachbarzahlen bzw. Halbierungsaufgaben bzw. Subtrahend = 5 = Anzahl der Finger einer Hand) mit jeweils derselben Strategie zu lösen, insbesondere: Ob ein Ableitungszusammenhang, der von einem Kind an einer Aufgabe erkannt und genutzt wird, in der Regel auch bei einer anderen, ähnlich strukturierten (und insofern dieselbe Ableitungsstrategie nahelegenden) Aufgabe zur Anwendung gelangt.
Im Fall von "think addition" ergibt sich diesbezüglich beim zweiten Interview für die sechs Subtraktionen 10–9, 9–8, 10–5, 8–4, 8–5 und 7–5 die folgende Bilanz: Bei der Aufgabe 8–4 wurde die Strategie "think addition" von insgesamt 20 Kindern angewandt. Tabelle 40 zeigt, wie diese 20 Kinder die anderen Subtraktionen lösten.

Tabelle 40: Häufigkeit anderer Subtraktions-Strategien bei jenen 20 Kindern, die beim zweiten Interview 8–4 durch "think addition" lösten

Strategien bei den anderen Subtraktionen (wobei 8–4 durch "think addition" gelöst wurde)	Anzahl Kinder
Alle weiteren Subtraktionen durch Faktenabruf	1
Alle weiteren Subtraktionen durch "think addition"	1
Mind. eine weitere Subtraktion durch "think addition", sonst Faktenabruf	5
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch "Zahlenraten"	2
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch Zählstrategien	4
Keine weitere Subtraktionen durch "think addition", mindestens eine zählend	7

13 der 20 Kinder wandten also "think addition" bei zumindest noch einer weiteren Subtraktion an. Sechs davon kombinierten dies aber mit Zählstrategien und/oder dem Nennen "irgendeiner Zahl" bei einzelnen dieser Subtraktionen. Sieben weitere Kinder zeigten "think addition" *ausschließlich* bei 8–4 und wandten zumindest bei einer weiteren Subtraktion auch eine Zählstrategie an; eines dieser Kinder löste *alle* weiteren Subtraktionen zählend.

Auch unter den 12 Kindern, die 10–9 durch "think addition" lösten, finden sich insgesamt sieben, die bei anderen Subtraktionen auch zu Zählstrategien griffen, wie Tabelle 41 deutlich macht.

Tabelle 41: Häufigkeit anderer Subtraktions-Strategien bei jenen 12 Kindern, die beim zweiten Interview 10–9 durch "think addition" lösten

Strategien bei den anderen Subtraktionen (wobei 10–9 durch "think addition" gelöst wurde)	Anzahl Kinder
Alle weiteren Subtraktionen durch Faktenabruf	1
Alle weiteren Subtraktionen durch "think addition"	1
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", sonst Faktenabruf	3
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch Zählstrategien	5
Keine weitere Subtraktionen durch "think addition", mindestens eine zählend	2

Dieser Anteil von Kindern, die neben "think addition" auch Zählstrategien für Subtraktionen nutzten, ist bei den anderen Subtraktionen (9–8, 8–5, 7–5) deutlich kleiner, das heißt: Sofern ein Kind bei zumindest einer dieser Subtraktionen "think addition" anwandte, gebrauchte es in der Regel für die anderen Subtraktionen keine Zählstrategie, sondern wusste diese entweder auswendig oder leitete auch diese ab, wie die Tabellen 42 bis 44 deutlich machen.

Tabelle 42: Häufigkeit anderer Subtraktions-Strategien bei jenen 12 Kindern, die beim zweiten Interview 9–8 durch "think addition" lösten

Strategien bei den anderen Subtraktionen (wobei 9–8 durch "think addition" gelöst wurde)	Anzahl Kinder
Alle weiteren Subtraktionen durch "think addition"	1
Mindestens eine weitere Subtraktion durch "think addition", sonst Faktenabruf	7
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch "Zahlenraten"	2
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch Zählstrategien	2

Tabelle 43: Häufigkeit anderer Subtraktions-Strategien bei jenen 17 Kindern, die beim zweiten Interview 8–5 durch "think addition" lösten

Strategien bei den anderen Subtraktionen (wobei 8–5 durch "think addition" gelöst wurde)	Anzahl Kinder
Alle weiteren Subtraktionen durch "think addition"	1
Mindestens eine weitere Subtraktion durch "think addition", sonst Faktenabruf	12
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch "Zahlenraten"	2
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch Zählstrategien	1
Keine weitere Subtraktionen durch "think addition", mindestens eine zählend	1

Tabelle 44: Häufigkeit anderer Subtraktions-Strategien bei jenen 14 Kindern, die beim zweiten Interview 7–5 durch "think addition" lösten

Strategien bei den anderen Subtraktionen (wobei 7–5 durch "think addition" gelöst wurde)	Anzahl Kinder
Alle weiteren Subtraktionen durch Faktenabruf	1
Alle weiteren Subtraktionen durch "think addition"	1
Mindestens eine weitere Subtraktion durch "think addition", sonst Faktenabruf	9
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch "Zahlenraten"	2
Mind. eine weitere Sub. durch "think addition", daneben auch Zählstrategien	1

Die Tabellen 40 bis 44 zeigen in ihrer Gesamtheit, dass "think addition" von der Mehrzahl der Kinder, die diese Strategie überhaupt verwendeten, bei mehr als nur einer Subtraktion angewandt wurde. Zumindest diese Kinder scheinen diesen Ableitungszusammenhang also als etwas *Prinzipielles, allgemein Gültiges* begriffen zu haben. Das wird auch in vielen verbalen Protokollen deutlich, wo Kinder bei der Erläuterung ihres Vorgehens bei einer Aufgabe auf andere, im Verlauf des Interviews bereits gestellte Aufgaben verwiesen, die sie "genauso" gelöst hätten. So erklärte etwa Valerie bei 9–8: *"Das ist genauso wie zehn minus neun. Das ist genauso."* Christian, gleichfalls bei 9–8: *"Weil das das Gleiche ist wie zehn. Wie zehn minus neun. Nur andere Zahlen."* Jan brachte sogar eine im Interview nicht gestellte Subtraktion ins Spiel und erläuterte seine Überlegung für 9–8 wie folgt: "*Das ist ganz einfach. Weil wir haben einmal im Rechenheft vier weniger drei gehabt. Und da ist eins übrig geblieben. Wenn du vier hast, du gibst aber nur drei weg, bleibt eins übrig."*

Auf der anderen Seite lösten aber auch viele Kinder, die "think addition" bei zumindest einer Subtraktion zeigten, zumindest einzelne andere Subtraktionen auch zählend. Dieses Nebeneinander von Zähl- und Ableitungsstrategien für Subtraktionen kann in jenen Fällen wenig überraschen, wo ein Kind die zu einer Subtraktion inverse Addition noch nicht automatisiert hatte. Ihm fehlt dann ja die Ableitungsbasis, ohne die eine prinzipiell durchschaute Strategie gar nicht wirksam werden kann. Und tatsächlich trat zählendes Subtrahieren bei Kindern, die zumindest einmal "think addition" zeigten, gerade bei den Aufgaben 8–5 und 7–5 am häufigsten auf – bei jenen Subtraktionen also, deren inverse Additionen 3+5 und 2+5 zu diesem Zeitpunkt von weit weniger Kindern automatisiert waren als etwa die Additionen 4+4 und 5+5.

Im Fall der Subtraktionen 10–9 und 9–8 würde man aber vermuten, dass die inversen Additionen 9+1 und 8+1 (die leider selbst nicht überprüft wurden) zum Zeitpunkt des zweiten Interviews annähernd gleich oft (und wohl nicht wesentlich seltener als etwa 4+4) automatisiert waren. Zudem handelt es sich in beiden Fällen um die Subtraktion zweier Nachbarzahlen, also um Aufgaben mit derselben "Feinstruktur". Beides zusammen könnte vermuten lassen, dass ein Kind, dass 10–9 durch "think addition" löst, diese Strategie *immer auch* bei 9–8 zur Anwendung bringt (sofern es diese Aufgabe nicht bereits automatisiert hat), und umgekehrt.

Tatsächlich wandten aber drei der zwölf Kinder, die 10–9 durch "think addition" lösten, wenig später bei 9–8 eine Zählstrategie an (während umgekehrt kein einziges der zwölf Kinder, die 9–8 durch "think addition" lösten, zuvor bei 10–9 eine Zählstrategie gezeigt hatte). Weiters wandte keines der Kinder, die 10–9 oder 9–8 durch "think addition" lösten, bei 8–4 eine Zählstrategie an, während umgekehrt sechs der zwanzig Kinder, die 8–4 ableiteten, zumindest eine der beiden Subtraktionen 10–9 oder 9–8 zählend lösten.

"Think addition" war also zum Zeitpunkt des zweiten Interviews bei 10–9 offenbar im Sinne BAROODYs "more salient" als bei 9–8 und bei 8–4 wiederum "more salient" als bei 10–9 wie auch bei 9–8, d.h.: Manche Kinder wandten diese Ableitungsstrategie zunächst nur bei 8–4 an und lösten andere Subtraktionen selbst dann zählend, wenn sie deren inverse Additionen (wie für 8+1 und 9+1 vermutet werden kann) bereits automatisiert hatten. Andere wieder lösten zwar 10–9 durch "think addition", nicht aber 9–8.

Das mag zum einen daran liegen, dass diese Kinder "think addition" eben *nicht* (möglicherweise: *noch* nicht) als *Prinzip* verstanden hatten, also als arithmetische *Gesetzmäßigkeit*, die auf *jede beliebige* Subtraktion anwendbar ist. Das ist im Einklang mit BAROODYs Vermutung, dass Kinder das Komplementaritätsprinzip, nachdem sie es entdeckt haben, eine Zeit lang "more or less consciously" nur bei einzelnen Aufgaben gebrauchen und auf Übung angewiesen sind, um die Strategie zu verallgemeinern und sich zur Gewohnheit zu machen (BAROODY

1999, S. 168; vgl. Kap. 2.8.2). Dabei ist zu bedenken, dass die interviewten Kinder im Unterricht mehrheitlich (vorsichtig formuliert) keine günstigen Bedingungen dafür vorfanden, Ableitungsstrategien zu reflektieren und gezielt anzuwenden (vgl. Kap. 7).

BAROODY schlägt aber auch vor, "Grade der Automatisierung" zu unterscheiden; der Automatisierungsgrad einer Aufgabe müsse einen gewissen "Schwellenwert" überschritten haben, damit es zu Ableitungen von dieser Aufgabe kommen könne (a.a.O.). Das Auseinanderfallen der Lösungsstrategien für 8–4, 10–9 und 9–8 könnte in diesem Sinne gedeutet werden als Ausdruck davon, dass dieser Schwellenwert bei manchen Kindern zum Zeitpunkt des zweiten Interviews zwar bei 4+4=8, nicht aber bei 9+1=10 und 8+1=9, bzw. zwar bei 9+1=10, nicht aber bei 8+1=9 erreicht worden war. Ein Unterschied in der Automatisierung von 4+4, 9+1 und 8+1 lässt sich aber mit den hier erhobenen Daten nicht erhärten, da ja die beiden letzteren Additionen nicht gefragt wurden.

Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist auch, dass 10–9 beim zweiten Interview deutlich häufiger (von 49,6 Prozent der Kinder) durch Faktenabruf gelöst wurde als 9–8 (36,7 Prozent). In Fortführung der Hypothese von BAROODY, dass gerade das wiederholte Ableiten einer Aufgabe deren Automatisierung befördere (vgl. Kap. 2.8 und Kap. 5 bzw. Kap.9), ließe sich der gegenüber 9–8 höhere Automatisierungsgrad von 10–9 also deuten als Ausdruck davon, dass 10–9 schon in der Zeit *vor* dem zweiten Interview von mehr Kindern abgeleitet wurde als 9–8. Das wiederum könnte als ein weiterer Hinweis interpretiert werden dafür, dass "think addition" bei 10–9 für Kinder "more salient" ist als bei 9–8. Auch diese Hypothese könnte wohl nur durch mikrogenetische Studien mit einer deutlich höheren Anzahl und deutlich höheren zeitlichen Dichte von Interviews überprüft werden.

8.3.4.2 Vergleich der Ableitungsstrategien derselben Kinder im Bereich aller zu t2 gestellten Aufgaben

Betrachtet man die Strategiewahl der Kinder über *alle* beim zweiten Interview gefragten Aufgaben hinweg, so ergibt sich das folgende Bild:

- Insgesamt 57 Kinder (41,0 Prozent) zeigten Mitte des ersten Schuljahres bei wenigstens einer der gefragten Aufgaben eine Ableitungsstrategie – ein deutlich höherer Anteil als zu Schulbeginn (28,1 Prozent mit Berücksichtigung der beim zweiten Interview nicht mehr erfassten Strategie "Vertauschen", 18,7 Prozent ohne diese Strategie).
- 22 der 57 Kinder, die beim zweiten Interview ableiteten, taten dies nur bei genau einer Aufgabe (dann am häufigsten 8–4).
- 16 wandten Ableitungsstrategien bei genau zwei Aufgaben an,
- 14 Kinder bei drei oder vier Aufgaben, vier Kinder bei fünf oder sechs, ein Junge gar bei zwölf Aufgaben.

Von den 35 Kindern, die mehr als eine Aufgabe ableiteten, zeigten nur 17 auch tatsächlich *verschiedene* Ableitungsstrategien. Das heißt umgekehrt: 18 dieser Kinder wandten, sofern sie eine Aufgabe ableiteten, dabei immer dieselbe Strategie an. Das war 15-mal "think addition", dreimal das Ableiten einer Addition aus der Nachbaraddition auf Grundlage einer Kovarianz. 13 Kinder wandten sowohl "think addition" als auch Kovarianz an, sieben Kinder zeigten drei oder mehr verschiedene Ableitungsstrategien, bei fünf davon gehörte auch "think addition" dazu.

8.3.4.3 Mögliche Gründe für den höheren Anteil von Ableitungsstrategien im Bereich der Subtraktionen

Die Gesamtschau der von Kindern beim zweiten Interview genutzten Ableitungsstrategien macht deutlich, dass Ableitungsstrategien bei weitem häufiger für Subtraktionen verwendet wurden als für Additionen (vgl. Kap. 8.3.3). Das liegt *nicht* daran, dass die gefragten Additionen bereits häufiger automatisiert gewesen wären und daher bei den Additionen weniger Bedarf für Ableitungen bestanden hätte. Wie bereits ausgeführt, wurden im Bereich der nicht-trivialen Aufgaben beim zweiten Interview sogar deutlich mehr Subtraktionen als Additionen durch Faktenabruf gelöst (vgl. Kap. 8.3.1.2).

Eine denkbare Erklärung für den höheren Anteil von Ableitungsstrategien bei Subtraktionen könnte darin bestehen, dass Zählstrategien bei Additionen leichter durchzuführen sind als bei Subtraktionen. Denn die Zahlwortreihe ist vorwärts in der Regel deutlich besser automatisiert als rückwärts, beim rückwärtszählenden Subtrahieren ist zudem die Gegenläufigkeit zweier Zählreihen zu beachten (vgl. Kap. 8.3.1). Gerade diese größere Schwierigkeit des zählenden Lösens von Subtraktionen mag im Sinne einer "Herausforderung" dazu beitragen, dass Kinder bei Subtraktionen eher bereit sind, über alternative Lösungsstrategien nachzudenken. Dazu gehören einerseits nicht-zählende Fingerstrategien: Solche wurden beim zweiten Interview bei 2+5 von 7,2 Prozent der Kinder, bei 7–5 aber von 15,1 Prozent angewandt, bei 3+5 von 6,5 Prozent, bei 8–5 aber von 12,9 Prozent. Dazu gehören aber auch Ableitungsstrategien. Deren früher Gebrauch (in der Zeit vor der zweiten Interviewreihe) mag in weiterer Folge auch dazu beigetragen haben, dass die nicht-trivialen Subtraktionen beim zweiten Interview weit häufiger bereits durch Faktenabruf gelöst wurden als die nicht-trivialen Additionen (vgl. Kap. 9.3).

8.3.5 Bei Zusatzaufgaben Mitte des ersten Schuljahres gezeigte Einsicht in operative Zusammenhänge

Wie in Kapitel 6.1.5.2 dargestellt, wurden die Kinder bei ihrem zweiten Interview mit einer Reihe von Zusatzaufgaben konfrontiert, die (über ihre Nutzung von Ableitungsstrategien beim Lösen von Grundaufgaben hinaus und möglicherweise in Kontrast zu dieser) Hinweise dazu liefern sollten, ob die Kinder bei gezielter Nachfrage Einsicht in operative Zusammenhänge zeigten. Die vier Zusatzaufgaben waren jeweils zweigeteilt: Im ersten Teil sollte das Kind ein begonnenes "schönes Päckchen" zu Ende führen. Im zweiten Teil wurde es gebeten, das Päckchen zu erläutern und zu erklären, ob ein Kind, welches eine im Päckchen nachfolgende Aufgabe noch nicht auswendig wisse, diese mit Hilfe der im Päckchen vorangehenden Aufgabe leichter lösen könne. Die dabei gemachten Erläuterungen wurden daraufhin beurteilt, ob sie Hinweise für ein Verständnis des dem Päckchen zu Grunde liegenden operativen Zusammenhangs enthielten.

Letzteres war freilich im Einzelfall schwer zu entscheiden. Relativ eindeutig war die Kodierung immer dann, wenn ein Kind den vorliegenden Zusammenhang selbstständig klar verbalisierte. Als Beispiel dafür sei Peters Erläuterung zum Päckchen 10–5 / 10–6 / 10–7 usw. angeführt:

> Interviewerin: *"Hilft 10–5 für 10–6?"*
> Peter*: "Ja."*
> Interviewerin*: "Erklär mir das ein bisschen!"*
> Peter: *"Weil das da [zeigt auf die 6 in 10–6] – zehn minus fünf ist ja fünf, aber das da [zeigt wieder auf die 6] ist um eins mehr, also kommt da um eins weniger raus."*

In solchen Fällen, wo ein Kind also die *quantitativ-gesetzmäßige Veränderung* innerhalb des Päckchens *verständig kommentierte*, wurde die Zusatzaufgabe mit "Operative Einsicht deutlich, klar verbalisiert" kodiert.

Häufig ging aus den Erläuterungen des Kindes (trotz aller Versuche des klärenden Nachfragens) aber nicht deutlich hervor, ob das Kind tatsächlich eine *operative Gesetzmäßigkeit durchschaut* oder nicht doch eher nur ein äußerlich wahrgenommenes Muster "mechanisch reproduziert" hat (vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, S. 110 und Kap. 4.6). Als Beispiel dafür mag die Erläuterung von Doris zum Päckchen 3+3/3+4/3+5/3+6 dienen:

> Interviewer*: "Hilft das beim Rechnen, wenn die Aufgaben so untereinander stehen?"*
> Doris*: "Ja."*
> Interviewer*: "Warum ist es denn dann leichter?"*
> Doris: *"Weil – sechs, sieben, acht, neun!"*

Mehr war dazu aus diesem Kind (und auch sonst oft in solchen Fällen) nicht herauszuholen. Nun sind Defizite in der *Verbalisierungsfähigkeit* aber nicht ohne weiteres gleichzusetzen mit Defiziten im *Verständnis*, und mitunter mag das Defizit auch mehr beim Interviewer und seiner Fragetechnik gelegen haben als beim Kind. Dabei ist zu bedenken, dass viele Kinder Mitte des ersten Schuljahres den Eindruck erweckten, dass es für sie eine gänzlich neuartige Herausforderung darstellte, Rechnungen nicht einfach nur zu lösen, sondern über deren Zusammenhang Auskunft zu geben. Dass sie mit solchen Herausforderungen in ihrem Unterricht vermutlich nicht oder höchst selten konfrontiert wurden, war auch eines der Ergebnisse von Kapitel 7.

All das berücksichtigend, wurde bei der Kodierung der Zusatzaufgaben in solchen Folgen wie folgt vorgegangen: Sofern ein Kind, dessen Erläuterungen den operativen Zusammenhang nicht klar zum Ausdruck brachten, das schöne Päckchen zuvor nicht nur korrekt fortgesetzt, sondern beim Lösen der Aufgaben die Struktur des Päckchens offenbar zum Ableiten der Folgeaufgaben genutzt hatte, wurde die Zusatzaufgabe mit "Operative Einsicht erkennbar, undeutlich verbalisiert" kodiert. Wenn aber das Fehlen eines quantitativen Arguments in den Erläuterungen damit einherging, dass das Kind das Päckchen nicht korrekt fortsetzen konnte *oder* das Kind (auch wenn es das Päckchen korrekt fortgesetzt hatte) die einzelnen Aufgaben jeweils für sich zählend löste, so wurde mit "Operative Einsicht nicht erkennbar" kodiert.

Eine Schwierigkeit, die bei einigen wenigen Kindern auftrat, bestand darin, dass diese Kinder sämtliche Aufgaben eines Päckchens automatisiert hatten und deshalb *für sich* nicht ableiten mussten. Einige dieser Kinder ließen sich nun auf das Gedankenexperiment, ob die eine Aufgabe "eine Hilfe" für die nachfolgende sei, nicht ein. *Sie selbst* brauchten (etwa für die Lösung von 3+4) keine Hilfe. Ob nun 3+3 eine Hilfe für 3+4 sei, wenn man 3+4 *noch nicht* auswendig wisse – darüber schienen gerade manche der guten Rechner nicht nachdenken zu wollen. (Vielleicht gelang es aber auch nur nicht, ihnen klar zu machen, worüber sie nachdenken sollten.) Mitunter redeten Interviewer und Kind bei den Zusatzaufgaben also wohl aneinander vorbei; in solchen Fällen wurde in der Regel mit "Keine klare Zuordnung möglich" kodiert.

Tabelle 45 zeigt die nach den oben erläuterten Kriterien ermittelte Performanz der Kinder bei den Zusatzaufgaben Mitte des ersten Schuljahres im Überblick.

Tabelle 45: Performanz der 139 interviewten Kinder bei Zusatzaufgaben zu operativen Zusammenhängen Mitte des ersten Schuljahres

	3+3/3+4/ 3+5/?+?	10–5/10–6/ 10–7/?–?	4+5/3+6/ 2+7/?+?	3+5/8–5/ 3+6/?–?
Korrekte Fortsetzung	79,1 %	79,1 %	57,6 %	42,4 %
Operative Einsicht deutlich, klar verbalisiert	25,9 %	19,4 %	5,8 %	12,2 %
Einsicht erkennbar, undeutlich verbalisiert	12,9 %	13,7 %	5,8 %	28,8 %
Operative Einsicht nicht erkennbar	57,6 %	65,5 %	84,2 %	59,0 %
Keine klare Zuordnung	3,6 %	1,4 %	4,3 %	0 %

Wie bereits erwähnt, schien es für viele Kinder völlig ungewohnt, "schöne Päckchen" zu bearbeiten und zu kommentieren. Sie korrekt fortzusetzen, war bei den beiden ersten Päckchen für jeweils etwa vier Fünftel der Kinder dennoch kein Problem. Deutlich weniger Kindern gelang die Fortsetzung nach dem Prinzip der Kompensation, noch weniger konnten die zu 3+6 gehörende Umkehraufgabe nennen.

Weit schwieriger als die *Fortsetzung* eines schönen Päckchens erwies sich die *Verbalisierung* des zu Grunde liegenden operativen Zusammenhangs. Fasst man alle Erläuterungen zusammen, die in irgendeiner Weise zu erkennen geben, dass das Kind diesen Zusammenhang (wie klar auch immer) erkannt hat, dann sind dies bei dem nach dem Prinzip der Umkehraufgabe gebildeten Päckchen insgesamt 40,4 Prozent der Kinder, bei den nach dem Prinzip der Kovarianz gebildeten Additionspäckchen 38,8 Prozent der Kinder, beim Subtraktionspäckchen 33,1 Prozent und bei dem nach dem Prinzip der Kompensation ("gegensinnigen Veränderung") gebildeten Päckchen 11,6 Prozent der Kinder. Diese Reihenfolge der Häufigkeiten entspricht im Großen und Ganzen der Reihenfolge der Häufigkeiten, mit der die entsprechenden Ableitungsstrategien auch tatsächlich bei den Interviews Mitte des ersten Schuljahres beim Lösen von Rechenaufgaben verwendet wurden (vgl. Kap. 8.3.3).

Nun ist es aber nicht dasselbe, einen operativen Zusammenhang auf gezieltes Nachfragen hin erläutern zu können und ihn selbstständig als Ableitungsstrategie anzuwenden. Unter Verwendung eines in der Neuropsychologie üblichen Begriffes (vgl. LANDERL & KAUFMANN 2008, S. 18) lässt sich hier von einer "doppelten Dissoziation" zwischen einer *durch Verbalisierung bekundeten Einsicht* in einen Zusammenhang und dessen *Nutzung* als Ableitungsstrategie sprechen, das heißt: Beide Leistungen können jeweils auch ohne die andere auftreten.

Es mag also einerseits sein, dass ein Kind einen Zusammenhang ausreichend verstanden hat, um ihn selbstständig anwenden zu können, aber nicht in der Lage ist, diesen Zusammenhang auch klar und nachvollziehbar in Worte zu fassen (zumal dann, wenn es darin nicht geübt ist). Gerade kompensatorische Zusammenhänge bieten hier objektiv große Schwierigkeiten.

Es mag aber auch sein, dass ein Kind einen operativen Zusammenhang zwar erkennt, wenn es damit (etwa in einem "schönen Päckchen") konfrontiert wird, und dass es diesen Zusammenhang dann auch so weit durchschaut, dass es ihn verbalisieren kann. Und dennoch mag dasselbe Kind beim Rechnen nicht auf die Idee kommen, eine Aufgabe aus einer anderen Aufgabe mit Hilfe dieses operativen Zusammenhangs abzuleiten.

Dass diese "doppelte Dissoziation" nicht nur denkbar, sondern empirisch sogar recht häufig ist, zeigt der Vergleich der Performanzen der Kinder bei den Zusatzaufgaben Mitte des ersten Schuljahres mit ihren Performanzen bei den Rechenaufgaben wenige Minuten zuvor:

- So hatten zwar von den 36 Kindern, die in der Zusatzaufgabe den operativen Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 klar verbalisieren konnten, zuvor 16 Kinder (44,4 Prozent dieser Gruppe) mindestens eine Addition tatsächlich aus einer Nachbaraddition nach dem Prinzip der Kovarianz abgeleitet. Vier davon hatten aber gerade auch die Addition 3+4 *zählend* gerechnet, obwohl sie 3+3 auswendig wussten. Und 20 der Kinder, die den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 klar verbalisieren konnten (55,6 Prozent dieser Gruppe), hatten zuvor keine einzige Addition aus einer auswendig gewussten Nachbaraddition abgeleitet. Fünf davon wussten 3+4 auswendig, 15 aber lösten 3+4 zählend (auch diese 15 hatten 3+3 kurz zuvor durch Faktenabruf gelöst). Insgesamt war also 3+4 von 52,8 Prozent jener Kinder, die den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 im Rahmen der Zusatzaufgabe klar verbalisieren konnten, im Rahmen der Rechenaufgaben dennoch zählend gelöst worden.
- Noch häufiger (relativ zur Größe dieser Gruppe) war die Dissoziation "verbalisierte Einsicht, aber keine Nutzung" bei jenen 18 Kindern, die im Rahmen der Zusatzaufgabe den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 zwar offenbar erkannten, aber nicht *klar* verbalisieren konnten: Nur fünf dieser Kinder (27,8 Prozent dieser Gruppe) nutzten das Prinzip der Kovarianz auch zumindest einmal als Ableitungsstrategie, und zwölf dieser Kinder (66,7 Prozent dieser Gruppe) lösten 3+4 zählend, obwohl sie 3+3 auswendig wussten.
- Umgekehrt hatten von den 80 Kindern, bei denen in der Zusatzaufgabe keine Einsicht in den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 zu erkennen war, zuvor elf Kinder (13,7 Prozent dieser Gruppe) gerade diesen Zusammenhang beim Ableiten von wenigstens einer Addition verwendet. Diese Form der "Dissoziation" (Nutzung ja, Verbalisierung nein) trat damit aber doch deutlich seltener auf als die andere (Verbalisierung ja, Nutzung nein).

Betrachtet man "think addition", also die beim Rechnen Mitte des ersten Schuljahres am häufigsten verwendete Ableitungsstrategie, im Zusammenhang mit der Performanz der Kinder bei jener Zusatzaufgabe, die Umkehraufgaben gewidmet war, so ergibt sich das Folgende:

- Nur 17 Kinder konnten bei den Zusatzaufgaben den inversen Zusammenhang zwischen 3+6 und 9–6 deutlich verbalisieren. Zehn dieser Kinder hatten zuvor keine einzige Subtraktion durch "think addition" gelöst. Fünf der 17 Kinder lösten mindestens eine Subtraktion, deren inverse Addition sie auswendig wussten, durch eine Zählstrategie.
- Umgekehrt ließen 82 Kinder bei der Zusatzaufgabe *keine* Einsicht in das Prinzip der Umkehraufgabe erkennen, 15 davon hatten aber zuvor mindestens eine Subtraktion durch "think addition" gelöst.

Eine Deutung dieser Dissoziationen wird in Kapitel 8.5.4 versucht, dort unter Berücksichtigung der diesbezüglichen Beobachtungen aus der dritten Interviewreihe.

8.4 Addieren und Subtrahieren am Ende des ersten Schuljahres

8.4.1 Häufigkeiten einzelner Strategien im Zahlenraum bis zehn

Tabelle 46 zeigt im Überblick, wie viel Prozent der Kinder die einzelnen Aufgaben am Ende des ersten Schuljahres mit den einzelnen Strategien gelöst haben. Die Aufgaben sind wieder geordnet nach der Häufigkeit, mit der sie durch Faktenabruf gelöst wurden. Die bei einer bestimmten Aufgabe häufigste Strategie ist jeweils fett gedruckt, die zweithäufigste kursiv.

Tabelle 46: Häufigkeit in Prozent, mit der die interviewten Kinder (n = 139) einzelne Aufgaben am Ende des ersten Schuljahres mit verschiedenen Strategien lösten

Aufgabe	Faktenabruf	Ableitung	Nichtzählend mit Fingern	Weiter/Rückwärtszählen	Fingerteilzählen	Alleszählen/"Take away"	Raten/Fehlspeicherung	"Kann ich nicht" o. dgl.	Keine klare Zuordnung
0+9	**98,6**				*0,7*		*0,7*		
2+2	**97,1**		*1,4*			0,7	0,7		
5+5	**97,1**		*2,2*			0,7			
3+3	**95,7**		*2,2*		1,4		0,7		
8–0	**95,7**		*2,2*			0,7	1,4		
4+4	**88,5**		0,7	2,2	*6,5*	1,4	0,7		
8–8	**88,5**		3,6	0,7	*5,8*		1,4		
1+6	**82,7**		1,4	0,7	*13,7*	0,7	0,7		
10–5	**82,7**	3,6	*11,5*	0,7	0,7	0,7			
9–1	**77,0**			6,5	*14,4*	1,4	0,7		
10–9	**76,3**	4,3	4,3	1,4	*10,8*	0,7	1,4		0,7
3+5	**58,3**	1,4	5,8	12,9	*16,5*	1,4	2,1		1,4
2+5	**57,6**	0,7	3,6	15,8	*18,7*	2,9	0,7		
8–4	**61,9**	10,1	6,5	2,2	*16,5*	0,7	1,4	0,7	
9–8	**51,1**	7,9	4,3	2,9	*24,5*	2,2	2,9		4,3
3+4	**42,4**	5,8	4,3	20,1	*22,3*	2,2	1,4		1,4
8–5	**41,7**	15,1	12,9	7,2	*18,7*	2,2	1,4		0,7
4+6	**41,0**	4,3	10,1	15,8	*22,3*	4,3	0,7		1,4
7–5	**38,8**	10,8	12,2	10,1	*22,3*	1,4	2,2	2,2	
3+7	**34,5**	1,4	6,5	22,3	*26,6*	1,4	7,2		
3+6	**32,4**	10,8	6,5	18,7	*25,2*	2,9	2,8		0,7
2+7	**31,7**	5,8	3,6	26,6	*28,1*	2,9	1,4		
9–6	**31,7**	10,1	8,6	11,5	*30,2*	1,4	4,3		2,2
7–4	**30,9**	10,8	12,9	15,1	*24,5*	3,6	1,4	0,7	
10–7	24,5	12,2	11,5	13,7	**28,8**	1,4	5,0		2,9

8.4.1.1 Faktenabruf im Zahlenraum bis zehn

Der Vergleich mit dem zweiten Interview zeigt Zuwächse im Faktenabruf bei allen jenen Aufgaben, die in beiden Interviews gefragt wurden. Faktenabruf war denn auch am Schulschluss bei allen Aufgaben mit Ausnahme von 10–7 die am häufigsten protokollierte Einzelstrategie, freilich wieder mit deutlichen Unterschieden zwischen 97 Prozent (bei 2+2 und 5+5) und nicht einmal 25 Prozent (bei 10–7).

Wie beim zweiten Interview werden auch in der Besprechung des dritten Interviews jene Aufgaben, die von mehr als drei Viertel der Kinder durch Faktenabruf gelöst wurden, als (zu diesem Zeitpunkt) "triviale" Aufgaben von den "nicht-trivialen" (mit Automatisierungsraten unter 60 Prozent) abgegrenzt. Es bleiben, wie beim zweiten Interview, 14 als "am Ende des Schuljahres nicht-trivial" zu bezeichnende Aufgaben übrig. Darunter sind vier Aufgaben, die beim zweiten Interview noch nicht gefragt worden waren (3+6, 10–7, 9–6, 7–4), während einige der beim zweiten Interview noch nicht-trivialen Aufgaben (1+6, 10–9, 10–5, 9–1) am Schulschluss zu den im genannten Sinne trivialen Aufgaben zählten.

Faktenabruf war am Ende des ersten Schuljahres (anders als beim zweiten Interview) im Bereich der Additionen insgesamt häufiger (42,6 Prozent) als im Bereich der Subtraktionen (36,6 Prozent). Diese Veränderung erklärt sich durch die gegenüber dem zweiten Interview neu aufgenommenen Subtraktionen 9–6, 7–4 und 10–7, die sich als Aufgaben mit niedriger Automatisierungsrate erwiesen. Es wurde ja bereits bei der Besprechung der zweiten Interviewreihe die Vermutung formuliert, dass die vergleichsweise hohe Automatisierungsrate bei den Mitte des Schuljahres gefragten Subtraktionen im Zusammenhang gesehen werden muss damit, dass alle diese Subtraktionen in der einen oder anderen Weise durch eine "naheliegende" Ableitungsstrategie bzw. durch nicht-zählenden Fingergebrauch gelöst werden können. Genau das ist bei 9–6, 7–4 und 10–7 aber nicht gegeben.

Wäre nun Automatisieren (gemäß der Theorie von SIEGLER, vgl. Kap. 2.3) eine quasi-automatische Wirkung des wiederholten, durch Zählen erfolgenden Lösens einer Aufgabe, dann ließe sich kaum erklären, warum 10–9 am Ende des ersten Schuljahres von 76,3 Prozent der Kinder auswendig gewusst wurde, 10–7 aber nur von 24,5 Prozent. Im Gegenteil: SIEGLER betont die Wichtigkeit richtiger Lösungen für die Ausbildung hoher "assoziativer Stärken" einer Ergebniszahl im Verhältnis zu einer Aufgabe (vgl. SIEGLER 2001, S. 383 und Kap. 2.3.1). 10–9 erfordert aber mehr Zählschritte als 10–7 (es sei denn, das Kind löst beide Aufgaben durch zählendes Ergänzen; das erfordert aber Einsicht in den operativen Zusammenhang von Addieren und Subtrahieren und ist im Falle von 10–9 vom Ableiten aus 9+1 praktisch nicht zu unterscheiden). Bei der häufigsten Variante des zählenden Rechnens, dem Finger-Teilzählen, ist das Fehlerrisiko bei 10–9 also höher als bei 10–7. Das könnte im Einklang mit SIEGLERS Theorie allenfalls dadurch ausgeglichen worden sein, dass 10–9 im Verlaufe des Schuljahres häufiger zählend gerechnet wurde als 10–7, aber auch das ist wenig plausibel.

Tatsächlich wurde aber 10–9 schon zu Schulbeginn von mehr Kindern durch Ableitung gelöst als die beiden anderen zu Schulbeginn gefragten Subtraktionen (vgl. Kap. 8.2.2.5). Und auch die Analyse der Mitte des Schuljahres aufgetretenen Fälle von "think addition" hat gezeigt, dass diese Strategie bei Subtraktionen mit der Differenz eins (10–9, 9–8) offenbar näher liegt als bei anderen Subtraktionen, Halbierungsaufgaben ausgenommen (vgl. Kap. 8.3.3.3). Es kann also angenommen werden, dass 10–9 im Laufe des ersten Schuljahres von mehr Kindern in mehr Fällen abgeleitet wurde als etwa 10–7. Gemäß BAROODYs "schema-based view" (vgl. Kap. 2.8) sollte aber gerade dieses häufigere Ableiten wesentlich dazu beigetragen haben, dass 10–9 bereits Mitte des ersten Schuljahres von fast der Hälfte der Kinder und am Ende des ersten Schuljahres von mehr als drei Viertel der Kinder durch Faktenabruf gelöst wurde. Demgegenüber ist das Ableiten von 10–7 aus 7+3 (auch für Kinder, die den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion begriffen haben) schon deshalb weniger naheliegend, weil 7+3 weniger oft automatisiert ist als 9+1: Die Addition 3+7 wurde noch am Ende des ersten Schuljahres nur von 34,5 Prozent der Kinder durch Faktenabruf gelöst. Ähnliche Zusammenhänge lassen sich zwischen den niedrigen Automatisierungsraten von 9–6 (31,7 Prozent) und 3+6 (32,4 Prozent) bzw. von 7–4 (30,9 Prozent) und 3+4 (42,4 Prozent) aufzeigen.

Additionen mit der Summe 10 (abgesehen von 5+5) zählten Mitte des ersten Schuljahres (entgegen der Annahme von CARPENTER und MOSER) *nicht* zu den Additionen mit relativ hoher Automatisierungsrate (vgl. Kap. 8.3.1). Das hat sich auch bis zum Ende des ersten Schuljahres nicht wesentlich geändert: Mit 34,5 Prozent Faktenabruf war 3+7 nur unwesentlich häufiger automatisiert als 3+6 (32,4 Prozent) bzw. 2+7 (31,7 Prozent). 4+6 wurde mit 41,0 Prozent von etwa genau so vielen Kindern durch Faktenabruf gelöst wie 3+4; die Automatisierungsrate von 3+5 (58,3 Prozent) und 2+5 (57,6 Prozent) lag jedoch deutlich höher.

Dass aber gerade 3+5 und 2+5 von allen nicht-trivialen Additionen am Ende des ersten Schuljahres am öftesten durch Faktenabruf gelöst wurden, mag daran liegen, dass sich diese beiden Additionen in besonderer Weise für eine Lösung durch "nicht-zählenden Fingergebrauch" eignen. 2+5 wurde ja bereits zu Schulbeginn gefragt und damals von 13,7 Prozent der Kinder nicht-zählend mit den Fingern gerechnet. Diese Strategie war bei 2+5 und 3+5 auch Mitte des ersten Schuljahres häufiger als bei den anderen nicht-trivialen Additionen. Dass aber nicht-zählendes Fingerrechnen bei zumindest manchen Kindern im Laufe des ersten Schuljahres abgelöst wurde von einem material-freien Lösen, bei dem die Kinder "in Gedanken an die Hände" (oder "mit der Vorstellung von Händen") rechneten, wurde bereits dokumentiert (vgl. Kap. 8.3.3.3). Es scheint, dass auch dies (ähnlich wie fortgesetztes Ableiten) in weiterer Folge zur Automatisierung einer Aufgabe beitragen kann.

SIEGLERS Erklärung versagt hingegen auch hier: Dass 3+5 im Laufe des Schuljahres häufiger zählend gelöst wurde als 3+4, ist wenig plausibel. Denn dem kleinschrittigen Aufbau der verwendeten Schulbücher gemäß war für die meisten Kinder 3+4 ("Zahlenraum 7") früher und dadurch insgesamt länger Bestandteil ihrer Rechenübungen als 3+5 ("Zahlenraum 8"). Sofern aber beide Aufgaben zählend gerechnet wurden, wurden sie vermutlich mit sehr ähnlichen Fehlerquoten gelöst (beide Aufgaben erfordern beim Weiterzählen vom größeren Summanden drei Zählschritte). Beides zusammengenommen, dürfte deshalb nach SIEGLERS Theorie die "assoziative Stärke" zwischen "3+4" und "7" zumindest nicht niedriger sein als zwischen "3+5" und "8". Und doch wurde am Ende des ersten Schuljahres 3+5 von deutlich (um mehr als ein Drittel) mehr Kindern durch Faktenabruf gelöst als 3+4.

8.4.1.2 Aufgaben mit Null als Summand bzw. Subtrahend bzw. Differenz

Die drei nur beim dritten Interview gefragten *Aufgaben mit Null* als Summand, Subtrahend bzw. Differenz bereiteten nur ganz wenigen Kindern Schwierigkeiten. Viele Kinder reagierten auf die ihnen ohne Vorbemerkung vorgelegten Aufgaben mit der Null mit einem spontanen Lächeln oder brachten auf andere Art zum Ausdruck, dass sie diese Aufgaben für leicht hielten.

Immerhin 5,8 Prozent der Kinder haben aber am Ende des ersten Schuljahres die Aufgabe 8–8 durch Finger-Teilzählen gelöst. Sie streckten also zunächst, ohne zu zählen, acht Finger aus und knickten dann einzeln acht Finger um, dabei von eins bis acht vorwärts zählend. Es handelte sich dabei durchwegs um Kinder, die beim dritten Interview den größten Teil zumindest der nicht-trivialen Aufgaben durch Finger-Teilzählen löste (vgl. Kap. 8.5.3.3. und 8.5.3.6). Viele dieser Kinder erweckten den Eindruck, dass sie beim Hören einer Aufgabe und beim Sehen der dazugehörigen Aufgabenkarte gar nicht erst überlegten, ob sie diese Aufgabe auch anders lösen könnten. Sie stellten jeweils quasi automatisch die erste Zahl der Aufgabe mit Fingern dar und zählten sofort los, in der Regel routiniert und schnell. Das Finger-Teilzählen hatte sich bei diesen Kindern offenbar bereits *als Gewohnheit verselbstständigt*. Dass Reflexion auch gegen Gewohnheiten aufzukommen vermag, zeigten aber jene 3,6 Prozent Kinder, die bei 8–8 gleichfalls sofort ihre acht Finger ausstreckten, dann aber kurz innehielten und einfach "Null" sagten, dabei oft lächelnd oder sogar lachend über die mit etwas Verspätung doch noch als "babyleicht" durchschaute Aufgabe.

8.4.1.3 Zählstrategien im Zahlenraum bis zehn

Das *Finger-Teilzählen* war beim dritten Interview insgesamt (wie schon beim zweiten Interview) die im Bereich der nicht-trivialen Aufgaben fast durchgängig zweithäufigste Strategie (23,2 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben). Bei 10–7 war es sogar die häufigste Strategie.

Bei den Additionen war *Weiterzählen* eine häufige Variante des zählenden Rechnens (18,9 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der sieben nicht-trivialen Additionen), während bei den Subtraktionen das dem Weiterzählen korrespondierende *Rückwärtszählen bzw. zählende Ergänzen* deutlich seltener protokolliert wurden (9,0 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der sieben nicht-trivialen Subtraktionen). Dementsprechend lag im Bereich der sieben nicht-trivialen Subtraktionen der Anteil von Finger-Teilzählen an allen durch Zählstrategien gelösten Aufgaben bei 70,4 Prozent, im Bereich der Additionen dagegen bei 51,7 Prozent und damit deutlich niedriger. Dass sich hierin die gegenüber dem Weiterzählen höheren prozeduralen bzw. konzeptuellen Schwierigkeiten des Rückwärtszählen bzw. zählenden Ergänzens widerspiegeln, wurde bereits zu den sehr ähnlichen Befunden aus dem zweiten Interview ausgeführt (vgl. Kap. 8.3.1.2).

Jene Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres Additionen durch Weiterzählen lösten, taten dies so gut wie immer vom größeren Summanden aus, wie Tabelle 47 deutlich macht. Die Aufgaben sind geordnet nach der Häufigkeit, mit der sie durch Weiterzählen gelöst wurden.

Tabelle 47: Absolute Häufigkeit von Weiterzählen bei nicht-trivialen Additionen am Ende des ersten Schuljahres

Addition	Weiterzählen insgesamt	vom größeren Summanden aus	vom erstgenannten Summanden aus
2+7	37	36	1
3+7	31	31	0
3+4	28	22	6
3+6	26	26	0
2+5	22	21	1
4+6	22	19	3
3+5	18	17	1
gesamt	184	172	12

Die Tendenz zum "geschickten Weiterzählen" war bereits Mitte des ersten Schuljahres deutlich (vgl. Kap. 8.3.1.2), sie hat sich bis zum Ende des ersten Schuljahres weiter durchgesetzt. Nennenswerte Anteile von Weiterzählen vom erstgenannten Summanden gab es am Ende des ersten Schuljahres nur noch bei den Additionen 3+4 und (seltener) auch bei 4+6, also gerade bei jenen beiden Additionen, bei denen sich durch Vertauschen der Summanden am wenigsten Zeit und Mühe sparen lässt.

Die relativen Häufigkeiten von Rückwärtszählen und zählendem Ergänzen am Ende des ersten Schuljahres werden in Tabelle 48 dargestellt. Die Aufgaben sind geordnet nach der Häufigkeit, mit der sie durch eine dieser beiden (dem weiterzählenden Addieren analogen) Subtraktionsstrategien gelöst wurden.

Tabelle 48: Absolute Häufigkeit von Rückwärtszählen bzw. zählendem Ergänzen bei nicht-trivialen Subtraktionen am Ende des ersten Schuljahres

Subtraktion	Summe aus Rückwärtszählen und zählendem Ergänzen	Rückwärtszählen	zählendes Ergänzen
7–4	19	13	6
10–7	17	8	9
7–5	13	8	5
9–6	13	9	4
8–5	10	9	1
8–4	2	2	0
gesamt	74	49	25

Durch die gegenüber dem zweiten Interview neu hinzu gekommenen Subtraktionen ergaben sich mehr Fälle von Rückwärtszählen und zählendem Ergänzen und damit auch mehr Material, um die Abhängigkeit der Wahl einer dieser beiden Strategien vom Aufgabencharakter einschätzen zu können. Demnach war Rückwärtszählen mit 49 Fällen insgesamt fast doppelt so häufig wie zählendes Ergänzen (25 Fälle), obwohl zählendes Ergänzen bei allen nicht-trivialen Subtraktionen mit Ausnahme von 8–4 weniger Zählschritte erfordert hätte als Rückwärtszählen. Zudem entfällt beim zählenden Ergänzen das Problem der gegenläufigen Zählreihen, welches das Rückwärtszählen prozedural schwieriger macht als das Weiterzählen.

Dass das Rückwärtszählen trotz dieser Nachteile die bei weitem häufigere Subtraktionsstrategie war, zeigt wohl, dass die "Anpassungsfähigkeit in der Strategiewahl", die SIEGLER (vgl. Kap. 8.2.2) insgesamt zu Recht hervorhebt, immer nur so weit reichen kann, wie es die konzeptuelle Wissensbasis eines Kindes erlaubt. In Kapitel 2.10.1 wurde dargestellt, dass das "ursprüngliche" Konzept, welches Kinder (freilich unter dem Einfluss von schulischer und außerschulischer Förderung) vom Subtrahieren entwickeln, vermutlich das "Take away" ist. Tatsächlich stellten bei einer Überprüfung ihres Operationsverständnisses Mitte des ersten Schuljahres *alle* 139 Kinder die Subtraktion 9–5 als Wegnehmen dar. Der weite Weg von diesem ursprünglichen Konzept des Wegnehmens hin zu einem umfassenden Verständnis des Zusammenhangs von Addieren und Subtrahieren auf Grundlage eines Teile-Ganzes-Verständnisses von Zahlen war Gegenstand von Kapitel 2.10.6. Nun müssen Kinder kaum ein solch umfassendes Verständnis dieses Zusammenhangs erworben haben, um Subtraktionen durch zählendes Ergänzen lösen zu können. Manche mögen zunächst auch nur erkannt haben, dass zählendes Ergänzen eine *erlaubte* Strategie darstellt in dem Sinne, dass es zu richtigen Ergebnissen führt (vgl. Kap. 2.10.3). Insgesamt scheint aber den interviewten Kindern, sofern sie im Rahmen des zählenden Rechnens überhaupt über das Alleszählen bzw. Finger-Teilzählen hinauskamen, mehrheitlich das Rückwärtszählen eher mit ihrem Konzept des Subtrahierens vereinbar gewesen zu sein als das (dem Weiterzählen und damit dem Addieren nahe) zählende Ergänzen.

Anders als in PADBERGS Studie zu den Subtraktionsstrategien deutscher ErstklässlerInnen (PADBERG 1994, vgl. Kap. 2.4) war aber in der vorliegenden Untersuchung zählendes Ergänzen sehr wohl *auch* zu beobachten. Und gerade bei 10–7, wo die Anzahl der Zählschritte durch zählendes Ergänzen am deutlichsten reduziert werden kann, war diese Strategie sogar häufiger als Rückwärtszählen. Von den neun Kindern, die 10–7 durch zählendes Ergänzen lösten, wandten vier bei anderen Subtraktionen auch Rückwärtszählen an. Nur ein Kind löste sämtliche nicht-trivialen Subtraktionen (sofern er diese zählend rechnete) durch zählendes Ergänzen. Umkehrt wandte nur eines der acht Kinder, die 10–7 durch das vergleichsweise umständliche Rückwärtszählen lösten, bei einer der anderen Subtraktionen auch zählendes Ergänzen an. Sofern Kinder also überhaupt erkannt hatten, dass sie Subtraktionen auch durch zählendes Ergänzen lösen können, scheinen sie diese Strategie mehrheitlich durchaus gezielt angewandt zu haben, um den Zählaufwand zu verringern.

Eine interessante *Variante des rückwärts zählenden Subtrahierens* war bei zwei Kindern zu beobachten: Ein Mädchen löste 10–7 dadurch, dass es von zehn ausgehend "neun, acht, sieben" zählte und die Anzahl der Zählschritte – drei – zur Antwort gab. Dieselbe Strategie wandte das Kind bei 9–6 und 8–4 an, ein anderes Kind tat dies bei 7–5.

Alleszählen war zu Schulschluss etwa gleich selten wie bei den Interviews zu Mitte des ersten Schuljahres (2,2 Prozent aller Lösungsversuche bei den 14 nicht-trivialen Aufgaben).

8.4.1.4 Relative Häufigkeit von Faktennutzung und Zählstrategien

Nimmt man alle Zählstrategien auf der einen Seite, Faktenabruf und Ableiten als Faktennutzung auf der anderen Seite zusammen, dann machten Zählstrategien etwa 39,4 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben aus, Faktennutzung etwa 48,9 Prozent. Bei sechs Aufgaben (3+7, 3+6, 2+7, 9–6, 7–4 und 10–7) waren Zählstrategien am Schulschluss häufiger als Faktennutzung, zwei weitere Aufgaben (4+6 und 3+4) wurden etwa gleich oft zählend gerechnet wie durch Faktennutzung gelöst. Tabelle 49 zeigt die Häufigkeiten im Überblick, gereiht nach dem Anteil von Faktennutzung.

Tabelle 49: Verteilung von Zählstrategien und Faktennutzung bei den 14 nicht-trivialen Aufgaben im ZR bis 10 am Ende des ersten Schuljahres

Aufgabe	Anteil von Faktennutzung	Anteil von Zählstrategien
8–4	72,0 %	19,4 %
3+5	59,7 %	30,8 %
9–8	59,0 %	29,6 %
2+5	58,3 %	37,4 %
8–5	56,8 %	28,1 %
7–5	49,6 %	33,8 %
3+4	48,2 %	44,6 %
4+6	44,3 %	42,4 %
3+6	43,2 %	46,8 %
9–6	41,8 %	43,1 %
7–4	41,7 %	43,2 %
2+7	37,5 %	57,6 %
10–7	36,7 %	43,9 %
3+7	35,9 %	50,3 %

8.4.1.5 Fehlerhaft gelöste und nicht bewältigte Aufgaben im Zahlenraum bis zehn

Tabelle 50 zeigt, wie häufig die nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres entweder falsch gelöst oder nicht bewältigt wurden (vgl. Kap. 8.2.1.5). Die Aufgaben sind nach der Fehlerhäufigkeit geordnet.

Tabelle 50: Häufigkeit in Prozent, mit der die nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres mit falschem Ergebnis bzw. gar nicht gelöst wurden

	Falsche Lösung	Keine Lösung	Insgesamt falsch *oder* nicht gelöst)
9–6	12,2	0,0	12,2
10–7	11,5	0,0	11,5
3+7	11,5	0,0	11,5
9–8	9,4	0,0	9,4
3+4	9,4	0,0	9,4
7–5	8,6	2,2	10,8
8–5	7,9	0,0	7,9
3+6	7,2	0,0	7,2
4+6	5,8	0,0	5,8
7–4	5,0	0,7	5,7
2+7	2,9	0,0	2,9
3+5	2,9	0,0	2,9
8–4	2,9	0,7	3,6
2+5	2,2	0,0	2,2
Mittelwert aller Aufgaben	7,1	0,3	7,4

Über alle 14 nicht-trivialen Aufgaben gemittelt, betrug die Fehlerquote im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres 7,1 Prozent. Nur 11 dieser 14 Aufgaben waren bereits Mitte des ersten Schuljahres gefragt worden. Vergleicht man die damals für diese Aufgaben ermittelten Fehlerquoten (vgl. Kap. 8.3.1.5) mit den hier präsentierten vom Ende des ersten Schuljahres, wird eine durchgehende Abnahme der Fehlerquote deutlich, die jedoch bei einzelnen Aufgaben sehr unterschiedlich ausfällt: 4+6, die beim zweiten Interview mit 18 Prozent Fehlerquote am öftesten falsch gelöste Aufgabe, gehört am Ende des ersten Schuljahres mit 5,8 Prozent zu den Aufgaben mit vergleichsweise niedriger Quote. 3+7, gleichfalls eine Addition mit der Summe 10, wurde am Ende des ersten Schuljahres mit 11,5 Prozent Fehlerquote kaum seltener falsch gelöst als Mitte des ersten Schuljahres (Fehlerquote: 12,9 Prozent). Im Fall von 3+7 lag dies weniger an Fehlern bei der Anwendung von Zählstrategien, sondern am hohen Anteil von Fehlspeicherungen gerade bei dieser Aufgabe. Im Wesentlichen haben aber auch am Ende des ersten Schuljahres wieder gerade jene Aufgaben, die besonders häufig zählend gelöst wurden, auch die höchsten Fehlerquoten – mit Ausnahme von 2+7, das am häufigsten von allen Aufgaben durch Weiterzählen vom größeren Summanden gelöst wurde; das Weiterzählen um zwei Schritte birgt aber wenig Fehlerrisiko.

Wie schon Mitte des Schuljahres wurden auch am Ende des Schuljahres die Aufgaben im Zahlenraum bis zehn von so gut wie allen Kindern durchgehend bearbeitet; ""Kann ich nicht' oder dergleichen" wurde nur in insgesamt 5 Fällen (alle bei Subtraktionen) protokolliert. Zur Deutung solcher vereinzelter Fälle von Verweigerung vgl. Kap. 8.3.1.5.

8.4.2 Häufigkeit einzelner Strategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang

Wie dargestellt, waren Aufgaben mit Zehnerübergang zum Zeitpunkt des dritten Interviews in 20 der 22 besuchten Klassen im Unterricht behandelt worden. In drei Klassen war dies laut Auskunft der Lehrkraft erst im Juni erfolgt, also wenige Wochen vor dem Interview. Sofern überhaupt eine nicht-zählende Strategie für den Zehnerübergang erarbeitet und über längere Zeit geübt worden war, war dies ausschließlich das Teilschrittverfahren (vgl. Kap. 7.2.5). Tabelle 51 zeigt zunächst im Überblick, mit welchen Strategien die beim dritten Interview gefragten Aufgaben mit Zehnerübergang gelöst wurden. Der Anteil der am häufigsten verwendeten Strategie ist jeweils fett gedruckt, jener der zweithäufigsten kursiv. Die Aufgaben sind nach der Häufigkeit des Faktenabrufs geordnet. Die Differenzierung innerhalb der Ableitungsstrategien für Aufgaben mit Zehnerübergang folgt in Kapitel 8.4.3.7.

Tabelle 51: Häufigkeit in Prozent, mit der die interviewten Kinder (n=139) einzelne Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres mit einzelnen Strategien gelöst haben

	Fakten-abruf	Ab-leitung	Nicht-zählend mit Fingern	Weiter- bzw. Rückwärts-zählen	Finger-Teil-zählen	Alles-zählen/ "take away"	Raten/ Fehl-speiche-rung	"Kann ich nicht" o. dgl.	Keine klare Zuord-nung
6+6	**50,4**	3,6		8,6	*23,7*	6,5	5,7	0,7	0,7
16–10	**25,9**	9,4	2,2	12,2	**25,9**	6,5	*12,9*	4,3	0,7
8+8	15,8	6,5		15,1	**31,7**	7,2	*18,0*	2,2	3,6
12–6	8,6	**28,8**	2,2	12,2	*28,1*	5,8	9,4	4,3	0,7
3+9	8,6	22,3		*25,9*	**35,3**	1,4	5,7		0,7
6+7	2,9	*25,9*	2,9	15,8	**34,5**	4,3	8,7	2,2	2,9
5+8	2,9	*21,6*	3,6	23,7	**28,8**	7,2	10,8	1,4	
14+9	0,7	*16,5*	3,6	15,1	**33,1**	7,9	13,8	6,5	2,9

Die Aufgabe 16–10, die hier mit aufgenommen wurde, ist natürlich keine Grundaufgabe und erfordert auch insofern keinen "Zehnerübergang", als sie bei Einsicht in das Zehner-Einer-System durch einfache Zerlegung in Zehner und Einer gelöst werden kann (der Zehner wird weggenommen, die Einer bleiben übrig). Gerade deshalb wurde sie in den Interviewleitfaden aufgenommen: Sie versprach einigen Aufschluss darüber, ob ein Kind am Ende des ersten Schuljahres eine zweistellige Zahl bereits als Zusammensetzung aus Zehnern und Einern versteht, und damit auch eine bessere Grundlage, um die Strategien dieses Kindes bei anderen Aufgaben mit Zehnerübergang beurteilen zu können (vgl. Kap. 2.10.9). Nun erwies sich aber, wie noch zu kommentieren sein wird (s. Kap. 8.4.3.7), die Subtraktion 16–10 für die Mehrheit der Kinder als ganz und gar nicht trivial; der Anteil an zählenden Lösungen, "Zahlenraten" und Verweigerung betrug hier insgesamt 61,8 Prozent.

8.4.2.1 Nicht-zählende Strategien für den Zehnerübergang

Was *Faktenabruf* betrifft, hat die Aufgabe 6+6 unter den Aufgaben mit Zehnerübergang offensichtlich eine Sonderstellung: Mehr als die Hälfte aller Kinder löste diese Addition am Ende des ersten Schuljahres durch raschen Abruf aus dem Gedächtnis. 6+6 war somit von deutlich mehr Kindern automatisiert als etwa 3+4 und 4+6, zwei Aufgaben, die schon viel länger zum Repertoire der schulischen Übungsaufgaben dieser Kinder gezählt hatten. Dass Verdoppelungen nicht nur im Zahlenraum bis zehn von mehr Kindern schon früh automatisiert werden als andere Additionen (zumindest als andere Additionen im selben Zahlenraum), wird auch an 8+8 noch deutlich, allerdings mit einen gegenüber 6+6 deutlich reduzierten Anteil an Faktenabruf.

Bei den anderen Aufgaben mit Zehnerübergang war (abgesehen vom Sonderfall 16–10) Faktenabruf am Ende des ersten Schuljahres deutlich seltener als bei allen nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn.

Ableitungsstrategien waren hingegen bei den Aufgaben mit Zehnerübergang insgesamt häufiger als im Zahlenraum bis zehn. Klammert man die Sonderfälle 6+6 und 16–10 aus, wurden die sechs restlichen Aufgaben mit Zehnerübergang in 20,3 Prozent aller Fälle durch eine Ableitungsstrategie gelöst. Im Zahlenraum bis zehn wurden dagegen nur 7,7 Prozent aller Fälle im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben abgeleitet.

Einerseits wirkt sich hierin die niedrigere Rate von Faktenabruf bei den Aufgaben mit Zehnerübergang aus: Gerade die Kinder mit dem höchsten arithmetischen Entwicklungsniveau zeigten im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres oft einfach deshalb keine Ableitungsstrategien (mehr), weil sie diesen Zahlenraum (zumindest weitestgehend) bereits automatisiert hatten. Diese Kinder hatten aber Einsicht in Ableitungszusammenhänge (und oft beim zweiten Interview auch noch im Zahlenraum bis zehn etliche Aufgaben durch Ableitung gelöst; vgl. Kap. 8.5.3.1). Diese Kompetenz zum Ableiten zeigten sie am Ende des ersten Schuljahres aber nur (oder vorwiegend) bei Aufgaben mit Zehnerübergang, eben weil sie diese Aufgaben noch nicht automatisiert hatten.

Andererseits aber waren unter den Kindern, die bei Aufgaben mit Zehnerübergang Ableitungsstrategien zeigten, auch einige, die im Zahlenraum bis zehn bei vergleichbaren Aufgaben auf Zählstrategien vertrauten. So wurde etwa 6+7 auch von einigen Kindern aus 6+6 abgeleitet, die bei 3+4 weiterzählten (und diese Aufgabe *nicht* aus dem bereits automatisierten 3+3 ableiteten). Bei manchen Kindern erwiesen sich also die Aufgaben mit Zehnerübergang als "challenge problems" (vgl. SIEGLER 2001, S. 127 und Kap. 2.3.2), die ihnen Ableitungsstrategien entlockten, welche ihnen im Zahlenraum bis zehn nicht in den Sinn gekommen waren (vermutlich wegen der dort noch relativ bequemen Alternative des raschen Weiterzählens; Näheres dazu folgt in Kap. 8.5.3.4).

8.4.2.2 Verweigerung, Raten, Fehlspeicherung bei Aufgaben mit Zehnerübergang

Für nicht wenige Kinder wirkten die Aufgaben mit Zehnerübergang offenbar nicht als "challenge", sondern als Überforderung: Sie griffen für diese Aufgaben auf Verhaltensweisen zurück, die sie im Zahlenraum bis zehn bereits überwunden hatten. So war zum einen *Verweigerung* ("Kann ich nicht!" "Ist mir zu schwer!"), im Zahlenraum bis zehn zu Schulbeginn häufig, am Ende des ersten Schuljahres aber äußerst selten, gerade bei den Subtraktionen mit Zehnerüberschreitung wieder öfter zu registrieren (bei je 4,3 Prozent der Lösungsversuche bei 16–10 und 12–6 und 6,9 Prozent der Lösungsversuche bei 14–9).

Auch das spontane Nennen einer falschen Zahl *("Raten/Fehlspeicherung")* war bei den Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres deutlich häufiger als im Zahlenraum bis zehn: "Raten/Fehlspeicherung" wurde in der dritten Interviewreihe bei 2,5 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn protokolliert, bei den Aufgaben mit Zehnerübergang aber bei 12,1 Prozent aller Lösungsversuche. Dabei bekannten sich manche Kinder auch ganz offen dazu, "einfach irgendeine Zahl gesagt" zu haben.

Um die Anzahl der Kategorien übersichtlich zu halten, wurden als "Raten/Fehlspeicherung" alle fehlerhaften Lösungen gewertet, die von Kindern *spontan* (innerhalb von ein bis zwei Sekunden) gegeben wurden. Einige davon lassen aber ein bestimmtes Lösungs*muster* erkennen:

- So wurden Aufgaben mit Zehnerübergang in insgesamt 30 Fällen (von neun verschiedenen Kindern) spontan nach dem Muster "5+8=18" (also etwa auch "6+6=16", "6+7=17") gelöst. Hier scheint die bei Aufgaben des Typs "10+x" zu richtigen Ergebnissen führende Strategie "Nenne die zweite Zahl und hänge –zehn dran!" fälschlich verallgemeinert worden zu sein.
- Ein Mädchen "baute" gewissermaßen bei drei Aufgaben (3+9, 5+8, 6+7) aus den beiden Summanden eine zweistellige Zahl und nannte diese als Ergebnis (3+9=39, 5+8=58, 6+7=67).
- Bei den Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung kam es insgesamt 24-mal zu spontanen "Kippfehlern" (vgl. GAIDOSCHIK 2003a, S. 45). Es wurde also beispielsweise als Ergebnis von 12–6 ohne längeres Nachdenken die Zahl 14 (unter Beibehaltung des Zehners) oder auch 4 (unter Vernachlässigung des Zehners) genannt.

In all diesen Fällen steckt hinter den falschen Ergebniszahlen also nicht Willkür und Zufall, sondern durchaus eine kindliche Logik, die freilich deutlich macht, dass diesen Kindern am Ende des ersten Schuljahres wesentliche Grundlagen im Verständnis von Zehnern und Einern fehlten, um korrekte Strategien für Aufgaben mit Zehnerübergang entwickeln zu können.

8.4.2.3 Zählstrategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang

Die bereits angesprochene Tendenz, für Aufgaben mit Zehnerübergang verstärkt wieder solche Strategien zu wählen, die im Zahlenraum bis zehn bereits aufgegeben wurden, zeigt sich auch im Bereich der *Zählstrategien*: *Alleszählen* war Ende des ersten Schuljahres im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben bei nur 2,2 Prozent aller Lösungsversuche zu beobachten, bei den Aufgaben mit Zehnerübergang aber bei 5,9 Prozent aller Lösungsversuche.

Weiterzählen war am Ende des ersten Schuljahres hingegen bei Additionen mit Zehnerübergang insgesamt betrachtet etwa gleich häufig wie bei den nicht-trivialen Additionen im Zahlenraum bis zehn (17,8 Prozent aller Lösungsversuche bei Additionen mit Zehnerübergang gegenüber 18,9 Prozent bei den nicht-trivialen Additionen im Zahlenraum bis zehn).

Am häufigsten durch Weiterzählen (und da fast immer durch Weiterzählen vom größeren Summanden aus) gelöst wurden gerade 3+9 und 5+8, also jene beiden Additionen, bei denen das "keeping track" (sofern vom größeren Summanden aus gezählt wurde) noch vergleichsweise am wenigsten Schwierigkeiten bereitete. Während bei 3+9 nur 6 von 34 Kindern (17,6 Prozent), die diese Aufgabe weiterzählend lösten, die Finger als Hilfe für das "keeping track" nutzten, taten dies bei 5+8 von den insgesamt 32 weiterzählenden Kindern 16 (50 Prozent). Drei der Kinder, die bei 5+8 weiterzählend ohne Zählhilfe auskamen, erleichterten sich das "keeping track" durch Strukturierung des zweiten Summanden (sie zählten von acht weg zunächst "neun, zehn" und dann mit deutlicher Pause "elf, zwölf, dreizehn", wandten also gewissermaßen eine Zählvariante des Teilschrittverfahrens an).

Bei 8+8 war das Verhältnis von "Weiterzählen mit Zählhilfe" und "Weiterzählen ohne Zählhilfe" 13 zu 8. Dabei strukturierten zwei der Kinder, die ohne Zählhilfe auskamen, den zweiten Summanden in 4+4 (von "acht" ausgehend erst "neun, zehn, elf, zwölf", Pause, dann "dreizehn, vierzehn, fünfzehn, sechzehn"). Hier wurde also *nicht* bei "zehn" ein "Zwischenhalt" eingelegt, sondern die Zahl acht in der offenbar für diese Kinder vermutlich nächst liegenden, in einer zur Minimierung des "keeping track"-Problems jedenfalls äußerst zweckmäßigen Weise zerlegt. Auch in der Wahl von Strategien zur Lösung des "keeping track"-Problems zeigten also viele Kindern "Anpassungsfähigkeit" an die jeweilige Aufgabe.

Finger-Teilzählen war bei den Aufgaben mit Zehnerübergang mit 30,1 Prozent aller Lösungsversuche insgesamt sogar noch häufiger als bei den nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn (23,2 Prozent). Bei sechs der acht Aufgaben mit Zehnerübergang war es die häufigste Einzelstrategie. Dabei stellt diese Strategie Kinder bei Aufgaben mit Zehnerübergang vor das Problem, Summen bzw. Minuenden größer als zehn darstellen zu müssen, wo doch nur zehn Finger zur Verfügung stehen. Ein Mädchen löste dieses Problem während des dritten Interviews (und da wohl nicht zum ersten Mal), indem es seine *Zehen* als zusätzliches Zählmaterial heranzog. Bei "6+6" beispielsweise streckte es also sechs Finger aus, streckte dann mit "eins, zwei, drei, vier" die restlichen Finger und spannte mit "fünf, sechs" zwei Zehen an (unter dem Tisch, ohne seine Zehen zu sehen). Daraus ermittelte es ohne langes Nachdenken das Ergebnis "zwölf". (Der Interviewer hatte zunächst nur die Fingerhandlung bemerkt, das Mädchen demonstrierte seine beeindruckende Zehenakrobatik aber dann bereitwillig bei weiteren Rechnungen; da es ein warmer Sommertag war, trug das Mädchen Sandalen, die die Zehen frei ließen).

Der Großteil der Kinder, die das Finger-Teilzählen auch für Aufgaben mit Zehnerübergang verwendete, löste das Problem der begrenzten Fingeranzahl recht souverän wie folgt: Für 6+7 streckten sie beispielsweise sechs Finger simultan aus, dann mit "eins, zwei, drei, vier" zunächst vier weitere Finger, sodass alle zehn Finger "verbraucht" waren. Im nächsten Schritt ballten sie die beiden Hände wieder zu Fäusten (manche Kinder taten dies mit betonter, eingeübt wirkender Gestik, indem sie etwa die beiden Hände mit ihren je fünf ausgestreckten Fingern zunächst auf den Tisch klatschten und erst dann zu Fäusten ballten). Dann wurden mit "fünf, sechs, sieben" drei Finger ausgestreckt. Schließlich nannten sie mit Blick auf diese drei Finger als Ergebnis "dreizehn". Analog dazu wurden bei 14–9 zunächst vier Finger ausgestreckt, dann mit "eins, zwei, drei, vier" vier Finger umgeklappt, im nächsten Schritt alle zehn Finger ausgestreckt und mit "fünf, sechs, sieben, acht, neun" fünf Finger einzeln umgeklappt; als Ergebnis wurde "fünf" von den verbleibenden fünf Fingern abgelesen.

Hier liegt gewissermaßen eine "Doppelbelegung" der Finger vor: Dieselbe Fingeranzahl wird einmal als "drei", dann als "dreizehn", einmal als "vier", dann als "vierzehn" interpretiert. Nun ballten aber manche Kinder nach dem "Auffüllen" der zweiten Hand nur die erste Hand zur Faust, um an dieser die restlichen Finger auszustrecken; die Finger der zweiten Hand blieben inzwischen ausgestreckt. Bei 6+7 beispielsweise führte das dazu, dass am Ende auf einer Hand drei Finger, auf der anderen Hand fünf Finger ausgestreckt waren. Das Kind musste nun, um das richtige Ergebnis zu nennen, die volle Hand ignorieren. Gelang ihm dies, dann bewältigte es damit sogar eine "Dreifachbelegung", es interpretierte also dieselbe Fingerstellung einmal als drei, dann als acht, dann als dreizehn. Und tatsächlich gelang dies nicht wenigen Kindern, die so rechneten.

Andere gerieten gerade auch wegen dieser Doppel- und Mehrfachbelegung in Schwierigkeiten. Das führte zu zahlreichen Rechenfehlern (vgl. Kap. 8.4.2.5), äußerte sich aber auch darin, dass manche Kinder die nach dem Zählen erreichte Fingerstellung mitunter lange betrachteten und dabei offenbar angestrengt darüber nachdachten, welche der für diese Fingerstellung in Frage kommenden Zahlen sie denn nun nennen sollten. Eine (als Ausdruck von Metakognition) bemerkenswerte Einsicht in dieses Problem dokumentierte Monika, die auf die Frage, warum sie denn (trotz offenkundiger Schwierigkeiten beim zählenden Rechnen) nicht die Finger zu Hilfe nehme, wie folgt antwortete:

> *"Weil manchmal ist es so, wenn ich jetzt so sieben plus acht nimm* [zeigt dabei die Strategie Finger-Teilzählen, wobei die erste Hand nicht zur Faust geballt wird], *dann glaub ich, dann glaub ich,* [es ist] *fünfzehn, und vielleicht ist es dann aber, vielleicht, zum Beispiel wenn ich jetzt fünf und fünf, da hab ich dann vielleicht auch fünfzehn, weil das ist dann auch so* [blickt auf die Finger], *wenn ich fünfzehn sag."*

Besonders schwierig erwies sich für viele Kinder das Finger-Teilzählen bei den Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung. Manche begannen etwa bei 16–10 damit, dass sie zunächst sechs Finger ausstreckten, wurden dann aber stutzig, als sie merkten, dass "zu wenige Finger" zum Umknicken da waren. Einige gaben hier auf, andere wechselten dann zur Strategie "Alleszählen" unter Verwendung der ja stets auch verfügbaren Holzwürfel.

8.4.2.4 Relative Häufigkeit von Faktennutzung und Zählstrategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang

Tabelle 52 zeigt in direkter Gegenüberstellung, wie häufig die acht Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres einerseits durch Faktennutzung (Faktenabruf und Ableitung zusammengefasst, Vgl. Kap. 2.1), andererseits mit einer der drei Zählstrategien (Weiterzählen, Finger-Teilzählen, Alleszählen) gelöst wurden. Zusätzlich wurden für diese Tabelle "Raten/Fehlspeicherung" und "'Kann ich nicht' oder dergleichen" als eine Kategorie zusammengefasst; denn diese beiden "Strategien" lassen sich deuten als zwei Varianten, in denen Kinder ihre subjektive Überforderung mit einer Aufgabenstellung zum Ausdruck bringen können (für "Raten/Fehlspeicherung" trifft dies wohl nur dann zu, wenn es sich tatsächlich um reines Raten handelt; vgl. Kap. 8.4.2.5). Die Aufgaben sind geordnet nach der Häufigkeit von Faktennutzung.

Tabelle 52: Verteilung von Zählstrategien, Faktennutzung und Verweigerung bzw. Raten bei den Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres

Aufgabe	Anteil Faktennutzung	Anteil Zählstrategien	Raten/ Fehlspeichung oder Verweigerung
6+6	54,0 %	38,8 %	6,4 %
12–6	37,4 %	46,1 %	13,7 %
16–10	35,3 %	44,6 %	17,2 %
3+9	30,9 %	62,6 %	5,7 %
6+7	28,8 %	54,6 %	10,9 %
5+8	24,5 %	59,7 %	12,2 %
8+8	22,3 %	54,0 %	20,2 %
14–9	17,2 %	56,1 %	20,3 %

Die Tabelle macht deutlich, dass die befragten Kinder am Ende ihres ersten Schuljahres Aufgaben mit Zehnerübergang (mit Ausnahme des Sonderfalls 6+6) mehrheitlich nur zählend bewältigt oder durch Raten (vgl. Kap. 8.4.2.5) bzw. Verweigerung hinter sich gebracht haben. Nimmt man 6+6 aus, dann fielen insgesamt nur 28,1 Prozent aller Lösungsversuche bei Aufgaben mit Zehnerübergang auf Faktennutzung, aber 54,0 Prozent auf Zählstrategien und 14,3 Prozent auf "Raten/Fehlspeicherung" bzw. "'Kann ich nicht' oder dergleichen".

8.4.2.5 Fehlerhaft gelöste und verweigerte Aufgaben mit Zehnerübergang

Tabelle 53 zeigt, wie häufig die acht Aufgaben mit Zehnerübergang *falsch* gelöst oder verweigert wurden (vgl. Kap. 8.3.1.5). Die Aufgaben sind nach der Fehlerhäufigkeit geordnet.

Tabelle 53: Häufigkeit in Prozent, mit der Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres mit falschem Ergebnis gelöst bzw. verweigert wurden

	Falsche Lösung	Keine Lösung	Insgesamt falsch *oder* nicht gelöst
8+8	38,1	2,2	40,3
14–9	35,3	6,5	41,8
16–10	32,4	4,3	36,7
12–6	27,3	4,3	31,6
6+7	23,0	2,2	25,2
5+8	20,9	1,4	22,3
6+6	16,5	0,7	17,2
3+9	16,5	0,0	16,5
Mittelwert aller Aufgaben:	26,3	2,7	29,0

Von 8+8 abgesehen, waren die Fehlerquote wie auch die Quote der Verweigerung bei den Subtraktionen noch einmal deutlich höher als bei den Additionen. Hier spiegeln sich die bereits erläuterten besonderen Schwierigkeiten bei Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung (insbesondere beim Finger-Teilzählen) wieder.

Die hohe Fehlerquote von 8+8 ist vor allem auf den hohen Anteil von "Raten/Fehlspeicherung" gerade bei dieser Aufgabe zurückzuführen. Wie ausgeführt, konnte in den Interviews ja zwischen Raten und Fehlspeicherung in vielen Fällen nicht unterschieden werden. Es blieb in solchen Fällen also oft unklar, ob ein Kind tatsächlich auf gut Glück irgendeine Zahl genannt oder aber selbst tatsächlich geglaubt hatte, diese Zahl sei richtig. Der hohe Anteil von "Raten/Fehlspeicherung" bei 8+8 geht aber vermutlich mehrheitlich auf das Konto von "Fehlspeicherung": Als fehlerhafte Lösung wurde zumeist 14 oder 18 genannt, die Ergebniszahlen der "benachbarten" Verdoppelungen 7+7 und 9+9. Diese Kinder dürften sich also zwar die Ergebniszahlen der Verdoppelungsaufgaben bereits gemerkt haben, diese aber beim Abruf (noch?) durcheinander bringen (bei 8+8=18 ist freilich auch ein "Perseverationsfehler" denkbar, vgl. LORENZ & RADATZ 1993, S. 142, alternativ auch die unten erläuterte Übergeneralisierung von Aufgaben des Typs 10+x). Solche Fehlspeicherungen verweisen aber auch darauf, dass die Kinder die Verdoppelungsaufgaben mit Zehnerübergang vermutlich nicht über Ableitungsstrategien erlernt haben. Denn wer 8+8 zunächst etwa als 5+5+3+3 (mit der "Kraft der Fünf") oder auch als 8+2+6 (Teilschrittverfahren) löst und *dieses Ableiten* automatisiert, wird vermutlich mit geringerer Wahrscheinlichkeit solchen Abruffehlern aufsitzen (vgl. Kap. 2.12.2).

Einige Kinder nannten bei Additionen mit Zehnerübergang (teils sehr konsequent) die aus zehn und dem zweiten Summanden gebildete Zahl als Antwort, also etwa 5+8=18, 6+7=17 usw. Diese "Strategie" wurde von neun verschiedenen Kindern insgesamt 28-mal angewandt und für die quantitative Auswertung jeweils unter "Raten/Fehlspeicherung" subsumiert. Sie könnte freilich auch als Ausdruck einer Übergeneralisierung interpretiert werden: Bei Aufgaben wie 10+3, 10+6 etc. führt dasselbe Vorgehen ja zur richtigen Lösung, und solche Aufgaben waren den Kindern in ihren Schulbüchern auch als Einstieg in das Rechnen im Zahlenraum bis 20 in stereotypen, eine ganze Buchseite füllenden Aufgabenreihen vorgegeben worden (vgl. etwa BRUNNER u.a. 2004c, S. 82; BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2005b, S. 14). Freilich mussten wohl alle Kinder bald zur Kenntnis nehmen, dass das Rechnen in diesem Zahlenraum nicht so einfach bleibt und für das Lösen einer Addition in der Regel mehr zu tun ist, als an den zweiten Summanden die Silbe "-zehn" anzuhängen. Auch die Kinder, die diese "Strategie" bei Aufgaben mit Zehnerübergängen anwandten, lösten andere Aufgaben im Zahlenraum bis 20 (wie etwa 13+3) zumeist mit anderen Strategien (oft zählend, zuweilen aber auch unter Nutzung der dekadischen Analogie). Dass sie gerade bei Additionen mit Zehnerübergang so vorgingen, mag Ausdruck davon sein, dass sie sich bei diesen Aufgaben überfordert fühlten und in ihrer Not Zuflucht zu einer noch erinnerten, einfachen und damals ja auch erfolgreichen "Strategie" nahmen.

Insgesamt führten 26,3 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der Aufgaben mit Zehnerübergang zu einem falschen Resultat. Die Fehlerquote ist damit in diesem Bereich fast viermal so hoch wie bei den nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn. Dazu kommen der hohe Anteil an verweigerten Lösungsversuchen und der geringe Anteil an nicht-zählenden Strategien bei diesen Aufgaben. All das scheint auf den ersten Blick jenen SchulbuchautorInnen Recht zu geben, die den Zehnerübergang im ersten Schuljahr für "verfrüht" halten und mit dieser Begründung im ersten Schuljahr gar nicht oder nur "vorbereitend" behandelt wissen wollen (vgl. Kap. 7.1.3).

Schulbuchanalyse (vgl. Kap. 7.1) und LehrerInnenbefragung (vgl. Kap. 7.2) stützen aber die Annahme, dass die Behandlung des Zehnerübergangs in den 20 bzw. 19 Klassen, in denen er im Unterricht thematisiert wurde, mehrheitlich weit davon entfernt war, die Kinder bei der Bewältigung dieser Herausforderung didaktisch-methodisch sinnvoll zu unterstützen (vgl. Kap. 7.3). Es lässt sich aus dieser Untersuchung also keinesfalls ableiten, dass der Zehnerübergang Kinder im ersten Schuljahr prinzipiell überfordern muss. Dass er aber, auf Grundlage des von den interviewten Kindern absolvierten Mathematikunterrichts, die überwiegende Mehrheit dieser Kinder überfordert hat, machen die hohen Anteile von falschen Lösungen, Verweigerung und Zählstrategien bei Aufgaben mit Zehnerübergang sehr wohl deutlich.

8.4.3 Ableitungsstrategien am Ende des ersten Schuljahres

Die Tabellen 54 und 55 zeigen zunächst die absoluten Häufigkeiten einzelner Ableitungsstrategien bei einzelnen Aufgaben am Ende des ersten Schuljahres. Aufgaben im Zahlenraum bis zehn und solche mit Zehnerübergang werden getrennt dargestellt, aus Platzgründen und wegen der Bereichsspezifität einzelner Strategien. Die Strategien sind von links nach rechts nach der Häufigkeit ihrer Verwendung geordnet, die Aufgaben von oben nach unten nach der Häufigkeit, mit der sie abgeleitet wurden.

Tabelle 54: Anzahl der Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres einzelne Aufgaben im Zahlenraum bis zehn mit den angeführten Ableitungsstrategien gelöst haben (n = 139)

	"think addition" bzw. "Unterschied"	Kovarianz bei einer Addition	Kompensation bei einer Subtrakton	Kovarianz bei einer Subtraktion	Dekompoistion	Kompensation bei einer Addition	Gesamt
8–5	16		5				21
10–7	14		1	1			16
7–4	8		1	6	1		16
3+6		15					15
8–4	14						14
7–5	12		2				14
9–6	6		3	4			13
9–8	7		2	2			11
2+7		7				1	8
3+4		6			2		8
10–9	4		1		1		6
4+6		5				1	6
10–5	5						5
3+7						2	2
3+5		2					2
2+5		1					1
ges.	86	36	15	13	4	4	158

Tabelle 55: Anzahl der Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres einzelne Aufgaben mit Zehnerübergang mit den angeführten Ableitungsstrategien gelöst haben (n = 139)

	Teilschrittverfahren	"think addition"	Verdoppeln +1	Kraft der 10	Verdoppeln +2/+3/+4	Kraft der 5	(10+x) −y=(10−y)+x	Verdoppeln −1	Verdoppeln −2	Dekomposition	Kompensation bei einer Addition	gesamt
12–6	12	25					1			2		40
6+7	10		22		1			3				36
3+9	24			6							1	31
5+8	29				1							30
14–9	20			1			2					23
16–10	5	8										13
8+8	1			1	4	2			1			9
6+6	1					2			2			5
gesamt	102	33	22	8	6	4	3	3	3	2	1	187

Wie schon Mitte des Schuljahres wurde auch am Ende des Schuljahres das Anwenden des Tauschprinzips beim Addieren nicht als Ableitungsstrategie gewertet (vgl. Kap. 8.3.3). Die in den Tabellen 54 und 55 erstmals verwendete Kategorie "Dekomposition" wird in Kapitel 8.4.3.6 (für Aufgaben im Zahlenraum bis zehn) und Kapitel 8.4.3.7 (für Aufgaben mit Zehnerübergang) erläutert.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst einige für die Forschungsfragen bedeutsam erscheinende Beobachtungen zu den einzelnen Typen von Ableitungsstrategien aus der dritten Interviewreihe zusammengetragen und kommentiert. Im Zahlenraum bis zehn werden zunächst wieder die Ableitungsstrategien bei Additionen, danach bei Subtraktionen besprochen. Den Aufgaben mit Zehnerübergang ist schließlich ein eigener Abschnitt gewidmet. Zwar erfolgten in diesem Bereich viele Ableitungen mit denselben Strategien, die auch im Zahlenraum bis zehn angewandt wurden. Die getrennte Behandlung scheint aber gerade deshalb gerechtfertigt, weil im Unterricht für Aufgaben mit Zehnerübergang (wenn überhaupt eine Ableitungsstrategie, dann) nur das Teilschrittverfahren behandelt wurde; gerade vor diesem Hintergrund sind die von Kindern für Zehnerübergänge tatsächlich gewählten Ableitungsstrategien von besonderem Interesse.

8.4.3.1 Additions-Strategien auf Basis von Kovarianz im Zahlenraum bis zehn

Die Ableitung einer Addition aus einer bereits gewussten Addition nach dem Prinzip der Kovarianz erfolgte insgesamt 37-mal, am häufigsten (15-mal) bei der Aufgabe 3+6. Als Ableitungsbasis für 3+6 diente in vier Fällen 4+6, in sieben weiteren Fällen 3+7. Dreimal wurde

3+6 aus 2+6 abgeleitet, einmal in gewisser Weise (alternativ wäre eine Kategorisierung als "Ableitung aus einer Malaufgabe" denkbar) aus 3+3, mit folgender Erläuterung (Hannes):

> *"Da hat mir der Papa was gesagt. Da hat er einmal gesagt: Drei mal drei ist neun. Und das hab ich mir auch eingespeichert, und dann hab ich's gewusst. Also ich nehme einmal die drei, die sechs, und dann gebe ich drei dazu, und dann hab ich's dazugegeben, und dann habe ich an das zurückgedacht. Weil drei plus drei sechs ist, und dann noch einmal drei."*

Wie ausgeführt, lieferte die zweite Interviewserie keine überzeugenden Hinweise dafür, dass Additionen mit der Summe 10 (wie von CARPENTER und MOSER behauptet) *generell* früher und häufiger als andere Additionen als Ableitungsbasis verwendet werden (vgl. Kap. 8.3.3.1). Nun wurde aber 3+6 zumindest am Ende des ersten Schuljahres tatsächlich relativ oft gerade aus solchen Additionen abgeleitet. Dieser Befund muss allerdings im Zusammenhang mit der Reihenfolge gesehen werden, in der die Aufgaben beim dritten Interview gefragt wurden: 3+6 war die dritte Aufgabe nach 3+7. Fünf der sieben Kinder, die 3+6 aus 3+7 ableiteten, gaben in ihren Erläuterungen auch explizit zu verstehen, dass sie dabei an die "vorher" gerechnete Aufgabe gedacht hatten.

Es ist also durchaus zweifelhaft, ob diese Ableitungen auch bei einer anderen Aufgabenreihenfolge in dieser Häufigkeit gemacht worden wären. Tatsächlich hatten drei dieser Kinder 3+7 selbst nicht durch Faktenabruf, sondern durch Weiterzählen gelöst, das Ergebnis aber noch im Gedächtnis, als sie mit 3+6 konfrontiert wurden. 3+7 wurde beim dritten Interview auch insgesamt kaum öfter durch Faktenabruf gelöst als 3+6. Auch deshalb ist es unwahrscheinlich, dass bei anderer Aufgabenreihenfolge 3+6 ebenso oft aus 3+7 abgeleitet worden wäre, wie es beim dritten Interview der Fall war.

Dasselbe ist bei den sieben Fällen von Ableitungen von 2+7 aus 3+7 zu bedenken. 2+7 wurde als sechste Aufgabe nach 3+7 gerechnet und war möglicherweise manchen jener Kinder, die 2+7 aus 3+7 ableiteten, noch in Erinnerung. Martin sagte das auch explizit in der Erläuterung seines Lösungsweges für 2+7: *"Das habe ich schon von vorher gewusst. Von der anderen Rechnung. Drei plus sieben. Weil das eins weniger ist."*

Anders liegt der Fall bei den vier Ableitungen von 3+6 aus 4+6: Im Verlauf des dritten Interviews wurde 4+6 erst nach 3+6 gefragt. Die Kinder, die diesen Ableitungsweg gingen, mussten also die Ableitungsbasis ohne Unterstützung durch die Aufgabenreihenfolge wählen. 4+6 war aber auch tatsächlich von deutlich mehr Kindern (41,0 Prozent) bereits automatisiert als 3+6 (32,4 Prozent) – eine wesentliche Voraussetzung dafür, um als Ableitungsbasis genutzt werden zu können.

4+6 wurde aber ebenso oft (viermal) gerade umgekehrt aus 6+3 abgeleitet (wobei wieder zu beachten ist, dass 3+6 im Interview vor 4+6 gefragt wurde). Auch daraus wird deutlich, dass die Additionen mit der Summe 10 für Kinder *nicht automatisch* eine Sonderstellung auch als Ableitungsbasis einnehmen. Wenn sie dies für *manche* Kinder aber offensichtlich doch tun, dann ist auch das wohl im Zusammenhang mit dem Unterricht zu sehen. Aufschlussreich dafür etwa Michaels Erläuterung zu seiner Ableitung von 3+6 aus 4+6:

> *"Weil ich, weil wir, wir haben sehr oft Rechnungen, wo zum Beispiel zehn rauskommt. Und da hab ich, dann war sechs plus vier ist zehn, und da ist mir aufgefallen, wenn drei plus sechs steht, ist es neun."*

Stephans Erläuterungen für seine Ableitung von 2+7 aus 3+7 lassen vermuten, dass die im Zuge der Zehnerüberschreitung im Unterricht thematisierte Strategie "Auffüllen bis zehn" ihre Spuren im Bewusstsein hinterlassen hat. In jedem Fall wird aber deutlich, dass auch für *dieses* Kind die Additionen mit der Summe 10 tatsächlich die Funktion von "Ankeraufgaben" erfüllen:

> *"Ich tu meistens – sieben plus wie viel ist zehn, wenn's unter dem Zehner ist, und dann tu ich einfach wieder zurückrechnen. Ich hab die sieben als erstes, dann die drei dazu, und dann wieder eins weg. Dass es zwei ist."*

Bei den *Verdoppelungsaufgaben* war die tatsächlich für viele Kinder gegebene Ankerfunktion bereits in den beiden ersten Interviewreihen klar erkennbar. Auch im dritten Interview dienten Verdoppelungen in bevorzugter Weise als Ableitungsbasis, allerdings häufiger für Aufgaben mit Zehnerübergang (s. Kap. 8.4.3.7). Im Zahlenraum bis zehn wurde die Aufgabe 3+4 zwar sechs Mal aus einer Nachbaraufgabe nach dem Prinzip der Kovarianz abgeleitet, bemerkenswerter Weise aber in keinem einzigen Fall aus 3+3, obwohl 3+3 zuvor von nahezu 100 Prozent der Kinder durch Faktenabruf gelöst worden war. Zwei Kinder leiteten 3+4 aus 4+4 ab, drei Mal diente 4+2 als Ableitungsbasis, einmal war dies erstaunlicherweise 4+6: Lucas erläuterte seinen Lösungsweg für 3+4 wie folgt: "*Ich habe einfach minus gerechnet. Sechs plus vier ist zehn, und von zehn habe ich drei weggegeben."* – Ein weiteres Beispiel dafür, dass für *manche Kinder* Aufgaben mit der Summe 10 als Ableitungsbasis naheliegen, mitunter offenbar sogar näher als eine Verdoppelung.

Auch hierfür gibt es freilich ein Gegenbeispiel aus der dritten Interviewreihe: Hannes leitete 4+6 nach einigem Nachdenken (Lösungszeit: 10 Sekunden) aus 4+4 ab, mit folgender Erläuterung: *"Weil vier und vier ist acht, vier und fünf ist neun, vier und sechs ist zehn. Das geht immer so weiter."*

Eine weitere nicht ganz naheliegende Ableitung aus einer Verdoppelung zeigte Jacqueline, die 3+5 offenbar aus 5+5 ableitete, mit folgender Erläuterung: *"Ich hab mal gerechnet. Ei-*

gentlich so, dass ich zwei wegnehme. [Frage der Interviewerin: Wo hast du zwei weggenommen?] *Von zweimal fünf."*

8.4.3.2 Additions-Strategien auf Basis von Kompensation im Zahlenraum bis zehn

"Sharing" als Ableitungsstrategie für Additionen war am Ende des ersten Schuljahres noch seltener als bei der zweiten Interviewserie (vgl. Kap. 8.3.2.2). In drei der vier Fälle wurde eine Addition mit der Summe 10 aus einer anderen Addition mit der Summe 10 abgeleitet: Einmal 3+7 aus 4+6 (was durch die Abfolge im Interview *nicht* unterstützt wurde), einmal umgekehrt 4+6 aus 3+7 (was durch die Abfolge der Aufgaben im Interview vielleicht unterstützt wurde), einmal 3+7 aus 9+1 mit dem Zwischenschritt 8+2 (hier wurden also gewissermaßen die Zerlegungen der Zahl zehn nach dem Muster eines "schönen Päckchens" gleichsam "durchdekliniert"). Ein Kind schließlich leitete 2+7 aus 3+6 ab; auch dies wurde durch die Abfolge der beiden Aufgaben im Interview möglicherweise unterstützt.

Zwei der Erläuterungen seien hier angeführt, um einen Eindruck davon zu geben, auf welche Weise die Kinder den genutzten kompensatorischen Zusammenhang verbalisierten:

Sandra erläuterte ihren Lösungsweg für 4+6 wie folgt: "*Das kann man von sieben plus drei wissen. Weil da hat man die Zahl* [zeigt mit dem Finger auf die 4 im Aufgabenkärtchen] *mehr und die Zahl* [zeigt auf die 6] *weniger."*

Mehr um eine tatsächliche *Erklärung* bemüht und eben deshalb (wegen des nicht einfach zu erklärenden Zusammenhanges) etwas schwerer nachvollziehbar ist der oben wegen seiner Ableitung von 4+6 aus 4+4 bereits einmal zitierte Hannes in seiner Erläuterung, wie er 2+7 gelöst habe:

> *"Ich hab an drei, an sechs plus drei gedacht. Und dann hab ich umgewechselt auf sieben plus zwei. Und weil sieben ja um eines mehr als sechs ist, und das war dann, und dann sieben und zwei dazu, ist wie sechs plus drei, hab ich dann gerechnet, sieben plus zwei ist neun."*

8.4.3.3 Ableitungen von Subtraktionen nach dem Komplementaritätsprinzip ("think addition") bzw. nach dem "Konzept des Unterschiedes"

Die bei weitem häufigste Ableitungsstrategie im Zahlenraum bis zehn war in den Interviews am Ende des ersten Schuljahres (wie schon Mitte des Schuljahres) die Ableitung einer Subtraktion aus der inversen Addition bzw. nach dem Konzept des Unterschieds bzw. im Wissen um einen Teile-Ganzes-Zusammenhang (vgl. dazu Kap. 8.3.3.4). Solche unter dem Terminus "think addition" zusammengefassten Strategien wurden im Zahlenraum bis zehn in insgesamt

86 Fällen protokolliert. Die Subtraktion mit den meisten Anwendungen (in 25 Fällen) von "think addition" war aber nicht eine Subtraktion im Zahlenraum bis zehn, sondern 12–6 (siehe dazu auch Kap. 8.4.3.7). Das lässt sich auf Grundlage der bisherigen Ausführungen zum Ableiten vermutlich wie folgt erklären: Einerseits war 6+6 von vielen Kindern bereits automatisiert (50,4 Prozent Faktenabruf beim dritten Interview). Andererseits wussten aber erst sehr wenige dieser Kinder auch 12–6 auswendig (8,6 Prozent Faktenabruf). Viele Kinder hatten also für das Ableiten der Subtraktion 12–6 aus 6+6 sowohl ein Motiv (weil sie 12–6 sonst nur mühsam zählend hätten lösen können) als auch zumindest *eine* der notwendigen Voraussetzungen (die Automatisierung von 6+6). Die *zweite* notwendige Voraussetzung – die Kompetenz zum Ableiten mittels "think addition" – hatten aber wohl *nicht* alle dieser Kinder; daher auch "nur" in Summe 37,5 Prozent Faktennutzung bei 12–6 gegenüber den 50,4 Prozent Faktenabruf bei 6+6.

Das *Zusammenspiel* von Motivation zum Ableiten einerseits, den dafür notwendigen Voraussetzungen andererseits ist wohl auch dafür verantwortlich, dass 8–5 insgesamt 16-mal durch "think addition" abgeleitet wurde, 10–5 aber nur 5-mal, obwohl 5+5 beim dritten Interview von nahezu allen Kindern durch Faktenabruf gelöst werden konnte und sich daher als Ableitungsbasis weit besser geeignet hätte als 3+5 (58,3 Prozent Faktenabruf). Aber es hatten eben auch bereits 82,7 Prozent der Kinder 10–5 automatisiert und daher gar keinen Anlass, diese Aufgabe durch Ableitung zu lösen. Dagegen wussten nur 41,7 Prozent der Kinder auch 8–5 schon auswendig, sie *mussten also ableiten*, wenn sie nicht zählen oder die Finger nichtzählend gebrauchen wollten.

Bei der Interpretation der Häufigkeiten von "think addition" muss wieder die Abfolge der Aufgaben im Verlauf der Interviews berücksichtigt werden: Die Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn waren als geschlossener Aufgabenblock den Additionen nachgereiht worden. Manche Kinder brachten in den Erläuterungen zu ihren Ableitungen zum Ausdruck, dass sie "an die Rechnung vorher" gedacht hätten. Sie hatten also noch in Erinnerung, die inverse Addition zuvor gelöst zu haben. Daraus lässt sich zwar natürlich nicht schließen, dass sie die Subtraktion *nur deshalb* durch "think addition" abgeleitet haben, weil sie einige Minuten zuvor die dazu inverse Addition gelöst und daher noch im Gedächtnis präsent hatten. Es ist aber denkbar, dass "think addition" insgesamt seltener gewesen wäre, wenn in den Interviews zuerst die Subtraktionen, dann die Additionen gefragt worden wären.

So hatten etwa sechs der 14 Kinder, die 10–7 durch "think addition" lösten, zuvor 3+7 durch Weiterzählen gelöst. Das scheint der These von BAROODY zu widersprechen, dass "think addition" umso wahrscheinlicher wird, je höher der Automatisierungsgrad der inversen Addition ist. Doch vermutlich war zumindest einigen dieser Kinder die von ihnen durch (rasches) Weiterzählen vom größeren Summanden gelöste Aufgabe 3+7=10 noch präsent, als sie mit 10–7 konfrontiert wurden. Eines dieser bei 3+7 weiterzählenden Kinder erklärte auch explizit, es habe 10–7 gewusst, *"weil zuerst war die Rechnung drei und sieben"*. Dass dieses Kind *unter diesen Umständen* 10–7 aus 3+7 bzw. 7+3 ableitete, mag für sein generelles Herangehen an diese Aufgabe untypisch sein.

Auch beim dritten Interviewtermin wurde "think addition" von der Mehrzahl der Kinder, die diese Ableitungsstrategie verwendeten, bei mehr als nur einer Subtraktion angewandt – ein Hinweis dafür, dass diesen Kindern das *Prinzipielle, Gesetzmäßige* dieser Strategie bewusst gewesen sein dürfte. Wenn sie daneben dennoch für andere Subtraktionen oft auch Zählstrategien verwendeten, dann zumeist wohl nur deshalb, weil sie für diese anderen Subtraktionen über keine Ableitungsbasis (in Gestalt der dazu inversen Additionen) verfügten. So wandten zehn der 14 Kinder, die 8–4 aus 4+4 ableiteten, bei zumindest einer der drei Subtraktionen 10–7, 9–6 und 7–4 auch Zählstrategien an. Aber die zu diesen Subtraktionen inversen Additionen 3+7, 3+6 und 3+4 hatten auch weit weniger Kinder automatisiert als die Addition 4+4.

Es gab (wie schon beim zweiten Interviewtermin, vgl. Kap. 8.3.3.4) auch am Ende des ersten Schuljahres einige Kinder (insgesamt neun), die "think addition" *ausschließlich* bei Halbierungsaufgaben (8–4 und/oder 10–5 und/oder 12–6) anwandten und im selben Interview zumindest eine der beiden Subtraktionen 10–9 oder 9–8 *zählend* lösten. Das lässt sich mit einiger Wahrscheinlichkeit nicht daraus erklären, dass diese Kinder 9+1 bzw. 8+1 zu diesem Zeitpunkt noch nicht (oder nicht ausreichend, jenseits des von BAROODY vermuteten "Schwellenwerts") automatisiert gehabt hätten (vgl. Kap. 8.3.3.4). Plausibler scheint, dass zumindest manchen dieser Kinder beim Ableiten einer Halbierungsaufgabe aus der hochgradig automatisierten Verdoppelungsaufgabe nicht das *Prinzip* der Umkehraufgabe deutlich war; dass sie also (noch) nicht erkannt hatten, dass *jede* Subtraktion sich aus der inversen Addition ableiten lässt. Dass ihnen aber gerade im Falle der Halbierungsaufgaben die Umkehrung der zugehörigen Verdoppelungen in den Sinn kam, könnte am besonders eingängigen "verbalen Muster" dieser Ableitungen liegen, wie bereits in Kapitel 2.10.6 vermutet ("vier plus vier ist acht, acht minus vier ist vier", mit nur zwei zu merkenden unterschiedlichen Zahlwörtern). Zur Absicherung dieser Vermutung hätte es freilich einer ausgedehnteren Untersuchung speziell der Subtraktionsstrategien bedurft (Einbeziehung weiterer Verdoppelungen und weiterer Subtraktionen zweier Nachbarzahlen); die Zusatzaufgaben liefern aber zumindest weitere Daten, die sich in den Rahmen dieser Vermutung gut einfügen (vgl. Kap. 8.4.5).

8.4.3.4 Ableitungen von Subtraktionen auf Basis von Kovarianz

Insgesamt 13-mal wurde beim dritten Interview eine Subtraktion nach dem Prinzip der Kovarianz abgeleitet. In ihren Erläuterungen verwiesen die Kinder dabei zumeist auf eine *Addition*, aber nicht auf die zur gefragten Subtraktion inverse Addition, sondern auf eine Nachbaraufgabe derselben. Aus dieser leiteten sie gemäß ihren Erläuterungen zunächst nach dem Kovarianzprinzip die zur gefragten Subtraktion inverse Addition ab, um aus dieser schließlich mit Hilfe von "think addition" die eigentlich gefragte Aufgabe zu lösen. Diese Ableitungen könnten also auch einfach als "think addition" verbucht werden, doch würde damit der konzeptuell beachtliche Zwischenschritt unterschlagen. Zwei Protokolle seien im Folgenden angeführt, um die Komplexität der Ableitungsschritte zu verdeutlichen:

> Peter bei 9–6: *"Weil sechs plus vier ist zehn. Aber plus drei ist neun. Und neun minus, das ist ja dann drei!"*
>
> Anna bei 9–6: *"Weil die hab ich wieder über zehn. Weil vier, ist ja zehn. Eins weniger ist gleich neun. Und bei minus weiß ich, dann kommt das Gleiche."*

Ableitungen einer Subtraktion *direkt* aus einer anderen Subtraktion nach dem Prinzip der Kovarianz gab es im Fall von 9–8, das einmal aus 10–8 abgeleitet wurde, und bei 7–4, das zweimal direkt aus 8–4 abgeleitet wurde, so etwa von Hannes, der dies wie folgt begründete: *"Weil acht minus vier ist vier, und dann hab ich noch eins weggegeben, drei."*

Tabelle 56 zeigt alle Fälle dieses Typs mit der jeweiligen Ableitungsbasis im Überblick.

Tabelle 56: Fälle von Ableitungen einer Subtraktion nach dem Prinzip der Kovarianz (in Kombination mit "think addition") am Ende des ersten Schuljahres

9–6 aus 10–6 bzw. 6+4	4 Fälle
7–4 aus 8–4 bzw. 4+4	4 Fälle
7–4 aus 6–4 bzw. 4+2	2 Fälle
9–8 aus 10–8 bzw. 8+2	2 Fälle
10–7 aus 9–7 bzw. 7+2	1 Fälle

8.4.3.5 Ableitungen von Subtraktionen auf Basis von Kompensation

Die Ableitung einer Subtraktion nach dem Prinzip der Kompensation ("sharing") war am Ende des ersten Schuljahres häufiger anzutreffen als zu Beginn des zweiten Halbjahres. Die Kinder gingen dabei zumeist tatsächlich von einer bereits automatisierten Subtraktion aus (und wandten also, ihren Erläuterungen gemäß, nicht zusätzlich auch noch "think addition" an). Claire machte diese direkte "Koppelung" (hier bezeichnenderweise gerade an eine Halbierungsaufgabe) in ihrer Erläuterung zu 8–5 sehr schön deutlich: "*Weil wenn man acht hat, tut man eigentlich immer vier weg, und wenn man fünf wegtut, hat man dann nur mehr drei."* Tabelle 57 zeigt alle 14 Fälle von "sharing" mit der jeweiligen Ableitungsbasis.

Tabelle 57: Fälle von Ableitungen einer Subtraktion auf Basis von Kompensation am Ende des ersten Schuljahres

8–5 aus 8–4 bzw. 4+4	5 Fälle
9–8 aus 9–9	2 Fälle
9–6 aus 9–5	2 Fälle
9–6 aus 9–7	1 Fall
10–9 aus 10–10	1 Fall
10–7 aus 10–8	1 Fall
7–5 aus 7–6	1 Fall
7–5 aus 3+4	1 Fall
7–4 aus 7–5	1 Fall

Wie aus der Tabelle hervorgeht, kombinierten manche Kinder "sharing" mit "think addition", wie Elena in ihrer Ableitung (oder zumindest in ihrer *Erläuterung* zu dieser Ableitung) von 7–5 aus 3+4:

> *"Vier plus drei, nein vier minus drei, nein… sieben ist vier und drei. Nachher, da hab ich nur noch das plus dazugerechnet, und das dann minus. Das plus, was dann heraus gekommen ist, minus. Mit den fünf und zwei hab ich nachher minus gerechnet."*

Der Zusammenhang zwischen "sharing" und einem ausgeprägten (numerischen) Teile-Ganzes-Verständnis von Zahlen (vgl. Kap. 2.10.8) ist klar erkennbar in Benjamins Erläuterungen zu seiner Ableitung von 8–5:

> *"Ich habe mir einfach im Kopf – weil das hab ich schon halbwegs gewusst. Weil mit vier und vier entsteht doch acht. Und dann gebe ich aber fünf weg, dann habe ich keinen Vierer, sondern eins mehr als vier, also können dann keine vier übrig bleiben, sondern nur drei."*

Schon zu Schulbeginn war deutlich geworden, dass "sharing" manchen Kindern zumindest ebenso nahe liegt wie "think addition". Ein ausgeprägtes Beispiel dafür lieferte beim dritten Interview David, der "sharing" bei 7–5, 10–7 und 9–6 anwandte, daneben aber auch "think addition", letzteres bezeichnenderweise gerade bei den Halbierungsaufgaben 8–4 und 12–6. Die Aufgabe 14–9 versuchte er dann durch eine Kombination aus "sharing" und Kovarianz zu lösen und scheiterte schließlich, wenn auch auf hohem Niveau: Er ermittelte als Lösung von 14–9 nach langem, konzentriertem Nachdenken die Zahl 9 und erläuterte dies wie folgt:

> *"Wenn sechzehn minus neun sieben ist, dann ist fünfzehn minus neun acht, und vierzehn minus neun neun.* [Du hast mit sechzehn minus neun angefangen! Und woher weißt du, dass das sieben ist?] *Na wenn sechzehn minus zehn sechs ist, dann ist sechzehn minus neun sieben."*

8.4.3.6 Dekomposition innerhalb des Zahlenraums bis 10

Insgesamt viermal im Rahmen der dritten Interviewreihe erklärten Kinder, sie hätten beim Lösen einer Aufgabe im Zahlenraum bis zehn den zweiten Summanden bzw. den Subtrahenden in zwei Portionen zerlegt und in zwei Schritten dazugegeben bzw. weggenommen. Diese Strategie wird mangels eines griffigeren Ausdrucks als "Dekomposition" bezeichnet. Die Kinder wandten also ihrer eigenen Auskunft nach eine Art "Teilschrittverfahren" innerhalb des Zahlenraums bis 10 an, wobei sie den Zwischenschritt jeweils gerade bei der Zahl fünf einlegten, wie die verbalen Protokolle deutlich machen:

> Anna erläutert ihren Lösungsweg für 3+4: *"Ich hab jetzt eins dazugegeben, dann sind's mal fünf. Und von den drei ist es auch nur mehr zwei. Und fünf plus zwei ist gleich sieben."*
>
> Anna erläutert ihren Lösungsweg für 7–4: *"Weil ich habe sieben, dann tu ich mal zwei weg. Und dann tu ich noch einmal von fünf zwei weg. Und ich weiß, fünf minus zwei ist gleich drei."*
>
> Stephan erläutert seinen Lösungsweg für 3+4: *" Vier plus eins plus zwei."*
>
> Maximilian erläutert seinen Lösungsweg für 10–9: *"Erst vier weg, und dann noch fünf weg."*

Diese Strategie ist möglicherweise zu verstehen als eine gedankliche Fortführung früherer fingerbasierter Rechenstrategien. Beim (zählenden wie nicht-zählenden) Fingerrechnen ist der "Zwischenschritt" bei der Zahl fünf durch die Fingeranzahl an einer Hand objektiv vorgegeben. Ob er subjektiv auch wahrgenommen wird, ist eine Frage der Reflexion. Wenn ein Kind diesen Zwischenschritt beim Fingerrechnen aber bewusst wahrnimmt, mag es ihn in weiterer Folge auch in der Vorstellung bzw. in Gedanken vollziehen, sofern es die Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis zehn noch nicht so weit automatisiert hat, dass es auf solche "Zwischenschritte" verzichten könnte.

Eine andere Erklärung könnte darin liegen, dass die schulische Behandlung des Teilschrittverfahrens für Zehnerübergänge das eine oder andere Kind gewissermaßen "auf den Geschmack gebracht" haben könnte, sich eine als schwierig empfundene Aufgabe durch Dekomposition in zwei Schritte zu erleichtern. Auffällig ist jedenfalls, dass solche Dekompositionen innerhalb des Zahlenraums bis 10 weder zu Beginn noch Mitte des ersten Schuljahres auch nur einmal in den verbalen Protokollen der Kinder auftauchten – obwohl das Faktenwissen im Zahlenraum bis zehn insgesamt geringer war, es also objektiv mehr Bedarf an Dekomposition gegeben hätte. Die Strategie scheint aber insgesamt so selten zu sein, dass eine Klärung dieser Frage wohl allenfalls durch qualitative Interviews mit einer weit größeren Stichprobe erfolgen könnte.

8.4.3.7 Ableitungsstrategien für Aufgaben mit Zehnerübergang

Die sieben Aufgaben mit Zehnerübergang wurden am Ende des ersten Schuljahres in insgesamt 174 Fällen (187 mit Einrechnung von 16–10) durch eine Ableitungsstrategie gelöst. Dabei war das Teilschrittverfahren mit 102 Anwendungen die am öftesten verwendete Ableitungsstrategie. Bei vier der sieben Aufgaben (6+6, 6+7, 8+8, 12–6) wählten Kinder aber, sofern sie überhaupt ableiteten, eine andere Ableitungsstrategie *häufiger* als das Teilschrittverfahren.

Am häufigsten verwendet wurde das Teilschrittverfahren bei 3+9, 5+8 und 14–9. Es liegt wohl am spezifischen "Zahlenmaterial", dass das Teilschrittverfahren Kindern gerade hier vorteilhaft erschien: Sofern 3+9 als 9+3 gelöst wird, ergibt sich ein relativ leichter erster Teilschritt (das Ergänzen von neun auf zehn) und ein gleichfalls relativ leichter zweiter Teilschritt (die Zerlegung von drei in eins und zwei). Ähnliches gilt für 5+8, sowohl wenn es als 5+5+3 gerechnet wird (relativ leichtes Ergänzen von fünf auf zehn, relativ leichte Zerlegung der acht entsprechend der vertrauten Fingerzeigeweise als fünf und drei), als auch in der kommutativen Variante 8+2+3 (relativ leichte Ergänzung auf zehn; fünf ist als kleine Zahl relativ leicht zu zerlegen). Auch bei 14–9 fällt die für das Teilschrittverfahren notwendige Zerlegung der neun in fünf und vier mit der Fingerzeigeweise der Zahl neun zusammen.

Freilich lassen sich gerade 3+9 und 14–9 auch durchaus vorteilhaft mit der "Kraft der Zehn" lösen (3+9 als 3+10–1, 14–9 als 14–10+1). Bei 3+9 war diese (in der Schule nicht behandelte) Strategie auch gar nicht selten (sechs Fälle; 14–9 wurde nur von einem Kind mit der "Kraft der Zehn" gelöst). Aber hier kommt wohl zum Tragen, dass einerseits ausschließlich das Teilschrittverfahren in der Schule behandelt worden war, dieses aber andererseits auch gerade für die Bewältigung dieser Aufgaben tatsächlich gut geeignet ist.

Bei den vier anderen Aufgaben lag es für die Mehrzahl jener Kinder, die hier überhaupt eine Ableitungsstrategie anwandten, aber offenbar näher, andere Strategien zu wählen. Und diese Wahl lässt sich jeweils im Zusammenhang mit dem spezifischen "Zahlenmaterial" und dem spezifischen arithmetischen Faktenwissen der Kinder gut nachvollziehen:

– Bei der Aufgabe 12–6 überwog "think addition" (25 Fälle) klar gegenüber dem Teilschrittverfahren (zwölf Fälle). Grundlage dafür war, dass 6+6 bereits von knapp über 50 Prozent aller Kinder durch Faktenabruf gelöst worden war. "Think addition" ist auf dieser Grundlage aber *objektiv* (weil einschrittig) weniger umständlich ist als das Wegnehmen von zunächst zwei, dann vier.
– Für 6+7 wählten (auf derselben Grundlage) 22 Kinder "Verdoppeln plus 1" auf Grundlage von 6+6 (drei weitere "Verdoppeln minus 1" auf Grundlage von 7+7), aber nur 10 Kinder das im Unterricht behandelte Teilschrittverfahren.

- Die Aufgabe 8+8 wurde von drei Kindern aus 6+6 abgeleitet: Vom auswendig gewussten Resultat 12 ausgehend, rechneten sie in Zweierschritten weiter. Ein Kind wählte "Verdoppeln plus 2" (von 7+7 ausgehend), eines "Verdoppeln minus 2" (von 9+9 ausgehend). Zwei weitere Kinder rechneten 8+8 mit der "Kraft der Fünf", eines mit der "Kraft der Zehn". Das Teilschrittverfahren aber, das einzige in der Schule für Aufgaben mit Zehnerübergang erarbeitete Verfahren, wurde für 8+8 von genau einem von 139 Kindern angewandt. Hier spielt wohl zum einen eine Rolle, dass gerade jene Kinder, die sonst viele Zehnerübergänge durch Ableitungsstrategien bewältigten, 8+8 oft schon auswendig wussten. Zum anderen fordert das Teilschrittverfahren für 8+8 eine relativ schwierige Zahlzerlegung (die Zahl 8 muss in 2+6 zerlegt werden).
- Die Addition 6+6 wurde nur von fünf Kindern durch Ableitung gelöst, was wohl daran liegt, dass jene Kinder, die kraft ihres konzeptuellen Wissens überhaupt zu Ableitungen imstande waren, 6+6 am Ende des ersten Schuljahres in der Regel bereits auswendig wussten. Von den fünf Ableitungen für 6+6 entfiel nur eine auf das Teilschrittverfahren. Zwei Kinder leiteten 6+6 aus 7+7 ab ("Verdoppeln minus zwei"), welches sie offenbar leichter auswendig gelernt hatten als 6+6. Zwei Kinder leiteten 6+6 aus 5+5 ab ("Verdoppeln plus zwei", was in diesem Fall mit "Kraft der Fünf" zusammenfällt).

Bei all dem ist zu berücksichtigen, dass am Ende des ersten Schuljahres zwar insgesamt 65 Kinder zumindest eine Aufgabe mit Zehnerübergang mit einer Ableitungsstrategie lösten. 20 dieser Kinder taten dies jedoch auch nur bei *genau einer* solchen Aufgabe; alle anderen Aufgaben mit Zehnerübergang wurden von diesen Kindern zählend oder gar nicht bewältigt (zuweilen aber auch auswendig gewusst; letzteres betraf fast ausschließlich die Aufgabe 6+6). Man kann also zumindest bei diesen 20 Kindern schwerlich davon sprechen, dass sie bereits "nicht-zählende Strategien für den Zehnerübergang" erworben hatten. Eher trifft zu, dass ihnen *für einzelne Aufgaben* auch mit Zehnerübergang die eine oder andere nicht-zählende Strategie zur Verfügung stand. Das war dann aber nur bei acht dieser 20 Kinder das Teilschrittverfahren. Bei neun Kindern handelte es sich dagegen um "think addition" für 12–6, bei zwei weiteren um "Verdoppeln plus eins" für 6+7, also um Strategien, die gerade *nicht spezifisch* für Zehnerübergänge (aber natürlich *auch* für diese) geeignet sind. (Eines diese Kinder bewältigte 6+6 mit der "Kraft der Fünf", löste alle anderen Zehnerübergänge aber zählend.)

Jene 45 Kinder aber, die zumindest zwei der sieben Aufgaben mit Zehnerübergang durch Ableitungen lösten, waren in ihrer Strategiewahl mehrheitlich flexibel: 35 dieser Kinder zeigten *mindestens zwei verschiedene* Ableitungsstrategien für solche Aufgaben. Bei 26 dieser Kinder war *auch* das Teilschrittverfahren dabei, welches diese Kinder aber nur für bestimmte Aufgaben anwandten, während sie für andere Aufgaben andere Ableitungsstrategien wählten. Und nur vier jener 45 Kinder, die mehr als eine Aufgabe mit Zehnerübergang durch Ableitungsstrategien lösten, wandten dabei ausschließlich das Teilschrittverfahren an.

Ein Zwischenfazit:
Jene Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres erst eine einzige Aufgabe mit Zehnerübergang durch Ableitungsstrategien bewältigten, taten dies *mehrheitlich nicht* mit dem Teilschrittverfahren, also nicht mit jenem Verfahren, das ihnen in der Schule für solche Aufgaben zumeist alternativlos vorgegeben worden war. Und jene Kinder, die zwei oder mehr Aufgaben mit Zehnerübergang ableiteten, taten dies *in ihrer überwiegenden Mehrheit nicht ausschließlich* mit dem Teilschrittverfahren. Die Festlegung auf das Teilschrittverfahren, die im Unterricht erfolgte, hat also in der Regel weder bei den Kinder, die wenig ableiteten, noch bei den Kindern, die viel ableiteten, dazu geführt, dass sie sich in ihren Strategien für Zehnerübergänge auf das Teilschrittverfahren hätten einengen lassen. Diese gegen den Rat der aktuellen Fachdidaktik (vgl. Kap. 4.5) erfolgte Festlegung mag aber dazu beigetragen haben, dass *mehr als zwei Drittel* aller Lösungsversuche von Aufgaben mit Zehnerübergang entweder *zählend oder gar nicht* bewältigt wurden. Dies zu überprüfen, wäre freilich Aufgabe einer eigenen, entsprechend konzipierten Vergleichsstudie.

Einen schönen (indirekten) Hinweis darauf, dass zumindest manche Kinder das Teilschrittverfahren offenbar nicht als Erleichterung, sondern als Verkomplizierung des Rechnens empfunden haben, lieferte Simone, die im Interview bei der Ankündigung, dass nun noch "ein paar Minusrechnungen mit größeren Zahlen" dran seien, zunächst geklagt hatte: "Minus mag' ich nicht!" Später löste sie 12–6 nach nur kurzem Nachdenken richtig. Daraufhin entwickelte sich folgender kurzer Dialog:

> Interviewer: *"Schon wieder so schnell! Und dabei hast du gesagt, du magst keine Minus!"*
>
> Simone: *"Weil wir haben nämlich schon über den Zehner, und die mag ich nicht!"*
>
> Interviewer*: "Aha! Und das ist keine über den Zehner?"*
>
> Simone (schüttelt verneinend den Kopf, dann): *"Das hab ich so gerechnet: Weil sechs plus sechs ist zwölf. Und wenn ich jetzt sechs weggebe von zwölf, bleiben sechs übrig."*

Aus Simones Sicht ist 12–6 keine Rechnung "über den Zehner", weil diese Rechnung bei Anwendung von "think addition" (auf Basis des automatisierten 6+6) ja tatsächlich um nichts schwerer ist als etwa 8–4 (auf Basis von 4+4). Rechnungen "über den Zehner" setzt sie vermutlich gleich mit dem in der Schule vorgegebenen Teilschrittverfahren. Und vermutlich deshalb mag sie solche Rechnungen nicht, und das wohl wiederum deshalb, weil sie *dieses* Rechnen über den Zehner als *schwer* empfindet. Verglichen mit "think addition" oder "Verdoppeln plus eins", welches Simone bei 6+7 anwandte, ist es das ja auch.

Auf welchen Wegen kamen nun Kinder zu ihren unterschiedlichen Strategien für Zehnerübergänge? Dass gerade beim Teilschrittverfahren der Unterricht eine wichtige Rolle gespielt hat, liegt nahe. Kinder, die das Teilschrittverfahren anwandten, gebrauchten in ihren Erläuterungen dazu auch wiederholt Formulierungen, die sie vermutlich im Unterricht kennen gelernt hatten, etwa *"Ich hab da den Zehner vollgemacht"* (Elena, ebenso Clemens) oder *"Zuerst hab ich zum Zehner gerechnet"* (Jan). Auffällig häufig verwendeten Kinder bei Erläuterungen des Teilschrittverfahrens den Plural (was bei anderen Strategien nie vorkam), wie etwa Katharina in der Beschreibung ihres Rechenwegs für 8+5: *"Acht plus zwei ist ja zehn. Und dann haben wir noch von den fünf drei. Und die geben wir noch zu den zehn dazu. Dann ist es dreizehn."* Stephan kombinierte dies mit einem direkten Hinweis darauf, dass das "wir" das gemeinsame Vorgehen in der Klasse reflektiert: *"Acht plus zwei plus drei. Das haben wir gelernt. Da hat sie* [offenbar die Lehrerin; Anmerkung M.G.] *gesagt, da müssen wir einmal bis zehn, und nachher muss man das andere machen."* Auch Adriana erklärte ungefragt, wie sie ihre Strategie für das von ihr richtig gerechnete 5+8 gelernt hat: "*Fünf plus fünf ist zehn, fünf* (sic!) *plus drei ist dreizehn. Haben wir bei der Frau Lehrerin gelernt."*

Solche Verweise auf eine Erarbeitung im Unterricht gab es bei anderen Ableitungsstrategien nicht – was auf Grundlage der aus Schulbuchanalyse und LehrerInnenbefragung gewonnenen Hypothesen zur Unterrichtsgestaltung (vgl. Kap. 7.3) freilich auch nicht zu erwarten war. Die anderen von Kindern für Aufgaben mit Zehnerübergang verwendeten Strategien waren im Unterricht eben kaum ein Thema gewesen (gemäß LehrerInnenfragebogen: in ganz wenigen Klassen, vgl. Kap. 7.2.5); das Teilschrittverfahren in den meisten Klassen sehr wohl. Und wenn ein Verfahren als das *einzig mögliche* für eine bestimmte Aufgabenstellung vermittelt wird, dann liegt es nahe, dies in der Art einer *"Vorschrift*", eines *"Algorithmus"* einzuüben: *"Zuerst machen wir den Zehner voll, dann..."* Die zitierten Erläuterungen der Kinder deuten darauf hin, dass dies jedenfalls in einigen Klassen so geschehen ist.

Wenn nun dennoch viele Kinder alternative Strategien für Zehnerübergänge angewandt haben, dann lässt sich daraus nicht folgern, dass es sich dabei in allen Fällen um "selbstständige Strategieentdeckungen" gehandelt haben muss. Tatsächlich lassen sich die Einflüsse, denen die Kinder bei ihrer Strategieentwicklung ausgesetzt waren, nicht lückenlos aufklären, weder jene im außerschulischen, noch im schulischen Bereich. (Auch wenn eine Strategie nicht im Klassenunterricht behandelt wurde, mag ein Kind sie ja bei einem anderen Kind derselben Klasse kennen gelernt haben.)

Bei seltenen Strategien wurde in den Interviews immer auch nachgefragt, ob ein Kind diese Art zu rechnen "selbst herausgefunden" oder sie ihm jemand gezeigt habe. Die meisten Kinder sagten dann etwa "Weiß ich einfach!" oder "Bin ich selbst draufgekommen!" Nur selten wurden (dann stets *außer*schulische) Quellen genannt, so etwa von Markus, der mehrfach mit der "Kraft der Fünf" über den Zehner gerechnet und dies wunderbar klar erläutert hatte, etwa bei der als Zusatzaufgabe gefragten Addition 7+7:

> *"Vier hat man, wenn man von denen* [tippt auf die beiden 7er des Aufgabenkärtchens] *zwei weggibt. Dann hat man noch zwei Fünfer. Zwei Fünfer sind zehn.* [...] *Wenn man das dann alles zusammenmischt, dann wird es automatisch vierzehn."*

Markus erklärte auf Befragung, er habe das "von einer CD" – offenbar einer Lern-Software – gelernt. Seine Lehrkraft vermerkte übrigens im Fragebogen zur Strategie "Kraft der Fünf": "Meine Kinder rechnen nicht so!" (vgl. Kap. 7.2.5).

Miriam erläuterte ihr Vorgehen bei 8+8 wie folgt: *"Sechs und sechs ist zwölf, sieben und sieben ist vierzehn, und acht plus acht sechzehn. Da hab ich fünfzehn ausgelassen. Das hat mir die Mama gezeigt."* Ähnliche Einflüsse sind auch bei anderen Kindern, die im Interview stolz verkündeten, sie wären auf solche Strategien "selbst draufgekommen", natürlich nicht auszuschließen.

Neben "Verdoppeln plus eins" (bzw. "Verdoppeln plus zwei" usw. sowie "Verdoppeln minus eins" bzw. "Verdoppeln minus zwei"), "think addition" und der bereits dokumentierten Strategie "Kraft der Fünf" (je zwei Anwendungen bei 8+8 und 6+6, zusätzlich einmal bei der Zusatzaufgabe 7+7) kamen in den Interviews am Ende des ersten Schuljahres alternativ zum Teilschrittverfahren noch folgende Strategien für Zehnerübergänge zum Einsatz:

Insgesamt achtmal wurde mit der *"Kraft der Zehn"* gerechnet, davon sechsmal bei 3+9. Johannes löste auf diese Weise 8+8, mit folgender Erläuterung: "[Ich habe] *achtzehn minus zwei* [gerechnet]! *Achtzehn minus zwei gleich sechzehn."* Auf die Frage, warum er gerade achtzehn minus zwei gerechnet habe, erklärte er: "*Weil so geht es für mich am schnellsten. Weil zehn plus acht ist achtzehn. Weil das eine Achterrechnung ist und so!"* Das klingt, als hätte er die "Kraft der Zehn" als ein "Prinzip" für "Achterrechnungen" erkannt. Die Aufgabe 5+8 löste derselbe Junge aber mit dem Teilschrittverfahren (bzw. mit der "Kraft der Fünf"), als 5+5+3. Vermutlich war ihm die Zerlegung der 8 in 5+3 (gemäß der Standard-Fingerdarstellung der Zahl acht) geläufiger als die Zerlegung der 8 in 2+6. Ein anderer Junge wandte die "Kraft der Zehn" bei 14–9 an, rechnete also 14–10+1, und verkündete das Ergebnis mit der Jubelgeste eines Torschützen (rechte Hand als Faust nach oben gereckt).

Insgesamt dreimal wurden Zehnerunterschreitungen (einmal 12–6, zweimal 14–9) mit der in Kapitel 2.10.9 erläuterten Strategie (10+x)–y = (10–y) + x gelöst. So erläuterte etwa Jan seinen Lösungsweg bei 12–6 wie folgt: *"Da hab ich erst zehn minus sechs, das ist vier, und wenn ich dann zwei auffi* ["hinauf", Anm. d. Ver.] *rechne, dann ist das sechs."* Ähnlich Franz bei 14–9: "*Da hab ich mir gedacht ... jetzt, neun hab ich weggetan. Dann habe ich mir gedacht, wenn jetzt neun weg sind, und vier habe ich noch und einen, dann hab ich vier plus eins gemacht, und dann ist es fünf."*

Zwei Kinder lösten 12–6, indem sie von 12 in drei Zweierschritten zurückrechneten. Hubert erläuterte dies wie folgt: "*Einfach die zwei weggegeben, und dann noch zwei, und dann noch zwei. Obwohl sechs plus sechs auch zwölf ist. Aber ich hab's irgendwie jetzt anders gerechnet."* Ein schönes Beispiel dafür, dass aus der Verwendung einer Strategie bei einer bestimmten Aufgabe nicht gefolgert werden kann, dass dieses Kind dieselbe Aufgabe nicht auch anders rechnen könnte (und vielleicht zu anderen Zeiten nicht immer wieder auch anders rechnet). Dieser als "Dekomposition" unter den Ableitungsstrategien gewertete Lösungsweg ist freilich ein definitorischer Grenzfall; er könnte wohl auch als "geschickte Zählstrategie (Zählen in Zweierschritten) eingeordnet werden.

Verena scheint bei der Aufgabe 3+9 eine bemerkenswerte Variante einer Kompensationsstrategie angewandt zu haben: Nach einigem Nachdenken (10 Sekunden) nannte sie die richtige Lösung und erläuterte: "*Da hab ich einfach gedacht, ha, wenn das jetzt, das ist so wie sechs plus sechs, nur halt drei plus neun, und dann habe ich gedacht und hab mir einfach zwölf gesagt. Weil das ist das gleiche Ergebnis und hat den gleichen Sinn."* Bedauerlicherweise gelang es der Interviewerin nicht, dem Kind klarere Aussagen dazu zu entlocken, inwiefern 3+9 und 6+6 für es "den gleichen Sinn" haben. Ob hier also tatsächlich der Gedanke der gegensinnigen Veränderung zur Anwendung kam, muss unsicher bleiben.

Zu kommentieren bleibt noch, dass immerhin fünf Kinder das Teilschrittverfahren auch bei der Aufgabe 16–10 anwandten. Statt also zehn einfach als "1 Zehner" wegzunehmen, zerlegten diese Kinder zehn in sechs und vier und nahmen es (vergleichsweise umständlich, aber natürlich auch richtig) in zwei Schritten von 16 weg. Das mag darauf hinweisen, dass diese Kinder, die seit Monaten (zumeist seit Februar des Schuljahres) im Zahlenraum bis 20 (und zumeist seit einigen Wochen auch schon bis 30) rechneten, zweistellige Zahlen noch nicht als Zusammensetzungen aus Zehnern und Einern begriffen hatten. Es mag (und wenn, dann vermutlich *zusätzlich* zu einem noch unausgereiften Zehner-Einer-Verständnis) aber auch die durch den Unterricht beförderte *Gewohnheit* eine Rolle spielen, dass "solche Aufgaben" eben "so" (also mit dem Teilschrittverfahren) gelöst werden *müssen*. Zudem ist zu berücksichtigen, dass sich die Aufgabe 16–10 oder eine andere Subtraktion dieses Typs (zweistellige Zahl minus 10) erstaunlicherweise in *keinem* der fünf im Unterricht der Kinder verwendeten Schulbücher an auch nur einer einzigen Stelle findet.

Für acht Kinder wurde bei 16–10 "think addition" vermerkt. Sie hatten diese Aufgabe erst nach einigem Nachdenken gelöst und ihr Vorgehen im Sinne dieser Ableitungsstrategie erläuterte. Andere Kinder lösten 16–10 innerhalb einer Sekunde richtig und erklärten, sie hätten das "einfach so gewusst" oder dergleichen; hier wurde "Faktenabruf" gewertet. Auch manche dieser Kinder mögen tatsächlich sehr rasch an die Umkehraufgabe (10+6) gedacht oder (was zwar konzeptuell unterschieden, praktisch aber kaum unterscheidbar ist) ihr Wissen von Zehnern und Einern aktiviert haben. Die Differenzierung zwischen Faktenabruf und raschem Ableiten war also gerade auch bei 16–10 in vielen Fällen mit Unsicherheit behaftet.

8.4.4 "Scoring in context" am Ende des ersten Schuljahres

Betrachtet man die Strategiewahl der Kinder über alle beim dritten Interview gefragten Aufgaben hinweg, so haben am Ende des ersten Schuljahres 86 von 139 Kindern zumindest eine Ableitungsstrategie gezeigt. Der Anteil der Kinder mit mindestens einer Ableitung ist damit von 28,1 Prozent (bzw. 18,7 Prozent ohne Berücksichtigung der auch später nicht als Ableitung gewerteten Strategie "Tauschaufgabe") zu Beginn über 41 Prozent Mitte des Schuljahres auf 61,9 Prozent am Ende des Schuljahres von Interview zu Interview deutlich gestiegen.

Innerhalb der Kinder mit zumindest einer Anwendung einer Ableitungsstrategie sind freilich deutliche Unterschiede festzuhalten bezüglich der *Häufigkeit* des Ableitens wie auch bezüglich der *Art von Aufgaben*, bei denen abgeleitet wurde:

- 25 Kinder lösten *nur genau eine* Aufgabe durch eine Ableitungsstrategie. Bei sieben dieser 25 Kinder handelte es sich um die Aufgaben 10–5, 10–9 oder 8–4, die von der Mehrheit der anderen Kinder bereits durch Faktenabruf gelöst wurde. *Daneben* lösten diese sieben Kinder zahlreiche Aufgaben (auch im Zahlenraum bis zehn) durch Zählstrategien. Bei 15 dieser 25 Kinder war die einzige abgeleitete Aufgabe eine Aufgabe mit Zehnerübergang. *Daneben* wurden von diesen 15 Kindern die Aufgaben mit Zehnerübergang (soweit sie diese nicht, wie zuweilen 6+6, bereits auswendig wussten), zählend gelöst. Auch für Aufgaben im Zahlenraum bis zehn wandten viele dieser Kinder *auch* Zählstrategien an.
- 20 Kinder wandten *Ableitungsstrategien ausschließlich im Zahlenraum bis zehn* an. Aufgaben mit Zehnerübergang lösten diese Kinder mit Zählstrategien, ausgenommen vielleicht 6+6, das auch einige dieser Kinder bereits auswendig wussten.
- 24 Kinder wandten *Ableitungsstrategien ausschließlich für Aufgaben mit Zehnerübergang* an. 15 dieser Kinder hatten die Grundaufgaben bis 10 (zumindest weitest gehend) automatisiert; sie hatten bei diesen Aufgaben also gar keinen Anlass zum Ableiten. Doch neun dieser 24 Kinder lösten im Zahlenraum bis zehn viele Aufgaben durch Zählstrategien, fünf davon durch rasches und sicheres Weiterzählen, vier aber sogar durch "unreifere" Zählstrategien wie Finger-Teilzählen. Ein Kind leitete zwar 12–6 aus dem auswendig gewussten 6+6 ab, löste aber 13 von 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn und alle anderen Aufgaben mit Zehnerübergang zählend.
- 35 Kinder wandten *ausschließlich einen Typus* von Ableitungsstrategien an. In 20 Fällen war dies die Strategie "think addition", die sich auch hierin als die "most salient strategy" unter allen Ableitungsstrategien erwies.

Was hier deutlich wird: *Ableiten per se* wurde am Ende des ersten Schuljahres keineswegs nur "by just a handful of bright students" gezeigt (CARPENTER & MOSER 1984, S. 196). Die interviewten niederösterreichischen Kinder unterschieden sich hierin nicht von den US-amerikanischen, die CARPENTER und MOSER für ihre Studie befragt hatten (vgl. Kap. 2.4). Wie in jener Studie, war aber auch in der vorliegenden das Ableiten bei nicht wenigen Kindern eine mehr oder weniger singuläre Angelegenheit: Es beschränkte sich bei diesen Kindern auf eine einzige Aufgabe und/oder auf das Anwenden nur eines einzigen Typs von Ableitung. Nur 46 Kinder (33,1 Prozent) zeigten Ableitungsstrategien bei wenigstens drei Aufgaben.

Sofern das Ableiten auf Aufgaben mit Zehnerübergang beschränkt war, konnte dies aber durchaus auch Ausdruck eines relativ hohen Entwicklungsstandes eines Kindes sein. Das trifft auf jene Kinder zu, die den Zahlenraum bis zehn bereits automatisiert, das Ableiten in diesem Zahlenraum also einfach *nicht mehr nötig* hatten, die dann aber alle oder zumindest den Großteil der Aufgaben mit Zehnerübergang entweder durch Faktenabruf oder (häufiger) durch eine Ableitungsstrategie lösten.

Bei einigen Kindern war das Ableiten bei nur genau *einer* Aufgabe mit Zehnerübergang aber kombiniert mit zählendem Rechnen bei *anderen* Zehnerübergängen und dann zumeist auch mit zählendem Rechnen bei einzelnen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn. Für diese Kinder mag der Zehnerübergang einerseits als "challenge problem" gewirkt haben: Ihr Faktenwissen, das oft auch schon einzelne Aufgaben mit Zehnerübergang umfasste (vor allem 6+6), setzten sie gerade dort als Ausgangsbasis für eine Ableitung ein, wo die Alternative des zählenden Rechnens besonders mühsam ist. Wo sie dagegen mit ihren Zählstrategien noch gut zurechtkamen, sahen sie vielleicht auch gar keinen Anlass dafür, um über Alternativen nachzudenken (vgl. Kap. 8.5.3.4). So lösten 6 Kinder zwar 6+7 durch "Verdoppeln plus 1", 3+4 aber zählend (obwohl sie 3+3 kurze Zeit davor auswendig gewusst hatten). Andererseits verfügten diese Kinder dann aber offenbar über zu wenig arithmetisches Faktenwissen, zu wenig Wissen über operative Zusammenhänge (wer 6+7 aus 6+6 ableitet, könnte auch 12–6 aus 6+6 ableiten; elf Kinder lösten aber eine der beiden Aufgaben durch Ableitung und die andere zählend) und vielleicht auch über zu wenig Wissen über Zehner und Einer, um im Rahmen des dritten Interviews mehr als nur eine Aufgabe mit Zehnerübergang ableiten zu können.

Auch bei jenen Kindern, die ausschließlich und vereinzelt im Zahlenraum bis zehn ableiteten, verweist dies auf bereits erreichte Kompetenzen ebenso wie auf noch vorhandene Defizite: Wenn manche Kinder (s.o.) noch am Ende des ersten Schuljahres Aufgaben wie 10–5, 10–9 und 8–4 ableiten, dann zeigt sich darin einerseits, dass sie eine gewisse Einsicht (welcher konzeptuellen Tiefe auch immer) in das Komplementaritätsprinzip von Addition und Subtraktion gewonnen haben. Andererseits ist aber festzuhalten, dass die Mehrheit der Kinder das Ableiten bei solchen "trivialen" (10–5, 10–9) oder zumindest häufig automatisierten (8–4)

Aufgaben zu diesem Zeitpunkt nicht mehr nötig hatte. Kinder, die bei diesen Aufgaben ableiteten, sonst aber im Zahlenraum bis zehn überwiegend auf Zählstrategien vertrauten, gaben also ein gewisses Potenzial zu erkennen, zugleich aber auch ihren Nachholbedarf (gegenüber ihren arithmetisch kompetenteren MitschülerInnen), was das Automatisieren betrifft.

Ähnliches gilt, freilich auf einem höheren Niveau, für jene Kinder, die im Zahlenraum bis zehn nicht nur vereinzelt, sondern bei einer ganzen Reihe von Aufgaben zu Ableitungsstrategien griffen, die aber Aufgaben mit Zehnerübergang aber ausschließlich oder vorwiegend zählend rechneten (vielleicht mit Ausnahme auswendig gewusster Aufgaben wie 6+6, seltener auch 8+8). Die Vielzahl von Ableitungen im Zahlenraum bis zehn, die diese Kinder – oft unter Anwendung unterschiedlicher Ableitungsstrategien – gezeigt haben, weist auf ein (im Vergleich zu ihren MitschülerInnen) hohes konzeptuelles Niveau hin. Dass sie aber im Zahlenraum bis zehn überhaupt noch in diesem Umfang ableiten mussten, drückt zugleich einen *prozeduralen Nachteil* gegenüber jenen Kindern aus, die gleichfalls Kompetenz im Ableiten besaßen, diese Kompetenz aber nur noch für Aufgaben mit Zehnerübergang benötigten. Dieser prozedurale Nachteil, also das reduzierte Repertoire an auswendig gewussten Aufgaben, die als *unmittelbar verfügbare* Ableitungsbasis dienen können, mag (neben Defiziten im Zehner-Einer-Verständnis) erklären, warum manche Kinder zwar im Zahlenraum bis zehn durch vielfältige Ableitungsstrategien beeindrucken konnten, Aufgaben mit Zehnerübergang (sofern sie diese nicht bereits automatisiert hatten) aber nur zählend lösten.

Die bloße *Anzahl* von Aufgaben, die ein Kind am Ende des ersten Schuljahres durch Ableitung löste, hat also nur begrenzte Aussagekraft über sein arithmetisches Entwicklungsniveau. Die Kinder mit der besten arithmetischen Performanz (gemessen an der Anzahl von Grundaufgaben, die durch *Faktennutzung* gelöst wurden; vgl. Kap. 8.5.3.1) lösten im Zahlenraum bis zehn *in der Regel* nur noch (wenn überhaupt) einzelne Aufgaben mit Hilfe von Ableitungsstrategien, wandten solche aber beim Großteil der Aufgaben mit Zehnerübergang an. Für den Zehnerübergang verwendeten diese Kinder dann in der Regel mehr als nur einen Typ von Ableitungsstrategien, etwa "think addition" und "Verdoppeln plus eins" neben dem "Teilschrittverfahren", und wandten letzteres also durchaus selektiv an (vgl. Kap. 8.4.3.7).

Gerade das "scoring in context" macht also deutlich, dass relevante Aussagen über das arithmetische Entwicklungsniveau der Kinder (und in weiterer Folge über die Entwicklung, die zu diesem Niveau hingeführt hat) nur zu gewinnen sind, wenn der *gesamte "mix of strategies"*, den ein Kind zu einem bestimmten Zeitpunkt zeigt, in den Blick genommen wird. Denn zwischen den Extremen – einerseits Kindern, die auch im Zahlenraum bis zehn kaum Faktenwissen besitzen und niemals ableiten, andererseits Kindern, die den Zahlenraum bis zehn vollständig automatisiert haben und alle nicht automatisierten Aufgaben mit Zehnerübergang durch Ableitung lösen – wird eine Vielzahl von Ausprägungen arithmetischer Performanz am Ende des ersten Schuljahres deutlich. Dieser Vielfalt wird man auf theoretischer Ebene nicht gerecht, wenn man etwa ausschließlich die durch Faktenabruf gelösten Aufgaben zählt.

Diesen Ausprägungen wird in Kapitel 8.5 im Detail nachgegangen. Zuvor muss hier aber noch dargestellt werden, wie die Kinder mit den beim dritten Interview gestellten Zusatzaufgaben umgingen und welche Rückschlüsse auf ihr konzeptuelles Wissen dies nahe legt.

8.4.5 In Zusatzaufgaben gezeigte Einsicht in operative Zusammenhänge

Wie schon Mitte des ersten Schuljahres, wurden die Kinder auch am Ende des Schuljahres nach Erledigung der Rechenaufgaben mit Zusatzaufgaben zu operativen Zusammenhängen konfrontiert (vgl. Kap. 6.1.5.3). Diesmal sollten sie unmittelbar nacheinander 7+7 und 7+8 (Nachbaraufgabe, Kovarianz), dann 9+9 und 18–9 (Umkehraufgabe) rechnen und sich dazu äußern, ob es für das Lösen von 7+8 bzw.18–9 "eine Hilfe" darstelle, wenn man 7+7 bzw. 9+9 schon wisse. Die Zusatzaufgaben wurden nach denselben Kriterien ausgewertet wie jene Mitte des ersten Schuljahres (vgl. Kap. 8.3.4). Tabelle 58 zeigt die so ermittelte Performanz der Kinder bei den Zusatzaufgaben am Ende des ersten Schuljahres im Überblick.

Tabelle 58: Performanz der 139 interviewten Kinder bei Zusatzaufgaben zu operativen Zusammenhängen am Ende des ersten Schuljahres

	Zusammenhang 7+7 / 7+8	Zusammenhang 9+9 / 18–9
Operative Einsicht deutlich, klar verbalisiert	59,7 %	12,9 %
Operative Einsicht erkennbar, undeutlich verbalisiert	9,4 %	17,3 %
Operative Einsicht nicht erkennbar	30,2 %	69,8 %
Keine klare Zuordnung möglich	0,7 %	0,0 %

Vergleicht man die Häufigkeiten mit jenen, die bei den Zusatzaufgaben Mitte des ersten Schuljahres erhoben wurden (vgl. Kap. 8.3.4), so ergibt sich das Folgende:

Der Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 wurde am Ende des ersten Schuljahres von deutlich mehr Kindern klar verbalisiert als der Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 Mitte des ersten Schuljahres (59,7 Prozent gegenüber 25,9 Prozent). Rechnet man auch die Fälle mit undeutlicher Verbalisierung dazu, dann zeigten am Ende des ersten Schuljahres mehr als zwei Drittel der Kinder eine erkennbare Einsicht in den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8. Mitte des ersten Schuljahres waren in Summe nur 38,8 Prozent der Kinder in der Lage gewesen, den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 zumindest undeutlich zu verbalisieren.

Der Anteil der Kinder, die im Rahmen der Zusatzaufgaben den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Umkehraufgabe *klar* verbalisieren konnten, blieb hingegen fast gleich (12,9 Prozent am Ende gegenüber 12,2 Prozent Mitte des Schuljahres). Und berücksichtigt man auch die Fälle mit undeutlicher Verbalisierung, dann zeigten beim Aufgabenpaar 9+9/18–9 am Ende des ersten Schuljahres sogar deutlich weniger Kinder eine erkennbare Einsicht in den zu Grunde liegenden Zusammenhang als Mitte des ersten Schuljahres beim Aufgabenpaar 3+6/9–6 (30,2 Prozent am Ende des Schuljahres gegenüber 41 Prozent Mitte des Schuljahres).

Bei näherer Analyse zeigt sich, dass sich bei 8 der 18 Kinder, die Mitte des ersten Schuljahres den Zusammenhang zwischen 3+6 und 9–6 klar verbalisieren konnten, am Ende des Schuljahres kein Hinweis auf Einsicht in den Zusammenhang zwischen 9+9 und 18–9 finden ließ. Nun ist nicht anzunehmen, dass diese Kinder eine einmal vorhandene Einsicht wieder verloren haben. Plausibler scheint eine der beiden folgenden Erklärungen (bzw. eine Kombination der beiden):

a) Die Zusatzaufgabe kann, wie in Kap. 6.1.5.3 ausgeführt, nur *Hinweise* für Einsicht sammeln, aber nicht Einsicht selbst verlässlich messen. In solchen Hinweisen mag sich Mitte des ersten Schuljahres ebenso wie auch am Ende des Schuljahres in vielen Fällen gerade keine abgesicherte, klare und daher stabile (auch vier Monate später in derselben Klarheit abrufbare) Einsicht in einen operativen Zusammenhang manifestiert haben, sondern nicht mehr als ein erstes, noch nicht ausgereiftes Verständnis. Dieses mag auch noch gar nicht dem operativen Zusammenhang als Prinzip gelten, sondern vielleicht auf einzelne Aufgaben beschränkt sein (vgl. BAROODY 1999, S. 168, sowie die dazu angestellten, BAROODYS These stützenden Beobachtungen in Kapitel 8.3.3.3 sowie 8.4.3.3). Dieser vermutlich noch unausgereifte Charakter der konzeptuellen Einsichten mancher ErstklässlerInnen ist im Fall der vorliegenden Untersuchung freilich zu sehen vor dem Hintergrund eines Unterrichts, in dem offenbar wenig dazu beigetragen wurde, dass die Kinder ihre operativen Einsichten reflektieren und dadurch festigen konnten (vgl. Kap. 7.3 und Kap. 8.5.4.2).
b) Beim Vergleich der Zusatzaufgabenpaare 3+6/9–6 bzw. 9+9/18–9 ist zu berücksichtigen, dass die Ableitungsbasis 9+9 am Ende des ersten Schuljahres von nur wenigen Kindern durch Faktenabruf gelöst werden konnte und insofern wohl von vielen Kindern als "schwierige Aufgabe" mit "großen Zahlen" empfunden wurde. Zwar wurde allen Kindern, die das auf Nachfrage wollten, das Ergebnis von 9+9 einfach gesagt; dadurch sollte ihnen erleichtert werden, sich auf den Zusammenhang mit 18–9 zu konzentrieren (vgl. Kap. 6.1.5.3). Dennoch mögen manche Kinder das Aufgabenpaar 9+9/18–9 ohne nähere Betrachtung als "(zu) schwierig (für mich)" eingeordnet haben und *deshalb* gar nicht weiter über einen möglichen Zusammenhang zwischen beiden Aufgaben nachgedacht haben. *Dieselben* Kinder mögen im vertrauteren Zahlenraum (wie bei 3+6 und 9–6) vielleicht keine Probleme beim Erkennen eines solchen Zusammenhangs gehabt haben.

Für den Vergleich der Performanz bei den Zusatzaufgaben mit der Performanz beim Rechnen selbst bieten sich zwei Aufgabenpaare in besonderer Weise an: Unter den Additionen mit Zehnerübergang waren die Kinder sowohl mit 6+6, als auch (einige Aufgaben später) mit 6+7 konfrontiert worden; und wieder einige Aufgaben später war mit 12–6 auch die Umkehraufgabe zu 6+6 gefragt worden. Dabei ergaben sich die folgenden Übereinstimmungen und Dissoziationen im Vergleich zum Umgang derselben Kinder mit den vergleichbaren Aufgabenpaaren 7+7/7+8 bzw. 9+9/18–9:

Von den 83 Kindern, die den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 in klaren Worten erklären konnten, lösten vier Kinder sowohl 6+6 als auch 6+7 durch Faktenabruf. 18 dieser 83 Kinder wussten 6+6 auswendig und leiteten 6+7 daraus ab. Vier weitere Kinder leiteten 6+7 aus 6+6 ab, obwohl sie 6+6 zuvor nicht durch Faktenabruf gelöst hatten (drei dieser Kinder hatten 6+6 mit der Kraft der Fünf abgeleitet, eines sogar durch Alleszählen ermittelt; aber alle hatten offenbar 6+6=12 noch im Gedächtnis, als sie 6+7 gefragt wurden). Insgesamt wandten also 26,5 Prozent jener Kinder, die "Verdoppeln plus eins" im Rahmen der Zusatzaufgaben erläutert hatten, diese Strategie beim Lösen von 6+7 auch tatsächlich selbstständig an.

Neun weitere Kinder, die offenbar ein klares Verständnis der Strategie "Verdoppeln plus eins" hatten, lösten 6+7 mit dem Teilschrittverfahren; sieben davon wussten 6+6 auswendig, hätten also auch "Verdoppeln plus eins" anwenden können.

23 Kinder dieser Gruppe (27,7 Prozent) wussten zwar 6+6 auswendig und lösten 6+7 dennoch durch eine Zählstrategie – obwohl sie wenig später in der Zusatzaufgabe klar zu erkennen gaben, dass ihnen der Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 klar war und sie ihn auch als hilfreich für das Lösen von 7+8 empfanden.

Umgekehrt, also von der Performanz beim Rechnen aus betrachtet, leiteten 26 Kinder am Ende des ersten Schuljahres 6+7 aus einer Verdoppelung ab (zumeist aus 6+6, selten aus 7+7). Nur für zwei dieser Kinder wurde beim Aufgabenpaar 7+7/7+8 *nicht* "Operative Einsicht deutlich, klar verbalisiert" kodiert. Die Dissoziation "Nutzung ja, verbalisierte Einsicht nein" war beim Verdoppeln plus eins also seltener als die umgekehrte.

Den Zusammenhang zwischen 9+9 und 18–9 konnten 18 Kinder in klaren Worten erklären, weitere 22 Kinder erläuterten ihn immerhin soweit, dass eine gewisse Einsicht erkennbar war. Von diesen insgesamt 42 Kindern leiteten elf Kinder (26,2 Prozent) im Rahmen der Rechenaufgaben 12–6 aus 6–6 ab. Sieben weitere Kinder lösten sowohl 6+6 als auch 12–6 durch Faktenabruf, hatten Ableiten bei 12–6 also nicht mehr nötig (und es mag sein, dass ihr "Faktenabruf" bei 12–6 tatsächlich nichts anderes war als ein sehr schnelles, bereits automatisiertes Ableiten). Vier weitere Kinder wandten bei 12–6 das Teilschrittverfahren an; drei von ihnen hatten 6+6 zuvor durch Faktenabruf gelöst, hätten also über die nötige Ableitungsbasis verfügt, um 12–6 durch "think addition" zu lösen. Insgesamt neun Kinder dieser Gruppe wussten zwar 6+6 auswendig, hätten also über die Ableitungsbasis für 12–6 verfügt, wandten aber (trotz ihrer in der Zusatzaufgabe deutlich gewordenen Einsicht in den Ableitungszusammenhang) dennoch für 12–6 eine Zählstrategie an. Vier dieser neun Kinder lösten aber zumindest eine andere Subtraktion durch "think addition". Klare "Dissoziationen" der Sorte "Einsicht ja, Nutzung nein" waren bei "think addition" also mit fünf von 42 Fällen (11,9 Prozent) deutlich seltener als beim "Verdoppeln plus eins" (23 von 83 Fälle oder 27,7 Prozent).

Umgekehrt betrachtet, lösten 25 Kinder am Ende des ersten Schuljahres 12–6 durch "think addition" auf Basis des bereits auswendig gewussten 6+6. Davon zeigten 14 Kinder (56 Prozent) in der Zusatzaufgabe aber *keine* Einsicht in den Zusammenhang zwischen 9+9 und 18–9. Bei "think addition" war also (gerade anders als bei "Verdoppeln plus eins") die Dissoziation "Nutzung ja, verbalisierte Einsicht nein" deutlich häufiger als die umgekehrte.

Es muss noch einmal betont werden, dass die Zusatzaufgaben nur *Hinweise* auf konzeptionelle Einsichten erfassen können, nicht diese selbst, und dass Einsicht in einen operativen Zusammenhang kein "Alles-oder-nichts-Phänomen" darstellt, sondern mehr oder weniger deutlich ausgeprägt, mehr oder weniger stark verallgemeinert vorliegen kann (vgl. BAROODY 1999 und Kap. 2.8.2). Gerade unter diesem Gesichtspunkt scheint folgende Interpretation der beim dritten Interview aufgetretenen Dissoziationen zwischen Nutzung eines Ableitungszusammenhangs und verbalisierter Einsicht in denselben plausibel:

"Verdoppeln plus eins" dürfte für ErstklässlerInnen generell "more salient" sein als "think addition" (vgl. Kap. 8.2.3). Dass 6+7 "nur um 1 mehr" ist als 6+6, leuchtet ihnen eher ein als der Zusammenhang zwischen 9+9 und 18–9, und es gelingt ihnen in der Regel auch unschwer, diesen Zusammenhang in Worte zu fassen. Das drückt sich im weit höheren Anteil von Kindern aus, die die Zusatzaufgabe zu 7+7 und 7+8 lösen konnten. Doch bei den Zusatzaufgaben wurde 7+8 unmittelbar nach 7+7 gezeigt und das Kind direkt gefragt, ob es einen Zusammenhang sehe. Beim Rechnen von 6+7 hätte das Kind dagegen *von sich* aus den Zusammenhang zu 6+6 (oder auch 7+7) herstellen müssen. Dafür braucht es mehr als die Einsicht in den Zusammenhang: Nötig ist (auf Grundlage dieser Einsicht) die *Bereitschaft*, eine Aufgabe durch Ableitung lösen zu wollen. Im Unterricht wurde diese Bereitschaft bei den interviewten Kindern in der Regel vermutlich nicht gefördert, weder beim Addieren durch "Verdoppeln plus eins", noch beim Subtrahieren mittels "think addition".

Nun kommt aber die Besonderheit des Addierens ins Spiel: Beim Addieren ist zählendes Rechnen (speziell in der Variante des Weiterzählens) eine durchaus bequeme und (sofern das "keeping track" bewältigt wird) sichere Lösungsvariante. Sie wird mit größeren Summanden zwar mühsamer; diese "challenge" ist wohl der Grund, weshalb einige Kinder, die 3+4 durch Weiterzählen gelöst hatten, 6+7 aus 6+6 ableiteten (s. Kap. 8.4.4). Aber Zählstrategien bleiben auch im Zahlenraum bis 20 eine aus Kindersicht offenbar immer noch attraktive Alternative zum Ableiten bzw. lassen den Gedanken ans Ableiten gar nicht erst aufkommen. Daher die relative Häufigkeit der Dissoziation "verbalisierte Einsicht ja, Nutzung nein" beim "Verdoppeln plus eins".

(Dass dabei auch die Variante "Nutzung ja, verbalisierte Einsicht" zwar selten, aber doch auftrat, mag verschiedene Gründe haben: Die Einsicht selbst mag noch nicht ausgereift sein, die Verbalisierungsfähigkeit noch nicht weit genug entwickelt; schließlich muss berücksichtigt werden, dass die Kinder in der Regel nicht darin geübt waren, über mathematische Zusammenhänge zu sprechen.)

Beim Subtrahieren sind Zählstrategien mühsamer und in höherem Maße fehleranfällig als beim Addieren (vgl. Kap. 8.3.3.3). Das sollte, dem Gesagten zufolge, die Bereitschaft zum Nachdenken über einen Ableitungszusammenhang gegenüber den Additionen grundsätzlich erhöhen. Andererseits ist das Komplementaritätsprinzip aber auch schwerer zu durchschauen als das der Kovarianz. Daher haben, wie es die Zusatzaufgaben beim dritten Interview nahelegen, wohl tatsächlich weniger Kinder am Ende des ersten Schuljahres eine vertiefte *Einsicht* in das Komplementaritätsprinzip (dies freilich wieder auf Grundlage des in Kapitel 7 analysierten Unterrichts). Die relativ wenigen Kinder mit vertiefter, für sie in Worte fassbarer Einsicht in diesen Zusammenhang nutzen ihn dann aber in der Regel auch tatsächlich beim Rechnen, eben weil fürs Subtrahieren (sofern die Aufgabe noch nicht automatisiert ist) keine bequeme Alternative verfügbar ist; daher die relative Seltenheit der Dissoziation "Einsicht ja, Nutzung nein" beim Komplementaritätsprinzip.

Die relative Häufigkeit von "Nutzung ja, Einsicht nein" mag bei "think addition" ebenso gedeutet werden wie beim "Verdoppeln plus eins". Hier dürfte aber noch ein weiterer Umstand hinzu treten: Für insgesamt sieben Kinder war 12–6 die *einzige* Aufgabe, die sie beim dritten Interview durch Ableitung lösten, für zwei weitere Kinder war das 8–4, ebenfalls für zwei Kinder 10–5. Wie bereits vermutet (vgl. Kap. 2.10.6, Kap. 8.3.3.3, Kap. 8.4.3.3), mag bei Halbierungsaufgaben das eingängige "verbale Muster" dazu beitragen, dass sich manche Kinder einen Zusammenhang merken, ohne ihn wirklich verstanden zu haben: "Zwölf weniger sechs ist sechs, weil sechs und sechs zwölf ist" mag hier als eine Art "Eselsbrücke" fungiert haben, die wirksam war, um die (zählend schwer zu bewältigende) Subtraktion 12–6 zu lösen. Das war aber in diesem Fall vermutlich eher eine Variante des Auswendigmerkens als des Ableitens; weil vermutlich das dahinter steckende *Prinzip* nicht erfasst wurde, konnte es auch nicht auf Aufgaben übertragen werden, die *nicht* in dieser Form auswendig gelernt wurden.

8.5 Zur Entwicklung von Strategiepräferenzen: Versuch einer empirisch begründeten Typenbildung

Zum Abschluss der qualitativen Auswertung der Länggschnittstudie werden in diesem Abschnitt sechs *Typen von Strategiepräferenzen* vorgestellt, die nach den methodischen Grundsätzen der "empirisch begründeten Typenbildung" aus dem umfangreichen Datenmaterial entwickelt wurden. Die Methode der "empirisch begründeten Typenbildung" wurde in ihren Grundzügen in Kapitel 6.5.1 erläutert. Nun betont aber KLUGE gerade die "Offenheit und Flexibilität" ihres "Stufenmodells empirisch begründeter Typenbildung", welches der "Vielfalt qualitativer Fragestellungen und der unterschiedlichen Qualität des Datenmaterials sehr gut entgegen" komme (KLUGE 2000, Absatz 14). Auch BIKNER-AHSBAHS verweist darauf, dass die Methode der Typenbildung (die bei ihr *Ideal*typenbildung ist), noch nicht aussagt,

> *"wie dabei im Detail methodisch vorgegangen wird, [...] denn Idealtypenbildung ist keine Auswertungsmethode, sondern ein methodisches Prinzip, das empirisch begründete Theoriekonstruktion unterstützt. Das jeweilige methodische Vorgehen, das einer Idealtypenbildung und einer Theoriekonstruktion zugrunde gelegt werden soll, muss gegenstands- und datenadäquat im jeweiligen Forschungsprozess selbst entwickelt werden"* (BIKNER-AHSBAHS 2003, S. 221).

Diese Entwicklung, also die Abfolge der einzelnen Stufen im *Prozess* der Typenbildung, wird in Kapitel 8.5.1 zunächst, in Erfüllung von KLUGEs diesbezüglicher Forderung, "systematisch und nachvollziehbar" (vgl. KLUGE 2000, Absatz 1) dargestellt. Kapitel 8.5.2 ist den *Strategiegruppen*, einer Zwischenstufe im Prozess der *Strategietypen*-Bildung gewidmet. Die sechs Strategietypen werden in Kapitel 8.5.3 im Detail dargestellt. In Kapitel 8.5.4 folgt schließlich die Zusammenfassung und Diskussion der in die Strategietypen mündenden qualitativen Auswertung der Längsschnittstudie.

8.5.1 Die Stufen der Typenbildung in der Analyse kindlicher Strategieentwicklungen

Auf der ersten Stufe, der "Erarbeitung relevanter Vergleichsdimensionen" (KLUGE 1999, S. 267), floss als "theoretisches Vorwissen" (KLUGE 2000, Absatz 5) all das ein, was in Kapitel 2 aus der internationalen Forschung zu diesem Thema zusammengetragen und analysiert wurde. Von besonderer Relevanz erschienen dabei BAROODYs "schema based view" der arithmetischen Entwicklung (vgl. Kap. 2.8) sowie die Ausführungen von GRAY und KollegInnen zum "proceptual divide" (vgl. Kap. 2.9.3). GRAY postuliert ja (freilich ohne Bezugnahme auf die Methode der empirisch begründeten Typenbildung und überhaupt auf schmaler empirischer Basis) gewissermaßen zwei *Extreme* kindlicher Strategieentwicklung, den "procedural approach" auf der einen, den "proceptual approach" auf der anderen Seite. Nun wurde ja bereits im Zug der kritischen Würdigung der Beiträge von GRAY und KollegInnen angemerkt, dass die "Alles-oder-nichts-Sichtweise" des "proceptual divide" der Wirklichkeit wohl nicht gerecht werden kann (vgl. Kap. 2.9.3). Ebenso wurde bezweifelt, dass der Weg zum Beherrschen der Basisfakten *ausschließlich* über das "Internalisieren von [operativen] Beziehungen" verlaufe, wie dies BAROODY postuliert (vgl. Kap. 2.8.3).

Im Zuge der qualitativen Auswertung der drei Interviewrunden (vgl. Kap. 8.2 bis 8.4) fanden sich nun zahlreiche Hinweise sowohl auf Kinder, deren arithmetische Entwicklung mit den Modellen BAROODYS bzw. GRAYS übereinzustimmen, wie auch auf solche, deren Entwicklung diesen Modellen zu widersprechen schien. Diesen Hinweisen wurde im Zuge der Typenbildung systematisch nachgegangen.

Die *Einzelfälle*, deren Typisierung dabei angestrebt wurde, sind die 139 individuellen *Strategiepräferenzen am Ende des ersten Schuljahres* (also der zu diesem Zeitpunkt bei diesen Kindern vorliegende "mix of existing strategies", SIEGLER & JENKINS 1989, S. 27) sowie deren *Entwicklungsverläufe*, soweit diese sich durch die Performanz der Kinder in den drei Interviews rekonstruieren lassen. Es ist klar, dass diese Rekonstruktion lückenhaft bleiben musste, eben weil sie sich nur auf die *Performanz* (in der die Kompetenz möglicherweise nicht immer angemessen zum Ausdruck kommt) und auf nur *drei* Interviews im Abstand von jeweils mehreren Monaten stützen konnte (im Abstand von Monaten also, in denen die Entwicklung weiterging, ohne für diese Untersuchung greifbar zu sein). Durch die Zusammenschau der zumeist vielfältigen Strategien, mit denen jedes Kind die zu den drei Terminen vorgelegten additiven Aufgaben jeweils gelöst hat, ergänzt um die Performanz desselben Kindes im Bereich der zahlbezogenen Kenntnisse zu Schulbeginn bzw. bei den Zusatzaufgaben zu operativen Zusammenhängen Mitte und Ende des ersten Schuljahres, sollte es aber doch möglich sein, seine arithmetische Entwicklung im ersten Schuljahr zumindest in wesentlichen Zügen zu erfassen.

Für eine empirisch begründete Typenbildung wird gefordert, zunächst die "charakteristischen Grundzüge jedes Falles" herauszuarbeiten, wobei die Merkmalsbereiche und Merkmalsdimensionen, die für diese Charakterisierung als relevant herangezogen werden, sich einerseits aus dem Vorwissen ableiten lassen, andererseits aber am Datenmaterial bewähren und gegebenenfalls modifiziert, erweitert oder allenfalls auch verworfen und durch andere ersetzt werden müssen (vgl. KLUGE 1999, S. 267). Im vorliegenden Fall waren die für die Typisierung zu beachtenden Merkmals*bereiche* in einem ersten Durchgang durch das Datenmaterial ("Fallvergleich und Fallkontrastierung", KELLE & KLUGE 1999, S. 75) die Lösungsstrategien, mit denen die 139 Kinder am Ende des ersten Schuljahres die gestellten additiven Grundaufgaben jeweils bewältigten.

Bezüglich der Merkmals*dimensionen* stellte schon die in Kapitel 6.1.7 erläuterte Subsumtion der beobachteten und erfragten Lösungswege unter acht Kategorien eine (im Interesse einer auch quantitativen Auswertung unverzichtbare) Reduktion der tatsächlichen Vielfalt dar: In einer ersten, möglichst detailgenauen Auswertung der dreimal 139 Interviews waren 82 verschiedene Lösungsstrategien identifiziert worden. Für die qualitative Auswertung in Kapitel 8.2 bis 8.4 wurde je nach Frage immer wieder auch auf diese differenziertere Auswertung (etwa der Ableitungsstrategien, der verschiedenen Varianten des Weiterzählens usw.) zurückgegriffen. Um aber eine überschaubare Anzahl von Strategie*typen* herausarbeiten zu können, schien zur Charakterisierung der Strategiepräferenzen der Kinder eine nochmalige Reduktion auf die folgenden Oberkategorien von Lösungsstrategien sinnvoll:

- *"Faktennutzung";* unter dieser Kategorie wurden alle Fälle von "Faktenabruf" und "Ableitung" zusammengefasst;
- *"Zählstrategien"*; darunter fallen "Weiterzählen", "Finger-Teilzählen" und "Alleszählen";
- *"Nicht-zählender Fingergebrauch"* wurde als eigene Kategorie belassen;
- *"Raten, Fehlspeicherung, Verweigerung"* umfasst als Mischkategorie alle Fälle von "Raten, Fehlspeicherung oder dergleichen" und "'Kann ich nicht' oder dergleichen". Beide "Strategien" kamen freilich ab Mitte des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis zehn nur noch selten vor.

Auf dieser Grundlage wurden die Kinder nach ihren in den Interviews gezeigten Strategien in einer ersten Annäherung in *Strategiegruppen* zusammengefasst. Als Vorbild diente dabei die von CARPENTER und MOSER vorgenommene Einteilung: Die beiden bezeichneten als "fact users" in einem bestimmten Zahlenraum jene Kinder, die mindestens zwei Drittel der Aufgaben dieses Zahlenraums entweder durch Faktenabruf oder Ableitung lösten (CARPENTER & MOSER 1984, S. 191; vgl. Kap. 2.4). Dieser Unterscheidung legten sie in ihrer Studie allerdings nicht sämtliche Aufgaben dieses Zahlenraums zu Grunde. Überprüft wurden nämlich nur einzelne Aufgaben, und Aufgaben, bei denen die Autoren einen untypisch hohen Anteil von Faktenabruf vermuteten, wurden gar nicht gefragt (a.a.O., S. 181).

Wenn es darum geht, *Unterschiede* in den Strategiepräferenzen deutlich zu machen, ist es wohl auch tatsächlich sinnvoll, jene Aufgaben *nicht* zu berücksichtigen, die (nahezu) *unterschiedslos* von (fast) allen Kindern auswendig gewusst werden. CARPENTER und MOSER dürften dabei allerdings über das Ziel hinaus geschossen haben. Die von ihnen vermutete, aber eben nicht überprüfte Sonderstellung der Additionen mit der Summe 10 hat sich zumindest in der Befragung *niederösterreichischer* Kinder, wie dargestellt, nicht nachweisen lassen. Auch die von CARPENTER und MOSER nicht berücksichtigten Aufgaben vom Typ 1+6 und 9–1 waren beim zweiten Interview für viele Kinder keineswegs trivial (vgl. Kap. 8.3.1). Für die Unterscheidung von Strategietypen in der vorliegenden Untersuchung wurden daher, anders als bei CARPENTER und MOSER, nur jene Aufgaben *nicht* berücksichtigt, die sich am Datenmaterial auch tatsächlich als zum jeweiligen Zeitpunkt "trivial" erweisen lassen (vgl. Kap. 8.3.1.1).

Demgemäß wurden, mit analoger Anwendung der Kriterien für "fact using" auf den Bereich der Zählstrategien, für die vorliegende Untersuchung zunächst jeweils die folgenden Gruppen von Kindern unterschieden:

- *"Vorwiegend Zahlenfakten nutzend";* dieser Gruppe zugeteilt sind jene Kinder, die zu einem bestimmten Interviewtermin mindestens zwei Drittel der gefragten und *zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen* Aufgaben im Zahlenraum bis zehn entweder durch Faktenabruf oder durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben.
- *"Vorwiegend zählend";* diese Gruppe umfasst jene Kinder, die mindestens zwei Drittel der nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch eine Zählstrategie gelöst haben.
- *"Mischgruppe";* in dieser Gruppe sind alle Kinder zusammengefasst, die beim Lösen der nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn weder vorwiegend (also bei mindestens zwei Drittel dieser Aufgaben) Zahlen Fakten nutzten noch vorwiegend zählend rechneten.

Die denkbare Gruppe "vorwiegend nicht-zählend mit den Fingern rechnend" kam in der Realität nicht vor (wohl aber gab es Kinder, die innerhalb der "Mischgruppe" einen hohen Anteil von Aufgaben nicht-zählend mit den Fingern lösten). Da aber Verweigerung ("'Kann ich nicht' oder dergleichen") und offenkundiges Zahlenraten beim ersten Interview noch relativ häufige "Strategien" (oder vielmehr Formen, die Aufgaben hinter sich zu bringen; vgl. Kap. 2.1) waren, schien es sinnvoll, für das erste Interview eine weitere Kategorie zu definieren:

- "Vorwiegend ratend und/oder verweigernd"; in dieser Gruppe wurden jene Kinder erfasst, die beim ersten Interview zu Schulbeginn bei *mindestens der Hälfte* der gefragten Grundaufgaben "einfach irgendeine Zahl" nannten oder die Lösung verweigerten bzw. den Lösungsversuch vorzeitig abbrachen mit der Begründung, die Aufgabe sei "zu schwer".

Bei dieser ersten, für jeden Interviewtermin gesondert vorgenommenen Gruppierung der Kinder wurde bewusst nicht unterschieden zwischen Kindern, welche Ableitungsstrategien anwandten, und solchen, die das nicht taten. Zwar besteht gerade *darin* für GRAY das wesentliche Merkmal in der arithmetischen Entwicklung eines Kindes, an welchem "procedural" und "proceptual approach" unterschieden werden können (vgl. Kap. 2.9.3). Die Typisierung sollte aber *empirisch begründet* sein; es sollte also am Datenmaterial überprüft werden, ob die Subsumtion unter das theoretisch begründete Kriterium "wendet Ableitungsstrategien an" auch tatsächlich dem "Sachverhalt in höherem Maße gerecht" (vgl. ROTTMANN 2006, S. 115) wird und eine die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Einzelfälle adäquater erfassende Gruppierung erlaubt als die zunächst vorgenommene, die auf dieses Kriterium noch verzichtet hat. Wie darzustellen sein wird (vgl. Kap. 8.5.3), war dies tatsächlich der Fall, allerdings nur dadurch, dass *beide Kriterien kombiniert* wurden, also die oben definierten Gruppen von Strategiepräferenzen weiter differenziert wurden nach dem Kriterium, ob die Kinder dieser Gruppen Ableitungsstrategien anwandten oder nicht.

Es ergab sich auf diese Weise das in Tabelle 59 dargestellte Kategorienschema, auf welchem auf der nun folgenden zweiten Stufe im Prozess der Typenbildung, der "Gruppierung der Fälle und Analyse der empirischen Regelmäßigkeiten" (vgl. KLUGE 2000, Abs. 8), aufgebaut werden konnte. Die Tatsache, dass im Zuge dieser Gruppierung der Gesamtstichprobe alle sechs *logisch denkbaren* Ausprägungen der Merkmalskombinationen (wenn auch mit sehr unterschiedlicher Häufigkeit) auch wirklich *empirisch auffindbar* waren (vgl. die detaillierte Darstellung in Kap. 8.5.3), konnte als Indiz für die Sinnhaftigkeit dieser theoriegeleiteten Erweiterung des ursprünglichen Kategorienschemas gewertet werden.

Tabelle 59: Kategorienschema als Zwischenstufe im Prozess der Typenbildung

	Vorwiegend Fakten nutzend	Mischgruppe	Vorwiegend Zählend
mit Ableitungen			
ohne Ableitungen			

Eine nicht zu korrigierende Schwachstelle dieses Kategorienschemas und der darauf gründenden Typisierung besteht ohne Zweifel darin, dass das Kriterium "Ableitungen nutzend" die damit letztlich angestrebte Unterscheidung des konzeptuellen Niveaus, auf dem die Kinder ihre Rechenprozeduren entfalten, nicht vollständig gewährleistet. Zwar lassen die verbalen Protokolle der Kinder, die Ableitungsstrategien nutzten (vgl. Kap. 8.2.2, 8.3.3 und 8.4.3), in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle erkennen, dass diese Kinder beim Rechnen tatsächlich *Einsicht in einen operativen Zusammenhang* anwandten. Zuweilen (speziell bei Kindern, die nur eine oder vielleicht auch eine zweite Halbierungsaufgabe durch "think addition" lösten) war dies aber durchaus fraglich (vgl. Kap. 8.4.5). Umgekehrt kann aber auch aus dem Umstand, dass ein Kind im Rahmen eines Interviews *keine* Ableitungsstrategie anwandte, nicht mit Sicherheit geschlossen werden, dass es *nicht* über die zum Ableiten erforderlichen Einsichten in operative Zusammenhänge verfügt; ganz abgesehen von dem noch viel grundsätzlicheren Problem, dass das Lösungsverhalten im Interview von jenem abweichen mag, dass für dasselbe Kind im selben Zeitraum unter anderen Bedingungen (in der Klasse, beim Rechnen zuhause) typisch gewesen sein mag. Auch die Zusatzaufgaben, die ja gerade dafür konzipiert waren, das konzeptuelle Niveau der Kinder über ihre Performanz beim Rechnen hinaus näher zu bestimmen (vgl. Kap. 6.1.5), konnten diese Aufgabe, wie beschrieben, nur teilweise erfüllen (vgl. Kap. 8.3.5 und 8.4.5).

Diese Schwachstelle wurde im Zug der "Gruppierung der Fälle und Analyse der empirischen Regelmäßigkeiten" in Einzelfällen daran deutlich, dass bei einigen Kindern die Zuteilung zu einer der sechs Gruppen nicht mit der angestrebten Eindeutigkeit vorgenommen werden konnte; diese werden im Folgenden noch einzeln diskutiert (vgl. Kap. 8.5.3). Im Großen und Ganzen bewährte sich das erläuterte Kategorienschema aber auch auf Stufe 3, der "Analyse der inhaltlichen Sinnzusammenhänge und Typenbildung", wie in der Detaildarstellung der Ergebnisse dieser Analyse nachzuweisen sein wird (vgl. Kap. 8.5.3).

Für die "Charakterisierung der gebildeten Typen" (Stufe 4 nach KLUGE 2000) sollen im Folgenden *deklarierter Weise* sowohl Idealtypen als auch Prototypen verwendet werden, das heißt: Jeder Typus wird in der *Darstellung* – in Umkehrung des *Prozesses* der Typenfindung – zunächst idealtypisch beschrieben. In weiterer Folge werden für diesen Typus prototypische Kinder vorgestellt. Dadurch und durch das gezielte Eingehen auf Grenzfälle soll auch das Spektrum der Abweichungen vom Idealtypus deutlich gemacht werden, welche innerhalb der einzelnen Typen (bei dennoch überwiegender "interner Homogenität") gefunden werden können. Es folgen Angaben zur Häufigkeit des jeweiligen Typus in der Gesamtstichprobe. Schließlich wird für jeden Typus versucht, die "inhaltlichen Sinnzusammenhänge" zu erklären, die ihn wesentlich ausmachen und von den anderen Typen unterscheiden.

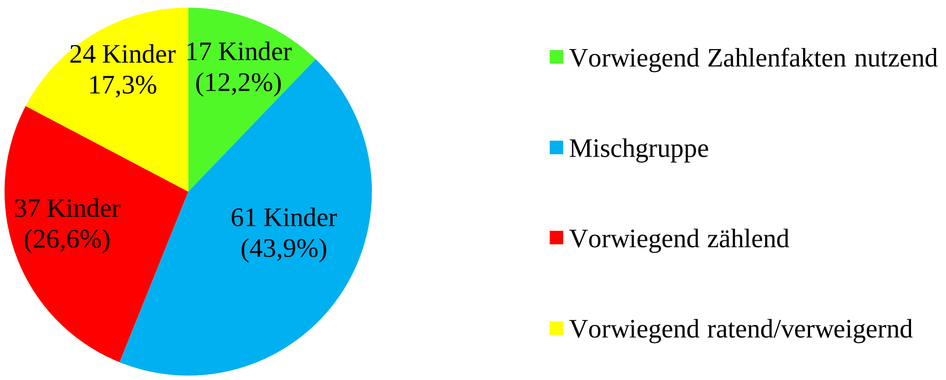
Da das Hauptinteresse dieser Untersuchung Typen von Strategiepräferenzen gilt, wie sie *am Ende des ersten Schuljahres* auftreten, wird eine umfassende Analyse der "inhaltlichen Sinnzusammenhänge" auch nur für diesen Zeitpunkt angestrebt. Geklärt werden soll dabei aber auch die Frage, ob bzw. wie weit allfällige Unterschiede im Strategietypus am Ende des ersten Schuljahres auch mit typischen Entwicklungsverläufen während des Schuljahres einhergehen. Dafür ist es notwendig, zusätzlich zur Performanz eines Kindes am Ende des Schuljahres auch die empirisch fassbaren Zwischenstufen in der Entwicklung seiner Strategiepräferenzen (also die Strategiepräferenzen desselben Kindes zu Beginn und Mitte des ersten Schuljahres) zu berücksichtigen. Diese verdienen freilich – auch unabhängig von ihrer Rolle als Material für die letztlich angestrebte Typenbildung – jeweils für sich analysiert zu werden. Daher wird in Kapitel 8.5.2 zunächst für jeden Interviewtermin gesondert dargestellt, wie sich die befragten Kinder jeweils den oben definierten drei *Gruppen* von Strategiepräferenzen (vorwiegend Fakten nutzend, vorwiegend zählend, Mischgruppe) zuteilen ließen. Erst auf dieser Grundlage folgt dann in Kapitel 8.5.3 die Formulierung von feiner differenzierten sechs Ideal*typen*. Zu beachten ist also im Folgenden die Unterscheidung von Strategie*gruppen*, die für die einzelnen Messzeitpunkte ermittelt wurden, ohne dass dabei noch zwischen ableitenden und nicht-ableitenden Kindern unterschieden wurde, und den Strategie*typen*, für deren Unterscheidung gerade auch das Ableitungsverhalten im Laufe des ersten Schuljahres von besonderer Relevanz ist.

8.5.2 Häufigkeiten verschiedener Strategiegruppen im Verlauf des ersten Schuljahres

8.5.2.1 Strategiegruppen zu Beginn des ersten Schuljahres

Unter Verwendung der im voranstehenden Kapitel definierten Kategorien "vorwiegend Zahlenfakten nutzend", "vorwiegend zählend", "vorwiegend ratend/und oder verweigernd" sowie "Mischgruppe" ergibt sich für die Performanz der 139 interviewten Kinder in ihrem ersten Interview wenige Tage nach Schulbeginn die folgende, in Abbildung 12 dargestellte Verteilung:

Abbildung 12: Häufigkeit von Strategie-Gruppen unter den 139 befragten Kindern, bezogen auf zehn zu diesem Zeitpunktnicht-triviale Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn, zu Beginn des ersten Schuljahres

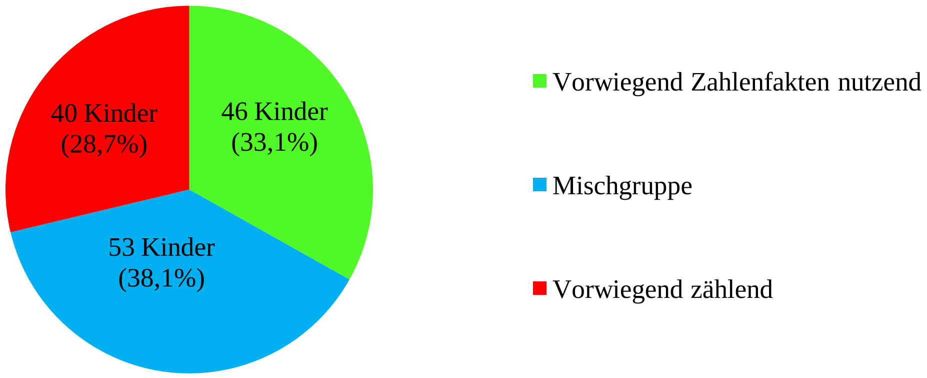


Dieser Zuteilung liegen die Strategien der Kinder für *alle zehn* zu Schulbeginn gefragten Aufgaben zu Grunde (vgl. Kap. 8.2.1), also auch für die Verdoppelungsaufgaben. Diese wurden zwar bereits zu Schulbeginn relativ häufig durch Faktenabruf gelöst, erfüllten aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht das in Kapitel 8.3.1.1 definierte Kriterium von "trivialen" Aufgaben. Der bereits relativ hohe Anteil von Kindern, die vorwiegend Zahlenfakten nutzten, muss dennoch vor diesem Hintergrund gesehen und entsprechend relativiert werden. Darüber hinaus ist die empirische Basis der Gruppenzuteilung mit nur zehn Aufgaben freilich schmal. Dennoch kann diese Verteilung als weiterer Hinweis für die beachtlichen mathematischen Kenntnisse vieler SchulanfängerInnen gewertet werden (vgl. Kap. 6.1.5.1). Der noch etwas höhere Anteil von Kindern, die mit den Rechenaufgaben zu Schulbeginn offenbar überfordert waren, macht aber ein weiteres Mal deutlich, mit welcher Heterogenität KlassenlehrerInnen vom ersten Schultag der Kinder an konfrontiert sind (vgl. Kap. 4.1).

8.5.2.2 Strategiegruppen Mitte des ersten Schuljahres

Wendet man dieselben Gruppierungskriterien auf die Performanz der Kinder beim Rechnen im Zahlenraum bis zehn zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres an, ergibt sich die in Abbildung 13 dokumentierte Verteilung. Wie in Kapitel 8.5.1 begründet, wurden der Gruppenzuteilung nur die 14 zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben zu Grunde gelegt (vgl. Kap. 8.3.3.1); die Verdoppelungsaufgaben sind hier also nicht berücksichtigt.

Abbildung 13: Häufigkeit von Strategie-Gruppen unter den 139 befragten Kindern Mitte des ersten Schuljahres, bezogen auf 14 zu diesem Zeitpunkt nicht-triviale Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn



Eine nochmalige Differenzierung innerhalb dieser drei Gruppen ergibt das Folgende:

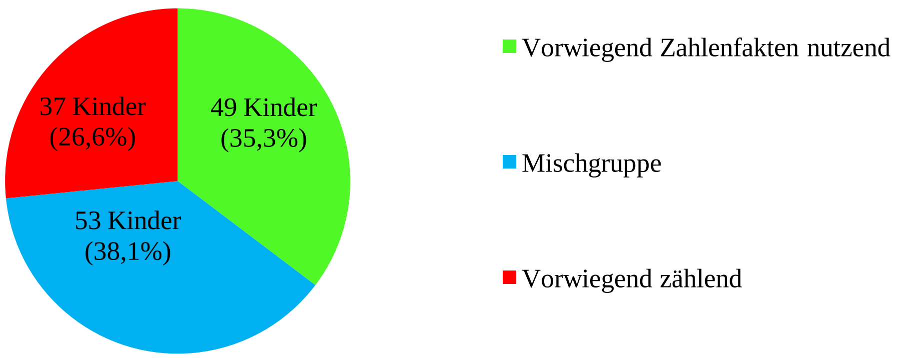
– Jene 40 Kinder, die Mitte des erstens Schuljahres im Bereich der 14 nicht-trivialen Grundaufgaben vorwiegend oder ausschließlich zählend rechneten, wandten dabei wiederum vorwiegend die Strategie "Finger-Teilzählen" an. 34 dieser 40 Kinder lösten mit dieser Strategie mehr als die Hälfte aller Aufgaben. Nur für eines der ausschließlich zählend rechnenden Kinder war Alleszählen die mehrheitlich verwendete Zählstrategie, gleichfalls nur für eines der vorwiegend zählend rechnenden Kinder war dies das Weiterzählen. Nur fünf der 40 als vorwiegend zählend rechnend klassifizierten Kinder lösten auch zumindest eine Aufgabe durch eine Ableitungsstrategie, das sind 12,5 Prozent dieser Gruppe. Innerhalb der vorwiegend zählend rechnenden Kinder waren sieben Kinder (fünf Prozent der Gesamtstichprobe), die *alle 14* nicht-trivialen Aufgaben (und sechs von ihnen auch zumindest eine Verdoppelungsaufgabe) zählend lösten. Fünf dieser Kinder taten dies ausschließlich durch Finger-Teilzählen, eines ausschließlich durch Alleszählen, eines mischte diese beiden Strategien und löste elf Aufgaben durch Finger-Teilzählen, drei durch Alleszählen.
– Die 53 Kinder der "Mischgruppe" Kinder wandten definitionsgemäß weder Zählstrategien noch Zahlenfakten nutzende Strategien bei mehr als zwei Drittel der nicht-trivialen Aufgaben an. Bei 32 dieser Kinder war auch in einem weiteren Sinne keine Präferenz für eine einzelne Strategie erkennbar. Fünf Kinder dieser Gruppe lösten mehr als die Hälfte (aber weniger als zwei Drittel) der Aufgaben durch Finger-Teilzählen, eines durch Weiterzählen, drei durch nicht-zählenden Fingergebrauch. Zwölf Kinder der "Mischgruppe" wussten knapp mehr als die Hälfte der 14 nicht-trivialen Aufgaben auswendig und lösten nur die restlichen Aufgaben durch Zählstrategien oder durch nicht-zählenden Fingergebrauch. Bei acht dieser zwölf Kinder der "Mischgruppe" war das Weiterzählen die neben dem Auswendigwissen zweithäufigste Strategie. 19 der 53 Kinder der "Mischgruppe" lösten zumindest auch eine Aufgabe durch Ableiten, das sind 35,8 Prozent dieser Gruppe.

– Bei den 46 Kindern, die Mitte des ersten Schuljahres zur Lösung der nicht-trivialen Aufgaben ausschließlich oder vorwiegend Zahlenfakten nutzten, dominierte der Faktenabruf zumeist klar über das Ableiten. Nur eines dieser Kinder löste mehr Aufgaben durch Ableitung als durch Faktenabruf. 31 der 46 vorwiegend Fakten nutzenden Kinder lösten wenigstens eine Aufgabe durch Ableitung, das sind 67,4 Prozent dieser Gruppe. Elf Kinder dieser Gruppe lösten alle 14 nicht-trivialen Aufgaben durch Zahlenfakten nutzende Strategien; unter diesen elf Kindern war nur eines, das *nicht auch* ableitete, das heißt: 90,9 Prozent dieser Untergruppe benutzte neben dem Faktenabruf auch Ableitungsstrategien.

8.5.2.3 Strategiegruppen am Ende des ersten Schuljahres

Die Verteilung der Kinder auf die drei Gruppen von Strategiepräferenzen im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres wird in Abbildung 14 dargestellt. Die Zuteilung beruht wieder auf der Performanz der Kinder bei jenen 14 Aufgaben, die sich *zu diesem Zeitpunkt* als nicht-trivial erwiesen.

Abbildung 14: Häufigkeit von Strategie-Typen unter den 139 befragten Kindern am Ende des ersten Schuljahres, bezogen auf 14 zu diesem Zeitpunkt nicht-triviale Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn



Beim Vergleich dieser Verteilung mit jener zu Mitte des ersten Schuljahres ist zu berücksichtigen, dass nur 10 der 14 Aufgaben, die der Gruppenzuteilung jeweils zugrundeliegen, zu beiden Zeitpunkten identisch waren. Vier der Mitte des ersten Schuljahres noch als nicht-trivial klassifizierten Aufgaben (1+6, 10–9, 10–5, 9–1) wurden ja am Ende des ersten Schuljahres von mehr als drei Viertel der Kinder auswendig gewusst (vgl. Kap. 8.4.1) und daher als *zu diesem Zeitpunkt* trivial in der Bildung der Strategiegruppen am Ende des ersten Schuljahres nicht mehr berücksichtigt. Sie wurden ersetzt durch vier beim dritten Interview erstmals verwendete Aufgaben (3+6, 10–7, 9–6, 7–4), die besser geeignet waren, die Unterschiede in der Strategiepräferenz zu verdeutlichen. Ein *quantitativer* Vergleich der Häufigkeiten einzelner Strategiegruppen zu den drei Messzeitpunkten ist auf dieser Grundlage aber nicht sinnvoll. Für die in Kapitel 9 untersuchten quantitativen Fragestellungen wurden daher nur jene Aufgaben herangezogen, die zu allen drei Messzeitpunkten identisch waren; vgl. Kap. 9.1.2.

Eine genauere Differenzierung innerhalb der Strategiegruppen ergibt das Folgende:

– Unter den 37 Kindern, die am Ende des ersten Schuljahres als "vorwiegend zählend" klassifiziert wurden, waren zehn, die bezogen auf die 14 nicht-trivialen Aufgaben sogar *ausschließlich* zählend rechneten. Das sind (bei zum Teil anderen Aufgaben, siehe oben) um drei Kinder mehr als Mitte des ersten Schuljahres. Neun der zehn am Ende des ersten Schuljahres in dieser Weise *ausschließlich* zählenden Rechner verwendeten dabei durchgehend die Strategie "Finger-Teilzählen". Eines dieser Kinder löste noch am Ende des ersten Schuljahres alle nicht-trivialen Aufgaben durch Alleszählen (wofür es auf die beim Interview zugänglichen Holzwürfel zurückgriff). Dieses Kind löste auch die Verdoppelungen 4+4 und 5+5 durch Alleszählen und wusste nur 2+2 auswendig (3+3 wurde spontan mit "acht" gelöst). Auch unter den 27 weiteren Kindern, die nun tatsächlich *vorwiegend* zählend rechneten, war eines, das fast ausschließlich auf Alleszählen vertraute; daneben wusste dieses Kind aber auch genau eine nicht-triviale Aufgabe (8–4) auswendig. 13 dieser 27 Kinder lösten mehr als der Hälfte aller Aufgaben durch Finger-Teilzählen, acht Kinder wandten als Zählstrategie mehrheitlich das Weiterzählen an. Die restlichen fünf Kinder dieser Gruppe verwendeten Weiterzählen und Finger-Teilzählen etwa gleich oft. Sieben der 37 vorwiegend zählend rechnenden Kinder (18,9 Prozent) löste mindestens eine Aufgabe durch Ableitung. In vier Fällen handelte es sich dabei um nur *genau* eine, als "trivial" klassifizierte Aufgabe (etwa 10–5). Drei der vorwiegend zählend rechneten Kinder lösten aber mehrere Aufgaben durch Ableitung, darunter auch nicht-triviale Aufgaben.
– Innerhalb der als "Mischgruppe" (53 Kinder) zeigten 43 Kinder tatsächlich keinerlei klare Präferenz für irgendeine Einzelstrategie. Eines dieser Kinder löste aber doch knapp mehr als die Hälfte der Aufgaben durch Finger-Teilzählen. Drei Kinder bevorzugten innerhalb ihres "mix of strategies" das Weiterzählen, drei weitere das nicht-zählende Fingerrechnen. Vier dieser Kinder lösten knapp die Hälfte der Aufgaben durch Faktenabruf, den Rest durch Weiterzählen, aber auch durch Finger-Teilzählen. 33 Kinder der "Mischgruppe" (62,3 Prozent) löste mindestens eine Aufgabe durch Ableitung. In 11 Fällen handelte es sich dabei allerdings um Aufgaben, die für den Großteil der Kinder bereits trivial waren. Im Bereich der nicht-trivialen Aufgaben wandten also nur 22 Kinder dieser Gruppe (41,5 Prozent) Ableitungsstrategien an.
– Unter den 49 *vorwiegend* Zahlenfakten nutzenden Kindern waren 19, die die Aufgaben im Zahlenraum bis zehn sogar *ausschließlich* durch Faktenabruf oder Ableitung lösten. 47 der 49 Kinder (95,9 Prozent) lösten zumindest eine Aufgabe durch eine Ableitung, wobei sich das Ableiten nur bei einem dieser Kinder auf eine einzige, triviale Aufgabe beschränkte.

Legt man an die Kinder das gegenüber "Zahlenfakten nutzend" strengere Kriterium "Faktenabruf" an und fragt also, wie viele Kinder alle (oder fast alle) nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres tatsächlich *auswendig* gewusst haben (wie es etwa SCHIPPER 2005, S. 7 fordert; vgl. Kap. 3.1), so ergibt sich die folgende Bilanz:

- Nur neun Kinder (6,5 Prozent der Stichprobe) lösten tatsächlich alle 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Faktenabruf. (Alle neun zeigten daneben *auch* Ableitungsstrategien, aber nur für Aufgaben mit Zehnerübergang.) Weitere acht Kinder (5,8 Prozent) griffen nur bei einer Aufgabe im Zahlenraum bis zehn auf eine andere Strategie (dann zumeist Ableitung oder rasches Weiterzählen) zurück.
- 19 Kinder (13,7 Prozent) lösten dagegen *keine einzige* der nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf, weitere 12 Kinder (8,6 Prozent) nur genau eine.
- Nur etwa ein Drittel der Kinder (33,9 Prozent) löste mehr als die Hälfte der nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf.

8.5.2.4 Vergleich mit der Studie von Carpenter und Moser

Die in der Strategiegruppen-Zuteilung vorgenommene Beschränkung auf nicht-triviale Aufgaben gewährleistet eine zumindest eingeschränkte Vergleichbarkeit der für den dritten Interviewtermin vorgenommenen Einteilung niederösterreichischer Kinder mit jener, die Carpenter und Moser Anfang der 1980er Jahre für US-amerikanische Kinder ermittelten. Denn mit Ausnahme von 8–4 (Halbierungsaufgabe) erfüllen alle in der vorliegenden Untersuchung am Ende des ersten Schuljahres gefragten nicht-trivialen Aufgaben die Kriterien, die Carpenter und Moser bei der Auswahl der Aufgaben für ihre Studie beachtet und ihrer Definition von "fact using" zu Grunde gelegt haben (vgl. Carpenter & Moser 1984, S. 185). In der US-amerikanischen Studie wurden nun aber am Ende des ersten Schuljahres nur elf Prozent der Kinder als "fact users" im Zahlenraum bis zehn klassifiziert. In der vorliegenden Studie waren nach denselben Kriterien 35,3 Prozent der befragten niederösterreichischen Kinder "fact users" im Zahlenraum bis zehn.

Damit wurde zwar die von der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik vertretene Zielvorgabe, dass die additiven Grundaufgaben bis zum Ende des ersten Schuljahres von *möglichst allen* Kindern *zumindest* im Zahlenraum bis zehn automatisiert (so etwa Schipper) oder durch Faktennutzung (so etwa Gerster) gelöst werden sollten (vgl. Kap. 3.1), zwar *bei weitem nicht* erreicht. (Dass das Ziel offenbar erreicht werden *kann*, zeigen etwa die chinesischen ErstklässlerInnen in der Studie von Geary u.a. 1996, vgl. Kap. 2.6). Der Anteil von "fact users" am Ende des ersten Schuljahres war unter den niederösterreichischen Kindern aber immer noch deutlich höher als unter den US-amerikanischen Kindern in der Studie von Carpenter und Moser.

Es scheint plausibel, dass ein guter Teil dieser deutlichen nationalen Unterschiede auf Unterschiede in der Didaktik und Methodik des Arithmetikunterrichts zurückzuführen ist. Carpenter und Moser gehen zwar auf den Unterricht der von ihnen untersuchten Kinder nicht im Detail ein. Es wird aber immerhin deutlich, dass in diesem Unterricht zählendes

Rechnen an Hand von Zählmaterial das gesamte erste Schuljahr hindurch (und auch noch darüber hinaus) ausdrücklich gefördert ("strongly encouraged") wurde. Über Maßnahmen zur Förderung des Ableitens oder Auswendigmerkens wird in der Studie dagegen nicht berichtet (vgl. CARPENTER & MOSER 1984, S. 186f und Kap. 2.4). Demgegenüber wurden (den Angaben der Lehrkräfte zufolge) Zählstrategien zwar im Unterricht *aller* interviewten niederösterreichischen Kinder zumindest in der ersten Hälfte des Schuljahres auch gezielt trainiert, aber nur in sechs der 22 Klassen *während des gesamten* ersten Schuljahres. Ableitungsstrategien wurden in den niederösterreichischen Klassen zwar generell wenig beachtet, aber in zumindest sechs der 22 Klassen wurden *auch* Maßnahmen gesetzt, die zum Auswendigmerken der Grundaufgaben beitragen sollten (vgl. Kap. 7.2). Alles in allem scheint also das zählende Rechnen in den niederösterreichischen Klassen generell weniger, das Automatisieren (in einzelnen Klassen vielleicht auch das Ableiten) generell mehr gefördert worden zu sein als in den US-amerikanischen.

Denkbare weitere Faktoren, die zur Erklärung der nationalen Unterschiede im Strategieniveau am Ende des ersten Schuljahres beitragen mögen, liegen wohl vor allem im Bereich der vor- und außerschulischen Förderung der Kinder. Diese wurde allerdings in der vorliegenden Studie durch die Elternbefragung nur unzureichend valide erhoben, in der US-amerikanischen gar nicht erfasst oder zumindest in der Veröffentlichung nicht ausgewiesen, kann also im Vergleich nicht berücksichtigt werden. Sprachliche Einflüsse fallen aufgrund der im Deutschen wie im Englischen sehr ähnlichen Unregelmäßigkeiten der Zahlwortbildung wohl weniger ins Gewicht als (vermutlich) im Vergleich US-amerikanischer mit chinesischen Kindern (vgl. GEARY u.a. 1996). Eine mögliche zusätzliche Erschwernis für US-amerikanische Kinder mag aber darin liegen, dass auch in den Zahlwörtern "thirteen" bis "nineteen" die Zahl "ten" nicht deutlich hervortritt. Die Sonderrolle der Zahl "ten" als Bündelungseinheit, die im Chinesischen oder Japanischen ab der Zahl zehn (shí bzw. dju) auch sprachlich manifest ist, wird im Englischen durch die Zahlensprechweise also noch mehr verdunkelt als im Deutschen. Das mag eine bei englischsprachigen gegenüber deutschsprachigen Kindern verlangsamte Entwicklung nicht-zählender Strategien für den Zehnerübergang erklären helfen, aber wohl kaum die im oben angestellten Vergleich deutlichen Unterschiede im Zahlenraum bis zehn.

8.5.3 Sechs Typen in der Entwicklung von Rechenstrategien im Laufe des ersten Schuljahres

In Kapitel 8.5.2 wurde zunächst nur die Verteilung der nach Strategiepräferenzen (bezogen auf nicht durchgehend identische Aufgaben) gebildeten Gruppen zu den drei Interviewterminen dargestellt. Bezieht man nun im Vergleich der Einzelfälle als weiteres Kriterium mit ein, ob ein Kind in den Interviews im Laufe des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien anwandte und/oder in den Zusatzaufgaben zur Mitte und/oder am Ende des Schuljahres Einsicht in operative Zusammenhänge erkennen ließ, so lassen sich auf dieser Grundlage aus dem Datenmaterial sechs Grundtypen von Entwicklungsverläufen gewinnen. Diese werden im Folgenden zunächst jeweils *als Idealtypus beschrieben* und in weiterer Folge anhand von *prototypischen Vertretern* in ihrer Bandbreite näher charakterisiert. Die vermuteten "inhaltlichen Sinnzusammenhänge" werden dabei jeweils deutlich gemacht und in Forschungshypothesen übergeführt.

In der Darstellung wird versucht, Redundanzen so weit wie möglich zu vermeiden. Inhaltliche Zusammenhänge, die für mehrere Typen in modifizierter Form wesentlich sind, werden deshalb jeweils zuerst an jenen Typen erläutert, an denen sie am klarsten hervortreten. Aus diesem Grund werden zunächst die beiden Typen vorgestellt, bei denen Faktenabruf in unterschiedlicher Weise eine wesentliche Rolle gespielt hat, um sie dann zunächst dem anderen Extrem des Leistungsspektrums gegenüberzustellen, also den Kindern, die noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend rechneten. Daran anschließend folgt die Darstellung der weiteren Typen, die sich jeweils als *graduelle Abstufungen* der Extreme erklären lassen. Im abschließenden Kapitel (8.5.4) wird die im Zuge der Typenbildung entwickelte Theorie der Rechenstrategieentwicklung noch einmal zusammenfassend dargestellt. Dazu werden Forschungshypothesen formuliert, die sich aus dieser Theorie ableiten lassen, und Untersuchungsdesigns diskutiert, die zur Überprüfung dieser Hypothesen geeignet erscheinen.

8.5.3.1 Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten"

Charakterisierung als Idealtyp:

Idealtypisch lösen Kinder dieses Entwicklungstyps am Ende des ersten Schuljahres nicht-triviale additive Aufgaben im Zahlenraum bis zehn fast ausschließlich durch Nutzung von Zahlenfakten. Dabei herrscht direkter Faktenabruf vor. Sofern sie aber eine Aufgabe in diesem Zahlenraum noch nicht auswendig wissen, lösen sie diese durch eine Ableitungsstrategie. Die Kinder zeigen beim Rechnen und bei direkter Befragung klare Einsicht in operative Zusammenhänge (in der Regel *zumindest* in Kovarianz-Zusammenhänge *wie auch* in das Komplementaritätsprinzip) und wenden diese Einsicht auch beim Ableiten zumindest von einzelnen Aufgaben mit Zehnerübergang an. Bei solchen Aufgaben existieren innerhalb dieses Entwicklungstyps am Ende des ersten Schuljahres aber noch deutliche Unterschiede zwischen Kindern, die Zehnerübergänge durchgehend (und dann in der Regel mit verschiedenen Ableitungsstrategien) nicht-zählend bewältigen und solchen, die Aufgaben mit Zehnerübergang mehrheitlich zählend lösen.

Auch bezüglich des Werdegangs im Laufe des ersten Schuljahres ist dieser Typus uneinheitlich. Es finden sich unter diesen Kindern sowohl "Frühentwickler", die bereits Mitte (und dann oft auch schon zu Beginn) des ersten Schuljahres vorwiegend Zahlenfakten nutzen und die vor allem schon Mitte (und zuweilen auch schon zu Beginn) des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien anwenden. Es finden sich darunter aber auch "Spätentwickler", die Mitte des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien gar nicht oder nur vereinzelt anwenden und daneben auch noch etliche Aufgaben durch Zählstrategien lösen. Am Ende des ersten Schuljahres spielen Zählstrategien aber auch bei den "Spätentwicklern" dieses Typus keine Rolle mehr, Ableitungsstrategien dagegen sehr wohl, auch und vor allem bei Aufgaben mit Zehnerübergang.

Prototypische Vertreter:

Dominik (Prototyp mit hohem Anteil an Faktenabruf schon zu Schulbeginn)

Dominik beherrscht die Zahlwortreihe zu Schulbeginn bereits über "hundert" hinaus und kann auch von "zwanzig" sicher rückwärts zählen. Neun der zehn zu Schulbeginn gefragten Aufgaben im Zahlenraum bis zehn (und etliche nicht gefragte im Zahlenraum bis 20) löst er durch Faktenabruf. Lediglich 8–5 versucht er durch Ableitung zu lösen und kommt dabei auf das falsche Ergebnis "zwei", mit der Begründung, acht sei "um zwei mehr" als fünf. Auf die Frage, ob er die Aufgabe mit Fingern darstellen könne, zeigt er zwei Finger und wiederholt, dass acht um zwei mehr als fünf und acht minus fünf deshalb zwei sei. Auf die Bitte, die Rechnung mit Fingern vorzuzeigen, reagiert er verwirrt. Die Finger fürs Rechnen zu nutzen, scheint er nicht gewohnt zu sein. Dominik beharrt auf seiner Lösung und seiner Begründung für deren Richtigkeit. (Möglicherweise lässt er sich dadurch täuschen, dass zwischen den *Zählzahlen* acht und fünf mit "sechs" und "sieben" *zwei Zählzahlen* liegen, und meint deshalb, dass acht "um zwei mehr" sei als fünf.)

Mitte des ersten Schuljahres weiß Dominik 13 von 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn auswendig, nur 3+7 leitet er nach dem Prinzip der gegensinnigen Veränderung aus 6+4 ab. 6+6 weiß er auswendig und verwendet es als Ableitungsbasis für 6+7, 5+8 löst er im Teilschrittverfahren als 8+2+3.

Am Ende des ersten Schuljahres löst Dominik schließlich zwölf von 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Faktenabruf, 9–8 und 7–5 leitet er mit kurzem Nachdenken jeweils aus den inversen Additionen ab. Alle acht gefragten Aufgaben mit Zehnerübergang löst er nicht-zählend: 6+6, 8+8, 12–6, 16–10 jeweils durch Faktenabruf (oder, davon nicht unterscheidbar, hochgradig automatisiertes Ableiten), vier innerhalb weniger Sekunden durch bewusstes und nachträglich klar verbalisiertes Ableiten ("Verdoppeln plus 1" bei 6+7, Teilschrittverfahren bei 3+9, 5+8 und 14–9).

Peter (Prototyp mit besonders hohem Anteil an Ableitungen Mitte des Schuljahres)

Peter beherrscht zu Beginn des ersten Schuljahres die Zahlwortreihe bis "hundert" (und zählt dann mit "einhundert, zweihundert" weiter). Er kann sicher von "zehn", nicht aber von "zwanzig" ausgehend rückwärts zählen. Alle vier dargebotenen strukturierten Zahldarstellungen erfasst er quasi-simultan. Bereits zu Schulbeginn wendet Peter für zwei Aufgaben Ableitungsstrategien an: 10–9 löst er durch "think addition", 8–4 leitet er aus dem zuvor durch Rückwärtszählen gelösten 8–5 ab. Die Verdoppelungen bis 5+5 weiß er auswendig.

Mitte des ersten Schuljahres ist Ableiten Peters Hauptstrategie: Neun von 14 nicht-trivialen Aufgaben leitet er mit verschiedenen Strategien ab, wobei er jede Ableitung klar nachvollziehbar erläutert. Nur vier der nicht-trivialen Aufgaben sind zu diesem Zeitpunkt von ihm automatisiert, eine Addition (3+7) löst er durch rasches und sicheres Weiterzählen vom größeren Summanden. Automatisiert ist auch schon die Verdoppelung 6+6, die Aufgabe 6+7 wird durch "Verdoppeln plus 1" gelöst.

Am Ende des ersten Schuljahres löst Peter zwölf von 14 nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf, eine durch Ableitung (9–6 aus 6+3), eine durch rasches, sicheres Weiterzählen vom größeren Summanden (2+7). Alle acht beim dritten Interview gefragten Aufgaben mit Zehnerübergang werden nicht-zählend gelöst: Drei durch Faktenabruf (3+9, 6+6, 8+8), die restlichen durch Ableitung, wobei das Teilschrittverfahren nur bei der Aufgabe 5+8 zur Anwendung kommt. In beiden Zusatzaufgaben zeigt er klar verbalisierte Einsicht in die zu Grunde liegenden operativen Zusammenhänge (Kovarianz und Kompensationsprinzip).

Sandra (Prototyp für eine späte Entwicklung mit hohem Anteil an Zählstrategien bei Zehnerübergängen am Ende des ersten Schuljahres)

Sandra beherrscht zu Schulbeginn die Zahlwortreihe vorwärts nur bis "dreißig" und kann nicht von "zehn" beginnend rückwärts zählen. Die Anzahl der Punkte in den vier strukturierten Zahldarstellungen ermittelt es durchgehend zählend. "Zwei plus zwei ist vier" weiß es auswendig, die anderen Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn löst es (wie auch die anderen zu Schulbeginn gefragten Aufgaben) durch Alleszählen.

Mitte des ersten Schuljahres weiß Sandra nur zwei nicht-triviale Aufgaben im Zahlenraum bis zehn auswendig. 10–5 und 8–4 löst sie durch "think addition", sonst überwiegt Finger-Teilzählen im Zahlenraum bis zehn und Alleszählen bei Aufgaben mit Zehnerübergang.

Am Ende des ersten Schuljahres löst sie noch immer nur vier nicht-triviale Aufgaben durch Faktenabruf, neun weitere aber durch vielfältige Ableitungsstrategien (Kovarianz, Kompensation, "think addition"), welche jeweils klar nachvollziehbar erläutert werden. Nur bei 10–7 greift das Mädchen nach einigem Nachdenken zur Strategie "Finger-Teilzählen" und erklärt danach (gewissermaßen entschuldigend), es sei sich nur "nicht sicher" gewesen. Von den Aufgaben mit Zehnerübergang wird 3+9 als 9+1+2 gelöst, 16–10 löst Sandra spontan richtig und erklärt, sie habe "nur den Zehner weggenommen". Die restlichen sechs Aufgaben mit Zehnerübergang (inklusive 6+6) bewältigt sie durch Finger-Teilzählen.

Häufigkeit dieses Typus:
Von den 139 interviewten Kindern lassen sich 46 diesem Strategietyp zuordnen – mit den gegenüber einem Idealtypus stets nötigen Einschränkungen und im Rahmen des durch die Prototypen umrissenen, durchaus breiten Spektrums. 35 davon wandten Ableitungsstrategien bereits Mitte des ersten Schuljahres an ("Frühentwickler"), bei 11 war dies erst in den Interviews am Ende des Schuljahres zu beobachten ("Spätentwickler"; siehe dazu aber weiter unten). 5 der 46 Kinder dieses Typus lösten Aufgaben mit Zehnübergang am Ende des ersten Schuljahres noch vorwiegend durch Zählstrategien.

36 der 46 Kinder dieses Typus waren bereits Mitte des ersten Schuljahres vorwiegend Fakten nutzende Rechner, 8 Kinder gehörten Mitte des ersten Schuljahres zum "Mischtyp", 2 waren zu diesem Zeitpunkt noch vorwiegend zählende Rechner. Verfolgt man die Entwicklung der 46 Kinder zurück bis zum Schulanfang, so lösten 14 von ihnen schon die zu Schulbeginn gestellten zehn Aufgaben vorwiegend durch Faktenabruf und Ableitung, 26 gehörten zu Schulbeginn zum "Mischtyp", nur 6 dieser Kinder waren im Bereich der zu Schulbeginn gefragten Aufgaben mehrheitlich zählende Rechner.

Inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen dieses Typus:
Der Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" entspricht weitgehend dem, was GRAY als "proceptual approach" (vgl. Kap. 2.9.3) bespricht, und steht in Einklang mit BAROODYs These vom "Internalisieren von Beziehungen" (vgl. Kap. 2.8): Die Kinder dieses Typs scheinen die "procepts", die den "procedures" des Addierens und Subtrahierens zugrundeliegen, weitgehend erfasst zu haben. Sie nutzen operative Zusammenhänge, um nicht auswendig gewusste Aufgaben abzuleiten. Sie tun dies am Ende des ersten Schuljahres auf Basis eines großen Repertoires an automatisierten Aufgaben. Sandra, die als Prototyp vorgestellt wurde, ist in *dieser* Hinsicht mit nur 4 beim dritten Interview auswendig gewussten nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn ein Grenzfall: Nur noch 2 weitere Kinder dieses Typus lösten beim dritten Interview weniger als 7 von 14 nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf. 34 von 46 Kinder dieses Typus wussten am Ende des Schuljahres mehr als zwei Drittel dieser Aufgaben auswendig.

Ableiten war bei mehr als drei Viertel dieser Kinder (35 von 46) bereits Mitte des ersten Schuljahres feststellbar, bei mehr als der Hälfte (26 von 46) bereits zu Beginn des ersten Schuljahres. Zumindest die Entwicklung dieser Kinder steht im Einklang mit der von BAROODY wie GRAY vertretenen Auffassung, dass gerade das wiederholte Ableiten von Aufgaben dazu beiträgt, dass diese Aufgaben im Laufe der Zeit automatisiert werden. Bei elf

Kindern dieses Typus war in den Interviews Mitte des ersten Schuljahres allerdings noch kein Ableiten zu beobachten. *Alle* diese Kinder zeigten aber in den Zusatzaufgaben beim zweiten Interview Einsicht in operative Zusammenhänge. Es kann vermutet werden, dass auch diese elf Kinder im Laufe ihres ersten Schuljahres immer wieder Aufgaben durch Ableitungsstrategien gelöst haben – wenn nicht ohnedies bereits zum Zeitpunkt des zweiten Interviews, so jedenfalls nicht erstmals im Verlaufe oder im Zeitraum des dritten mit ihnen geführten Interviews. Denn es scheint doch wenig plausibel, dass etwa Michael, der im Interview Mitte des Schuljahres zwar keine einzige Aufgabe ableitete, aber am Ende des Schuljahres bei fünf Grundaufgaben sowohl im Zahlenraum bis zehn als auch für Zehnerübergänge drei verschiedene Ableitungsstrategien anwandte (Kovarianz, "think addition", Teilschrittverfahren), solche Strategien nicht schon geraume Zeit vor dem Interview immer wieder verwendet haben sollte. Der Junge wusste beim zweiten Interview aber 13 der 14 gefragten nicht-trivialen Aufgaben bereits auswendig. Er hatte also in diesem Interview auch kaum Anlass und damit so gut wie keine Gelegenheit, seine Kompetenz zum Ableiten unter Beweis zu stellen. Ähnlich scheint es bei den anderen Kindern dieser Untergruppe gewesen zu sein. Die Einstufung dieser Kinder als "Spätentwickler" würde demnach weniger eine Besonderheit ihrer Strategieentwicklung widerspiegeln, als vielmehr die Grenzen des Untersuchungsdesigns aufzeigen. Auch in dieser Hinsicht hätte eine mikrogenetische Studie mit kürzeren Intervallen zwischen einzelnen Interviews vermutlich mehr Klarheit gebracht.

Die Tatsache, dass *alle* Kinder dieses Typus spätestens am Ende des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien verwendeten und auch *alle* Kinder dieses Typus zumindest bei einer der beiden Zusatzaufgaben am Ende des ersten Schuljahres den zu Grunde liegenden operativen Zusammenhang (Kovarianz und/oder Komplementarität) auch erläutern konnten, berechtigt indes *nicht* zur Annahme, dass *alle* diese Kinder über ein *umfassendes und tiefes Verständnis* operativer Zusammenhänge verfügten.

Denn Einsicht in operative Zusammenhänge ist kein "all-or-nothing-phenomenon" (vgl. BAROODY 1999, S. 168): Ohnedies sind verschiedene Zusammenhänge (wie Komplementarität und Kovarianz) für Kinder offenbar unterschiedlich "salient" (vgl. BAROODY 2006, S. 29 und das in den Kapiteln 8.2.3, 8.3.4 und 8.4.4 für die einzelnen Interviewtermine durchgeführte "scoring in context"). Ein Kind mag also den einen Zusammenhang durchschaut haben, den anderen nicht. Aber auch dieses "Durchschauen" findet offenbar auf höchst unterschiedlichen Niveaus statt, und nicht jede erfolgreiche Anwendung eines operativen Zusammenhangs beweist Einsicht in dessen *prinzipiellen* Charakter. So haben denn auch viele Kinder dieses Typus (20 von 46) den Zusammenhang zwischen 9+9 und 18–9 in der Zusatzaufgabe am Ende des ersten Schuljahres offenbar *nicht* erfasst – obwohl dieselben Kinder (mit nur zwei Ausnahmen) zuvor zumindest eine Subtraktion durch "think addition" gelöst hatten. Was

BAROODY u.a. im Zusammenhang mit ersten Anwendungen des Kommutativitätsprinzips im Anschluss an ANDERSON 1984 als "weak schema" beschreiben, scheint in vielen Fällen auch hier zutreffend: "a generalization narrow in scope (tied to a particular context) and, perhaps, lacking logical coherence (BAROODY u.a. 2003, S. 145, vgl. Kap. 2.10.3).

Auch die Übertragung von Strategien, die sie im Zahlenraum bis zehn erfolgreich anwandten, auf Aufgaben mit Zehnerübergang gelang nicht allen Kindern dieses Typus. Ein kleiner Teil dieser Kinder (fünf von 46) löste die gefragten Aufgaben mit Zehnerübergang am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend durch Zählstrategien. Die folgenden Faktoren mögen, auch in ihrem Zusammenwirken, zu diesem abweichenden Strategieverhalten bei Aufgaben mit Zehnerübergängen geführt haben:

a) Mangel an Einsicht in das *Prinzipielle* der im Zahlenraum bis zehn angewandten Strategien (was etwa der Anwendung der Strategie "Verdoppeln plus 1" zur Ableitung von 6+7 aus 6+6 entgegen stehen mag; so etwa bei Nicole, Alex und Nina);
b) Mangel an auswendig gewussten Aufgaben mit Zehnerübergang, die – je nach Strategie – als Ableitungsbasis für andere Aufgaben mit Zehnerübergang notwendig sind (wer 6+6 nicht auswendig weiß, kann 6+7 und 12–6 nicht daraus ableiten; so etwa bei Sandra und Clemens);
c) Mangel an Einsicht ins Stellenwertsystem: Wer 3+10 nicht als einfache Zusammensetzung von einem Zehner und drei Einern zu 13 versteht und daher nicht unmittelbar mit 13 assoziiert, wird daraus kaum 3+9 mit der "Kraft der Zehn" ableiten. Analoges gilt für die Ableitung von 14–9 aus 14–10. Einige Kinder ließen diesen Mangel an Einsicht ins Stellenwertsystem erkennen durch zählendes Rechnen bei der Aufgabe 16–10 (so etwa Katharina, Adriana, Alex, Hannes, Simon und Clemens).
d) Mangel an Einsicht in das im Unterricht zumeist einzig behandelte Teilschrittverfahren, was wiederum mit c), aber auch mit bestehenden Unsicherheiten oder Defiziten beim Zerlegen von Zahlen (und natürlich mit der Art der Behandlung des Verfahrens im Unterricht; vgl. Kap. 7.1 und 7.2) zusammenhängen mag.

Auf Grundlage der durchgeführten Interviews war es nicht möglich, in jedem Einzelfall zu unterscheiden, welche(r) dieser vermuteten Faktoren bei einem Kind tatsächlich wirksam gewesen sein könnte(n). Die Faktoren b) bis d) sind spezifisch für Aufgaben mit Zehnerübergang. Es scheint daher auf Basis der erhobenen Daten nicht gerechtfertigt, einem Kind, das im Zahlenraum bis zehn Ableitungsstrategien anwandte, Zehnerübergänge aber mehrheitlich oder auch ausschließlich zählend rechnete, ein nur eingeschränktes Verständnis operativer Zusammenhänge zu attestieren. Vielleicht war ja nur sein Verständnis für das Zehner-Einer-System und/oder das Teilschrittverfahren noch nicht ausgereift. Deshalb wurde auch darauf verzichtet, die Performanz bei Zehnerübergängen als Kriterium für eine feinere Differenzierung innerhalb des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" zu wählen.

Hinweise dafür, dass sich die Kinder dieses Typus nach der "Tiefe" ihres Verständnisses für operative Zusammenhänge noch weiter differenzieren ließen, finden sich in den Protokollen zu den drei Interviewserien allerdings zuhauf; die Prototypen geben davon einen gewissen Eindruck. Um aber eine solche feinere Typisierung auch durchgehend empirisch begründen zu können, hätte es einer wesentlich differenzierteren Erhebung des konzeptionellen Wissens bedurft, als dies im Rahmen dieser Studie geleistet werden konnte.

Als Fazit bleibt festzuhalten: Die Kinder dieses Typus waren am Ende des ersten Schuljahres durchwegs souveräne Fakten nutzende Rechner im Zahlenraum bis zehn und demonstrierten dabei und in den Zusatzaufgaben *zumindest Ansätze* für ein Verständnis *zumindest mancher* operativer Zusammenhänge. Sie verfügten über ein gewisses, aber vermutlich nicht durchwegs auch über ein *vertieftes Verständnis* komplexerer operativer Zusammenhänge (zumindest Kovarianz und Komplementarität), waren aber *nicht durchwegs* auch bei Aufgaben mit Zehnerübergang souveräne Fakten nutzende Rechner.

8.5.3.2 Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten"

Charakterisierung als Idealtyp:

Idealtypisch lösen Kinder dieses Entwicklungstyps die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend oder sogar ausschließlich durch Faktenabruf. Dabei kann es zu Abruf-Fehlern kommen, die vom Kind nicht bemerkt und daher nicht korrigiert werden. Aufgaben, die sie nicht spontan wissen oder zu wissen glauben, lösen Kinder dieses Typus durch Zählstrategien. Ableitungsstrategien wenden sie durchgehend nicht an. Für Aufgaben mit Zehnerübergang kommen für sie daher nur entweder Zählstrategien oder Faktenabruf in Frage. Bei letzterem kann es wieder zu (vom Kind nicht bemerkten) Abruffehlern kommen.

Prototypische Vertreterin:

Lisa-Maria

Lisa-Maria kann die Zahlwortreihe zu Schulbeginn bis "neununddreißig" aufsagen und von "zehn" (nicht aber von "zwanzig") rückwärtszählen. Es gelingt ihr bei keinem der vier angebotenen Aufgabenkärtchen mit strukturierten Zahldarstellungen, die Anzahl der Punkte quasisimultan zu erfassen. Die Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn kann sie auswendig. Alle anderen zu Schulbeginn gefragten Aufgaben löst sie durch Alleszählen.

Beim zweiten Interview Mitte des Schuljahres weiß Lisa-Maria 12 von 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn auswendig. Bei 4+6 antwortet sie spontan falsch ("neun"), 3+4 leitet sie aus 4+4 ab (dazu siehe weiter unten). Damit im Einklang, kann sie in den Zusatzaufgaben den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 klar nachvollziehbar erläutern und zeigt auch eine gewisse, wenn auch nur unklar verbalisierte Einsicht in das Komplementaritätsprinzip.

Am Ende des ersten Schuljahres löst Lisa-Maria 13 von 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn korrekt durch Faktenabruf, nur bei 10–7 antwortet sie spontan falsch ("zwei"). Obwohl sie 6+6 auswendig weiß, löst sie 6+7 ebenso durch Weiterzählen wie 3+9 und 8+8. Bei 5+8 antwortete sie spontan mit "drei", auch bei 10+7 nennt sie spontan die Differenz der beiden Zahlen, ohne ihren Fehler zu bemerken. 16–10, 14–9 und 12–6 löst sie jeweils durch Rückwärtszählen ohne Zählhilfe, bei 16–10 mit Zählfehler. In den Zusatzaufgaben zeigt Lisa-Maria klar verbalisierte Einsicht in den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8, aber keine erkennbare Einsicht in jenen zwischen 9+9 und 18–9.

Häufigkeit dieses Typus:
Wie ausgeführt (vgl. Kap. 6.5.1), liegt es im Wesen jedes *Idealtypus,* dass er "in seiner begrifflichen Reinheit [...] nirgends in der Wirklichkeit empirisch vorfindbar" ist (WEBER 1922/1985, S. 191). Gerade diese "Zuspitzung" soll aber dazu beitragen, wesentliche Eigenschaften der diesem Idealtypus zugeordneten Individuen deutlich zu machen (vgl. BIKNER-ASBAHS 2003, S. 216). Dies wurde auch mit dem Idealtypus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" versucht. Es soll aber nicht verschwiegen werden, dass es schwer fällt, einzelne Kinder *eindeutig* diesem Typus zuzuordnen. Bei insgesamt drei Kindern der gesamten Stichprobe scheint dies einigermaßen gerechtfertigt. Wie der vorgestellte Prototyp zeigt, bleiben aber auch hier Zweifel: So hat ja etwa Lisa-Maria, wie dargestellt, Mitte des Schuljahres doch auch (dem *Ideal*typus zuwiderlaufend) eine Aufgabe durch eine Ableitungsstrategie gelöst.

Dasselbe gilt für Carol. Am Ende des ersten Schuljahres löste dieses Mädchen aber keine einzige Aufgabe durch Ableitung. Sämtliche Aufgaben im Zahlenraum bis zehn und darüber hinaus auch fünf Aufgaben mit Zehnerübergang wusste Carol auswendig. Nur 5+8 löste sie zählend richtig, die Aufgaben 16–10 wie auch 12–6 spontan mit "vier". Vermutlich liegt in diesen beiden Fällen ein "Kippfehler" unter Vernachlässigung der Zehnerstelle vor, gerechnet wurde also wohl 10–6 statt 16–10 sowie 6–2 statt 12–6. Mit einiger Wahrscheinlichkeit ist auch bei 14–9 Carols spontane Lösung "fünf" im Grunde das Resultat eines solchen Kippfehlers, der allerdings in diesem Fall kein falsches Ergebnis nach sich zog, denn 9–4=14–9.

Lea entsprach dem Idealtypus Mitte des ersten Schuljahres so perfekt, wie ein Individuum einem Idealtyp nur entsprechen kann. Am Ende des ersten Schuljahres begründete sie dann ihre rasche Lösung von 12–6 (Lösungszeit 3 Sekunden) aber wie folgt: "Weil zwei sechs ist zwölf." Sie löste sechs Aufgaben mit Zehnerübergang durch Faktenabruf innerhalb jeweils einer Sekunde, benötigte aber dann etwa 25 Sekunden zum Finger-Teilzählen bei 6+7; 6+6 hatte sie kurz zuvor auswendig gewusst.

Inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen dieses Typus:
BAROODY betrachtet das Automatisieren der Basisfakten als "internalization of relationships" (BAROODY 1985). GRAY führt zum "proceptual divide" aus: "It is suggested that the use of derived facts for the younger children is an *indispensable* stage in developing knowledge of the number bonds" (GRAY 1991, S. 571; Hervorhebungen M.G.). Stimmt beides ohne Wenn und Aber, dann kann es den Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" gar nicht geben. Denn wann immer Kinder Basisfakten automatisieren, würde dies demnach auf Grundlage von Einsicht in einen operativen Zusammenhang geschehen, und wo keine Einsicht, da eben auch kein Automatisieren.

In Kapitel 2.8.3 und 2.9.3 wurde bereits dagegen gehalten, dass BAROODYs These bzw. GRAYs "suggestion" empirisch zumindest unzureichend belegt sind. Es scheint vor dem Hintergrund gedächtnispsychologischer Theorien über die Bedeutung der Elaboration für das langfristige Speichern von Gedächtnisinhalten zwar plausibel, dass das wiederholte Ableiten einer Aufgabe das Automatisieren dieser Aufgabe *erleichtert*, vielleicht auch *beschleunigt* (vgl. Kap. 2.12.1 und 2.12.2). Und es scheint umgekehrt plausibel, dass das dauerhafte Merken *sämtlicher* additiver Grundaufgaben erheblich erschwert wäre, wenn ein Kind tatsächlich *keinerlei Zusammenhänge* zwischen diesen Aufgaben zur Kenntnis nähme und sich daher tatsächlich *lauter isolierte Einzelfakten* merken müsste, also etwa auch jede Aufgabe mit Null als Summanden für sich (und nicht einfach das *Prinzip*, dass *jede* Zahl bei Addition mit Null unverändert bleibt) oder etwa auch 6+1 und 1+6 als zwei verschiedene Aufgaben (und nicht einfach das Prinzip, dass die Summanden bei *jeder* Addition auch vertauscht werden können). Ohne solche Einsichten müsste sich ein Kind zum Beherrschen der additiven Grundaufgaben tatsächlich 200 Einzelfakten völlig getrennt voneinander einprägen (100 mögliche Plus-Kombinationen der Zahlen 0 bis 9, 100 mögliche Subtraktionen mit einstelligem Subtrahenden und einem Ergebnis zwischen 0 und 9).

Aber es liegen keine Studien dazu vor, ob nicht selbst eine solche Merkaufgabe vom kindlichen Gedächtnis unter bestimmten Bedingungen (konsequenter Drill?) bewältigt werden kann (siehe dazu weiter unten). Vor allem aber ist es vermutlich ohnedies eine *Fiktion*, dass auch nur irgendein Kind sich über längere Zeit mit additiven Grundaufgaben auseinander setzt, ohne dabei zumindest das eine oder andere *Prinzip*, die eine oder andere *Beziehung* (und sei es auf noch so oberflächliche Weise) zu erfassen. Im Rahmen dieser Stichprobe war dies jedenfalls, wie noch gezeigt wird (vgl. Kap. 8.5.3.3), selbst bei den Kindern mit den schwächsten Rechenleistungen nicht der Fall. Und es wurde ja auch schon erwähnt, dass bei den Interviews am Ende des ersten Schuljahres beispielsweise die Aufgaben mit Null für kaum ein Kind ein Problem waren (vgl. Kap. 8.4.4.1). Es scheint plausibel, dass dies nicht Ausdruck einer reinen Merkleistung war (warum wurden dann ausgerechnet *diese* Aufgaben von fast allen Kindern gemerkt?), sondern davon, dass offenbar (vielleicht mit zwei Ausnahmen innerhalb der gesamten Stichprobe) alle Kinder die "N+0-rule" (BAROODY 1985) erfasst hatten.

BAROODY hält ASHCRAFT, dem Kritiker seiner These vom Automatisieren als Internalisieren von Beziehungen, gerade auch diese "N+0-rule" entgegen (BAROODY 1985, S. 89f). ASHCRAFT weist in seiner Replik aber zu Recht darauf hin, dass sich bei weitem nicht *alle* additiven Grundaufgaben über solche *einfachsten* Regeln erschließen lassen (ASHCRAFT 1985; vgl. Kap. 2.2.2). Die Frage sollte also wohl nicht lauten, ob Kinder die additiven Grundaufgaben *gänzlich ohne Einsicht* in Regelhaftes automatisieren können. Denn zumindest manche "Regeln" scheinen alle (oder zumindest so gut wie alle) Kinder zu lernen.

Die Frage sollte vielmehr lauten, ob eine *vertiefte* Einsicht, die über solche einfachsten Regeln (wie die "N+0-rule", die "N+1-rule" oder das Kommutativitätsprinzip) hinausgeht und die etwa auch operative Zusammenhänge wie Kovarianz, Kompensation und Komplementarität umfasst, eine *unverzichtbare Bedingung* für das Automatisieren darstellt. BAROODY scheint dies zu meinen, spezifiziert aber nicht, *welche* Zusammenhänge auf *welchem* Niveau verstanden sein müssten, damit die Automatisierung der additiven Grundaufgaben gelingen könne. Die Frage sollte weiters lauten, ob eine Phase des Ableitens "unverzichtbar" ist, wenn Kinder "knowledge of the number bonds" entwickeln sollen. GRAY postuliert dies, spezifiziert aber nicht, *wie lange* diese Phase dauern und *wie umfassend* sie sein müsse (mit wie vielen verschiedenen Strategien, wie vielen auf diese Weise wiederholt abgeleiteten Aufgaben).

Vor *diesem Hintergrund* ist die hier vorgenommene Unterscheidung der Typen "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" und "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" als ein Versuch der theoretischen Annäherung an die komplexe Wirklichkeit kindlicher Strategieentwicklung zu verstehen: Es wird *nicht* behauptet, dass die Kinder des Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" *keinerlei* Einsicht in operative Zusammenhänge gezeigt und im Laufe des ersten Schuljahres auf das Ableiten von Aufgaben *gänzlich verzichtet* hätten. Aber Einsicht findet, wie dargestellt, auf unterschiedlichen Niveaus statt. Ableiten kann eine bevorzugte, über einen längeren Zeitraum bei einer Reihe von Aufgaben immer wieder angewandte Strategie sein – oder aber etwas, das ein Kind nur bei einzelnen Aufgaben hin und wieder einmal einsetzt.

Nun lassen sich solche feinen Unterschiede durch nur drei Interviews im Zeitraum eines Jahres freilich nicht verlässlich erheben. Bei einigen wenigen jener Kinder, die den Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres weitestgehend automatisiert hatten, verdichten sich aber in diesen drei Interviews Hinweise darauf, dass Ableiten für diese Kinder *von allenfalls untergeordneter Bedeutung* gewesen sein und bei ihnen tatsächlich das *Auswendiglernen von weitestgehend isoliert gedachten Zahlenfakten* im Vordergrund stand; diese Kinder wurden dem Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" zugeordnet.

Als Grundlage für diese Zuordnung wurden Phänomene gewertet wie spontanes Nennen der Differenz zweier Zahlen, wenn nach der Summe gefragt worden war, und umgekehrt – ein Phänomen, das auf einen hohen Grad von Automatisierung hinweist, bei der aber die *Bedeutung* der spontanen Assoziationen offenbar keiner bewussten Kontrolle unterliegt (vgl. DEHAENE 1999, S. 151f). Oder der Rückgriff auf Zählstrategien (und eben nicht Ableitungsstrategien), wenn eine Aufgabe im Zahlenraum bis zehn einmal doch nicht aus dem Gedächtnis abgerufen werden konnte. Oder gerade auch die Tatsache, dass diese Kinder zwar manche Aufgaben mit Zehnerübergang offenbar bereits auswendig wussten und auch als Erläuterung nicht mehr zu sagen hatten als "Das weiß ich einfach!", während sie andere Aufgaben mit Zehnerübergang mit erkennbarer Mühe zählend rechneten (obwohl sie vielleicht die Nachbaraufgabe kurz zuvor "einfach gewusst" hatten).

Gerade das letzte Phänomen spricht dafür, dass diese Kinder zumindest bei den bereits automatisierten Aufgaben mit Zehnerübergang tatsächlich *keine Phase des Ableitens* hatten, sondern vielmehr weitgehend *direkt* vom zählenden Lösen der Aufgaben zum Lösen durch Faktenabruf übergegangen sind. Das scheint nun doch im Widerspruch zu GRAYS Vermutung zu stehen, dass die Phase des Ableitens unverzichtbar ("indispensible") sei (GRAY 1991, S. 571). Aber es wäre ohnedies ein *Widerspruch in sich*, wollte man behaupten, dass *jede einzelne Aufgabe* in einer ersten Phase abgeleitet werden müsse, um im weiteren Verlauf im Langzeitgedächtnis gespeichert werden zu können. Denn wer eine Aufgabe ableiten will, muss eine andere Aufgabe ja bereits gespeichert haben (zumindest dann, wenn sich das Ableiten nicht nur auf Aufgaben beschränken soll, deren Ableitungsbasis kurz zuvor zählend gelöst wurde und daher noch im Gedächtnis präsent ist). Der Speicherung dieser als Ableitungsbasis dienenden Aufgabe mag selbst eine Phase des Ableitens aus einer dritten Aufgabe vorangegangen sein. Aber irgendwo muss dieser Prozess einen Anfang genommen haben – mit einer Aufgabe eben, die tatsächlich "einfach so" gemerkt wurde.

Gerade die Verdoppelungsaufgaben im Zahlenraum bis zehn scheinen von vielen Kindern (und das sehr früh; vgl. Kap. 8.3.1) "einfach so" gemerkt zu werden. Das kann natürlich schon zu diesem frühen Zeitpunkt mit operativen Einsichten verbunden sein. Aber wie GRAY selbst anmerkt, lässt sich "the ability to simply recall facts" schwer in eine "conceptual hierarchy" einordnen (GRAY 1991, S. 554). Es ist also auch *keine* unerlässliche Voraussetzung für das Merken einer Grundaufgabe, deren operative Zusammenhänge mit anderen Grundaufgaben verstanden zu haben (von denen es im Übrigen viele gibt). Es ist nicht einmal eine unerlässliche Voraussetzung für das Merken einer Grundaufgabe, dieser eine *operative Bedeutung* zuzuschreiben: Auswendig gemerkt werden kann eine Grundaufgabe auch wie ein "Ausschnitt aus einem [fremdsprachigen] Lied", dessen Bedeutung man nicht versteht (vgl. RADATZ u.a. 1996, S. 83). Es fragt sich nur, ob das eine ausreichende Grundlage darstellt für das Auswendigmerken *sämtlicher* additiver Grundaufgaben. Es fragt sich weiters, wie *dauerhaft* ein solches Auswendigmerken ist, mit *welchem Aufwand an fortgesetzter Übung im Memorieren* es allenfalls erreicht werden kann, und dergleichen mehr.

Betrachten wir vor dem Hintergrund dieser Fragen noch einmal die Häufigkeiten, mit der einzelne Aufgaben von den interviewten Kindern schon Mitte des ersten Schuljahres durch Faktenabruf gelöst wurden (vgl. Kap. 8.3.1): Die nach den Verdoppelungen am häufigsten auswendig gewussten Aufgaben waren 1+6, 10–5, 9–1, 8–4 und 10–9. Tatsächlich ist es gerade bei diesen Aufgaben gut möglich, dass sie in einer früheren Phase von vielen Kindern abgeleitet wurden: Denn 1+6 und 9–1 lassen sich leicht aus der "N+1-rule" erschließen, 10–9 ist die Umkehraufgabe einer Aufgabe, deren Lösung sich aus der "N+1-rule" ergibt, und die Subtraktionen 10–5 und 8–4 sind Umkehraufgaben von ihrerseits häufig schon früh automatisierten Verdoppelungen. Die hohe Automatisierungsrate gerade dieser Aufgaben schon Mitte des ersten Schuljahres ist also gut vereinbar mit der Annahme, dass tatsächlich das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten und fortgesetztes Ableiten das Merken *erleichtert* haben. Aber das setzt bereits das Auswendigwissen in anderen Bereichen voraus: das Auswendigwissen der Verdoppelungen, und zumindest auch der Zahlwortreihe (deren Automatisierung ja Bedingung dafür ist, dass Kinder die "N+1-rule" überhaupt entdecken können). Wenn aber in diesen Bereichen zugestanden wird, dass gewisse Zahlenfakten auch "einfach nur gemerkt" werden, dann ist es wenig plausibel, dass dieses "einfache Merken" nicht auch noch zumindest einige weitere Zahlenfakten umfassen kann.

Beispiele dafür, dass Kinder sich Zahlenfakten (über die Verdoppelungen und die Zahlwortreihe hinaus) tatsächlich "einfach so gemerkt" haben – Fälle von Faktenabruf also, bei denen es ganz und gar nicht plausibel erscheint, dahinter eine "Internalisierung von Beziehungen" zu vermuten –, gab es im Verlaufe der drei Interviews zuhauf, gerade bei Kindern hohem Anteil an Zählstrategien. So bewältigte Lukas am Ende des ersten Schuljahres *sämtliche* nicht-trivialen Additionen durch Finger-Teilzählen – mit Ausnahme ausgerechnet von 3+6, das er innerhalb einer Sekunde richtig durch Faktenabruf löste. 3+5, 3+7, 4+6 wurden zählend gerechnet – welche "internalisierte Beziehung" soll zum Merken von 3+6 geführt haben? Laura löste beim dritten Interview 2+7, 3+6, 4+6 mit Hilfe der Finger und *keine einzige* Aufgabe mit Hilfe einer Ableitungsstrategie. Aber 3+7 wusste sie auswendig. Warum ausgerechnet 3+7?

In diesen und vielen anderen Fällen liegt die Vermutung nahe: "Einfach so gemerkt"! Und diese Vermutung verträgt sich mit der Annahme, dass in *anderen* Fällen (und insgesamt bei weitem öfter; vgl. dazu auch Kap. 9.3) ein Faktenabruf mit großer Plausibilität als "Internalisierung von Beziehungen" bzw. als das Resultat wiederholten Ableitens derselben Aufgabe gedeutet werden kann. Die Gesamtheit der Basisfakten, die ein Kind zu einem bestimmten Zeitpunkt im Langzeitgedächtnis gespeichert hat, wäre demnach *immer beides*: Folge des

Auswendigmerkens von Einzelfakten *und* Resultat von Einsicht in "Regeln" bzw. "Zusammenhänge" und darauf gründenden Ableitungen, die das Merken weiterer Einzelfakten vermutlich unterstützen, aber auch ersetzen können (2+6=8 und 6+2=8 etwa müssen bei Einsicht in die Kommutativität nicht als *zwei* Fakten gemerkt werden). In welchem Ausmaß das eine (Auswendigmerken) und das andere (Einsicht und Ableiten) zum jeweils erreichten Stand des individuellen Faktenwissens beitragen, scheint von Kind zu Kind verschieden zu sein. Das diesbezügliche Spektrum dürfte, wie die vorliegende Untersuchung vermuten lässt, äußerst breit sein. Und es ist plausibel, dass die unterschiedlichen individuellen Ausprägungen von individuellen Faktoren (etwa Unterschieden im konzeptuellen Wissen, aber wohl auch im Bereich des Gedächtnisses) abhängen, die sich ihrerseits in Abhängigkeit vom Unterricht oder von außerhalb des Unterrichts stattfindenden Fördermaßnahmen entwickeln.

In diesem Zusammenhang ist zu bedenken, dass im Unterricht der interviewten Kinder das *Memorieren* additiver Grundaufgaben wohl keine große Rolle gespielt haben dürfte (vgl. Kap. 7.3.2). Anders als es BAROODY als "common sense" unter US-amerikanischen Grundschullehrkräften beschreibt (vgl. Kap. 2.8.3), wird in Österreich offenbar wie auch in Deutschland

> *"traditionell [...] beim Erlernen des kleinen Einmaleins mehr Wert auf Automatisierung gelegt [...] als beim Einspluseins bzw. Einsminuseins (vielleicht, weil man Additions- und Subtraktionsaufgaben in wesentlich kürzerer Zeit in Einerschritten zählend bewältigen kann als Multiplikations- und Divisionsaufgaben)"* (SCHÄFER 2007, S. 376).

Die verbreitete Vernachlässigung des *automatisierenden* Üben mag nun aber dazu beigetragen haben, dass nur relativ wenige Kinder am Ende des ersten Schuljahres dem Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" zuzuordnen waren, dass also nur bei wenigen Kindern der Verdacht einigermaßen begründet ist, sie hätten die additiven Grundaufgaben zumindest weitgehend "ohne Verständnisgrundlage auswendig gelernt" (vgl. Kap. 3.2.2). Offenbar wurden nämlich im Unterricht dieser Kinder kaum Maßnahmen ergriffen, die als "Reiz-Reaktionslernen" oder "sturer Drill" (vgl. RADATZ u.a. 1996, S. 83) zu qualifizieren wären. Und es kann vermutet werden, dass auch jene Eltern, die im Elternfragebogen angaben, sie hätten mit ihren Kindern regelmäßig rechnen geübt, dies eher in Form von *zusätzlichen Übungsaufgaben* (vermutlich in Form von "grauen Päckchen") als in Form von Drillmaßnahmen getan haben – einfach deshalb, weil solche Maßnahmen im Bereich der additiven Grundaufgaben in Österreich *keine Tradition* haben dürften.

Das ist, auch hierin trifft die oben zitierte Einschätzung von SCHÄFER vermutlich auch für Österreich zu, im Bereich des Einmaleins anders. Hier scheint es nach wie vor üblich zu sein, die "Malreihen" unter völliger oder weit gehender Ausblendung operativer Zusammenhänge auf rein verbaler Ebene (im Sinne des Reiz-Reaktionslernens) zu memorieren (zu den dazu konträren Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik vgl. etwa GERSTER 1994, S. 94-100;

WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 110-121; PADBERG 2005, S. 128-134; zur Kritik an der in Österreich üblichen Unterrichtspraxis vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 150f). Vor dem Hintergrund dieses Reiz-Reaktionslernens kennt die fachdidaktische Literatur zu sogenannten "Rechenschwächen" das durchaus verbreitete Phänomen von Kindern, die das kleine Einmaleins auswendig wissen, aber kein Operationsverständnis im Bereich der Multiplikation haben (vgl. LORENZ 2003a, S. 81; LORENZ 2003b, S. 105; GAIDOSCHIK 2003a, S. 46).

Ein vergleichbares Phänomen war im Bereich der additiven Grundaufgaben innerhalb der gesamten Stichprobe kaum zu beobachten; nur die Kinder des hier besprochenen Typus kamen dem Phänomen zumindest nahe. Dieser Unterschied zum kleinen Einmaleins liegt wohl zum einen daran, dass die Kinder zu den additiven Operationen in aller Regel schon ein hohes Maß an Wissen in die Schule mitbringen, an das sie anknüpfen können, während der Weg vom zumeist gegebenen kindlichen Alltagsverständnis des Wörtchens "mal" zu einem tragfähigen Operationsverständnis der Multiplikation oftmals weit ist (vgl. GAIDOSCHIK 2003b, S. 148). Es dürfte aber zum anderen auch daran liegen, dass – im Gegensatz zum Einmaleins – die *additiven* Grundaufgaben hierzulande üblicherweise *nicht* in Form verbaler Reihen oder "Tabellen" (vgl. DEHAENE 1999, S. 148f) gelernt werden.

Nun wird aber in der Regel auch nicht gezielt daran gearbeitet, dass Kinder sich für das Lösen von additiven Grundaufgaben Ableitungsstrategien aneignen (was im Übrigen ja ein gewisses Maß an Auswendiglernen zumindest im Bereich der Kernaufgaben voraussetzt; vgl. Kap. 4.2). *Auf dieser Basis* scheint sich *im Großen und Ganzen* eine Zweiteilung unter den Kindern zu ergeben, die hier wie folgt zusammengefasst wird:

– Die überwiegende Mehrheit der Kinder gelangt unter den Bedingungen des in Kapitel 7 analysierten Unterrichts innerhalb des ersten Schuljahres *nicht* zur Automatisierung der additiven Grundaufgaben auch nur im Zahlenraum bis zehn.
– Diejenigen aber, die die additiven Grundaufgaben bereits im ersten Schuljahr (zumindest weit gehend) automatisieren, sind fast ausschließlich solche Kinder, die *trotz der Vernachlässigung von operativen Zusammenhängen und Ableitungsstrategien im Unterricht* solche Ableitungsstrategien (mehr oder weniger) eigenständig entdecken und im Laufe des ersten Schuljahres immer wieder zum Rechnen nutzen. Gerade dieses fortgesetzte Ableiten ist vermutlich ein *wesentlicher unterstützender Faktor* beim Aufbau ihres arithmetischen Faktenwissens (vgl. dazu Kapitel 9.3).
– Dass fortgesetztes Ableiten zwar eine begünstigende, aber *keine hinreichende* Bedingung für das Automatisieren der additiven Basisfakten darstellt, machen die Kinder des noch zu beschreibenden Typus "Ableiten und persistierendes Zählen" deutlich (siehe Kapitel 8.5.4.4).
– Dass fortgesetztes Ableiten schließlich auch *keine unentbehrliche* Bedingung für das Automatisieren der additiven Basisfakten ist, zeigen die Kinder des in diesem Kapitel be-

schriebenen Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten". Diesem Typus können aber nur sehr wenige Kinder zugeordnet werden. Das resultiert einerseits wohl daraus, dass der Aufbau von arithmetischem Faktenwissen ohne fortgesetztes Ableiten zwar möglich, aber eben deutlich schwerer zu erreichen ist als mit fortgesetztem Ableiten, weil ja das Speichern im und das Abrufen aus dem Langzeitgedächtnis in diesem Fall ohne (oder weitgehend ohne) Elaboration der Gedächtnisinhalte stattfinden muss. Andererseits schlägt sich hierin nieder, dass die interviewten Kindern in der Regel auch nicht zum Reiz-Reaktionslernen der additiven Grundaufgaben angehalten wurden. Der Kompensation von Einsicht durch Auswendigmerken, wie sie beim Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" tendenziell vorliegt, wurde also vermutlich kaum Vorschub geleistet. Mit Blick auf die übliche Unterrichtspraxis ist aber anzunehmen, dass eine analoge Typisierung für den Bereich der multiplikativen Grundaufgaben Ende des zweiten, Anfang des dritten Schuljahres einen deutlich höheren Anteil von Kindern mit "hoher Merkleistung ohne Ableiten" (und ohne Einsicht in operative Zusammenhänge) aufzeigen würde.

Soweit der Versuch einer ersten "empirisch begründeten Theoriekonstruktion" auf Basis der beiden ersten aus den Daten gewonnenen Idealtypen (vgl. BIKNER-AHSBAHS 2003, S. 221). Daraus ableitbare Forschungshypothesen und Untersuchungsdesigns, die zu deren Überprüfung geeignet erscheinen, werden im Anschluss an die Charakterisierung aller sechs Idealtypen und die dabei noch erfolgenden Ergänzungen und Erweiterungen dieses Theorieansatzes in Kapitel 8.5.4 diskutiert.

8.5.3.3 Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten"

Charakterisierung als Idealtyp:

Idealtypisch lösen Kinder dieses Entwicklungstyps am Ende des ersten Schuljahres nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn vorwiegend (zu mehr als zwei Drittel) zählend, in der Regel durch Finger-Teilzählen. Ihr Repertoire an auswendig gewussten Aufgaben beschränkt sich in der Regel auf Verdoppelungsaufgaben, allenfalls ergänzt um einige wenige darüber hinaus gemerkte Aufgaben (etwa Additionen mit eins als Summanden und Subtraktionen mit eins als Subtrahenden). Sie nutzen diese wenigen automatisierten Aufgaben aber nicht als Basis zum Ableiten. Aufgaben mit Zehnerübergang werden, sofern sie nicht überhaupt als "zu schwierig" verweigert werden, ausschließlich zählend und dann oft auch durch Alleszählen bewältigt.

Bei Kindern dieses Typus findet zwischen Mitte und Ende des ersten Schuljahres keine erkennbare Weiterentwicklung ihrer Lösungsstrategien statt. Schon Mitte des ersten Schuljahres wenden diese Kinder keine Ableitungsstrategien an und lösen die Grundaufgaben vorwiegend zählend. Auch innerhalb der Zählstrategien gibt es kaum Veränderungen: Kinder, deren

Hauptstrategie Mitte des Jahres Finger-Teilzählen war, behalten dieses in der Regel als Hauptstrategie bei; die wenigen Kinder, deren Hauptstrategie Alleszählen war, bleiben beim Alleszählen. Weiterzählen ist Mitte wie Ende des ersten Schuljahres bei Kindern dieses Typus sehr selten. Zu Beginn des ersten Schuljahres gehören sie oft zu den Kinder mit unterdurchschnittlichem zahlbezogenen Wissen. Einige Kinder dieses Typus weisen zu Schulbeginn aber keinen erkennbaren Rückstand gegenüber dem Durchschnitt auf.

Prototypische Vertreter:

Christina (Prototyp für das Fehlen jeglicher erkennbarer Einsicht in komplexere operative Zusammenhänge)

Christina kann die Zahlwortreihe zu Schulbeginn bis "achtzehn" aufsagen, das Rückwärtszählen von "zehn" gelingt ihr auch mit Hilfe nicht. Sie kann bei keiner der vier vorgelegten strukturierten Zahldarstellungen die Anzahl quasi-simultan ermitteln. "Zwei und zwei ist vier" weiß sie auswendig, bei "drei und drei" sagt sie nach einigem Zögern "fünf". Eine vom Interviewer angeregte Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe von Würfeln gelingt ihr ebenso wenig wie bei den anderen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn: Das Mädchen schafft es nicht, die Formulierung als "Würfelaufgabe" (vgl. Kap. 6.1.6) in eine Handlung umzusetzen.

Mitte des ersten Schuljahres löst Christina 2+2 durch Faktenabruf, 3+3 und 5+5 durch nicht-zählendes Fingerrechnen, 4+4 durch Finger-Teilzählen. Finger-Teilzählen wendet sie auch bei allen nicht-trivialen Aufgaben an, mit Ausnahme von 10–5, das sie durch nicht-zählenden Fingergebrauch löst. In den Zusatzaufgaben kann sie die schönen Päckchen mit Ausnahme des Päckchens mit den Umkehraufgaben korrekt fortsetzen, zeigt aber bei keinem Päckchen eine erkennbare Einsicht in den zu Grunde liegenden operativen Zusammenhang.

Am Ende des ersten Schuljahres löst Christina 2+2 spontan mit "drei", 3+3 und 5+5 aber richtig durch Faktenabruf, 4+4 durch Finger-Teilzählen. Sämtliche nicht-triviale Aufgaben (und zusätzlich etwa auch das zu diesem Zeitpunkt als trivial eingestufte 1+6) werden durch Finger-Teilzählen gelöst, ebenso alle Aufgaben mit Zehnerübergang. Im Zahlenraum bis zehn verzählt sich das Mädchen nur bei einer Aufgabe (3+6), von den acht Aufgaben mit Zehnerübergang werden hingegen nur zwei richtig gelöst. Bei beiden Zusatzaufgaben ist keine Einsicht in die zu Grunde liegenden operativen Zusammenhänge erkennbar.

Manuela (Prototyp für durchgängig zählendes Rechnen bei nicht-trivialen Rechenaufgaben trotz deutlich erkennbarer Einsicht bei Zusatzaufgaben)

Das Mädchen, das zu allen drei Interviews durch große Schüchternheit auffällt, sagt die Zahlwortreihe im ersten Interview zu Schulbeginn nur bis "zwölf" korrekt, wenn auch zögerlich auf und meint dann auf Nachfrage, dass es nicht weiter wisse. Von "zehn" rückwärts zu zählen, gelingt dem Mädchen nicht. Die Punkteanzahlen in allen vier gebotenen strukturierten

Zahldarstellungen ermittelt es zählend. "Zwei und zwei ist vier" weiß es auswendig, die anderen zu Schulbeginn gefragten Aufgaben löst es durch Alleszählen oder Finger-Teilzählen, nur 5+5 durch nicht-zählenden Fingergebrauch.

Mitte des ersten Schuljahres weiß Manuela die Verdoppelungen außer 4+4 (Fehlspeicherung, spontane Antwort "sieben") auswendig. Alle anderen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn löst sie durch Finger-Teilzählen, 10–5 ausgenommen (Faktenabruf). Bei den Zusatzaufgaben kann sie den Zusammenhang zwischen 3+3 und 3+4 verbalisieren ("um eins mehr").

Am Ende des ersten Schuljahres weiß Manuela alle Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn auswendig, bei 4+4 antwortet sie erst nach einigem Zögern, aber ohne Anzeichen eines inneren Zählens. 10–5 löst sie durch nicht-zählenden Gebrauch der Finger, verlässt sich also (anders als Mitte des Schuljahres) nicht auf ihr Gedächtnis. Die 14 nicht-trivialen Aufgaben löst sie *ohne Ausnahme* durch Finger-Teilzählen. Sie macht das ohne einen einzigen Zählfehler, mit Lösungszeiten zwischen fünf und elf Sekunden pro Aufgabe. Auch die Aufgaben mit Zehnerübergang werden ausnahmslos durch Finger-Teilzählen gelöst, mit nur einem Zählfehler (bei 16–10). Bei den Zusatzaufgaben kann Manuela den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 klar verbalisieren ("nur um eins mehr") und erkennt den zwischen 9+9 und 18–9 als "schon eine Hilfe" zum Lösen von 18–9 an: Sie weiß, dass 18–9=9, "weil es nur umgedreht ist". Die Gleichung 9+9=18 hatte ihr der Interviewer vorgegeben (vgl. Kap. 6.1.5.3).

Häufigkeit dieses Typus:
Von den 139 interviewten Kinder können 34 diesem Typus zugeordnet werden. 23 dieser Kinder waren bereits Mitte des ersten Schuljahres in der Gruppe "überwiegend zählend", neun waren "Mischtypen", zwei im Rahmen der zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben "überwiegend Fakten nutzend". Keines dieser Kinder wandte Mitte des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien an, mit Ausnahme einiger weniger Fälle, wo die Lösung einer Halbierungsaufgabe vom Kind mit der automatisierten inversen Verdoppelungsaufgabe begründet wurde. Dies wurde im Zuge der Typisierung im Sinne der bereits in Kap. 8.4.5 erläuterten These eher als das Merken einer "Eselsbrücke" denn als Einsicht in einen Ableitungszusammenhang gewertet; solches Ableiten stand daher als isoliertes Phänomen bei Gültigkeit aller anderen Kriterien einer Zuordnung des betreffenden Kindes zu diesem Typus nicht im Weg.

Verfolgt man die Entwicklung der Kinder dieses Typus zurück bis zum Schulanfang, so gehörten 25 dieser 34 Kinder schon zu diesem Zeitpunkt zur Gruppe der überwiegend zählenden Rechner. 8 Kinder waren zu Schulbeginn in der Gruppe der "Mischtypen", nur 1 Kind befand sich in der Gruppe jener Kinder, die mehr als zwei Drittel der zu Schulbeginn gefragten Aufgaben durch Faktenabruf oder Ableitung lösen konnten.

Inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen dieses Typus:
Der Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" entspricht *in seiner idealtypischen Fassung* weitgehend GRAYs "procedural approach" (vgl. Kap. 2.9.3): Die Kinder dieses Typus scheinen beim Rechnen ganz in ihren hohe Konzentration erfordernden Zähl-Prozeduren aufzugehen, sie scheinen operative Zusammenhänge zwischen Grundaufgaben nicht zu erkennen und beim zählenden Lösen von Aufgaben keine Verbindung herzustellen zwischen "input and output in a form that will be remembered as a new fact" (GRAY 2003, S. 69). Sie scheinen damit auch BAROODYs These zu stützen, dass das Automatisieren der Basisfakten im Wesentlichen ein Automatisieren von "principles" und nicht von Einzelfakten sei und es *deshalb* umgekehrt immer dann nicht zum Automatisieren von Basisfakten (jedenfalls nicht in nennenswertem Umfang) komme, wenn Kinder diese "principles" nicht durchschauen (vgl. Kap. 2.8).

Aber das ist eben der *Ideal*typus; und wie Christina, die oben als Prototyp vorgestellt wurde, kommen manche Kinder diesem Idealtypus tatsächlich sehr nahe. Kinder, die wie dieses Mädchen tatsächlich an *keiner* Stelle im Laufe der drei mit ihnen geführten Interviews auch nur eine Andeutung von Einsicht in *komplexere* operative Zusammenhänge (Kovarianz, Kompensation, Komplementarität) erkennen ließen, sind jedoch auch innerhalb dieses Typus in der Minderheit: Unter Berücksichtigung aller Zusatzaufgaben umfasst diese Minderheit nur zehn Kinder (siehe zu diesen Kindern weiter unten).

Die übrigen 24 Kinder dieses Typus zeigten dann doch in der einen oder anderen Zusatzaufgabe Einsicht in das Prinzip der Kovarianz und/oder Komplementarität und ließen damit vermuten, dass die Feststellung, die GRAY über Vertreter des "procedural approach" trifft, ihren arithmetischen *Fähigkeiten* nicht zur Gänze gerecht wird. GRAY hält ja für den als beispielhaft vorgestellten "Joseph and children like him" fest: "[They] are counting because they are *unable* to do anything else – they have no choice" (GRAY 2003, S. 65; Hervorhebung M.G.). Im Fall von Manuela, die als Prototyp vorgestellt wurde, und vieler anderer Kinder dieses Typus drängt sich die Vermutung auf, dass sie durchaus "fähig" wären, "etwas anderes zu tun" als immer nur zählend zu rechnen. Gezielt befragt, wissen sie oft genug, dass 7+8 "nur um 1 mehr ist" als 7+7. Sie würden aber offenbar nie von selbst auf die Idee kommen, diesen Zusammenhang zum Ableiten einer Aufgabe zu nutzen: 3+3 wurde von 31 der 34 Kinder dieses Typus am Ende des ersten Schuljahres auswendig gewusst, 3+4 aber von 30 der 34 Kinder zählend gerechnet (vier Kinder dieses Typus wussten auch 3+4 auswendig).

Beobachtet man diese Kinder beim Rechnen, so erwecken sie oft den Eindruck, als ob sie dem Nachdenken über Alternativen zum zählenden Rechnen zumeist auch gar keine Chance geben: Im selben Augenblick, wo sie eine Aufgabe gestellt bekommen, starten sie in der Regel auch schon ihre Prozedur des zählenden Rechnens. Sie haben es dabei in vielen Fällen zu einer Gewandtheit gebracht, die ihnen jedenfalls bei Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn, oft aber auch noch bei Aufgaben mit Zehnerübergang eine niedrige Fehlerquote sichert. Die Lösungszeiten liegen zwar deutlich über jenen bei Faktenabruf, aber (gerade bei Zehnerübergängen) nicht unbedingt über jenen, die das Anwenden einer Ableitungsstrategie erfordert: Die durchschnittliche Lösungszeit betrug beispielsweise bei der Aufgabe 5+8 bei den 29 Kindern, die diese Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres durch das Teilschrittverfahren lösten, etwa acht Sekunden, bei den 36 Kindern, die dafür Finger-Teilzählen wählten, etwa zwölf Sekunden. Und zwölf Kinder lösten 5+8 durch Finger-Teilzählen in weniger als neun Sekunden, also mindestens so schnell wie der Durchschnitt der Kinder, die hier das Teilschrittverfahren wählten.

Vor diesem Hintergrund ist nachvollziehbar, dass beispielsweise die als Prototyp vorgestellte Manuela von ihrer Lehrkraft, als diese um eine Einschätzung des Leistungsniveaus der aus ihrer Klasse interviewten Kinder gebeten wurde (vgl. Kap. 6.1.2), unter die Kategorie "gehört im Rechnen zu den Allerbesten dieser Klasse" eingestuft wurde. Das Mädchen stellt keinen Einzelfall dar: Insgesamt 9 der 34 Kinder dieses Typus wurden von ihren Lehrkräften unter die "Allerbesten" ihrer Klasse gereiht, weitere 7 als "über dem Durchschnitt". Alle diese (aus 11 verschiedenen Klassen stammenden) Kinder lösten beim Interview zum Schulschluss die nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn ausschließlich oder zumindest zu mehr als zwei Drittel mit Zählstrategien. Oft genug taten sie dies fehlerfrei und zumindest nicht wesentlich langsamer als andere Kinder, und offenbar war dies für viele Lehrkräfte das einzige oder zumindest das wesentliche Kriterium für die Beurteilung arithmetischer Kompetenz.

Wenn aber im Unterricht einerseits das Ableiten nicht gefördert wird und Zählstrategien, sofern sie zum richtigen Ergebnis führen, Erfolg und Anerkennung einbringen – warum dann über Alternativen zum zählenden Rechnen nachdenken? Aus dieser Perspektive ist es *sinnvoll,* beim Lösen von Aufgaben ohne Zeitverzug das zu tun, was man sicher kann (zählend rechnen), und darüber hinaus keine Gedanken an mögliche Zusammenhänge zu bereits automatisierten Aufgaben zu verschwenden (auch wenn man diese, bei direkter Befragung, vielleicht durchaus zu erkennen vermag).

Auf diese Weise mag sich eine *Gewohnheit des Darauf-los-Zählens* einstellen, die ein Kind selbst bei solchen Aufgaben zu Zählstrategien greifen lässt, die es in einer früheren, noch nicht durch diese Gewohnheit geprägten Phase durch eine Ableitungsstrategie gelöst hatte. So hatte etwa Roland 3+4 aus 3+3 abgeleitet (damals wurden die beiden Aufgaben freilich unmittelbar nacheinander gefragt). Mitte des ersten Schuljahres löste er 3+4 durch Faktenabruf. Am Ende des ersten Schuljahres löste Roland 3+4 ebenso zählend wie 9 weitere der 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn sowie sämtliche Aufgaben mit Zehnerübergang mit Ausnahme von 6+6, das er auswendig wusste – aber dennoch nicht zum Ableiten von 6+7 nutzte. Bei der Zusatzaufgabe hatte Roland kein Problem damit, den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 zu erklären, den er bereits zu Schulbeginn für das Ableiten von 3+4 auch benutzt hatte. So wie er wandten weitere 8 Kinder dieses Typus beim letzten Interview Zählstrategien bei Aufgaben an, die sie vier Monate zuvor bereits nicht-zählend gelöst hatten.

Wenn oben gesagt wurde, dass eine Minderheit von 10 Kindern dieses Typus tatsächlich keinerlei Einsicht in *komplexere* operative Zusammenhänge zeigte, muss ergänzt werden, dass auch bei diesen Kindern bei einigen (wenn auch wenigen) Aufgaben zumindest *Ansätze von arithmetischen Einsichten* deutlich wurden. Zwar wandte, wie festgehalten wurde, keines dieser Kinder im Laufe der drei Interviews eine Ableitungsstrategie an; keines schien auch nur bei einer der Zusatzaufgaben den zu Grunde liegenden operativen Zusammenhang zu erkennen; und nur eines dieser Kinder (siehe unten) nutzte (bei genau einer Aufgabe, nämlich bei 1+6) die Vertauschbarkeit der Summanden, um sich beim zählenden Rechnen Arbeit zu ersparen. 1+6 wurde von drei dieser Kinder am Ende des ersten Schuljahres durch Faktenabruf gelöst; die anderen sieben lösten die Aufgabe, indem sie zunächst einen Finger und dann sechs Finger einzeln ausstreckten, dabei von "eins" bis "sechs" zählend. Die Additionen 2+7 oder 3+7, bei denen durch Vertauschen der Summanden das Finger-Teilzählen erheblich abgekürzt worden wäre, wurden von allen zehn Kindern durch Alleszählen oder Finger-Teilzählen gelöst, jeweils in Beachtung der Reihenfolge der Summanden.

Aber neun dieser zehn Kinder hatten offenbar zumindest die "N+0-rule" gelernt, sie lösten also 0+9 spontan richtig (ein Kind wandte auch hier Finger-Teilzählen an). Und neun Kinder (darunter auch der Junge, der 0+9 mit Hilfe seiner Finger gerechnet hatte) lösten mindestens eine Aufgabe durch nicht-zählendes Fingerrechnen (meist 10–5), was als Hinweis auf ein zumindest in diesem Kontext vorhandenes Teile-Ganzes-Denken gesehen werden kann (vgl. Kap. 2.10.1 und unten Kap. 8.5.3.6). Bezeichnenderweise wechselten drei dieser Kinder bei mindestens einer Aufgabe von nicht-zählendem Fingerrechnen Mitte des Schuljahres zu zählendem Fingerrechnen am Ende des Schuljahres.

So löste etwa Beate Mitte des Schuljahres 7–5, 8–5 und 10–5 jeweils so, dass es den Minuenden mit den Fingern darstellte und nach kurzem Nachdenken jeweils eine ganze Hand (für den Subtrahenden) wegnahm. Am Ende des Schuljahres entfiel dieses Nachdenken, Beate knickte jeweils fünf Finger einzeln um (vgl. dazu auch Kap. 8.5.3.6). Dasselbe Mädchen hatte bei 1+6 Mitte des Schuljahres die Summanden beim Finger-Teilzählen vertauscht (also sechs Finger ausgestreckt, dann einen dazu), am Ende des Schuljahres aber die im Aufgabenterm vorgegebene Reihenfolge eingehalten (ein Finger ausgestreckt, sechs einzeln dazu). Auch bei Beate scheint die *Gewohnheit des zählenden Rechnens* im Laufe des Schuljahres dazu geführt zu haben, dass sie ihre Einsichten in Zahlstrukturen und Regeln zuletzt nicht mehr nutzte.

Dass zusätzliches Üben, sofern es im Wesentlichen darin besteht, noch mehr Aufgaben als bereits im Klassenunterricht auch noch außerhalb des Unterrichts zählend zu lösen, nicht dazu beiträgt, das zählende Rechnen zu überwinden, wurde in Gegensatz zu SIEGLER und im Anschluss an GRAY bereits mehrfach als Vermutung ausgesprochen (vgl. etwa Kap. 2.9.3 und Kap. 7.1.2.4). Dieser Vermutung wird durch die vorliegende Untersuchung zumindest nicht widersprochen: Den Angaben der Eltern zufolge wurde mit den Kindern des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" zuhause durchschnittlich 28 Minuten pro Woche geübt. Die durchschnittliche Übungszeit bei den Kindern des Typus "Faktenabruf mit fortgesetztem Ableiten" betrug den Eltern zufolge 15,2 Minuten. Der Unterschied ist gemäß T-Test zwar nicht signifikant, und die Elternangaben sind überdies von begrenzter Validität (vgl. Kap. 7.3). Aber es scheint doch immerhin so gewesen zu sein, dass gerade die Kinder mit dem höchsten Anteil an zählenden Strategien am meisten außerhalb des Unterrichts geübt haben: Die durchschnittliche wöchentliche Übungszeit lag in der Gesamtstichprobe gemäß Elternangaben bei 20,6 Minuten pro Woche und bei keinem anderen Typus so hoch wie bei den vorwiegend zählenden und nicht ableitenden Rechnern.

Und das ergibt ja auch durchaus Sinn: Sofern sich die Eltern dieser Kinder über deren Rechenfähigkeiten im Klaren waren, hatten sie für häusliches Üben objektiv mehr Grund als die Eltern der anderen Kinder. Dazu passend gaben die Eltern von immerhin 9 der 34 Kinder dieses Typus an, die Lehrkraft ihres Kindes hätte ihnen im Laufe des Schuljahres zu häuslichem Üben geraten. Dasselbe wurde nur für 3 von 46 Kindern des Typus "Faktenabruf mit fortgesetztem Ableiten" angegeben.

In idealtypischer Zuspitzung lässt sich also festhalten: Unter den Rahmenbedingungen, unter denen das arithmetische Lernen der interviewten Kinder stattfand, scheint ein höherer Anteil von Faktenabruf nicht Folge von vermehrtem Üben und ein höherer Anteil von zählendem Rechnen nicht Folge von Übungsmangel gewesen zu sein. Das Gegenteil scheint zuzutreffen: Mit jenen Kindern, die – vor allem auch wegen ihrer operativen Einsichten – die additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres mehr und mehr automatisiert haben, wurde zuhause relativ wenig geübt, weil wenig Übungsbedarf zu erkennen war. Mit den überwiegend zählend rechnenden und dabei nicht ableitenden Kindern, die sich – vor allem auch wegen des Fehlens von Ableitungen – im Laufe des ersten Schuljahres nur wenige additive Grundaufgaben auswendig merkten, wurde als Reaktion auf den offensichtlichen Übungsbedarf zwar deutlich mehr geübt. Weil aber das Üben in der Regel wohl nur im vermehrten zählenden Rechnen bestand, führte es nicht zur Überwindung des zählenden Rechnens, sondern eher zu dessen Verfestigung.

8.5.3.4 Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen"

Charakterisierung als Idealtyp:

Idealtypisch wenden Kinder dieses Entwicklungstyps zum Lösen von additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres einen Mix aus Faktenabruf, Ableitung, Zählstrategien und oft ergänzend auch nicht-zählenden Fingerstrategien an. Aufgaben mit Zehnerübergang werden mehrheitlich zählend gelöst.

Weitgehend derselbe Mix an Lösungsstrategien, allerdings mehrheitlich noch ohne Ableitungen, kommt bei Kindern dieses Typus schon Mitte des ersten Schuljahres zur Anwendung. In vielen Fällen werden von diesen Kinder *genau jene Aufgaben*, die sie bereits Mitte des ersten Schuljahres zählend lösten, auch noch am Ende des ersten Schuljahres mit einer Zählstrategie bewältigt. Dabei ist für viele Kinder dieses Typus bereits Mitte des Schuljahres Weiterzählen die dominierende Zählstrategie, bei anderen kommt es im Laufe des zweiten Schulhalbjahres zu einem Wechsel von Finger-Teilzählen zum Weiterzählen, bei manchen persistiert aber auch das Finger-Teilzählen.

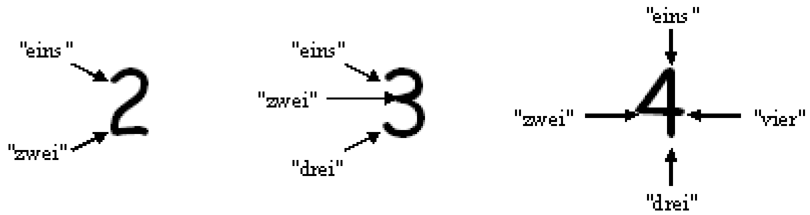
Prototypische Vertreter:

Benjamin (Prototyp für persistierendes Weiterzählen mit Zählhilfe bei hohem Kenntnisstand zu Schulbeginn)

Benjamin beherrscht die Zahlwortreihe vorwärts zu Schulbeginn bis über "hundertzwölf" hinaus (wie nur elf weitere Kinder der Gesamtstichprobe). Er löst die Verdoppelungen außer 4+4 sowie 10–9 bereits zu Schulbeginn durch Faktenabruf und leitet 3+4 aus 3+3 ab. Bei 1+6 wendet er das Tauschprinzip an, 8–5 löst er nicht-zählend mit den Fingern (simultanes Darstellen der Acht als fünf und drei Finger, simultanes Wegnehmen der Fünf als ganze Hand).

Mitte des ersten Schuljahres kann Benjamin bei allen vier Zusatzaufgaben die operativen Zusammenhänge innerhalb der schönen Päckchen klar verbalisieren. 7 der 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn löst er durch Faktenabruf; neben 1+6 sind dies alle Subtraktionen mit Ausnahme von 8–5. Die Aufgabe 8–5 leitet er aus 8–4 ab ("sharing"). Alle nicht-trivialen Additionen (abgesehen von 1+6) löst er mit der von ihm selbst so bezeichneten "Stricherlmethode", die er "selbst erfunden" habe und auf die er offenkundig sehr stolz ist (s. Abb. 15): Bei 2+5 zählt er von "fünf" um zwei weiter und benützt auf der Aufgabenkarte die beiden "Spitzen" der Ziffer 2 an der linken Seite als Hilfe für das "keeping track", d.h.: Er fixiert bei "sechs" die obere Spitze der 2 mit den Augen, dann blickt er konzentriert auf die Spitze links unten und sagt "sieben". Bei 3+4, 3+5 und 3+7 zählt er gleichfalls vom jeweils größeren Summanden weiter, für das "keeping track" benützt er die *drei* Spitzen an der linken Seite der Ziffer 3 als Fixationspunkte für die Augen. Bei 4+6 orientiert er sich beim Weiterzählen von "sechs" an den vier Endungen, die die Ziffer 4 in der für die Aufgabenkärtchen verwendeten Schrift (Comic Sans MC) tatsächlich aufweist (nicht aber in der Schulschrift).

Abbildung 15: Die "Stricherlmethode" von Benjamin



Am Ende des ersten Schuljahres löst Benjamin nur drei der 14 nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf (die Subtraktionen 9–8, 8–4 und 7–5, die er alle bereits Mitte des ersten Schuljahres auswendig gewusst hatte). 8–5 leitete er erneut aus 8–4 ab und erläutert den kompensatorischen Zusammenhang dieser beiden Aufgaben mit bemerkenswerter Klarheit. Auch 7–4 leitet er aus 8–4 ab (Kovarianz). Die restlichen Subtraktionen (10–7, 9–6) und alle nicht-trivialen Additionen löst er zählend: Die Subtraktionen durch Rückwärtszählen unter Verwendung der Finger als Zählhilfe, die Additionen durch Weiterzählen mit der oben erläuterten "Stricherlmethode", wobei er sich noch daran erinnern kann, dass er diese Methode schon beim zweiten Interview erläutert hat. Erneut erweckt er den Eindruck, auf seinen "Trick" stolz zu sein. Die Aufgaben mit Zehnerübergang versucht er durchgehend weiter- bzw. rückwärts zählend zu lösen; dabei unterlaufen ihm bei 8+8 und 12–6 Zählfehler. Bei den Zusatzaufgaben kann Benjamin den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 klar verbalisieren, den zwischen 9+9 und 18–9 scheint er nicht zu erkennen.

Michaela (Prototyp für persistierendes Finger-Teilzählen)

Michaela beherrscht zu Schulbeginn die Zahlwortreihe vorwärts bis "hundert", kann von "zehn", aber nicht von "zwanzig" rückwärts zählen und erfasst die Anzahl der Punkte bei zwei von vier strukturierten Zahldarstellungen quasi-simultan. Die Verdoppelungen 2+2, 3+3 und 4+4 (nicht aber 5+5) weiß sie auswendig, ebenso 1+6. Die Aufgaben 10–9, 8–5 und 8–4 löst sie zu Schulbeginn durch Finger-Teilzählen.

Mitte des ersten Schuljahres löst Michaela sieben von 14 nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf. 7–5 leitet sie aus 2+5 ab, das sie zuvor durch Weiterzählen vom größeren Summanden ermittelt und offenbar noch im Gedächtnis präsent hatte. Bei 8–5 wandte sie nicht-zählendes Fingerrechnen an. 2+7, 3+5, 3+7 und 4+6 löste Michaela jeweils durch Finger-Teilzählen, 6+6 mit dem Teilschrittverfahren, 6+7 und 5+8 durch Finger-Teilzählen. Bei den Zusatzaufgaben zeigte sie eine gewisse Einsicht in den Zusammenhang von 3+3 und 3+4, konnte diesen Zusammenhang aber nicht klar verbalisieren.

Am Ende des ersten Schuljahres löste das Mädchen 2+7, 3+7 und 4+6 wie schon vier Monate davor durch Finger-Teilzählen. Dieselbe Strategie wandte es für die erst bei diesem Interview gefragten Aufgaben 3+6, 9–6 und 10–7 an. 8–5 und 7–5 löste es durch Faktenabruf, ebenso

3+4, 9–8 und 8–4 – drei Aufgaben, die Michaela bereits Mitte des Schuljahres auswendig gewusst hatte. Auch Ende des Schuljahres wurden zwei Aufgaben abgeleitet: 7–4 durch "think addition" auf Basis des automatisierten 3+4, 6+7 durch "Verdoppeln plus 1" aus dem bereits automatisierten 6+6. Die anderen Aufgaben mit Zehnerübergang wurden mit Hilfe der Finger (Finger-Teilzählen bei 3+9, 12–6 und 14–9, nicht-zählendes Fingerrechnen bei 5+8) gerechnet, nur bei 8+8 nannte Michaela spontan ein falsches Ergebnis (14). Bei den Zusatzaufgaben wurde der Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 offenbar erkannt, aber nicht klar verbalisiert; zwischen 9+9 und 18–9 sah sie offenbar keinen Zusammenhang.

Häufigkeit dieses Typus:
Dem Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" können 28 der 139 Kinder zugeordnet werden. Elf davon zeigten bereits in den Interviews Mitte des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien, 17 taten dies erst am Ende des Schuljahres. 23 der 28 Kinder gehörten schon Mitte des ersten Schuljahres zur Gruppe der "Mischtypen", nur zwei waren zu diesem Zeitpunkt vorwiegend Fakten nutzende Rechner, drei vorwiegend zählende Rechner. Verfolgt man ihre Entwicklung zurück bis zum Schulbeginn, so lösten zwei dieser 28 Kinder die zehn im ersten Interview gefragten Aufgaben mehrheitlich Fakten nutzend, zehn mehrheitlich zählend, die restlichen 15 gehörten auch damals schon zur Gruppe der "Mischtypen".

Inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen dieses Typus:
Dass die Kinder dieses Typus, immerhin etwa ein Fünftel aller interviewten Kinder, zwar einerseits einige Kompetenz im Nutzen von Ableitungsstrategien zeigten, andererseits aber doch einen beträchtlichen Teil der nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn auch noch am Ende des ersten Schuljahres zählend rechnete, ist mit den bereits in Kapitel 8.5.4.2 ausgeführten Überlegungen zum Verhältnis von Auswendigmerken und Einsicht in operative Zusammenhänge gut vereinbar: Fortgesetztes Ableiten ist diesen Überlegungen gemäß zwar eine *günstige* Bedingung für das Automatisieren, aber eben *kein Garant* dafür, dass dieses auch tatsächlich umfassend eintritt, schon gar nicht im begrenzten Zeitraum des ersten Schuljahres und unter der Voraussetzung, dass vermutlich weder das Ableiten noch das Automatisieren zumindest von Kernaufgaben im Unterricht gezielt gefördert wurden.
Tatsächlich hatten die Kinder dieses Typus schon zu Mitte und dann auch am Ende des ersten Schuljahres deutlich weniger nicht-triviale Aufgaben im Zahlenraum bis zehn automatisiert als die gleichfalls Ableitungsstrategien nutzenden Kinder des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten". Betrachtet man nur jene zehn Grundaufgaben, die sich zu *beiden* Zeitpunkten als nicht-trivial erwiesen (vgl. Kap. 8.4.3.1), so lösten die Kinder des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" Mitte des Schuljahres durchschnittlich 5,9 und am Ende des Schuljahres durchschnittlich 8,2 dieser 10 Aufgaben durch Faktenabruf. Bei den Kindern des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" waren es durchschnittlich nur 2,6 Aufgaben Mitte und durchschnittlich 4,1 am Ende des Schuljahres. Ein explorativer Vergleich

der Mittelwerte (T-Tests für unabhängige Stichproben) ergibt für beide Messzeitpunkte höchst signifikante Unterschiede zugunsten des Typs "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" (jeweils $p < 0{,}001$).

Worin liegt dieser Unterschied im arithmetischen Faktenwissen begründet? Unterschiede in der Leistungsfähigkeit des Arbeitsgedächtnisses (die für diese Studie nicht erfasst wurden) mögen dabei eine Rolle spielen (zum diesbezüglich uneinheitlichen Forschungsstand vgl. Kap. 2.12.1). Was das häusliche Üben betrifft, einen weiteren denkbaren Einflussfaktor, so wurde mit Kindern des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" den Angaben der Eltern zufolge, wie schon erwähnt, durchschnittlich 15,2 Minuten pro Woche geübt, mit Kindern des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" durchschnittlich 17,3 Minuten; der Unterschied ist gemäß T-Test für unabhängige Stichproben nicht signifikant. Wie dargestellt (vgl. Kap. 7.4), sind die diesbezüglichen Angaben der Eltern im Fragebogen zwar nur eingeschränkt valide. Dass die Kinder mit höherem Faktenwissen zuhause tatsächlich eher weniger geübt haben könnten, würde aber durchaus einer gewissen, bereits erläuterten Logik folgen (vgl. Kap. 8.5.3.3).

Was auch immer hinter dem höchst signifikanten Unterschied in der Anzahl automatisierter Basisfakten bei Kinder dieser beiden Typen stecken mag: Die erhobenen Daten liefern jedenfalls *keine* Hinweise dafür, dass sich die Kinder dieser Typen hinsichtlich der Tiefe und des Qualität ihrer *Einsichten in operative Zusammenhänge* wesentlich unterscheiden würden. Wie bereits angemerkt, kann auf Grundlage der Interviews ohnedies für den Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" kein einheitliches konzeptuelles Niveau belegt werden. Ähnlich umfasst auch der Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" sowohl Kinder, die (etwa in den Zusatzaufgaben) ein hohes Maß an Einsicht in operative Zusammenhänge zu erkennen geben, als auch solche, bei denen die im Ableiten demonstrierte Einsicht doch von einer gewissen Oberflächlichkeit zu sein scheint. Solche Unterschiede im konzeptuellen Wissen begründen aber nicht die Zuordnung zu diesen beiden Typen; diese folgt alleine den empirisch auffälligen Unterschieden im Strategie-Mix beim Lösen additiver Grundaufgaben. Es sind wohl auch nicht (oder zumindest nicht in erster Linie) Unterschiede im Verständnis operativer Zusammenhänge, die erklären, warum bei manchen Kindern Zählstrategien neben dem Anwenden von Ableitungsstrategien bis ans Ende des ersten Schuljahres persistieren, während andere, gleichfalls ableitende Kinder das zählende Rechnen zu diesem Zeitpunkt bereits überwunden hatten.

Vielmehr lässt der nähere Vergleich der Strategien, mit denen Kinder des Typus "Ableiten bei persistierendem zählenden Rechnen" einzelne Aufgaben Mitte und Ende des ersten Schuljahres lösten, vermuten, dass *motivationale Faktoren* in Kombination mit der *Eigengesetzlichkeit* *des zählenden Rechnens* eine wichtige Rolle in diesem Entwicklungsprozess gespielt haben. Denn gewisse "Muster" im "mix of strategies", die bei den vorgestellten Prototypen deutlich wurden, wiederholten sich bei den Kindern dieses Typus immer wieder:

– Oftmals wurden Mitte des ersten Schuljahres gerade nicht-triviale *Subtraktionen* (sofern denn eine Ableitungsbasis zur Verfügung stand) abgeleitet oder durch nicht-zählendes Fingerrechnen gelöst. Am Ende des ersten Schuljahres wurden dieselben Subtraktionen dann häufig durch Faktenabruf oder aber erneut durch Ableitung gelöst.
– Nicht-triviale *Additionen* wurden hingegen von Kindern dieses Typus in der Regel Mitte wie Ende des ersten Schuljahres in gleicher Weise zählend gelöst. Oft waren die Strategien bei denselben Additionen zu beiden Zeitpunkten identisch. Wenn also eine Aufgabe Mitte des Schuljahres durch schnelles Weiterzählen gelöst wurde, dann auch am Ende des ersten Schuljahres; wenn Mitte des Schuljahres durch Finger-Teilzählen, dann auch vier Monate später.
– Wie erwähnt, zeigte sich bei einigen Kindern aber ein gewisser Fortschritt innerhalb der Zählstrategien in der Weise, dass Finger-Teilzählen als eine wesentliche Strategie für nicht-triviale Additionen abgelöst wurde durch Weiterzählen: Vergleicht man die zehn zu beiden Zeitpunkten identischen nicht-trivialen Aufgaben, so sank die Anzahl der von Kindern dieses Typus durch Finger-Teilzählen gelösten Aufgaben zwischen Mitte und Ende des Schuljahres von durchschnittlich 3,0 auf durchschnittlich 1,1. Der T-Test bei gepaarten Stichproben weist hierfür eine höchst signifikante Abnahme aus ($p = 0{,}001$). Im selben Zeitraum stieg innerhalb dieses Typus die Anzahl der durch Weiterzählen gelösten nicht-trivialen Aufgaben (wieder bezogen nur auf die zehn zu beiden Zeitpunkten identischen nicht-trivialen Aufgaben) von durchschnittlich 1,9 auf durchschnittlich 2,4. Dieser Anstieg ist allerdings nicht signifikant.
– Dieselben Kinder, die nicht-triviale Additionen im Zahlenraum bis zehn zu einem hohen Anteil durch Zählstrategien lösten, griffen aber mitunter zu Ableitungsstrategien, wenn sie Additionen (wie auch Subtraktionen) mit Zehnerübergang zu bewältigen hatten.

Das scheint ein weiterer deutlicher Hinweis dafür zu sein, das fortgesetztes zählendes Rechnen einer Aufgabe *zumindest im Laufe des ersten Schuljahres* nicht "von selbst" zum Automatisieren dieser Aufgabe führt, und zwar auch dann nicht, wenn dieses zählende Rechnen schnell und mit hoher Trefferquote erfolgt: Die Kinder dieses Typus machten beim zählenden Rechnen kaum Fehler; in den Interviews Mitte wie Ende des Schuljahres lösten sie durchschnittlich nur etwa 0,4 Grundaufgaben zählend *und* fehlerhaft. Auch die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" machten am Ende des Schuljahres nur bei durchschnittlich 0,71 Aufgaben eine Zählfehler; Mitte des Schuljahres taten sie dies noch bei durchschnittlich 1,12 Aufgaben; diese Abnahme von Zählfehlern im Laufe des zweiten Schulhalbjahres ist nicht signifikant.

SIEGLERS These, dass wiederholtes *erfolgreiches und rasches* zählendes Rechnen in Auswendigwissen mündet (vgl. Kap. 2.3), ist damit freilich *nicht empirisch widerlegt*. Verteidiger dieser These mögen entgegenhalten, dass die Automatisierung bei diesen Kindern zu einem späteren Zeitpunkt erfolgt sei. Aber zum einen fehlt eben umgekehrt auch jeder empirische Nachweis für die Richtigkeit dieser These; und auf ihre argumentativen Schwächen wurde ja bereits mehrfach hingewiesen (vgl. Kap. 2.3.2 und 2.9.3).

Zum anderen scheint gerade für die Kinder des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" eine zu SIEGLERS Theorie konträre Deutung dieser Befunde plausibel zu sein, wie sie bereits von STEINBERG für jene Kinder ihrer Interventionsstudie vorgeschlagen wurde, die sich als "resistent" erwiesen hatten gegenüber den Ableitungsstrategien, die im Rahmen ihrer Studie erarbeitet und trainiert wurden (vgl. STEINBERG 1985, S. 348 und Kap. 2.9.2). In Fortführung der Überlegungen von STEINBERG wird im Folgenden zunächst eine Erklärung zumindest einiger der genannten Besonderheiten des *Idealtypus* "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" versucht. Auf einige konkrete *Einzelfälle*, die davon mehr oder weniger treffend erfasst werden, wird im Anschluss daran eingegangen.

Idealtypisch gesprochen, haben die Kinder dieses Typus ausreichendes konzeptuelles Wissen, um ableiten zu *können*. Sie scheinen dieses Wissen aber sehr selektiv einzusetzen und dabei gewissermaßen einer *Logik des geringeren Aufwands* zu folgen – durchaus im Einklang mit SIEGLERS These von der generellen Anpassungsfähigkeit der kindlichen Strategiewahl (vgl. SIEGLER 2001, S. 123 und Kap. 2.3.1) wie auch im Einklang mit BAROODYS Ausführungen zur Rolle von Nützlichkeitserwägungen bei der Entwicklung von Rechenstrategien am Beispiel des Kommutativitätsprinzips (vgl. BAROODY u.a. 2003, S. 154f und Kap. 2.10.3).

Diese Logik, die (wie andere Kinder zeigen) natürlich keinesfalls zwingend, aber nachvollziehbar ist, scheint diese Kinder zu folgendem Strategieverhalten zu führen: Rechnungen, die zählend relativ rasch und ohne allzu großen Konzentrationsaufwand bewältigt werden können (also vor allem Additionen im Zahlenraum bis zehn), lösen sie zählend, ohne lange darüber nachzudenken. Wo aber zählendes Rechnen mit deutlich höherem Konzentrationsaufwand und höherem Fehlerrisiko verbunden ist – bei Subtraktionen (wegen der Gegenläufigkeit der zu kontrollierenden Zählreihen beim Rückwärtszählen) und bei Aufgaben mit Zehnerübergang bzw. mit Summanden oder Subtrahenden größer als vier oder fünf (wegen des erschwerten "keeping track") – da sind sie bereit, über Möglichkeiten des Ableitens nachzudenken, und leiten auch ab, sofern sie eine geeignete Ableitungsbasis bereits automatisiert haben.

Die weitergehende Vermutung lautet nun: Gerade deshalb, weil sie nicht-triviale Additionen im Zahlenraum bis zehn durch Weiterzählen vom größeren Summanden, aber auch durch

Finger-Teilzählen immer wieder so rasch lösen, ohne dabei "Aufgabe" und "Ergebnis" als Einheit (als "procept" im Sinne GRAYs) zu reflektieren und ohne dabei einen Bezug zu anderen, bereits gespeicherten Aufgaben herzustellen, *gerade deshalb* kommt es bei diesen Aufgaben nicht (oder zumindest nicht im Laufe des ersten Schuljahres) zur Speicherung im Langzeitgedächtnis. Jede neuerliche Konfrontation mit diesen Rechnungen (etwa im Zuge des Übens an "grauen Päckchen") führt auf diese Weise nur neuerlich zum Start der vertrauten Zählprozedur. Daher die Rede vom "*persistierenden* zählenden Rechnen" bei diesem Idealtypus.

Umgekehrt bei den Subtraktionen: Vermutlich gerade deshalb, weil sie viele Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn oft schon in den ersten Schulmonaten immer wieder *abgeleitet* hatten, konnten viele Kinder dieses Typus Mitte des ersten Schuljahres nicht-triviale Subtraktionen eher auswendig als Additionen. (Dabei ist allerdings zu beachten, dass die im zweiten Interview zu lösenden Subtraktionen mehrheitlich bewusst so gewählt waren, dass sie aus häufig bereits automatisierten Additionen abgeleitet werden konnten, vgl. Kap. 6.1.5.2.) Wenn die Kinder dieses Typus aber eine Subtraktion *nicht* durch Faktenabruf lösen konnten, dann versuchten sie gerade bei diesen Aufgaben Mitte wie Ende des Schuljahre auffallend oft eine Ableitung.

Natürlich ist dabei zu berücksichtigen, dass die Subtraktionen im Interview zeitlich nach den Additionen gefragt wurden und Kinder daher zum Ableiten einer Subtraktion auf eine wenige Aufgaben zuvor zählend gelöste Additionen zurückgreifen konnten. Dasselbe wäre freilich auch innerhalb der Additionen möglich gewesen. In diesen Fällen neigten dieselben Kinder aber dazu, *keine* Zusammenhänge zu nutzen, also etwa zunächst 3+7 zählend zu lösen, wenig später 3+6 erneut zählend, wenig später 4+6 erneut zählend. Die *Bereitschaft zum Ableiten* war also bei Subtraktionen (und Aufgaben mit Zehnerübergang) generell größer als bei Additionen. Dabei kam den Kindern dann allerdings oftmals in die Quere, dass ihr Repertoire an auswendig gewussten Zahlensätzen (gerade auch wegen ihrer Gewohnheit des zählendes Addierens im Zahlenraum bis zehn) beschränkt war, dass sie also bei einer Subtraktion oder Addition mit Zehnerübergang oft zählen *mussten*, weil ihnen die geeignete Basis zum Ableiten fehlte.

Dieses Problem eines zu kleinen Repertoires an automatisierten Additionen, die als Ableitungsbasis dienen können, wird bei Benjamin, der als Prototyp angeführt wurde, sehr deutlich. Denn sofern er über eine Ableitungsbasis verfügte, leitete er Subtraktionen am Ende des ersten Schuljahres ab: 8–5 und 7–4 wurden mit unterschiedlichen Strategien aus 8–4 hergeleitet. Und dass Benjamin 8–4 bereits Mitte des ersten Schuljahres auswendig wusste, nicht aber 3+4, könnte selbst schon als Folge davon gedeutet werden, dass er vielleicht 8–4 zuvor wiederholt aus 4+4 abgeleitet hatte, 3+4 aber nie im Zusammenhang mit 3+3 oder 4+4 gedacht, sondern (wie noch am Ende des Schuljahres) immer wieder aufs Neue durch Weiterzählen gelöst hatte. Weil er nun aber nicht-triviale Additionen durchgehend zählend löste, fehlte ihm auch in vielen Fällen eine Ableitungsbasis für Subtraktionen. 7–4 konnte er (trotz Einsicht in das Komplementaritätsprinzip) nicht aus 3+4 ableiten, weil er 3+4 nicht auswendig wusste. Für diese Aufgabe bot sich ihm aber 8–4 als eine alternative Ableitungsbasis an. Doch bei 10–7 und 9–6 *musste* er zählen, weil er auch bei 3+7 bzw. 7+3 und 3+6 bzw. 6+3 immer nur zählend rechnete. Und für Aufgaben mit Zehnerübergang fehlten ihm offenbar sowohl Ableitungsbasen (6+6 wusste er nicht auswendig) als auch Strategien wie die "Kraft der Fünf", die ja gerade bei 6+6 oder 8+8 auch Kindern mit geringem Faktenwissen im Zahlenraum bis zehn eine nicht-zählende Lösung ermöglicht hätte. Also versuchte er, auch Zehnerübergänge durch Weiterzählen zu bewältigen, scheiterte aber bei zwei von sieben Aufgaben, weil das "keeping track" hier mit den gewohnten Mitteln ("Stricherlmethode") nicht mehr zu bewältigen war.

Betrachtet man die Kinder dieses Typus in ihrer Gesamtheit, so lösten alle 28 die Aufgabe 3+3 am Ende des ersten Schuljahres durch Faktenabruf. Nur zwei von ihnen leiteten 3+4 aus 3+3 ab. 9 Kinder hatten freilich keinen Grund zum Ableiten, weil sie auch 3+4 auswendig wussten. Die restlichen 17 Kinder lösten 3+4 durch eine Zählstrategie, obwohl 16 von ihnen kein Problem damit hatten, in der Zusatzaufgabe den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 zu erläutern. Offenbar verspürten diese Kinder bei 3+4 keinen Anlass, über Alternativen zum zählenden Rechnen nachzudenken, weil "vier, fünf, sechs" ja tatsächlich schnell und einfach zu bewältigen ist. Wo das Weiterzählen aber mühsamer wäre, wie bei 6+7, wählten 7 Kinder dieses Typus das Ableiten aus 6+6. Dabei ist zu bedenken, dass überhaupt nur 14 Kinder dieses Typus 6+6 auswendig wussten, also eine Chance zum Ableiten von 6+7 durch "Verdoppeln plus 1" hatten. Von den Kindern dieses Typus, die einerseits die entsprechende Aufgabe noch nicht auswendig wussten, andererseits aber über die nötige Ableitungsbasis verfügten, wandten also 50 Prozent die Strategie "Verdoppeln plus 1" zum Ableiten von 6+7 an, aber nur 10,5 Prozent zum Ableiten von 3+4.

Noch ein weiteres Indiz für die "Logik des geringeren Aufwandes": Die Kinder hatten am Ende des ersten Schuljahres je sieben nicht-triviale Additionen und Subtraktionen zu lösen; das ergibt bei 28 Kindern des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" insgesamt 196 Additionen und ebenso viele Subtraktionen. Von den 196 Additionen wurden von den Kindern dieses Typus 102 durch Weiterzählen gelöst und nur sieben durch Ableitungsstrategien. Von den 196 Subtraktionen wurden immerhin 34 abgeleitet.

Als *wesentlicher*, die Typenzugehörigkeit letztlich bestimmender Unterschied zwischen den Kindern der Typen "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" und "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" wird also nicht ein Unterschied in der *Merkfähigkeit* vermutet (ohne damit ausschließen zu wollen, dass *auch* solche Unterschiede eine Rolle spielen mögen) oder etwa ein Unterschied im *Übungsaufwand*, der für das Memorieren der Grundaufgaben betrieben wurde. Als wesentlicher Unterschied vermutet wird vielmehr die *unterschiedliche Bereitschaft* der Kinder beider Typen, das bei ihnen in gleicher Weise vorhandene Potenzial für Ableitungen auch tatsächlich zu nutzen, und das unterschiedliche Maß an *Reflexion*, das sie im Laufe des ersten Schuljahres beim Lösen additiver Grundaufgaben aufbrachten. Daraus, so die weitere Vermutung, ergaben sich in der Folge auch Unterschiede im Faktenwissen, weil das rasche zählende Rechnen einer Reflexion von "Aufgabe" und "Ergebnis" als Einheit eines "Zahlensatzes" ebenso entgegensteht wie der Elaboration eines Zahlensatzes durch Einbindung in bereits bestehendes Faktenwissen. Um diese Vermutung in direktem Gegensatz zu SIEGLER (2001, vgl. Kap. 2.3) noch einmal zuzuspitzen: Nicht nur langsames, unsicheres, mit hohem Aufwand an Konzentration betriebenes zählendes Rechnen, sondern gerade auch rasches und erfolgreiches zählendes Rechnen trägt die *Tendenz zum Persistieren* in sich.

Dass nun allerdings manche Kinder eher bereit sind, ihr konzeptionelles Wissen über Zahlen und Operationen für Ableitungen einzusetzen als andere Kinder mit vergleichbarem Wissen, mag einfach auf Unterschiede des Temperaments oder des kognitiven Stils zurückzuführen sein (wobei auch solche Persönlichkeitsmerkmale freilich nicht einfach angeboren sind, sondern vom Kind in Auseinandersetzung mit seiner Umwelt entwickelt werden). Der Stellenwert dieser Überlegungen als Teil einer umfassenderen Theorie der Strategieentwicklung, daraus ableitbare Forschungshypothesen und die Schwierigkeiten ihrer empirischen Absicherung werden in Kapitel 8.5.5 diskutiert.

8.5.3.5 Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten"

Charakterisierung als Idealtyp:

Idealtypisch lösen Kinder dieses Entwicklungstyps nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres *vorwiegend* durch Zählstrategien. *Einzelne* Aufgaben werden aus bereits automatisierten Aufgaben abgeleitet.

Prototypischer Vertreter:

Julian

Julian kann zu Schulbeginn die Zahlwortreihe bis "neununddreißig" korrekt aufsagen, aber nicht von "zehn" ausgehend rückwärts zählen. Er erfasst keine der vier strukturierten Zahldarstellungen quasi-simultan und löst alle zehn zu Schulbeginn gefragten Aufgaben durch Alleszählen.

Mitte des Schuljahres weiß Julian die Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn auswendig, ausgenommen 4+4; diese Aufgabe löst er durch Weiterzählen. Von den zum damaligen Zeitpunkt nicht-trivialen Additionen weiß er nur 1+6 auswendig, die anderen löst er mehrheitlich durch Alleszählen, mit Ausnahme von 2+5 (Weiterzählen vom erstgenannten, kleineren Summanden) und 4+6 (Finger-Teilzählen). Bei den Subtraktionen wendet er durchgehend Finger-Teilzählen an, nur 8–4 löst er durch "think addition" (obwohl er zuvor 4+4 zählend gelöst hatte; offenbar war die Aufgabe noch im Gedächtnis präsent). Bei den Zusatzaufgaben zeigt er durchgehend eine gewisse Einsicht in die zu Grunde liegenden operativen Zusammenhänge, kann diese aber nicht klar verbalisieren.

Am Ende des ersten Schuljahres löst Julian alle Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn durch Faktenabruf, dazu noch 2+5. Vier der nicht-trivialen Additionen löst er durch Weiterzählen vom größeren Summanden (mit einem Zählfehler bei 3+6), 3+7 und 4+6 durch Finger-Teilzählen. Von den nichttrivialen Subtraktionen löst er 8–4 durch Faktenabruf, 8–5 und 9–8 durch "think addition" (wie auch die zu diesem Zeitpunkt als trivial eingestuften Subtraktionen 10–5 und 10–9). Die anderen nicht-trivialen Subtraktionen versucht er durch zählendes Ergänzen zu bewältigen; bei 9–6 unterläuft ihm dabei ein Zählfehler. Die Additionen mit Zehnerübergang löst er durch Finger-Teilzählen, mit Ausnahme von 3+9 (Weiterzählen vom größeren Summanden) und 6+6. Bei 6+6 versucht er eine Ableitung und scheitert vermutlich nur am Nennen des Zahlwortes für die von ihm als Ergebnis ermittelte Zahl; wie das Protokoll zeigt, hat er vermutlich 6+6 als 5+5+2 gedacht, wusste dann aber nicht, wie das Wort für die Zahl mit "1 vorne, 2 hinten" heißt:

> *"Einundzwanzig? Oder zwanzig? Nein, einundzwanzig!"* [Interviewer: "Wie bist du draufgekommen?"] *"Ich hab mir gedacht, fünf plus fünf, und dann habe ich mir die vordere Zahl gedacht, fünf plus fünf ist zehn, und das ist eins vorne, und das ist dann, glaube ich, einundzwanzig.* [Interviewer: "Was meinst du mit 'vordere Zahl'?"] *Fünf plus fünf habe ich mir gedacht, und dann bin ich draufgekommen."*

Mehr dazu war ihm nicht zu entlocken. Bei 16–10 sagt er spontan "zehn" und gibt an, das wisse er schon auswendig. Die Aufgabe 14–9 löst er durch Finger-Teilzählen, 12–6 durch Alleszählen. Den Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8 kann Julian klar verbalisieren, den zwischen 9+9 und 18–9 scheint er nicht zu erkennen.

Häufigkeit dieses Typus:
Nur vier von 139 Kindern lassen sich diesem Idealtypus zuordnen. Zwei dieser Kinder zeigten bereits Mitte des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien. Zwei gehörten zu diesem Zeitpunkt dem Mischtyp an, je eines der Gruppe der vorwiegend Fakten nutzenden (in diesem Fall: vorwiegend Fakten *abrufenden*, aber nicht ableitenden) Kinder, eines der Gruppe der vorwiegend zählenden Kinder. Zu Schulbeginn waren drei dieser vier Kinder in der Gruppe der Mischtypen, eines in der Gruppe der vorwiegend zählenden Rechner.

Inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen dieses Typus:
Beim Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten" begegnen wir vielem wieder, was bereits bei den Kindern des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" zu beobachten war: Auch die Kinder dieses Typus erwecken sowohl durch das Anwenden von Ableitungsstrategien beim Rechnen wie auch durch ihre Antworten bei den Zusatzaufgaben den Eindruck, dass sie auch anspruchsvollere operative Zusammenhänge wie Kovarianz und Kompensation gut verstanden haben. Auch sie wenden Ableitungsstrategien vorwiegend zum Lösen von Subtraktionen und zum Teil auch von Additionen mit Zehnerübergang an (drei von vier Kindern dieses Typus taten dies), während sie die Additionen im Zahlenraum bis zehn fast durchgehend zählend rechnen, und zwar am Ende des ersten Schuljahres zumeist durch rasches, sicheres Weiterzählen vom größeren Summanden.

Der wesentliche, die Typenzuteilung begründende Unterschied besteht wohl tatsächlich nur darin, dass die Kinder dieses Typus auch noch am Ende des ersten Schuljahres kaum eine nicht-triviale Aufgabe automatisiert haben: Während die 28 Kinder des Typus "Ableiten und persistierendes zählenden Rechnen" am Ende des ersten Schuljahres von den 14 nicht-trivialen Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durchschnittlich 4,6 durch Faktenabruf lösten, taten dies die vier Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten" bei nur einer Aufgabe (das betrifft zwei Kinder) bzw. bei zwei oder drei Aufgaben.

Dieser Unterschied in der Merkleistung war in den Interviews Mitte des ersten Schuljahres noch nicht gegeben – oder im Rahmen der zu diesem Zeitpunkt als nicht-trivial eingestuften Aufgaben nicht erkennbar. Mitte des Schuljahres lösten jedenfalls die 28 Kinder des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" durchschnittlich 5,5 der *damals* nicht-trivialen 14 Aufgaben durch Faktenabruf, die vier Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten" fünf, sechs, eine und sogar zehn Aufgaben. Bei zwei der vier Kinder ergibt sich der Rückgang der durch Faktenabruf gelösten Aufgaben dadurch, dass Mitte des Schuljahres vier andere Aufgaben gefragt worden waren als am Ende. Die anderen beiden Kinder hatten tatsächlich auch zwei Aufgaben, die zu beiden Terminen als nicht-trivial galten, zwar Mitte des Schuljahres durch Faktenabruf gelöst, am Ende des Schuljahres aber durch eine Zählstrategie.

Wenn der *wesentliche* Unterschied zwischen den Kindern dieses Typus tatsächlich in ihrer Merkleistung liegen sollte, stellt sich die Frage, worin dieser begründet sein könnte. Auch an diesen Kindern scheint sich zu bestätigen, dass gerade das (mehr und mehr auch zur Gewohnheit werdende) zählende Rechnen dem weiteren Automatisieren entgegenwirkt. Diese Vermutung wurde bereits zur Erklärung des bescheidenen arithmetischen Faktenwissens von Kindern des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" herangezogen (vgl. Kap. 8.5.3.3). Dabei wurde ausdrücklich eine *Tendenz* postuliert*:* Es wurde *nicht* behauptet, dass wiederholtes zählendes Rechnen einer Aufgabe deren Automatisierung *verhindere*. In Fortführung dieser Vermutung lässt sich zum hier besprochenen Typus anmerken, dass die Tendenz des zählenden Rechnens, sich zu verfestigen, bei den Kindern dieses Typus deutlicher durchschlägt als bei den (weit zahlreicheren) Kindern des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen". *Warum* das so ist, können die erhobenen Daten kaum erhellen. Als auffällig mag gewertet werden, dass die Eltern von drei der vier Kinder dieses Typus angaben, mit ihren Kinder gar nicht (das betrifft eines der Kinder) bzw. kaum (fünf Minuten pro Woche, das betrifft zwei Kinder) rechnen geübt zu haben (die Eltern des vierten Kindes gaben die wöchentliche Übungszeit mit 20 Minuten an). Die durchschnittliche Übungszeit der 28 Kinder des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" betrug gemäß Auskunft der Eltern 17,3 Minuten pro Woche (gegenüber 20,6 Minuten pro Woche als durchschnittliche wöchentliche Übungszeit in der Gesamtstichprobe; auf die beschränkte Validität der Elternangaben zum häuslichen Üben wurde bereits mehrfach hingewiesen, vgl. Kap. 7.4).

Es mag also sein, dass Unterschiede im häuslichen Üben zur Herausbildung der Unterschiede zwischen diesen beiden Typen beitrugen. Wesentlicher scheint das Gemeinsame: Beide Typen scheinen zu zeigen, dass Einsichten in operative Zusammenhänge und das selektive Anwenden dieser Einsichten zum Ableiten einzelner Aufgaben für sich genommen kein Garant dafür sind, dass Kinder die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn im Laufe des ersten Schuljahres automatisieren. Gerade die – aus kindlicher Perspektive rationale – Gewohnheit, jene Aufgaben, die zählend ohne größere Schwierigkeiten gelöst werden können, tatsächlich immer wieder zählend zu lösen, scheint das Automatisieren dieser Aufgaben tendenziell zu *erschweren* – jedenfalls auf Grundlage eines Unterrichts, in dem weder auf das Ableiten und Kommunizieren über Ableitungsstrategien, noch auf das Memorieren der Grundaufgaben erkennbar Wert gelegt wird.

8.5.3.6 Typus "Strategie-Mix mit hohem Anteil von Zählstrategien ohne Ableiten"

Charakterisierung als Idealtyp:
Idealtypisch wenden Kinder dieses Entwicklungstyps *durchgehend keine* Ableitungsstrategien an. Am Ende des ersten Schuljahres lösen sie additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn teils durch Zählstrategien, teils durch Faktenabruf, oft auch durch nicht-zählende Fingerstrategien. Aufgaben mit Zehnerübergang werden am Ende des ersten Schuljahres fast ausschließlich durch Zählstrategien gelöst, ausgenommen sind allenfalls einzelne Aufgaben (zumeist Verdoppelungen), die auswendig gewusst werden.

Kinder dieses Typus wenden schon Mitte des ersten Schuljahres keine Ableitungsstrategien an. Je nach Anzahl der zu diesem Zeitpunkt automatisierten Grundaufgaben gehören sie Mitte des ersten Schuljahres dem "Mischtyp" oder aber auch dem Typ "Vorwiegend zählendes

Rechnen" an. Sofern zwischen Mitte und Ende des ersten Schuljahres überhaupt eine nennenswerte Veränderung innerhalb ihres Strategie-Mix zu beobachten ist, handelt es sich dabei oft um eine Verringerung des Anteils von Finger-Teilzählen und eine Erhöhung des Anteils von nicht-zählendem Fingergebrauch. Zu Schulbeginn gehören Kinder dieses Typus mehrheitlich zu den Kindern mit unterdurchschnittlichem zahlbezogenem Wissen.

Prototypische Vertreter:

Lara (Prototyp für persistierendes Weiter- bzw. Rückwärtszählen)

Lara beherrscht die Zahlwortreihe vorwärts zu Beginn des ersten Schuljahres nur bis "sechzehn" und kann nicht ab "zehn" rückwärts zählen. Sie erfasst keine der vier vorgelegten strukturierten Zahldarstellungen quasi-simultan. Alle zehn zu Schulbeginn gefragten Grundaufgaben löst sie durch Alleszählen.

Mitte des ersten Schuljahres kann Lara die Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn auswendig, mit Ausnahme der Aufgabe 4+4, die sie durch Weiterzählen löst. Weiter- bzw. Rückwärtszählen ist auch sonst ihre Hauptstrategie, Lara wendet diese Strategie bei 10 von 14 nicht-trivialen Aufgaben an. Nur 1+6, 2+5, 10–5 und 9–1 löst sie durch Faktenabruf. Aufgaben mit Zehnerübergang verweigert sie zu diesem Zeitpunkt als "zu schwer". Bei den Zusatzaufgaben zeigt das Mädchen eine gewisse Einsicht in den Zusammenhang von Umkehraufgaben, kann diesen aber nicht klar verbalisieren.

Am Ende des ersten Schuljahres weiß Lara alle Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn auswendig, dazu von den nicht-trivialen Aufgaben gesichert nur noch 2+5 (wie bereits Mitte des ersten Schuljahres) und 3+5 (Mitte des Schuljahres noch gezählt). Bei 2+7 und 3+4 kann die Lösungsstrategie nicht eindeutig geklärt werden. Vermutlich löst Lara diese Aufgaben aber wie schon Mitte des Schuljahres durch Weiterzählen vom größeren Summanden; bei 4+6 ist dies gesichert. 3+7 beantwortet Lara spontan mit "acht". Alle nicht-trivialen Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn bewältigt sie, wie schon Mitte des Schuljahres, durch Rückwärtszählen, ebenso die Subtraktionen mit Zehnerunterschreitung. Alle Additionen mit Zehnerübergang löst sie durch Weiterzählen, mit Ausnahme der Verdoppelung 8+8; hier antwortet Lara spontan mit "Null". Bei den Zusatzaufgaben zeigt sie wie schon Mitte des Schuljahres eine gewisse Einsicht in den Zusammenhang von Aufgabe und Umkehraufgabe, kann diesen aber erneut nicht klar verbalisieren; zwischen 7+7 und 7+8 scheint sie keinen Zusammenhang zu erkennen.

Marion (Prototyp für relativ hohe Merkleistung
mit diesbezüglichen Rückschritten am Ende des Schuljahres)

Marion kann zu Schulbeginn die Zahlwortreihe bis "neunundzwanzig" aufsagen und mit etwas Unterstützung ab "zehn" (aber nicht ab "zwanzig") rückwärts zählen. Sie erfasst keine der vier vorgelegten strukturierten Zahldarstellungen quasi-simultan und weiß keine der zehn zu Schulbeginn gefragten Grundaufgaben auswendig. Ihre Hauptstrategie beim Lösen dieser Aufgaben ist nicht-zählender Einsatz der Finger, auf diese Weise bewältigt sie acht der zehn Aufgaben. Nur 3+3 löst sie durch Alleszählen, 1+6 durch Weiterzählen vom größeren Summanden mit Unterstützung der Finger.

Mitte des Schuljahres löst Marion alle Verdoppelungen im Zahlenraum bis zehn sowie zwölf der 14 zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf. Bei 10–9 antwortet sie spontan mit "Zwei!", 9–8 versucht sie durch nicht-zählenden Einsatz der Finger zu lösen, kommt dabei aber zu einer falschen Lösung. 6+6 löst sie durch Weiterzählen, bei 6+7 antwortet sie spontan mit "Acht!", 5+8 verweigert sie als "zu schwer". In keiner der vier Zusatzaufgaben wird Einsicht in operative Zusammenhänge deutlich.

Am Ende des ersten Schuljahres löst Marion 9 von 14 nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf (diese hohe Anzahl macht sie zu einem Grenzfall dieses Typus). Bei drei Additionen, die sie Mitte des ersten Schuljahres durch Faktenabruf richtig gelöst hatte (4+4, 2+7, 3+7), gibt sie nun ebenso spontan eine falsche Antwort, auch für 3+6 wird "Fehlspeicherung" protokolliert. 9–8 und 7–4 bewältigt sie mühsam in 48 bzw. 23 Sekunden durch Alleszählen. Von den Additionen mit Zehnerübergang weiß sie 3+9 auswendig, 5+8 löst sie in 71 (sic!) Sekunden durch Alleszählen. Bei 6+6, 6+7 und 8+8 behilft sie sich offenbar mit Raten, sofern die Lösungen 6+6=16 und 8+8=18 nicht treffender als Ausdruck einer Übergeneralisierung (von Aufgaben des Typs 10+3=13, 10+4=14) zu deuten sind (vgl. Kap. 8.4.3). 16–10 versucht sie durch Alleszählen (mit falschen Ergebnis) in 47 Sekunden zu bewältigen, bei 12–6 antwortet sie nach längerem Nachdenken (zwölf Sekunden) mit "Null!" und gibt an, das habe sie sich "schon gemerkt". 14–9 schließlich verweigert Marion als "zu schwierig". Bei den Zusatzaufgaben sieht sie weder zwischen 7+7 und 7+8 noch zwischen 9+9 und 18–9 irgend einen Zusammenhang; die beiden letzten Aufgaben kommentiert sie wie folgt: "Das ist ganz was anderes, weil das [deutet auf 9+9] ist plus und das [deutet auf 18–9] ist minus!"

Häufigkeit dieses Typus:
24 Kinder der Gesamtstichprobe können diesem Typus zugeordnet werden. Alle diese Kinder hatten bereits Mitte des ersten Schuljahres keine Ableitungsstrategie gezeigt, zwei gehörten zu diesem Zeitpunkt aber noch zur Gruppe der vorwiegend Fakten nutzenden Kinder, was in diesem Fall bedeutet: Sie lösten mehr als zwei Drittel der zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben durch Fakten*abruf*. Je elf Kinder dieses Typus waren Mitte des Schuljahres in der Gruppe der Mischtypen bzw. in der Gruppe der vorwiegend zählenden Rechner. Verfolgt man die Entwicklung der Kinder zurück bis zum Schulbeginn, gehörten damals sieben der 24 Kinder zum Mischtyp, 17 waren vorwiegend zählende Rechner.

Inhaltliche Zusammenhänge zwischen den Merkmalsausprägungen dieses Typus:
Wie die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten", vermitteln auch die des Typus "Strategie-Mix mit hohem Anteil an Zählstrategien ohne Ableiten" in allen drei Interviews den Eindruck, das Rechnen im Bereich der additiven Grundaufgaben *im Wesentlichen* nur als Anwenden von eingeübten *Prozeduren* zu verstehen, Zahlen dabei nicht als "*procepts"* im Sinne GRAYs (vgl. Kap. 2.9.3), nicht als *"compositions of other numbers"* im Sinne RESNICKS (vgl. Kap. 2.10.4) wahrzunehmen und (wenn überhaupt) nur die einfachsten "principles" und "relationships" im Sinne BAROODYs (vgl. Kap. 2.9.6) zu erfassen und zu nutzen, also vielleicht die "N+0-rule" und die "N+1-rule", aber eben nicht komplexere operative Zusammenhänge wie Kovarianz, Kompensation und Komplementarität.

Was diese Kinder aber in ihrem beobachtbaren Lösungsverhalten von den "vorwiegend zählenden Rechnern" unterscheidet, ist die Tatsache, dass sie am Ende des ersten Schuljahres eben nicht *vorwiegend* (also nicht bei mehr als zwei Drittel der nicht-trivialen Aufgaben) *zählend* rechnen. Zwar haben Zählstrategien in ihrem Strategie-Mix einen hohen Anteil: Im Schnitt lösen die Kinder dieses Typus am Ende des ersten Schuljahres 3,7 von den 14 zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Finger-Teilzählen und 1,7 Aufgaben durch Weiterzählen. Sie haben daneben aber auch durchschnittlich 3,8 dieser Aufgaben automatisiert und lösen durchschnittlich 3,8 dieser 14 Aufgaben durch nicht-zählenden Fingereinsatz.

Nimmt man, um die beiden Messzeitpunkte vergleichen zu können, nur jene zehn nicht-trivialen Aufgaben als Vergleichsbasis, die auch schon Mitte des Schuljahres gefragt worden waren, so ergeben sich die in Tabelle 60 aufgelisteten Mittelwerte.

Tabelle 60: Mittelwertvergleiche und Ergebnisse der Signifikanzprüfung diesbezüglicher Unterschiede zwischen den Typen "Strategie-Mix ohne Ableiten" und "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten"

Von 10 zu beiden Zeitpunkten nicht-trivialen Aufgaben wurden...	Zeit-punkt	Mittelwert des Typus "Strategie-Mix ohne Ableiten"	Mittelwert des Typus "vorwiegend zählend ohne Ableiten "	Signifikanz der MW-Unterschiede (2-seitig)
durch Faktenabruf gelöst:	t2	1,67	0,88	nicht signifikant
	t3	3,33	0,85	$p < 0,001$
durch Finger-Teilzählen gelöst:	t2	4,50	6,76	$p = 0,024$
	t3	2,25	6,24	$p < 0,001$
durch nicht-zählendes Fingerrechnen gelöst:	t2	1,67	0,59	$p = 0,022$
	t3	2,42	0,38	$p < 0,001$

Der Vergleich der beiden Gruppen ergibt im T-Test für unabhängige Stichproben für das Ende des ersten Schuljahres jeweils höchst signifikante Gruppenunterschiede im Faktenabruf und nicht-zählenden Fingereinsatz (zugunsten des Typus "Strategie-Mix") sowie im Finger-Teilzählen (zugunsten des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen"); Mitte des Schuljahres war der Gruppenunterschied im Faktenabruf nicht signifikant, die Unterschiede im Finger-Teilzählen und nicht-zählenden Fingerrechnen aber bereits jeweils signifikant.

Wie könnten diese Unterschiede zu erklären sein? Auch hier kann der Einfluss von (in dieser Studie nicht erhobenen) gedächtnisbezogenen Faktoren nicht ausgeschlossen werden. Die durchschnittliche häusliche Übungszeit war den Angaben der Eltern gemäß bei den Kindern beider Typen jedenfalls annähernd gleich hoch (26,1 Minuten beim Typus "Strategie-Mix" gegenüber 28,0 Minuten beim Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen").

Bedenkenswert erscheint zudem, dass der höhere Anteil an Faktenabruf beim Typus "Strategie-Mix" zur Mitte des ersten Schuljahres noch nicht signifikant war. Offenbar haben aber die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen" im zweiten Schulhalbjahr anders als die Kinder des Typus "Strategie-Mix" im Faktenabruf keinen Fortschritt mehr gemacht: Vergleicht man die Kinder im Bereich jener zehn Aufgaben, die sowohl Mitte wie auch am Ende des Schuljahres zu den nicht-trivialen zählten, so hatten die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen" von diesen zehn Aufgaben Mitte des Schuljahres durchschnittlich 0,88 und am Ende des Jahres durchschnittlich 0,85 Aufgaben automatisiert, stagnierten in dieser Hinsicht also. Dagegen lösten die Kinder des Typus "Strategie-Mix ohne Ableiten" Mitte des Schuljahres durchschnittlich 1,67 von den hier relevanten zehn nicht-trivialen Aufgaben durch Faktenabruf, Mitte des Schuljahres durchschnittlich 3,33 (vgl. Tabelle ..); im T-Test für gepaarte Stichprobe erweist sich das als ein sehr signifikanter Zuwachs (p=0,003).

Dass sich die Unterschiede im Faktenabruf demgemäß erst im Laufe des zweiten Halbjahres deutlich herausbildeten, scheint dagegen zu sprechen, dafür ausschließlich oder auch nur vorrangig gedächtnisbezogene Unterschiede verantwortlich zu machen (es sei denn, man wollte annehmen, dass solche Unterschiede erst im Laufe der Zeit wirksam werden). Es erscheint plausibel, dass auch in diesem Fall die *unterschiedliche Bereitschaft zur Reflexion* eine bedeutsame Rolle spielt. Für GRAY gehört es zu den Charakteristika des "proceptual approach", dass zwischen Aufgabenterm und Ergebnis der Aufgabe keine gedankliche Verbindung hergestellt wird (GRAY 1991, S. 569 und S. 571f; vgl. Kap. 2.3.2 und 2.9.3). Das reflektierende Herstellen dieser Verbindung ist aber eine *Minimalbedingung* dafür, die Gesamtaufgabe im Langzeitgedächtnis abspeichern zu können. Auch bezüglich dieser Minimalbedingung ergibt sich wohl keine *dichotome* Unterscheidung der Kinder. Plausibler erscheint ein *weit gefächertes Spektrum unterschiedlich ausgeprägter Reflexivität* beim Rechnen. Die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen" scheinen in diesem Spektrum den unteren Rand einzunehmen, während die Kinder des Typus "Strategie-Mix" die von ihnen beim Rechnen eingesetzten Prozeduren tendenziell eben doch etwas mehr und/oder etwas häufiger zu überdenken und eher bereit zu sein scheinen, die Strategie der jeweiligen Aufgabe anzupassen.

Diese Bereitschaft mag in weiterer Folge auch die Chance erhöhen, dass eine Aufgabe im Langzeitgedächtnis gespeichert wird (Konzept der *Verarbeitungstiefe* nach CRAIK & LOCKHART 1972, vgl. Kap. 2.12.1). Sie wirkt sich jedenfalls in einem unterschiedlichen Umgang mit Rechenaufgaben aus, wie er in den unterschiedlichen Strategiepräferenzen der Kinder deutlich wird. So war, wie bereits ausgeführt, bei den Kindern des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" wiederholt bemerkbar, dass sie dem *Nachdenken über eine Aufgabe* gar keine Chance gaben: Eine Aufgabe hören (oder vielleicht sogar: auch nur die *erste Zahl* einer Aufgabe hören) und die Prozedur des Finger-Teilzählens starten, war für diese Kinder oft eins. Mitunter klappten sie selbst bei "Acht minus acht?" sofort ihre acht Finger auf. Zumindest manche erkannten dann, dass sie in diesem Fall auch ohne Finger auskommen würden, und gaben mit einem befreiten, vielleicht auch etwas verlegenen Lachen ("Da hätte ich gleich draufkommen können!") ohne Weiteres die richtige Antwort. Immerhin acht von 34 Kindern dieses Typus lösten aber 8–8 am Ende des ersten Schuljahres tatsächlich durch Finger-Teilzählen. Von den 24 Kindern des Typus "Strategie-Mix" tat dies kein einziges.

Auch der in Tabelle 60 ausgewiesene, Mitte wie Ende des Schuljahres signifikant höhere Anteil von nicht-zählendem Fingerrechnen bei den Kindern des Typus "Strategie-Mix ohne Ableiten" ist wohl in erster Linie eine Folge ihrer im Vergleich zu den Kindern des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" höheren Reflexivität. Denn im Finger-Teilzählen, der Hauptstrategie der vorwiegend zählend rechnenden Kinder, liegt ja, wie ausgeführt, immer auch das *Potenzial* für nicht-zählenden Fingergebrauch (vgl. Kap. 2.10.1): Auch die Kinder, die Finger-Teilzählend rechnen, stellen ja etwa bei der Subtraktion 8–5 die Zahl acht zunächst *ohne zu zählen* als fünf und drei dar, mit *einer* simultanen Ausstreckbewegung aller acht Finger. *In gewisser Weise* ist es für sie also selbstverständlich, dass acht aus fünf und drei gebildet wird (zumindest im *Kontext der Zahldarstellung* ist ihnen das selbstverständlich). Dass sie bei 8–5 dann aber nicht fünf als Gesamtheit der Finger einer Hand wegnehmen, sondern fünf Finger (vom achten Finger beginnend) einzeln umknicken, lässt darauf schließen, dass sie die fünf Finger *im Kontext der Rechenprozedur* nicht mehr als Teil der acht Finger *reflektieren*.

Das berechtigt aber nicht zur Annahme, dass sie zu dieser Reflexion nicht *fähig* wären: Dem Verfasser sind in bald fünfzehnjähriger Praxis in der Einzelförderung zahlreiche Kinder begegnet, die 8–5 zunächst durch Finger-Teilzählen lösten; sie folgten dabei einer mitunter seit Jahren bestehenden *Gewohnheit*. *Keines* dieser Kinder war aber nicht sehr rasch davon zu überzeugen, dass 8–5 vorteilhaft auch durch simultanes Wegnehmen der ganzen Hand zu lösen ist. Dafür war in der Regel nicht mehr erforderlich, als das Kind zu fragen, ob es sagen könne, wie viele Finger es an einer Hand habe (was fast immer klar war); und es anschließend zu fragen, ob man dann "acht weg fünf" oder "acht minus fünf" nicht auch dadurch lösen könne, dass man von den acht ausgestreckten Fingern die fünf Finger der vollen Hand wegnehme. Mit anderen Worten: Es genügte in der Regel, die Kinder dazu *aufzufordern*, ihre eigene Fingerhandlung beim Darstellen der Zahl acht zu *überdenken* und zu überlegen, ob das ihnen vertraute Fingermuster nicht auch vorteilhaft *beim Rechnen genutzt* werden könne.

Die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen" hatten diese Reflexion zumindest bis Ende des ersten Schuljahres in der Regel nicht angestellt; die oben geschilderten Erfahrungen mit anderen Kindern lassen im Rückschluss vermuten, dass sie auch nie jemand dazu aufgefordert hatte. Finger-Teilzählen blieb bei diesen Kindern von Mitte des Schuljahres bis Ende des Schuljahres jedenfalls unverändert die bei weitem am häufigsten angewandte Strategie (bei durchschnittlich 6,8 von 10 zu beiden Zeitpunkten gleichen nicht-trivialen Aufgaben Mitte des Schuljahres, bei durchschnittlich 6,2 Aufgaben am Ende des ersten Schuljahres), während nicht-zählendes Fingerrechnen für sie durchgehend kaum eine Rolle spielte und im Laufe des Schuljahres sogar tendenziell noch an Bedeutung verlor: Mitte des Schuljahres lösten sie nur durchschnittlich 0,6 der 10 hier relevanten Aufgaben durch nicht-zählendes Fingerrechnen, am Ende des Schuljahres waren es durchschnittlich 0,4 (die Veränderung ist im T-Test für gepaarte Stichproben ebenso wenig signifikant wie jede andere Veränderung in der Häufigkeit einer der Rechenstrategien: die Strategiepräferenzen dieser Kinder blieben eben im zweiten Schulhalbjahr nahezu unverändert, vgl. Kap. 8.5.3.3).

Die Kinder des Typus "Strategie-Mix" hingegen hatten ebendiese Reflexion im Laufe des ersten Schuljahres in vielen Fällen zumindest bei einigen Aufgaben geleistet und auf dieser Grundlage das nicht-zählende Fingerrechnen zu einer wesentlichen Strategie innerhalb ihres Strategie-Mix gemacht: Sieben der 24 Kinder lösten am Ende des ersten Schuljahres mindestens die Hälfte der 14 zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn auf diese Weise. Ob nun *diese* Kinder darin unterstützt worden waren, über ihre Fingerhandlungen nachzudenken, um sie dadurch zum nicht-zählenden Fingerrechnen weiterzuentwickeln, entzieht sich der vorliegenden Untersuchung. Vielleicht bestand der *wesentliche* Unterschied der Kinder dieses Typus gegenüber den vorwiegend zählenden Rechnern aber *zunächst* tatsächlich in nichts Anderem als ihrer erhöhten Bereitschaft, das ein wenig zu reflektieren, was sie mit ihren Fingern beim Darstellen von Zahlen ohnehin tun.

Freilich: Auch diese Kinder haben zumindest im Laufe des ersten Schuljahres nicht auch noch den Schritt gemacht, die Teile-Ganzes-Beziehungen, die sie beim nicht-zählenden Fingerrechnen *praktisch benützen*, auch als abstrakte Zahl-Beziehungen zu verinnerlichen und auf dieser Grundlage auch ohne Einsatz der Finger zu rechnen. Tatsächlich gab es aber in der Gesamtstichprobe zahlreiche Hinweise dafür, dass das nicht-zählende Fingerrechnen jedenfalls nicht *per se* als erster Schritt zur Überwindung des zählenden Rechnens gesehen werden kann: Nicht-zählendes Fingerrechnen wurde Mitte des ersten Schuljahres innerhalb der Gesamtstichprobe insgesamt 128-mal zum Lösen einer nicht-trivialen Aufgabe eingesetzt. Insgesamt 57-mal (in 44,5 Prozent der Fälle) wurde dieselbe Aufgabe vom selben Kind am Ende des ersten Schuljahres durch Faktenabruf gelöst. Insgesamt 37-mal (in 28,9 Prozent der Fälle) wandte dasselbe Kind bei derselben Aufgabe auch am Ende des ersten Schuljahres wieder nicht-zählendes Fingerrechnen an. Aber immerhin 34-mal (in 26,5 Prozent der Fälle) kam es auch zu einem Wechsel vom nicht-zählenden Fingerrechnen Mitte des Schuljahres zu zählendem Rechnen am Ende des Schuljahres (vgl. dazu auch Kap. 9.3).

8.5.4 Zusammenfassung und Diskussion der qualitativen Ergebnisse

Die in der qualitativen Auswertung der geführten Interviews angewandte Methode der empirisch begründeten Typenbildung wurde als *exploratives* Verfahren gerade auch wegen ihres Potentials gewählt, "zur Bildung von Hypothesen [...] an[zu]regen, die der Entwicklung einer Theorie [...] *die Richtung weisen* können" (BIKNER-ASBAHS 2003, S. 216, Hervorhebung M.G.). Die in Kap. 8.5.3 vorgelegte Typologie mit ihren zu den einzelnen Typen versuchten Erklärungen der "Sinnzusammenhänge" beansprucht also nicht, bereits eine *fertige Theorie* darzustellen. Sie ist der Versuch, die Fülle von Einzeldaten aus über 139 individuellen und in keinen zwei Fällen deckungsgleichen Entwicklungsverläufen in methodisch nachvollziehbarer Weise so zu ordnen, dass wesentliche Unterschiede und Gemeinsamkeiten deutlich werden. Auf dieser Grundlage und unter Beachtung vorliegender Theorien wurden aus den vorliegenden Daten Schlüsse gezogen, die zu einer Erklärung dieser Unterschiede und Gemeinsamkeiten beitragen sollen. Die wesentlichen dieser Schlüsse und Erklärungsversuche, die in Kapitel 8.5.3 über viele Seiten verteilt aus der Analyse der Typen entwickelt wurden, seien hier der Übersichtlichkeit halber noch einmal in Reduktion auf das Wesentlichste zusammengefasst. Im Anschluss daran wird der Versuch unternommen, aus diesen *Ansätzen einer Theorie* der Strategieentwicklung Forschungshypothesen abzuleiten. In diesem Zusammenhang ergeben sich forschungsethische Probleme, deren abschließende Diskussion in das Plädoyer für eine Änderung der Forschungsfragen mündet.

8.5.4.1 Versuch einer Theorie der Rechenstrategieentwicklung im Laufe des ersten Schuljahres unter den Bedingungen eines Unterrichts, in dem Ableitungsstrategien vernachlässigt werden

Der Titel, der für die nun folgende Zusammenfassung der in Kapitel 8.5.3 angestellten Überlegungen gewählt wurde, soll in all seiner Umständlichkeit noch einmal deutlich daran erinnern, dass hier *nicht* beansprucht wird, Aussagen über *die* arithmetische Entwicklung *der* Kinder im Laufe des ersten Schuljahre machen zu können. Was angestrebt wird, ist eine theoretische Klärung der unterschiedlichen Entwicklungsverläufe von Kindern, die in ihrem Mathematikunterricht, wie in Kapitel 7 analysiert, vermutlich (wenn überhaupt) nur wenige gezielte Anregungen dafür erfahren haben, operative Zusammenhänge für das Ableiten von noch nicht automatisierten Aufgaben zu nutzen; und die umgekehrt über längere Zeit immer wieder dazu aufgefordert wurden, Zählstrategien anzuwenden, oder deren zählendes Rechnen zumindest über längere Zeit nicht zum Anlass genommen wurde, mit diesen Kindern gezielt an der Entwicklung von nicht-zählenden Lösungsstrategien zu arbeiten.

Die in didaktisch-methodischer Hinsicht bestehende weitgehende *Einheitlichkeit* dieses Unterrichts (vgl. Kap. 7.3) in den 20 durch Zufallsauswahl bestimmten Schulen deutet darauf hin, dass diese Art von Unterricht für Niederösterreich repräsentativ, zumindest aber nicht untypisch ist. Das gilt wohl auch für Österreich insgesamt; denn zumindest Schulbücher und die Rahmenbedingungen der Aus- und Fortbildung von VolksschullehrerInnen sind bundesweit überwiegend dieselben. Somit kann angenommen werden, dass auch die hier aus einer Zufallsauswahl von SchülerInnen ermittelten Entwicklungstypen für (Nieder-)Österreich repräsentativ oder zumindest nicht untypisch sind. Es gilt mit Bezug auf diese Entwicklungstypen aber *mutatis mutandis* die Warnung, die FUSON mit Bezug auf Studien mit US-amerikanischen Kindern ausspricht:

> *"It is important to keep in mind that most of the research discussed in this chapter concerns children who have received traditional school mathematics instruction focused on teaching children to be doers rather than thinkers. This approach considerably underestimates what children can learn. Thus, the results should not be viewed as inevitable or as norms of what children of certain ages can learn but rather as the consequences of the cultural practices in U.S. mathematics classrooms"* (FUSON 1992a, S. 57).

Was sich *unter den Bedingungen dieses in Kapitel 7 analysierten Unterrichts* ergibt, sind sechs Typen der Entwicklung von Strategiepräferenzen. Deren Unterschiede und Gemeinsamkeiten werden im Folgenden zusammengefasst und in ihren theoretischen Zusammenhang gestellt. Um es der Leserin/dem Leser leichter zu machen, jeweils den Bezug zu den im nachfolgenden Unterkapitel erläuterten Forschungshypothesen herzustellen, erfolgt die Darstellung in Form von durchnummerierten "Theorieteilen", denen die gleichfalls durchnummerierten "Forschungshypothesen" leicht zugeordnet werden können.

1) Ableiten auf Grundlage operativer Einsichten fördert frühes Automatisieren

Ein Teil der Kinder (in vorliegender Stichprobe etwa ein Drittel) kombiniert am Ende ihres ersten Schuljahres Faktennutzung im Zahlenraum bis zehn mit (unterschiedlich tiefen und umfassenden) Einsichten in komplexere operative Zusammenhänge. Diese Kinder wenden ihre operativen Einsichten auch an, um noch nicht automatisierte Grundaufgaben aus bereits automatisierten abzuleiten (Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten"). Gerade das wiederholte Ableiten additiver Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres hatte vermutlich einen wesentlichen, förderlichen Einfluss darauf, dass diese Kinder am Ende des ersten Schuljahres die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn vollständig oder zumindest weitgehend automatisiert haben. Dieses fortgesetzte Ableiten erklärt das Automatisieren aber nicht zur Gänze (also nicht im Sinne einer für sich bereits *hinreichenden* Bedingung).

2) Vernachlässigung der Kommunikation über Rechenwege erschwert die Verallgemeinerung operativer Einsichten

Bei manchen Kindern des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" lassen sich Hinweise dafür finden, dass sie die von ihnen angewandten Ableitungsstrategien *nicht als prinzipiell gültig* verstanden haben. Solche Hinweise sind etwa die Performanz dieser Kinder in Zusatzaufgaben, die das Verständnis operativer Zusammenhänge überprüfen, oder auch überwiegend zählendes Rechnen bei Aufgaben mit Zehnerübergang. Nun hält aber RATHGEB-SCHNIERER, die die Entwicklung von Rechenwegen im zweiten Schuljahr bei additiven Aufgaben im Zahlenraum bis 100 außerhalb des Bereichs der Grundaufgaben untersucht hat, als ein wesentliches Ergebnis in ihrem "Modell der Rechenwegsentwicklung" fest:

> *"Die Rechenwegsentwicklung vollzieht sich in einem spiraligen Prozess von eigenständiger Konstruktion, Reflexion und Austausch. Dieser Prozess erfordert eine Lernumgebung, in der die eigenständige Auseinandersetzung mit geeigneten Aufgaben und die Kommunikation über Lösungsideen und Rechenwege zentrale Rollen einnehmen"* (RATHGEB-SCHNIERER 2006, S. 298f).

Die Rechenwege eines Kindes, so RATHGEB-SCHNIERER, gründeten einerseits (unter anderem) auf dem aktuellen "Wissen über Zahlen und Rechenoperationen". Andererseits trage die "Artikulation im sozialen Kontext", also der in einer geeigneten schulischen Lernumgebung stattfindende "Austausch über Lösungswege", zur "Bewusstmachung", "Klärung" und "Elaborierung" dieses Wissens und der "strategischen Werkzeuge" bei und unterstütze damit die "Entwicklung *flexibler* Rechenkompetenzen" (a.a.O, Hervorhebung M.G.).

All das hat aber vermutlich im Unterricht der für die vorliegende Untersuchung interviewten Kinder mit Bezug auf Strategien zur Bewältigung additiver Grundaufgaben weitgehend gefehlt (vgl. Kap. 7.3). Zwar können Erkenntnisse über die Entwicklung von Lösungswegen bei additiven Aufgaben im Zahlenraum bis 100 nicht ohne weiteres auf die Strategieentwicklung im Bereich der Grundaufgaben übertragen werden. Ein wesentlicher Unterschied besteht schon darin, dass im Bereich der additiven Grundaufgaben (zumindest im Zahlenraum bis zehn) der Faktenabruf eine bei vielen Kindern bereits im ersten Schuljahr dominante Rolle spielt, während die über den Zahlenraum bis 20 hinausgehenden additiven Aufgaben mit wenigen Ausnahmen (etwa 15+15, 25+25 usw.) in der Regel auch dauerhaft nicht automatisiert werden, zugleich aber mit reinen Zählstrategien nur noch schwer zu bewältigen sind. Solche Aufgaben stellen also vermutlich einerseits stärker eine Herausforderung ("challenge") zur Entwicklung nicht-zählender Strategien dar, als es die additiven Grundaufgaben tun. Andererseits basieren nicht-zählende Strategien für das Verknüpfen zweistelliger Zahlen auf dem Faktenwissen im Zahlenraum bis zehn und 20 (vgl. Kap. 3.1).

Trotz dieser Unterschiede zwischen den Aufgabentypen scheint es plausibel, dass auch die im Bereich der additiven Grundaufgaben in Form von Ableitungsstrategien geschaffenen "eigenständigen Konstruktionen" vieler Kinder entschieden davon profitiert hätten, wäre es (wie bei den von RATHGEB-SCHNIERER untersuchten Kindern) im Unterricht zur "Artikulation" und zum "Austausch" über diese Strategien gekommen.

Umgekehrt lässt sich vermuten, dass bei den für die vorliegende Untersuchung interviewten Kindern des Typs "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" gerade auch das (weitgehende) Fehlen solcher Anstöße zur Reflexion dazu beigetragen hat, dass manche dieser Kinder am Ende des ersten Schuljahres ein Strategieprofil zeigten, das geprägt war durch Dissoziationen zwischen dem Anwenden einer Ableitungsstrategie bei der einen Aufgabe und zählendem Rechnen bei einer anderen, gleich strukturierten und daher mit derselben Strategie ableitbaren Aufgabe; oder auch durch das Nebeneinander von Anwenden einer Strategie beim Lösen von Rechenaufgaben und Nichterkennen des zugrunde liegenden operativen Zusammenhangs bei direkter Befragung (bzw. der Unfähigkeit, diesen Zusammenhang zu verbalisieren).

3) Automatisieren ohne Ableiten ist selten

Eine bei weitem kleinere Gruppe von Kindern (in vorliegender Stichprobe nur drei von 139) hat die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres weitestgehend automatisiert, nutzt aber daneben (etwa für Aufgaben mit Zehnerübergang) *keine* Ableitungsstrategien (Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten"). Die *Existenz* dieses Typus macht deutlich, dass Ableiten keine *notwendige* Bedingung für das Automatisieren darstellt, sondern durch Merken kompensiert werden *kann*. Die *Seltenheit* dieses Typus zeigt einerseits, dass diese Kompensation schwierig ist, weil das Merken weitgehend ohne Elaboration der Gedächtnisinhalte auskommen muss. Andererseits wirkt sich hierin wohl aus, dass solche Kompensationsanstrengungen in Schule und Familie wenig gefördert werden. Denn im Bereich des kleinen Einspluseins (anders als beim kleinen Einmaleins) wird dem Memorieren und automatisierenden Üben von "Reihen" und Einzelaufgaben in Österreich in Unterricht wie auch beim häuslichen Üben traditionell wenig oder keine Beachtung geschenkt.

4) Weiterzählendes Rechnen tendiert dazu, sich zu verfestigen –
auch bei Kindern, die daneben ("wenn es sich lohnt") auch ableiten

Ein nicht unbeträchtlicher Teil der Kinder (in dieser Stichprobe ein schwaches Viertel) kombiniert am Ende des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis zehn Faktenabruf, Ableitungsstrategien und Weiterzählen (Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" sowie

Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen und Ableiten"). Ableitungsstrategien werden von diesen Kindern auffälligerweise vorwiegend dort eingesetzt, wo zählendes Rechnen mit höheren Schwierigkeiten verbunden wäre als bei Additionen im Zahlenraum bis zehn. Gerade diese werden von Kindern dieses Typus in der Regel durch Weiterzählen vom größeren Summanden rasch und sicher erledigt. Die Gewohnheit des schnellen Weiterzählens ohne Reflexion der Gesamtaufgabe wie auch ohne Reflexion der operativen Zusammenhänge mit anderen Aufgaben behindert aber vermutlich die Speicherung im Langzeitgedächtnis und trägt dadurch zum relativ hohen Anteil von Zählstrategien noch am Ende des ersten Schuljahres bei. Die Wissenslücken im Bereich der Zahlenfakten im Zahlenraum bis zehn schränken aber auch die Möglichkeiten für Ableitungen ein und sind dadurch ihrerseits ein wesentlicher Grund dafür, dass Aufgaben mit Zehnerübergang von Kindern dieses Typus signifikant seltener nicht-zählend bewältigt werden als von Kindern des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten".

Dass die Kinder dieses Typus offenbar von sich aus bei Aufgaben, die für sie zählend einfach zu bewältigen waren, keinen Grund fanden, über Ableitungsstrategien nachzudenken, muss vor dem Hintergrund gesehen werden, dass sie zum Ableiten im Unterricht vermutlich auch nicht angeregt wurden (vgl. Kap. 7.3). Eher ist das Gegenteil anzunehmen, nicht nur in dem Sinne, dass die Kinder in vielen Klassen bis zum Ende des Schuljahres offenbar zu zählendem Rechnen geradezu aufgefordert wurden (vgl. Kap. 7.2). Schon alleine dann, wenn beim Rechnen die *Lösungsrichtigkeit* und die *Lösungsgeschwindigkeit* im Vordergrund stehen (letztere vielleicht nur mittelbar, wegen des verständlichen Interesses der Kinder, eine Fülle von Aufgaben schnell zu erledigen), ist es aus Sicht der Kinder vollkommen rational, eine Lösungsstrategie beizubehalten, die sich *nach diesen Kriterien* gerade für Additionen im Zahlenraum bis zehn unbestreitbar bewährt hat.

5) Kinder, die ohne Ableiten zählend rechnen, verändern ihren Strategiemix im zweiten Schulhalbjahr kaum noch

Ein beträchtlicher Teil der Kinder (in dieser Stichprobe etwa 42 Prozent) wendet im Laufe des ersten Schuljahres beim Lösen additiver Grundaufgaben keine Ableitungsstrategien an und löst noch am Ende des Schuljahres die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn vorwiegend (Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten") oder zumindest zu einem hohen Anteil (Typus "Strategie-Mix ohne Ableiten") zählend. Bei Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" findet zwischen Mitte und Ende des ersten Schuljahres keine nennenswerte Veränderung ihrer Strategiewahl bei einzelnen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn mehr statt. Aufgaben mit Zehnerübergang werden von Kindern beider Typen am Ende des ersten Schuljahres durchgängig zählend bewältigt oder als "zu schwierig" zurückgewiesen, höchstens mit Ausnahme vereinzelt auswendig gemerkter Aufgaben (etwa 6+6=12).

Die meisten Kinder dieser Typen machen bei ihren Zählprozeduren (zumeist Finger-Teilzählen) im Zahlenraum bis zehn kaum Fehler und erfüllen damit eine wesentliche Voraussetzung, um nach SIEGLERS Theorie zur Automatisierung der Grundaufgaben zu gelangen (vgl. Kap. 2.3.1). Auch die zweite von SIEGLER genannte Voraussetzung, nämlich ein ausreichender "amount of exposure to each problem" (SIEGLER & JENKINS 1989, S. 33), dürfte bei den Kindern dieser beiden Typen erfüllt worden sein. Den Angaben der Eltern zufolge wurde mit diesen Kinder jedenfalls im Laufe des ersten Schuljahres zuhause in der Regel mehr geübt als mit den Kindern aller anderen Typen. Es scheint dabei aber nur das eingetreten zu sein, was bereits BROWNELL als *erwartbaren* Effekt solcher Art des Übens konstatierte:

> *"Drill is a technique for fixing methods which have already been adopted. It is not a technique for supplying new methods. If, for example, a child habitually counts in using the number combinations, drill, far from breaking this habit or giving him a better one, merely affords him opportunity to increase his proficiency in counting"* (BROWNELL 1929, S. 105).

Erwartbar ist dieser Effekt deshalb, weil Kinder, wenn sie additive Aufgaben zählend lösen, ohne dabei über mögliche Zusammenhänge dieser Aufgaben mit bereits automatisierten oder kurz zuvor zählend gelösten Aufgaben nachzudenken, bei dieser Form des Übens nicht zu jener *Verarbeitungstiefe* der Rechensätze gelangen, die für das Einspeichern im Langzeitgedächtnis förderlich ist (vgl. Kap. 2.12.2) – sofern sie die Rechensätze überhaupt *als Rechensätze* (als Einheit von Aufgabe und Lösung) wahrnehmen.

Viele Kinder dieser beiden Typen zeigen in den Zusatzaufgaben aber eine gewisse Einsicht in zumindest einzelne komplexere operative Zusammenhänge wie Kovarianz oder Komplementarität. Aus ihrem Verhaftetsein in Zählstrategien kann also nicht darauf geschlossen werden, dass sie mit nicht-zählenden Strategien kognitiv überfordert wären. Als ein wesentliches Hindernis für das Entdecken nicht-zählender Strategien erweist sich bei diesen Kindern ihr Mangel an Reflexivität, ihre Gewohnheit des Darauf-los-Zählens, sobald sie mit einer additiven Grundaufgabe konfrontiert werden.

Gerade auch in dieser Hinsicht unterscheiden sich die beiden Typen "*Strategie-Mix* ohne Ableiten" und "*Vorwiegend zählendes Rechnen* ohne Ableiten": Kinder des erstgenannten Typus sind eher bereit, das in der Strategie des Finger-Teilzählens *implizit enthaltene* Wissen um Teile-Ganzes-Beziehungen in einem weitergehenden Schritt für nicht-zählende Fingerstrategien zu nutzen. Sie gelangen dabei aber zumindest im Laufe des ersten Schuljahres *nicht zum expliziten Wissen* um diese Beziehungen und daher auch nicht zu Lösungsstrategien ohne Materialverwendung, die auf solchem Wissen basieren. *Aus pädagogisch-didaktischer Perspektive* scheint es also geboten, den Übergang vom nicht-zählenden Fingerrechnen zum Fakten nutzenden Rechnen nicht anders als den Übergang vom zählenden Rechnen zum Fakten nutzenden Rechnen nicht einfach "dem spontanen Einsehen der Kinder [zu] überlassen" (PROBST & WANIEK 2003, S. 77; vgl. Kap. 7.3.2), sondern im Unterricht gezielt zu fördern. Denn das Risiko, dass zumindest manche nicht-zählende Fingerrechner solche "spontanen Einsichten" auch in weiterer Folge *nicht* haben, mag geringer sein als das diesbezügliche Risiko beim zählenden Rechnen. Es kann aber auf Grundlage der vorliegenden Untersuchung ebenso wenig ausgeschlossen werden wie jenes.

Bei den Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" handelt es sich in mehr als zwei Drittel der Fälle um Kinder, die bereits zu Schulbeginn deutliche Rückstände in ihrer arithmetischen Entwicklung aufwiesen. Das überrascht zwar wenig vor dem Hintergrund aktueller Studien, die gerade auch die (wie auch immer gemessenen) zahlbezogenen Kenntnisse zu Schulbeginn als "Prädiktoren" der mathematischen Leistung bis ans Ende der Grundschulzeit ausweisen (vgl. Kap. 2.12.3 und die diesbezüglichen Prüfhypothesen in Kap. 5 bzw. Kap. 9). Aus pädagogisch-didaktischer Perspektive muss aber deutlich festgehalten werden: Darin, dass diese Kinder nach zehn Monaten Mathematikunterricht beim Rechnen im Zahlenraum bis zehn fast vollständig auf Strategien wie Alleszählen und Finger-Teilzählen angewiesen waren, erfüllte sich wohl kaum ein unausweichliches "Schicksal". Vielmehr muss darin wohl vor allem auch ein *Scheitern des Unterrichts* gesehen werden (vgl. Kap. 10.4). In diesem Unterricht wurde es offenkundig nicht geschafft, die bereits zu Schulbeginn manifesten Entwicklungsrückstände im Laufe von zehn Monaten so weit wettzumachen, dass auch diesen Kindern Alternativen zum zählenden Rechnen (über das Auswendiglernen einiger weniger Grundaufgaben hinaus) eröffnet worden wären – Alternativen, die zu begreifen sie offenbar (wie etwa die Zusatzaufgaben zeigen) zumindest mehrheitlich in der Lage gewesen wären.

8.5.4.2 Aus den Theorieteilen ableitbare Forschungshypothesen

Es ist nicht einfach, den hier vorgestellten Ansatz einer Theorie der Strategieentwicklung in Forschungshypothesen zu gießen, die eine weitergehende empirische Absicherung erlauben (oder vielmehr: sie im POPPERschen Sinn falsifizierbar machen; vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 21f). Es werden ja durchwegs nur *Tendenzen* postuliert, *keine Notwendigkeiten*: Es wird nicht behauptet, dass das Automatisieren der additiven Basisfakten im ersten Schuljahr *ausschließlich* auf der Basis von Einsicht in operative Zusammenhänge und eine darauf gründende Phase des Ableitens stattfinde, sondern lediglich, dass diese Einsicht und das Ableiten das Automatisieren *erleichtern* und vielleicht *beschleunigen*. Es wird nicht behauptet, dass ohne Einsicht und ohne Ableiten das Automatisieren *unmöglich* sei, sondern lediglich, dass es *erschwert* und *verzögert* wird. Es wird auch umgekehrt nicht behauptet, dass Kinder, die nicht ableiten, über *keine* Einsicht in operative Zusammenhänge verfügen. Und es wird anerkannt, dass jene Kinder, die Ableitungsstrategien anwenden, hinsichtlich ihrer operativen Einsichten bei weitem keine homogene Gruppe darstellen. Schließlich wird durchgängig auf Zusammenhänge der kindlichen Strategieentwicklungen mit dem Unterricht hingewiesen, womit zugleich ausgedrückt ist, dass bei anderem Unterricht auch andere Strategieentwicklungen möglich und sogar zu erwarten sind.

In *diesem* Sinne verstanden, also als *Tendenz unter den Bedingungen eines bestimmten Unterrichts*, nicht aber als Notwendigkeit kindlicher Entwicklung per se, lassen sich für nachfolgende Untersuchungen eine Reihe von Hypothesen formulieren, deren empirische Überprüfung allerdings eine wesentliche Änderung des grundlegenden Untersuchungsdesigns (und in einigen Fällen eine wesentliche Erweiterung des Untersuchungszeitraumes) erfordert.

Denn die hier vorgenommene Typenbildung ist vor allem aus zwei Gründen empirisch unzureichend abgesichert:

– Die Kinder wurden während des ersten Schuljahres nur zu drei Zeitpunkten interviewt. Abgesehen von dem grundsätzlichen Problem, dass wir nicht mit Sicherheit sagen können, wie charakteristisch der in der Momentaufnahme des Interviews gezeigte Strategie-Mix eines Kindes dafür ist, mit welchem Strategie-Mix dieses Kind außerhalb der Interviewsituation im selben Zeitraum gerechnet hat (vgl. Kap. 6.1.4): Die Strategien, die dieses Kind *zwischen* diesen Zeitpunkten angewandt hat, bleiben in jedem Fall im Dunkeln. Gerade dort aber, wo sich zwischen den Zeitpunkten wesentliche Änderungen im Strategie-Mix ergaben, läge der Schlüssel für die Erklärung dieser Änderungen (so jedenfalls die oben formulierte Theorie) vermutlich in den Strategien, die dieses Kind in den nicht erfassten Monaten bei der Bewältigung einzelner Aufgaben wiederholt angewandt hat.
– Die Einschätzung des konzeptionellen Wissens eines Kindes beruht in der vorliegenden Untersuchung einerseits auf seiner Performanz beim Rechnen, andererseits auf Zusatzaufgaben, die Auskunft über seine Einsicht in operative Zusammenhänge geben sollten. Die Berücksichtigung beider Bereiche führte mitunter zu uneindeutigen, zuweilen in sich widersprüchlichen Befunden. Dies könnt an Widersprüchen liegen, die im Denken der Kinder eine objektive Grundlage haben. Um hierüber mehr Klarheit zu gewinnen, müsste man aber den Aufgaben zur Erfassung des konzeptionellen Wissens einen höheren Stellenwert im Untersuchungsdesign einräumen.

Um also die hier vorgenommene Typisierung zunächst selbst evaluieren und eventuell feiner differenzieren zu können, zugleich aber die im folgenden formulierten Forschungshypothesen überprüfen zu können, müsste eine Folgeuntersuchung das Design einer *mikrogenetischen Längsschnittstudie* (vgl. SIEGLER & JENKINS 1989, S. 8-11) annehmen, das heißt: Kinder müssten in *wesentlich kürzeren Abständen* zu ihren Lösungsstrategien befragt werden, etwa im Abstand von zwei bis vier Wochen. Zudem müsste den Aufgaben zur Erfassung von operativen Einsichten mehr Raum geschenkt werden (etwa nach Vorbild der Studie von PUTNAM u.a. 1990, vgl. Kap. 2.9.7). Diese müssten ergänzt werden um Aufgaben, die auch getrennt von den beim Rechnen angewandten Strategien Aufschluss über das Zehner-Einer-Verständnis eines Kindes geben können (wie etwa die bei GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 261f vorgestellten).

Weiters müsste versucht werden, die bei Besprechung der Typen als mögliche weitere Einflussfaktoren genannten Variablen (Arbeitsgedächtnis; Dauer, Art und Intensität des häuslichen und schulischen Übens) so weit wie möglich zu kontrollieren. Angesichts der geringen Anzahl von Kindern, die in der vorliegenden Stichprobe den Typen "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" und "Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten" zuzuordnen waren, sollte bei all dem die für die vorliegende Untersuchung gewählte Stichprobengröße zumindest beibehalten werden, was freilich in Kombination mit dem mikrogenetischen Ansatz einen beträchtlichen Mehraufwand nach sich ziehen würde. Zudem verlangen einige der Forschungshypothesen ein Fortführen der mikrogenetischen Untersuchung in höhere Schulstufen (dort eventuell mit geringerer Dichte der Untersuchungen).

Die methodischen Schwierigkeiten und forschungsethischen Probleme, die sich aus einem solchen Design über den gewaltigen Aufwand hinaus ergeben, werden im folgenden Unterabschnitt diskutiert. Unter vorläufiger Nichtbeachtung dieser Schwierigkeiten sollte das genannte Forschungsdesign die Überprüfung der folgenden Forschungshypothesen ermöglichen:

Forschungshypothese 1 (bezogen auf Theorieteil 1 und Theorieteil 3):
Unter den Bedingungen eines Unterrichts, der zählende Strategien begünstigt oder zumindest toleriert, der daneben Ableitungsstrategien vernachlässigt, der schließlich das Memorieren der additiven Grundaufgaben auch nicht zum Gegenstand von Drill-Aktivitäten macht, gelingt es zwei unterschiedlichen Typen von Kindern, die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn vollständig oder mit wenigen Ausnahmen zu automatisieren: Zum einen Kinder, die diese Grundaufgaben auswendig lernen, *ohne* in einer Zwischenphase zum Lösen zumindest einiger dieser Grundaufgaben immer wieder auf Ableitungsstrategien zurückzugreifen (Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten"). Zum anderen Kinder, die in einer Zwischenphase zumindest einige dieser Grundaufgaben immer wieder durch Ableitungsstrategien lösen. Dabei tritt "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" aber signifikant häufiger auf "Hohe Merkleistung ohne Ableiten".

Forschungshypothese 2 (bezogen auf Theorieteil 1):
Werden im Unterricht und/oder außerhalb der Klasse verstärkt Maßnahmen gesetzt, die darauf abzielen, dass Kinder die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn memorieren, *ohne* zugleich das Entdecken von operativen Zusammenhängen und das Anwenden von Ableitungsstrategien zu fördern, dann gelangt zwar ein höherer Anteil der Kinder im Laufe des

ersten Schuljahres zur vollständigen oder weitgehenden Automatisierung der additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn. Es steigt innerhalb dieser Kinder aber auch der Anteil jener Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres zwar den Zahlenraum bis zehn weitgehend automatisiert haben, aber Aufgaben mit Zehnerübergang zu einem hohen Anteil durch Zählstrategien bewältigen und die jene Abruffehler begehen, die für Kinder des Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" typisch sind. Zumindest bei einem Teil dieser Kinder erweist sich die Automatisierung zudem nicht als dauerhaft, das heißt: Wird das memorierende Üben der additiven Grundaufgaben nicht über das erste Schuljahr hinaus fortgeführt, steigt bei diesen Kindern wieder der Anteil an Zählstrategien auch im Zahlenraum bis zehn.

Forschungshypothese 3 (bezogen auf Theorieteil 2):
Unter den bereits für Forschungshypothese 1 genannten schulischen Bedingungen unterscheiden sich die Kinder innerhalb des Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" am Ende des ersten Schuljahres beträchtlich hinsichtlich ihrer Einsicht in verschiedene operative Zusammenhänge, in den prinzipiellen Charakter der von ihnen selbst verwendeten Ableitungsstrategien sowie in das Zehner-Einer-System. Die in Zusatzaufgaben erhobenen Unterschiede in diesen Bereichen korrelieren signifikant positiv mit den Unterschieden in der Performanz bei Aufgaben mit Zehnerübergang, d.h.: Kinder mit höherem konzeptionellem Wissen in den genannten Bereichen bewältigen signifikant mehr Aufgaben mit Zehnerübergang mit nicht-zählenden Strategien als Kinder mit niedrigerem konzeptionellen Wissen.

Forschungshypothese 4 (bezogen auf Theorieteil 1 und Theorieteil 2):
Werden dagegen Kinder im Unterricht von Anfang an beim Entdecken von Ableitungsstrategien unterstützt und laufend ermutigt, ihre Strategien in der Klasse auszutauschen und zu reflektieren ("strategie-zentrierter Erstunterricht", vgl. GAIDOSCHIK 2009), dann entwickelt – verglichen mit Klassen, in denen die für Forschungshypothese 1 genannten Bedingungen gelten – bis spätestens Ende des ersten Schuljahres zum einen ein signifikant höherer Anteil der Kinder vertiefte Einsichten in operative Zusammenhänge und den prinzipiellen Charakter von Ableitungsbeziehungen (messbar in ihrer Performanz in Zusatzaufgaben und bei Aufgaben mit Zehnerübergang). Zum anderen gelangt ein signifikant höherer Anteil im Laufe des ersten Schuljahres zur vollständigen Automatisierung der Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn.

Forschungshypothese 5 (bezogen auf Theorieteil 4):
Unter der bereits für Forschungshypothese 4 erläuterten Bedingung eines "strategie-zentrierten Erstunterrichts" zeigt – verglichen mit Klassen, in denen die für Forschungshypothese 1 genannten Bedingungen gelten – am Ende des ersten Schuljahres ein signifikant niedrigerer Anteil von Kindern die Merkmalskombinationen "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" sowie "Vorwiegend zählendes Rechnen und Ableiten".

Forschungshypothese 6 (bezogen auf Theorieteil 4):
Bleiben hingegen die für Forschungshypothese 1 erläuterten Bedingungen des Unterrichts in den weiteren Schuljahren im Wesentlichen dieselben und werden auch keine gegensteuernden Maßnahmen außerhalb des Klassenverbandes gesetzt, so behält zumindest ein Teil der Kinder, die unter diesen Bedingungen im ersten Schuljahr den Strategietypen "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen" und "Vorwiegend zählendes Rechnen und Ableiten" angehören, die für diese Typen konstitutive Kombination aus zählendem Rechnen, Faktenabruf und Ableiten im Bereich der additiven Grundaufgaben (und schon deshalb auch im Bereich von additiven Aufgaben im höheren Zahlenraum) auch in höheren Schulstufen bei. Zumindest ein Teil dieser Kinder kommt also auch in höheren Schulstufen nicht zur vollständigen Automatisierung der additiven Grundaufgaben.

Forschungshypothese 7 (bezogen auf Theorieteil 5):
Bleiben die für Forschungshypothese 1 erläuterten Bedingungen des Unterrichts in den weiteren Schuljahren im Wesentlichen gleich und werden auch keine gegensteuernden Maßnahmen außerhalb des Klassenverbandes gesetzt, dann rechnen Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres dem Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" angehören, auch in höheren Schulstufen vorwiegend zählend. Ebenso gelangt *unter diesen Bedingungen* zumindest ein Teil der Kinder, die am Ende des ersten Schuljahres zum Typus "Strategie-Mix mit hohem Anteil an Zählstrategien ohne Ableiten" gehören, auch in höheren Schulstufen nicht zur vollständigen oder auch nur vorwiegenden Automatisierung der additiven Grundaufgaben, und das heißt auch: Zumindest manche dieser Kinder entwickeln ihre nicht-zählenden Fingerstrategien nicht weiter zu nicht-material-gebunden-nicht-zählenden Strategien.
Forschungshypothese 8 (bezogen auf Theorieteil 5):

Werden hingegen Kinder im Unterricht von Anfang an beim Entdecken von Ableitungsstrategien unterstützt und laufend dazu angehalten, ihre Strategien in der Klasse auszutauschen und zu reflektieren, und werden zudem schon früh und bei Bedarf mit gesteigerter Intensität Maßnahmen gesetzt, welche das Automatisieren einiger weniger Kernaufgaben (Verdoppelungen und Halbierungen im Zahlenraum bis zehn, Aufgaben des Typs "plus 1" bzw. "minus 1", Zahlzerlegungen mit der "Kraft der Fünf") gezielt unterstützen (Maßnahmen, wie sie etwa bei GAIDOSCHIK 2007, S. 37f; S. 96ff; S. 115f, beschrieben werden), dann gehört am Ende des ersten Schuljahres ein signifikant geringerer Anteil aller Kinder den Typen "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" wie auch "Strategie-Mix mit hohem Anteil an Zählstrategien ohne Ableiten" an als unter den für Forschungshypothese 1 ausgeführten Bedingungen.

8.5.5 Plädoyer für eine grundlegende Modifikation von Forschungsfragen und -design für Folgeuntersuchungen

Es wurde bereits eingeräumt, dass das zur Überprüfung der oben formulierten Forschungshypothesen 1 bis 8 erforderliche Untersuchungsdesign mit einem gewaltigen Aufwand verbunden wäre. Schwerer noch wiegen forschungsethische Bedenken. Denn wir können nun einmal beim gegenwärtigen Forschungsstand nicht ausschließen, dass es sich beim zählenden Rechnen um eine "Sackgasse" handelt, "aus der die Schüler im 2. oder im 3. Schuljahr kaum mehr herauskommen" (vgl. LORENZ & RADATZ 1993, S. 117). Dann ist es aber aus pädagogischer Perspektive wohl nicht verantwortbar, Kinder, die erkennbarer Weise Gefahr laufen, in diese Sackgasse zu geraten, mit wissenschaftlicher Distanz einfach nur zu beobachten und nichts zu unternehmen, um sie vielleicht doch davor zu bewahren.

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurden deshalb nach Abschluss der dritten Interviewreihe die Lehrkräfte wie auch die Eltern der Kinder im Detail über den arithmetischen Entwicklungsstand der interviewten Kinder und mögliche, nach Stand der Fachdidaktik sinnvolle Fördermaßnahmen (auf Basis des in Kapitel 4 erläuterten fachdidaktischen Konsenses) informiert. Auch wenn zu befürchten ist, dass diese Intervention in den meisten Fällen wenig wirksam war (darüber hinausgehende Maßnahmen waren nicht möglich), so handelte es sich dabei doch um eine Einflussnahme, die bei jeder weiteren Untersuchung derselben Stichprobe als nicht kontrollierbare Störvariable gewirkt und eine solche weitgehend ihres wissenschaftlichen Wertes beraubt hätte.

Wissenschaftlich wertvoll *und* ethisch vertretbar wäre eine Längsschnittuntersuchung wohl nur bei deutlich geänderter Fragestellung, nämlich zur *Evaluierung von Unterrichtsmaßnahmen*, die gerade die *Überwindung des zählenden Rechnens* zum Ziel haben. Dabei könnten konkurrierende (aber jeweils für sich begründet Erfolg versprechende) Konzepte des mathematischen Erstunterrichts unter fairen Bedingungen gewissermaßen im Wettstreit zu einander antreten (vgl. BAUERSFELD 2000, S. 99).

Ein solches Design entginge auch dem methodischen Dilemma, das sich bei einer mikrogenetischen Untersuchung der Strategieentwicklung unweigerlich auftut: Denn bei häufigerer Befragung der Kinder zu ihren Lösungsstrategien steigt auch die Wahrscheinlichkeit, dass die Befragungen selbst Einfluss nehmen auf die Strategieentwicklung. Unabhängig davon, was im Unterricht der Kinder diesbezüglich gefordert wird, wären ja die Kinder in überschaubaren Abständen immer wieder dazu angehalten, über ihre Lösungsstrategien zu reflektieren. Angesichts der großen Bedeutung, die solche Reflexion und der soziale Austausch über Lösungsstrategien bei der weiteren Strategieentwicklung vermutlich spielen (vgl. RATHGEB-SCHNIERER 2006, S. 298f und Kap. 8.5.4.1), könnten sich schon alleine wegen der Befragungen die Strategien der Kinder im Laufe des ersten Schuljahres deutlich anders entwickeln, als es in der vorliegenden Studie der Fall war. Bei dieser war die Gefahr einer solchen *Beeinflussung des Untersuchungsobjektes durch das Untersuchungsinstrument* zwar nicht gänzlich ausgeschlossen, wegen der geringen Dichte der Befragungen aber doch wenig wahrscheinlich.

Gerade diese mögliche, sogar wahrscheinliche Beeinflussung wäre aber bei dem oben angedeuteten geänderten Design gewissermaßen als erwünschter Effekt in die Untersuchung mit einbezogen. Mit diesem geänderten Design wird nicht beansprucht, die Strategieentwicklung von Kindern unter *vorgegebenen,* für Österreich *möglichst repräsentativen* schulischen und familiären Rahmenbedingungen zu untersuchen, wie es die vorliegende Studie in explorativer Absicht unternommen hat. Vielmehr würde in einer solchen alternativen Untersuchung die Fragestellung dahingehend geändert, dass die Strategieentwicklung untersucht werden soll gerade unter *solchen* schulischen Rahmenbedingungen, die von der aktuellen fachdidaktischen Forschung als *günstig* erachtet werden. Regelmäßige Befragungen der Kinder über ihre Strategien müssten dann aber *in jedem Fall* ein wichtiger Teil gerade dieses Rahmenbedingungen sein. Denn über die förderliche Wirkung der Kommunikation und des Austauschs über Lösungswege besteht in der aktuellen Fachdidaktik Einigkeit (vgl. Kap. 4.3).

Dennoch gibt es unterschiedliche Auffassungen über didaktisch-methodische Detailfragen (vgl. etwa Kap. 4.2), die es wohl Wert wären, in kontrollierten Unterrichtsexperimenten empirisch überprüft zu werden. Da aber das regelmäßige Befragen der Kinder zu ihren Lösungsstrategien in jedem Fall Teil solcher Unterrichtskonzeptionen sein müsste, wären die im Zuge einer mikrogenetischen Längsschnittstudie aufgezeichneten Befragungen nur ein Teil der Konzeptionen, deren Wirksamkeit evaluiert werden soll, und es müsste lediglich sichergestellt werden, dass die Befragungen in den Klassen, die miteinander verglichen werden sollen, auf kontrollierte, weitgehend gleiche Weise durchgeführt werden.

Bei einem solchen Unterrichtsexperiment, bei dem alle beteiligten Erwachsenen mit guten Argumenten davon überzeugt sind, im Interesse aller beteiligten Kinder zu handeln, gäbe es natürlich auch keine Bedenken, eine Längsschnittstudie über den Zeitraum mehrerer Jahre fortzuführen (es sei denn, es stellte sich im Verlaufe des Experimentes heraus, dass die Kinder unter der einen Versuchsbedingung eine deutlich bessere Entwicklung nehmen als unter der anderen). Freilich wären in einem solchen Experiment Entwicklungsdefizite, die im Zuge der regelmäßigen Befragungen deutlich werden können, jeweils Anlass, über gezielte Fördermaßnahmen nachzudenken und diese im Rahmen der gegebenen Möglichkeiten auch umzusetzen. Auch solche Überlegungen zur Förderung von "Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens" (vgl. SCHIPPER 2003a, S. 103) sind ohnedies Teil *jeder* zeitgemäßen Konzeption des Mathematikunterrichts (vgl. etwa RADATZ u.a. 1996, S. 108-113; SPIEGEL & SELTER 2003, S. 86-97; LORENZ 2003a, S. 93-104; WITTMANN & MÜLLER 2004a,

S. 15f) und wären daher auch Teil dessen, was im Rahmen einer solchen Studie evaluiert werden soll.

Wir würden damit freilich darauf verzichten, *die* arithmetische Entwicklung *der* Kinder *objektiv und unbeeinflusst* erfassen zu wollen. Wir würden also auf einen Anspruch verzichten, der mit zumindest manchen (entwicklungs-)psychologischen Studien mehr oder weniger explizit und mehr oder weniger reflektiert erhoben wurde.

Der Verfasser ist davon überzeugt, dass *dieser* Verzicht zum Wohle der Kinder wäre.

9 Prüfstatistik

Die Ergebnisse der statistischen Prüfung der in Kapitel 5 erläuterten Hypothesen werden im Folgenden in drei Abschnitten dargestellt: Der erste Abschnitt gilt den Hypothesen $H1_1$ bis $H1_4$, die durch eine univariate Kovarianzanalyse mit Messwiederholung geprüft werden. Der zweite Abschnitt gilt der Prüfung der in $H1_5$ und $H1_6$ postulierten Korrelationen. Der letzte Abschnitt ist den Hypothesen $H1_7$ und $H1_8$ gewidmet, deren Überprüfung durch Chi-Quadrat-Tests erfolgt. Kapitel 9 beschränkt sich darauf, die Verfahrensschritte zu dokumentieren und die unmittelbaren Ergebnisse der Hypothesenprüfung darzulegen (Verwerfen einer Null- bzw. Annahme einer Alternativhypothese). Die ausführliche Diskussion sämtlicher Ergebnisse in ihrem Zusammenhang erfolgt in Kapitel 10.

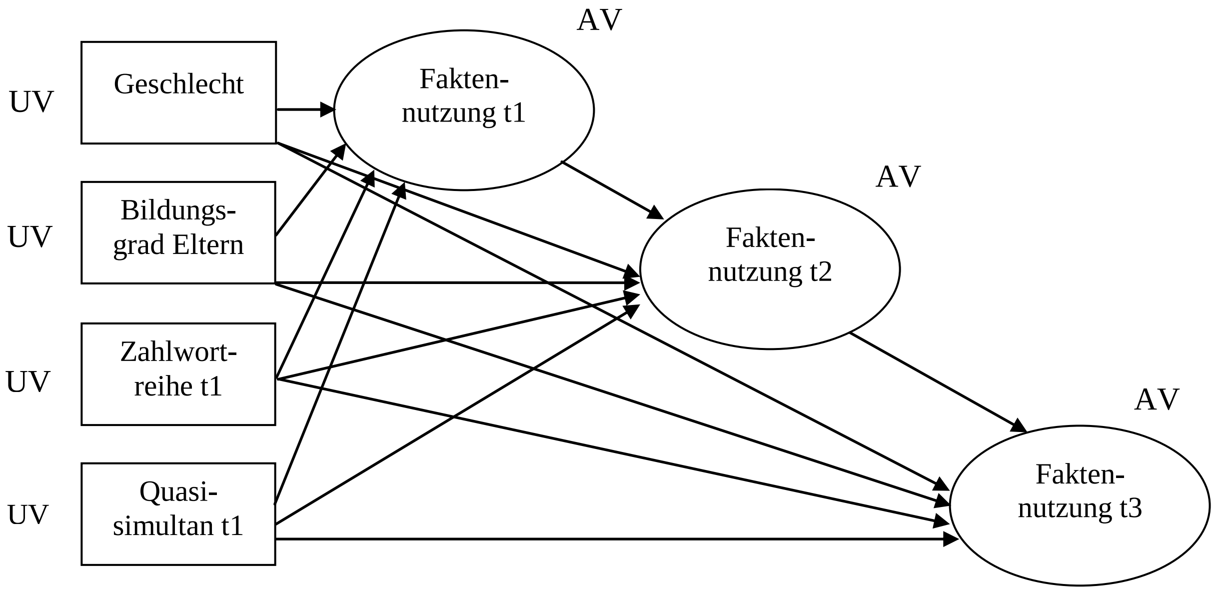
9.1 Hypothesen zum Einfluss des zu Schulbeginn vorhandenen Zahlwissens, des Geschlechts und des Bildungsgrads der Eltern auf die Entwicklung der Rechenstrategien

Die in Kapitel 5.2 formulierten Prüfhypothesen $H1_1$ bis $H1_4$ werden durch eine univariate, zweifaktorielle Kovarianzanalyse mit Messwiederholung geprüft, die mittels SPSS 15.0 nach der Methode des Allgemeinen linearen Modells (ALM, Gesättigtes Modell, Quadratsummen vom Typ III) berechnet wurde (vgl. Kap. 6.6). Im Folgenden wird zunächst das gewählte statistische Prüfverfahren kurz erläutert und begründet, warum gerade dieses Verfahren gewählt wurde (Kap. 9.1.1). Es folgt die Operationalisierung der im ALM verrechneten Variablen, also die "Angabe von Operationen, die zur Erfassung der Variablen [..] führen" (BORTZ & DÖRING 2005, S. 65) (Kap. 9.1.2). In Kapitel 9.1.3 wird dargelegt, inwieweit die Voraussetzungen zur Durchführbarkeit einer Kovarianzanalyse im Fall der vorliegenden Untersuchung erfüllt sind und welche Konsequenzen sich aus der Verletzung einzelner Voraussetzungen für die Interpretation der berechneten Werte ergeben. In Kapitel 9.1.4 folgen die deskriptiven Statistiken für die einzelnen Faktorstufen und Faktorstufen-Kombinationen zu den drei Messzeitpunkten. In Kapitel 9.1.5 werden schließlich die Ergebnisse der Signifikanzprüfung des Untersuchungsmodells auf die vier in diesem Abschnitt verhandelten Prüfhypothesen bezogen wie auch die darüber hinaus reichenden explorativen Ergebnisse dargestellt.

9.1.1 Zum gewählten Prüfverfahren

Die zur Hypothesenprüfung gewählte, in Abbildung 16 dargestellte univariate Kovarianzanalyse mit Messwiederholung zählt zu den "varianzanalytischen Methoden", deren "grundsätzliches Anliegen [..] die statistische Beurteilung des Einflusses von nominal skalierten (kategorialen) Faktoren auf intervallskalierte abhängige Variablen" ist, wobei "simultan die Wirkung von mehreren, mehrfach gestuften Faktoren und deren Wechselwirkungen betrachtet werden" können (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 75). Die *Ko*varianzanalyse, eine "Verknüpfung der Methoden der Varianz- und der Regressionsanalyse", erlaubt es, zusätzlich den "Einfluss von intervallskalierten Kovariablen auf die abhängige Variable" zu untersuchen (a.a.O., S. 93).

Abbildung 16: Untersuchungsmodell zur Prüfung des Einflusses von Zahlwissen zu Schulbeginn, Geschlechtszugehörigkeit und Bildungsgrad der Eltern auf die Entwicklung der Rechenstrategien im Laufe des ersten Schuljahres



Die nominal skalierten Faktoren innerhalb der Varianzanalyse sind im vorliegenden Fall die Geschlechtszugehörigkeit sowie der Bildungsgrad der Eltern, die intervallskalierten Kovariablen (auch "Kovariaten", vgl. ZÖFEL 2003, S. 205) sind die beiden das Zahlwissen zu Schulbeginn indizierenden Variablen "Zahlwortreihe" und "Quasi-simultan", die intervallskalierte abhängige Variable schließlich ist der Anteil der additiven Grundaufgaben, die ein Kind durch Fakten nutzende Strategien gelöst hat ("Faktennutzung"). Zur Operationalisierung der hier verwendeten Variablen siehe Kap. 9.1.2.

Da die Rechenstrategien für jedes Kind zu drei Testzeitpunkten erhoben wurden, bietet sich zur Prüfung der Signifikanz allfälliger Einflüsse der genannten unabhängigen Variablen auf die Strategien zu einzelnen Zeitpunkten und deren Entwicklung im Laufe des Schuljahres eine *Varianzanalye mit Messwiederholungen* an (vgl. RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 97-101). Diese hat gegenüber der denkbaren Alternative dreier univariater Varianzanalysen mit den abhängigen Variablen "Faktennutzung t1" bzw. "Faktennutzung t2" bzw. "Faktennutzung t3" den Vorteil, dass alle untersuchten Effekte in ihren möglichen Wechselwirkungen in *einem* Modell geprüft werden, während bei getrennter Berechnung mehrerer Modelle die "Gefahr der Alpha-Inflation" (ZÖFEL 2003, S. 99) besteht, also die Gefahr der fälschlichen Entscheidung zugunsten einer Alternativhypothese (vgl. BORTZ 2005, S. 110).

Zudem prüft die Varianzanalyse mit Messwiederholungen zusätzlich auch die Signifikanz der Veränderungen zwischen den Messzeitpunkten (vgl. ZÖFEL 2003, S. 215). Freilich wurden diesbezüglich vor der Untersuchung keine Hypothesen formuliert (vgl. Kap. 5), einfach deshalb, weil sich aus den vorliegenden Untersuchungen keine diesbezüglichen Hypothesen sinnvoll ableiten ließen. Denn grundsätzlich war zwar für *alle* Kinder ein gewisser Zuwachs an Faktennutzung im Laufe des ersten Schuljahres schon deshalb zu erwarten, weil anzunehmen war, dass Faktennutzung zu Beginn des ersten Schuljahres die Ausnahme darstellen würde, im Laufe der schulischen Beschäftigung mit dem Zahlenraum bis zehn aber alle (oder zumindest fast alle Kinder) doch wenigstens die eine oder andere Grundaufgabe automatisieren würden.

Dass aber etwa der *Zuwachs* bei Buben oder Kindern von Eltern mit höherem Bildungsgrad, für die auf Grundlage vorliegender Studien (vgl. Kapitel 2.7 und 2.13.4) ein Vorteil bereits zu Schulbeginn zu erwarten war, *deutlicher* ausfallen würde als bei Mädchen oder Kindern von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad, erschien vor Durchführung der Studie nicht unbedingt wahrscheinlicher als das Gegenteil, da spätestens im zweiten Schulhalbjahr ein "Deckeneffekt" zu erwarten war, das heißt: Gerade bei den (gemessen am Anteil Fakten nutzender Strategien) *besseren* Rechnern schien es möglich, dass sie bereits Mitte des ersten Schuljahres alle oder fast alle Grundaufgaben durch Fakten nutzende Strategien lösen und deshalb im Bereich der gemessenen Leistung gar keine Möglichkeit für eine weitere Verbesserung mehr haben würden. Aus demselben Grund schien es auch nicht zwingend, dass Kinder mit höherem Zahlwissen zu Schulbeginn, von denen auf Grundlage vorliegender Studien (vgl. Kap. 2.12.3) zu vermuten war, dass sie schon zu Schulbeginn einige Aufgaben durch Faktennutzung lösen würden, im weiteren Verlauf des Schuljahres auch einen höheren *Zuwachs* an Faktennutzung haben würden als Kinder mit niedrigerem Zahlwissen und (vermutlich) geringerem Anteil an Faktennutzung zu Schulbeginn. Denn für letztere würde sich wegen ihres deutlich niedrigeren Startniveaus auch jeder kleine absolute Zuwachs in einer deutlichen relativen Verbesserung niederschlagen.

Bezüglich allfälliger Effekte der Faktoren und Kovariaten auf die *Veränderungen zwischen den Messzeitpunkten* ließen sich also *gegenläufige* Annahmen *mit gleicher oder ähnlicher Plausibilität* rechtfertigen; deshalb wurde aber auch auf die Formulierung diesbezüglicher Prüfhypothesen verzichtet. Die gewählte Kovarianzanalyse mit Messwiederholung ermöglicht aber eine *explorative* Prüfung auch dieser Effekte, quasi als Nebenprodukt der Signifikanzprüfung der ersten vier in Kapitel 5 formulierten Prüfhypothesen.

9.1.2 Zur Operationalisierung der Variablen

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf das in Abbildung 16 grafisch dargestellte Untersuchungsmodell. *UV* steht in dieser Abbildung für *Unabhängige Variable, AV* für *Abhängige Variable*.

Die im Modell als *Geschlecht* bezeichnete Variable erfasst, nominal skaliert, die Geschlechtszugehörigkeit des Kindes (Faktor I).

Die als *Bildungsgrad Eltern* bezeichnete Variable ist gleichfalls nominal (quasi-ordinal) skaliert (Faktor II). Im Interesse möglichst ausgewogener Zellenumfänge, einer Voraussetzung für eine möglichst robuste Varianzanalyse (vgl. Kap. 9.1.3), wird der Bildungsgrad der Eltern nur in zwei Stufen skaliert, in der folgenden Weise: Sofern für ein Kind die höchste abgeschlossene Schulbildung beider Elternteile bekannt ist (was für 133 der 139 Kinder zutrifft) und beide Elternteile keine Matura erworben haben, wird der Wert 1 ("Beide Eltern ohne Matura") zugewiesen. Sofern mindestens einer der beiden Elternteile als höchste abgeschlossene Schulbildung mindestens Matura hat, wird der Wert 2 ("Mindestens ein Elternteil mit Matura") zugewiesen. Für jene Kinder, für die nur die höchste abgeschlossene Schulbildung der Mutter bekannt ist, wird gemäß der höchsten abgeschlossenen Schulbildung der Mutter entweder der Wert 1 (Mutter hat keine Matura) oder 2 (Mutter hat Matura) vergeben.

Zahlwortreihe (N) t1 ist metrisch skaliert (Kovariate I) und gibt die Zählzahl an, bis zu der ein Kind im Interview zu Beginn des ersten Schuljahres die Zahlwortreihe vorwärts fehlerfrei aufsagen konnte; dabei wird "einhundertzwölf" als Maximum behandelt (vgl. Kap. 6.1.5.1 und Kap. 8.1.1).

Quasi-simultan (N) t1 ist gleichfalls metrisch skaliert (Kovariate II) und steht für die Anzahl von strukturierten Zahldarstellungen, die ein Kind im Interview zu Beginn des ersten Schuljahres nicht-zählend erfasst hat (Maximum: 4, vgl. Kap. 6.1.5.1 und Kap. 8.1.6).

Die Auswahl gerade dieser beiden letztgenannten Variablen als Messgrößen des zahlbezogenen Wissens zu Schulbeginn erfolgt einerseits aus methodischen Überlegungen. Freilich wurden für den explorativen Teil der Untersuchung auch weitere Komponenten des frühen zahl- und mengenbezogenen Wissens gemessen (vgl. Kap. 6.1.5.1 und 8.1). Der Einbezug weiterer Faktoren (Performanz beim Rückwärtszählen, Anzahlkonstanz, Simultanerfassung) und Kovariaten (Anzahl der simultan bzw. nicht-zählend gezeigten Fingerdarstellungen) in das statistische Untersuchungsmodell hätte aber eine kaum noch überschaubare (und kaum sinnvoll interpretierbare) Vielzahl von Zwei- und Mehrweg-Interaktionen, vor allem aber auch eine Vielzahl von zum Teil nur noch äußerst schwach und überdies äußerst unterschiedlich besetzten Faktorenkombinationen (Zellen) nach sich gezogen, mit entsprechend negativen Auswirkungen auf die "Robustheit des Verfahrens", für die "gleich große Zellenbesetzungen […] sehr wichtig" sind (vgl. RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 88; siehe dazu auch Kap. 9.1.3).

Die Beschränkung auf "Zahlwortreihe (N) t1" und "quasi-simultan (N) t1" als die beiden das Zahlwissen zu Schulbeginn indizierenden Variablen lässt sich freilich auch inhaltlich rechtfertigen: Zum einen ist gemäß der aktuellsten deutschsprachigen Prädiktorstudie, jener von DORNHEIM, das

> *"spezifische Z a h l e n - Vorwissen [..] im Vergleich mit alternativen Prädiktoren, wie dem konzeptuellen Mengenverständnis (Piaget-Aufgaben) oder dem Zahlsymbol-Vorwissen, der Hauptprädiktor der Rechenleistung der 1. und 2. Klasse der Grundschule"* (DORNHEIM 2008, S. 526; Hervorhebung im Original).

Sowohl "Zahlwortreihe (N) t1" als auch "quasi-simultan (N) t1" erfassen nun aber auch tatsächlich das *Zahlen*-Wissen. Zum anderen erfassen sie zumindest zwei der drei "Komponenten" des frühen Zahlen-Wissens, die DORNHEIM in ihrer Studie festhält, nämlich den "Ordinalzahlbegriff mit der Beherrschung der Zahlwortreihe" wie auch "die dritte komplexe Komponente", welche "komplexe Leistungen im Umgang mit Zählzahlen und Anzahlen in Verbindung mit dem Teile-Ganzes Konzept" umfasst (vgl. DORNHEIM 2008, S. 526). Freilich kann die Performanz eines Kindes in der Quasi-Simultanerfassung (wie vermutlich auch in jeder anderen Einzelaufgabe) diese Komponente keinesfalls vollständig erfassen. Sie ist dieser Komponente aber inhaltlich klar zugeordnet und liefert zumindest Hinweise dafür, ob Kinder Anzahlen über den engen Bereich der Simultanerfassung hinaus als gegliederte Ganzheiten zu erfassen imstande sind (vgl. Kap. 8.1.6). Dass sich schließlich mit Bezug auf das von DORNHEIM als "zweite Komponente" verstandene "Anzahl- und Kardinalzahlkonzept" (a.a.O) auf Grundlage der in dieser Untersuchung gewählten Aufgaben zur Überprüfung der "Anzahlkonstanz" keine hinreichend validen Aussagen treffen lassen, wurde bereits einbekannt (vgl. Kap. 8.1.3). Es scheint aber plausibel, dass die Quasi-Simultanerfassung als komplexe Leistung ohnedies zumindest auch Teilaspekte des "Anzahl- und Kardinalzahlkonzeptes" einschließt.

Schließlich zur abhängigen Variablen, die im gewählten Untersuchungsmodell als *Faktennutzung t1*, *Faktennutzung t2* und *Faktennutzung t3* bezeichnet wird. Hier ist der Umstand zu berücksichtigen, dass die Rechenstrategien der Kinder zu den drei Messzeitpunkten mit unterschiedlich vielen und teilweise unterschiedlichen Aufgaben erhoben wurden. Das geschah im Interesse und zum Vorteil der Klärung qualitativer Fragen, denn es hätte weniger Erkenntnisse über die Strategiepräferenzen der Kinder zu Tage gefördert, wären alle Kinder bereits zu Beginn des Schuljahres mit jenen 14 Aufgaben konfrontiert worden, die sich noch am Ende des Schuljahres als "nicht-trivial" erwiesen (vgl. Kap. 8.4.1). Vermutlich wäre der ohnedies hohe Anteil an nicht bearbeiteten Aufgaben zu Beginn des Schuljahres in diesem Fall noch wesentlich höher gewesen (vgl. Kap. 8.2). Umgekehrt wäre es nicht sinnvoll gewesen, sich noch am Ende des Schuljahres auf die wenigen (und zu diesem Zeitpunkt mehrheitlich "trivialen", d.h. von mehr als drei Viertel der Kinder automatisierten; vgl. Kap. 8.3.1) Aufgaben zu beschränken, die bereits den SchulanfängerInnen zumutbar erschienen. Die Anzahl der Aufgaben wurde daher von Interview zu Interview gesteigert, wobei einige Aufgaben freilich durchgehend gefragt wurden, um allfällige Veränderungen in den Strategiepräferenzen nicht nur im Gesamtmix, sondern auch an einzelnen Aufgaben nachvollziehen zu können. Dass aber einige der Aufgaben, die Mitte des Schuljahres noch nicht "trivial" im erläuterten Sinne waren, eben dies bis zum Ende des Schuljahres sein würden, war bei der Planung der Interviews nicht absehbar (die Stichprobenumfänge der Pre-Tests waren zu klein, um diese Unterschiede im relativen Schwierigkeitsgrad einzelner Aufgaben deutlich zu machen).

Für die in Kapitel 8 untersuchten *qualitativen* Fragestellungen ist es also zielführend, die Strategiewahl der Kinder jeweils *im gesamten Bereich* der zu den einzelnen Messzeitpunkten nicht-trivialen Aufgaben zu untersuchen. Für quantitative Vergleiche können aber legitimer Weise nur Aufgaben herangezogen werden, die auch zu allen Messzeitpunkten in gleicher Weise gefragt wurden.

Deshalb werden für die univariate Kovarianzanalyse mit Messwiederholung für die Variable *Faktennutzung t3* jene 14 Aufgaben im Zahlenraum bis zehn zu Grunde gelegt, die auch schon *Mitte* des Schuljahrs gefragt wurden und die sich zu *diesem* Zeitpunkt als nicht-trivial erwiesen (vgl. Kap. 8.4.2.1). Die Lösungsstrategien bei *denselben 14 Aufgaben* liegen auch der Variablen *Faktennutzung t2* zugrunde. Um der Vergleichbarkeit der beiden Messzeitpunkte willen müssen daher aber vier jener 14 Aufgaben, die am *Ende* des ersten Schuljahres nicht-trivial waren und als solche für die Einteilung der "Strategietypen" herangezogen werden (vgl. Kap. 8.5.1), in der Varianzanalyse unberücksichtigt bleiben, weil sie Mitte des Schuljahres noch nicht gefragt wurden. Stattdessen gehen nun in die Variable *Faktennutzung t3* die Lösungsstrategien bei vier Aufgaben ein, die zwar Mitte des Schuljahres noch nicht, am Ende des Schuljahres aber für die Mehrheit der Kinder bereits trivial waren. Die Strategieperformanz am Ende des Schuljahres wird also an zum Teil "leichteren" (d.h. von einer größeren Anzahl von Kindern bereits automatisierten) Aufgaben gemessen, als es im Rahmen der qualitativen Auswertung der Fall war. Das heißt aber auch, dass die in den deskriptiven Statistiken zur Varianzanalyse ausgewiesenen Häufigkeiten von Faktennutzung (vgl. Kap. 9.1.4) die rechnerische Kompetenz der Kinder am Ende des ersten Schuljahres im Durchschnitt höher darstellen, als sie war, und diese weniger adäquat erfassen, als es bei Ermittlung der "Strategietypen" im qualitativen Teil der Studie erfolgt ist (vgl. Kap. 8.5.3).

Eine weitere Schwierigkeit besteht nun freilich darin, dass von diesen 14 Aufgaben nur sechs auch schon zu Beginn des ersten Schuljahres gefragt wurden. Um nun trotz der unterschiedlichen absoluten *Anzahl* der Aufgaben eine Vergleichbarkeit zwischen allen drei Messzeitpunkten herzustellen, werden in der Varianzanalyse nicht die absoluten Anzahlen verrechnet, sondern die jeweiligen *Prozentanteile.* Die Variablen *Faktennutzung t1*, *Faktennutzung t2* und *Faktennutzung t3* geben also jeweils an, wie viel *Prozent* einer als Bezugsnorm vorgegebenen Anzahl von additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn ein Kind zu jedem der drei Messzeitpunkte durch Fakten nutzende Strategien (Faktenabruf oder Ableitung) gelöst hat. Diese Bezugsnorm (100 Prozent) ist für den zweiten und dritten Messzeitpunkt quantitativ und qualitativ dieselbe (jene 14 additiven Grundaufgaben, die sich Mitte des Schuljahres als nicht-trivial erwiesen und die auch am Ende des Schuljahres wieder gefragt wurden). Da nur sechs dieser Aufgaben den Kindern auch schon beim Interview zu Beginn des ersten Schuljahres gestellt wurden, bilden diese sechs Aufgaben die Bezugsnorm für die Ermittlung der als *Faktennutzung t1* verrechneten Variablenwerte.

9.1.3 Prüfung und Bewertung der Modell-Voraussetzungen

RUDOLF und MÜLLER nennen als Voraussetzungen für die Anwendung ein- wie mehrfaktorieller Varianzanalysen zum einen die "Unabhängigkeit der Residuen voneinander", das heißt: Die Abweichungen des Wertes jedes Probanden einer Faktorstufe vom Mittelwert dieser Faktorstufe (Residuen) müssen "unabhängig [sein] von den Abweichungen der anderen Probanden" dieser Faktorstufe (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 79). Diese Voraussetzung ist im vorliegenden Fall durch die Zufallsauswahl der Stichprobe gewährleistet (vgl. a.a.O., S. 80).

Zweitens sollten "die Varianzen der Residuen unter den einzelnen Faktorstufen […] homogen" sein (a.a.O, S. 79). Dies kann durch den Levene-Test (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 213f) überprüft werden, der für das vorliegende Modell das Folgende ergibt (vgl. Tabelle 61):

Tabelle 61: Levene-Test auf Gleichheit der Fehlervarianzen

	F	df1	df2	Signifikanz
Faktennutzung t1	8,282	3	135	,000
Faktennutzung t2	2,503	3	135	,062
Faktennutzung t3	5,985	3	135	,001

Der Levene-Test zeigt für den ersten und dritten Messzeitpunkt jeweils einen höchst signifikanten, für den zweiten einen gerade noch nicht-signifikanten Wert an. Die für die "Robustheit der Varianzanalyse" (vgl. RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 80) geforderte Homogenität der Varianzen darf also für den zweiten Messzeitpunkt, keinesfalls aber für den ersten und dritten Messzeitpunkt angenommen werden (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 214).

Für die im gewählten Modell erfolgte *Ko*varianz-Analyse wird zudem "Homogenität der Varianz-Kovarianz-Matrizen" gefordert (vgl. BORTZ 2005, S. 619), welche durch den Box-Test überprüft wird; ein nicht-signifikantes Ergebnis erlaubt, die Varianz-Kovarianz-Matrizen als homogen anzunehmen. Wie Tabelle 62 zeigt, wird auch diese Voraussetzung im vorliegenden Fall nicht erfüllt.

Tabelle 62: Box-Test auf Gleichheit der Kovarianzenmatrizen

Box-M-Test	53,333
F	2,837
df1	18
df2	46667,111
Signifikanz	,000

Als weitere Voraussetzung für Varianzanalysen wird die "Normalverteilung der Residuen innerhalb der Gruppe" angeführt; diese "entspricht der Voraussetzung der Normalverteilung der abhängigen Variablen unter den einzelnen Faktorstufen" (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 79). Die Prüfung dieser Voraussetzung für das vorliegende Modell mittels Kolmogorov-Smirnow-Test (vgl. a.a.O. S. 80) zeigt, dass die Normalverteilungsvoraussetzung nicht für jeweils beide Stufen der beiden Faktoren und nicht für alle Faktorstufenkombinationen gegeben ist.

Schließlich sind bei "zwei- und mehrfaktoriellen Varianzanalysen […] für die Robustheit des Verfahrens […] gleich große Zellenbesetzungen [sehr wichtig], das heißt die Anzahl der Probanden unter jeder Faktorstufenkombination soll möglichst gleich sein" (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 88), weshalb "in der Phase der Versuchsplanung möglichst gleich große Gruppe vorgesehen werden" sollten (a.a.O., S. 80). Wie Tabelle 63 deutlich macht, ist auch diese Voraussetzung im vorliegenden Fall nicht vollständig erfüllt, was freilich vor Durchführung der Befragungen nicht absehbar war. (Die Tabelle zeigt auch, dass mehr Mädchen als Buben aus Familien stammen, in denen beide Elternteile keine Matura hatten. Gemäß Chi-Quadrat-Test ist diese Häufung aber nicht signifikant.)

Tabelle 63: Zellenumfänge innerhalb des gewählten varianzanalytischen Untersuchungsmodells

Geschlecht	Bildungsgrad der Eltern	Anzahl
Männlich (gesamt: 70)	Beide Elternteile ohne Matura	40
	Mindestens ein Elternteil mit Matura	30
Weiblich (gesamt: 69)	Beide Elternteile ohne Matura	43
	Mindestens ein Elternteil mit Matura	26

Wie sind nun diese Verletzungen von Voraussetzungen zu bewerten? Gemäß ZÖFEL ist "die Varianzanalyse [..] recht robust gegen Abweichungen von der Normalverteilung", "problematischer" ist hingegen "die Verletzung der Varianzenhomogenität. Um ein faktisches Signifikanzniveau von p=0,05 zu erreichen, sollte [bei Verletzung der Varianzenhomogenität; Anm. M.G.] mit p=0,01 getestet werden" (ZÖFEL 2003, S. 217; ähnlich etwa auch RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 80). Als Signifikanzniveau wurde deshalb für die vorliegenden Hypothesenprüfungen $p \leq 0{,}01$ festgelegt. Auf dieselbe Signifikanzschranke wurde auch die Bonferroni-Korrektur (vgl. ZÖFEL 2003, S. 101) herabgesetzt, die SPSS 15.0 für die α-Fehler-Korrektur bei Mehrfachvergleichen innerhalb des Allgemeinen linearen Modells anbietet.

9.1.4 Deskriptive Statistiken

Die von SPSS 15.0 für die einzelnen Faktorstufen und Kombinationen von Faktorstufen ausgewiesenen Mittelwerte (vgl. Tabelle 64) machen deutlich, dass die Buben, als Gesamtheit betrachtet, zu allen drei Zeitpunkten höhere Anteile von Faktennutzung erreichten als die Mädchen. Ebenso durchgehend lösten Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad (als Gesamtheit betrachtet) durchgehend geringere Anteile der als Bezugsgröße gewählten Aufgaben durch Faktennutzung als Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad.

Tabelle 64: Deskriptive Statistiken

	Geschlecht	Bildungsgrad der Eltern	Mittelwert (Prozent)	Standard-abweichung	N
Fakten-nutzung t1	Männlich	Beide Elternteile ohne Matura	14,58	24,51	40
		Mind. ein Elternteil mit Matura	26,67	32,93	30
		Gesamt	19,76	28,84	70
	Weiblich	Beide Elternteile ohne Matura	4,26	12,11	43
		Mind. ein Elternteil mit Matura	11,54	18,72	26
		Gesamt	7,00	15,23	69
	Gesamt	Beide Elternteile ohne Matura	9,24	19,70	83
		Mind. ein Elternteil mit Matura	19,64	28,09	56
		Gesamt	13,43	23,90	139
Fakten-nutzung t2	Männlich	Beide Elternteile ohne Matura	50,71	32,06	40
		Mind. ein Elternteil mit Matura	62,62	29,64	30
		Gesamt	55,82	31,39	70
	Weiblich	Beide Elternteile ohne Matura	31,23	33,47	43
		Mind. ein Elternteil mit Matura	43,68	33,03	26
		Gesamt	35,92	33,61	69
	Gesamt	Beide Elternteile ohne Matura	40,62	34,04	83
		Mind. ein Elternteil mit Matura	53,83	32,40	56
		Gesamt	45,94	33,90	139
Fakten-nutzung t3	Männlich	Beide Elternteile ohne Matura	60,18	28,24	40
		Mind. ein Elternteil mit Matura	78,33	21,83	30
		Gesamt	67,96	27,08	70
	Weiblich	Beide Elternteile ohne Matura	47,34	33,83	43
		Mind. ein Elternteil mit Matura	62,36	35,26	26
		Gesamt	53,00	34,89	69
	Gesamt	Beide Elternteile ohne Matura	53,53	31,74	83
		Mind. ein Elternteil mit Matura	70,92	29,68	56
		Gesamt	60,53	31,98	139

Beim ersten Interview lösten demnach die Buben (als Gesamtheit betrachtet) durchschnittlich 20 Prozent der als Bezugsnorm gewählten Aufgaben durch Faktenabruf, die Mädchen durchschnittlich etwa 7 Prozent. Mitte des Schuljahres waren es durchschnittlich etwa 56 Prozent bei den Buben, durchschnittlich 36 Prozent bei den Mädchen. Und am Ende des ersten Schuljahres wurden von den Buben durchschnittlich 70 Prozent der 14 hier als Maßstab gewählten Aufgaben durch Faktennutzung gelöst, von den Mädchen durchschnittlich 53 Prozent.

Kinder aus Familien, in denen beide Elternteile keine Matura haben (im Folgenden abgekürzt als "Nicht-Matura-Familien" bezeichnet), lösten zu Schulbeginn durchschnittlich etwa 9 Prozent der Aufgaben durch Faktennutzung, gegenüber durchschnittlich 20 Prozent bei Kindern aus Familien, in denen mindestens ein Elternteil als höchsten Schulabschluss mindestens Matura hat (im Folgenden "Matura-Familien"). Die entsprechenden Anteile Mitte des Schuljahres betrugen durchschnittlich etwa 41 bzw. 54 Prozent, am Ende des Schuljahres durchschnittlich etwa 54 Prozent Faktennutzung bei den Kindern aus Nicht-Matura-Familien und 71 Prozent Faktennutzung bei den Kindern aus Matura-Familien.

Betrachtet man die einzelnen Faktorstufenkombinationen, zeigt sich, dass Mädchen aus Nicht-Matura-Familien zu allen drei Messzeitpunkten weniger Aufgaben durch Faktennutzung lösten als Mädchen aus Matura-Familien, ebenso Buben aus Nicht-Matura-Familien durchgehend weniger als Buben aus Matura-Familien. Mädchen aus Matura-Familien lösten aber zum ersten und zweiten Messzeitpunkt auch jeweils weniger Aufgaben durch Faktennutzung als Buben aus Nicht-Matura-Familien und nur beim dritten Messzeitpunkt mehr als diese.

Was nun die *Entwicklung der Mittelwerte* vom ersten bis zum dritten Messzeitpunkt betrifft, zeigt sich in der Gesamtbetrachtung (alle Kinder ungeachtet Geschlechtszugehörigkeit und Bildungsgrad der Eltern) ein Anstieg von durchschnittlich 13 Prozent Faktennutzung zu Schulbeginn auf 50 Prozent Mitte des Schuljahres und durchschnittlich 61 Prozent am Ende des Schuljahres – wohlgemerkt immer auf Grundlage der 14 zum Teil "leichten" Aufgaben, die als durchgehende Bezugsnorm gewählt wurden (vgl. Kap. 9.1.4).

Verfolgt man diese Entwicklung für Buben und Mädchen getrennt, zeigt sich der in Abbildung 17 dargestellte Verlauf. Der Graph macht deutlich, dass die Buben (als Gesamtheit betrachtet) schon zu Schulbeginn mehr Aufgaben durch Faktennutzung lösten als die Mädchen. Weiters zeigt sich, dass die Buben bis Mitte des ersten Schuljahres einen deutlicheren Zuwachs verzeichneten als die Mädchen. Vom zweiten bis zum dritten Messzeitpunkt war der weitere Zuwachs bei den Jungen aber etwas geringer als bei den Mädchen, wobei auch für diese ein im Vergleich zum ersten Schulhalbjahr etwas abgeflachter Zuwachs festzustellen ist.

Abbildung 17: Entwicklung der Mittelwerte (Anteil von Faktennutzung im ZR 10) bei Buben und Mädchen im Laufe des ersten Schuljahres

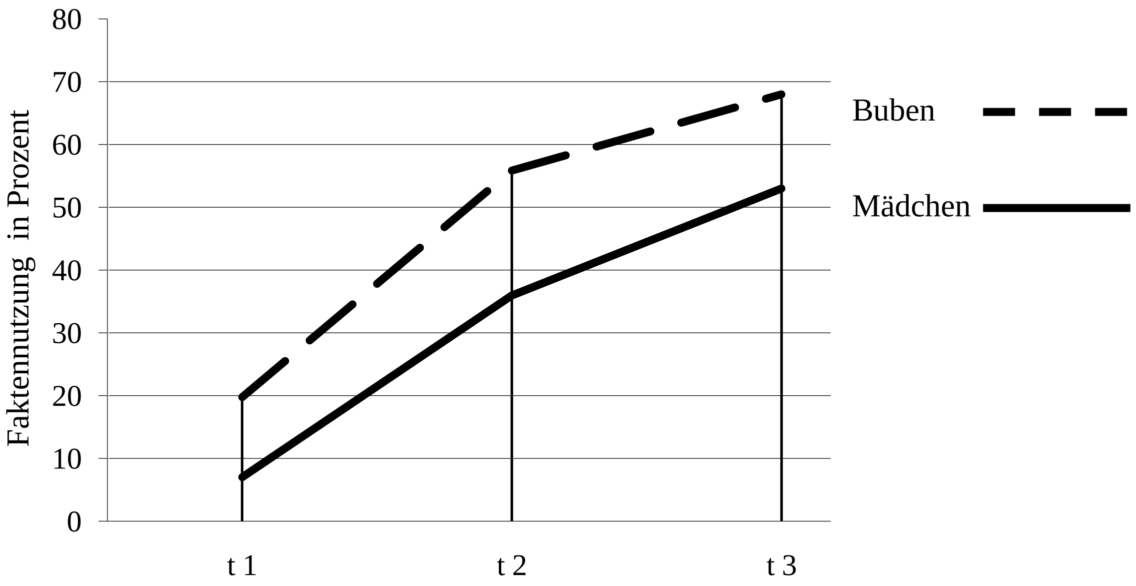


Abbildung 18 stellt die Entwicklung der Mittelwerte für die zwei Stufen des Faktors *Bildungsgrad Eltern* dar. Die Grafik macht deutlich, dass die Kinder aus Matura-Familien schon zu Schulbeginn einen höheren Anteil an Faktennutzung verzeichneten und sowohl vom ersten zum zweiten wie auch vom zweiten zum dritten Messzeitpunkt einen höheren Zuwachs hatten als die Kinder aus Nicht-Matura-Familien. Bei beiden Gruppen war der Zuwachs im zweiten Schulhalbjahr aber geringer als im ersten, bei Kindern aus Nicht-Matura-Familien ist dieser Knick im Graphen deutlicher als bei Kindern aus Matura-Familien.

Abbildung 18: Entwicklung der Mittelwerte (Anteil von Faktennutzung im ZR 10) bei Kinder mit Eltern unterschiedlichen Bildungsgrades im Laufe des ersten Schuljahres

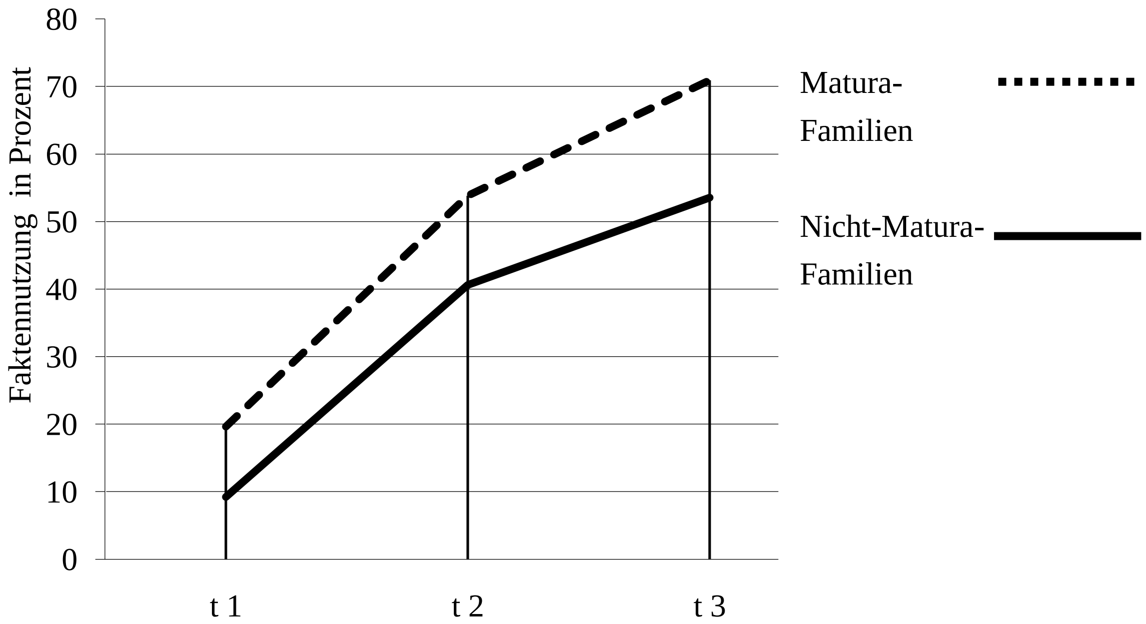
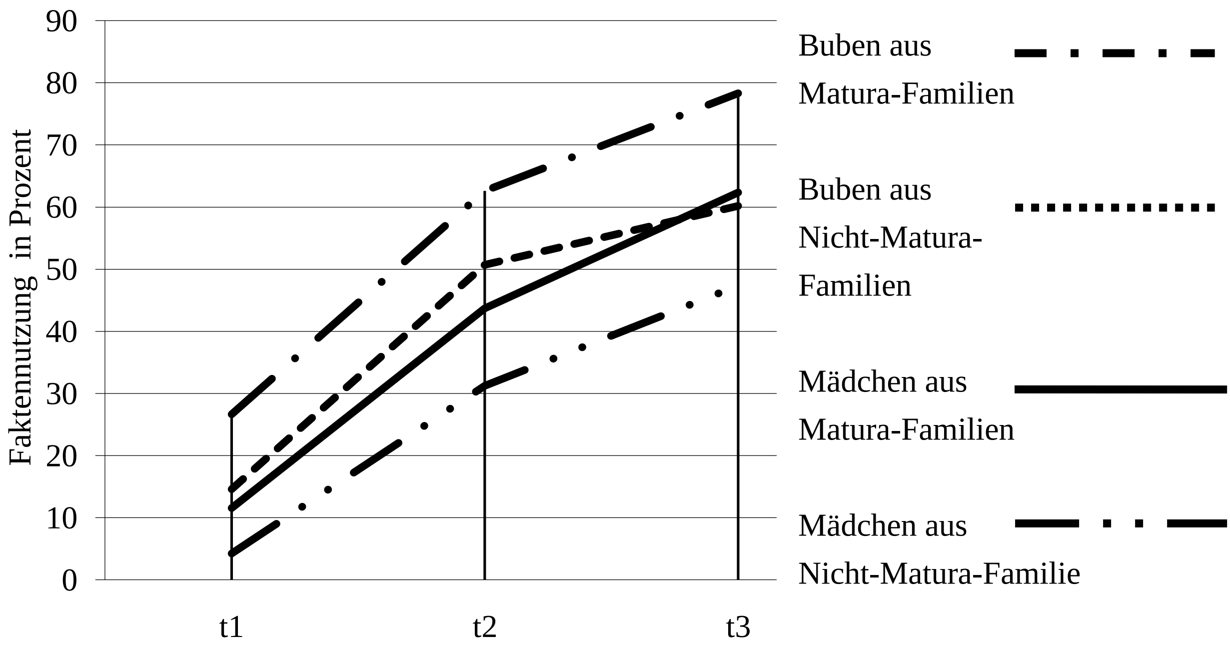


Abbildung 19 veranschaulicht schließlich die unterschiedlichen Verläufe in den vier Gruppen, die sich aus der Kombination der Faktoren Geschlecht und Bildungsgrad ergeben. Zur Interpretation vgl. Kapitel 10.1.2.

Abbildung 19: Entwicklung der Mittelwerte (Anteil von Faktennutzung im ZR 10) in Abhängigkeit vom Geschlecht und dem Bildungsgrad der Eltern im Laufe des ersten Schuljahres



9.1.5 Detail-Ergebnisse der Signifikanzprüfungen

Bei einer Varianzanalyse mit Messwiederholungen wird

> *"bei der Quadratsummenzerlegung zusätzlich zum Vorgehen bei der Varianzanalyse ohne Messwiederholungen eine Aufteilung in Quadratsummenanteile innerhalb der Personen und in Anteile zwischen den Personen unterschieden. Die Quadratsumme zwischen den Personen enthält alle Effekte, in denen Messwiederholungsfaktoren keine Rolle spielen"* (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 101).

Für die Prüfung der in den Hypothesen $H1_1$ bis $H1_4$ postulierten Effekte sind also die von SPSS 15.0 als "Tests der Zwischensubjekteffekte" (vgl. Tabelle 65) ausgewiesenen Berechnungen relevant.

Tabelle 65: Tests der Zwischensubjekteffekte

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat	Beobachtete Schärfe
Konstanter Term	54069,956	1	54069,956	58,446	,000	,305	1,000
QuasiSimultanT1	37057,951	1	37057,951	40,057	,000	,231	1,000
ZahlwortreiheT1	4027,837	1	4027,837	4,354	,039	,032	,303
Geschlecht	6712,467	1	6712,467	7,256	,008	,052	,534
BildungsgradEltern	5242,364	1	5242,364	5,667	,019	,041	,411
Geschlecht * BildungsgradEltern	967,218	1	967,218	1,046	,308	,008	,059
Fehler	123040,864	133	123040,864				

Bezüglich der Faktoren (Geschlecht, Bildungsgrad der Eltern) erfolgt dabei die Signifikanzprüfung in der Weise, dass die einzelnen "Gruppen bezüglich ihrer mittleren Ausprägungen [der abhängigen Variablen] gemittelt über alle Zeitpunkte untersucht werden" (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 101). Die Signifikanzprüfung ergibt *keine* Signifikanz für die Interaktion der beiden Faktoren *Geschlecht* und *Bildungsgrad der Eltern*. Damit ist die bei Mehr-Weg-Varianzanalysen für die Gültigkeit der F-Tests bezüglich der *Haupteffekte* geforderte Voraussetzung erfüllt (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 341).

Diese F-Tests der Haupteffekte zeigen zunächst einen höchst signifikanten Effekt der Kovariaten *QuasiSimultan t1* ($p<0{,}001$). Dass dieser Effekt im Sinne einer *positiven* Korrelation zu verstehen ist, dass also Kinder einen *umso höheren* Anteil an Grundaufgaben durch Faktennutzung lösten, *je mehr* strukturierte Zahldarstellungen sie zu Schulbeginn quasi-simultan erfassten, lässt sich durch bivariate Korrelationen der Kovariaten mit den Variablen *Faktennutzung t1*, *Faktennutzung t2* und *Faktennutzung t3* zeigen. Da alle Variablen zwar metrisch skaliert, aber nicht normalverteilt sind, wird dafür der Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman berechnet (vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 324). Die Signifikanzprüfung erfolgt einseitig, da die Hypothesen eine Erwartung über die Richtung des Zusammenhangs formulieren (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 364; vgl. auch Kap. 9.2). Die hier interessierenden Korrelationen werden in Tabelle 66 ausgewiesen.

Tabelle 66: Rangkorrelationen zur näheren Bestimmung der Art des Einflusses der Variablen QuasiSimultan t1 auf die Variable Faktennutzung

		Faktennutzung t1	Faktennutzung t2	Faktennutzung t3
QuasiSimultan t1	r (Spearman-Rho)	,655	,602	,475
	Sig. (1-seitig)	,000	,000	,000
	N	139	139	139

Die durchgehend positiven Koeffizienten zeigen den *positiven* Zusammenhang der Variablen ("je mehr, desto mehr", vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 509), wobei die Korrelationen von *QuasiSimultan t1* und *Faktennutzung t1* bzw. *QuasiSimultan t1* und *Faktennutzung t2* jeweils als mittlere Korrelation einzustufen sind, die Korrelation von *QuasiSimultan t1* und *Faktennutzung t3* als geringe bis mittlere Korrelation (vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 322).

Bezüglich der in $H1_1$ postulierten Signifikanz des Einflusses der zweiten Kovariaten *Zahlwortreihe t1* wird für das Verwerfen der entsprechenden Nullhypothese eine Irrtumswahrscheinlichkeit von p=0,039 ausgewiesen. Der Effekt wäre demnach als signifikant zu werden, hätte nicht zur Kompensation einiger für eine robuste Kovarianzanalyse fehlender Voraussetzungen das Signifikanzniveau auf p≤0,01 herabgesetzt werden müssen. Der Spalte "Beobachtete Schärfe" (vgl. Tabelle 65) ist aber zu entnehmen, dass die "Power" des statistischen Modells bezüglich eines möglichen Effektes der Variablen *Zahlwortreihe t1* mit 0,303 relativ gering ist. Die "Beobachtete Schärfe" zeigt an, "mit welcher Wahrscheinlichkeit [..] eine Stichprobe der gegebenen Größenordnung einen solchen Effekt [sofern er denn als signifikanter Effekt tatsächlich gegeben wäre; Anm. M.G.] auch entdecken, also nicht die Nullhypothese beibehalten" würde (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 352). Demnach würde im vorliegenden Fall eine Signifikanz der Kovariaten *Zahlwortreihe t1* beim gewählten verschärften Signifikanzniveau von p≤0,01 nur mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 30 Prozent auch tatsächlich entdeckt werden, was bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen sein wird (siehe unten).

Bivariat ergeben sich jedenfalls höchst signifikante Korrelationen von *Zahlwortreihe t1* mit den Einzelvariablen *Faktennutzung t1, Faktennutzung t2* und *Faktennutzung t3*; Tabelle 67 zeigt die ermittelten Korrelationskoeffizienten (Rangkorrelation von intervallskalierten, nicht normalverteilten Variablen nach Spearman, vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 324).

Tabelle 67: Rangkorrelationen zur näheren Bestimmung der Art des Einflusses der Variablen Zahlwortreihe t1 auf die Variable Faktennutzung

		Faktennutzung t1	Faktennutzung t2	Faktennutzung t3
Zahlwortreihe t1	r (Spearman-Rho)	,568	,575	,408
	Sig. (1-seitig)	,000	,000	,000
	N	139	139	139

Die Korrelationskoeffizienten zeigen für den Zusammenhang zwischen *Zahlwortreihe t1* und *Faktennutzung t1* wie auch zwischen *Zahlwortreihe t1* und *Faktennutzung t2* jeweils mittlere Korrelationen an, zwischen *Zahlwortreihe t1* und *Faktennutzung t3* eine geringe Korrelation (vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 322).

Bezüglich der in $H1_3$ postulierten Signifikanz des Effekts des Faktors *Geschlecht* wird in Tabelle 65 eine Irrtumswahrscheinlichkeit von p=0,008 angezeigt; die Nullhypothese kann also auch beim gewählten verschärften Signifikanzniveau verworfen werden. Dass dieser Effekt zugunsten der Buben ausfällt, geht aus den deskriptiven Statistiken hervor (vgl. Kap. 9.1.4).

Bezüglich des in $H1_4$ postulierten Effekt des Faktors *Bildungsgrad der Eltern* wird für das Verwerfen der Nullhypothese eine Irrtumswahrscheinlichkeit von p=0,019 ausgewiesen. Das verschärfte Signifikanzniveau wird also knapp, aber doch verfehlt. Zugleich ist aber die "Power" des Tests bezüglich dieses Faktors mit 0,411 als gering einzustufen. Dies und der Umstand, dass die deskriptive Statistik durchaus einen "Effekt von relevanter Größenordnung" (JANSSEN & LAATZ 2003, S. 352) zugunsten der Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad anzeigt, lassen es "ungerechtfertigt" erscheinen, "den Effekt einfach als unbedeutend aus dem Modell auszuschließen. Man sollte vielmehr durch Erhöhung der Fallzahl die Stärke des Tests erhöhen" (JANSSEN & LAATZ 2003, S. 352) – was freilich im vorliegenden Fall einer Längsschnittstudie mit qualitativen Interviews als Erhebungsmethode mit einem gewaltigen Mehraufwand verbunden wäre.

Betrachtet man schließlich die in Tabelle 65 ausgewiesenen *Effektstärken* der einzelnen abhängigen Variablen (Spalte "Partielles Eta-Quadrat") innerhalb des Gesamtmodells, dann hat die Variable *QuasiSimultan t1* mit η^2=0,231 den höchsten Einzelanteil an der Varianzaufklärung, während *Zahlwortreihe t1*, *Geschlecht* und *Bildungsgrad Eltern* mit einem η^2 von 0,032 bzw. 0,052 bzw. 0,041 deutlich weniger zur Varianzaufklärung beitragen.

Soweit die für die Prüfhypothesen relevanten Ergebnisse. Ehe deren Konsequenzen für die Bewertung der Hypothesen $H1_1$ bis $H1_4$ zusammengefasst werden, soll an dieser Stelle aber zunächst noch explorativ ausgewertet werden, was im gewählten Untersuchungsmodell die "Prüfung aller Effekte, in denen der Messwiederholungsfaktor eine Rolle spielt" (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 101), ergeben hat, also die Signifikanzprüfung bezüglich der in Kap. 9.1.4 deskriptiv dargestellten *Veränderungen* der Mittelwerte für Faktennutzung zwischen den einzelnen Messzeitpunkten.

Zur Prüfung dieser Effekte "bietet SPSS zwei Verfahren an, die sich unter bestimmten Bedingungen in ihrer Güte unterschieden" (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 101). Dies sind einerseits die "multivariate Varianzanalyse der Kontrastvariablen", andererseits ein F-Test, für den "eine Korrektur der Freiheitsgrade erforderlich ist, falls die für den F-Test zusätzlich notwendige Sphärizitätsbedingung verletzt ist […] Diese Vorgehensweise hat unter bestimmten Voraussetzungen eine höhere Teststärke." Wie das höchst signifikante Ergebnis des Mauchly-Tests auf Sphärizität (vgl. Tab. 68) zeigt, wird die Sphärizitätsbedingung im vorliegenden Fall nicht erfüllt, weshalb die nach Greenhouse-Geisser oder Huynh-Feldt korrigierten F-Werte bzw. die diesen entsprechenden Signifikanzen zu verwenden sind.

Tabelle 68: Mauchly-Test auf Sphärizität

Innersubjekteffekt	Mauchly-W	Approximiertes Chi-Quadrat	df	Signifikanz	Epsilon		
					Greenhouse-Geisser	Huynh-Feldt	Untergrenze
Zeit	,758	36,615	2	,000	,805	,844	,500

Im vorliegenden Fall führen bezüglich des Zeitfaktors beide Verfahren zum selben Ergebnis: Es zeigt sich jeweils ein höchst signifikanter Effekt der Zeit mit $p<0{,}001$, sowohl im Pillai-Spur-Test, welcher von den multivariaten Tests den "robusteste[n] Kennwert" liefert, "d.h. die Teststatistik ist vergleichsweise unempfindlich gegenüber Verletzungen der Voraussetzungen" (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 113), wie auch im F-Test unter Berücksichtigung der Greenhouse-Geisser- oder auch Huynh-Feldt-Korrektur.

Bezüglich der Wechselwirkungen liefern die unterschiedlichen Prüfverfahren aber zum Teil unterschiedliche Ergebnisse. Während in den F-Tests der "Innersubjekteffekte" *sämtliche* Wechselwirkungen (Zeit*Zahlwortreihe t1, Zeit*Quasi-Simultan t1, Zeit*Geschlecht und Zeit*Bildungsgrad Eltern wie auch die kombinierte Wechselwirkung Zeit*Geschlecht* Bildungsgrad Eltern) das Signifikanzniveau verfehlen, liefern die Multivariaten Tests für die Wechselwirkung Zeit*Zahlwortreihe einen Wert von 0,005 und für die Wechselwirkung Zeit*BildungsgradEltern von 0,048 (jeweils im Pillai-Spur-Test). Die anderen Wechselwirkungen verfehlen auch in den multivariaten Tests das Signifikanzniveau deutlich. Die Ergebnisse beider Verfahren werden als Anhang 9 und 10 im Detail ausgewiesen.

Der signifikante Wert für den Effekt des Faktors Zeit besagt zunächst nur, dass es "insgesamt [signifikante] Unterschiede zwischen den verschiedenen Messzeitpunkten" gibt (RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 119). Eine Signifikanz einer der Wechselwirkungen würde anzeigen, dass diese Unterschiede "nicht in allen Stufen [der untersuchten Faktoren bzw. Ausprägungen der Kovariaten; Anmerkung M.G.] gleichermaßen auftreten" (a.a.O.). Tatsächlich zeigten sich ja in den deskriptiven Statistiken (vgl. Kapitel 9.1.4) Unterschiede in der Entwicklung von Mädchen und Buben dahingehend, dass für Buben im ersten, für Mädchen im zweiten Halbjahr ein höherer Zuwachs in der Faktennutzung zu verzeichnen war (wobei für beide Geschlechter der Zuwachs im zweiten Halbjahr geringer war als im ersten). Ebenso gab es Unterschiede in der Entwicklung von Kindern mit Eltern unterschiedlichen Bildungsgrades dahingehend, dass bei den Kindern aus Matura-Familien der Zuwachs an Faktennutzung im zweiten Halbjahr weniger deutlich zurückging als bei den Kindern aus Nicht-Matura-Familien.

Der erstgenannte Unterschied in den Entwicklungsverläufen von Buben und Mädchen war aber, so das Ergebnis sowohl der multivariaten Varianzanalyse der Kontrastvariablen als auch der F-Tests, statistisch nicht signifikant. Die sich – allerdings nur in den multivariaten Tests – abzeichnende *Tendenz* zur Signifikanz der Wechselwirkung Zeit*Bildungsgrad (siehe oben) kann vermutlich auf den oben ausgeführten, in Abbildung 18 auch grafisch deutlichen unterschiedlichen Verlauf der Entwicklungslinien der Kinder von Eltern unterschiedlichen Bildungsgrads zurückgeführt werden. Näheres dazu und zur Wechselwirkung Zeit*Zahlwortreihe t1 folgt in Kapitel 10.3 bzw. Kapitel 10.1.

Der insgesamt signifikante Effekt der Zeit wird in den "paarweisen Vergleichen" näher aufgeschlüsselt (vgl. Tabelle 69 und Tabelle 70; letztere wurde um die in SPSS ausgewiesenen Redundanzen bereinigt):

Tabelle 69: Auf den "geschätzten Randmitteln" basierende Mittelwertvergleiche unter Angabe der Konfidenzintervalle bei p ≤ 0,01

Zeit	Mittelwert	Standard-fehler	99 % Konfidenzintervall	
			Untergrenze	Obergrenze
1	13,762	1,491	9,864	17,659
2	46,282	2,211	40,505	52,059
3	61,724	2,342	55,604	67,844

Tabelle 70: Signifikanzprüfung für die auf den geschätzten Randmitteln basierenden Mittelwertvergleiche

(I) Zeit	(J) Zeit	Mittlere Differenz (I-J)	Standardfehler	Signifikanz
1	2	-32,520	2,604	,000
1	3	-47,962	2,688	,000
2	3	-15,442	1,694	,000

Es zeigt sich, dass in der Gesamtbetrachtung sowohl der Zuwachs in der mittleren Faktennutzung zwischen Schulbeginn und Mitte des Schuljahres als auch der Zuwachs von Mitte bis Ende des Schuljahres jeweils statistisch höchst signifikant waren ($p<0,001$).

Dies also die wesentlichen Ergebnisse der durchgeführten Kovarianzanalyse mit Messwiederholung. Die sich daraus mit Bezug auf die Prüfhypothesen H_1 bis H_4 ergebenden Konsequenzen werden im Folgenden kurz zusammengefasst; dafür werden die einzelnen Hypothesen der Übersichtlichkeit halber zunächst noch einmal wiederholt. Die ausführliche Diskussion der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 10.

9.1.6 Zusammenfassung der Prüfergebnisse mit Bezug auf die Hypothesen H_1 bis H_4

1. Hypothese ($H1_1$):
Es wird angenommen, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je besser sie (gemessen an der höchsten beim Aufsagen der Zahlwortreihe vorwärts erreichten Zählzahl) zu Beginn des ersten Schuljahres die Zahlwortreihe vorwärts beherrschen (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

Die Signifikanzprüfung für den Einfluss der Kovariaten *Zahlwortreihe t1* verfehlt im ALM mit $p=0,039$ das verschärfte Signifikanzniveau von $p\leq0,01$. Die Nullhypothese, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres *nicht* einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategie lösen, je besser sie zu Beginn des ersten Schuljahres die Zahlwortreihe beherrschen, kann somit *nicht* verworfen werden. Da aber die Power des Modells bezüglich dieses Effekts mit einer Beobachteten Schärfe von 0,303 niedrig war, andererseits aber bivariate Korrelationen jeweils höchst signifikante positive Korrelationen der Variablen *Zahlwortreihe t1* mit den Variablen *Faktennutzung t1*, *Faktennutzung t2* und *Faktennutzung t3* anzeigen, scheint es auch nicht angeraten, "den Effekt einfach als unbedeutend aus dem Modell auszuschließen" (JANSSEN & LAATZ 2003, S. 352). Es scheint also legitim, gemäß der üblichen Terminologie bei knappem Verfehlen des vorgegebenen Signifikanzniveaus (vgl. REISINGER 2003, S. 279), von einer *Tendenz* zur Signifikanz dieser Kovariaten zu sprechen.

2. Hypothese ($H1_2$):
Es wird angenommen, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr strukturierte Zahldarstellungen sie zu Beginn des ersten Schuljahres quasi-simultan erfassen (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

Die Kovarianzanalyse mit Messwiederholung weist für die Kovariate *Quasi-simultan t1* mit $p \leq 0{,}001$ einen (höchst) signifikanten Einfluss auf die abhängige Variable *Faktennutzung* aus (vgl. Tabelle 65). Die dazu ermittelten Rangkorrelationen dieser Kovariaten mit den Werten von Faktennutzung zu den drei Messzeitpunkten zeigen jeweils *positive* Korrelationen an (vgl. Tabelle 66). Die Nullhypothese, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres *nicht* einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategie lösen, je mehr strukturierte Zahldarstellungen sie zu Beginn des ersten Schuljahres quasi-simultan erfassen, kann somit auch auf dem verschärften Signifikanzniveau von $p \leq 0{,}01$ verworfen, die Alternativhypothese $H1_2$ aufrecht erhalten werden.

3. Hypothese ($H1_3$):
Es wird angenommen, dass Buben im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen als Mädchen (zur Begründung vgl. Kap. 2.7 und Kap. 2.13.4).

Die Varianzanalyse mit Messwiederholung weist für das Verwerfen der Nullhypothese zum Einfluss des Faktors *Geschlecht* auf die abhängige Variable *Faktennutzung* eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $p=0{,}008$ aus. Der auf den geschätzten Randmitteln beruhende

Vergleich der Mittelwerte ergibt eine Differenz der Mittelwerte von Faktennutzung in der Höhe von etwa 8 Prozentpunkten zugunsten der Buben. Die Nullhypothese, dass Buben *nicht* im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategie lösen als Mädchen, kann demnach verworfen werden, die entsprechende Alternativhypothese aufrecht erhalten werden.

4. Hypothese (H1$_4$):
Es wird angenommen, dass Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen als Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad (zur Begründung vgl. Kap. 2.13.4).

Die Varianzanalyse mit Messwiederholung weist für das Verwerfen der Nullhypothese zum Einfluss des Faktors *Bildungsgrad Eltern* auf die abhängige Variable *Faktennutzung* eine Irrtumswahrscheinlichkeit von p=0,019 aus. Der auf den geschätzten Randmitteln beruhende Vergleich der Mittelwerte ergibt eine Differenz der Mittelwerte von Faktennutzung in der Höhe von etwa 8 Prozentpunkten zugunsten der Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad. Die Nullhypothese, dass Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad *nicht* im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen als Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad, kann beim gewählten strengen Signifikanzniveau von p≤0,01 dennoch nicht verworfen werden. Auch hier scheint es aber legitim, zumindest die Tendenz einer Signifikanz des Faktors *Bildungsgrad der Eltern* auf die abhängige Variable *Faktennutzung* anzunehmen (vgl. REISINGER 2003, S. 279), zumal der gewählte Signifikanztest auf Basis der Stichprobengröße eine Beobachtete Schärfe von nur 0,411 aufweist, d.h.: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test einen signifikanten Effekt des Faktors *Bildungsgrad* auch tatsächlich entdecken würde, beträgt nur etwa 41 Prozent (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 352).

9.2 Hypothesen zur Korrelation zwischen Strategiepräferenzen zu Beginn, zur Mitte und am Ende des ersten Schuljahres

Der Übersichtlichkeit halber seien an dieser Stelle zunächst die beiden hier verhandelten Prüfhypothesen aus Kapitel 5.2 wiederholt:

5. Hypothese ($H1_5$):
Es wird angenommen, dass Kinder am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des ersten Schuljahres durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

6. Hypothese ($H1_6$):
Es wird angenommen, dass Kinder am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr nicht-triviale Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben (zur Begründung vgl. Kap. 2.12.3 und Kap. 2.13.4).

Die Prüfung von Korrelationshypothesen erfolgt durch "Signifikanzprüfungen für die Höhe des Korrelationskoeffizienten", der als Maß des Zusammenhangs zweier Variablen in einem vorliegenden Datensatz berechnet wurde (vgl. JANSSEN & LAATZ 2003, S. 363). Die Variablen, um deren Zusammenhang es im vorliegenden Fall geht – *Faktennutzung t1, Faktennutzung t2, Faktennutzung t3* (vgl. Kap. 9.1.2) – sind *nicht* normalverteilt (vgl. Kap. 9.1.3). Als Zusammenhangsmaß ist daher der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient zu wählen, der

> *"auf dem Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten [beruht]. Dieser verlangt aber Intervallskalenniveau der korrelierten Variablen. Der Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient umgeht dieses Problem, indem er anstelle der Werte der Variablen die Rangpätze der Fälle bezüglich dieser Variablen verwendet"* (JANSSEN & LAATZ 2003, S. 242).

Da die Prüfhypothesen eine "Erwartung über die Richtung des Zusammenhangs" (a.a.O., S. 364) formulieren – erwartet wird in beiden Fällen ein *positiver* Koeffizient – wurde die Signifikanz durch einen *einseitigen* Test geprüft (a.a.O., S. 364). Tabelle 71 zeigt die Korrelationskoeffizienten (Spearman-Rho) und die Ergebnisse der Signifikanzprüfung für die hier interessierenden Zusammenhänge, bereinigt um die von SPSS gelieferten Redundanzen.

Tabelle 71: Korrelationskoeffizienten und Ergebnisse der Signifikanzprüfung zu $H1_7$ und $H1_8$

		Faktennutzung t2	Faktennutzung t3
Faktennutzung t1	Korrelationskoeffizient (Spearman-Rho)	,493	,459
	Signifikanz (1-seitig)	,000	,000
	N	139	139
Faktennutzung t2	Korrelationskoeffizient (Spearman-Rho)	1,000	,807
	Signifikanz (1-seitig)	.	,000
	N	139	139

Die Tabelle zeigt, dass zwischen den drei Variablen, die das Ausmaß von Faktennutzung zu den drei Messzeitpunkten wiedergeben, jeweils höchst signifikante, positive Korrelationen bestehen. Nach der üblichen "Einstufung der Korrelationskoeffizienten" (ZÖFEL 2003, S. 151) ist die Korrelation zwischen Faktennutzung t1 und Faktennutzung t3 (auf die $H1_7$ abzielt) mit r_S = 0,459 als noch "geringe Korrelation" zu werten. Die Korrelation zwischen Faktennutzung t2 und Faktennutzung t3, Gegenstand von $H1_8$, ist mit r_S = 0,807 "hoch" (vgl. a.a.O.). Die Korrelation zwischen Faktennutzung t1 und Faktennutzung t2 war nicht Gegenstand einer Prüfhypothese; explorativ sei festgehalten, dass auch diese Korrelation höchst signifikant positiv ausfällt und als geringe bis mittlere Korrelation einzustufen ist.

Die nähere Diskussion dieser Ergebnisse folgt in Kapitel 10; an dieser Stelle sei zusammenfassend festgehalten: Für *beide* oben formulierten Hypothese $H1_5$ und $H1_6$ lässt sich als Ergebnis der Signifikanzprüfung die entsprechende Nullhypothese verwerfen. Die Alternativhypothesen, dass Kinder am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je mehr nicht-triviale Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des ersten Schuljahres ($H1_5$) bzw. zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres ($H1_6$) durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben, können aufrecht erhalten werden.

9.3 Hypothesen zum Zusammenhang der Strategiewahl bei denselben Aufgaben Mitte und Ende des ersten Schuljahres

Der Übersichtlichkeit halber zunächst die beiden hier behandelten Prüfhypothesen wiederholt:

7. Hypothese ($H1_7$):
Es wird angenommen, dass Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf lösen als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Weiterzählen gelöst haben (zur Begründung siehe v.a. Kapitel 2.8, 2.9, 2.10.4, 2.12.2 sowie Kap. 2.13.4).

8. Hypothese ($H1_8$):
Es wird angenommen, dass Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf lösen als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Finger-Teilzählen oder Alleszählen gelöst haben (zur Begründung siehe v.a. Kapitel 2.8, 2.9, 2.10.4, 2.12.2 sowie Kap. 2.13.4).

Zur Prüfung beider Hypothesen wurde eine Kreuztabelle (vgl. Tabelle 72) erstellt. In dieser wird für den Bereich jener zehn nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn, die sowohl

Mitte wie auch am Ende des ersten Schuljahres gerechnet wurden (vgl. Kap. 8.4.1), zusammengefasst, wie oft Kinder eine dieser Aufgaben zur Mitte des ersten Schuljahres mit der einen, am Ende des ersten Schuljahrs mit derselben oder einer anderen der folgenden fünf Strategien gelöst haben: Faktenabruf, Ableitung, nicht-zählender Fingergebrauch, Weiter- bzw. Rückwärtszählen bzw. zählendes Ergänzen und schließlich Finger-Teilzählen/Alleszählen.

Tabelle 72: Kreuztabelle zum Verlauf der Strategiewahl im Bereich der 10 nicht-trivialen Aufgaben, die sowohl Mitte (t2) wie Ende des ersten Schuljahres (t3) gefragt wurden, innerhalb der Gesamtstichprobe der 139 befragten Kindern

			Strategiewahl bei jeweils derselben Aufgabe am Ende des Schuljahres					
			Faktenabruf	Ableitung	Finger, nicht-zählend	Weiter-/Rückwärts-zählen	Finger-teilzählen/Alleszählen	Gesamt
Strategie bei einer der 10 zu beiden Zeitpunkten gefragten nicht-trivialen Aufgaben Mitte des ersten Schuljahres	Fakten-Abruf	Anzahl	368	21	11	24	14	438
		Erwartete Anzahl	213,0	27,8	31,6	59,1	106,5	438
		% von t2	84,0 %	4,8 %	2,5 %	5,5 %	3,2 %	100,0 %
		% von t3	59,4 %	25,9 %	12,0 %	14,0 %	4,5 %	34,4 %
		% der Gesamtzahl	28,9 %	1,6 %	0,9 %	1,9 %	1,1 %	34,4 %
		Standardisierte Residuen	10,6***	-1,3	-3,7***	-4,6***	-9,0***	
	Ab-Leitung	Anzahl	58	17	1	7	0	83
		Erwartete Anzahl	40,4	5,3	6,0	11,2	20,2	83
		% von t2	69,9 %	20,5 %	1,2 %	8,4 %	0,0 %	100,0 %
		% von t3	9,4 %	21,0 %	1,1 %	4,1 %	0,0 %	6,5 %
		% der Gesamtzahl	4,5 %	1,3 %	0,1 %	0,5 %	0,0 %	6,5 %
		Standardisierte Residuen	2,8**	5,1***	-2,0	-1,3	-4,5***	
	Finger, nicht zählend	Anzahl	30	9	25	9	23	96
		Erwartete Anzahl	46,7	6,1	6,9	13,0	23,3	96
		% von t2	31,3 %	9,4 %	26,0 %	9,4 %	24,0 %	100,0 %
		% von t3	4,8 %	11,1 %	27,2 %	5,2 %	7,4 %	7,5 %
		% der Gesamtzahl	2,4 %	0,7 %	2,0 %	0,7 %	1,8 %	7,5 %
		Standardisierte Residuen	-2,4*	1,2	6,9***	-1,1	-0,1	
	Weiter- bzw. Rückwärtszählen	Anzahl	61	12	7	84	15	179
		Erwartete Anzahl	87,0	11,4	12,9	24,1	43,5	179
		% von t2	34,1 %	6,7 %	3,9 %	46,9 %	8,4 %	100,0 %
		% von t3	9,8 %	14,8 %	7,6 %	48,8 %	4,8 %	14,0 %
		% der Gesamtzahl	4,8 %	0,9 %	0,5 %	6,6 %	1,2 %	14,0 %
		Standardisierte Residuen	-2,8**	,2	-1,6	12,2***	-4,3***	
	Fingerteilzählen oder Alles-Zählen	Anzahl	103	22	48	48	258	479
		Erwartete Anzahl	232,9	30,4	34,6	64,6	116,5	479
		% von t2	21,5 %	4,6 %	10,0 %	10,0 %	53,9 %	100,0 %
		% von t3	16,6 %	27,2 %	52,2 %	27,9 %	83,2 %	37,6 %
		% der Gesamtzahl	8,1 %	1,7 %	3,8 %	3,8 %	20,2 %	37,6 %
		Standardisierte Residuen	-8,5***	-1,5	2,3*	-2,1*	13,1***	
	Gesamt	Anzahl	620	81	92	172	310	1275
		% von t2	48,6 %	6,4 %	7,2 %	13,5 %	24,3 %	100,0 %
		% der Gesamtzahl	48,6 %	6,4 %	7,2 %	13,5 %	24,3 %	100,0 %

Finger-Teilzählen und Alleszählen wurden in dieser Kreuztabelle als "sachlogisch ähnliche Kategorien" zusammengefasst, um eine zu schwache Besetzung einzelner Zellen zu vermeiden (vgl. ZÖFEL 2003, S. 185); am Ende des ersten Schuljahres gab es ja nur noch vereinzelte Fälle von reinem Alleszählen, das Finger-Teilzählen ist dieser Strategie aber inhaltlich eng verwandt (vgl. Kap. 2.9.1). Nicht erfasst sind in der Tabelle Wechsel von oder zu einer der restlichen Strategien "Kann ich nicht oder dergleichen" und "Fehlspeicherung oder dergleichen" bzw. alle Fälle, bei denen Mitte und/oder Ende des Schuljahres keine klare Zuordnung zu einer Strategie vorgenommen werden konnte. Von den insgesamt je 1390 Aufgabenbearbeitungen, die Mitte und Ende des ersten Schuljahres im Bereich der 10 zu beiden Terminen gefragten nicht-trivialen Aufgaben stattfanden, sind deshalb in der Kreuztabelle nur 1275 (91,7 Prozent) erfasst.

Wie der Tabelle zu entnehmen ist, wurden im Bereich der zehn zu beiden Zeitpunkten gefragten nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn Mitte des ersten Schuljahres insgesamt 438 Fälle von Faktenabruf verzeichnet. Verfolgt man nun weiter, mit welchen Strategien in diesen Fällen dieselben Aufgaben von den denselben Kindern am Ende des ersten Schuljahres gelöst wurden, so blieb es in 368 Fällen (84 Prozent) beim Faktenabruf. 21-mal (in 4,8 Prozent dieser 438 Fälle) wurde eine Aufgabe, die Mitte des Schuljahres durch Faktenabruf gelöst worden war, am Ende des Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst. 11-mal (in 2,5 Prozent der 438 Fälle) wechselten Kinder bei ein und derselben Aufgabe von Faktenabruf Mitte des Schuljahres zu nicht-zählendem Fingergebrauch am Ende des Schuljahres, 24-mal (in 5,5 Prozent der 438 Fälle) von Faktenabruf zu Weiterzählen bzw. Rückwärtszählen, schließlich 14-mal (in 3,2 Prozent der 438 Fälle) von Faktenabruf zu Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen.

Ableitungsstrategien wurden im Bereich der genannten Aufgaben Mitte des ersten Schuljahres insgesamt 83-mal angewandt. 58-mal (in 69,9 Prozent dieser 83 Fälle) wurde dieselbe Aufgabe vom selben Kind am Ende des ersten Schuljahres durch Faktenabruf gelöst, 17-mal (in 20,5 Prozent der 58 Fälle) erneut durch eine Ableitungsstrategie, 1-mal durch Finger-Teilzählen (1,2 Prozent), 7-mal durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen (8,4 Prozent). In keinem einzigen Fall wechselte ein Kind bei einer dieser Aufgaben vom Anwenden einer Ableitungsstrategie Mitte des Schuljahres zum Fingerteil- bzw. Alleszählen am Ende des Schuljahres.

Nicht-zählender Fingergebrauch wurde im Bereich der genannten Aufgaben Mitte des ersten Schuljahres in insgesamt 96 Fällen verzeichnet. 30-mal wechselte ein Kind bei derselben Aufgabe am Ende des Schuljahres zu Faktenabruf (in 31,3 Prozent der 96 Fälle), 9-mal zu einer Ableitungsstrategie (9,4 Prozent), 25-mal löste es dieselbe Aufgabe erneut durch nicht-zählenden Fingergebrauch (26,0 Prozent), 9-mal durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen, schließlich 23-mal durch Fingerteil- bzw. Alleszählen (24 Prozent).

Weiter- bzw. Rückwärtszählen wurde Mitte des ersten Schuljahres in insgesamt 179 Fällen registriert. 61-mal (in 34,1 Prozent der Fälle) löste ein Kind dieselbe Aufgabe am Ende des Schuljahres durch Faktenabruf, 12-mal durch eine Ableitungsstrategie (6,7 Prozent), 7-mal durch nicht-zählenden Fingergebrauch (3,9 Prozent). In 84 dieser Fälle (46,9 Prozent) wurde dieselbe Aufgabe am Ende des Schuljahres erneut durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen gelöst, und 15-mal (in 8,4 Prozent der 179 Fälle) wechselte ein Kind vom Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen.

Fingerteil- bzw. Alleszählen schließlich wurde als häufigste Einzelstrategie im Bereich der genannten Aufgaben Mitte des ersten Schuljahres 479-mal angewandt. In 103 dieser Fälle (21,5 Prozent) wurde am Ende des ersten Schuljahres für dasselbe Kind bei derselben Aufgabe Faktenabruf registriert, in 22 Fällen (4,6 Prozent) eine Ableitungsstrategie, in 48 Fällen nicht-zählender Fingergebrauch (10,0 Prozent). Ebenfalls 48-mal wechselten Kinder von Fingerteil- bzw. Alleszählen Mitte des Schuljahres zu Weiter- bzw. Rückwärtszählen am Ende des Schuljahres. In 258 Fällen (53,9 Prozent) blieb die Strategie am Ende des Schuljahres unverändert Fingerteil- bzw. Alleszählen.

Der Chi-Quadrat-Test über den in der Kreuztabelle erfassten Gesamtzusammenhang ergibt mit 778,395 bei 16 Freiheitsgraden einen höchst signifikanten Wert ($p \leq 0{,}001$). Dabei wird die Bedingung erfüllt, dass die erwarteten Häufigkeiten in mindestens 80 Prozent der Zellen einen Wert größer als fünf aufweisen (tatsächlich sind es 100 Prozent der Zellen). Es besteht also, nach der qualitativen Auswertung in Kapitel 8 wenig überraschend, ein statistisch bedeutsamer Zusammenhang zwischen den Strategien, mit denen dieselben Kinder dieselben Aufgaben Mitte und Ende des Schuljahres lösten. Der Kontingenzkoeffizient als Maßzahl "für den Grad der 'Assoziation' der beiden in Beziehung gesetzten Variabeln" (vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 250) beträgt 0,616, bei einem für eine 5mal5-Feldertabelle maximalem Kontingenzkoeffizienten von 0,894 ($C_{korr} = 0{,}689$; vgl. ZÖFEL 2003, S. 186). Cramers V als alternatives Assoziationsmaß für nominalskalierte Variablen beträgt 0,391, bei gleichfalls höchster Signifikanz ($p \leq 0{,}001$) (vgl. ZÖFEL 2003, S. 185f.)

Prüft man nun weiters die einzelnen Zellen der Kreuztabelle, dann wird zunächst die hohe Stabilität der Strategiewahl deutlich: In 752 von insgesamt 1275 Fällen (59,9 Prozent) war die Strategie eines Kindes für eine bestimmte Aufgabe Mitte wie Ende des Schuljahres dieselbe. Die standardisierten Residuen (SR) in den einzelnen Zellen weisen dementsprechend für folgende Verläufe (oder vielmehr Kontinuitäten) in der Strategiewahl bei denselben Aufgaben durch dieselben Kinder einen höchst signifikanten Zusammenhang aus ($p \leq 0{,}001$; dafür muss das SR größer oder gleich 3,3 sein; vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 204f):

- von Faktenabruf zu Faktenabruf (SR = 10,6);
- von Ableitung zu Ableitung (SR = 5,1);
- von nicht-zählendem Fingergebrauch zu nicht-zählendem Fingergebrauch (SR = 6,9);
- von Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Weiter- bzw. Rückwärtszählen (SR = 12,2);
- von Finger-Teilzählen/Alleszählen zu Finger-Teilzählen/Alleszählen (SR = 13,1).

Dementsprechend weisen die standardisierten Residuen für die meisten Varianten von Strategie*wechsel* zwischen Mitte und Ende des ersten Schuljahres signifikant negative, oft sogar höchst signifikant negative Werte auf, das heißt: Es geschah signifikant bis höchst signifikant selten, dass ein Kind seine Strategie bei derselben Aufgabe zwischen Mitte und Ende des Schuljahres in einer der folgenden Weisen änderte:

- von Faktenabruf zu nicht-zählendem Fingergebrauch (SR = -3,7, was ein höchst signifikantes Defizit anzeigt, vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 206);
- von Faktenabruf zu Weiter- bzw. Rückwärtszählen (SR = -4,6, ein gleichfalls höchst signifikantes Defizit)
- von Faktenabruf zu Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen (SR = -9,0, höchst signifikant);
- von Ableitung zu nicht-zählendem Fingergebrauch (SR = -2,0, entspricht $p < 0,05$, also signifikant; vgl. a.a.O.);
- von Ableitung zu Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen (SR = -4,5, höchst signifikant);
- von nicht-zählendem Fingergebrauch zu Faktenabruf (SR = -2,4, entspricht $p < 0,01$, also sehr signifikant; vgl. a.a.O.);
- von Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Faktenabruf (SR = -2,8, also sehr signifikant);
- von Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen (SR = -4,3, also höchst signifikant);
- von Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen zu Faktenabruf (SR = -8,5, höchst signifikant);
- von Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen zu Weiter- bzw. Rückwärtszählen (SR = -2,1, signifikant).

Für zwei Varianten des Strategiewechsels weisen die standardisierten Residuen aber auch eine zumindest signifikante *Häufung* auf, das heißt: Es geschah überzufällig oft, dass ein Kind bei einer Aufgabe von der einen Strategie Mitte des ersten Schuljahres zu der anderen Strategie am Ende des ersten Schuljahres wechselte. Dies war der Fall beim Wechsel

- von einer Ableitungsstrategie Mitte des Schuljahres zu Faktenabruf bei derselben Aufgabe am Ende des Schuljahres (SR = 2,8, was eine sehr signifikant Häufung anzeigt);
- von Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen Mitte des Schuljahres zu nicht-zählendem Fingergebrauch bei derselben Aufgabe am Ende des Schuljahres (SR = 2,3, was eine signifikante Häufung anzeigt).

Letztgenannte Häufung steht nicht in Zusammenhang mit einer der Prüfhypothesen. Sie lässt sich wohl damit erklären, dass – wie im Rahmen der qualitativen Auswertung festgehalten wurde – Kinder des Typus "Strategie-Mix mit hohem Anteil von Zählstrategien ohne Ableiten" (vgl. Kap. 8.5.3.6) im zweiten Schulhalbjahr ihren Anteil an Zählstrategien auffällig oft zugunsten von nicht-zählendem Fingergebrauch reduzierten.

Die Hypothesen $H1_7$ und $H1_8$ postulieren nun, dass Kinder bei einer Aufgabe signifikant öfter vom Anwenden einer Ableitungsstrategie Mitte des Schuljahres zu Faktenabruf am Ende des Schuljahres wechseln als von Weiter- bzw. Rückwärtszählen ($H1_7$) wie auch von Fingerteil- bzw. Alleszählen ($H1_8$) Mitte des Schuljahres zu Faktenabruf am Ende des Schuljahres. Der Vergleich der standardisierten Residuen zeigt bereits an, dass die entsprechenden Nullhypothesen nicht haltbar sind: Während für den Wechsel von Ableitung zu Faktenabruf eine sehr signifikante Häufung ausgewiesen wird, ergibt sich für den Wechsel von Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Faktenabruf ein sehr signifikantes Defizit, von Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen zu Faktenabruf ein höchst signifikantes Defizit.

Für eine weitere Absicherung der Prüfhypothesen wurde der exakte Test nach Fisher eingesetzt (vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 203). Dafür wurde jeweils paarweise verglichen, in welcher relativen Häufigkeit die in $H1_7$ und $H1_8$ verglichenen Strategiewechsel stattgefunden haben. Explorativ wurde dabei auch der Wechsel von nicht-zählendem Fingergebrauch zu Faktenabruf mit überprüft. Tabelle 73 zeigt zunächst die verglichenen Häufigkeiten noch einmal im Überblick.

Tabelle 73: Häufigkeiten von Strategiewechseln in Abhängigkeit von der zu t2 angewandten Strategie

Strategie	Fälle der Anwendung zu t2	Davon Wechsel zu Faktenabruf bei derselben Aufgabe von denselben Kindern zu t3	
		Anzahl	Prozentsatz aller Anwendungen zu t2
Ableitung	83	58	69,9 %
Nicht-zählender Fingergebrauch	96	30	31,3 %
Weiter- bzw. Rückwärtszählen	179	61	34,1 %
Fingerteil- bzw. Alleszählen	479	103	21,5 %

In Tabelle 74 sind die mittels Fisher-Test ermittelten Irrtumswahrscheinlichkeiten mit Bezug auf die Häufigkeitsunterschiede zwischen den einzelnen Strategiewechseln festgehalten.

Tabelle 74: Häufigkeiten von Strategiewechseln in Abhängigkeit von der zu t2 angewandten Strategie

Verglichen werden die Häufigkeiten von…	Fisher-p-1-seitig
…Wechsel von Ableitung zu Faktenabruf gegenüber Wechsel von nicht-zählendem Fingergebrauch zu Faktenabruf	$2{,}0504 \cdot 10^{-7}$
…Wechsel von Ableitung zu Faktenabruf gegenüber Wechsel von Weiter-/Rückwärtszählen zu Faktenabruf	$5{,}29297 \cdot 10^{-8}$
…Wechsel von Ableitung zu Faktenabruf gegenüber Wechsel von Fingerteil-/Alleszählen zu Faktenabruf	$1{,}81668 \cdot 10^{-17}$
…Wechsel von nicht-zählendem Fingerbrauch zu Faktenabruf gegenüber Wechsel von Weiter-/Rückwärtszählen zu Faktenabruf	0,36827
…Wechsel von nicht-zählendem Fingerbrauch zu Faktenabruf gegenüber Wechsel von Fingerteil-/Alleszählen zu Faktenabruf	0,028821
…Wechsel von Weiter-/Rückwärtszählen zu Faktenabruf gegenüber Wechsel von Fingerteil-/Alleszählen zu Faktenabruf	0,000788399

Auch im Fisher-Test (gerechnet mithilfe der Statistik-Software GStat 1.5, STRUNK 2009) zeigt sich also, dass der Wechsel von Ableitung zu Faktenabruf höchst signifikant öfter stattfand als *von jeder der drei anderen Strategien* zu Faktenabruf (p ist jeweils deutlich kleiner als 0,001).

Bei den anderen paarweisen Vergleichen ergibt eine unabhängig von $H1_7$ und $H1_8$ mittels Fisher-Test durchgeführte explorative Signifikanzprüfung, dass der Wechsel von nicht-zählendem Fingergebrauch zu Faktenabruf *nicht* signifikant seltener war als von Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Faktenabruf, aber *signifikant häufiger* als der Wechsel von Fingerteil- bzw. Alleszählen zu Faktenabruf, und der Wechsel von Weiter- bzw. Rückwärtszählen zu Faktenabruf *höchst signifikant häufiger* als der von Fingerteil- bzw. Alleszählen zu Faktenabruf.

Die zu $H1_7$ und $H1_8$ komplementären Nullhypothesen können also verworfen werden. Die Alternativhypothesen, dass Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf lösen als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen ($H1_7$) oder durch Fingerteil- bzw. Alleszählen ($H1_8$) gelöst haben, bleibt aufrecht.

10 Diskussion und Ausblick

In Kapitel 9 wurde versucht, "die Befunde vollständig [zu berichten] und objektiv [zu interpretieren]" und damit der Forderung Genüge zu tun, die BORTZ und DÖRING an den "Ergebnisteil" einer wissenschaftlichen Arbeit stellen (vgl. BORTZ & DÖRING 2005, S. 94). In diesem Kapitel soll nun, wie es BORTZ und DÖRING dem "Diskussionsteil" zugestehen, die "Gelegenheit" genutzt werden, "die Ergebnisse aus persönlicher Sicht zu kommentieren" (a.a.O.). Dabei stehen die Konsequenzen im Vordergrund, die aus den Ergebnissen der Studie (aus den Signifikanzprüfungen, aber auch aus den Ergebnissen des qualitativen Teils) für die Gestaltung des Mathematikunterrichts im ersten Schuljahr und für die mathematische Frühförderung im Kindergarten gezogen werden können. Dass dabei Fragen der Aus- und Weiterbildung von KindergartenpädagogInnen und VolksschullehrerInnen mitdiskutiert werden, liegt in der Natur der Sache.

Die Ergebnisse werden in der durch die Hypothesenblöcke vorgegebenen Reihenfolge diskutiert, also zunächst jene zum Einfluss des frühen Zahlwissens (Kap. 10.1), dann jene zu den Einflüssen der Geschlechtszugehörigkeit (Kap. 10.2), des Bildungsgrads der Eltern (Kap. 10.3), des Zeitfaktors (Kap. 10.4) und schließlich des Anwendens von Ableitungsstrategien (Kap. 10.5). Dabei wird jeweils auch auf die bereits in Kapitel 8.5.5 diskutierten Ergebnisse des qualitativen Teils dieser Studie Bezug genommen. Im abschließenden "Ausblick" (Kap. 10.6) wird das "Plädoyer", mit dem der empirisch-qualitative Teil dieser Arbeit beendet wurde (vgl. Kap. 8.5.5), vor dem Hintergrund der quantitativen Ergebnisse überprüft und erweitert.

10.1 Zum Einfluss des frühen Zahlwissens auf die Strategieentwicklung

Die in Kapitel 9.1 dokumentierte Kovarianzanalyse erlaubt die Aufrechterhaltung der Hypothese $H1_2$ und, zumindest der Tendenz nach, auch der Hypothese $H1_1$, die einen signifikanten Einfluss zweier Komponenten des zu Schulbeginn vorhandenen Zahlwissen auf die Entwicklung der additiven Rechenstrategien im Laufe des gesamten ersten Schuljahres postulieren. Die nähere Bestimmung dieses Einflusses durch Ermittlung der Korrelationskoeffizienten ermöglicht es, wenig überraschend, den Einfluss dieser beiden Kovariaten als *positive* Korrelation zu benennen, d.h.: Kinder, die zu Schulbeginn ein *höheres* Zahlwissen aufweisen, lösen in der Regel im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres *mehr* nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien als Kinder mit zu Schulbeginn niedrigerem Zahlwissen.

Im statistischen Prüfmodell wurden nur zwei Komponenten des frühen Zahlwissens berücksichtigt (zur Begründung vgl. Kap. 9.1.2): die Performanz beim Aufsagen der Zahlwortreihe vorwärts, im Folgenden der Einfachheit halber (wenn auch begrifflich unsauber) "Vorwärtszählen" genannt, und die Performanz im quasi-simultanen Erfassen der Anzahl von Punkten in strukturierten Punkt-Darstellungen der Zahlen von sechs bis neun (im Folgenden "Quasi-Simultanerfassung" genannt). Es soll keinesfalls behauptet sein, dass das frühe Zahlwissen damit vollständig erfasst wurde. Es ging dieser Untersuchung aber auch nicht darum, das relative Gewicht verschiedener "Prädiktoren" in einem statistischen Modell zur "Vorhersage der Rechenleistung" (vgl. DORNHEIM 2008, S. 526) möglichst exakt und vollständig zu bestimmen – schon deshalb nicht, weil der pädagogische Ertrag solcher Exaktheit nicht ersichtlich ist (vgl. dazu die kritischen Anmerkungen zum pädagogischen Nutzen von Prädiktormodellen in Abschnitt 2.12.3 wie auch das Folgende). Es sollte lediglich überprüft werden, ob das frühe Zahlwissen nicht nur – wie in jüngster Zeit mehrfach ausgewiesen (vgl. DORNHEIM 2008, WEIßHAUPT, PEUCKER & WIRTZ 2006, KRAJEWSKI 2003, sowie Kap. 2.12.3) – ein maßgeblicher Prädiktor der über standardisierte Tests *quantifizierten globalen* "Rechenleistung" ist, sondern ob sich auch statistisch signifikante Zusammenhänge der *Qualität* des Rechnens mit dem frühen Zahlwissen nachweisen lassen. Das ist der Fall, wobei der Einfluss der Quasi-Simultanerfassung durch die vorliegende Untersuchung statistisch besser abgesichert ist als jener des Vorwärtszählens.

Die pädagogisch-fachdiaktische Relevanz dieses Befundes liegt zum Einen darin, dass die vorliegende Studie dadurch besser zu verstehen erlaubt, *in welcher Weise* das frühe Zahlwissen als "Prädiktor der Rechenleistung" wirksam wird, oder – bescheidener und angemessener formuliert: Die vorliegende Studie scheint eine gewisse empirische Unterstützung zu liefern für jene Positionen innerhalb der Fachdidaktik der Grundschulmathematik, die der frühen Überwindung zählender Rechenstrategien eine entscheidende Bedeutung für die gesamte weitere arithmetische Entwicklung eines Kindes zusprechen (vgl. Kapitel 3 und 4).

Die Studie zeigt nämlich, dass jene Kinder, die zu Schulbeginn über ein *höheres Zahlwissen* verfügen, auch eher in der Lage sind, das *zählende Rechnen* schon im Laufe des ersten Schuljahres mehr und mehr zugunsten Fakten nutzender Strategien *hinter sich zu lassen* (was aus den vorliegenden entwicklungspsychologischen Studien *in dieser Spezifität* nicht hervorgeht). Dass sich nun aber das zu Schulbeginn höhere Zahlwissen in den genannten entwicklungspsychologischen Studien auch als "Prädiktor" der globalen Mathematikleistung zumindest bis zum Ende des ersten Schuljahres erweist, kann vor diesem Hintergrund zumindest zu einem guten Teil gerade auch als *Folge* dieser auf Basis eines höheren Zahlwissens *früher und umfassender erfolgenden Überwindung von Zählstrategien* interpretiert werden. Wie aber diese Überwindung von Zählstrategien wiederum die weitere arithmetische Entwicklung günstig beeinflusst, wurde in Kapitel 3 umfassend dargestellt: Während zählendes Rechnen das Erkennen struktureller Zusammenhänge erschwert, erleichtert umgekehrt das Nutzen von Zahlenfakten das Erkennen jener "Muster", die der eigentliche Inhalt der Mathematik sind (vgl. DEVLIN 2002 und Kap. 3.2.2). Es ist plausibel, dass dadurch auch die Erfolgsaussichten in jenen standardisierten Tests günstig beeinflusst werden, an denen "Mathematikleistung" in Prädiktorstudien gemessen wird, selbst wenn diese Tests zu einem Gutteil nicht so sehr die eigentliche *mathematische* Kompetenz eines Kindes, sondern seine Rechen*fertigkeiten* unter *zeitlichem Druck über*prüfen (vgl. MOSER OPITZ 2007, S. 27f). Aber natürlich können auch solche Tests von Kindern, die Fakten nutzen, besser bewältigt werden als von zählend rechnenden.

Der statistische Befund, dass Kinder mit niedrigerem Zahlwissen zu Schulbeginn eher Gefahr laufen, am zählenden Rechnen hängen zu bleiben, ist freilich selbst einer genaueren Erklärung bedürftig. Erklärungsversuche sollten differenzieren zwischen den beiden Komponenten des frühen Zahlwissens, deren Einflüsse in dieser Studie geprüft wurden.

Da ist zum einen die *Performanz in der Quasi-Simultanerfassung zu Beginn des ersten Schuljahres.* Dass diese mit der Häufigkeit, mit der ein Kind im weiteren Verlauf des ersten Schuljahres Aufgaben durch Faktennutzung löst, signifikant positiv korreliert, ist vor dem Hintergrund der in Kapitel 2.10 und Kapitel 4.1 gelieferten fachdidaktischen Analysen wenig überraschend: In der Quasi-Simultanerfassung etwa der Acht als Vier und Vier manifestiert sich ja bereits ein (wenn auch vielleicht noch kontextgebundenes) Wissen davon, dass Acht ein Ganzes ist, das aus den Teilen Vier und Vier zusammengesetzt wird. Die qualitative Auswertung hat dann ja auch gezeigt, dass Kinder, die acht Punkte zu Beginn des ersten Schuljahres als Doppel-Vier erkennen, in der Regel auch 4+4 schon zu diesem Zeitpunkt durch Faktenabruf lösen (vgl. Kap. 8.2.3.4). Und auch wenn das Ableiten einzelner Subtraktionen auf Basis von "think addition" offenbar nicht ohne weiteres schon als Ausweis eines soliden Teile-Ganze-Verständnisses auf der Ebene der "mathematics of numbers" gewertet werden darf (vgl. Kap. 8.4.3.3), so ist doch umgekehrt klar, dass Kinder *mit* einem (sich vielleicht erst noch entwickelnden, aber in der Quasi-Simultanerfassung doch bereits angebahnten) Teile-Ganzes-Verständnis gute Voraussetzungen haben, um aus zunächst nur einzelnen auswendig gemerkten Zahlenfakten weitere Aufgaben abzuleiten.

Bei all dem ist zu beachten, dass Einsicht in die Teile-Ganzes-Struktur von Zahlen und damit zusammenhängende operative Einsichten kein "all-or-nothing-phenomenon" (BAROODY 1999, vgl. Kap. 2.8.3) sind. Die qualitative Auswertung der Interviews in Kapitel 8 liefert eine Fülle von Beispielen dafür, wie Kinder Einsicht an der einen Stelle mit Nicht-Einsicht oder zumindest Nicht-Anwendung an der anderen Stelle kombinieren. Schon deshalb führt auch kein *vorbestimmter*, durch nichts zu erschütternder Weg von ersten (kontextgebundenen) Einsichten in die Teile-Ganzes-Struktur von Zahlen, wie sie sich (unter anderem) in der Quasi-Simultanerfassung strukturierter Zahldarstellungen äußern, zum Fakten nutzenden, nicht-zählenden Lösen sämtlicher additiver Grundaufgaben. Dass aber Kinder, die solche Einsichten schon früh zeigen, im Vergleich zu Kindern, die dies nicht tun, in weiterer Folge auch *bessere Voraussetzungen* für das Entdecken nicht-zählender Rechenstrategien haben und sich dies *statistisch* in *gehäuft erfolgreicheren Lernbiografien* dieser Kinder niederschlägt, liegt in der Logik der Sache – jedenfalls dann, wenn es auf der anderen Seite nicht gelingt (oder gar nicht versucht wird), die Kinder mit *schlechteren* Voraussetzungen gezielt zu unterstützen. Dazu mehr weiter unten.

Wie ist nun das zweite Teilergebnis zu bewerten, also der zumindest als *tendenziell signifikant* ermittelte Effekt der Performanz im Vorwärtszählen zu Schulbeginn? Der Befund scheint bei oberflächlicher Betrachtung zu bestätigen, dass "je sicherer die Zahlwortreihe beherrscht wird […], desto leichter [..] das zählende Rechnen und die Ablösung von zählenden Strategien des Rechnens" falle (RADATZ u.a. 1996, S. 55; vgl. Kap. 7.3.2). Oberflächlich ist diese Betrachtung schon deshalb, weil der Nachweis einer *statistischen Signifikanz* (die hier auch nur als Tendenz abgesichert wurde) für sich genommen nicht die Richtigkeit einer *Erklärung* beweisen kann. Es ist umgekehrt die Aufgabe einer wissenschaftlichen Theorie, zu erklären, warum bestimmte Phänomene in der Wirklichkeit mit statistisch signifikanter Häufung auftreten. Der statistische Zusammenhang von früher Quasi-Simultanerfassung und später häufigerem nicht-zählendem Rechnen lässt sich, siehe die obigen Ausführungen, auf Basis vorliegender fachdidaktischer Theorien zur Entwicklung von Rechenstrategien in sich stimmig erklären. *Auf dieser Basis* liefert die Prüfstatistik eine empirische Absicherung dieser Erklärung in dem Sinne, dass mit der Ablehnung der Nullhypothese der gezielte Versuch einer Falsifikation gescheitert ist – mehr nicht, aber auch nicht weniger.

Wie aber durch das "sichere Beherrschen der Zahlwortreihe" die "Ablösung von zählenden Strategien des Rechnens" erleichtert werden soll, können RADATZ u.a. (wie auch andere, die dies vertreten) nicht widerspruchsfrei erklären; so jedenfalls das Ergebnis der in Kapitel 7.3.2 geleisteten Kritik an dieser Position. Aber natürlich ist es für den Kritiker umgekehrt erklärungsbedürftig, dass in der Kovarianzanalyse ein zumindest tendenziell signifikanter Effekt der Performanz im Vorwärtszählen zu Schulbeginn auf die Häufigkeit von Faktennutzung im ersten Schuljahr deutlich wird.

Ein statistischer Zusammenhang belegt aber nun einmal nicht den kausalen Zusammenhang zweier Merkmale, sondern nur deren gehäuftes gemeinsames Auftreten. Dieses mag seine Erklärung vielleicht in einem dritten oder in weiteren Merkmalen haben. Im vorliegenden Fall kann vermutet werden, dass jene Kinder, die zu Schulbeginn eine bessere Performanz im

Vorwärtszählen zeigen, sich *in der Regel* bereits im Kindergartenalter intensiver mit Zahlen beschäftigt haben (vgl. Kapitel 8.2.3.4). *In der Regel* werden sie dabei aber, ob mit oder ohne gezielte Unterstützung, auch über das Beherrschen der Zahlwortreihe hinaus wichtige numerische Entdeckungen gemacht haben, die ihnen in weiterer Folge den Einstieg in die Schulmathematik vermutlich erleichtern haben. In Kapitel 8.2.3.4 wurde darauf hingewiesen, dass die Kinder mit guter Performanz beim Vorwärts- und Rückwärtszählen zu Schulbeginn *in der Regel* auch bereits mehr Zahlenfakten gespeichert hatten als Kinder, die zu Schulbeginn die Zahlwortreihe noch nicht so gut beherrschten. Mehr Zahlenfakten heißt aber auch: Mehr Möglichkeiten für Anknüpfungspunkte beim weiteren Rechnen im Zahlenraum bis zehn. Umgekehrt haben die Kinder, die bereits zu Schulbeginn Ableitungsstrategien anwandten, *in der Regel* auch bereits überdurchschnittlich viele Aufgaben durch Faktenabruf gelöst (vgl. Kap. 8.2.3.2). Wenig überraschend besteht auch eine signifikant positive Korrelation zwischen der Performanz im Vorwärtszählen und der Performanz in der Quasi-Simultanerfassung ($r_S = 0{,}656$, $p \leq 0{,}001$), wie überhaupt alle zu Schulbeginn erhobenen Leistungen im Umgang mit Zahlen (vgl. Kapitel 8.1) signifikant positiv miteinander korrelieren.

Ein Teil der gesuchten Erklärung könnte also lauten: Die Performanz im Vorwärtszählen zu Schulbeginn korreliert vermutlich deshalb mit der Häufigkeit von Faktennutzung, weil *in der Regel* jene Kinder, die zu Schulbeginn ein erhöhtes *prozedurales* Wissen (Zahlwortreihe) zeigen, auch über ein erhöhtes *konzeptuelles* Wissen (zumindest Ansätze von Einsichten in Zahlstrukturen und operative Zusammenhänge) verfügen. Letzteres (und nicht eigentlich die höhere Performanz im Vorwärtszählen) verbessert vermutlich in weiterer Folge die Chancen dieser Kinder, mehr und mehr Aufgaben nicht-zählend zu lösen.

Nur ein *Teil* der Erklärung ist dies deshalb, weil sich prozedurales und konzeptuelles Wissen nicht so fein säuberlich trennen lassen und sich überdies in einem "iterativen Prozess" von Wechselwirkungen weiter entwickeln (vgl. RITTLE-JOHNSON, SIEGLER & WAGNER ALIBALI 2001, S. 346, und Kapitel 2.3.2). Konkret mit Bezug zum Vorwärtszählen ausgeführt, heißt das: Die Kenntnis der *Zahlwortreihe* mag dem *prozeduralen* Wissen zugeordnet werden. Aber Kinder lernen *in der Regel* nicht einfach eine *Reihe von Worten* auswendig, sondern verwenden diese (unter Einhaltung von Zählprinzipien; vgl. Kap. 2.10.1) zum Ermitteln von *Anzahlen*. Schon die elementaren Prinzipien der Kardinalität und Anzahlkonstanz (vgl. Kap. 2.10.1), die sie *dabei* entdecken *können* (und *in der Regel* auch bald entdecken), sind klar dem *konzeptuellen* Wissen zuzurechnen. Wenn sie in weiterer Folge in Anzahlen, die für sie zunächst unüberschaubar sind und die sie daher zählend bestimmen müssen, *Strukturen* entdecken, welche sie ihrerseits zur Quasi-Simultanerfassung strukturierter Mengen verwenden, dann ist ihr konzeptuelles Wissen erneut entscheidend gewachsen. Kinder *können* ihre Zählkompetenzen also dafür nutzen, sich konzeptuelles Wissen über Zahlen anzueignen, welches ihnen in weiterer Folge ermöglicht, auch ohne Zählen mit (An-) Zahlen umzugehen.

Das gilt auch direkt für den Erwerb von Rechenstrategien: GRAY sieht ja speziell im weiterzählenden Rechnen die *Möglichkeit* für die Entwicklung eines "Prozepts". Und natürlich ist es *möglich*, dass ein Kind eine Addition zunächst weiterzählend löst, dann "Aufgabe" und "Ergebnis" noch einmal *reflektiert* und als Aussage über einen festen Zusammenhang dreier Zahlen versteht und speichert (vgl. GRAY 2003, S. 69 und Kap. 2.9.3). Wie in dieser Arbeit wiederholt angemerkt, spricht zwar manches dagegen, dass diese Möglichkeit auch Wirklichkeit wird: Zum einen die Tatsache, dass das zählende Rechnen die Aufmerksamkeit des Kindes in hohem Maße eben auf die *Prozedur* bündelt (wie GRAY selbst festhält), vor allem aber auch ein Unterricht, der von den Kindern zwar immerzu *Rechenergebnisse* einfordert (möglichst viele richtige in möglichst kurzer Zeit), sie aber nicht dazu einlädt und ihnen wenig Gelegenheit dafür gibt, über diese Ergebnisse, über deren Zusammenhang mit den "Ausgangszahlen" wie über Zusammenhänge mit anderen Aufgaben, schließlich über vorteilhafte Strategien zur Bewältigung dieser Aufgaben in Ruhe nachzudenken und sich darüber auszutauschen.

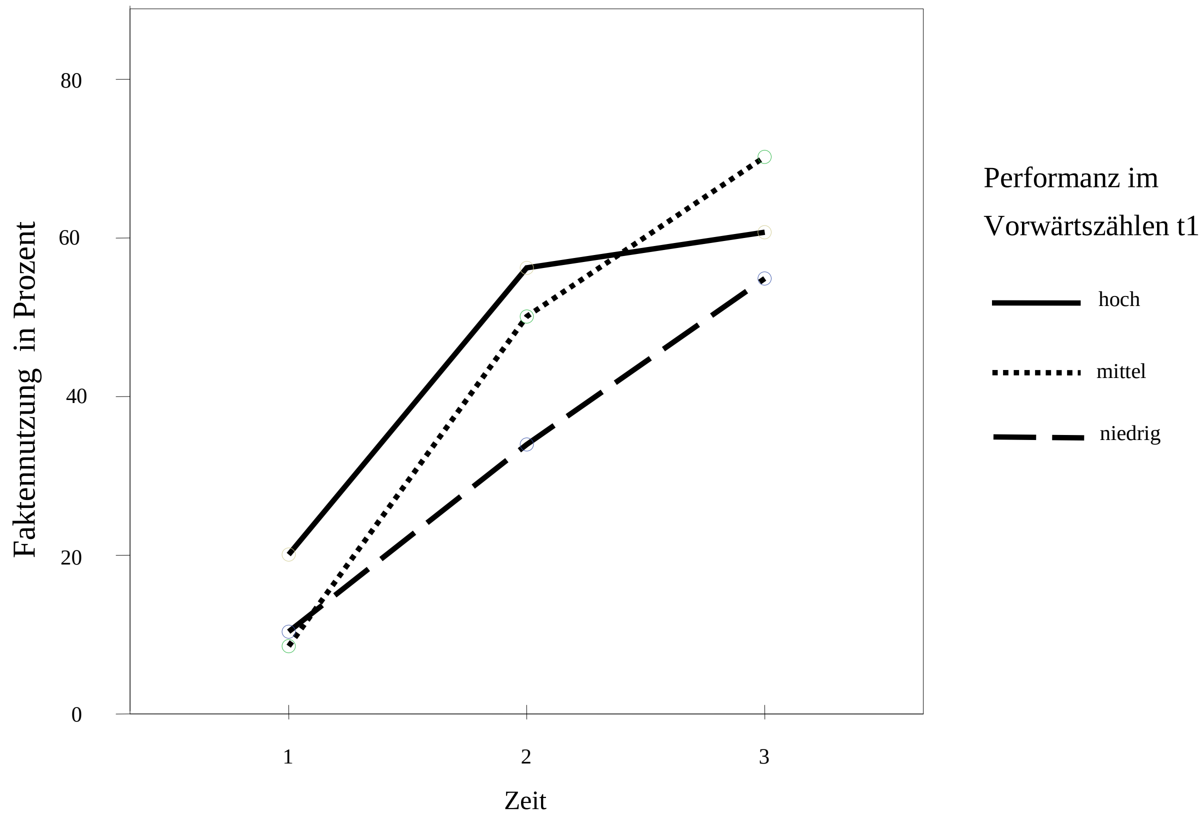
Aber dennoch: Die *Möglichkeit* besteht, dass zählend rechnende Kinder auch ohne gezielte Anregungen im Zuge ihres zählenden Rechnens Strukturen und operative Zusammenhänge entdecken und diese in weiterer Folge für nicht-zählendes Rechnen nutzen. *Genau so* – also (weitgehend) ohne gezielte Anregungen zum Entdecken von Strukturen und operativen Zusammenhängen – hat ja vermutlich auch der Großteil der Kinder, die an der vorliegenden Studie teilnahmen, im Laufe des ersten Schuljahres Rechenaufgaben gelöst. Dennoch haben viele von ihnen das Ableiten zu einem wesentlichen Bestandteil ihres Strategierepertoires gemacht und vermutliche gerade auch deshalb (vgl. Kap. 8.5.4.1) das zählende Rechnen vollständig oder zumindest weitgehend hinter sich gelassen.

Auf solchen verschlungenen Wegen verbessert eine höhere Kompetenz im Vorwärtszählen zu Schulbeginn also tatsächlich die *Chancen* eines Kindes, im weiteren Verlauf des ersten Schuljahres Alternativen zum zählenden Rechnen zu entwickeln. Aber wir sprechen auch hier nicht von *Kausalitäten,* sondern von *Chancen* – von besseren *Voraussetzungen.* In der qualitativen Auswertung sind wir auch vielen Kindern begegnet, die trotz guter Voraussetzungen am Ende des Schuljahres vorwiegend zählend rechneten; deshalb wurde in den oben stehenden Erläuterungen auch wiederholt vermerkt, dass die ausgeführten inhaltlichen Zusammenhänge *in der Regel* zu beobachten sind, aber eben *nicht immer*.

In diesem Zusammenhang lohnt es, der Wechselwirkung der Variablen *Zahlwortreihe t1* mit dem Faktor *Zeit* nachzugehen, die in der Kovarianzanalyse mit Messwiederholung in den multivariaten Tests (aber nicht in den F-Tests der Innersubjekteffekte) als signifikant ausgewiesen wird (vgl. Kap. 9.1.5). Da SPSS 15 im ALM mit Messwiederholung Wechselwirkungseffekte nur für Faktoren, nicht aber für Kovariaten näher aufschlüsselt, kann auf dieser

Grundlage über die Art der Wechselwirkung Zahlwortreihe t1*Zeit nur spekuliert werden. Zum Zweck der näheren Exploration wurde aber versuchsweise die Kovariate (unter Inkaufnahme eines Informationsverlustes) in einen Faktor umgewandelt, indem drei etwa gleich große *Klassen* von Kindern entsprechend ihrer Performanz im Vorwärtszählen zu Schulbeginn gebildet wurden. Führt man nun die Kovarianzanalyse mit Messwiederholung mit diesem dreistufigen Faktor *Vorwärtszählen* sowie *Geschlecht* und *Bildungsgrad Eltern* als weiteren Faktoren und *Quasi-Simultan t1* als der jetzt einzigen Kovariaten durch, dann ergeben sich zum Einen weitgehend dieselben Signifikanzen. Zum Anderen wird es aber möglich, über die "paarweisen Vergleiche" die auch in diesem Modell signifikante Wechselwirkung Vorwärtszählen*Zeit näher zu analysieren. Abbildung 20 zeigt das von SPSS auf Basis der geschätzten Randmittel ermittelte Profildiagramm für die drei Stufen des Faktors *Vorwärtszählen t1* (zu Details dieser explorativen Varianzanalyse siehe Anhang 11).

Abbildung 20: Profildiagramm auf Basis der geschätzten Randmittel der abhängigen Variablen "Faktennutzung" für die drei Stufen des Faktors "Performanz im Vorwärtszählen t1"



Die Abbildung macht deutlich, dass die Kinder mit mittlerer Performanz im Vorwärtszählen im ersten Interview zu Schulbeginn im Durchschnitt etwa gleich viele Aufgaben durch Faktennutzung lösten wie die Kinder mit niedriger Performanz und beide Gruppen deutlich weniger Aufgaben als die Kinder mit hoher Performanz. Alle drei Gruppen hatten bis Mitte des Schuljahres Zuwächse zu verzeichnen, am stärksten waren diese Zuwächse bei den Kindern mit mittlerer Zählperformanz. Und im zweiten Schulhalbjahr überholte diese Gruppe jene, die zu Schulbeginn die höchste Performanz im Vorwärtszählen gezeigt hatte.

Die als signifikant ausgewiesene Wechselwirkung der Performanz im Vorwärtszählen mit der Zeit besteht also wohl darin, dass die Gruppe mit der höchsten Performanz zu Schulbeginn im zweiten Halbjahr geringere Zuwächse in der Faktennutzung hatte als die Gruppe mit mittlerer Performanz und deshalb (nach Vorteilen zu den ersten beiden Messzeitpunkten) beim dritten Messzeitpunkt hinter diese zurückfiel.

Das fügt sich gut ein in die oben stehenden Ausführungen zum Zusammenhang zwischen Zahlwortkenntnissen zu Schulbeginn und der Entwicklung von Rechenstrategien: Gute Zahlwortkenntnisse zu Schulbeginn sind eben nicht mehr als eine *gute Voraussetzung* für einen erfolgreichen Einstieg in die Schulmathematik. Für die Entwicklung nicht-zählender Rechenstrategien spielen andere Voraussetzungen (Zahlverständnis, Einsicht in operative Zusammenhänge) eine wichtigere Rolle. Dass zu Schulbeginn am ehesten jene Kinder, die beim Vorwärtszählen am besten sind, auch schon einige nicht-triviale Grundaufgaben nicht-zählend lösen können, liegt vermutlich vor allem daran, dass diese Kinder sich schon vorschulisch am intensivsten mit Zahlen beschäftigt haben (*deshalb* ihre starke Performanz beim Vorwärtszählen, *deshalb* häufig auch schon erste nicht-zählend gelöste Aufgaben). Für den weiteren Verlauf der Entwicklung von Rechenstrategien hängt es aber davon ab, was die Kinder aus diesen Voraussetzungen machen. Dass dann Kinder mit den "zweitbesten" Voraussetzungen (in Bezug auf ihre Performanz im Vorwärtszählen) als Gesamtgruppe im zweiten Schulhalbjahr die Kinder mit den "besten" Voraussetzungen überholen, ist kaum zwingend notwendig, wegen des *inhaltlich losen* Zusammenhangs von frühen Zahlwortkenntnissen und späterer Strategiepräferenz aber eben *möglich*, und in dieser Stichprobe offenbar eingetreten.

Wir kommen damit zurück zur pädagogisch-fachdidaktischen Relevanz der durch die Prüfstatistik abgestützten Hypothesen $H1_2$ und (der Tendenz nach) auch $H1_1$: Wie in Kapitel 2.12.3 bereits angemerkt, hilft uns das Wissen über "Prädiktoren" späterer Mathematikleistung für sich genommen wenig weiter bei der Frage, wie wir den Mathematikunterricht im Interesse der Lernenden organisieren sollen. Voraussetzungen werden als Voraussetzungen *wirksam* nur *in konkreten Lernprozessen*. Wir müssen diese konkreten Lernprozesse analysieren, um zu verstehen, warum und in welcher Weise eine gegebene Voraussetzung positiv wirksam wird. Erst dann können wir begründete Urteile darüber abgeben, welche Voraussetzungen wir in welcher Weise fördern sollen; welche diesbezüglichen methodisch-didaktischen Maßnahmen die "Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen" erhöhen (vgl. KRAUTHAUSEN 2009, S. 114) und welche eher nicht.

Wenn aber obige Grob-Analyse der Lernprozesse, in deren Rahmen die zu Schulbeginn vorhandenen Kompetenzen in der Quasi-Simultanerfassung und im Vorwärtszählen als Voraussetzungen wirksam werden, richtig ist, dann ist auch klar, dass ein *isoliertes Training* dieser

Voraussetzungen in den ersten Schulwochen oder auch bereits im Kindergarten vermutlich *keine* sinnvolle didaktische Konsequenz aus diesem Teilergebnis der vorliegenden Studie (wie auch aus ähnlichen Ergebnissen anderer Studien) wäre. Das Beherrschen der Zahlwortreihe ist *nicht als isolierte Teilfähigkeit* wichtig für die weitere mathematische Entwicklung, sondern dann förderlich, wenn Kinder die Zahlwortreihe nutzen, um Einsichten in Zahlen, Zahlstrukturen, Operationen und deren Zusammenhänge zu gewinnen. Die Quasi-Simultanerfassung ist nicht förderlich als isolierte Fähigkeit zum Erkennen von Punktemustern, sondern dann, wenn ein Kind in diesen Punktemustern *Zahlstrukturen* und auf dieser Grundlage *Zusammenhänge zwischen Zahlen* erkennt.

Kurz gefasst: Wenn wir *mathematisches* Lernen fördern wollen, sollten wir mit den Kindern von Anfang an *Mathematik* treiben. Dabei stoßen wir (und die Kinder) freilich immerzu darauf, dass bestimmte Voraussetzungen für ein Mathematik-Treiben auf höherer Stufe noch nicht oder nicht in ausreichender Weise gegeben sind. Das Beherrschen der Zahlwortreihe und die Quasi-Simultanerfassung strukturierter Anzahldarstellungen gehören auf einer relativ frühen Stufe zweifelsfrei zu diesen Voraussetzungen. Aber auch hier gilt ARISTOTELES' alte Einsicht (vgl. Kap. 2.10.5): "Was man erst lernen muß, bevor man es ausführen kann, das lernt man, indem man es ausführt" (ARISTOTELES, Nikomachische Ethik II/1103a 33, Reclam-Ausgabe 1983, S. 34f). Wenn aber das mathematische Lernen der Kinder *von Erwachsenen organisiert* wird, ob dies nun (wofür vieles spricht) bereits im Kindergarten oder erst nach Eintritt in die Pflichtschule erfolgt, dann sollte dieses "Lernen, indem man es ausführt" in jedem Fall "an moderne, mathematik-didaktische Überlegungen aus dem schulischen Bereich anknüpfen" (STEINWEG 2008b, S. 273, unter Verweis auf WITTMANN 2001). Es geht also nicht um das "Training von vermeintlich wichtigen Fertigkeiten (z.B. Zählen) […], sondern [um] situative, angereicherte Umgebungen, in denen Kinder ihr individuelles Wissen zunehmend mit dem regulären Wissen der Mathematik verknüpfen können" (STEINWEG, a.a.O.). Zu diesem individuellen Wissen gehört auch die Zahlwortreihe. Diese sollte aber im Sinne einer Förderung *mathematischer* Kompetenzen nicht als bloße *Wortreihe* eingeübt werden, sondern als Mittel zum Erfassen von An-*Zahlen*, welche selbst wieder aus Teil-Anzahlen bestehen, als Mittel zum Erforschen von *Zahlenmustern* und *Strukturen*, usw.

Inwiefern spricht nun, wie oben behauptet wurde, vieles dafür, solche Lernprozesse bereits im Kindergarten gezielt zu fördern? Man sollte als Begründung dafür nicht einfach darauf verweisen, dass das frühe Zahlwissen ein "Prädiktor" der "Mathematikleistung" in späteren Jahren ist, wie in entwicklungspsychologischen Studien wiederholt gezeigt wurde, oder dass, wie vorliegende Studie nun spezifischer zeigt, Kinder mit zu Schulbeginn niedrigem Zahlwissen ein erhöhtes Risiko tragen, noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend zu rechnen. Denn dass sich solche Defizite im weiteren Verlauf der Schule in dieser Weise niederschlagen, ist, wie mehrfach argumentiert, wohl kaum als unausweichlich und durch die ungünstige Lernausgangslage zu Schulbeginn ein für alle Mal determiniert zu betrachten. Wenn es im Kindergarten möglich sein soll (und nichts spricht dagegen), Defizite im frühen Zahlwissen zu beheben, dann ist dies wohl auch im ersten Schuljahr noch möglich. Ein Mathematikunterricht, der die Kinder "dort abholt, wo sie stehen", müsste auf solche Defizite entsprechend Rücksicht nehmen. Sofern dies gelänge, und sofern auch der weitere Unterricht den Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik (vgl. Kap. 4) folgen würde, scheint zumindest nicht von vornherein ausgemacht, dass nicht auch Kinder mit Defiziten im frühen Zahlwissen im weiteren Verlauf des ersten Schuljahres Alternativen zum zählenden Rechnen zumindest im Zahlenraum bis zehn entwickeln können. Dies gälte es durch die Tat erst noch zu zeigen (vgl. Forschungshypothese 8 in Kapitel 8.4.5.2). Aber wenn das zu Schulbeginn vorhandene Zahlwissen tatsächlich "prädizieren" kann, in welchem Ausmaß ein Kind noch am Ende des ersten Schuljahres zählend rechnet, dann sollte dies zuallererst die Frage nach der Qualität des Mathematikunterrichts aufwerfen, den die untersuchten Kinder ein Jahr lang genossen haben (vgl. Kap. 8.4) – eine Frage, zu der sich in Kapitel 7 einige Antworten finden.

Man sollte also angesichts solcher Befunde nicht *sogleich* (und keinesfalls *ausschließlich*) darüber nachdenken, was im Kindergarten zu geschehen habe, sondern vor allem auch darüber, was sich im schulischen Anfangsunterricht ändern muss. Denn eines ist klar: Wenn dieser so abläuft, wie es in Kapitel 7 für den Unterricht der in dieser Studie befragten Kinder konstatiert wurde, dann finden auch jene Kinder, die mit durchschnittlichem oder sogar überdurchschnittlichem Zahlwissen in die Schule kommen, keine günstigen Bedingungen für ihr weiteres arithmetisches Lernen vor.

Dazu noch ein Gedanke: Gelänge es, bereits im Kindergarten eine den diesbezüglichen Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik (vgl. etwa WITTMANN 2003; STEINWEG 2008a) folgende frühe Förderung mathematischer Kompetenzen zu gewährleisten, dann könnte der Unterricht im ersten Schuljahr vermutlich mit *allen* Kindern auf einem höheren Niveau starten. Aber was wir mit verstärkten Bemühungen um die frühe mathematische Bildung im Kindergarten mit einiger Sicherheit *nicht* aus der Welt schaffen werden, ist die *Heterogenität im Unterricht*. Kinder sind nun einmal verschieden. Wenn wir *alle Kinder* im Kindergarten bestmöglich fördern, werden hoffentlich *alle Kinder* davon profitieren. Aber dadurch verschwinden die Unterschiede nicht – Unterschiede im Interesse, im Lerntempo, in den mannigfaltigen Voraussetzungen für weiteres Lernen. Sie werden nur auf ein höheres Niveau gehoben. Der Mathematikunterricht würde also weiterhin damit zurechtkommen müssen, dass Kinder die Schulmathematik von unterschiedlichen Ausgangspunkten erkunden, auf unterschiedlichen Wegen und in unterschiedlichem Tempo (vgl. GAIDOSCHIK 2007, U4).

Fachdidaktisch qualifizierte mathematische Förderung schon im Kindergarten ist also zum einen *kein Ersatz* für *fachdidaktisch qualifizierten* Mathematikunterricht vom ersten Schultag an. Und sie lässt zum anderen auch das vielbeschworene Problem der "Heterogenität im Mathematikunterricht" nicht verschwinden: Diese bleibt eine der großen Herausforderungen für die Grundschuldidaktik (zu diesbezüglich viel versprechenden Ansätzen vgl. etwa HENGARTNER u.a. 2006 und HIRT & WÄLTI 2008). Qualifizierte Förderung im Kindergarten erlaubt es vermutlich, auch mit den (im internen Vergleich) "leistungsschwächsten" Kindern auf einem höheren Niveau zu beginnen und mit ihnen im weiteren Verlauf deshalb vermutlich auch ein höheres Niveau zu erreichen. Dasselbe gilt aber auch für die (im internen Vergleich) "leistungsstärkeren" Kinder. Das ist im Interesse des Erreichens inhaltlich begründeter Lernziele, führt aber in der Logik der Notengebung nicht dazu, dass alle Kinder bessere Mathematik*noten* erreichen: Der über die Noten installierte interne Leistungsvergleich wird gewissermaßen verschärft. Das spricht sicher nicht gegen frühe mathematische Bildung, zeigt aber, wie entbehrlich Noten wären, ginge es in der Schule nur darum, Kinder bestmöglich zu fördern (vgl. dazu SUNDERMANN & SELTER 2006, S. 7f).

Mathematische Förderung im Kindergarten kann also nicht ausgleichen, was in der Grundschule dem kindlichen Lernen zuwider läuft. Mathematik gehört aus einem ganz anderen Grund bereits in den Kindergarten: einfach deshalb, weil sie ein wichtiger Teil der Welt ist, in der auch Kindergartenkinder leben. Und wie HOLT festhält, hat "ein Kind [Ergänzung aus dem Zusammenhang: ein Kind, das noch nicht in die Schule geht; Anm. M.G.] kein größeres Verlangen, als die Welt zu verstehen, sich frei in ihr zu bewegen und diejenigen Dinge zu tun, die es größere Leute tun sieht" (HOLT 1971, S. 16). HOLT beschäftigt sich in seinen Schriften freilich zu einem guten Teil mit dem Phänomen, dass dieses Verlangen oft verschwindet, wenn das *Kind* zum *Schulkind* wird (vgl. etwa auch HOLT 2004/1964). Umso wichtiger wäre es, dass sich in der im deutschsprachigen Raum erst in den letzten Jahren eröffneten (und in Österreich noch kaum aufgegriffenen) Debatte um die Notwendigkeit einer verstärkten vorschulischen mathematischen Förderung *pädagogisch-fachdidaktisch fundierte* Konzepte durchsetzen. Andernfalls ist zu befürchten, dass das "Verlangen nach Mathematik" Kindern künftig noch früher ausgetrieben wird, als es jetzt schon verbreitet der Fall ist (vgl. BUNDESINSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG, INNOVATION & ENTWICKLUNG DES ÖSTERREICHISCHEN SCHULWESENS: "In Mathematik sind die österreichischen Schüler/innen nicht nur bei der instrumentellen Motivation, sondern auch beim Interesse und der Freude das Schlusslicht im internationalen Vergleich"; www.bifie.at/buch/657/2/e/11, 5.9.2009).

10.2 Zum Einfluss der Geschlechtszugehörigkeit

Die Hypothese $H1_3$, wonach Buben in der Gesamtbetrachtung im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres signifikant mehr nicht-triviale Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Faktennutzung lösen als Mädchen, konnte in der vorliegenden Studie auch auf dem verschärften Signifikanzniveau von $p \leq 0{,}01$ gestützt werden.

Dass die Buben als Gesamtheit betrachtet am Ende des ersten Schuljahres eine signifikant höhere *Mathematikleistung* (gemessen in der Leistung im DEMAT 1+) aufweisen als Mädchen, war eines der Ergebnisse der Studien sowohl von KRAJEWSKI (2003, S. 213) als auch von DORNHEIM (2008, S. 344). TIMSS und PISA deuten daraufhin, dass diese Leistungsunterschiede zumindest die gesamte Pflichtschulzeit hindurch fortbestehen, zumindest im deutschsprachigen Raum (vgl. Kap. 2.7).

Wenn nun die vorliegende Studie einen Effekt der Geschlechtszugehörigkeit auf die *Häufigkeit Fakten nutzender Rechenstrategien* statistisch absichert, lässt sich auch dies als eine *Spezifizierung* der genannten Studien interpretieren. Denn wenn mehr Buben als Mädchen in der Lage sind, das zählende Rechnen im ersten Schuljahr hinter sich zu lassen und umgekehrt mehr Mädchen als Buben am zählenden Rechnen festhalten, so liegt darin aus fachdidaktischer Perspektive (aufgrund der mehrfach erläuterten Bedeutung der Rechenstrategien auf die gesamte arithmetische Entwicklung) zugleich zumindest ein Teil der Erklärung für das schlechtere Abschneiden der Mädchen bei standardisierten Mathematiktests am Ende des ersten Schuljahres.

Da nun aber die Unterschiede in der Häufigkeit der Verwendung Fakten nutzender Strategien zwischen Buben und Mädchen bereits zu Schulbeginn deutlich sind, scheint die Annahme plausibel, dass diese Unterschiede ihrerseits sachlogisch zu einem guten Teil darauf zurückzuführen sind, dass Buben in der Regel schon mit höherem Zahlwissen in die Schule kommen als Mädchen. (Dass solche Unterschiede in weiterer Folge nicht per se, sondern vermittels komplexer Lernprozesse und unter dem Einfluss des Unterrichts auf die weitere arithmetische Entwicklung wirken, wurde bereits ausführlich erörtert, vgl. Kap. 10.1.1).

In der Studie von KRAJEWSKI wiesen auch tatsächlich die Mädchen vor Schuleintritt ein signifikant niedrigeres *Zahlwissen* auf als die Buben (KRAJEWSKI 2003, S. 213). In der Studie von DORNHEIM war dies nicht in allen Bereichen des Zahlwissens der Fall, aber sehr wohl gerade im Bereich der Quasi-Simultanerfassung, deren Einfluss auf die Ablösung vom zählenden Rechnen sich auch in der vorliegenden Studie als signifikant erwies (vgl. DORNHEIM 2008, S. 337).

In der vorliegenden Studie lag der Fokus nicht auf dem vorschulischen Zahlwissen; dieses wurde daher auch nur in einzelnen Komponenten erhoben. Es wurde deshalb auch darauf verzichtet, Hypothesen zu geschlechtsspezifischen Unterschieden auch schon bezüglich des zu Schulbeginn gemessenen Zahlwissens zu formulieren. Eine am vorliegenden Datensatz explorativ durchgeführte multivariate Varianzanalyse (vgl. RUDOLF & MÜLLER 2004, S. 95ff und S. 111-114) mit dem Faktor *Geschlecht* als unabhängiger und den Variablen *Zahlwortreihe t1* und *Quasi-Simultan t1* als abhängigen Variablen erbrachte einen signifikanten Effekt der Geschlechtszugehörigkeit (p=0,013 im Pillai-Spur-Test) bei signifikanten Tests der Zwischensubjekteffekte sowohl für *Zahlwortreihe t1* (p=0,004) als auch für *Quasi-Simultan t1* (p=0,014), jeweils zugunsten der Buben; das partielle Eta-Quadrat von 0,061 weist auf eine schwach mittlere Effektgröße hin (vgl. REISINGER 2003, S. 272). Aufgrund des für beide abhängigen Variablen höchst signifikanten Levene-Tests ist freilich auch in diesem Fall eine Verschärfung des Signifikanzniveaus auf $p \leq 0{,}01$ ratsam, womit der Haupteffekt des Geschlechts nur als *Tendenz* statistisch abgesichert werden kann. (Die wesentlichen Tabellen der nach der Methode des Allgemeinen linearen Modells in SPSS 15.0 gerechneten multivariaten Varianzanalyse sind im Anhang 12 ausgewiesen.)

Wenn nun aber zumindest ein Teil der Erklärung für die höhere Faktennutzung der Buben darin zu finden ist, dass sie bereits mit höherem Zahlwissen in die Schule kommen, dann scheint auch zumindest zum Teil klar, was getan werden müsste, wenn man sich mit den in dieser Studie und zahlreichen anderen Studien deutlich gewordenen geschlechtsspezifischen Unterschieden in der arithmetischen Kompetenz nicht abfinden möchte:

Einerseits müssten in der vorschulischen Förderung Anstrengungen unternommen werden, um Mädchen schon vor Schuleintritt mehr für Zahlen (und Zahlenmuster, Zahlenstrukturen, Zahlenzusammenhänge…) zu interessieren, als dies derzeit offenbar der Fall ist. Dazu einige Details aus der vorliegenden Untersuchung: Es wurden annähernd gleich viele Buben (70) wie Mädchen (69) befragt. 16 Kinder erfassten alle vier zu Schulbeginn gebotenen strukturierten Zahldarstellungen quasi-simultan. 12 davon waren Buben, nur 4 Mädchen. Von den 48 Kindern, die zu Schulbeginn mindestens bis "hundert" zählen konnten, waren 32 Buben, nur 16 Mädchen. Von den 12 Kindern, die auch noch über "hundert" hinaus korrekt weiterzählten, waren nur 2 Mädchen. Und umgekehrt waren von den 13 Kindern, die zu Schulbeginn beim Zählen nicht über "zwölf" hinaus kamen, 9 Mädchen, nur 4 Buben.

Und das ist wohl kaum als Folge des unterschiedlichen Chromosomensatzes erklärbar (vgl. Kap. 2.7). Weit plausibler erscheint, dass die Mädchen zu Beginn ihres ersten Schuljahres einfach deshalb (mehrheitlich) weniger über Zahlen wissen und mit Zahlen anzufangen wissen, weil sie sich bis dahin (mehrheitlich) weniger mit Zahlen beschäftigt haben. Woran nun das wiederum liegen mag, ist eine lohnende Frage für weitere Forschung. Ein naheliegender

Einfluss sind die Anregungen und Anreize, welche Buben auf der einen, Mädchen auf der anderen Seite von klein auf erfahren – Anregungen und Anreize, sich mit manchen Dingen zu beschäftigen und mit anderen Dingen eher nicht, weil manche Dinge angeblich "nichts für Buben" seien und andere angeblich "nichts für Mädchen" (vgl. MOSER OPITZ 2007, S. 71).

In diesem Zusammenhang ist von Interesse, was DORNHEIM aus der unveröffentlichten Hausarbeit von KOMM (2003) referiert, die "auf der Basis von 118 Fragebögen, darunter 63 Jungen und 55 Mädchen [...] erhebliche geschlechtsspezifische Differenzen in den Freizeitaktivitäten" zwischen Buben und Mädchen (offenbar vor deren Einschulung) zeige. Demnach spielten etwa die Buben "generell mehr am Computer, spielten aber auch häufiger Lernspiele am Computer sowie häufiger Rechenspiele. Außerdem lasen sie häufiger Zahlen. Mädchen schrieben dafür signifikant häufiger Buchstaben" (DORNHEIM 2008, S. 509). DORNHEIM vermutet auch "Einstellungsunterschiede von Müttern und Vätern zu Zahlen, die in der familiären Kommunikation transportiert werden" und die "eine Rolle spielen [könnten], so dass Mädchen schon früh Zahlen als männliche Domäne ansehen oder Mathematikängste von Müttern oder Erzieherinnen übernehmen" (DORNHEIM 2008, S. 521).

In dieser Richtung sollte weitergeforscht werden. Aber wir müssen die Ergebnisse diesbezüglicher Forschung im Grunde nicht abwarten, um jetzt schon sagen zu können, dass im vorschulischen Bereich daran gearbeitet werden müsste, gerade auch Mädchen für Zahlen (und Zahlenmuster, Zahlstrukturen, Zahlenzusammenhänge…) zu interessieren; und was sich dabei am ehesten bildungspolitisch steuern lässt, ist wohl die Förderung im Kindergarten.

Soweit die *eine* pädagogische Konsequenz, die sich daraus ergibt, dass Mädchen vermutlich schon wegen ihres in der Regel niedrigeren Zahlwissens zu Schulbeginn im weiteren Arithmetikunterricht benachteiligt sind. Die andere Konsequenz wurde bereits erläutert – sie ist nämlich gar nicht geschlechtsspezifisch: Wenn sich Lernrückstände zu Schulbeginn (die bei Mädchen häufiger zu sein scheinen als bei Buben) so auswirken können, dass die betroffenen Kinder (ob Mädchen oder Buben) noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend rechnen, dann liegt das nicht einfach am Lernrückstand, sondern dann muss auch im Unterricht während des ersten Schuljahres einiges schief gelaufen sein (vgl. Kapitel 7). Die pädagogische Konsequenz muss also schon wieder heißen: Verbesserung der fachdidaktischen Qualität des Mathematikunterrichts, für Mädchen ebenso wie für Buben.

Nun scheint es aber plausibel, dass der signifikante Einfluss des Geschlechts auf die Entwicklung der Rechenstrategien *nicht nur* auf die geschlechtsspezifischen Unterschiede im Zahlwissen *zu Schulbeginn* zurückzuführen ist (und noch einmal sei betont: Unterschiede in den *Voraussetzungen* des Lernens können Unterschiede *im Lernen* nie vollständig erklären; vgl.

dazu Kap. 10.1.1). Es wurde ja angenommen, dass diese Unterschiede im Zahlwissen zu Schulbeginn ihrerseits zusammenhängen mit Unterschieden in den Anregungen und Anreizen, die Mädchen einerseits, Buben andererseits vor Schuleintritt von ihrer sozialen Umwelt erhalten. Diese Unterschiede verschwinden aber wohl nicht mit dem Eintritt in die Schule. Gerade auch zu Unterschieden in der Einstellung und im Verhalten von Mathematik-LehrerInnen gegenüber Buben einerseits, Mädchen andererseits liegen eine Reihe von Untersuchungen vor (vgl. Kap. 2.7), und eine Studie aus den USA kommt zum Ergebnis, dass Buben und Mädchen in ihrem ersten Schuljahr sowohl von ihren Lehrkräften als auch von ihren Eltern tendenziell unterschiedliche Rückmeldungen zu ihren Rechenstrategien erhielten (vgl. CARR, JESSUP & FULLER 1999 und Kap. 2.7). Die Autorinnen dieser Studie berichten, dass die teilnehmenden Buben Aufgaben signifikant häufiger durch Faktenabruf gelöst hätten als die Mädchen, und dass diese Unterschiede sich im Laufe des ersten Schuljahres verstärkt hätten.

In der vorliegenden Studie zeichnet sich nun aber gerade eine gegenläufige Tendenz ab: Die Mädchen (als Gesamtheit betrachtet) lösten zwar zu allen drei Messzeitpunkten signifikant weniger Aufgaben durch Faktennutzung als die Buben, sie verringerten ihren Rückstand in der Häufigkeit der Faktennutzung aber im zweiten Schulhalbjahr (vgl. Kap. 9.1.4). In der Varianzanalyse mit Messwiederholung wird der Einfluss der Wechselwirkung von Geschlecht und Zeit freilich *nicht* als signifikant ausgewiesen. Wollte man dennoch darüber nachdenken, warum die befragten niederösterreichischen Mädchen in dieser spezifischen Komponente arithmetischer Kompetenz (der Häufigkeit von Faktennutzung bei nicht-trivialen Aufgaben) ihren Rückstand gegenüber den Buben im zweiten Schulhalbjahr offenbar eher verringert haben (während die US-amerikanischen Mädchen in der zitierten Studie gegenüber den Buben weiter abgefallen sind), dann sollte auch dabei wieder beachtet werden, welche Anreize und Anregungen die Mädchen einerseits, die Buben andererseits im Laufe des Schuljahres erhalten haben.

Bezüglich der US-amerikanischen Eltern und Lehrkräfte berichten CARR, JESSUP und FULLER, diese hätten Buben eher als Mädchen zu Faktenabruf "gelenkt", ohne dass klar würde, worin diese Lenkung bestanden hätte und auf welche Weise sie hätte wirksam werden können (vgl. die Kritik in Kap. 2.7). Allfällige geschlechtsspezifische Unterschiede in der "Lenkung" der niederösterreichischen Buben und Mädchen wurden in dieser Studie nicht erhoben. Es wurde aber für Buben und Mädchen erhoben, wie häufig pro Woche und wie lange jeweils (den Angaben der Eltern zufolge) die Eltern zuhause mit ihnen rechnen geübt haben. Dabei wurden in der Tat geschlechtsspezifische Unterschiede deutlich: Eine explorativ durchgeführte univariate Varianzanalyse (Methode ALM, Gesättigtes Modell, Quadratsummen vom Typ III) mit der durchschnittlichen wöchentlichen Übungszeit als abhängiger Variablen und dem Geschlecht und dem Bildungsgrad der Eltern als Faktoren zeigt einen signifikanten Einfluss des Geschlechts ($p = 0{,}024$), aber keinen signifikanten Einfluss des Bildungsgrades der Eltern und keine Signifikanz für die Wechselwirkung Geschlecht*Bildungsgrad. (Der nicht-signifikante Levene-Test zeigt, dass die Voraussetzung der Varianzen-Homogenität erfüllt ist; für Details der Varianzanalyse siehe Anhang 13). Die Unterschiede in den durchschnittlichen Übungszeiten werden in Tabelle 75 deutlich:

Tabelle 75: Durchschnittliche Übungsdauer pro Woche in Minuten in Abhängigkeit von Geschlecht und Bildungsgrad der Eltern

Bildungsgrad der Eltern	Geschlechtszugehörigkeit	Mittelwert	Standard-abweichung	N
Beide Eltern ohne Matura	Männlich	17,22	24,401	37
	Weiblich	28,00	27,118	40
	Gesamt	22,82	26,245	77
Mindestens ein Elternteil hat Matura	Männlich	11,86	22,976	29
	Weiblich	23,64	37,233	25
	Gesamt	17,31	30,689	54
Gesamt	Männlich	14,86	23,756	66
	Weiblich	26,32	31,186	65
	Gesamt	20,55	28,179	131

Mit Mädchen wurde also, insgesamt betrachtet, durchschnittlich etwa 26 Minuten pro Woche, mit den Buben durchschnittlich etwa 15 Minuten geübt. Beträchtliche Unterschiede in der Übungszeit von Buben und Mädchen treten unabhängig vom Bildungsgrad der Eltern auf: In Familien, in denen beide Eltern ohne Matura sind, wurde mit Mädchen durchschnittlich 28 Minuten pro Woche geübt, mit Buben durchschnittlich etwa 17 Minuten. Bei den Kindern aus "Matura-Familien" betrug die durchschnittliche wöchentliche Übungszeit bei den Mädchen 24 Minuten, bei den Buben etwa 12 Minuten.

Dass Eltern ohne Matura offenbar insgesamt deutlich mehr mit ihren Kindern geübt haben als Eltern mit Matura, ist vermutlich im Zusammenhang damit zu sehen, dass die Kinder der Eltern ohne Matura durchschnittlich auch weniger Aufgaben durch Faktennutzung lösten (vgl. Kap. 9.1.4) und insofern ja auch tatsächlich mehr Übungsbedarf hatten. Und dass offenbar mit Kindern in der Regel umso mehr geübt wurde, je schwächer ihre Rechenleistung war, und nicht umgekehrt die Rechenleistung umso besser war, je mehr geübt wurde, wurde bereits im Rahmen der qualitativen Auswertung ausführlich besprochen (vgl. Kap. 8.5.3.3; zur Interpretation des Einflusses des Bildungsgrads der Eltern vgl. das folgende Unterkapitel).

Nun lässt sich die Vermutung, dass generell offenbar umso mehr geübt wurde, je höher der Übungsbedarf war (s.o.), freilich auch auf den hier interessierenden Unterschied in der Übungszeit von Mädchen und Buben anwenden: Mädchen lösten im Durchschnitt (vgl. Kap. 9.1.5) weniger Aufgaben durch Faktennutzung, insofern hatten ihre Eltern im Durchschnitt auch mehr Anlass zu meinen, sie müssten mit ihrem Kind rechnen üben. Aber auch wenn man nur die Kinder betrachtet, die am Ende des zweiten Schuljahres mehr als zwei Drittel der zu diesem Zeitpunkt nicht-trivialen Aufgaben durch Faktennutzung lösten ("vorwiegend Fakten nutzende Rechner", vgl. Kap. 8.5.3.1), bleibt der Unterschied in der durchschnittlichen Übungszeit zwischen Mädchen und Buben deutlich: Mit den Mädchen dieser Gruppe der leistungsstärksten Kinder war den Eltern zufolge im Schnitt 23 Minuten pro Woche geübt worden, mit den Buben derselben Gruppe im Schnitt nur 11 Minuten pro Woche.

Inwiefern aber könnte das vermutlich deutliche Mehr an Übung bei den Mädchen dazu beigetragen haben, dass die Mädchen ihren Rückstand in der Faktennutzung im zweiten Halbjahr verringern konnten? Denn dass verstärktes Üben, sofern es ein bloßes Üben des zählenden Rechnens ist, nicht dazu geeignet ist, die Faktennutzung zu erhöhen, wurde ja in Kapitel 8.5.3.5 und 8.5.4.3 bereits festgehalten und begründet. Dort wurde aber auch betont, dass damit freilich nicht gesagt sein soll, dass Üben generell keinen Zuwachs an Faktennutzung bewirken könne.

Es hängt wohl eben entscheidend ab von der *Qualität* des Übens (die freilich in der vorliegenden Untersuchung nicht erhoben werden konnte) und vom *Lernausgangsstand* des Kindes, mit dem geübt wird. Werden einem zählend rechnenden Kind über die Hausübung hinaus "graue Päckchen" (vgl. Kap. 4.6) vorgesetzt, wird es diese wohl nur zählend-rechnend abarbeiten; die Chance, dass es dabei seinen Anteil an Faktennutzung erhöht, sind gering (vgl. BROWNELL 1929, S. 105 und Kap. 8.5.3.3). Bei einem Kind aber, das bereits über ein gewisses Repertoire an auswendig gewussten Grundaufgaben verfügt und das im Übrigen (wie etwa der im Motto zu Kapitel 2 zitierte Christian) den Ehrgeiz hat, nicht gewusste Aufgaben "durch Nachdenken" aus gewussten abzuleiten, werden vermutlich selbst "graue Päckchen" einen positiven Übungseffekt haben. Zudem wurde im Zuge der qualitativen Auswertung in Kapitel 8.2 bis 8.4 ja an mehreren Stellen deutlich, dass zumindest manche Kinder von ihren Eltern beim Üben durchaus auch Anregungen zum Nutzen von Ableitungsstrategien bekommen haben; das häusliche Üben bestand also (zumindest bei einigen Kindern) nicht nur im Vorlegen von Übungspäckchen und Abfragen von Rechenaufgaben.

Wenn also auch *generell* häusliche Übungszeit und das Ausmaß von Faktennutzung im Zahlenraum bis zehn *nicht* positiv korrelieren, so könnte doch bei einer Untergruppe der Kinder gerade auch das häusliche Üben dazu beigetragen haben, dass sie im Laufe des Schuljahres Fortschritte in der Faktennutzung gemacht haben. *Und in dieser vermittelten Weise* könnte dann auch die in der Regel deutlich höhere Übungszeit *der Mädchen* sich in einem größeren Zuwachs der Mädchen in der Faktennutzung niederschlagen. Zu den hier angestellten Überlegungen passt, dass dieser Zuwachs bei den Mädchen aus "Matura-Familien" deutlicher ausfiel (vgl. Kap. 9.1.4) als bei den Mädchen aus "Nicht-Matura-Familien", obwohl mit letzteren im Durchschnitt mehr geübt wurde als mit ersteren (vgl. oben Tabelle 79). Denn die Mädchen aus "Nicht-Matura-Familien" hatten im Durchschnitt eine weniger günstige Lernausgangslage (geringerer Anteil von Faktennutzung beim zweiten Messzeitpunkt, vgl. Kap. 9.1.4) und profitierten vermutlich *schon allein deshalb* weniger vom häuslichen Üben als die Mädchen aus Matura-Familien mit durchschnittlich günstigerer Lernausgangslage. (Dazu mögen aber auch Unterschiede in der *Qualität* des Übens bei den Mädchen beider Gruppen beigetragen haben; vgl. dazu den nächsten Unterabschnitt.)

Eine Parallele zu der in dieser Studie für das erste Schuljahre ermittelten längeren durchschnittlichen Übungszeit der Mädchen im Rechnen findet sich im deutschsprachigen Raum etwa in der IGLU-Studie (Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung). KAMPSHOFF hält für den Grundschulbereich unter Verweis auf BOS u.a. (2004, S. 252) fest, dass "Mädchen [..] nach Angaben der Eltern aus der IGLU-Studie signifikant fleißiger als Jungen [sind] und [..] die Hausaufgaben genauer und ordentlicher [erledigen]. Bei Jungen geben die Eltern häufiger an, dass sie ungern etwas für die Schule tun" (KAMPSHOFF 2007, S. 107). Betont sei, dass hier die *Sicht der Eltern* referiert wird. Wie immer aber die Eltern zu dieser Sicht gelangen, ob auf Grundlage tatsächlicher geschlechtsspezifischer Unterschiede (die dann ihrerseits erklärungsbedürftig wären) und/oder in bloßer Fortführung eines tradierten Geschlechterstereotyps: In jedem Fall wäre nachvollziehbar, dass Eltern in weiterer Folge mit den als "fleißiger" und "williger" eingestuften Mädchen auch tatsächlich mehr üben als mit den als "widerstrebend" eingestuften Buben.

Bei all dem sei freilich noch einmal darauf hingewiesen, dass die Varianzanalyse für die Wechselwirkung von Zeit und Geschlechtszugehörigkeit *keinen* signifikanten Effekt ausweist. Dass die Mädchen in der vorliegenden Studie einen höheren Zuwachs an Faktennutzung im zweiten Halbjahr hatten als die Buben, lässt also keinen Schluss auf die Gesamtpopulation zu; zudem sind die diesbezüglichen Unterschiede insgesamt gering. Die weitere Entwicklung der Rechenstrategien von Buben einerseits, Mädchen andererseits fällt ohnedies außerhalb des Bereichs dieser Studie. Was zu konstatieren bleibt, ist der signifikant niedrigere Anteil an Fakten nutzenden Strategien bei den Mädchen (als Gesamtheit betrachtet) am Ende des ersten Schuljahres und der damit gegebene Startnachteil der Mädchen am Beginn des zweiten Schuljahres – und die pädagogische Konsequenz, dass eine Verbesserung der fachdidaktischen Qualität des mathematischen Anfangsunterrichts Not tut, damit *Mädchen wie Buben* besser in der Entwicklung nicht-zählender Rechenstrategien gefördert werden, als es in Österreich derzeit offenbar verbreitet der Fall ist.

10.3 Zum Einfluss des Bildungsgrades der Eltern

Für den Einfluss des Bildungsgrades (der höchsten abgeschlossenen Schulbildung) der Eltern auf den Anteil, zu dem Kinder im ersten Schuljahr nicht-triviale Grundaufgaben durch Faktennutzung lösen, weist die Varianzanalyse mit Messwiederholung bei der gewählten verschärften Signifikanzschranke von $p \leq 0{,}01$ nur die *Tendenz* einer Signifikanz aus ($p=0{,}019$), bei relativ geringer Teststärke (vgl. Kap. 9.1.5). Die in der deskriptiven Statistik deutlichen Mittelwertunterschiede (vgl. Kap. 9.1.4) zeigen jedenfalls "Effekt[e] von relevanter Größenordnung" (JANSSEN & LAATZ 2003, S. 352): Kinder aus Familien, in denen beide Elternteile ohne Matura sind, lösen bereits zu Schulbeginn deutlich weniger Aufgaben (etwa 9 Prozent) durch Faktennutzung als Kinder aus Matura-Familien (etwa 20 Prozent). Kinder beider Gruppen verzeichnen bis Mitte des Schuljahres einen Zuwachs, der jedoch bei Kindern aus Nicht-Matura-Familien etwas geringer ausfällt (ein Plus von etwa 34 Prozentpunkten bei den Kindern aus Matura-Familien, ein Plus von etwa 31 Prozentpunkten bei Kindern aus Nicht-Matura-Familien). Auch im zweiten Halbjahr findet in beiden Gruppen ein Zuwachs statt; er ist in beiden Gruppen deutlich geringer als im ersten Halbjahr, dies aber noch deutlicher bei den Kindern aus Nicht-Matura-Familien (ein Plus von etwa 17 Prozentpunkten bei den Kindern aus Matura-Familien, ein Plus von etwa 13 Prozentpunkten bei Kindern aus Nicht-Matura-Familien; vgl. Kap. 9.1.4).

Einen Einfluss des Bildungsgrades der Eltern auf die Mathematikleistung österreichischer GrundschülerInnen legen etwa auch Detailbefunde der TIMS-Studie nahe (vgl. Kap. 2.13.4). DORNHEIM versuchte für die an ihrer Studie teilnehmenden Kinder einen komplexeren Schicht-Index zu ermitteln, in dem außer der höchsten abgeschlossenen Schulbildung auch die berufliche Position und das Einkommen der Eltern berücksichtigt wurden (vgl. DORNHEIM 2008, S. 279). Ein ähnliches Vorhaben erwies sich in der vorliegenden Studie als undurchführbar (vgl. Kap. 6.4.2). Auch DORNHEIM konnte den Schicht-Index letztlich nur für etwa 71 Prozent der Kinder berechnen. Bei diesen zeigte sich ein "signifikanter Zusammenhang [zwischen] Zahlen-Vorwissen, Schicht und allgemein-kognitive[n] Fähigkeiten" (DORNHEIM 2008, S. 508). Der Schicht-Index korrelierte auch signifikant positiv mit den Leistungen in standardisierten Rechentests, wobei sich "der Einfluss […] mit zunehmender Klassenstufe (1. Klasse: $r=.21$, 2. Klasse: $r=.33$)" verstärkt (DORNHEIM 2008, S. 357; angemerkt sei, dass ein Korrelationskoeffizient bis 0,2 nach der üblichen Einschätzung eine "sehr geringe Korrelation", bis 0,5 eine "geringe" Korrelation" anzeigt; vgl. BÜHL & ZÖFEL 2005, S. 322). Auch KRAJEWSKI und SCHNEIDER ermittelten einen signifikanten "Einfluss der sozialen Schicht" auf die Mathematikleistung, welcher im Laufe der Grundschulzeit zunehme, "so dass am Ende der Grundschulzeit 18 % der Unterschiede in den Mathematikleistungen durch die Schichtzugehörigkeit der deutschen Kinder aufgeklärt wurden" (KRAJEWSKI 2008, S. 282, unter Verweis auf KRAJEWSKI & SCHNEIDER 2006).

Wie schon bezüglich des Einflusses von frühem Zahlwissen und Geschlechtszugehörigkeit auf die Mathematikleistung am Ende des ersten Schuljahres (vgl. Kap. 10.1.1 und 10.1.2), liefert die vorliegende Studie auch bezüglich des Einflusses des Bildungsgrades eine *Spezifikation* der genannten deutschen Studien: Indem sie zeigt, dass dieser Einfluss spezifisch die *Rechenstrategien* der Kinder betrifft, liefert sie unter fachdidaktischer Perspektive zugleich wichtige Hinweise für eine *innermathematische Begründung* der in standardisierten Leistungstests ermittelten Unterschiede. Denn wenn Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad zumindest bis zum Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter an zählenden Rechenstrategien festhalten, so behindert dies auf Grundlage der in Kapitel 3.1 und 3.2 erörterten Zusammenhänge ihre gesamte weitere arithmetische Entwicklung.

In der vorliegenden wie in den genannten deutschen Studien fällt auf, dass die Vorteile der Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad bereits zu Schulbeginn deutlich waren, sich aber im Laufe der Zeit – in der vorliegenden Untersuchung bereits im Laufe des ersten Schuljahres – noch weiter verstärkten. Dabei lässt sich aus den multivariaten Tests innerhalb der Varianzanalyse mit der gebotenen Vorsicht eine *Tendenz zur Signifikanz* für eine Wechselwirkung der Faktoren *Zeit* und *Bildungsgrad Eltern* herauslesen (vgl. Kap. 9.1.5). Worin könnte dieser *statistisch* deutlich werdende Unterschied im Entwicklungsverlauf in Abhängigkeit vom Bildungsgrad der Eltern *sachlogisch* begründet sein?

Aus fachdidaktischer Perspektive bieten sich hierfür *zwei* Argumentationslinien an, wobei Wechselwirkungen plausibel erscheinen. Gemäß der einen Argumentationslinie spielen auch hier wieder Unterschiede bereits im *Zahlwissen* der SchulanfängerInnen eine wichtige Rolle. DORNHEIM berichtet ja von einem "signifikante[n] Zusammenhang" bereits zwischen "Zahlen-Vorwissen" und "Schicht" (DORNHEIM 2008, S. 508). Auch für die niederösterreichischen Kinder, die für die vorliegende Studie befragt wurden, liefert eine explorativ durchgeführte multivariate Varianzanalyse (ALM, Gesättigtes Modell, Quadratsumme vom Typ III) mit dem Bildungsgrad der Eltern als Faktor und den abhängigen Variablen *Zahlwortreihe t1* und *Quasi-Simultan t1* einen signifikanten Effekt des Bildungsgrades auf das frühe Zahlwissen mit $p=0{,}006$ im Pillai-Spur-Test. Die Signifikanz besteht also auch bei Verschärfung des Signifikanzniveaus auf $p=0{,}01$, welche wegen teilweise fehlender Varianzenhomogenität geboten erscheint (die wesentlichen Tabellen der multivariaten Varianzanalyse werden in Anhang 14 ausgewiesen). Die Erklärungskraft ist bei einem partiellen Eta-Quadrat von 0,073 als mittel einzustufen (vgl. REISINGER 2003, S. 272).

Was sind aber die näheren Gründe, *warum* Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad im Durchschnitt mit niedrigerem Zahlwissen in die Schule eintreten als Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad? Vieles spricht für die zurückhaltende Position DORNHEIMS, die ja in ihrer Studie den Bildungsgrad als ein Kriterium der "Schichtzugehörigkeit" erhoben hat und die zu den positiven Korrelationen von "Schicht-Index", "Zahlen-Vorwissen" und den im CFT 1 gemessenen Intelligenztestwerten anmerkt:

> *"Dies sind jedoch alles korrelative Befunde, die keinen Kausalschluss erlauben. Die Intelligenzunterschiede könnten genetisch bedingt sein und so den Aufbau von mathematischem Vorwissen erschweren. Es könnte jedoch auch umgekehrt so sein, dass in sozial benachteiligten Familien weniger kognitive Anregungen unter anderem auch zum Umgang mit Zahlen gegeben werden, so dass es zu einer geringeren Intelligenz (Reasoning) auch bedingt durch eine geringere Auseinandersetzung mit Wissensinhalten kommen kann"* (DORNHEIM 2008, S. 519).

Wenn nun aber mathematische Kompetenz wesentlich das "Ergebnis des akkumulierten mathematischen Wissens" (STERN 2003, S. 127) ist, dann trägt vermutlich allein schon dieser *Startnachteil* eines geringeren Zahlwissens bei Schuleintritt wesentlich dazu bei, dass Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad bzw. aus einer niedrigeren "Schicht" in ihren Mathematikleistungen (im Durchschnitt) im Laufe der Zeit *immer deutlicher* hinter ihre diesbezüglich privilegierten AlterskollegInnen zurückfallen: Auch *Defizite* "akkumulieren" sich.

Auch an dieser Stelle muss freilich daran erinnert werden, dass die angesprochene "Akkumulation" von Wissen bzw. eben auch von Nicht-Wissen kein *kausal-determinierter* Wirkmechanismus ist. Für die vorliegende Studie gesprochen: Die Schule hatte zehn Monate lang Zeit, um auch Kinder mit zunächst niedrigem Zahlwissen darin zu unterstützen, nicht-zählende Rechenstrategien im Zahlenraum bis zehn zu erwerben. Die Analyse in Kapitel 7 zeigt, dass diese Zeit wohl alles andere als optimal genutzt wurde. Damit soll nicht behauptet werden, dass ein Unterricht im Einklang mit der aktuellen Fachdidaktik es in der Hand gehabt hätte, alle Kinder bis zum Ende des ersten Schuljahres zum *selben* Leistungsniveau zu führen (das mit einiger Sicherheit nicht; vgl. dazu Kap. 10.1.1). Aber darum geht es auch gar nicht. Es geht darum, ob auch Kinder mit schlechten Startbedingungen im Laufe von zehn Monaten wenigstens im Zahlenraum bis zehn nicht-zählend rechnen lernen können. Dass sie dies in der vorliegenden Untersuchung mehrheitlich nicht getan haben, erlaubt angesichts der in Kapitel 7 analysierten Qualität ihres Mathematikunterrichts jedenfalls keinesfalls den Rückschluss, dass dieses Resultat des ersten Schuljahres bereits durch ihre Defizite bei Schuleintritt *unwiderruflich determiniert* gewesen sei.

Soweit die *eine* Argumentationslinie zum Einfluss des Bildungsgrades der Eltern auf die Entwicklung der Rechenstrategien ihrer Kinder im ersten Schuljahr. Die *zweite* Argumentationslinie betrifft die *weitere Förderung*, die Kinder im Laufe dieses Schuljahres von ihren Eltern erhalten haben. Die in Kapitel 10.1.2 erläuterten Ergebnisse einer explorativen Varianzanalyse zum Einfluss von Bildungsgrad und Geschlecht auf die häusliche Übungszeit zeigen freilich, dass Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad mit ihren Kindern im Durchschnitt (jedenfalls nach eigenen Angaben) *deutlich mehr* geübt haben als Eltern mit höherem Bildungsgrad. Das wurde gedeutet als Reaktion darauf, dass sich bei ihren Kindern im Durchschnitt auch tatsächlich höherer Übungsbedarf zeigte. In jedem Fall scheint es aber auf Grundlage dieser Studie *nicht* gerechtfertigt, eine in *quantitativer* Hinsicht geringere Förderung der Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad im ersten Schuljahr anzunehmen. Möglicherweise bestehen hier aber Unterschiede *qualitativer* Art, in der Weise, dass die Häufigkeit wirksamer Förderung (etwa durch Anregungen für Ableitungsstrategien) in "Matura-Familien" höher war als in "Nicht-Matura-Familien". Da in der vorliegenden Studie aber keine Details zur Qualität des häuslichen Übens erhoben wurden, muss dies Spekulation bleiben.

Beide Argumentationslinien führen freilich zu derselben pädagogischen Konsequenz. Denn die Schule als gesellschaftliches Subsystem kann den Bildungsgrad der Eltern ja ebenso wenig ändern wie deren Schichtzugehörigkeit. Wenn daraus für viele Kinder ein Startnachteil erwächst, ist dies von der Schule ebenso wenig aus der Welt zu schaffen wie ein dauerhafter Nachteil, der sich durch eingeschränkte Fördermöglichkeiten durch die Eltern ergibt. (Vor allem in späteren Schuljahren kommt die Benachteiligung hinzu, die in der innerschulischen Konkurrenz durch eingeschränkte Möglichkeiten der Finanzierung außerschulischer Nachhilfe entsteht.) Was die Schule aber tun kann, ist für Kinder – *alle* Kinder – einen pädagogisch und fachdidaktisch hoch qualifizierten Mathematikunterricht zu gewährleisten. Ein solcher bietet die besten Chancen dafür, dass Kinder auch dann einen Zugang zur Mathematik finden, wenn sie (aus welchen Gründen auch immer) mit nur geringem Zahlwissen in die Schule eintreten (was ja im Übrigen, wenn auch offenbar seltener, auch bei Kindern aus Akademiker-Familien vorkommt). Und ein solcher bietet auch die besten Chancen dafür, dass erfolgreiches mathematisches Lernen auch für leistungsschwächere SchülerInnen nicht nur dann möglich ist, wenn sie außerschulisch gezielt gefördert werden.

10.4 Zum Einfluss des Faktors "Zeit"

Die Varianzanalyse mit Messwiederholung zeigt einen höchst signifikanten Einfluss der über die drei Messzeitpunkte als "Innersubjektfaktor" berücksichtigten Zeit auf den Anteil, zu dem Kinder nicht-triviale additive Grundaufgaben durch Fakten nutzende Strategien lösen ($p \leq 0{,}001$). Die paarweisen Vergleiche der geschätzten Randmittel für die drei Messzeitpunkte zeigen, dass sowohl der Zuwachs vom ersten zum zweiten wie auch der Zuwachs vom zweiten zum dritten Messzeitpunkt statistisch signifikant waren (vgl. Kap. 9.1.5).

Bei näherer Betrachtung lässt sich aber erkennen, dass die Zuwächse im zweiten Halbjahr deutlich geringer ausfielen als im ersten, und dies in Abhängigkeit von Geschlecht und Bildungsgrad der Eltern: Der Anteil von Faktennutzung war bei Buben aus Nicht-Matura-

Familien am Ende des Schuljahres nur um etwa 9,5 Prozentpunkte über dem zur Mitte des Schuljahres; das entspricht etwa 1,3 Aufgaben, die am Ende des Schuljahres zusätzlich durch Faktennutzung gelöst wurden. In der Gruppe mit den größten Zuwächsen im zweiten Halbjahr – das waren die Mädchen aus Matura-Familien – machte dieses Plus umgerechnet etwa 2,6 Aufgaben aus (vgl. Kap. 9.1.4).

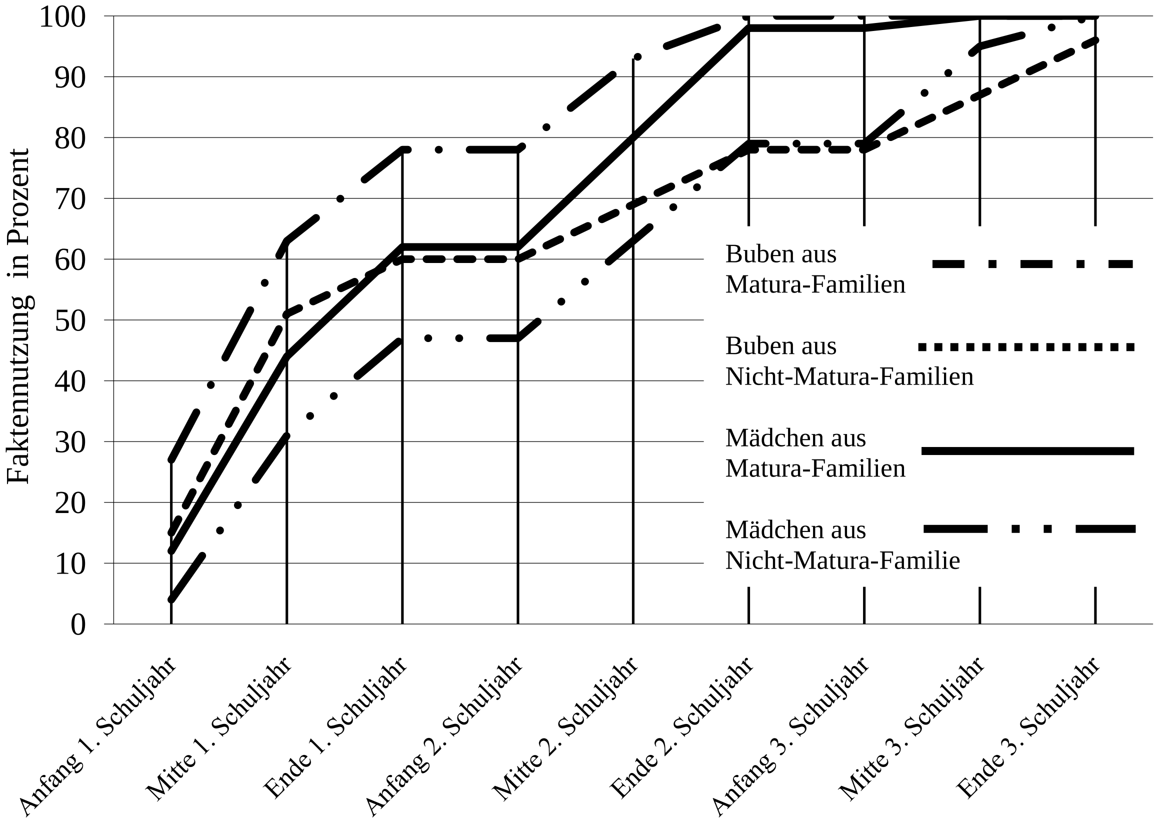
Dabei ist zweierlei zu berücksichtigen: Zum einen gehörten vier der Aufgaben, die in der Varianzanalyse mit Messwiederholung zum Vergleich der Rechenleistungen Mitte und Ende des Schuljahres herangezogen wurden, zwar Mitte des Schuljahres noch nicht, am Ende des ersten Schuljahres aber sehr wohl zu den "trivialen" Aufgaben. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass es gerade im Bereich dieser vier Aufgaben im zweiten Schuljahr hohe Zuwächse an Faktenabruf gegeben hat, was angesichts der Struktur dieser Aufgaben (10–9, 10–5, 9–1 und 1+6) vor dem Hintergrund der im qualitativen Teil geleisteten Analysen (vgl. Kap. 8.4.1.1) auch wenig überraschte. Wären bereits Mitte des Schuljahres alle 14 Aufgaben gefragt worden, die sich am Ende des Schuljahres als "nicht-trivial" erwiesen haben, und wären die Zuwächse innerhalb *dieser* Aufgaben gemessen worden, dann wären sie mit einiger Sicherheit niedriger ausgefallen und hätte die tatsächliche Entwicklung auch quantitativ um einiges adäquater erfasst werden können.

Zum anderen darf nicht außer Acht gelassen werden, von welchem Niveau aus diese Zuwächse jeweils stattfanden: Beim Zuwachs im ersten Halbjahr ist zu berücksichtigen, dass Faktennutzung (außerhalb der hier nicht berücksichtigten Verdoppelungen) zu Schulbeginn allgemein äußerst selten war und etwa bei den Mädchen aus Nicht-Matura-Familien so gut wie gar nicht vorkam. Doch Mitte des Schuljahres, nach fünf Monaten fast täglichem Rechenunterricht im Zahlenraum bis zehn, lag der Anteil von Faktennutzung bei den Mädchen aus Nicht-Matura-Familien im Bereich der 14 Testaufgaben bei gerade einmal 31 Prozent, bei Mädchen aus Matura-Familien bei 44 Prozent, bei Buben aus Nicht-Matura-Familien bei 51 Prozent, bei Buben aus Matura-Familien bei 63 Prozent. Da gab es also noch gehörig Spielraum für weitere Zuwächse. Diese fielen aber im zweiten Halbjahr deutlich geringer aus als im ersten, sodass Mädchen aus Nicht-Matura-Familien von den 14 Testaufgaben im Zahlenraum bis zehn, die zu fast einem Drittel trivial waren, am Ende des ersten Schuljahres immer noch nur etwa 47 Prozent durch Faktennutzung lösten. Mädchen aus Matura-Familien taten dies zu diesem Zeitpunkt zu etwa 62 Prozent, Buben aus Nicht-Matura-Familien zu etwa 60 Prozent, Buben aus Matura-Familien zu etwa 78 Prozent – all dies aber bezogen auf zu etwa einem Drittel triviale Plus- und Minus-Aufgaben im Zahlenraum bis zehn, und dies vor dem Hintergrund, dass *sämtliche* Aufgaben im Zahlenraum bis zehn nach einhelliger Empfehlung der aktuellen Fachdidaktik am Ende des ersten Schuljahres von *allen* Kindern *zu 100 Prozent* durch Faktennutzung gelöst werden sollten (vgl. Kap. 3.2).

Vor diesem Hintergrund sollte auch die Abflachung der Zuwächse an Faktennutzung im zweiten Schulhalbjahr diskutiert werden. Nun wissen wir nicht, wie sich die interviewten Kinder nach dem ersten Schuljahr weiterentwickelt haben. Vielleicht lohnt an dieser Stelle aber ein Gedankenexperiment: Wohin hätte es geführt, wenn die Kinder erstens zu Beginn des zweiten Schuljahres noch den Stand vom Ende des ersten Schuljahres gehalten hätten (eine sehr optimistische Annahme, da im Laufe der langen Sommerferien bei vielen vermutlich einiges in Vergessenheit geraten sein wird); und wenn sie zweitens Halbjahr für Halbjahr ähnliche Zuwächse in der Faktennutzung verzeichnet hätten wie im zweiten Halbjahr des ersten Schuljahres (die Frage, wie plausibel diese Annahme ist, wird weiter unten diskutiert)?

In Abbildung 21 wird der *fiktive* weitere Verlauf bei Einhaltung dieser beiden Voraussetzungen graphisch dargestellt. Der Graphik ist zu entnehmen, dass bei fiktiver Fortschreibung der Entwicklung unter den oben formulierten Annahmen das Ziel, das die aktuelle Fachdidaktik für das Ende des ersten Schuljahres vorgibt (nicht-zählendes Beherrschen des Zahlenraums bis 10), erst am Ende des dritten Schuljahres mit (fast) allen Kinder und selbst mit den beiden privilegierten Teilgruppen (Buben und Mädchen von Eltern mit höherem Bildungsgrad) erst am Ende des zweiten Schuljahres erreicht worden wäre.

Abbildung 21: Fiktive weitere Entwicklung des Anteils von Faktennutzung unter Annahme einer Fortschreibung der Zuwachsrate des zweiten Schulhalbjahrs



Nun ist aber die dieser fiktiven Fortschreibung zu Grunde gelegte Annahme, dass *alle* Kinder ihren Anteil an Fakten nutzenden Strategien in zwar unterschiedlichem Tempo, aber doch jeweils kontinuierlich steigern würden, bis sie früher oder später das Maximum von 100 Prozent Faktennutzung im Zahlenraum bis zehn erreicht haben würden, wohl ohnedies viel zu optimistisch. Denn zum einen hat sich ja in der qualitativen Auswertung der Interviews gezeigt, dass ein beträchtlicher Teil der Kinder (Strategietypus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten") im zweiten Halbjahr des ersten Schuljahres seine Rechenstrategien so gut wie gar nicht mehr verändert hat (vgl. Kap. 8.5.3.3). In der quantitativen Auswertung zeigen sich zwar (bescheidene) Zuwächse in der Faktennutzung in *allen vier* Gruppen, die sich durch die Kombination der jeweils zweistufigen Faktoren "Geschlechtszugehörigkeit" und "Bildungsgrad der Eltern" ergeben. Doch hinter den dabei verrechneten Durchschnittswerten stehen auch etliche Kinder, die im zweiten Schulhalbjahr *keine* Zuwächse in der Faktennutzung mehr hatten und mitunter in dieser Hinsicht sogar Rückschritte gemacht haben. Und wir wissen aus einer Reihe von Studien, dass nicht wenige Kinder noch in der Sekundarstufe im Wesentlichen zählende Rechner sind, ob man sie in der Statistik nun als "below average" berücksichtigt wie GRAY 1991 oder als "rechenschwach" wie SCHÄFER 2005 oder MOSER OPITZ 2007.

Damit zurück zu unserem Gedankenexperiment: Es geht dabei natürlich nicht um eine (nachträgliche) Prophezeiung, deren Eintreffen oder Nichteintreffen im Rahmen dieser Studie nun einmal nicht überprüft wurde. Die fiktive Fortschreibung der Entwicklungsverläufe macht aber deutlich, dass die bei den interviewten Kindern im zweiten Schulhalbjahr festgestellten Zuwächse im Anteil Fakten nutzender Strategien wenig Anlass dazu geben, im weiteren Verlauf auf den "Faktor Zeit" zu setzen und sich damit zu beruhigen, dass früher oder später ja doch alle Kinder das erwünschte Ziel erreichen würden. Denn selbst *wenn* wir bei allen Kindern eine weitere stete Zunahme der durch Faktennutzung gelösten Grundaufgaben annehmen wollten – und im voranstehenden Absatz wurden Argumente dafür angeführt, warum dies wohl eine *unrealistische, übertrieben optimistische* Annahme ist – selbst *dann* wäre zu befürchten, dass viele Kinder noch im dritten Schuljahr selbst im Zahlenraum bis zehn (und dann erst recht in höheren Zahlenräumen) auf zählende Rechenstrategien angewiesen bleiben, mit allen negativen Konsequenzen für die Entwicklung ihres mathematischen Denkens wie auch für ihre Einstellung zur Mathematik, die in Kapitel 3.1 ausgeführt wurden.

In diesem Zusammenhang sollte nun auch das Ergebnis der Signifikanzprüfung für die Hypothesen $H1_5$ und $H1_6$ diskutiert werden. Denn dass die Anteile von Faktennutzung zu Beginn und am Ende des ersten Schuljahres ($H1_5$) wie auch die Anteile von Faktennutzung zur Mitte und am Ende des ersten Schuljahres ($H1_6$) signifikant positiv korrelieren, ist für sich genommen wenig spektakulär (wobei ohnedies kein Anspruch auf *spektakuläre* Hypothesen erhoben wird; es ging darum, zu prüfen, was prüfens*wert* und auf Grundlage der durchgeführten Erhebungen prüf*bar* erschien). Die Varianzanalyse, die zur Prüfung der Hypothesen $H1_1$ bis $H1_4$

unternommen wurde, hat unter anderem erbracht, dass es mit Bezug auf die Häufigkeit Fakten nutzender Strategien in allen Untergruppen einen Lernzuwachs im ersten Schuljahr gegeben hat. Die Gruppenunterschiede, die es zu Beginn des Schuljahres gegeben hat, sind im Laufe des Schuljahres mehrheitlich erhalten geblieben (nur die Mädchen aus Matura-Familien haben die Buben aus Nicht-Matura-Familien überholt) und haben sich zum Teil noch verstärkt (etwa zwischen Kindern aus Matura-Familien und Nicht-Matura-Familien). Darin ist implizit bereits enthalten, dass jene Kinder, die bereits zu Beginn des ersten Schuljahres mehr Aufgaben durch Faktennutzung lösten als die anderen, dies in der Regel auch zur Mitte und am Ende des ersten Schuljahres taten. Die zur Prüfung von $H1_5$ und $H1_6$ ermittelten signifikant positiven Korrelationen stellen diesen Zusammenhang lediglich explizit dar.

Was damit aber an zusätzlicher Information gewonnen wurde, sind Aussagen über die *Stärke* des Zusammenhangs. Und hier zeigt sich, dass zwischen dem Anteil der Faktennutzung zu Beginn und jener am Ende des ersten Schuljahres mit r_S=0,459 eine zwar höchst signifikante, aber eben doch nur geringe Korrelation besteht, während die Korrelation zwischen dem Anteil der Faktennutzung zur Mitte und am Ende des ersten Schuljahres mit r_S=0,807 nach der üblichen Einstufung hingegen als hoch zu bewerten ist (vgl. ZÖFEL 2003, S. 151). In einem Regressionsmodell ergäbe sich dafür ein korrigiertes R^2 von 0,642, d.h.: Etwa 64 Prozent der Varianz der Häufigkeit von Faktennutzung am Ende des ersten Schuljahres lassen sich statistisch durch die Häufigkeit von Faktennutzung Mitte des Schuljahres aufklären.

Dazu passt nun das Ergebnis der qualitativen Analyse, dass sich die Zugehörigkeit zu einer der Strategiegruppen, die ihrerseits der Idealtypenbildung zu Grunde liegen, zwischen dem ersten und zweiten Messzeitpunkt deutlich häufiger änderte als zwischen dem zweiten und dritten Messzeitpunkt (vgl. Kap. 8.5.3): Immerhin 66 von 139 Kindern gehörten Mitte des Schuljahres einer anderen Gruppe an als zu Beginn des Schuljahres, aber bei nur noch 43 Kindern änderte sich die Gruppenzugehörigkeit auch noch zwischen Mitte und Ende des Schuljahres – 25-mal im Sinne eines Fortschritts im Bereich der Faktennutzung, 18-mal im Sinne eines Rückschritts.

Diese weitgehende Stabilität der Strategiepräferenzen ist wiederum plausibel vor dem Hintergrund der Überlegungen, die in Kapitel 8.5.4.1 als "Versuch einer Theorie der Rechenstrategieentwicklung" formuliert wurden. Die Theorie postuliert ja, dass zählendes Rechnen (und zwar gerade auch schnelles und sicheres zählendes Rechnen) *für sich genommen* das Automatisieren von Zahlenfakten *tendenziell erschwert*. Dann besteht aber auch bei einem Kind, das Mitte des ersten Schuljahres erst wenige Aufgaben automatisiert hat und alle anderen Aufgaben zählend löst (also keine Ableitungsstrategien anwendet), *eine erhöhte Wahrscheinlichkeit*, dass sich daran auch bis zum Ende des ersten Schuljahres nichts Wesentliches ändern wird –

jedenfalls dann, wenn das Kind im zweiten Schulhalbjahr (schulisch oder außerschulisch) nicht gezielt darin unterstützt wird, nicht-zählende Rechenstrategien zu entwickeln.

Zur Begründung dieser Wahrscheinlichkeitsbehauptung: Natürlich können Kinder auch ohne gezielte Unterstützung, einfach im Zuge der fortdauernden (vorwiegend schulischen) Auseinandersetzung mit Rechenaufgaben, nicht-zählende Strategien entdecken. Auch die 86 Kinder, die beim dritten Interview mindestens eine Ableitungsstrategie gezeigt haben, sind darin ja vermutlich in den wenigsten Fällen gezielt unterstützt worden. Doch 25 dieser Kinder lösten dann im Verlaufe dieses dritten Interviews auch nur genau *eine* Aufgabe durch Ableitung (vgl. Kap. 8.4.4), viele davon in der in Kapitel 8.4.3.3 charakterisierten Weise, wo also das Ableiten eher den Charakter einer singulären "Eselsbrücke" zu haben schien als den einer Einsicht in eine universelle Lösungsstrategie. Von den 61 Kindern, die am Ende des ersten Schuljahres mehr als ein Aufgabe durch Ableitung lösten und mit größerer Berechtigung als "AbleiterInnen" bezeichnet werden könnten, hatten aber 53 Kinder (87 Prozent dieser Gruppe) bereits im Interview Mitte des Schuljahres die eine oder andere Aufgabe durch Ableitung gelöst. Kinder, die im ersten Schuljahr (weitgehend selbstständig) Ableitungsstrategien entdeckt haben, taten dies also in der Mehrzahl der Fälle bereits im ersten Schulhalbjahr und deutlich seltener erst im zweiten Schulhalbjahr.

Was müsste denn passieren, damit ein bis dahin (mit Ausnahme einzelner auswendig gemerkter Aufgaben) nur zählend rechnendes Kind im zweiten Schulhalbjahr ohne gezielte Unterstützung eine Ableitungsstrategie anwendet? Es müsste eben selbsttätig einen operativen Zusammenhang *zur Kenntnis nehmen.* Das müsste nicht unbedingt bereits im Sinne einer tieferen Einsicht erfolgen. Aber das Kind müsste zumindest merken, dass es sich in diesem und jenem Fall das zählende Rechnen ersparen kann, weil das gewünschte Ergebnis auch durch einen *Vergleich* mit einer anderen Aufgabe zu haben ist (hier genügt also erst einmal die Einsicht, dass es "erlaubt" ist, so zum Ergebnis zu gelangen; vgl. BAROODYs Rede von der "commutativity permission", BAROODY u.a. 2003, S. 154 und Kap. 2.10.3). Eine Grundvoraussetzung für eine solche Entdeckung ist Nach-Denken, Reflexion; also nicht einfach nur *tun* (die *Prozedur* des zählenden Rechnens abspulen), sondern – davor, danach, mittendrin, wann auch immer – die Aufgabe und das Ergebnis, die Aufgabe und andere Aufgaben (Aufgaben, die man gerade eben gelöst hat oder die man ohnedies bereits auswendig weiß) gedanklich miteinander in Beziehung setzen; darüber nachdenken, was das Gemeinsame ist, was verschieden ist, und daraus Schlüsse ziehen.

Wenn nun ein Kind diese gedankliche Leistung (ohne gezielte Unterstützung) nicht schon in den ersten fünf Schulmonaten erbracht hat, ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass es dies (ohne gezielte Unterstützung) in den zweiten fünf Schulmonaten tut oder auch erst im Laufe des zweiten Schuljahres. Die Chancen dafür werden im Laufe der Zeit aber wohl nicht günstiger. Denn das, was oben als Grundvoraussetzung für das selbsttätige Entdecken einer Ableitungsstrategie genannt wurde, die Reflexion, steht im Widerspruch zur Gewohnheit des zählenden Rechnens, die sich im Laufe der Zeit ausprägt und, wie berichtet, bei manchen Kindern dazu geführt hat, dass sie am Ende des ersten Schuljahres selbst solche Aufgaben zählend gerechnet haben, die sie Mitte des Schuljahres noch etwa durch nicht-zählenden Fingergebrauch gelöst hatten (vgl. Kap. 8.5.3.3).

"Challenge problems", also etwa Aufgaben mit Zehnerübergang, tragen zwar bei manchen Kindern dazu bei, von dieser Gewohnheit des zählenden Rechnens auch wieder zu lassen (das betrifft vor allem die Kinder des Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen, vgl. Kap. 8.5.3.4). Aber das setzt bereits einiges an arithmetischem Faktenwissen und Einsicht in operative Zusammenhänge voraus. Kinder, die diese Voraussetzungen nicht mitbringen, sind von solchen Aufgaben tendenziell überfordert (vgl. Kap. 8.4.2.2); sie greifen bei diesen Aufgaben daher eher auf sonst bereits überwundene Strategien wie Alleszählen zurück, als dass sie gerade hier die Macht des Ableitens entdecken könnten (vgl. Kap. 8.4.2.3).

Das Entdecken von Ableitungsstrategien erst im zweiten und nicht schon im ersten Schulhalbjahr war wohl aus den genannten Gründen in der Gesamtstichprobe eher selten. Dass aber Kinder, die *nicht* ableiten, am Ende des ersten Schuljahres die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn vollständig oder auch nur weitgehend automatisiert haben, war noch seltener (Strategietyp "Hohe Merkleistung ohne Ableiten" mit nur drei von 139 Kindern, die im Rahmen dieser Studie interviewt wurden, vgl. Kap. 8.5.3.2); vermutlich eben deshalb, weil diesen Kindern mit dem Ableiten eine wesentliche begünstigende Voraussetzung für das Automatisieren fehlt. (Freilich dürfte hierbei auch eine Rolle spielen, dass in Österreich beim "Kleinen Einspluseins" üblicherweise *nicht* oder jedenfalls nicht in derselben Intensität wie beim "Kleinen Einmaleins" auf das *Auswendiglernen* hingearbeitet wird, vgl. Kap. 8.5.3.2 und Forschungshypothese 2 in Kap. 8.5.4.2.)

Beides zusammengenommen liegt es also *in der Logik des zählenden Rechnens* begründet, dass bereits Mitte des ersten Schuljahres mit hoher Wahrscheinlichkeit absehbar ist, wie das Kind am Ende des ersten Schuljahres rechnen wird – zumindest insofern, als eine bestimmte Variante der Strategieentwicklung bereits zu diesem Zeitpunkt höchst unwahrscheinlich geworden ist: Kinder, die noch Mitte des ersten Schuljahres vorwiegend zählende Rechner sind und nicht wenigstens hin und wieder auch Ableitungsstrategien anwenden, werden *in der Regel* auch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählende Rechner sein (jedenfalls dann, wenn gezielte Fördermaßnahmen ausbleiben). Ausnahmen gibt es, Kinder also, die (offenbar auch ohne gezielte Fördermaßnahmen) erst im zweiten Halbjahr Ableitungsstrategien entdecken und/oder (dann vermutlich nur in Folge gezielter häuslicher Förderung) ihren Bestand an auswendig gewussten Rechenaufgaben im Laufe des zweiten Halbjahres entscheidend vergrößern. Aber das sind eben Ausnahmen von der erläuterten Regel. Auf der anderen Seite ist allerdings *nicht* garantiert, dass ein Kind, das Mitte des ersten Schuljahres neben zählendem Rechnen auch Ableitungsstrategien anwendet, diesen Strategiemix nicht auch noch am Ende des ersten Schuljahres zeigt. Denn das Ableiten ist zwar eine *begünstigende* Voraussetzung für das Automatisieren, aber keine *hinreichende* (vgl. Kap. 8.5.3.4 und 8.5.3.5).

Es gibt also Mitte des ersten Schuljahres immer noch einen gewissen "Spielraum" dafür, dass Kinder, die vorwiegend zählend rechnen, sich bis zum Ende des Schuljahres zu vorwiegend Fakten nutzend rechnenden Kindern entwicklen. Dieser Spielraum ist aber aufgrund der erläuterten Eigengesetzlichkeiten des zählenden Rechnens relativ gering.

Anders zu Beginn des ersten Schuljahres: Zählendes Rechnen ist hier die Regel, Fakten nutzendes Rechnen die Ausnahme. Viele Kinder beginnen zu diesem Zeitpunkt gerade erst, sich mit additiven Rechenaufgaben intensiver zu beschäftigen. Je höher ihr Zahlwissen zu Schulbeginn, desto besser ihre Chancen dafür, im Zuge dieser nun intensivierten Beschäftigung auch ohne gezielte Unterstützung Ableitungsstrategien zu entdecken. Das Nutzen von Ableitungsstrategien erhöht vermutlich wiederum ihre Chancen dafür, bis zum Ende des ersten Schuljahres alle oder fast alle Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Faktennutzung lösen zu können. Kinder, die (auf Grundlage ihres Zahlwissens) schon zu Beginn des ersten Schuljahres Fakten nutzende Strategien anwenden, bringen also *günstige Voraussetzungen* dafür mit, das zählende Rechnen im Laufe des ersten Schuljahres hinter sich zu lassen. Das lässt sich an den Entwicklungsverläufen sehen: Von den 26 Kindern, die bereits im ersten Interview Ableitungsstrategien (abgesehen vom Vertauschen von Summanden) zeigten (vgl. Kap. 8.2.31), entwickelten sich 18 Kinder (69 Prozent dieser Gruppe) bis zum Ende des ersten Schuljahres zu vorwiegend Fakten nutzenden Rechnern und nur zwei Kinder zu vorwiegend zählenden Rechnern. Umgekehrt waren aber von den 46 Kindern, die am Ende des Schuljahres dem Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten" angehörten, nur 14 Kinder (30 Prozent) auch schon zu Beginn des ersten Schuljahres vorwiegend Fakten nutzende Rechner. Der "Spielraum" für Veränderungen in den Strategiepräferenzen ist zu Schulbeginn also noch groß. Anders dagegen Mitte des Schuljahres: Von den 46 Kindern, die am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend Fakten nutzende Rechner waren, waren 37 Kinder (80 Prozent) schon Mitte des Schuljahres vorwiegend Fakten nutzende Rechner. Die spätere Entwicklung war Mitte des Schuljahres schon in relativ stabile Bahnen gelenkt, aus denen nur noch relativ wenige Kinder im zweiten Halbjahr ausscherten.

Was sich in den so unterschiedlichen Koeffizienten der Korrelationen *Faktennutzung t1/Faktennutzung t3* und *Faktennutzung t2/Faktennutzung t3* statistisch niederschlägt, ist also vor allem auch die *Eigengesetzlichkeit der Entwicklung von Rechenstrategien*. Diese macht es mit Fortdauer des Schuljahres zunehmend weniger wahrscheinlich, dass aus vorwiegend zählendem Rechnen noch vorwiegend Fakten nutzendes Rechnen wird. Die pädagogische Konsequenz daraus liegt auf der Hand: Wir dürfen die Kinder nicht dieser Eigengesetzlichkeit überlassen, sondern müssen im Unterricht gezielt darauf hinarbeiten, dass auch jene Kinder Alternativen zum zählenden Rechnen entdecken und nutzen, die dies *auf sich allein gestellt* nicht tun. Dafür müsste vermutlich nicht mehr geschehen als die Umsetzung jener didaktisch-methodischen Empfehlungen, die in Kapitel 4 als Konsens der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik erläutert wurden. Warum dies derzeit in Österreich in der Regel nicht geschieht und was geändert werden müsste, damit es geschehen kann, ist noch zu diskutieren (vgl. Kap. 10.6.1).

10.5 Zum Einfluss des Ableitens auf das Automatisieren

Die durch Chi-Quadrat-Test und Fisher-Tests statistisch abgesicherten (vgl. Kap. 9.3) Alternativhypothesen $H1_7$ und $H1_8$ postulieren, dass eine bestimmte Kombination zweier Ereignisse signifikant häufiger eintrifft als eine andere: Kinder, die Mitte des Schuljahres eine bestimmte Grundaufgabe durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, haben dieselbe Grundaufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf gelöst als andere Kinder, die diese Aufgabe Mitte des Schuljahres durch Weiter- bzw. Rückwärtszählen ($H1_7$) oder durch Fingerteil- bzw. Alleszählen ($H1_8$) gelöst haben. Explorativ zeigte sich derselbe signifikante Unterschied auch gegenüber Kindern, die diese Aufgabe Mitte des Schuljahres durch nicht-zählenden Fingergebrauch gelöst haben.

Was hilft uns das für die Beantwortung der unter didaktisch-methodischer Perspektive so wichtigen Frage, ob das Anwenden von Ableitungsstrategien förderlich ist für das letztlich erwünschte Automatisieren der additiven Grundaufgaben (vgl. Kap. 3.2 und Kap. 4.2)?

Zunächst ist einzuräumen, dass es wenig plausibel wäre zu behaupten, dass das *einmalige* Ableiten einer Aufgabe einen Effekt habe auf die Speicherung dieser Aufgabe im Langzeitgedächtnisses. In der vierten "inhaltlichen Hypothese", die den Prüfhypothesen $H1_7$ und $H1_8$ zu Grunde liegt, war ja auch vom "wiederholten Ableiten" die Rede (vgl. Kap. 5.1), so wie Autoren wie BAROODY, VAN DE WALLE oder GERSTER dem *wiederholten*, schließlich zur Gewohnheit gewordenen Ableiten eine förderliche Wirkung für das Automatisieren zuschreiben (vgl. v.a. Kap. 2.8 und 3.2).

Im Rahmen dieser Untersuchung konnte nun aber nicht erhoben werden, ob ein Kind eine Aufgabe im Laufe des ersten Schuljahres *wiederholt* durch die eine oder andere Strategie gelöst hat; dafür wäre eine mikrogenetische Studie notwendig gewesen. Was erhoben wurde, sind lediglich drei *Momentaufnahmen*. Wir wissen also letztlich nur (und auch das nur *einigermaßen* sicher; vgl. Kap. 6.1.4), dass ein Kind unter der "Laborbedingung" des qualitativen Interviews eine bestimmte Aufgabe an einem bestimmten Tag im Februar seines ersten Schuljahres mit dieser, an einem bestimmten Tag im Juni dieses ersten Schuljahres erneut mit dieser oder mit einer anderen Strategie gelöst hat. Wir können nicht mit Sicherheit sagen, dass gerade dieses Lösungsverhalten bei dieser Aufgabe in diesem Zeitraum (Januar, Februar…) typisch für dieses Kind war, dass also ein Kind, das eine Aufgabe im zweiten Interview durch eine Ableitungsstrategie gelöst hat, dies auch davor und danach immer wieder getan hat. Nur in diesem Fall wäre aber ein Effekt auf das Automatisieren dieser Aufgabe vor dem Hintergrund der angesprochenen Erklärungsmodelle etwa von BAROODY oder GERSTER überhaupt *plausibel*.

Diese Schwäche, die das Untersuchungsdesign mit Bezug auf die hier erörterte Frage aufweist, soll nicht geleugnet werden. Eine mikrogenetische Studie mit deutlich häufigeren Befragungen konnte aber wegen des damit verbundenen gewaltigen Mehraufwands nicht geleistet werden (und hätte ihrerseits erhebliche forschungsmethodische Probleme aufgeworfen, vgl. Kap. 8.5.4.2).

So lohnend es nun wäre, der Frage im Rahmen einer mikrogenetischen Studie tiefer auf den Grund zu gehen (dann aber vorzugsweise in einem grundlegend veränderten Setting, vgl. Kap. 8.5.4.2), so lassen doch auch die Momentaufnahmen, die für diese Studie gemacht werden konnten, zumindest *erste, vorsichtige Antworten* zu. Denn aus vorliegenden mikrogenetischen Studien (vgl. etwa SIEGLER & JENKINS 1989) wissen wir zwar, dass in frühen Phasen der arithmetischen Entwicklung keine durchgehende Konsistenz in der Strategiewahl besteht, dass Kinder in bestimmten Phasen ihrer Entwicklung aber doch jeweils "Hauptstrategien" für bestimmte Aufgaben haben. Dass in der Momentaufnahme des qualitativen Interviews nicht die jeweilige "Hauptstrategie" erfasst wurde, ist in Einzelfällen denkbar, doch solche Abweichungen sollten sich in der Summe aller 139 Interviews weitgehend aufheben. Wir können also nicht beanspruchen, mit unseren Momentaufnahmen die aktuellen Strategiepräferenzen *jedes einzelnen Kindes bei jeder einzelnen Aufgabe* akkurat erfasst zu haben. Sie sollten aber doch in ihrer Gesamtheit eine recht valide Einschätzung darüber erlauben, wie häufig in der Gesamtgruppe der Kinder zu den einzelnen Terminen die verschiedenen Strategien auch für einzelne Aufgaben genutzt wurden.

Und nur über die Gesamtgruppe sollen Aussagen getroffen werden. Es geht nicht um die Behauptung von Notwendigkeiten ("Wiederholtes Ableiten einer Aufgabe im Laufe des Schuljahres führt notwendigerweise und in allen Fällen zum Automatisieren dieser Aufgabe bis zum Ende des Schuljahres"), sondern von Tendenzen, von Wahrscheinlichkeiten. Wenn ein

Kind eine Aufgabe im Interview Mitte des Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie löst, ist es *wahrscheinlich*, dass es diese Aufgabe schon zuvor auf diesem Weg gelöst hat. Nur in einigen wenigen Fällen hatte es den Anschein, als hätte das Kind den Ableitungszusammenhang tatsächlich im Augenblick der Befragung durch einen "Geistesblitz" entdeckt (vgl. etwa Kap. 8.2.2.2). In vielen Fällen sagten die Kinder selbst, sie würden das "immer so machen", oder sie wandten die Ableitungsstrategie so routiniert an, dass außer Frage stand, dass sie dies nicht zum ersten Mal und wohl auch nicht zum letzten Mal gemacht haben (vgl. etwa Kap. 8.3.3.3). Sofern Kinder aber eine Aufgabe im Interview Mitte des Schuljahres abgeleitet haben, haben sie dieselbe Aufgabe am Ende des Schuljahres mit signifikanter Häufung auswendig gewusst (ausgewiesen durch den sehr signifikanten Wert des entsprechenden standardisierten Residuums im Chi-Quadrat-Test über die Kreuztabelle, in der die Strategien von Mitte und Ende des ersten Schuljahres in Beziehung gesetzt werden, vgl. Kap. 9.3). Umgekehrt weisen die standardisierten Residuen für die Zellen "Weiterzählen zu t2/Faktenabruf zu t3" bzw. "Finger-Teilzählen zu t2/Faktenabruf zu t3" sehr bzw. höchst signifikante Defizite aus.

Damit ist freilich weder *bewiesen*, dass wiederholtes Ableiten einer Grundaufgabe deren Auswendigmerken fördert, noch, dass wiederholtes zählendes Rechnen das Auswendigmerken behindert. Die Ergebnisse der Prüfstatistik sind aber mit diesem Erklärungsmodell *gut vereinbar*; einem Modell, das sich im Übrigen als *sachlogisch wohlbegründet* erwies (vgl. v.a. Kap. 2.8.2; Kap. 2.10.4; Kap. 2.12.1 und Kap. 2.12.2; Kap. 4.2).

Auf der anderen Seite sind diese Ergebnisse schwer vereinbar mit der Annahme, dass wiederholtes zählendes Lösen einer Aufgabe für deren Automatisierung förderlich sei; jedenfalls dann, wenn diese förderliche Wirkung sich bereits im Laufe des ersten Schuljahres zeigen sollte. SIEGLER macht freilich keine Aussagen zum zeitlichen Aspekt des in seinem Erklärungsmodell behaupteten quasi-automatischen Übergangs vom zählenden Rechnen zum Faktenabruf (vgl. Kap. 2.3), und man mag weiterhin behaupten, dass dieser Übergang eben erst im zweiten oder dritten Schuljahr in der in diesem Modell postulierten Weise eintrete. Selbst wenn dem so wäre, müsste mit Blick auf die Lehrplananforderungen des zweiten Schuljahres (vgl. Kap. 3.1) überlegt werden, entweder diese Lehrplananforderungen zu ändern – oder aber sich im Unterricht nicht auf einen (vermuteten) "natürlichen" Übergang zur Automatisierung (wann immer der dann eintreten mag) zu verlassen.

Im *Vergleich* der verschiedenen Entwicklungsverläufe zeigt sich jedenfalls, dass ein Wechsel vom Ableiten einer Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres zum Auswendigwissen dieser Aufgabe am Ende des Schuljahres signifikant öfter erfolgt ist als ein Wechsel von einer Zählstrategie zum Auswendigwissen (vgl. die Ergebnisse der einzelnen Fisher-Tests in Kapitel 9.3). Hier ist aber ein Weiteres zu berücksichtigen: In den 83 Fällen, in denen eine der zehn für diesen Vergleich herangezogenen nicht-trivialen Aufgaben Mitte des Schuljahres abgeleitet wurde, wurde dieselbe Aufgabe nicht nur mit signifikanter Häufung (58-mal) am Ende des Schuljahres auswendig gewusst, sondern im Übrigen auch 17-mal am Ende des Schuljahres erneut abgeleitet. Nur in 7 von 83 Fällen kam es zu einem "Rückschritt" zur Strategie des Weiterzählens, in keinem einzigen Fall wechselte das Kind am Ende des Schuljahres zum Fingerteil- oder Alleszählen. Kinder, die eine Aufgabe Mitte des Schuljahres abgeleitet haben, haben diese Aufgabe also zwar nicht in allen Fällen am Ende des Jahres *auswendig* gewusst, aber nur sehr selten (in etwa 8 Prozent der Fälle) zählend gelöst, und wenn, dann mit der am weitesten fortgeschritten Zählstrategie des Weiterzählens.

In den 179 Fällen, in denen eine dieser Aufgaben Mitte des Schuljahres durch Weiterzählen gelöst wurde, blieb es hingegen 84-mal (in 47 Prozent dieser Fälle) auch am Ende des Schuljahres beim Weiterzählen, und immerhin 15-mal (in 8 Prozent dieser Fälle) kam es sogar zum "Rückfall" ins Fingerteil- oder Alleszählen. Wenn wir als Ziel des ersten Schuljahres also nicht so sehr das Automatisieren als vielmehr das nicht-zählende Lösen von Grundaufgaben ins Auge fassen (wofür einiges spricht; vgl. Kap. 3.3), dann fällt bezogen auf dieses Ziel der Vorteil von Kindern, die Mitte des Schuljahres ableiten, gegenüber den Kindern, die Mitte des Schuljahres weiterzählen, noch deutlicher aus.

Im Vergleich der beiden Hauptvarianten des zählenden Rechnens, also des Weiter- bzw. Rückwärtszählens gegenüber dem Fingerteil- bzw. Alleszählen, zeigt die vorliegende Studie, dass ein Übergang vom *Weiterzählen* zum Faktenabruf noch eher zu erwarten ist als ein Übergang vom *Finger-Teilzählen* zum Faktenabruf (vgl. Kap. 9.3). Das ist im Einklang mit der Annahme GRAYS, dass im Weiterzählen eher als im Alleszählen zumindest die *Möglichkeit* eingeschlossen ist, dass ein Kind den Übergang vom "procedural" zum "proceptual approach" macht (vgl. Kap. 2.9.3). Plausibel ist das deshalb, weil beim Weiterzählen *eher noch* als beim Finger-Teilzählen die Chance besteht, dass Zusammenhänge wahrgenommen werden – zumindest der Zusammenhang zwischen *Aufgabe* und *Ergebnis*. Denn der Zeitaufwand ist beim Weiterzählen, zumal wenn vom größeren Summanden aus weitergezählt wird, in vielen Fällen geringer als beim Fingerteilzählen. Das hängt freilich auch vom jeweiligen Zahlenmaterial ab: Von "sieben" um zwei Schritte weiterzuzählen, ist schnell gemacht. Von "neun" um sechs Schritte zurückzuzählen, erfordert dagegen vermutlich mehr Zeit und Konzentration, als dieselbe Aufgabe durch Finger-Teilzählen zu lösen; und das gilt in besonderer Weise, wenn das Kind beim Rückwärtszählen auf die Verwendung der Finger als Zählhilfe verzichtet. Was hier außerdem als *gegenwirkende Tendenz* zu beachten ist: Gerade die Leichtigkeit, mit der manche Kinder das Weiterzählen als Lösungsstrategie für bestimmte Aufgaben anwenden, scheint in vielen Fällen eher zu einer *Festigung* dieser Strategie als zu einer Automatisierung der Aufgabe beigetragen zu haben, was unter dem Gesichtspunkt der "kognitiven Ökonomie" durchaus nachvollziehbar ist (vgl. Kap. 8.4.4.4).

Zurück zur behaupteten förderlichen Wirkung des Ableitens auf die Automatisierung: Auf zwei mögliche Einwände sei abschließend noch eingegangen.

Zum einen könnte die signifikante Häufung von Fällen, in denen eine Aufgabe zunächst abgeleitet und später durch Faktenabruf gelöst wurde, auch so interpretiert werden, dass Kinder, die aufgrund einer besonderen "Begabung" befähigt seien, die additiven Grundaufgaben bereits im Laufe des ersten Schuljahres (weitgehend) zu automatisieren, aufgrund derselben "Begabung" oder einer damit zusammenhängenden anderen "Begabung" auch in der Lage seien, Ableitungsstrategien zu entdecken und anzuwenden. Nach dieser Argumentation fördere also nicht das Ableiten das Automatisieren, sondern dieselben Kinder, die aufgrund ihrer besonderen kognitiven Disposition zum Ableiten fähig seien, seien auch zum frühen Automatisieren der Grundaufgaben fähig. Dieser alternativen "Erklärung" (die nichts erklärt, solange die behauptete "Begabung" nicht inhaltlich bestimmt und erläutert wird, inwiefern sich daraus einerseits Ableiten, andererseits Faktenabruf ergibt) wäre *empirisch* nichts entgegenzuhalten – jedenfalls nicht auf Basis dieser Studie. Es ist aber umgekehrt zu fragen, ob diese "Erklärung" selbst einer empirischen Falsifikation überhaupt zugänglich ist. Denn jede statistische Häufung lässt sich unter Ausblendung inhaltlicher Zusammenhänge auch als *bloße Häufung* darstellen. Und mehr als statistische Häufungen werden sich wohl auch in einer mikrogenetischen Studie nicht nachweisen lassen.

Zum anderen könnte, entweder auf Grundlage des oben skizzierten skeptischen Vorbehalts, aber durchaus auch unabhängig von diesem, die pädagogisch-fachdidaktische Relevanz des mit den Hypothesen $H1_7$ und $H1_8$ postulierten Zusammenhangs dadurch in Frage gestellt werden, dass das Ableiten selbst zum Ausfluss einer "Begabung" erklärt wird, welche ein Kind entweder habe oder nicht, die aber nicht durch unterrichtliche Maßnahmen "erzeugt" oder auch nur gezielt gefördert werden könne (so ungefähr offenbar die Position von CUMMING und ELKINS, vgl. Kap. 2.9.4 und Kap. 2.9.6). Dem ist entgegenzuhalten, dass zwar nicht die vorliegende Studie, aber etwa die Arbeiten von THORNTON (1978 und 1990) und STEINBERG (1985) bereits deutliche Hinweise dafür liefern, dass das Ableiten durch gezielte Maßnahmen im Unterricht sehr wohl auch jenen Kindern zugänglich ist, die (vor dem Einsetzen dieser Maßnahmen) nicht von selbst schon darauf gestoßen sind (vgl. Kap. 2.9.1 und 2.9.2). Die forschungsmethodischen Unzulänglichkeiten dieser Studien berechtigen nicht, diese Hinweise einfach abzutun. Und die hier behandelte Frage ist von solch eminenter Bedeutung für die Weiterentwicklung des frühen Arithmetikunterrichts, dass Folgestudien dringend geboten erscheinen: Studien, die mit einem für alle teilnehmenden Kinder förderlichen Design (vgl. Kap. 8.5.4.2) untersuchen, *in welcher Weise* sich *verschiedene Varianten* der gezielten Förderung im Erkennen und Nutzen von Ableitungsstrategien *förderlich* auf die Strategieentwicklung von Kindern aller Stufen des "Leistungsspektrums" auswirken (unter anderem, aber nicht nur auf das Automatisieren). Denn *dass* sie es tun, scheint gerade auch auf Grundlage dieser Studie mittlerweile so weit abgesichert zu sein, dass es kaum zu verantworten wäre, die Kinder einer "Kontrollgruppe" in einem "Unterrichtsexperiment" gezielt einem Unterricht auszusetzen, in dem Ableitungsstrategien *nicht* zentraler Bestandteil der frühen Beschäftigung mit Zahlen sind.

10.6 Ausblick

10.6.1 Konsequenzen für die Aus- und Fortbildung von Lehrkräften

Im Kern lässt sich aus allen Einzelergebnissen der Signifikanztests als vordringlichste pädagogische Konsequenz ein und dieselbe Forderung ableiten; dieselbe Forderung, die sich bereits durch die qualitativen Ergebnisse von Kapitel 7 und Kapitel 8 aufgedrängt hat: Was in (Nieder-) Österreich dringend Not tut, ist eine Verbesserung der methodisch-didaktischen Qualität des Mathematikunterrichts im ersten Schuljahr. Unterstützend dazu (aber keinesfalls als Ersatz dafür) sollten die mathematischen Kompetenzen der Kinder bereits im Kindergarten gezielt gefördert werden, unter Beachtung diesbezüglicher Empfehlungen der aktuellen Mathematik-Fachdidaktik. Wie lässt sich dies erreichen?

Die Antwort scheint so nahe zu liegen wie die Umsetzung absehbarer Weise schwer ist und realistischer Weise in weiter Ferne liegt: Will man die fachdiaktische Qualität des Mathematikunterrichts und der frühen mathematischen Förderung heben, dann bedarf es in erster Linie massiver Anstrengungen in der Aus- und Weiterbildung von GrundschullehrerInnen und KindergartenpädagogInnen. Denn was in Kapitel 7 als Verstöße gegen zentrale Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik gekennzeichnet werden musste, erfolgte ja wohl in keinem einzigen Fall in der Absicht, kindliches Lernen zu erschweren. Sofern der Mathematikunterricht der 139 für diese Studie interviewten Kinder durch die in Kapitel 7.3 formulierten Forschungshypothesen treffend charakterisiert ist, müssen diese Verstöße ernst genommen werden als *Ausdruck des aktuell unter (nieder-)österreichischen GrundschullehrerInnen verbreiteten fachlichen und fachdidaktischen Wissenstandes*.

Und dieser kann keinesfalls den Lehrkräften als Folge individueller Versäumnisse angelastet werden: Aus- und Fortbildungsangebote sind ihnen vorgegeben. Allenfalls könnte die Frage gestellt werden, ob vorhandene Fortbildungsangebote auch in allen Fällen entsprechend genutzt wurden (vgl. Kap. 7.2.1). Da weder die regional sehr unterschiedlichen Angebote im Bereich Mathematik, noch allfällige Vorgaben für Fortbildungen in anderen Bereichen (Neue Rechtschreibung, Englisch in der Volksschule, Bildungsstandards…) im Rahmen dieser Studie erhoben wurden, kann darüber an dieser Stelle nicht geurteilt werden. Im Übrigen scheint aber klar zu sein, dass bereits ein erhöhtes Problembewusstsein erforderlich ist, damit eine

Lehrkraft von sich aus Fortbildungen im Bereich Mathematik nachfragt, und dass dieses Problembewusstsein selbst wieder von der erhaltenen Grundausbildung und den seither besuchten Fortbildungen abhängt. Solange also Lehrkräfte in Österreich frei entscheiden dürfen, in welchen Bereichen sie ihrer dienstrechtlich bestehenden Fortbildungspflicht nachkommen, scheint es geradezu zwangsläufig so zu sein, dass gerade jene Lehrkräfte sich mit der geringsten Wahrscheinlichkeit in Mathematik fortbilden werden, die solcher Fortbildungen objektiv am dringendsten bedürfen.

Die fachliche und fachdidaktische Aus- und Fortbildung der Volksschulehrkräfte ist seit 2007 Sache der neugeschaffenen Pädagogischen Hochschulen. Drei Punkte seien dazu an dieser Stelle nur angedeutet; deren ausführliche Erörterung würde den Rahmen dieses Ausblicks bei weitem sprengen:

Erstens ist in der *Ausbildung* von Grundschullehrkräften eine *massive Aufwertung der Mathematik und Mathematik-Fachdidaktik* dringend geboten (und das heißt freilich auch: eine Ausdehnung der dafür vorgesehen "work load", um es ins Bologna-Deutsch zu übersetzen). Eine solche Aufwertung ist mit der Umstellung von Pädagogischen Akademien auf Pädagogische Hochschulen nicht erfolgt; eher ist das Gegenteil zu bedauern.

Zweitens und im Zusammenhang damit: Vielleicht sollte sich das österreichische Bildungssystem von dem Gedanken verabschieden, dass eine Grundschullehrkraft in allen Fächern gleich kompetent sein kann und soll. Die Konsequenz dieses Gedankens ist ja eine entsprechende Aufsplitterung der nun einmal begrenzten Zeit, die in der Ausbildung zur Verfügung steht, und damit das Verhindern einer Vertiefung in den Fächern, die wohl für die Bildungsaufgabe der Grundschule als zentral zu erachten sind; das ist nicht nur, aber auch die Mathematik. Eine Vertiefung in allen zentralen Fächern wäre aber nur zu haben bei entsprechender Verlängerung der Ausbildungszeit. Auch das scheint eine überaus prüfenswerte Alternative zu sein, allerdings politisch vermutlich noch schwerer durchsetzbar als eine Änderung der Ausbildung dahingehend, dass künftige GrundschullehrerInnen zumindest in einem der zentralen Fächer "Deutsch, Lesen, Schreiben" und "Mathematik" eine gegenüber dem Ist-Stand deutlich erweiterte fachliche und fachdidaktische Ausbildung erhalten, wenn nötig auf Kosten des jeweiligs anderen Fachs. In weiterer Folge müssten diese Lehrkräfte freilich auch gezielt in den Fächern eingesetzt werden, für die sie erweiterte Kompetenzen mitbringen. Zu überlegen ist also ein begrenztes FachlehrerInnensystem in der Grundschule, mit entsprechenden Konsequenzen im Einsatz der Grundschullehrkräfte im Unterricht. Wohl sicher *nicht* erstrebenswert wäre es, wenn in der Ausbildung eine Spezialisierung auf eines der beiden zentralen Fächer stattfindet, Lehrkräfte aber dann auch im jeweils anderen Fach unterrichten, für das sie keine entsprechend vertiefte Fachausbildung haben, wie es derzeit in Deutschland der Fall ist.

Ein dritter und letzter Gedanke dazu: Selbst bei einem deutlich erweiterten Ausbildungsangebot in Mathematik und Mathematik-Fachdidaktik wird es wohl kaum gelingen, allen oder auch nur einem Großteil der Lehramtsstudierenden schon in der Ausbildungsphase die volle praktische Relevanz der gelehrten Inhalte zu vermitteln. Aus der nachvollziehbaren subjektiven Sicht der Studierenden ergeben sich viele Fragen und damit das Interesse auf Antworten auf diese Fragen vermutlich erst aus der praktischen Erfahrung, diese Inhalte im eigenen Unterricht in heterogenen Klassen umsetzen zu sollen. Das österreichische Aus- und Fortbildungssystem sieht aber derzeit nach Abschluss des dreijährigen Lehramtsstudiums keine verpflichtende *fachbezogene* Fortbildung für Volksschullehrkräfte vor, ebenso wenig eine verpflichtende Betreuung von JunglehrerInnen durch dafür qualifizierte Fachkräfte in *fachdidaktischen* Fragen. Hier liegt wohl ein gravierender Systemfehler vor. Gerade die seit nun zwei Jahren gegebene organisatorische Bündelung von Aus- und Fortbildung unter dem Dach der Pädagogischen Hochschulen böte hier bei entsprechenden Änderungen im Dienstrecht Chancen, die im Interesse der Kinder dringend genutzt werden sollten.

Analoge Überlegungen drängen sich bezüglich der Aus- und Fortbildung von KindergartenpädagogInnen auf. Tatsächlich scheint aber die Förderung *mathematischer* Kompetenzen im Kindergarten in Österreich derzeit kein öffentliches, von der Bildungspolitik als relevant erachtetes Thema zu sein – und das, obwohl in anderen Zusammenhängen (vorwiegend im Hinblick auf sprachliche Defizite von SchulanfängerInnen) aktuell vermehrt über Änderungen im Bereich der vorschulischen Förderung und (wenigstens in Ansätzen) auch über Reformen im Bereich der Ausbildung von KindergartenpädagogInnen diskutiert wird.

10.6.2 Konsequenzen bezüglich der Zulassung von Lehrmitteln

Alle im Rahmen dieser Studie befragten Lehrkräfte erweckten den Eindruck, ihren Beruf mit hohem Engagement auszuüben. Doch ihre allgemeinen pädagogischen und allgemeinen didaktischen Kompetenzen waren nicht Gegenstand dieser Studie. In Fragen der Didaktik und Methodik des Mathematikunterrichts haben sie im Wesentlichen auf Schulbücher vertraut (vgl. Kap. 7.2.2) – auf Lehrmittel, die ihrerseits in allen Fragen des arithmetischen Erstunterrichts, die in Kapitel 4 als wesentlich heraus gearbeitet wurden, gerade *nicht* den Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik der Grundschulmathematik entsprechen.

Auch in diesen Lehrmitteln liegt also ein gewichtiger Teil des Problem, der noch eindeutiger als der individuelle Wissensstand der Lehrkräfte in den Verantwortungsbereich der Schulbehörde, nicht der Lehrkräfte fällt: Derzeit werden in Österreich Schulbücher für die Verwendung im Unterricht zugelassen, die in zentralen Fragen nicht dem Stand der aktuellen Fachdidaktik entsprechen. Im Untersuchungszeitraum (Schuljahr 2006/2007) war *kein* Mathematik-Schulbuch für die erste Schulstufe auf dem Markt der in Österreich zugelassenen Schulbücher, das unter fachdidaktischen Gesichtspunkten als unbedenklich eingestuft werden kann; der Marktführer erwies sich in der Inhaltsanalyse von Kapitel 7.1 als in vielerlei Hinsicht besonders bedenklich. In der Zwischenzeit hat sich die Situation gebessert, nicht weil das Unterrichtsministerium Maßnahmen ergriffen hätte, sondern weil einige Verlage versuchen, sich mit neuen Lehrbüchern Marktanteile zu sichern, darunter auch Bearbeitungen deutscher Schulbücher, in die die in Kapitel 4 genannten fachdidaktischen Erkenntnisse in der einen oder anderen Weise Eingang gefunden haben. Aus dieser Richtung sind weitere Veränderungen zu erwarten. Das ändert aber nichts an dem Problem, dass die in Kapitel 7.1 kritisierten Lehrmittel weiterhin auf dem Markt bleiben und dort als "eingeführte Produkte" guten Absatz finden.

Wohlgemerkt: Es geht hier nicht darum, dass verschiedene Autorenteams und Verlage unterschiedliche Wege propagieren, auf denen das, worüber in der Fachwissenschaft Einigkeit besteht, im Unterricht am besten realisiert werden kann. *Diese* Form der Konkurrenz ist der Sache – dem Lernen der Kinder – vermutlich förderlich. Die Schulbehörde müsste allerdings dafür Sorge tragen, dass nur solche Lehrmittel auch für die Verwendung im Unterricht zugelassen werden, die sich in wesentlichen Fragen der Didaktik auf dem Boden der aktuellen Fachwissenschaft bewegen. Das ließe sich durch Prüfung durch ein Gremium von entsprechend ausgewählten ExpertInnen mit entsprechend klarem Auftrag wohl gewährleisten; vermutlich nicht immer ohne fachlichen Streit, aber sicherlich mit deutlich anderem Ergebnis, als es derzeit der Fall ist, wenn Mathematik-Schulbücher im Auftrag des Unterrichtsministeriums (nach welchen Kriterien auch immer) geprüft und als "für den Unterrichtsgebrauch geeignet" erklärt werden.

Mit fachlich einwandfreien Schulbüchern allein wäre die notwendige Verbesserung der Unterrichtsqualität freilich nicht zu erreichen. Ein wesentliches Ergebnis der LehrerInnenbefragung war ja auch deren hochgradige Zufriedenheit mit ihren (unter fachdidaktischen Gesichtspunkten höchst unzureichenden) Lehrmitteln (vgl. Kap. 7.2.2.1). Diese Lehrmittel entsprechen also offenkundig den didaktisch-methodischen Überzeugungen, die diese Lehrkräfte gegenwärtig haben. Solange sie diese Überzeugungen beibehalten, werden sie bei freier Wahl vermutlich weiterhin zu den *dazu passenden* Lehrmitteln greifen. Und sollten sie, etwa weil solche Lehrmittel durch behördliche Lenkung gänzlich vom Markt verschwinden, mit Lehrmitteln zurechtkommen müssen, die ihren Überzeugungen nicht entsprechen, eben *weil* sie aktuellen fachdidaktischen Erkenntnissen entsprechen, dann würden sie mit diesen Lehrmitteln wohl kaum so unterrichten können, wie es der Konzeption dieser Lehrmittel entspricht. Denn nicht das Lehrbuch gestaltet den Unterricht, sondern die Lehrkraft. Auch *diese* Diskussion mündet also in die Forderung, die fachliche und fachdidaktische Kompetenz der Lehrkräfte zu erhöhen.

10.6.3 Konsequenzen für den schulischen Förderunterricht

Die vorliegende Studie hat, wie andere Studien vor ihr, gezeigt, dass Kinder, die mit geringem Zahlwissen in die Schule kommen, einem erhöhten Risiko ausgesetzt sind, wesentliche Lernziele des ersten Schuljahres nicht zu erreichen (im Fall dieser Studie: die Überwindung des zählenden Rechnens). Dass dies wenigstens im Falle der hier befragten Kinder vermutlich wesentlich auch eine Folge davon war, dass sie im Laufe des ersten Schuljahres in der Klasse nicht so unterrichtet wurden, wie es die aktuelle Fachdidaktik empfiehlt, wurde mehrfach zu begründen versucht. Mit Blick auf die dazu vorliegende Literatur ist aber zu vermuten, dass "besondere Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens" (SCHIPPER 2003, S. 105) nicht in allen Fällen dadurch zu verhindern sind, dass im Unterricht die Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik konsequent umgesetzt werden; und das betrifft keinesfalls nur Kinder, bei denen ein erhöhtes Risiko bereits zu Schulbeginn absehbar ist.

Eine Vermutung ist dies deshalb, weil dazu keine Studien vorliegen. In Kapitel 8.5.4 wurde eine solche Studie angeregt und dazu in der Forschungshypothese 8 die Erwartung formuliert, dass bei Gewährleistung eines didaktisch-methodisch entsprechend verbesserten Unterrichts ein "signifikant geringerer Anteil aller Kinder" als derzeit noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend rechnen wird. Gerne ließe sich der Verfasser eines Besseren belehren – dass nämlich nicht nur signifikant weniger, sondern gar keine Kinder zählende Rechner bleiben, wenn sie im Klassenunterricht entsprechende Anregungen und Unterstützung erfahren. Sollte dies aber nicht der Fall sein, stellt sich die Frage einer zusätzlichen Förderung einzelner Kinder selbst dann, wenn es gelingen sollte, die didaktisch-methodische Qualität des arithmetischen Erstunterrichts entscheidend zu heben. Solange der Unterricht so abläuft wie in den Klassen der für diese Studie interviewten Kinder, stellt sich die Frage ohnedies.

Eine sinnvolle Antwort auf diese Frage kann nur darin bestehen, Möglichkeiten für *mathematikspezifische Einzelförderung* im schulischen Bereich zu schaffen (vgl. LORENZ 2003, S. 99). Diese sollte *möglichst frühzeitig* stattfinden, also schon dann, wenn sich die Hinweise darauf verdichten, dass ein Kind dieser Einzelförderung bedarf, um die Lernangebote im Klassenunterricht überhaupt als Angebote wahrnehmen zu können. Das setzt voraus, dass Lehrkräfte solchen Förderbedarf frühzeitig erkennen – auch dies eine Frage der Aus- und Fortbildung. Es setzt weiters voraus, dass Rahmenbedingungen geschaffen werden, unter denen eine solche Förderung stattfinden kann. Das ist zum einen und vordringlich eine Frage der Aus- und Weiterbildung jener Lehrkräfte, die diese Förderung übernehmen, zum anderen freilich der Schulorganisation, die solche *zusätzlichen* Lehrkräfte dem Bedarf entsprechend anstellen muss und die dafür entsprechende Räumlichkeiten (sofern die Einzelförderung nicht im Klassenverband integriert stattfinden kann; vgl. dazu LORENZ 2003, S. 99) und Lehrmittel bereit stellen muss. All das scheint derzeit vollkommen utopisch. Es muss aber klar sein, dass die nicht unbeträchtlichen Mittel, die in Österreich derzeit in Zusatzförderungen für Kinder mit mathematischen Lernschwierigkeiten auch im schulischen Bereich investiert werden, an den Bedürfnissen der Kinder schon deshalb vorbeigehen müssen, weil sie in der Regel erst dann gewährt werden, wenn die Kinder im Klassenverband bereits gescheitert und gegenüber dem Klassenziel bereits in massiven Rückstand geraten sind. Und weil sie oft genug in einer Form stattfinden, die einen Erfolg nahezu unmöglich macht: als Gruppenunterricht durch fachdidaktisch nicht ausreichend qualifizierte Lehrkräfte, die versuchen, aktuellen Schulstoff an Kinder zu vermitteln, denen es an grundlegenden Voraussetzungen fehlt, um diesen "Stoff" verdauen zu können (vgl. SCHIPPER 2003, S. 116f).

10.6.4 Einschränkung der Ergebnisse vorliegender Studie und Forschungsdesiderate für künftige Studien

Die vorliegende Studie ist in vielfacher Hinsicht angreifbar und lückenhaft. In Kapitel 6 wurden bereits "Schwierigkeiten und Fehler" offengelegt, die bei der Durchführung der vier empirischen Erhebungen, die in diese Studie einflossen, auftraten bzw. begangen wurden. In Kapitel 7 wurde mehrfach mit Bedauern darauf hingewiesen, dass das Design der Studie keine gesicherten Aussagen darüber zulässt, wie der Mathematikunterricht in den teilnehmenden Klassen in wichtigen Detailfragen tatsächlich abgelaufen ist. Dass die Häufung ungünstiger Entwicklungsverläufe wesentlich auch durch diesen Unterricht bedingt war, scheint auf Grund der im Detail erläuterten inhaltlichen Zusammenhänge zwar mehr als naheliegend, das Design erlaubt aber keine Aussagen über die "Signifikanz" des "Faktors Unterricht". In der qualitativen Auswertung der Längsschnittstudie in Kapitel 8 wurde wiederholt deutlich, dass viele Fragen, die sich im Zusammenhang mit der Entwicklung kindlicher Rechenstrategien stellen, nur durch ein *mikrogenetisches Untersuchungsdesign* aufgeklärt werden können, das heißt durch Längsschnittstudien, die die Strategien der Kinder in wesentlich kürzeren zeitlichen Abständen in Erfahrung zu bringen versuchen. Für die Hypothesenprüfung in Kapitel 9 erwies sich als Schwachstelle des gewählten Designs, dass nicht alle Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn, die sich am Ende des ersten Schuljahres als nicht-trivial erwiesen, bereits in den Interviews Mitte des Schuljahres gefragt worden waren. Wie erläutert, war dies allerdings auf Grundlage der Pre-Tests nicht absehbar, und so musste aus dem, was nun einmal erhoben werden konnte, das Beste gemacht werden.

Die anderen hier angeführten Schwachstellen des Designs waren hingegen natürlich schon vorab klar. Die beträchtlichen finanziellen Mittel, zeitlichen Möglichkeiten und auch jene personelle Unterstützung, die eine mikrogenetische Längsschnittstudie der Strategieentwicklung mit paralleler videobasierter Unterrichtsbeobachtung erfordert hätte, standen für diese Studie aber nicht zur Verfügung.

Aus heutiger Sicht erscheint es dem Verfasser aber gar nicht erstrebenswert, das hier verwendete Grunddesign in der genannten Weise (mikrogenetischer Ansatz, dazu videobasierte Unterrichtsbeobachtung) "aufzufetten" und eine entsprechend vielfach aufwändigere Folgestudie zur Überprüfung, Absicherung und Erweiterung der hier ermittelten Erkenntnisse in Angriff zu nehmen. Wie in Kapitel 8.5.4 erläutert, sind mikrogenetische Längsschnittstudien zur kindlichen Strategieentwicklung dringend geboten – allerdings mit einem grundsätzlich anderen Design und grundsätzlich anderer Zielsetzung, nämlich als Studien zur Evaluation der Wirksamkeit eines Unterrichts, der Kinder gezielt darin unterstützt, nicht-zählende Rechenstrategien zu entwickeln, und der auch sonst den Forderungen und Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik entspricht. In diesem Fall, und nur in diesem Fall, spricht auch nichts dagegen und alles dafür, *Längsschnittstudien auch weit über das erste Schuljahr* hinauszuführen.

Parallel dazu mag es sinnvoll sein, in einer *Querschnittstudie* die Lösungsstrategien von österreichischen Kindern höherer Schulstufen im Bereich der additiven Grundaufgaben zu erheben – von Kindern, die auf "herkömmliche Weise" unterrichtet wurden und also vermutlich so wie die hier interviewten Kinder *nicht* gezielt in der Ablösung vom zählenden Rechnen unterstützt wurden. Es würde dann deutlich, wie viele österreichische Kinder noch am Ende der zweiten, dritten, vierten usf. Schulstufe weitgehend zählende Rechner sind – unter der Bedingung eines Arithmetikunterrichts, in dem *nicht* gezielt auf die Überwindung zählender Strategien hingearbeitet wird und der nun einmal derzeit der in Österreich *übliche* Unterricht sein dürfte. Bei entsprechender Sorgfalt in der Zusammenstellung der Stichproben ließen sich aus einer solchen Studie – mit der nötigen großen Vorsicht, die diesbezüglich bei Querschnittstudien geboten ist – zumindest auch Hinweise gewinnen zur Frage, wie sich die einzelnen "Strategietypen" ohne gezielte Intervention in den Folgejahren weiterentwickeln. Aus pädagogisch-fachdidaktischer Sicht erscheint freilich eine Interventionsstudie, wie sie in Kapitel 8.5.4 angeregt wurde und von der nicht nur die pädagogische Forschung, sondern zugleich auch die teilnehmenden Kinder profitieren würden, weit dringender (und eine Längsschnittstudie, die *nicht* zugleich Interventionsstudie ist, aus den erläuterten Gründen forschungsethisch nicht vertretbar). Möglicherweise wäre aber eine solche Querschnittstudie zur Erhebung des Status quo in höheren Schulstufen nötig, um der Bildungspolitik die Relevanz der in Kapitel 10.6.1 angeregten Aus- und Fortbildungsoffensive noch deutlicher vor Augen zu führen, als es die hier vorliegende Studie möglicherweise vermag.

Auch Studien, in denen das Unterrichtsgeschehen videobasiert gerade auch in didaktischer und methodischer Hinsicht aufgeschlüsselt wird, sollten ein wesentlicher Bestandteil künftiger pädagogischer und mathematik-didaktischer Forschung auch in Österreich werden. Und auch dabei verdient der arithmetische Erstunterricht als Weichenstellung für die gesamte weitere mathematische Entwicklung der Kinder besonderes Augenmerk. Aber auch solche Studien sollten sich bewusst *nicht* damit begnügen, die Unterrichtswirklichkeit mit quasi naturwissenschaftlicher Distanz zu beobachten und zu analysieren. Solche Studien sollten – im Interesse der daran beteiligten Kinder – vielmehr von Anfang an auch als Möglichkeiten zur Fortbildung der daran beteiligten Lehrkräfte verstanden werden.

Es handelte sich in diesem Fall also um eine Form der *Unterrichtsbegleitung* von Lehrkräften durch FachdidaktikerInnen, die den Lehrkräften fachliche Rückmeldungen zum beobachteten Unterricht nicht nur laufend geben *dürfen,* sondern *sollen.* UnterrichtswissenschafterInnen und UnterrichtspraktikerInnen *dürfen und sollen* im Zuge eines solchen Forschungsprojekts gemeinsam über Maßnahmen zur Verbesserung des Unterrichts nachdenken und diskutieren (vgl. WITTMANN 1995, S. 364-369 über "the design of teaching units and empirical research"; BAUERSFELD 2000, S. 99 über "alternative research strategies").

Wie in den in Kapitel 8.5.4 zur Vertiefung unserer Einsichten in die kindliche Strategieentwicklung geforderten Längsschnittstudien würden damit die wissenschaftlichen Beobachter bewusst in die beobachtete Realität eingreifen und diese verändern. Sollte dies im Widerspruch zur Forderung stehen, dass Pädagogik und Mathematik-Fachdidaktik Wissenschaft zu sein haben, würde der Verfasser dafür plädieren, diesen Widerspruch notfalls zu ignorieren, besser aber: den Begriff "Wissenschaftliche Pädagogik" so zu definieren, dass solche Forschung darin Platz findet.

11 Zusammenfassung

"Zunächst gibt es nichts Sympathischeres als ein Kind, das man unter vier Augen befragen und dazu bringen kann, frei zu sprechen, um dabei Schritt für Schritt seine Suche nach einer Lösung zu verfolgen. Außerdem gibt es nichts Spannenderes als den Fortschritt der Denkprozesse in den Altersstufen zu verfolgen und die Art und Weise zu analysieren, in der anfängliche Schwierigkeiten überwunden werden."

PIAGET 1972, zit. nach BAUERSFELD 1988, S. 21.

Die vorliegende Arbeit untersucht die Entwicklung von Rechenstrategien im Bereich der additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres. Die pädagogische Relevanz dieses Themas wurde in Kapitel 1 vor allem mit dem Hinweis auf das Phänomen des "verfestigten zählenden Rechnens" begründet. Dieses gilt als ein Hauptmerkmal sogenannter "Rechenschwächen", die in den letzten ein, zwei Jahrzehnten verstärkt Aufmerksamkeit gerade auch seitens der Pädagogik und Fachdidaktik gewonnen haben. Wir wissen aber noch zu wenig darüber, unter welchen Umständen und warum es bei manchen Kindern zu dieser "Verfestigung" kommt, während andere Kinder bereits im Laufe des ersten Schuljahres (zumindest im beschränkten Zahlenraum bis zehn) zu Fakten nutzenden Strategien übergehen. Eine Vermehrung des Wissens in diesem Bereich erscheint erstrebenswert als Grundlage für Überlegungen zur Weiterentwicklung des frühen Arithmetikunterrichts im Allgemeinen, zur gezielten Prävention von "Rechenschwächen" im Besonderen.

Die in Kapitel 2.2 bis 2.9 vorgenommene Sichtung und kritische Prüfung entwicklungs- und kognitionspsychologischer sowie pädagogisch-fachdidaktischer Studien, die zur frühen Entwicklung von additiven Rechenstrategien vorliegen, brachte deutliche Hinweise auf die Notwendigkeit, den Fragenkomplex unter Berücksichtigung der jeweils gegebenen schulischen (und so weit möglich auch häuslichen und sozio-kulturellen) Rahmenbedingungen des arithmetischen Lernens zu untersuchen, und das heißt: immer auch die Möglichkeit national (und vielleicht auch innerhalb einer Nation) höchst unterschiedlicher "typischer" Entwicklungsverläufe in Abhängigkeit von diesen Rahmenbedingungen zu berücksichtigen (vgl. Kap. 2.6). In den englischsprachigen Nationen, aus denen der Großteil der vorliegenden Studien stammt, ist es, diesen zufolge, typisch, dass nur eine kleine Minderheit der Kinder bereits im ersten Schuljahr das zählende Rechnen zugunsten Fakten nutzender Strategien aufgibt und ein beträchtlicher Teil der Kinder auch noch in höheren Schulstufen an Zählstrategien auch im Bereich der additiven Grundaufgaben festhält (vgl. Kap. 2.2 bis Kap. 2.5 sowie Kap. 2.9.5), wobei diese Entwicklung generell durch fließende Übergänge (SIEGLERS Modell der "überlappenden Wellen", vgl. Kap 2.3) geprägt ist.

Soweit diese Studien auf den Unterricht eingehen, wird deutlich, dass die untersuchten Kinder zumindest in den ersten Schuljahren zum zählenden Rechnen durchaus ermutigt worden waren. Dass unter solchen Bedingungen viele Kinder weit über das erste Schuljahr hinaus zählende Rechner bleiben, spricht gegen SIEGLERS auch lern- und gedächtnispsychologisch wenig plausible Theorie eines quasi-automatischen Übergangs vom zählenden zum Fakten abrufenden Rechnen (vgl. Kap. 2.3). Vergleichsstudien, in denen die Rechenstrategien US-amerikanischer jenen ostasiatischer Kinder gegenüber gestellt wurden (vgl. Kap. 2.6), wie auch Unterrichtsexperimente, wie sie in den USA oder auch Australien durchgeführt wurden (vgl. Kap. 2.9), liefern dagegen starke Hinweise dafür, dass durch eine gezielte unterrichtliche Behandlung von operativen Ableitungsstrategien, wie sie die "meaning theorists" innerhalb der US-amerikanischen Fachdidaktik von BROWNELL bis BAROODY (vgl. Kap. 2.8 und 2.9) fordern, der Anteil jener Kinder, die noch in höheren Schulstufen vorwiegend zählend rechnen, zumindest deutlich reduziert werden kann.

In Kapitel 2.10 wurde der Versuch unternommen, einen Teil der Theoriebildung zur Entwicklung des kindlichen *Zahl- und Operationsverständnisses,* soweit diese nämlich zum Verständnis der Entwicklung kindlicher *Rechenstrategien* unverzichtbar ist, zusammenfassend darzustellen und kritisch zu würdigen. An vorliegenden Entwicklungsmodellen, in denen einerseits eine Abfolge von klar abgrenzbaren *Stufen fortschreitender Einsicht* in wesentliche Eigenschaften der natürlicher Zahlen und der darauf gründenden additiven Rechenoperationen, andererseits ein diesen Stufen klar zuordenbares *Fortschreiten von* alleszählenden zu letztlich Fakten nutzenden *Rechenstrategien* postuliert wird, wurden sachlogische Mängel nachzuweisen versucht. Dem wurde kein alternatives Entwicklungsmodell entgegen gehalten, sondern die Analyse der konzeptuellen Voraussetzungen, die ein Kind erbringen muss, um die eine oder andere Rechenstrategie (und insbesondere die unterschiedlichen Ableitungsstrategien) jeweils erfolgreich anwenden zu können. Dabei zeigte sich, dass ein und dieselbe Strategie (im Bereich der Zählstrategien ebenso wie im Bereich der Ableitungsstrategien) von Kindern unterschiedlichen Zahl- und Operationsverständnisses ergriffen werden kann. Insbesondere scheint ein bereits ausgeprägtes Teile-Ganzes-Verständnis auf dem Niveau der "mathematics of numbers" (vgl. RESNICK 1992) *keine* unabdingbare Voraussetzung für das (auch selbstständige) Anwenden von zumindest einzelnen Ableitungsstrategien zu sein. Umgekehrt dürfte gerade die wiederholte *Reflexion* über Ableitungszusammenhänge wesentlich zur gedanklichen Konstruktion von "Zahlentripeln" und damit einer "mathematics of numbers" im Sinne RESNICKS beitragen.

Kapitel 2.11 und 2.12 gehen der Frage nach, ob und inwiefern die aktuelle neuro- und kognitions- bzw. entwicklungspsychologische Forschung zu neuronalen Grundlagen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens, zu Einflüssen des Arbeitsgedächtnisses bzw. zu "Prädiktoren" späterer Mathematikleistungen hilfreich sein kann für die Klärung der spezifisch pädagogisch-fachdidaktischen Frage, ob und, wenn ja, auf welche Weise Kinder bei der Entwicklung Fakten nutzender Rechenstrategien unterstützt werden können. Die Analyse kommt zu dem Schluss, dass hier derzeit nur wenige Anknüpfungspunkte bestehen.

In Kapitel 2.13 werden, diesen umfangreichen ersten Abschnitt des Theorieteils abschließend, aus den diskutierten Studien die vier Fragenkomplexe entwickelt, denen im empirischen Teil der Arbeit vorwiegend mit qualitativ-explorativen Methoden, zum Teil auch Hypothesen prüfend nachgegangen wird. Es sind dies erstens die Frage, ob die bislang nicht untersuchte Entwicklung additiver Rechenstrategien österreichischer ErstklässlerInnen nationale Besonderheiten aufweist; zweitens und im Zusammenhang damit Fragen zu möglichen, möglichst detailliert zu verfolgenden Einflüssen des arithmetischen Erstunterrichts; drittens Fragen zu möglichen, möglichst detailliert zu erfassenden Zusammenhängen zwischen den Strategien, die dieselben Kinder bei verschiedenen additiven Aufgaben zu einem gegebenen Zeitpunkt wie auch zu verschiedenen Zeitpunkten in ihrer Entwicklung im Laufe des ersten Schuljahres anwenden; viertens schließlich Fragen zu möglichen Zusammenhängen zwischen dem frühen Anwenden von Ableitungsstrategien und dem frühen Automatisieren von additiven Grundaufgaben und weiteren statistisch prüfbaren Einflüssen auf die frühe Strategieentwicklung.

Die den Theorieteil komplettierenden Ausführungen von Kapitel 3 und 4 sind notwendig, um die in Kapitel 2 geforderte Berücksichtigung unterrichtlicher Einflüsse auf die Strategieentwicklung auf dem Stand der aktuellen fachdidaktischen Diskussion leisten zu können.

In Kapitel 3.1 und 3.2 wird zunächst referiert und kritisch diskutiert, welche Zielvorgaben die aktuelle Fachdidaktik der Grundschulmathematik bezüglich der Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr bzw. in den beiden ersten Schuljahren formuliert und auf welche Weise und wie schlüssig diese Zielvorgaben argumentiert werden. Die Analyse resultiert in der differenzierten Position (im Wesentlichen der Position GERSTERS oder auch VAN DE WALLES), dass zwar die *Überwindung von Zählstrategien* im Bereich der additiven Grundaufgaben bereits im ersten Schuljahr angestrebt werden sollte, dass als Mittel dafür aber nicht auf das *Auswendiglernen aller* Zahlenfakten zu setzen sei, sondern auf das *Ableiten* von Grundaufgaben aus einer zunächst nur *beschränkten Anzahl von Kernaufgaben*. Nur diese Kernaufgaben müssten, um als Ableitungsbasis dienen zu können, nötigenfalls auch gezielt und möglichst früh auswendig gelernt werden. Im weiteren Verlauf des ersten Schuljahres sollte das automatisierende Üben auf das Automatisieren dieser Ableitungen abzielen, da vieles dafür spricht, dass gerade dieser *mathematikaffine* Weg auch ein *gedächtnis- und damit lernökonomischer* Weg ist, um letztlich zur Automatisierung auch der zunächst über Ableitung gelösten Grundaufgaben zu gelangen. Die Automatisierung *aller* Grundaufgaben zumindest im Zahlenraum bis zehn zu erreichen, letztlich also im Bereich des Zahlenraum bis zehn auf Ableitungen nicht mehr *angewiesen* zu sein, ist dieser Position gemäß ein wichtiges Ziel des frühen Arithmetikunterrichts, doch hält sie es für unbedenklich, wenn dieses Ziel auf dem angegebenen Weg im ersten Schuljahr von langsamer lernenden Kindern noch nicht vollständig erreicht wird, solange auch diese Kinder über nicht-zählende Lösungsalternativen verfügen. Die vollständige Automatisierung auch noch der Grundaufgaben mit Zehnerübergang hat für diese Position insofern nicht dieselbe Dringlichkeit, als diese Aufgaben auf Basis automatisierter Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn bei Einsicht in Strategien für den Zehnerübergang rasch und sicher ("quasi-automatisch") abgeleitet werden können. Dennoch bleibt auch dieses weiter gehende Ziel im Hinblick auf komplexere Aufgabenstellungen ("Entlastung des Arbeitsgedächtnisses") in einem nächsten Schritt erstrebenswert.

Dieser fachdidaktisch begründeten Position wird in Kapitel 3.3 gegenüber gestellt, welche Zielvorgaben für den Bereich der additiven Grundaufgaben im österreichischen Lehrplan für Volksschulen und in den österreichischen Bildungsstandards für die vierte Schulstufe und, im Vergleich dazu, in Lehrplänen und Richtlinien einiger deutscher Bundesländer zu finden sind. Es zeigt sich, dass im österreichischen Lehrplan (anders als in damit verglichenen deutschen Lehrplänen und Richtlinien) die Frage, mit welchen Strategien Kinder am Ende der Grundstufe I die additiven Grundaufgaben lösen sollten, nicht mit unmissverständlicher Klarheit beantwortet wird. Deren *Automatisierung* wird (anders als die Automatisierung der multiplikativen Grundaufgaben) im österreichischen Lehrplan auch für höhere Schulstufen *nicht explizit* gefordert, was wohl auch unter Einrechnung des "Rahmencharakters" des österreichischen Volksschullehrplans (BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR 2008, S. 15) als klares Versäumnis in Hinblick auf die "Orientierungsfunktion" von Lehrplänen (vgl. VOLLSTÄDT 2003, S. 195) zu werten ist.

In Kapitel 4 wird überblicksartig dargestellt, welche didaktisch-methodischen Empfehlungen die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik weitgehend übereinstimmend (bei Abweichungen in Detailfragen) zur Erreichung der in Kapitel 3 dargestellten Ziele des frühen Arithmetikunterrichts gibt. Es sind dies im Wesentlichen die folgenden sechs Empfehlungen: (1) von den Zählkenntnissen der Kinder ausgehend möglichst früh auf das Verständnis von "*Zahlen als Zusammensetzungen aus Zahlen*" (RESNICK, GERSTER) hinzuarbeiten; (2) die Ablösung vom zählenden Rechnen gezielt durch die *Erarbeitung von Ableitungsstrategien* zu fördern; (3) die Kinder in *Strategiekonferenzen* immer wieder zu motivieren, ihre Strategien einander zu erläutern und damit sich selbst klarer zu machen; (4) bei all dem den Zahlenraum bis 20 (zumindest aber bis 10) von Anfang an *"ganzheitlich"* zu behandeln; (5) für das Lösen von Aufgaben mit Zehnerübergang *nicht nur das "Teilschrittverfahren"* zu behandeln; (6) das Üben und das Erarbeiten von mathematischen Einsichten zu verzahnen, was für das Üben der additiven Grundaufgaben ein vor allem auch *operativ strukturiertes Üben* bedeutet.

Mit Kapitel 5 (Formulierung der Prüfhypothesen) erfolgt der Übergang zum empirischen Teil der Arbeit. In Kapitel 6 werden zunächst die Designs der vier für diese Arbeit durchgeführten empirischen Untersuchungen (Längsschnittstudie zur Strategieentwicklung im ersten Schuljahr, Schulbuchanalyse, LehrerInnenbefragung, Elternbefragung) erläutert, die dabei angewandten Erhebungsinstrumente und Methoden diskutiert und Schwierigkeiten und Fehler offen gelegt werden, die im Zuge der Erhebungen auftraten bzw. begangen wurden.

Im Zuge der für diese Arbeit zentralen Längsschnittstudie wurden 139 durch Zufallsauswahl gewonnene niederösterreichische ErstklässlerInnen aus 22 Klassen zu Beginn, gegen Mitte und am Ende des Schuljahres in qualitativen Interviews vor allem zu ihren Lösungsstrategien im Bereich additiver Grundaufgaben im Zahlenraum bis 20 befragt. Kapitel 7 ist den schulischen und häuslichen Rahmenbedingungen gewidmet, unter welchen das arithmetische Lernen dieser Kinder stattfand; die qualitativen Ergebnisse der Längsschnittstudie werden vor diesem Hintergrund in Kapitel 8 umfassend dokumentiert und analysiert.

Kapitel 7.1 liefert dafür zunächst die Ergebnisse einer qualitativen Inhaltsanalyse der Schulbücher, die im Mathematikunterricht der Kinder Verwendung fanden. Die Analyse macht deutlich, dass alle fünf in den erfassten Klassen eingesetzten Lehrwerke in teils eklatanter Weise gegen sämtliche didaktisch-methodischen Empfehlungen verstoßen, die in Kapitel 4 als Konsens der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik herausgearbeitet wurden.

Dass eben diese Schulbücher als wesentlicher Faktor die didaktisch-methodische Qualität des Mathematikunterrichts der Kinder mitbestimmten, erhellt aus der in Kapitel 7.2 durchgeführten Analyse der Fragebögen, in denen die Lehrkräfte der teilnehmenden Kinder um Angaben zur didaktisch-methodischen Gestaltung ihres Mathematikunterrichts gebeten worden waren. Demnach zeigten sich die Lehrkräfte fast ausnahmslos mit ihren Schulbüchern zufrieden bis sehr zufrieden und arbeiteten diese im Unterricht im Wesentlichen Seite für Seite durch. Sie übernahmen insbesondere die in der Schulbuchanalyse als markante Verstöße gegen den Konsens der aktuellen Fachdidaktik deutlich gemachte kleinschrittige Einführung der Zahlen bis zehn, die Einengung des Zehnerübergangs auf das Teilschrittverfahren und die klare Dominanz nicht-strukturierter, "grauer" Übungspäckchen.

Die Angaben der Lehrkräfte zu ihrem Umgang mit Anschauungs- und Erarbeitungsmaterial und zu ihrer Behandlung der verschiedenen Rechenstrategien, die für das Lösen additiver Grundaufgaben in Frage kommen, verdichten den Eindruck eines (in den erfassten Klassen *in dieser Hinsicht* relativ *einheitlichen*) Arithmetikunterrichts, wie er in Kapitel 7.3 zusammenfassend in den folgenden drei *Forschungshypothesen* zusammenfassend zu charakterisieren versucht wird: (1) Die Behandlung von Zählstrategien im Zahlenbereich bis 10 erfolgte im Unterricht der interviewten Kinder *nicht* nur im Sinne eines "Aufgreifens von Vorkenntnissen", sondern scheint mehrheitlich zumindest bis zum Ende des ersten Schulhalbjahres *gezielt geübt* worden zu sein. (2) *Ableitungsstrategien* wurden im Unterricht gar nicht oder allenfalls in fachdidaktisch unzureichender Weise und Gewichtung behandelt. (3) Dem *Auswendiglernen* von additiven Grundaufgaben wurde mehrheitlich wenig bis keine Beachtung gewidmet.

Die Formulierung dieser Aussagen als *Hypothesen* trägt dem Umstand Rechnung, dass die für die vorliegende Untersuchung verfügbaren Erhebungsmethoden keine empirisch abgesicherten Aussagen darüber erlauben, wie der Arithmetikunterricht in den erfassten Klassen in didaktisch-methodischer Hinsicht über die verschiedenen Phasen des ersten Schuljahres hinweg tatsächlich abgelaufen ist. Eine breit angelegte, über einen längeren Zeitraum durchgeführte videobasierte Unterrichtsbeobachtung könnte hier vermutlich Klarheit schaffen, wobei diese sinnvoller Weise zugleich als Mittel der LehrerInnenfortbildung eingesetzt werden sollte (vgl. dazu die Ausführungen in Kapitel 10. 6.4).

Die Betrachtung der Rahmenbedingungen, unter denen die in der Längsschnittstudie interviewten Kinder ihre Rechenstrategien im ersten Schuljahr weiterentwickelten, wird in Kapitel 7.4 abgeschlossen mit der Darstellung der Ergebnisse der Elternbefragung. Dieser zufolge entspricht, wie bei einer Zufallsauswahl zu erwarten, die Verteilung der Eltern der befragten Kinder auf die verschiedenen Bildungsstufen (gemäß deren höchster abgeschlossener Schulbildung) im Wesentlichen den von der Bundesanstalt Statistik Österreich für die österreichische Gesamtbevölkerung ermittelten Häufigkeiten. Etwa 84 Prozent der Eltern gaben an, sie hätten ihren Kindern nie oder nur selten bei der Mathematik-Hausübungen geholfen, doch etwa 80 Prozent der Eltern erklärten, sie hätten mit ihren Kindern zumindest hin und wieder zusätzlich zur Mathematik-Hausübung rechnen geübt. Der zeitliche Aufwand für solche Übungen betrug den Elternangaben zufolge durchschnittlich etwa 20 Minuten pro Woche, bei freilich gewaltiger Streuung mit einem Maximum von 180 Minuten; der Median betrug 10 Minuten.

Als wesentliche Ergebnisse der in Kapitel 8 im Detail ausgewerteten Längsschnittstudie seien zusammenfassend die folgenden festgehalten:

Zahlwissen und Performanz bei Rechenaufgaben zu Schulbeginn (t1)

(1) Die im Rahmen der ersten Interviewrunde unmittelbar nach Schulbeginn (t1) durchgeführte Erfassung des noch nicht oder erst wenig schulisch beeinflussten Zahlwissens erbrachte für die 139 niederösterreichischen Kinder im Wesentlichen ähnliche Befunde wie vergleichbare Untersuchungen, für die in jüngerer Vergangenheit deutsche und Schweizer (aber bislang keine österreichischen) SchulanfängerInnen befragt wurden und die in der Kurzform als "verbreitet hoher Kenntnisstand bei beträchtlicher Heterogenität" zusam-

mengefasst werden können. *Alle* niederösterreichischen Kinder beherrschten (vor dem Hintergrund der genannten Untersuchungen wenig überraschend) die Zahlwortreihe zumindest bis zehn und konnten diese auch zum anzahlerfassenden Zählen einsetzen, was hier deshalb noch einmal hervorgehoben sei, weil in *allen* erfassten Klassen die Zahlen bis zehn im weiteren Verlauf des ersten Schulhalbjahres (den verwendeten Lehrwerken folgend) kleinschrittig eingeführt und die Kinder in der Mehrheit der Klassen erst um die Mitte des Schuljahrs auch im Unterricht mit der Zahl zehn konfrontiert wurden.

(2) Bereits zu t1 wurden auch (im Unterricht zu diesem Zeitpunkt noch nicht behandelte) Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis zehn gefragt. Auch hier zeigte sich eine gewaltige Heterogenität mit auf der einen Seite beeindruckenden Rechenfähigkeiten, die bis zur Anwendung konzeptuell anspruchsvoller Ableitungsstrategien reichten, und auf der anderen Seite Überforderung durch eine für manche Kinder offenbar völlig neuartige Aufgabenstellung, die auf Grundlage ihres aktuellen Zahl- und Operationsverständnisses für diese Kinder auch mit den angebotenen Hilfen nicht zu bewältigen war. Insgesamt betrachtet, wurden die gefragten Grundaufgaben zu t1 mehrheitlich zählend und dabei wiederum mehrheitlich durch die Strategie *Alleszählen* gelöst. Die im weiteren Verlauf des Schuljahres innerhalb der Zählstrategien bei weitem überwiegenden Strategien *Weiterzählen* und *Finger-Teilzählen* waren zu Schulbeginn insgesamt selten. Es zeigte sich jedoch die aus der Literatur bekannte Anpassungsfähigkeit in der Strategiewahl insofern, als Weiterzählen und Finger-Teilzählen gerade bei solchen Aufgaben relativ häufig verwendet wurden, bei denen sie den Zählaufwand gegenüber dem Alleszählen tatsächlich am deutlichsten reduzieren helfen. Bei den Verdoppelungsaufgaben von 2+2 bis 5+5 war bereits zu Schulbeginn *Faktenabruf* mit Anteilen von etwa 65 Prozent (2+2) bis etwa 38 Prozent (4+4) die häufigste Einzelstrategie. Der Prozentsatz der Kinder, die eine Aufgabe *nicht* selbstständig lösen konnten, lag bei den drei zu Schulbeginn gefragten Subtraktionen bei etwas mehr als 25 Prozent, bei den Additionen zwischen etwa 4 Prozent (2+2) und etwa 17 Prozent (1+6, das beim Alleszählen mit den Fingern Schwierigkeiten bereitet). Auch die Fehlerquote bei den gelösten Aufgaben war beträchtlich; sie lag nur bei 2+2 und 5+5 unter 10 Prozent, bei den weiteren Additionen zwischen etwa 12 und 17 Prozent, bei den drei Subtraktionen jeweils um die 20 Prozent.

(3) Die Verwendung von Ableitungsstrategien durch SchulanfängerInnen war vor dieser Studie noch nicht umfassend untersucht worden. Wertet man die Anwendung des Tauschprinzips bei Aufgaben wie 1+6 als Ableitung, so lösten etwa 28 Prozent der befragten SchulanfängerInnen mindestens eine von 10 Grundaufgaben (von denen freilich die vier Verdoppelungsaufgaben für Ableitungen wenig geeignet waren) durch eine Ableitungsstrategie. Unter Ausblendung der Anwendung des Tauschprinzips waren es immer noch etwa 19 Prozent der Stichprobe. Die verbalen Protokolle lassen im Einklang mit der im

Theorieteil durchgeführten konzeptuellen Analyse vermuten, dass ein und dieselbe Ableitungsstrategie (dabei vor allem das "Verdoppeln plus eins", also etwa die Ableitung von 3+4 aus 3+3) von Kinder mit durchaus unterschiedlichem Zahl- und Operationsverständnis angewandt wurde. Als Gruppe betrachtet, zeigten aber die Kinder, die bereits zu t1 Ableitungsstrategien anwandten, einen deutlichen Vorsprung gegenüber den nicht-ableitenden Kindern auch in der Anzahl von bereits durch Faktenabruf gelösten Aufgaben wie auch im Beherrschen der Zahlwortreihe vorwärts wie rückwärts.

(4) Insgesamt betrachtet, scheint "Verdoppeln plus eins" die für SchulanfängerInnen am ehesten zugängliche Ableitungsstrategie zu sein. 14 Kinder (etwa 10 Prozent) leiteten 3+4 aus 3+3 ab, freilich auf der Grundlage, dass unmittelbar zuvor 3+3 gefragt worden war. Die Subtraktionsstrategien "think addition" (Komplementaritätsprinzip) und "sharing" (Kompensationsprinzip) wurden seltener angewandt. Bei der Aufgabe 8−4 war das in der konzeptuellen Analyse als anspruchsvoller erscheinende "sharing" (Ableitung aus 8−5, das *zwei Aufgaben vor* 8−4 gefragt worden war) bemerkenswerter Weise mit acht Anwendungen sogar häufiger als "think addition" (sieben Ableitungen aus 4+4, das *unmittelbar vor* 8−4 gefragt worden war). "Think addition" schien zudem als Lösungsstrategie für die Subtraktion zweier Nachbarzahlen (elf Anwendungen bei 10−9) für die SchulanfängerInnen näher liegend als für die Halbierungsaufgabe 8−4.

Performanz bei Rechenaufgaben zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres (t2)

(5) Bei der *zweiten Interviewrunde* zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres (t2) wurden die Verdoppelungsaufgaben 2+2 bis 5+5 bereits von 81 (4+4) bis 95 (2+2) Prozent der Kinder durch Faktenabruf gelöst. Faktenabruf war auch bei sieben der 14 darüber hinaus gefragten und als "nicht-trivial" eingestuften Aufgaben im Zahlenraum bis zehn die häufigste Einzelstrategie. Additionen mit der Summe 10 erwiesen sich, entgegen der Annahme von CARPENTER und MOSER (1984), als Aufgaben mit relativ niedriger Automatisierungsquote. Relativ oft bereits Mitte des ersten Schuljahres automatisiert waren jene Subtraktionen, die sich auch für "think addition" in besonderer Weise anbieten (10−9, 9−8, 10−5, 8−4), des Weiteren Additionen mit der Zahl fünf (2+5, 3+5).

(6) Fasst man alle Varianten des zählenden Rechnens zusammen, so wurden zu t2 etwa 43 Prozent aller Lösungsversuche bei den 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn durch die eine oder andere Zählstrategie gelöst. Fünf der 14 Aufgaben wurden von jeweils mehr als 50 Prozent der Kinder zählend gerechnet. Innerhalb der Zählstrategien überwog das – in US-amerikanischen Studien selten erwähnte – Finger-Teilzählen deutlich gegenüber weiter- bzw. rückwärtszählenden Strategien; Alleszählen war nur noch sehr selten zu beobachten. Innerhalb des Weiterzählens war Weiterzählen vom größeren,

zweitgenannten Summanden bei weitem häufiger als Weiterzählen vom erstgenannten und kleineren Summanden. Rückwärtszählen ebenso wie weiterzählendes Ergänzen waren als Subtraktionsstrategien insgesamt selten.

(7) Insgesamt 57 Kinder (41 Prozent) zeigten Mitte des ersten Schuljahres bei wenigstens einer der gefragten Aufgaben eine Ableitungsstrategie – ein deutlich höherer Kinderanteil als zu Schulbeginn. 22 dieser 57 Kinder lösten aber nur jeweils genau eine Aufgabe durch eine Ableitungsstrategie (dann am häufigsten 8–4).

(8) Die zu t2 bei weitem am öftesten angewandte Ableitungsstrategie war "think addition", wobei diese Strategie bei Subtraktionen mit der Differenz eins (10–9, 9–8) sowie bei der Halbierungsaufgabe 8–4 am häufigsten war. Kinder, die "think addition" verwendeten, taten dies mehrheitlich bei mindestens zwei Subtraktionen. Einige Kinder zeigten aber zwar bei einer Subtraktion "think addition", lösten jedoch andere Subtraktionen zählend, und das auch dann, wenn sie deren inverse Addition automatisiert hatten. Für zumindest manche Kinder war also offenbar "think addition" (noch) nicht als eine prinzipiell gültige, unabhängig vom bestimmten Zahlenmaterial vorteilhafte Strategie verfügbar.

(9) Am zweithäufigsten waren Mitte des ersten Schuljahres Ableitungen auf Basis von Kovarianz, hier wieder das "Verdoppeln plus eins". Letzteres wurde bei 6+7 (auf Basis von 6+6) bei weitem häufiger angewandt als bei 3+4 (auf Basis von 3+3). Das liegt zum Teil wohl einfach daran, dass jene Kinder, denen die Strategie "Verdoppeln plus eins" zugänglich war, 3+4 zu diesem Zeitpunkt häufig bereits automatisiert hatten (was wiederum als Folge einer vorangehenden Phase des Ableitens von 3+4 aus 3+3 gedeutet werden könnte), während sie 6+7 noch nicht auswendig wussten. Doch drei der 16 Kinder, die 6+7 aus 6+6 ableiteten, lösten 3+4 zählend (obwohl sie 3+3 automatisiert hatten). Manche Kinder scheinen also zwar kompetent zum Ableiten zu sein, diese Kompetenz aber dann nicht anzuwenden, wenn eine Aufgabe auch (weiter-)zählend sicher und schnell gelöst werden kann. Dass Subtraktionen Mitte des Schuljahres insgesamt weit häufiger abgleitet wurden als Additionen, mag wenigstens zum Teil derselben Logik folgen.

Performanz bei Rechenaufgaben am Ende des ersten Schuljahres (t3)

(10) Am *Ende des ersten Schuljahres* wurden die Verdoppelungen 2+2, 3+3 und 5+5 von jeweils mehr als 95 Prozent der Kinder durch Faktenabruf gelöst, 4+4 von etwa 89 Prozent. Faktenabruf war zu diesem Zeitpunkt bei allen im Zahlenraum bis zehn gefragten Aufgaben mit Ausnahme von 10−7 die häufigste Einzelstrategie. Es wurden jedoch auch noch am Ende des ersten Schuljahres zehn von 14 als nicht-trivial eingestufte Aufgaben im Zahlenraum bis zehn von weniger als der Hälfte der Kinder auswendig gewusst. Gemäß der schon zur Mitte des Schuljahres erkennbaren Tendenz (s.o.) wurden auch am En-

de des ersten Schuljahres (abgesehen von den Verdoppelungsaufgaben) gerade jene Aufgaben am öftesten durch Faktenabruf gelöst, die sich auf Grund ihrer Struktur in besonderer Weise auch für das Anwenden einer Ableitungsstrategie (10−5, 8−4, 10−9, 9−8 durch "think addition") bzw. für die Lösung durch Einsicht in eine Struktur (3+5 und 2+5 mittels der "Kraft der Fünf", 1+6 und 9-1 mittels der "n+1-Regel"- bzw. "n-1-Regel", vgl. BAROODY 1985) anbieten. Das spricht gegen die Theorie von SIEGLER (zuletzt 2001), der das Automatisieren einer Grundaufgabe als quasi-automatische Folge des wiederholt erfolgreichen *zählenden* Lösens dieser Grundaufgabe postuliert, und ist zumindest gut vereinbar mit der gegenläufigen Position von BAROODY (zuletzt 2006) und anderen "meaning theorists", die das Automatisieren von Zahlen*fakten* als Automatisieren von Zahl*beziehungen* verstehen.

(11) Etwa 39 Prozent aller Lösungsversuche im Bereich der 14 nicht-trivialen Aufgaben im Zahlenraum bis zehn entfielen auch noch am Ende des ersten Schuljahres auf Zählstrategien. Häufigste Variante des zählenden Rechnens war zu t3 wie schon zu t2 das Finger-Teilzählen mit einem Gesamtanteil von etwa 23 Prozent an allen Lösungen im Bereich der nicht-trivialen Aufgaben. Weiterzählen (zumeist vom größeren Summanden) war als Additionsstrategie im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres deutlich häufiger als noch Mitte des Schuljahres, während Rückwärtszählen und weiterzählendes Ergänzen als Subtraktionsstrategien weiterhin deutlich seltener waren als Finger-Teilzählen. Das lässt sich deuten als Ausdruck der durch die Gegenläufigkeit der zu kontrollierenden Zahlwortreihen (beim Rückwärtszählen) bzw. durch die geforderte Einsicht in die Legitimität des zählenden Ergänzens erhöhte Schwierigkeit der zum Weiterzählen analogen Subtraktionsstrategien. Innerhalb dieser beiden Subtraktionsstrategien war Rückwärtszählen zu t3 etwa doppelt so häufig wie zählendes Ergänzen, obwohl bei sechs der sieben gefragten nicht-trivialen Subtraktionen zählendes Ergänzen weniger Zählschritte erfordert hätte als Rückwärtszählen. Die befragten niederösterreichischen Kinder unterschieden sich in dieser Hinsicht deutlich sowohl von den US-amerikanischen Kinder der Studie von CARPENTER und MOSER (1984) (bei denen zählendes Ergänzen häufiger war als Rückwärtszählen) wie auch von den deutschen Kindern der Studie von PADBERG (1994) (bei denen zählendes Ergänzen gar nicht vorkam).

(12) Bei den acht zu t3 gefragten additiven Grundaufgaben mit Zehnerübergang überwogen (mit Ausnahme des Sonderfalls 6+6) Zählstrategien deutlich über Fakten nutzende Strategien (Faktenabruf und Ableitung). 6+6 wurde am Ende des ersten Schuljahres von etwa 50 Prozent aller Kinder auswendig gewusst. Nimmt man 6+6 aber aus, dann fielen bei den restlichen sieben Aufgaben mit Zehnerübergang insgesamt nur etwa 28 Prozent aller Lösungsversuche auf Faktennutzung, dagegen 54 Prozent auf Zählstrategien und 14 Prozent

auf "nicht bewältigt" (d.h., die Aufgabe wurde als "zu schwer" abgelehnt oder durch offenkundiges "Zahlenraten" erledigt). Dazu kommt, dass die Fehlerquote bei den zählend gelösten Aufgaben mit Zehnerübergang deutlich höher war als bei Aufgaben im Zahlenraum bis zehn. All das ist freilich wenig überraschend, wenn man bedenkt, dass erstens viele Kinder schon wegen ihres geringen Faktenwissens im Zahlenraum bis zehn kaum über die Voraussetzungen verfügten, um Aufgaben mit Zehnerübergang durch eine Ableitungsstrategie lösen zu können; dass zweitens viele Kinder noch kein klares Zehner-Einer-Konzept ausgeprägt hatten, wie etwa durch den hohen Anteil von zählenden Lösungen bei der Aufgabe 16−10 deutlich wird (die Aufgabe wurde von etwa 45 Prozent der Kinder zählend gelöst, von weiteren 17 Prozent "nicht bewältigt"); und dass drittens der Zehnerübergang zwar mit Ausnahme zweier Klassen im Unterricht der Kinder behandelt, dabei aber als einzige nicht-zählende Strategie das besonders anspruchsvolle Teilschrittverfahren vorgegeben worden war, welches Kinder mit Defiziten im Zahlenraum bis zehn und im Zehner-Einer-Verständnis noch klarer überfordern *musste* als alternative Verfahren (Kraft der Fünf, Verdoppeln plus eins).

(13) Insgesamt betrachtet, war zwar das Teilschrittverfahren am Ende des ersten Schuljahres die bei weitem am öftesten angewandte Ableitungsstrategie; 43 Kinder (31 Prozent der Stichprobe) lösten mindestens eine Aufgabe auf diese Weise. Jene Kinder aber, die am Ende des ersten Schuljahres nur genau eine Aufgabe mit Zehnerübergang durch Ableitungsstrategien bewältigten, taten dies *mehrheitlich nicht* mit dem Teilschrittverfahren, also nicht mit jenem Verfahren, das ihnen in der Schule für solche Aufgaben zumeist alternativlos vorgegeben worden war. Und jene Kinder, die zwei oder mehr Aufgaben mit Zehnerübergang ableiteten, taten dies *in ihrer überwiegenden Mehrheit nicht ausschließlich* mit dem Teilschrittverfahren. Gerade die kompetentesten Rechner (gemessen an der Anzahl der von ihnen nicht-zählend bewältigten Zehnerübergänge) bevorzugten in der Regel etwa für 6+7 das "Verdoppeln plus eins" oder für 12−6 "think addition". So wurde das Teilschrittverfahren nur bei 3+9, 5+8 und 14−9 häufiger verwendet als andere (im Unterricht nicht behandelte) Ableitungsstrategien. Und tatsächlich weisen gerade diese Aufgaben Struktureigenschaften auf, die sie für das Teilschrittverfahren in besonderer Weise geeignet machen. Die Einengung des Unterrichts auf das Teilschrittverfahren hält also kompetente Rechner offenkundig nicht davon ab, auch andere nicht-zählende Strategien für den Zehnerübergang zu entwickeln.

(14) Häufigste Ableitungsstrategie im Zahlenraum bis zehn war auch zu t3 "think addition". Wie schon zu t2, wurde diese Strategie auch am Ende des Schuljahrs von manchen Kindern *ausschließlich* bei Halbierungsaufgaben (10−5, 8−4, auch 12−6) angewandt, während andere Subtraktionen von diesen Kindern zählend gelöst wurden – zuweilen auch 10−9 und/oder 9−8, zwei Aufgaben, bei denen kaum anzunehmen ist, dass die inver-

sen Additionen (9+1 bzw. 8+1) von diesen Kindern noch nicht automatisiert waren. "Acht minus vier ist vier, weil vier und vier ist acht!" (oder auch "Zehn minus fünf ist fünf, weil fünf und fünf ist zehn") scheint also bei manchen Kindern eher den Stellenwert einer "Eselsbrücke" zu haben als wirklich Einsicht in eine Ableitungsstrategie zu dokumentieren.

(15) Ableitungen einer Subtraktion aus einer anderen Subtraktion waren zu t3 deutlich seltener. Wie schon zu Schulbeginn, schien aber einigen Kindern "sharing" mindestens so nahe zu liegen wie "think addition" (vgl. Punkt 4 dieser Zusammenfassung).

(16) "Verdoppeln plus eins" wurde am Ende des ersten Schuljahres zwar relativ häufig für 6+7 angewandt (von etwa 16 Prozent aller Kinder), aber kein einziges Mal für 3+4. Wie schon Mitte des Schuljahres, gab es auch am Ende des Schuljahres einige Kinder, die zwar 6+7 aus 6+6 ableiteten, aber 3+4 zählend lösten, also offenbar eher dann eine Ableitungsstrategie wählten, wenn die zählende Lösung mühsam zu werden drohte. In den Fällen, wo nicht Verdoppelungen, sondern andere Additionen die Ausgangsbasis für eine Ableitung nach dem Prinzip der Kovarianz bildeten, wurden häufiger Additionen mit der Summe 10 als Ausgangsbasis gewählt als umgekehrt Additionen mit der Summe 10 aus ihren Nachbaraufgaben abgeleitet, doch es scheint dabei auch die Reihenfolge, in der die Aufgaben im Interview gefragt wurden, eine Rolle gespielt zu haben. Ableitungen einer Addition aus einer anderen nach dem Prinzip der Kompensation ("gegensinnige Veränderung") waren äußerst selten (vier Fälle).

(17) Insgesamt betrachtet, lösten zu t3 etwa 62 Prozent der Kinder *mindestens eine* Grundaufgabe im Zahlenraum bis 20 durch eine Ableitungsstrategie. Bei 18 Prozent der Kinder handelte es sich dabei aber um nur *genau eine* Aufgabe, während andere Grundaufgaben auch noch im Zahlenraum bis zehn von diesen Kindern auch zählend gelöst wurden. Etwa 14 Prozent der Kinder wandten Ableitungsstrategien ausschließlich im Zahlenraum bis zehn an, während sie Aufgaben mit Zehnerübergang mehrheitlich zählend lösten. 17 Prozent wiederum verwendeten Ableitungsstrategien zu t3 ausschließlich für Aufgaben mit Zehnerübergang.

Performanz bei Zusatzaufgaben zur Einsicht in operative Zusammenhänge

(18) Zusätzlich zu den Rechenaufgaben wurden die Kinder Mitte wie Ende des Schuljahres mit operativen Aufgabenreihen bzw. –paaren konfrontiert und dazu befragt, ob, und wenn ja, welche Zusammenhänge sie zwischen den einzelnen Aufgaben erkennen würden. Mitte des Schuljahres hatten zwar etwa vier Fünftel der Kinder keine Probleme damit, Aufgabenreihen ("schöne Päckchen") richtig fortzusetzen, in denen Additionen nach dem Prin-

zip der Kovarianz aneinander gereiht waren. Aber nur etwa 39 Prozent der Kinder waren im Gespräch über diese Aufgabenreihen in der Lage, den zu Grunde liegenden operativen Zusammenhang in nachvollziehbarer Weise zu verbalisieren. Den Zusammenhang zwischen einer Addition und der zu ihr inversen Subtraktion konnten in dieser Weise etwa 40 Prozent der Kinder verbalisieren. Am Ende des ersten Schuljahres zeigten mehr Kinder (etwa 69 Prozent) eine gewisse, auch verbalisierte Einsicht in den Kovarianz-Zusammenhang zwischen 7+7 und 7+8, aber nur etwa 30 Prozent in den Umkehr-Zusammenhang zwischen 9+9 und 18-9. Der scheinbare Rückschritt im Falle des Umkehr-Zusammenhangs mag auch damit zusammenhängen, dass dieser Zusammenhang am Ende des Schuljahres an einem Aufgabenpaar mit Zehnerübergang, Mitte des Schuljahres aber im Zahlenraum bis zehn erkannt werden musste. Ohnedies zeigten sich aber Mitte wie Ende des Schuljahres zahlreiche Dissoziationen zwischen der Performanz bei Rechenstrategien und jener bei Zusatzaufgaben. Einerseits wurden von vielen Kindern Ableitungsstrategien verwendet, die auf eine gewisse Einsicht in operative Zusammenhänge hinwiesen; dieselben Kinder schienen aber in der Befragung zu den Zusatzaufgaben eben diese operativen Zusammenhänge nicht zu erkennen. Andererseits konnten manche Kinder in den Zusatzaufgaben einen operativen Zusammenhang klar verbalisieren, lösten beim Rechnen aber auch solche Aufgaben zählend, die sie auf Grundlage eben dieses Zusammenhangs aus ihrem Bestand an bereits automatisierten Zahlenfakten hätten ableiten können. Dies wird interpretiert (auch) als Ausdruck (noch) nicht gefestigter, (noch) nicht systematisierter operativer Einsichten, welche vor dem Hintergrund des in Kapitel 7 dargestellten Unterrichts zu sehen sind.

Sechs Typen von Strategie-Präferenzen am Ende des ersten Schuljahres

Während in Kapitel 8.1 bis 8.4 der Fokus vorrangig darauf gerichtet war, mit welchen Strategien einzelne Aufgaben in welcher Häufigkeit gelöst wurden, wird in Kapitel 8.5 zunächst analysiert, wie viele Kinder die Rechenaufgaben in jeder der drei Interviewrunden jeweils vorwiegend (das heißt zu mehr als zwei Dritteln) Fakten nutzend (d.h. Fakten abrufend oder ableitend) oder vorwiegend zählend lösten oder aber keine klare Präferenz weder für Fakten nutzende, noch für zählende Strategien erkennen ließen. In Fortführung dieser Analyse werden aus dem umfangreichen Datenmaterial aus Rechen- und Zusatzaufgaben abschließend sechs Typen von Kindern mit unterschiedlichen Strategie-Entwicklungen innerhalb des ersten Schuljahres und mit unterschiedlichen Strategie-Präferenzen am Ende des ersten Schuljahres abgeleitet. Dem explorativen Charakter der Methode der empirisch begründeten Typenbildung gemäß (vgl. BIKNER-ASBAHS 2003), werden zu diesen sechs Typen jeweils Forschungshypothesen formuliert, die den sachlogischen Zusammenhang der jeweils typischen Merkmalskombinationen zu erklären versuchen. Es sind dies die folgenden, hier jeweils *idealtypisch* und in Kurzfassung der detaillierten Ausführungen von Kapitel 8.5.4 charakterisierten Typen:

(1) Typus "Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten": Kinder dieses Typus (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: etwa 33 Prozent) lösen nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres durchwegs (oder allenfalls mit Ausnahme einzelner Aufgaben) durch Nutzung von Zahlenfakten. Dabei herrscht Faktenabruf vor, ergänzt um Ableitungen, welche auf Einsicht in komplexere operative Zusammenhänge (in der Regel zumindest in Kovarianz-Zusammenhänge wie auch in das Komplementaritätsprinzip) hinweisen. Innerhalb der Kinder dieses Typus bestehen aber erhebliche Unterschiede im Niveau der Einsichten oder zumindest im Niveau der verbalen Erläuterungen dieser Einsichten. Vermutet wird, dass bei diesen Kindern (im Einklang mit BAROODYs "schema based view") gerade das fortgesetzte Ableiten von Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres im Sinne einer *begünstigenden Voraussetzung* wesentlich dazu beigetragen hat, dass sie die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres vollständig oder zumindest weitest gehend automatisiert hatten. Weiters wird vermutet, dass das bei vielen Kindern dieses Typus beobachtbare Nebeneinander von Einsicht in einen operativen Zusammenhang an der einen Stelle, fehlender Einsicht oder zumindest fehlender Nutzung dieser Einsicht an einer anderen Stelle nicht oder zumindest nicht in derselben Häufigkeit auftritt, wenn Kinder im Unterricht (anders als es bei den hier interviewten Kindern der Fall war) dazu angehalten werden, ihre Rechenstrategien zu reflektieren und im Rahmen von Strategiekonferenzen zu kommunizieren und zu argumentieren.

(2) Typus "Hohe Merkleistung ohne Ableitung": Die Kinder dieses seltenen Typus (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: nur etwa 2 Prozent) haben die Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn am Ende des ersten Schuljahres weitest gehend automatisiert, setzen aber daneben (etwa für Aufgaben mit Zehnerübergang) *keine* Ableitungsstrategien ein und haben auch zu Beginn und Mitte des ersten Schuljahres keine Ableitungen gezeigt. Vermutet wird, dass diese Kinder die additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn tatsächlich (zumindest weitgehend) *ohne* Einsicht in *komplexere* operative Zusammenhänge, zumindest aber ohne eine vorgelagerte Phase des Ableitens im Langzeitgedächtnis gespeichert haben. Die *Existenz* dieses Typus würde dann – im Widerspruch oder zumindest in einem Spannungsverhältnis zu BAROODYs Sichtweise – anzeigen, dass das Ableiten keine *notwendige* Bedingung für das Automatisieren darstellt, sondern zumindest in Einzelfällen durch Gedächtnisleistung kompensiert werden *kann*. Die *Seltenheit* dieses Typus erklärt sich vermutlich einerseits daraus, dass diese Kompensation schwierig ist (fehlende Elaboration der zu merkenden Basisfakten), andererseits aus der in Kapitel 7 deutlich gewordenen Seltenheit solcher kompensatorischen Anstrengungen im Unterricht wie vermutlich auch beim häuslichen Üben. Es wird vermutet, dass mit Bezug auf die multiplikativen Grundaufgaben, bei denen in Österreich traditionell weit mehr Zeit und Anstrengung für

memorierendes Üben (bei ähnlicher Missachtung operativer Zusammenhänge) aufgewendet werden, ein vergleichbarer Typus deutlich häufiger auftritt.

(3) Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten": Die Kinder dieses Typus (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: etwa 24 Prozent) wenden im Laufe des ersten Schuljahres beim Lösen additiver Grundaufgaben keine Ableitungsstrategien an und lösen noch am Ende des ersten Schuljahres nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn *durchgehend oder zumindest vorwiegend*, Aufgaben mit Zehnerübergang *durchgehend* zählend (allenfalls mit Ausnahme vereinzelt auswendig gemerkter Aufgaben wie 6+6=12). Viele Kinder dieses Typus zeigen aber in den Zusatzaufgaben durchaus Einsicht auch in zumindest einzelne komplexere operative Zusammenhänge. Dass sie noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend rechnen, erlaubt also nicht den Rückschluss, dass sie mit nicht-zählenden Strategien kognitiv überfordert wären. Als ein wesentliches Hindernis für das Entdecken nicht-zählender Strategien erweist sich bei diesen Kindern aber ihr Mangel an Reflexivität beim Lösen der Grundaufgaben. Es wird vermutet (in Anschuss an GRAY, zuletzt 2003), dass sie gerade deshalb am zählenden Rechnen hängen bleiben, weil sie im Akt des zählenden Rechnens weder die Aufgabe als Gesamtheit (im Sinne eines "procept") noch deren Zusammenhänge zu anderen Aufgaben reflektieren und diese Reflexion auch nach erfolgter Lösung der Aufgabe nicht leisten. Weiters wird vermutet, dass dieser Typus nicht oder zumindest bei weitem nicht so häufig auftritt, wenn nicht-zählende Rechenstrategien (anders als bei den hier interviewten Kindern) im Unterricht gezielt behandelt und Kinder (gerade auch solche am unteren Rand des Leistungsspektrums) laufend dazu anhalten werden, ihre Strategien zu reflektieren und darüber zu kommunizieren und zu argumentieren.

(4) Typus "Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen": Die Kinder dieses Typus (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: etwa 20 Prozent) kombinieren am Ende des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis zehn Faktenabruf und Ableitungsstrategien mit Zählstrategien. Ableitungsstrategien werden von diesen Kindern auffälliger Weise vorwiegend bei Subtraktionen und teilweise bei Aufgaben mit Zehnerübergang eingesetzt, also dort, wo das zählende Rechnen mit höheren Schwierigkeiten verbunden und jedenfalls mühsamer wäre als bei Additionen im Zahlenraum bis zehn, die von Kindern dieses Typus vielfach durch Weiterzählen vom größeren Summanden rasch und sicher erledigt werden. Es wird (im Einklang mit GRAY) vermutet, dass gerade diese Gewohnheit des schnellen Weiterzählens ohne Reflexion der Gesamtaufgabe wie auch ohne Reflexion der operativen Zusammenhänge dieser Gesamtaufgabe mit anderen Aufgaben die Speicherung von Zahlenfakten im Langzeitgedächtnis behindert und damit zum relativ hohen Anteil von Zählstrategien noch am Ende des ersten Schuljahres beigetragen hat. Der wesentliche Unterschied zu den Kindern des letztgenannten Typus besteht aber eben darin, dass die Kinder dieses Typus bei

manchen (den "schwierigeren") Aufgaben auch bereit sind, über Zusammenhänge nachzudenken und diese für nicht-zählende Lösungen einzusetzen. Das für diesen Typus charakteristische Nebeneinander von "procedural" und "proceptual approach" steht im Widerspruch (oder zumindest in einem Spannungsverhältnis) zu dem von GRAY und TALL (1994) postulierten "proceptual divide". Es wird vermutet, dass dieser Typus nicht oder zumindest bei weitem nicht in dieser Häufigkeit auftritt, wenn Kinder im Unterricht in der bereits ausgeführten Weise laufend zur Strategiereflexion angehalten werden.

(5) Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten": Die Kinder dieses Typus (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: etwa 3 Prozent) unterscheiden sich von den Kindern des zuletzt genannten Typus im Wesentlichen dadurch, dass sie noch am Ende des ersten Schuljahres nur einzelne nicht-triviale Aufgaben im Zahlenraum bis zehn automatisiert haben und umgekehrt mehr als zwei Drittel dieser Aufgaben zählend lösen. Daneben wenden aber auch diese Kinder Ableitungsstrategien an, mitunter auch für Aufgaben mit Zehnerübergang. Bei diesem Strategiemix werden im Wesentlichen dieselben Zusammenhänge vermutet wie bei dem unter (4) charakterisierten Typus; der signifikante Unterschied in der Merkleistung lässt sich auf Grundlage der erhobenen Daten nicht schlüssig erklären.

(6) Typus "Strategie-Mix mit hohem Anteil von Zählstrategien ohne Ableiten": Die Kinder dieses Typus (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: etwa 17 Prozent) unterscheiden sich von den Kindern des unter (3) charakterisierten Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten" im Wesentlichen durch einen höheren Anteil von nicht-zählenden Fingerstrategien und einen entsprechen niedrigeren Anteil von Finger-Teilzählen. Auch sie wenden keine Ableitungsstrategien an. Sie dokumentieren aber zumindest im häufigeren nicht-zählenden Gebrauch ihrer Finger eine höhere Bereitschaft zur Reflexion insofern, als sie das ja auch in der Strategie Finger-Teilzählen *implizite* Wissen um die Zusammensetzung von Finger-Anzahlen aus Finger-Teil-Anzahlen nutzen, um sich Zählakte zu ersparen und die Lösungsfindung zu beschleunigen. Es wird vermutet, dass zumindest manche dieser Kinder bei Ausbleiben gezielter Förderung ihre nicht-zählenden Fingerstrategien *nicht* zu nicht-zählenden und nicht-finger-gebundenen Rechenstrategien weiterentwickeln. Der Verfasser vermutet weiter, dass auch dieser Typus nicht oder zumindest bei weitem nicht so häufig auftritt, wenn nicht-zählende Strategien in der bereits ausgeführten Weise im Unterricht behandelt werden.

In Kapitel 9 werden, nach Erläuterung der dafür eingesetzten statistischen Prüfverfahren, die Ergebnisse der Signifikanzprüfungen für die in Kapitel 5 formulierten statistischen Hypothesen dargestellt. Die folgenden Alternativhypothesen konnten dabei statistisch abgesichert werden, d.h.: die zugehörigen Nullhypothesen konnten verworfen werden:

- $H1_2$: Kinder lösen im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien, je mehr strukturierte Zahldarstellungen sie zu Beginn des ersten Schuljahres quasi-simultan erfassen.
- $H1_3$: Buben lösen im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien als Mädchen.
- $H1_5$: Kinder lösen am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien, je mehr Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des ersten Schuljahres durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben.
- $H1_6$: Kinder lösen am Ende des ersten Schuljahres umso mehr nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien, je mehr nicht-triviale Grundaufgaben sie bereits zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres durch Fakten nutzende Strategien gelöst haben.
- $H1_7$: Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, lösen dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Weiterzählen gelöst haben.
- $H1_8$: Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, lösen dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Finger-Teilzählen oder Alleszählen gelöst haben.

Die Nullhypothesen zu zwei weiteren Alternativhypothesen konnten auf dem verschärften Signifikanzniveau $p \leq 0{,}01$ *nicht* verworfen werden. (Die Signifikanzschranke wurde deshalb so niedrig angesetzt, weil die Stichprobe einige Voraussetzungen für eine robuste Varianzanalyse nicht erfüllt hat.) Für beide Hypothesen lässt sich aber zumindest eine Tendenz zur Signifikanz feststellen. Es sind dies die folgenden Hypothesen:

- $H1_1$: "Es wird angenommen, dass Kinder im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen umso höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, je besser sie (gemessen an der höchsten beim Aufsagen der Zahlwortreihe vorwärts erreichten Zählzahl) zu Beginn des ersten Schuljahres die Zahlwortreihe vorwärts beherrschen." – In der für die Signifikanzprüfung gewählten univariaten Kovarianzanalyse mit Messwiederholung wird für die zugehörige Nullhypothese eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $p=0{,}039$ ausgewiesen.
- $H1_4$: "Es wird angenommen, dass Kinder von Eltern mit höherem Bildungsgrad im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben

im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen als Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad." – Die Varianzanalyse mit Messwiederholung weist für das Verwerfen der zugehörigen Nullhypothese eine Irrtumswahrscheinlichkeit von p=0,019 aus.

Der in der Varianzanalyse explorativ mit untersuchte Einfluss des Faktors Zeit auf den Anteil, mit dem Kinder nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien lösen, ist höchst signifikant. Als Gesamtheit betrachtet, lösten die Kinder Mitte des ersten Schuljahres einen signifikant höheren Anteil der nicht-trivialen Aufgaben durch Faktennutzung als zu Beginn des Schuljahres, und am Ende des ersten Schuljahres einen signifikant höheren Anteil als Mitte des Schuljahres. Detailanalysen zeigen aber, dass die Zuwächse im zweiten Halbjahr deutlich niedriger ausfielen, zudem gibt es deutliche Unterschiede in den einzelnen Gruppen des Varianzdesigns: Mädchen aus Familien mit höherem Bildungsgrad verzeichneten im zweiten Halbjahr die deutlichsten Zuwächse, Buben aus Familien mit niedrigem Bildungsgrad die niedrigsten. Die Zuwächse im zweiten Halbjahr werden in der Varianzanalyse mit Messwiederholung zudem vermutlich nach oben verzerrt dargestellt, weil beim Vergleich des zweiten und dritten Messzeitpunktes vier Aufgaben nicht berücksichtigt werden konnten, die sich am Ende des Schuljahres als nicht-trivial erwiesen hatten, Mitte des Schuljahres aber noch nicht gefragt worden waren.

Abschließende Bemerkungen

Die Ergebnisse der Signifikanzprüfungen werden in Kapitel 10 im Detail diskutiert und zu Ergebnissen anderer Studien wie zu den Ergebnissen des qualitativen Teils der vorliegenden Studie ins Verhältnis gesetzt. Auf dieser Grundlage werden Konsequenzen formuliert, die sich aus der vorliegenden Studie einerseits für die pädagogische Praxis, andererseits für künftige pädagogisch-fachdidaktische Forschungsarbeiten ergeben.

Als wesentliche *pädagogisch-praktische Konsequenz* ergibt sich die Notwendigkeit, die didaktisch-methodische Qualität des Mathematikunterrichts im ersten Schuljahr in Österreich entscheidend zu heben. Denn die durch die Signifikanzprüfungen abgesicherte Vermutung, dass jene Kinder, die mit geringem Zahlwissen in die Schule eintreten, ein erhöhtes Risiko dafür tragen, noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend zu rechnen, muss im Zusammenhang gesehen werden mit der in Kapitel 7 geleisteten Analyse des Unterrichts, dem diese Kinder ein Jahr lang ausgesetzt waren. Es wird vermutet, dass unter der Voraussetzung eines Unterrichts, der den in Kapitel 4 erläuterten Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik folgt, signifikant weniger Kinder am Ende des ersten Schuljahres zählend rechnen – ein signifikant kleinerer Teil auch jener Kinder, die zu Schulbeginn noch ein geringes Zahlwissen aufweisen. Denn ein Unterricht, der es *nicht* im Wesentlichen dem "spontanen Einsehen der

Kinder" (PROBST & WANIEK 2003, S. 77) überlässt, ob sie nicht-zählende Rechenstrategien entwickeln, sondern der gezielt darauf hinarbeitet, dass sie genau das tun, verbessert plausibler Weise die Chancen gerade auch der Kinder, die mit geringem Zahlwissen in die Schule eintreten und deshalb schlechtere Voraussetzungen für das *eigenständige* Entdecken operativer Zusammenhänge mitbringen.

Der statistisch signifikante Einfluss des Geschlechts und der tendenziell signifikante Einfluss des Bildungsgrades der Eltern ist vermutlich wenigstens zu einem großen Teil *abgeleitet* vom signifikanten Einfluss des frühen Zahlwissens: Mädchen und Kinder von Eltern mit niedrigerem Bildungsgrad kommen mit geringerem Zahlwissen in die Schule; weil *dieses* auf Grundlage des in Kapitel 7 charakterisierten Unterrichts in der erläuterten Weise wirksam wird, findet ihr weiteres arithmetisches Lernen unter erschwerten Voraussetzungen statt. Auch den unerwünschten Effekten dieser beiden Einflussgrößen kann die Pädagogik also am besten dadurch begegnen, dass sie *alle Kinder* in ihrer arithmetischen Entwicklung so fördert, fordert und begleitet, wie es die aktuelle Fachdidaktik der Grundschulmathematik seit Jahren mit guten Argumenten empfiehlt.

Bezüglich des Einflusses des Faktors Zeit ist darauf hinzuweisen, dass selbst unter der Annahme einer steten weiteren Zunahme von Faktennutzung bei allen Kindern mit der im zweiten Halbjahr verzeichneten Zuwachsrate das Ziel, das die aktuelle Fachdidaktik aus gutem Grund für das Ende des ersten Schuljahres definiert – nämlich 100 Prozent Faktennutzung zumindest im Zahlenraum bis zehn – von der Mehrheit der Kinder erst im dritten Schuljahr erreicht würde. Vorliegende Studien lassen aber ohnedies vermuten, dass ein nicht unerheblicher Teil der Kinder dieses Ziel *dauerhaft nicht* erreicht, sofern diese Kinder nicht (ob schulisch oder außerschulisch) gezielt darin gefördert werden, Alternativen zum zählenden Rechnen zu entwickeln.

In der vorliegenden Studie waren für eine Teilgruppe, nämlich die Kinder des Typus "Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten", im zweiten Schulhalbjahr so gut wie keine Veränderungen in ihrem (von Zählstrategien dominierten) "mix of strategies" mehr zu registrieren. Als *Konsequenz für die Früherkennung* einer "Verfestigung des zählenden Rechnens" lässt sich ableiten, dass Kinder, die ohne gezielte Förderung nicht bereits Mitte des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien entdeckt haben, dies – ohne gezielte Förderung – mit einiger Wahrscheinlichkeit auch in der zweiten Hälfte des Schuljahres nicht tun werden. Sofern sie dies nicht durch Gedächtnisleistung zu kompensieren imstande sind, werden sie deshalb mit einiger Wahrscheinlichkeit noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend rechnen. Die *Konsequenz für die Gestaltung des arithmetischen Anfangsunterrichts* sollte nun freilich nicht darin bestehen, bis Mitte des Schuljahres *abzuwarten*, ob Kinder auch ohne gezielte Förderung Ableitungsstrategien entdecken und erst im zweiten Halbjahr jene gezielt darin zu unterstützen, die diese "spontanen Einsichten" nicht hatten. Vielmehr scheint es geboten, *von der ersten Schulwoche an* gezielt darauf hinzuarbeiten, dass möglichst alle Kinder möglichst frühzeitig erkennen, dass Zahlen Zusammensetzungen aus anderen Zahlen sind; dass sie auf dieser Grundlage Additionen und Subtraktionen in ihrem komplementären Zusammenhang als nur unterschiedliche Sichtweisen derselben "Zahlentripel" erkennen; und dass sie lernen, die operativen Zusammenhänge zwischen den Additionen und Subtraktionen des Zahlenraums bis 20 dafür zu nutzen, um aus einigen wenigen Zahlenfakten alle weiteren abzuleiten. Gerade dieses fortgesetzte Ableiten erleichtert als wiederholte "Elaboration von zu merkenden Inhalten" in weiterer Folge auch die Automatisation auch der zunächst nur abgeleiteten Zahlensätze (vgl. Kapitel 3 und 4).

Als *Konsequenz für künftige pädagogische Forschungsarbeiten* ergibt sich das Desiderat weiterer Längsschnittstudien zur Klärung offener Detailfragen der Strategieentwicklung. Dabei sprechen sowohl forschungsmethodische wie auch forschungsethische Argumente für eine bewusste Einflussnahme auf die zu beobachtende Entwicklung von Rechenstrategien in der Weise, dass die im mikrogenetischen Design in weit kürzeren zeitlichen Abständen erfolgenden qualitativen Interviews als Teil eines Unterrichts eingeplant werden, der sich bewusst um die Umsetzung aktueller fachdidaktischer Empfehlungen bemüht. Unter dieser Voraussetzung, aber *nur* unter dieser Voraussetzung, sollten solche Längsschnittstudien auch weit über das ersten Schuljahr hinausgeführt werden. Ein zweites großes Desiderat der schulpädagogischen Forschung in Österreich sind videobasierte Studien zur wissenschaftlichen Erfassung der didaktisch-methodischen Qualität des Unterrichtsgeschehens, welches seinerseits mit den zu evaluierenden Lernprozessen der so unterrichteten SchülerInnen ins Verhältnis zu setzen ist. Auch solche Studien sollten aber nicht distanziert beobachten, sondern das Ziel verfolgen, den wissenschaftlich begleiteten Mathematikunterricht *im Zuge seiner Erforschung* in der Zusammenarbeit von FachdidaktikerInnen und LehrerInnen zugleich weiter zu entwickeln.

Literaturverzeichnis

A) BÜCHER UND BEITRÄGE IN BÜCHERN UND ZEITSCHRIFTEN:

ADAMS, John W. & HITCH, Graham J. (1997): *Working Memory and Childrens' Mental Addition*.- In: *Journal of experimental child psychology*, Vol. 67, S. 21-38.

ANDERSON, Richard S. (1984): *Some Reflections on the Acquisition of Knowledge*.- In: *Educational Researcher*, Vol. 13, No. 9, S 5-10.

AG MATHEMATIK (2003a): *Matheblitz 1. Arbeitsbuch Teil 1*.- Wien: Jugend & Volk.

AG MATHEMATIK (2003b): *Matheblitz 1. Arbeitsbuch Teil 2*.- Wien: Jugend & Volk.

AG MATHEMATIK (2003c): *Matheblitz 1. Übungsbuch A mit einfachen Übungen*.- Wien: Jugend & Volk.

AG MATHEMATIK (2003d): *Matheblitz 1. Übungsbuch B mit erweiterten Übungen*.- Wien: Jugend & Volk.

AG MATHEMATIK (2003e): *Matheblitz 1. Begleitheft für Lehrerinnen und Lehrer*.- Wien: Jugend & Volk.

AG MATHEMATIK (2003f): *Matheblitz 2. Arbeitsbuch Teil 2*.- Wien: Jugend & Volk.

ARISTOTELES (O.J./1983): *Nikomachische Ethik. Übersetzung und Nachwort von Franz Dirlmeier*.- Stuttgart: Reclam.

ASHCRAFT, Mark H. (1995): *Cognitive Psychology and Simple Arithmetic: A Review and Summary of New Directions*.- In: *Mathematical Cognition,* 1, S. 3-34.

ASHCRAFT, Mark H. (1990): *Strategic Processing in Children`s Mental Arithmetic. A Review and Proposal*.- In: BJORKLUND, David F. (Ed.): *Children`s Strategies. Contemporary Views of Cognitive Development.*- Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assicates, S. 185-211.

ASHCRAFT, Mark H. (1985): *Is It Farfetched That Some of Us Remember Our Arithmetic Facts?*- In: *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 16, Nr. 2. S. 99-105.

ASHCRAFT, Mark H. & BATTAGLIA, John (1978): *Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition*.- In: *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory,* Vol. 4, S. 527-538.

ASHCRAFT, Mark H. & CHRISTY, Kelly S. (1995): *The Frequency of Arithmetic Facts in Elementary Texts: Addition and Multiplication in Grades 1-6.*- In: *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 26, No. 5, S. 396-421.

ASHCRAFT, Mark H. & FIERMAN, Bennett A. (1982): *Mental Addition in Third, Fourth, and Sixth Graders*.- In: *Journal of Experimental Child Psychology*, Vol. 33, S. 216-234.

ASHCRAFT, Mark H. & STAZYK, Edmund H. (1981): *Mental Addition: A test of three verification models.*- In: *Memory & Cognition*, Vol. 9, Nr. 2, S. 185-196.

ASTER, Michael von (2005): *Wie kommen Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen.*- In: ASTER, Michael von & LORENZ, Jens Holger (Hrsg.) (2005): *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.*- Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 13-33.

ASTER, Michael von (2009): *Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen.*- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 197-213.

ASTER, Michael von (1996): *Die Störungen des Rechnens und der Zahlverarbeitung in der kindlichen Entwicklung.*- Habilitationsschrift. Medizinische Fakultät der Universität Zürich.

ATKINSON, Richard C. & SHIFFRIN, Richard M. (1968): *Human memory: a proposed system and its control processes*.- In: SPENCE, Kenneth W. & SPENCE, Janet T. (Eds.) (1968): *The psychology of learning and motivation*, Vol. 2.- New York: Academic Press, S. 89-195.

ATTESLANDER, Peter (2003): *Methoden der empirischen Sozialforschung.*- Berlin und New York: Walter de Gruyter, 10, neu bearbeitete und erweiterte Auflage.

AUGUSTINUS, Aurelius (o.J./1980): *Confessiones – Bekenntnisse*.- München: Kösel.

BADDELEY, Alan (1990): *Human Memory. Theory and Practice.*- Boston u.a.: Allyn and Bacon.

BAROODY, Arthur J. (2006): *Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them*.- In: *Teaching Children Mathematics*, 13, No. 1, S. 22-31.

BAROODY, Arthur J. (1999): *Children's Relational Knowledge of Addition and Subtraction.*- In: *Cognition and Instruction*, Vol. 17, No. 2, S. 137-175.

BAROODY, Arthur J. (1988): *Mental-Addition Development of Children Classified as Mentally Handicapped*- In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 19, No. 3, S. 369-388.

BAROODY, Arthur J. (1987): *The Development of Counting Strategies for Single-Digit Addition.*- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 18., Nr. 2, S. 141-157.

BAROODY, Arthur J. (1985): *Mastery of Basic Number Combinations: Internalization of Relationships or Facts?*- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 16, No. 2, S. 83-98.

BAROODY, Arthur J. (1983): *The Development* of *Procedural Knowledge: An Alternative Explanation for Chronometric Trends of Mental Arithmetic.*- In: *Developmental Review*, 3, S. 225-230.

BAROODY, Arthur J., GINSBURG, Herbert P. & WAXMAN, Barbara (1983): *Children's Use of Mathematical Structure*.- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 14, No. 3., S. 156-168.

BAROODY, Arthur J. & TIILIKAINEN, Sirpa H. (2003): *Two Perspectives on Addition Development.*- In: BAROODY, Arthur J. & DOWKER, Ann (Eds.) (2003): *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*.- Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, S. 75-125.

BAROODY, Arthur J., WILKINS, Jesse L.M. & TIILIKAINEN, Sirpa H. (2003): *The Development of Children's Understanding of Additive Commutativity: From Protoquantitative Concept to General Concept?*- In: BAROODY, Arthur J. & DOWKER, Ann (Eds): *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise*.- Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, S. 127-160.

BAUER, A. (1972): *Ein Verfahren zur Messung des für das Bildungsverhalten relevanten sozialen Status. BRSS*.- Frankfurt am Main: Deutsches Institut für internationale pädagogische Forschung.

BAUER, Ludwig (1998): *Schriftliches Rechnen nach Normalverfahren – wertloses Auslaufmodell oder überdauernde Relevanz?*- In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, H 2/3, S. 179-200.

BAUERSFELD, Heinrich (2000): *Research in Mathematics Education – Who Benefits?*- In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, No. 4, S. 95-100.

BAUERSFELD, Heinrich (1988): *Quo Vadis? Zu den Perspektiven der Fachdidaktik.*- In: *Mathematica didactica*, Band 11, S. 3-24.

BECHERER, Joachim & SCHULZ, Andrea (Hrsg.) (2005): *Duden Mathematik 1*.- Berlin, Frankfurt a.M.: Duden Paetec Schulbuchverlag.

BEE-GÖTSCHE, Petra H. (1993): *Effekte der Förderung des Kurzzeitgedächtnisses auf die Entwicklung phonemischer Bewusstheit im Kindergartenalter*.- In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, Vol. 40, S. 182-190.

BEE-GÖTSCHE, Petra H. (1992): *Teufelsgeschichten und Teufelsspiele (TUT). Ein Gedächtnistraining für Kinder*.- Tübingen: DGVT-Verlag.

BENZ, Christiane (2005): *Die Entwicklung der Rechenstrategien bei Aufgaben des Typs ZE+/– ZE im Verlauf des zweiten Schuljahres*.- In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, Vol. 28, H. 1, S. 49-73.

BERMEJO, Vicente, MORALES, Soledad, GARCIA DEOSUNA, Jenny (2004): *Supporting children's development of cardinality understanding.*- In: *Learning and Instruction*, Vol. 14, S. 381-398.

BESUDEN, Heinrich (1999): *Wider das unnatürliche Zählen im Anfangsunterricht*.- In: *Die Grundschule*, Vol. 31, H. 7-8, S. 78-82.

BIKNER-AHSBAHS, Angelika (2003): *Empirisch begründete Idealtypenbildung – Ein methodisches Prinzip zur Theoriekonstruktion in der interpretativen mathematikdidaktischen Forschung.*- In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 35, H. 5, S. 208-223.

BIRKEL, Peter (2005): *Beurteilungsübereinstimmung bei Mathematikarbeiten?*- In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, Vol. 26, H. 1, S. 28-51.

BORTZ, Jürgen (2005): *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*.- Heidelberg: Springer, Sechste, vollständig überarbeitete und aktualisierte Auflage.

BORTZ, Jürgen & DÖRING, Nicola (2005): *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler.*- Heidelberg: Springer, 3., überarbeitete Auflage.

BOS, Wilfried u.a. (2003): *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich*.- Münster: Waxmann.

BREIDENBACH, Walter (1956): *Rechnen in der Volksschule. Eine Methodik*.- Hannover: Schroedel.

BISANZ, Jeffrey & LEFEVRE, Jo-Anne (1990): *Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition.*- In: BJORKLUND, David F. (Ed.): *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development.*- Hillsdale: Lawrence Erlbaum, S. 213-244.

BROWNELL, William A. (1929): *Remedial Cases in Arithmetic*.- In: *Peabody Journal of Education*, Vol. 7, No. 2, S. 100-107.

BROWNELL, William A. & CHAZAL, C. B.(1935): *The effects of premature drill in third-grade arithmetic*.- In: *Journal of Educational Research*, Vol. 29, S. 17-28.

BRUNER, Jerome S. (1974): *Entwurf einer Unterrichtstheorie*.- Berlin: Berlin-Verlag.

BRUNNER, Edith u.a. (2005): *Zahlenreise 1. Mathematik für die 1. Schulstufe. Lehrerbegleitheft.*- Linz: Veritas-Verlag.

BRUNNER, Edith u.a. (2004a): *Zahlenreise 1. Mathematik für die 1. Schulstufe. Erarbeitungsteil*.- Linz: Veritas-Verlag.

BRUNNER, Edith u.a. (2004b): *Zahlenreise 1. Mathematik für die 1. Schulstufe. Übungsteil A.*- Linz: Veritas-Verlag.

BRUNNER, Edith u.a. (2004c): *Zahlenreise 1. Mathematik für die 1. Schulstufe. Übungsteil B.*- Linz: Veritas-Verlag.

BRUNNER, Edith u.a. (2004d): *Zahlenreise 2. Mathematik für die 2. Schulstufe. Erarbeitungsteil*.- Linz: Veritas-Verlag.

BRYANT, Peter, CHRISTIE, Clare & RENDU, Alison (1999): *Children's Understanding Of the Relation between Addition and Subtraction: Inversion, Identity, and Decomposition.*- In: *Journal of Experimental Child Psychology*, 74 , S. 194-212.

BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. (2005a): *Zahlen-Zug 1. Teil A.* Wien: Dorner.

BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. (2005b): *Zahlen-Zug 1. Teil B.* Wien: Dorner.

BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. (2005c): *Zahlen-Zug 1. Arbeitsheft*. Wien: Dorner.

BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. (2001): *Zahlen-Zug 1. Lehrerband*. Wien: Dorner.

BÜHL, Achim & ZÖFEL, Peter (2005): *SPSS 12. Einführung in die moderne Datenanalyse unter Windows*.- München: Pearson, 9., überarbeitete und erweiterte Auflage.

BUTTERWORTH, Brian (1999): *The mathematical brain*.- London: McMillan.

CAMPBELL, Jamie I.D. & XUE, Quilin (2001): *Cognitive Arithmetic Across Cultures*.- In: *Journal of Experimental Psychology: General*, Vol. 120, S. 299-315.

CANOBI, Katherine H. (2004): *Individual differences in children's addition and subtraction knowledge*.- In: *Cognitive Development*, Vol. 19, Issue 1, S. 81-93.

CARPENTER, Thomas P. & MOSER, James M. (1984): *The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One Through Three*.- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 15, No. 3, S. 179-202.

CARPENTER, Thomas P. & MOSER, James M. (1983): *The acquisition of addition and subtraction concepts*.- In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.): *Acquisition of mathematics concepts and processes*.- New York: Academic Press, S. 7-44.

CARPENTER, Thomas P. & MOSER, James M. (1982): *The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills*.- In: CARPENTER, Thomas P., MOSER, James M. & ROMBERG, Thomas A. (Eds.) (1982): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*.- Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 9-24.

CARR, Martha, JESSUP, Donna L. & FULLER, Diana (1999): *Gender Differences in First-Grade Mathematics Strategy Use: Parent and Teacher Contributions*.- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 30, No. 1, S. 20-46.

CARRAHER, T.N., CARRAHER, C. W & SCHLIEMANN, A.D. (1985): *Mathematics in street and school*.- In: *British Journal of Development Psychology*, H. 3., S. 21-29.

CHRISTENSEN, Carol A. & COOPER, Tom J. (1992): *The Role of Cognitive Strategies in the Transition from Counting to Retrieval of Basic Addition Facts*.- In: *British Educational Research Journal*, Vol. 18, Nr. 1, S. 37-44.

CHOUINARD, Roch, VEZEAU, Carole, BOUFFARD, Therese & JENKINS, Brenda (1999): *Gender differences in the development of mathematics attitudes*.- In: *Journal of Research and Development in Education*, Vol. 32, S. 184-192.

CIFFARELLI, Victor V. & WHEATLEY, Grayson H. (1979): *Formal Thinking Strategies: A Prerequisite for Learning Basic Facts?*- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 10, No. 5, S. 368-370.

CLEARFIELD, Melissa W. & MIX, Kelly S. (1999): *Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets*.- In: *Psychological Science*, Vol. 10, S. 408-411.
COWAN, Richard (2003): *Does It All Add Up? Changes in Children's Knowledge of Addition Combinations, Strategies, and Principles*.- In: BAROODY, Arthur J. & DOWKER, Ann (Eds.) (2003): *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*.- Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, S. 35-74.

CRAIK, F. I. M. & LOCKHART, R. S. (1972): *Levels of processing. A framework for memory research*.- In: *Journal of Verbal Learning and Verbal Behvior*, Vol. 11, S. 671-684.

CUMMING, J. Joy & ELKINS, John (1999): *Lack of Automaticity in the Basic Addition Facts as a Characteristic of Arithmetic Learning Problems and Instructional Needs*.- In: *Mathematical Cognition*, Vol. 5, H. 2, S. 149-180.

DE CORTE, Erik & VERSCHAFFEL, Lieven (1987): *The Effect of Semantic Structure on First Graders' Strategies for Solving Addition and Subtraction Word Problems*.- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 18, H. 5, S. 363-381.

DEHAENE, Stanislas (1992): *Varieties of numerical abilities*.- In: *Cognition*, Vol. 44, S. 1-42.

DEHAENE, Stanislas (1999): *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*.- Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

DEHAENE, Stanislas & COHEN, Laurent (1995): *Towards an Anatomical and Functional Model of Number Processing*.- In: *Mathematical Cognition*, Vol. 1, S. 83-120.

DEVLIN, Kevin (2002): *Muster der Mathematik*.- Heidelberg, Berlin: Spektrum.

DEWEY, John (1902/1976): *The Child and the Curriculum*.- In: BOYDSTON, Jo Ann (1976) (Ed.): *The Middle Works of John Dewey, 1899-1924.* Carbondale: Southern Illinois University Press, Vol. 2, S. 71-291.

DICK, Thomas (1988): *The Continuing Calculator Controversy*.- In: *Arithmetic Teacher*, April 1998, S. 37-41.

DOMAHS, Frank, KRINZINGER, Helga & WILLMES, Klaus (2008): *Mind the gap between both hands: Evidence for internal finger-based number representations in children's mental calculation*.- In: *Cortex*, Vol. 44, S. 359-367.

DORNHEIM, Dorothea (2008): *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*.- Berlin: Logos.

DOWKER, Ann D. (2005): *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*.- Hove: Psychology Press.

DUDENREDAKTION (Hrsg.) (2006): *Duden. Die deutsche Rechtschreibung*.- Mannheim u.a.: Dudenverlag, 24., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage.

EASLEY, Jack (1983): *A Japanese Approach to Arithmetic*.- In: *For the Learning of Mathematics*, Vol. 3, No. 3, S. 8-14.

EDER, JAROLIM & SCHÖN (2001a): Mein erstes Mathematikbuch. Ausgabe Gemsichtantiqua. Teil 1 G.- Wien: Jugend & Volk.

EDER, JAROLIM & SCHÖN (2001b): Mein erstes Mathematikbuch. Ausgabe Gemsichtantiqua. Teil 2 G.- Wien: Jugend & Volk.

EDER, JAROLIM & SCHÖN (2001c): Begleitheft zu Mein erstes Mathematikbuch.- Wien: Jugend & Volk.

EDER, JAROLIM & SCHÖN (2001d): Mein zweites Mathematikbuch. Teil 2.- Wien: Jugend & Volk.

ENZENSBERGER, Hans Magnus (1997): *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*.- München: dtv-Hanser.

ERICSSON, K. Anderson, CHASE, William G. & FALOON, Sarah (1980): *Acquisition of a memory skill*.- In: *Science*, Vol. 208, S. 1181-1182.

FEINBERG, Miriam M. (1990): *Using Patterns to Practice Basic Facts*.- In: *Arithmetic Teacher*, Vol. 37, H. 4, S. 38-41.

FLAVELL, John H., BEACH, David H. & CHINSKY, Jack M. (1966): *Spontaneous verbal rehearsal in a memory task as a function of Age*.- In: *Child Development*, Vol. 37, S. 283-299.

FLEXER, Roberta J. (1986): *The Power of Five: The Step Before the Power of Ten*.- In: *Arithmetic Teacher* (1986), 2, S. 5-9.

FLOER, Jürgen (1996): *Mathematik-Werkstatt. Lernmaterialien zum Rechnen und Entdecken für Klassen 1 bis 4*.- Weinheim und Basel: Beltz.

FLOER, Jürgen (1995): *Wie kommt das Rechnen in den Kopf? Veranschaulichen und Handeln im MU*.- In: *Die Grundschulzeitschrift*, H. 82, S. 20-26.

FRACCARO, Klara (2006): *Mathematischer Erstunterricht: Aktuelle Fachdidaktik und Schulbuchwirklichkeit am Beispiel der "Zahlenreise"*.- Unveröffentlichte Diplomarbeit für das Lehramt an Volksschulen. Pädagogische Akademie des Bundes in Wien.

FRIEDL, Martina (2005): *Funkelsteine 1 Mathematik. Lehrerband*.- Wien: Dorner.

FRIEDL, Martina (2004a): *Funkelsteine 1 Mathematik. Arbeitsbuch.*- Wien: Dorner.

FRIEDL, Martina (2004a): *Funkelsteine 1 Mathematik. Arbeitsheft.*- Wien: Dorner.

FRITZ, Annemarie & RICKEN, Gabi (2008): *Rechenschwäche*.- München: Ernst Reinhardt.

FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & GERLACH, Maria (2007): *Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Handreichung zur Durchführung der Diagnose*.- Berlin: Cornelsen.

FOXMAN, Derek & BEISHUIZEN, Meindert (2002): *Mental Calculation Methods Used by 11-Year-Olds in Different Attainment Bands: A Reanalysis of Data from the 1987 APU Survey in the UK.*- In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 51, No. 1/2, S. 41-69.

FUSON, Karen C. (1992a): *Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers.*- In: LEINHARDT, Gaea, PUTNAM, Ralph & HATTRUP, Rosemary (Ed.): *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*.- Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 53-187.

FUSON, Karen C. (1992b): *Research on whole number addition and subtraction.*- In: GROUWS, Douglas: *Handbook of research on mathematics teaching and learning,*- New York: Macmillan, S. 243-275.

FUSON, Karen C. & KWON, Youngshim (1992): *Korean Children's Single-Digit Addition and Subtraction: Numbers Structured by Ten.*- In: *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 23, No. 2, S. 148-165.

GAIDOSCHIK, Michael (2009a): *Didaktogene Faktoren bei der Verfestigung des zählenden Rechnens*.- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2., erweiterte und aktualisierte Auflage, S. 166-180.

GAIDOSCHIK, Michael (2009b): *Nicht-zählende Rechenstrategien – von Anfang an! Durch mathematisches Denken zum kleinen Einspluseins*.- In: *Grundschulunterricht Mathematik*, H. 1, S. 4-6.

GAIDOSCHIK, Michael (2009c): *"Rechenschwächen" vorbeugen: Mathematik-Unterricht als Chance.*- In: *Dyskalkulie. Ansätze zu Diagnostik und Förderung in einer integrativen Schule. Bericht zur 13. Tagung des Verbandes Dyslexie Schweiz*.- Brütten: Verband Dyslexie Schweiz, S. 7-13.

GAIDOSCHIK, Michael (2008): *Automatisierung arithmetischer Basisfakten: Zur Notwendigkeit eines strategie-zentrierten Erstunterrichts.*- In: *Beiträge zum Mathematikunterricht, Budapest 2008*.- Franzbecker: Berlin, S. 401-404.

GAIDOSCHIK, Michael (2007): *Rechenschwäche vorbeugen - Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen*.- Wien: G&G.

GAIDOSCHIK, Michael (2003a): *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*.- Wien: G&G.

GAIDOSCHIK, Michael (2003b): *Rechenstörungen: Die „didaktogene Komponente". Kritische Thesen zur „herkömmlichen Unterrichtspraxis" in drei Kernbereichen der Grundschulmathematik*.- In: LENART, Friederike, HOLZER, Norbert & SCHAUPP, Hubert (Hrsg.) (2003): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung*.- Graz: Leykam, 2003, S. 128-153

GARNETT, Katherine (1992): *Developing Fluency with Basic Number Facts: Intervention for Students with Learning Disabilities*.- In: *Learning Disabilities Research/Practice*, No. 7, S. 210-216.

GEARY, David C. (2004): *Mathematics and Learning Disabilities*.- In: *Journal of Learning Disabilities,* Vol. 37, No. 1, S. 4-15.

GEARY, David C., BOW-THOMAS, Christine C., FAN, Liu & SIEGLER, Robert S. (1996): *Development of Arithmetical Competences in Chinese and American Children: Influence of Age, Language, and Schooling*.- In: *Child Development,* Vol. 67, S. 2022-2044.

GEARY, David C. & BROWN, Sam C. (1991): *Strategy Choice and Speed-of-Processing Differences in Gifted, Normal, and Mathematically Disabled Children*.- In: *Developmental Psychology,* Vol. 27, No. 3, S. 398-406.

GEARY, David C., BROWN, Sam C. & SAMARANAYAKE V. A. (1991): *Cognitive Addition: A Short Longitudinal Study of Strategy Choice and Speed-of-Processing Differences in Normal and Mathematically Disabled Children*.- In: *Developmental Psychology,* Vol. 27, No. 5, S. 787-797.

GEARY, David C., HAMSON, Carmen O. & HOARD, Mary K. (2000): *Numerical and arithmetical cognition: A longitudinal study of process and concept deficits in children with learning disability*.- In: *Journal of Experimental Child Psychology,* Vol. 77, S. 236-263.

GEARY, David C. & HOARD, Mary K. (2001): *Numerical and arithmetical deficits in learning-disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia*.- In: *Aphasiology,* 15 (7), S. 635-647.

GEARY, David C., HOARD, Mary K. & HAMSON, Carmen O. (1999): *Numerical and Arithmetical Cognition: Patterns of Functions and Deficits in Children at Risk for a Mathematical Disability*.- In: *Journal of Experimental Child Psychology,* 74, S. 213-239.

GERBER, Andrea (2007): *Mathematikunterricht an Volksschulen. Kritische Betrachtungen zum Unterrichtsverständnis von Lehrer/innen an österreichischen Volksschulen*.- Unveröffentlichte Dissertation. Universität Wien.

GERHARDT, Uta (1986): *Patientenkarrieren. Eine medizinsoziologische Studie.* Frankfurt/Main: Suhrkamp.

GERLACH, Maria, FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (2007): *Trainingsprogramm Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Baustein 1: Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen*.- Berlin: Cornelsen.

GERSTER, Hans-Dieter (2009a): *Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100*.- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 248-268.

GERSTER, Hans-Dieter (2009b): *Probleme und Fehler bei den schriftlichen Rechenverfahren*.- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 269-284.

GERSTER, Hans-Dieter (2007): *Schriftliche Rechenverfahren*-. In WALTER, Jürgen & WEMBER, Franz B. (Hrsg.) (2007): *Sonderpädagogik des Lernens*.- Göttingen: Hogrefe, S. 605-634.

GERSTER, Hans-Dieter (2005): *Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich*.- In: ASTER, Michael von & LORENZ, Jens Holger (Hrsg.) (2005): *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*.- Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 202-236.

GERSTER, Hans-Dieter (1994): *Arithmetik im Anfangsunterricht*.- In: ABELE, Albrecht & KALMBACH, Herbert (Hrsg.): *Handbuch zur Grundschulmathematik, 1. und 2. Schuljahr*.- Stuttgart: Klett, S. 35-102.

GERSTER, Hans-Dieter (1989): *Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Verfahren*.- In*: Grundschule,* Vol. 21, H. 12, S. 26-29.

GIERLINGER, Wolfgang (Hrsg.) (2001): *Zahlenzauber 1. Mathematikbuch für die Grundschule in Bayern*.- München, Düsseldorf, Stuttgart: Oldenbourg Schulbuchverlag.

GINSBURG, Herbert P. (1997): *Entering the child's mind: the clinical interview in psychological research and practice*.- Cambridge: Cambridge University Press.

GINSBURG, Herbert P. (1989): *Children's Mathematics. How they learn it and how you teach it*.- Austin: pro-ed, 2nd edition.

GLASERSFELD, Ernst von (1987): Wissen, Sprache und Wirklichkeit.- Braunschweig: Vieweg.

GOLDMAN, Susan R., MERTZ, Davis L. & PELLEGRINO, James W. (1989): *Individual differences in extended practice functions and solution strategies for basic addition facts*.- In: *Journal of Educational Psychology*, Vol. 81 (1989), S. 481-496.

GOLDMAN, Susan R., PELLEGRINO, James W. & MERTZ, Davis L. (1988): *Extended Practice of Basic Addition Facts: Strategy Changes in Learning-Disabled Students*.- In: *Cognition and Instruction*, Vol. 5, Nr. 3, S. 223-265.

GRASSMANN, Marianne, MIRWALD, Elke, KLUNTER, Martina & VEITH, Ute (1995): *Arithmetische Kompetenz von Schulanfängern – Schlußfolgerungen für die Gestaltung des Anfangsunterrichts*.- In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* H. 7, S. 302-321.

GRAY, Eddie (2003): *Compressing the counting process: developing a flexible interpretation of symbols*.- In: THOMPSON, Ian (Ed.) (2003): *Teaching and learning early number*.- Maidenhead: Open University Press, S. 63-72.

GRAY, Edward M. (1991): *An Analysis of Diverging Approaches to Simple Arithmetic: Preference and its Consequences*.- In: *Educational Studies in Mathematics,* 22, S. 551-574.

GRAY, Eddie, PINTO, Marcia, PITTA, Demetra & TALL, David (1999): *Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics*.- In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 38, Nr. 1/3, S. 111-133.

GRAY, Eddie & PITTA, Demetra (1999): *A Perspective on Mental Arithmetic*.- In: *Mathematics Teaching*, Vol. 167, S. 12-15.

GRAY, Eddie M. & TALL, David O. (1994): *Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic.*- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 25, No. 2, S. 116-140.

GRIESEL, Heinz (1971): *Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band I.*- Hannover.

GROEN, Guy J. & PARKMAN, John M. (1972): *A Chronometric Analysis of Simple Addition.*- In: *Psychological Review*, Vol. 79, No. 4. S. 329-343.

GRUBE, Dietmar (2006): *Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter. Basale Fertigkeiten, Wissensabruf und Arbeitsgedächtniseinflüsse.*- Münster u.a.: Waxmann.

GRUBE, Dietmar (2005): *Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter.*- In: HASSELHORN, Marcus, MARX, Harald & SCHNEIDER, Wolfgang (Hrsg.) (2005): *Diagnostik von Mathematikleistungen*.- Göttingen u. a.: Hogrefe, S. 105-124.

GRÜßING, Meike & PETER-KOOP, Andrea (Hrsg.) (2006): *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren.*- Offenburg: Mildenberger.

HANISCH, Günter (1990): *Problematik der Leistungsfeststellungen durch schriftliche Arbeiten am Beispiel der Mathematik.*- Unveröffentlichte Habilitationsschrift. Universität Wien.

HASEMANN, Klaus (2003): *Anfangsunterricht Mathematik.*- Heidelberg, Berlin: Spektrum.

HATANO, Giyoo (1982): *Learning to Add and Subtract: A Japanese Perspective*.- In: CARPENTER, Thomas P., Moser, James M. & Romberg, Thomas A. (Eds.): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.*- Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 211-223.

HEGEL, Georg W. F. (1830/1983): *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse. Erster Teil: Die Wissenschaft der Logik*.- Frankfurt am Main: Suhrkamp.

HENGARTNER, Elmar (Hrsg.): *Mit Kindern lernen*.- Zug: Klett Schweiz, 1999.

HENGARTNER, Elmar, HIRT, Uli, WÄLTI, Beat und PRIMARSCHULTEAM LUPSINGEN (2006): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*.- Zug: Klett und Balmer Verlag.

HENGARTNER, Elmar & RÖTHLISBERGER, Hans (1995): *Rechenfähigkeit von Schulanfängern*.- In: BRÜGELMANN, Hans, BALHORN, Heiko & FÜSSENICH, Iris (Hrsg.) (1995): *Am Rande der Schrift*.- Lengwil: Libelle, S. 66-86.

HENRY, Valerie J. & BROWN, Richard S. (2008): *First-Grade Basic Facts: An Investigation into Teaching and Learning of an Accelerated, High-Demanding Memorization Standard*.- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39, No. 2, S. 153-183.

HIEBERT, James & LEFEVRE, Paul (1986): *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis*.- In HIEBERT, James (Ed.) (1986): *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*.- Hillsdale: Erlbaum, S. 1-27.

HIRT, Ueli & WÄLTI, Beat (2008): *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*.- Seelze-Velber: Kallmeyer.

HÖHTKER, Barbara & SELTER, Christoph (1995): *Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl. Orientierungsübungen im Hunderterraum*.- In: MÜLLER, Gerhard N. & WITTMANN, Erich Ch. (Hrsg.): *Mit Kindern rechnen*.- Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband e.V.: Frankfurt/Main, S. 122-137.

HOLT, John (1971): *Wie Kinder lernen*-. Weinheim, Berlin, Basel: Beltz.

HOLT, John (2004/1964): *Aus schlauen Kindern werden Schüler… Von dem, was in der Schule verlernt wird*.- Weinheim und Basel: Beltz.

HOPE, Jack A., LENTZINGER, Larry, REYS, Barbara J. & REYS, Robert E. (1988): *Mental math in the primary grade*.- Palo-Alto, CA: Dale Seymour Publications.

HOPMANN, Stefan Th., BRINEK, Gertrude & RETZL Martin (Hrsg.) (2007): *PISA zufolge PISA. Hält PISA, was es verspricht?*- Wien: LIT-Verlag.

HUGHES, Michael (1986): *Children and Number. Difficulties in Learning Mathematics*.- Oxford: Blackwell.

INGENKAMP, Karlheinz (Hrsg.) (1995): *Die Fragwürdigkeit der Zensurengebung*.- Weinheim: Beltz.

IRWIN, Kathryn C. (1996): *Children's Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-Whole Relationships*.- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 27, No. 1, S. 25-40

ISAACS, Andrew C. & CARROLL, William M.: *Strategies for Basic-Fact Instruction*.- In: *Teaching Children Mathematics*, Vol. 5 (1999), Issue 9, S. 508 – 515.

JANSSEN, Jürgen & LAATZ, Wilfried (2003): *Statistische Datenanalyse mit SPSS für Windows*.- Berlin u.a.: Springer, 4., neubearbeitete und erweiterte Auflage.

JAHNKE, Thomas & MEYERHÖFER, Wolfram (2006): *PISA & Co. Kritik eines Programms*.- Hildesheim: Franzbecker.

JORDAN, Nancy C., HANICH, Laurie B. & KAPLAN, David (2003): *A Longitudinal Study of Mathematical Competencies in Children With Specific Mathematics Difficulties Versus Children With Comorbid Mathematics and Reading Difficulties*.- In: *Child Development*, Vol. 74, No. 3, S. 834-850.

KAMPSHOFF, Marita (2007): *Geschlechterdifferenz und Schulleistung. Deutsche und englische Studien im Vergleich*.- Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften

KAUFMANN, Liane & NUERK, Hans-Christoph (2005): *Numerical development: current issues and future perspectives*.- In: *Psychology Science*, Vol. 47, No. 1, S. 142-170.

KAUFMANN, Sabine & WESSOLOWSKI, Silvia (2006): *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine*.- Seelze: Kallmeyer.

KELLE, Udo (1994): *Empirisch begründete Theoriebildung. Zur Logik und Methodologie interpretativer Sozialforschung*.- Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

KELLE, Udo & KLUGE, Susann (1999): *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung*.- Opladen: Leske und Budrich.

KELLER, Carmen (1997): *Geschlechterdifferenzen: Trägt die Schule dazu bei?*- In: MOSER, Urs u. a. (1997): *Schule auf dem Prüfstand. Eine Evaluation der Sekundarstufe 1 auf der Grundlage der Third International Mathematics and Science Study*.- Chur, Zürich: Rüegger, S. 138-179.

KERKMAN, Dennis D. & SIEGLER, Robert S.: *Individual differences and adaptive flexibility in lower-income children's strategy choices*.- In: *Learning and Individual Differences,* Vol. 5., S. 113-136.

KESTING, Frauke (2005): *Mathematisches Vorwissen zu Schuljahresbeginn bei Grundschülern der ersten drei Schuljahre. Eine empirische Untersuchung*.- Hildesheim: Franzbecker.

KIEFER, M. (1977): *The time course of parietal activation in single-digit multiplication: Evidence from event-related potentials*.- In: *Mathematical Cognition,* Vol. 3, No. 1, S. 1-30.

KILPATRICK, Jeremy, SWAFFORD, Jane & FINDELL Bradford (Eds.) (2001): *Adding it up: Helping children learn mathematics*.- Washington, DC: Natioanl Academy Press.

KLUGE, Susann (1999): *Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung*.- Opladen: Leske und Budrich.

KOMM, Ellen (2003): *Kognitive Grundlagen des Anfangsunterrichts*.- Unveröffentlichte Wissenschaftliche Hausarbeit zur Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen. Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.

KOONTZ, K. L. & BERCH, D. B. (1996): *Identifying simple numerical stimuli: processing inefficiencies exhibited by arithmetic learning disabled children*.- In: *Mathematical Cognition*, Vol. 2, No. 1, S. 1-23.

KORNMANN, Reimer, FRANK, Annette, HOLLAND-RUMMER, Claudia & WAGNER, Hans-Jürgen (1999): *Probleme beim Rechnen mit der Null. Erklärungsansätze und pädagogische Hilfen*.- Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

KNIPPIG, Christine (2003): *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Matehamtikunterricht in Deutschland und Frankreich*.- Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
KRAJEWSKI, Kristin (2008): *Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen*.- In: PETERMANN, Franz & SCHNEIDER, Wolfgang (Hrsg.): *Angewandte Entwicklungspsychologie*.- Göttingen: Hogrefe, S. 275-304.

KRAJEWSKI, Kristin (2005): *Vorschulische Mengenbewusstheit von Zahlen und ihre Bedeutung für die Früherkennung von Rechenschwäche*.- In: HASSELHORN, Marcus, MARX, Harald & SCHNEIDER, Wolfgang (Hrsg.) (2005): *Diagnostik von Mathematikleistungen*.- Göttingen u. a.: Hogrefe, S. 49-70.

KRAJEWSKI, Kristin (2003): *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule.*- Hamburg: Kovac.

KRAJEWSKI, Kristin, KÜSPERT, Petra & SCHNEIDER, Wolfgang (2002): *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+).*- Göttingen: Högrefe.

KRAJEWSKI, Kristin, LIEHM, Susann & SCHNEIDER, Wolfgang (2004): *Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen (DEMAT 2+).*- Göttingen: Högrefe.

KRAJEWSKI, Kristin & SCHNEIDER, Wolfgang (2006): *Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit*.- In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, Vol. 53, S. 246-262.

KRAUTHAUSEN, Günter (2009): *Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen.*- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 100-117.

KRAUTHAUSEN, Günter (1995): *Die "Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen.*- In: MÜLLER, Gerhard N. & WITTMANN, Erich Ch. (Hrsg.): *Mit Kindern rechnen*.- Arbeitskreis Grundschule – Der Grundschulverband e.V.: Frankfurt/Main, S. 87-108.

KRAUTHAUSEN, Günter (1993): *Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden.*- In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 3/4, S. 189-219.

KRAUTHAUSEN, Günter & SCHERER, Petra (2007): *Einführung in die Mathematikdidaktik*.- Heidelberg – Berlin: Spektrum, 3. Auflage.

KUCIAN, Karin & ASTER, Michael von (2005): *Dem Gehirn beim Rechnen zuschauen. Ergebnisse der funktionellen Bildgebung.*- In: ASTER, Michael von & LORENZ, Jens Holger (Hrsg.) (2005): *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik.*- Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 54-72.

KUCKARTZ, Udo (1988): *Computer und verbale Daten. Chancen zur Innovation sozialwissenschaftlicher Forschungstechniken*.- Frankfurt/Main, Bern, New York, Paris: Peter Lang.

KÜHNEL, Johannes (1949): *Lebensvoller Rechenunterricht*.- München: Ehrenwirth, 6. Auflage.

KÜHNEL, Johannes (1916): *Neubau des Rechenunterrichts. Ein Handbuch für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben. Erster Band.*- Leipzig: Verlag von Julius Klinkhardt.

LANDERL, Karin & KAUFMANN, Liane (2008): *Dyskalkulie*. München: Ernst Reinhardt.

LANDERL, Karin, BEVAN, Anna & BUTTERWORTH, Brian (2004): *Developmental Dyscalculia and Basic Numerical Capacities: A Study of 8-9 Year Old Students*.- In: *Cognition*, Vol. 93, S. 99–125.

LAZARSFELD, Paul F. (1937): *Some remarks on the typological procedures in social research*.- In: *Zeitschrift für Sozialforschung.* Jahrgang VI, 119-139.

LAZARSFELD, Paul F. & BARTON, Allen H. (1951): *Qualitative measurement in the social sciences. Classification, typologies, and indices*.- In: LERNER, Daniel & LASSWELL, Harold D. (Eds.): *The policy sciences*.- Stanford University Press, 155-192.

LEFEVRE, J.-A. u.a. (1996): *Selection of procedures in mental arithmetic. Reassessing the problem size effect in adults*.- In: *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, Vol. 22, S. 216-230.

LEPACH, Anja C., HEUBROCK, Dietmar, MUTH, Despina und PETERMANN, Franz (2003): *Training für Kinder mit Gedächtnisstörungen. Das neuropsychologische Einzeltraining REMINDER*.- Göttingen u.a.: Hogrefe.

LEUTZINGER, Larry P. (1999): *Developing Thinking Strategies for Addition Facts*.- In: *Teaching Children Mathematics*, Vol. 6, Nr. 1, S. 14-18.

LORENZ, Jens-Holger (2003a): *Lernschwache Rechner fördern*.- Berlin: Cornelsen.

LORENZ, Jens-Holger (2003b): *Rechenschwäche – ein Problem der Schul- und Unterrichtsentwicklung*.- In: BAUM, Monika & WIELPÜTZ, Hans (Hrsg.): *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch*.- Kallmeyer: Seelze, S. 103-119.

LORENZ, Jens-Holger (2002): *Das arithmetische Denken von Grundschulkindern*.- In: PETER-KOOP, Andrea (Hrsg.): *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*.- Offenburg: Mildenberger, S. 59-81.

LORENZ, Jens-Holger (Hrsg.) (2000a): *Aus Fehlern wird man... Irrtümer in der Mathematikdidaktik des 20. Jahrhunderts*.- In: *Grundschule*, H. 1., S. 19-22.

LORENZ, Jens-Holger (Hrsg.) (2000b): *Mathematikus 1*.- Braunschweig: Westermann.

LORENZ, Jens-Holger (2000c): *Mathematikus 2. Lehrerhandbuch*.- Braunschweig: Westermann.

LORENZ, Jens-Holger (1998): *Rezension zu E. Spindler & H. Dreher: "Rechnenlernen"*.- In: *Grundschule*, Vol. 30, H. 3, S. 58-60.

LORENZ, Jens-Holger (1997): *Kinder entdecken die Mathematik*.- Braunschweig: Westermann.

LORENZ, Jens-Holger & RADATZ, Hendrik (1993): *Handbuch des Förderns im Mathematik-Unterricht*.- Hannover: Schroedel.

LORENZ, Jens-Holger & RADATZ, Hendrik (1993): *Rechenschwäche*.- In: *Die Grundschule*, Vol. 18, H. 4, S. 40-42.

MAIER, Peter Herbert (Hrsg.) (2004): *Nussknacker. Mein Mathematikbuch, Band 1*.- Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.

MAYRING, Philipp (2003): *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*.- Weinheim und Basel: Beltz, 8. Auflage.

MAYRING, Philipp (2002): *Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zu qualitativem Denken*.- Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 5. Auflage.

MENNINGER, Karl (1992): *Rechenkniffe: lustiges und vorteilhaftes Rechnen*.- Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

MILLER, Kevin, SMITH, Catherine M., ZHU, Jianjun & ZHANG, Houcan (1995): *Preschool origins of cross-national differences in mathematical competence: The role of number-naming Systems*.- In: *Psychological Science*, Vol. 6, No. 1, S. 56-60.

MILZ, Ingeborg (2004): *Rechenschwächen erkennen und behandeln*.- Dortmund: Borgmann, sechste, völlig neu bearbeitete Auflage.

MINISTERIUM FÜR SCHULE, JUGEND UND KINDER DES LANDES NORDRHEIN-WESTFALEN (Hrsg.) (2003): *Richtlinien und Lehrpläne zur Erprobung für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen*.- Frechen: Ritterbach Verlag.

MINSEL, Beate (2005): *Eltern als Erzieher*.- In: *Krapp*, Andreas & *Weidenmann*, Bernd (Hrsg.): *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch*.- Weinheim: Beltz, 5. Auflage, S. 273-295.

MOOG, Wolfgang & Schultz, Andreas (1999): *Zahlen begreifen. Diagnose und Förderung bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten*.- Neuwied, Berlin: Luchterhand.

MOSER OPITZ, Elisabeth (2007): *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* – Bern, Stuttgart, Wien: Haupt Verlag.

MOSER OPITZ, Elisabeth (2005): *Lernschwierigkeiten Mathematik in Klassen 5 und 8: Eine empirische Untersuchung*.- In: *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbarsgebiete*, Vol. 73, S. 179-190.

MOSER OPITZ, Elisabeth: *Zählen – Zahlbegriff – Rechnen*.- Bern – Stuttgart – Wien: Haupt, 2001.

MOSER OPITZ, Elisabeth & SCHMASSMANN, Margret (2002a): *Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 1*.- Zug: Klett und Balmer.

MOSER OPITZ, Elisabeth & SCHMASSMANN, Margret (2002b): *Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 2*.- Zug: Klett und Balmer.

MURPHY, Carol (2004): *How Do Children Come to Use a Taught Mental Calculation Strategy?*- In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 56, No. 1, S. 3-18.

OSTAD, Snorre A. (1998): *Developmental differences in solving simple arithmetic number-fact problems: A comparison of mathematically normal and mathematically disabled children*.- In: *Mathematical Cognition,* Vol. 4, S. 1-19.

OSTAD, Snorre A. (1992): *Bærekraftige matematikkunnskaåer, en funksjon av ferdighet eller forståelse? [Good mathematics knowledge, a function of skills or understanding?]*.- In: *Norsk pedagogisk tidsskrift,* Vol. 6, S. 320-326.

PADBERG, Friedhelm (2005): *Didaktik der Arithmetik*.- Heidelberg: Spektrum, 2005, dritte erweiterte, völlig überarbeitete Auflage.

PADBERG, Friedhelm (1994): *Zum Einsatz von heuristischen Strategien und Zählstrategien bei der Subtraktion – eine empirische Untersuchung am Ende des ersten Schuljahres.*- In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe,* Vol. 22, H. 7, S. 323-328.

PADBERG, Friedhelm (1993): *Additionsstrategien von Erstklässlern – eine empirische Untersuchung.*- In: *Mathematische Unterrichtspraxis,* IV. Quartal, S. 1-8.

PARKIN, Alan J. (2000): *Erinnern und Vergessen: wie das Gedächtnis funktioniert – und was man bei Gedächtnisstörungen tun kann.*- Bern u.a.: Huber.

PIAGET, Jean (1972): *Remarks in mathematics education*.- Paper presented at the Exeter Conference of Mathematics Education, zitiert nach: GINSBURG, Herbert P. (1989): *Children's Mathematics. How they learn it and how you teach it.*- Austin: pro-ed, 2nd edition, S. 96f.

PITTA, Demetra & Gray, Eddie (1997): *"In the Mind. What can imagery tell us about success and failure in arithmetic?"*- In: Makrides, Gregory A. (Ed.): *Proceedings of the First Mediterranean Conference on Mathematics*.- Nicosia, Cyprus, S. 29-41.

POHLE, Erich & REISS, Kristina (1998): *Vom zählenden Rechnen zum sicheren Zehnerübergang*.- In: *Grundschulunterricht*, H. 5, S. 28-30.

PROBST, Holger & WANIEK, Dorothea (2003): *Kommentar: Erste numerische Kenntnisse von Kindern und ihre didaktische Bedeutung.*- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2003): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie.*- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, S. 65-79.

PUTNAM, Ralph T., DEBETTENCOURT, Laurie U. & LEINHARDT, Gaea (1990): *Understanding of Derived-Fact Strategies in Addition and Subtraction*.- In: *Cognition and Instruction*, Vol. 7, No. 3, S. 245-285.

RADATZ, Hendrik (1982): *Zählen – eine oft vernachlässigte Tätigkeit*.- In: *Grundschule,* H. 4, S. 159-162.

RADATZ, Hendrik, SCHIPPER, Wilhelm, DRÖGE, Rotraud, EBELING, Astrid (1998): *Handbuch für den Mathematikunterricht, 2. Schuljahr*.- Hannover: Schroedel.

RADATZ, Hendrik, SCHIPPER, Wilhelm, DRÖGE, Rotraud, EBELING, Astrid (1996): *Handbuch für den Mathematikunterricht, 1. Schuljahr*.- Hannover: Schroedel.

RADATZ, Hendrik & SCHIPPER, Wilhelm (1983): *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*.- Hannover: Schroedel.

RATHGEB-SCHNIERER, Elisabeth (2006): *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*.- Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

REISINGER, Christa-Monika (2003): *Adaptiver Unterricht. Eine Erkundungsstudie. Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie*.- Wien: Universität Wien.

REISS, Kristina, HEINZE, Aiso & PEKRUN, Reinhard (2007): *Mathematische Kompetenz und ihre Entwicklung in der Grundschule*.- In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft,* 10. Jahrgang, Sonderheft 8, S. 107-127.

RESNICK, Lauren B. (1992): *From Protoquantitites to Operators: Building Mathematical Competence on a Foundation of Everyday Knowledge.- In:* LEINHARDT, Gaea, Putnam, Ralph & Hattrup, Rosemary (Ed.): *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*.- Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 373-429.

RESNICK, Lauren B., BILL, V., LESGOLD, S. B. & LEER, M. N. (1991): *Thinking in arithmetic class*.- In: MEANS, Barbara, CHELEMER, Carol & KNAPP, Michael (Eds.): Teaching advanced skills to at-risk students.- San Francisco: Jossey-Bass Publishers, S. 27-53.

RESNICK, Lauren B. (1983): *A Developmental Theory of Number Understanding*.- In: GINSBURG, Herbert P. (Ed.): *The Development of Mathematical Thinking*.- New York: Academic Press, S. 109-151.

RIGHTSEL, Pamela S. & THORNTON, Carol (1985): *72 Addition Facts Can Be Mastered by Mid-Grade 1*.- In: *Arithmetic Teacher,* S. 8-10.

RINKENS, Hans-Dieter & HÖNISCH, Kurt (Hrsg.) (2003): *Welt der Zahl 1. Mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule*.- Braunschweig: Schroedel.

RITTLE-JOHNSON, Bethany, SIEGLER, Robert S. & WAGNER ALIBALI, Martha (2001): *Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process*.- In: *Journal of Educational Psychology,* Vol. 93, No. 2, S. 346-362.

ROICK, Thorsten & HASSELHORN, Marcus (2005): *Der Kettenrechner 3 – 4. Zusätzliche Differenzierung durch komplexe arithmetische Faktenaufgaben.*- In: HASSELHORN, Marcus & MARX, Harald & SCHNEIDER, Wolfgang (Hrsg.) (2005): *Diagnostik von Mathematikleistungen.*- Göttingen: Hogrefe, S. 233-250.

ROTTMANN, Thomas (2006): *Das kindliche Verständnis der Begriffe "die Hälfte" und "das Doppelte". Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung.*- Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

ROTTMANN, Thomas & SCHIPPER, Wilhelm (2002): *Das Hunderter-Feld – Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100?*- In: *Journal für Mathematik-Didaktik,* Vol. 23, H. 1, S. 51-74.

RUDOLF, Matthias & MÜLLER, Johannes (2004): *Multivariate Verfahren. Eine praxisorientierte Einführung mit Anwendungsbeispielen in SPSS*.- Göttingen u.a.: Hogrefe.

RUSSELL, Robert L. & GINSBURG, Herbert P. (1984): *Cognitive analysis of children`s mathematics difficulties*.- In: *Cognition and Instruction*, Vol. 1, S. 217-244.

RUSSO, J. Edward, JOHNSON, Eric J. & STEPHENS, Debra L. (1989): *The validity of verbal protocols*.- In: *Memory and Cognition*, Vol. 17, H. 6, S. 759-769.

RUSTEMEYER, Ruth (1999): *Geschlechtstypische Erwartungen zukünftiger Lehrkräfte bezüglich des Unterrichtsfaches Mathematik und korrespondierende (Selbst-)Einschätzungen von Schülerinnen und Schülern*.- In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, H. 46, S. 187-200.

SCHÄFER, Jutta (2005): *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule*.- Hamburg: Verlag Dr. Kovac.

SCHERMER, Franz J. (2002): *Lernen und Gedächtnis*.- Stuttgart: Kohlhammer, 3., überarbeitete und erweiterte Auflage.

SCHERER, Petra (1999): *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch Fordern. Band 1: Zwanzigerraum*.- Leipzig – Stuttgart – Düsseldorf: Klett.

SCHIPPER, Wilhelm (2009): *Schriftliches Rechnen als neue Chance für rechenschwache Kinder*.- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim und Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 118-134.

SCHIPPER, Wilhelm (2005): *Schulische Intervention und Prävention bei Rechenstörungen*.- In: *Die Grundschulzeitschrift*, H. 182, S. 6-10.

SCHIPPER, Wilhelm (2003a): *Thesen und Empfehlungen für den schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen*.- In: LENART, Friederike, HOLZER, Norbert & SCHAUPP, Hubert (Hrsg.) (2003): *Rechenschwäche – Rechenstörung – Dyskalkulie: Erkennung, Prävention, Förderung*.- Graz: Leykam, 2003, S. 103-121.

SCHIPPER, Wilhelm (2003b): *Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht*.- In: BAUM, Monika & WIELPÜTZ, Hans (Hrsg.): *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch*.- Kallmeyer: Seelze, S. 221-237.

SCHIPPER, Wilhelm (2002): *„Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen." – Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos*.- In: PETER-KOOP, Andrea (Hrsg.): *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule*.- Offenburg: Mildenberger, S. 119-140.

SCHMIDT, R. (1982): *Zahlenkenntnisse von Schulanfängern. Ergebnisse einer zu Beginn des Schuljahrs 1981/82 durchgeführten Untersuchung*.- Wiesbaden: Hessisches Institut für Bildungsplanung und Schulentwicklung.

SCHMIDT, Siegbert (2009): *Arithmetische Kenntnisse am Schulanfang – Befunde aus mathematikdidaktischer Sicht*.- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 77-97.

SCHMIDT, Siegbert & WEISER, W. (1982): *Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern: Zählen und der kardinale Aspekt natürlicher Zahlen*.- In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, H. 2/3, S. 227-263.

SCHNEIDER, Wolfgang & BÜTTNER, Gerhard (2008): *Entwicklung des Gedächtnisses bei Kindern und Jugendlichen*.- In: OERTER, Rolf & MONTADA, Leo (2008): *Entwicklungspsychologie*.- Weinheim, Basel: Beltz PVU, 6. vollständig überarbeitete Auflage, S. 480-501.

SCHÜTTE, Sybille (2002): *Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks*.- In: *Praxis Grundschule*, H. 2, S. 5-6.

SCHÜTTE, Sybille (Hrsg.) (2007): *Die Matheprofis 4. Ein Mathematikbuch für das 4. Schuljahr*.- Linz: Veritas.

SCHÜTTE, Sybille (Hrsg.) (2000): *Die Matheprofis 1. Ein Mathematikbuch für das 1. Schuljahr*.- München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

SCHWANK, Inge (2005): *Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens*.- In: ASTER, Michael von & LORENZ, Jens Holger (Hrsg.) (2005): *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik*.- Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, S. 93-133.

SELTER, Christoph (2000): *Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000*.- In: *Journal für Mathematikdidaktik*, Vol. 21, H. 3/4, S. 227-258.

SELTER, Christoph & SPIEGEL, Hartmut (1997): *Wie Kinder rechnen*.- Stuttgart: Klett.

SELTER, Christoph (1995): *Zur Fiktivität der "Stunde Null" im arithmetischen Anfangsunterricht*.- In: *Mathematische Untersuchungspraxis*, II. Quartal, S. 11-19.

SHRAGER, Jeff & SIEGLER, Robert S. (1998): *SCADS: A Model of Children's Strategy Choices and Strategy Discoveries*. – In: *Psychological Science*, Vol. 9, No. 5, S. 405-410.

SIEGEL, Linda S. & RYAN, Ellen B. (1989): *The development of working memory in normally achieving and subtypes of learning disabled children*.- In: *Child Development*, Vol. 60, S. 973-980.

SIEGLER, Robert S. (2001): *Das Denken von Kindern*.- München – Wien: R. Oldenbourg Verlag.

SIEGLER, Robert S. (1988): *Individual differences in strategy choices: Good students, not-so-good students, and perfectionists*.- In: *Child Development*, Vol. 59, S. 833-851.

SIEGLER, Robert S. (1987): *The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition*.- In: *Journal of Experimental Psychology: General*, Vol. 116, S. 250-264.

SIEGLER, Robert S. & JENKINS, Eric (1989): *How children discover new strategies*.- Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

SIEGLER, Robert S. & ROBINSON, Mitchell (1982): *The development of numerical understandings*.- In: REESE, H. & LIPSITT, L. P. (Eds.) (1982): *Advances in child development and behavior*.- New York: Academic Press, S. 242-312.

SIEGLER, Robert S. & SHRAGER, Jeffrey (1984): *Strategy Choices in Addition and Subtraction: How Do Children Know What to Do?*- In: SOPHIAN, Catherine (Hrsg.) (1984): *Origins of Cognitive Skills*.- Hillsdale: Erlbaum, 1984, S. 229-294.

SIEGLER, Robert S. & SHIPLEY, Christopher (1995): *Variation, Selection, and Cognitive Change*.- In: SIMON, Thomas & HALFORD, Graeme (Eds.) (1995): *Developing Cognitive Competence: New approaches to process modeling*.- Hillsdale: Erlbaum, S. 31-76.

SIEGLER, Robert S. & STERN, Elsbeth (1998): *Conscious and Unconscious Strategy Discoveries: A Microgenetic Analysis*.- In: *Journal of Experimental Psychology: General*, Vol. 127, No. 4, S. 377 – 397.

SODIAN, Beate, SCHNEIDER, Wolfgang & PERLMUTTER, Marion (1986): *Free recall, clustering, and metamemory in young children*.- In: *Journal of Experimental Child Psychology*, Vol. 41, S. 395-410.

SONG, Myung-Ja & GINSBURG, Herbert P. (1987): *The development of informal and formal mathematical thinking in Korean and U.S. children*.- In: *Child Development*, 58, S. 1286-1296.

SOPHIAN, Catherine & MCCORGRAY, Patricia (1994): *Part-Whole Knowledge and Early Arithmetic Problem Solving*.- In: *Cognition and Instruction*, Vol. 12, Nr. 1, S. 3-33.

SOWDER, J.T. (1992): *Teaching computation in ways that promote numer sense*.- In: IRONS, C.J. (Ed.) (1992): *Challenging children to think when they compute*.- Brisbane: Queensland University of Technology, Centre for Mathematics and Science Education, S. 14-27.

SPIEGEL, Hartmut (1988): *Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule*.- In: BENDER, Peter (Hrsg.): *Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter*.- Berlin, Cornelsen, S. 177-189.

SPIEGEL, Hartmut & SELTER, Christoph (2003): *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*.- Seelze-Velber: Kallmeyer.

SPINDLER, Eva & DREHER, Hariolf (1996): *Rechnenlernen mit der kybernetischen Methode*.- Rottenburg an der Laaber: Rottenburger Verlag.

STADLER, Helga (2009): *Unerfreulicher Spitzenplatz für Österreich in den Leistungsunterschieden zwischen Buben und Mädchen in Mathematik und Naturwissenschaften. Geschlechterspezifische Ergebnisse in PISA und TIMSS*.- In: *IMST-Newsletter*, Jahrgang 8, Ausgabe 30, S. 8-9.

STANESCU-COSSON, Ruxandra u.a. (2000): *Understanding dissociations in dyscalculia: A brain imaging study of the impact of number size on the cerebral networks for exact and approximate calculation*.- In: *Brain*, Vol. 123, S. 2240-2255.

STEFFE, Leslie P. (1979): *A reply to „Formal Thinking Strategies: A Prerequisite for Learning Basic Facts?*".- In: *Journal for Research in Mathematics Education,* 10, S. 370-374.

STEFFE, Leslie P. & Cobb, Paul (1988): *Construction of arithmetical meanings and strategies.*- New York: Springer.

STEINBERG, Ruth M. (1985): *Instruction on Derived Facts Strategies in Addition and Subtraction.*- In: *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 16, No. 5, S. 337-355.

STEINWEG, Anna Susanne (2008a): *Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang.*- In: HELLMICH, Frank & KÖSTER, Hilde (Hrsg.) (2008): *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften.*- Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

STEINWEG, Anna Susanne (2008b): *Grundlagen mathematischen Lernens vor der Schule*.- In: *Beiträge zum Mathematikunterrich 2008,* S. 273-276.

STEINWEG, Anna Susanne (2001): *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*.- Münster: Lit-Verlag.

STERN, Elsbeth (2009): *Früh übt sich: Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben in der Grundschule.*- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2009): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2. Auflage, S. 151-164.

STERN, Elsbeth (1998): *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*.- Lengerich u. a.: Pabst Science Publishers.

STERN, Elsbeth (1992): *Warum werden Kapitänsaufgaben "gelöst"? – Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht.*- In: *Der Mathematikunterricht,* Heft 5, S. 7-29.

STRAKER, Anita (1999): *The National Numeracy Project: 1996-99*.- In: THOMPSON, Ian (Ed.) (1999): *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools*.- Buckingham: Open University Press, S. 39-48.

SUN, Wei & ZHANG, Joanne Y. (2001): *Teaching Addition and Subtraction Facts: A Chinese Perspective.*- In: *Teaching Children Mathematics,* Vol. 8, Issue 1, S. 28-31.

SUNDERMANN, Beate & SELTER, Christoph (2006): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht.- Berlin: Cornelsen.

SVENSON, Ola & SJÖBERG, Kit (1983): *Evolution of cognitive processes for solving simple additons during the first three school years*.- In: *Scandinavian Journal of Psychology*, Vol. 24, S. 117-124.

TEMPLE, C.M. & SHERWOOD, S. (2002): *Representation and retrieval of arithmetical facts: Developmental difficulties*.- In: *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, Vol. 55a, No. 3, 733-752.

THORNDIKE, Eward L. (1922): *The Psychology of Arithmetic*.- New York: Macmillan.

THORNTON, Carol A. (1990): *Solution Strategies: Subtraction Number Facts.* - In*: Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, H. 3, S. 241-263.

THORNTON, Carol A. (1978): *Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction.*- In*: Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 9, S. 214-227.

THORNTON, Carol A. & SMITH, Paula (1988): *Action Research: Strategies for Learning Subtraction Facts.*- In*: Arithmetic Teacher*, Vol. 35, H. 4, S. 8-12.

TORBEYNS, Joke, VERSCHAFFEL, Lieven & GHESQUIERE, Pol (2004): *Efficiency and adaptiveness of multiple school-taught strategies in the domain of simple addition*.- In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (2004), S. 321-328.

VAN DE WALLE, John A.: *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*.- Fifth Edition, Boston u. a.: Pearson, 2004.

VOLLSTÄDT, Witlof (2003): *Steuerung von Schulentwicklung und Unterrichtsqualität durch staatliche Lehrpläne*.- In: FÜSSEL, Hans-Peter & ROEDER, Peter M. (Hrsg.): *Recht – Erziehung – Staat. Zur Genese einer Problemkonstellation und zur Programmatik ihrer zukünftigen Entwicklung*.- Weinheim: Beltz Verlag, s. 194-214.

WAGNER, Hans-Jürgen (2003): *Rechnen mit der Null*.- In: FRITZ, Annemarie, RICKEN, Gabi & SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.) (2003): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie*.- Weinheim, Basel, Berlin: Beltz, 2003, S. 238-247.

WEAVER, J. Fred (1982): *Interpretations of Number Operations and Symbolic Representations of Addition and Subtraction.*- In: CARPENTER, Thomas P., MOSER, James M. & ROMBERG, Thomas A. (Eds.) (1982): *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.*- Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 60-66.

WEBER, Max (1921/1984): *Soziologische Grundbegriffe.*- Tübingen: J.C.B. Mohr, UTB.

WEBER, Max (1922/1985): *Wissenschaftslehre. Gesammelte Aufsätze*.- Tübingen: J.C.B. Mohr.

WEINERT, Franz E. & HELMKE, Andreas (1996): *Der gute Lehrer: Person, Funktion oder Fiktion?*- In: LESCHINSKY, Achim (Hrsg.) (1996): *Die Institutionalisierung von Lehrern und Lernen*.- Weinheim: Beltz, S. 223-233.

WEIßHAUPT, Steffi, PEUCKER, Sabine & WIRTZ, Markus (2006): *Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule*.- In: *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, Vol. 53, H. 4, S. 236-245.

WHEELER, L. R. (1939): *A comparative study of the difficulty of the 100 addition combinations*.- In: *Journal of Genetic Psychology*, Vol. 54, S. 295-312.

WINKEL, Sandra, PETERMANN, Franz & PETERMANN, Ulrike (2006): *Lernpsychologie*.- Paderborn: Schöningh.

WINTER, Heinrich (1987): *Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule*.- Frankfurt am Main: Scriptor Verlag.

WINTER, Heinrich (1984a): *Begriff und Bedeutung des Übens*.- In: *mathematik lehren*, H. 2, S. 4-16.

WINTER, Heinrich (1984b): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*.- In: *Grundschule*, H. 4, S. 26-29.

WINTER, Heinrich (1981): *Mathematik*.- In: BARTNITZKY, Horst & CHRISTIANI , Reinhold (Hrsg.) (1981): *Handbuch der Grundschulpraxis und Grundschuldidaktik*.- Bad Heilbrunn: Kohlhammer.

WITTMANN, Erich Ch. (2003): *Design von Lernumgebungen für die mathematische Frühförderung*. In: FAUST, G. u.a. (Hrsg.) (2003): *Anschlussfähige Bildungsprozesse im Elementar- und Primarbereich*.- Bad Heilbrunn: Klinkhardt, S. 49-63.

WITTMANN, Erich Ch. (2001): *Developing mathematics education in a systematic process*.- In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 48, No. 1, S. 1-20.

WITTMANN, Erich Ch. (1996): *Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus*.- In: *Grundschulunterricht*, H. 43, S. 3-7.

WITTMANN, Erich Ch. (1995): *Mathematics Education as a Design Science*.- In: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 29, S. 355-374.

WITTMANN, Erich Ch. (1994): *Wider die Flut der "bunten Hunde" und der "grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens*.- In: WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (1994a): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins*.- Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett, 2. überarbeitete Auflage, S. 157-171.

WITTMANN, Erich Ch. (1992): *Üben im Lernprozeß*.- In: WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*.- Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett, S. 175-182.

WITTMANN, Erich Ch. (1982): *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern: eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente*.- Braunschweig u.a.: Vieweg.

WITTMANN, Erich Ch. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*.- Sechste, neu bearbeitete Auflage. Braunschweig – Wiesbaden: Vieweg.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (2007a): *Blitzrechenoffensive! Anregungen für eine intensive Förderung mathematischer Basiskompetenzen.*- Stuttgart – Leipzig: Ernst Klett Verlag.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (2007b): *Blitzrechnen 1/2. Das innovative Kopfrechenprogramm von "mathe 2000"* (CD-ROM).- Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (2004a): *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband*.- Leipzig – Stuttgart – Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (2004b): *Das Zahlenbuch 1. Schülerband*.- Leipzig – Stuttgart – Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (1994a): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins*.- Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett, 2. überarbeitete Auflage.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER, Gerhard N. (1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* - Stuttgart – Düsseldorf – Berlin – Leipzig: Klett.

WOLF, Wilhelm (Hrsg.) (2004): *Kommentar zum Lehrplan der Volksschule. Stand: 1. Februar 2004*.- Wien: öbv&hpt.

WYNN, Karen (1992): *Addition and subtraction by human infants.*- In: *Nature,* 358, 749-750.

ZIEGENBALG, Jochen (1996): *Algorithmen – von Hammurapi bis Gödel*.- Heidelberg: Spektrum.

ZIMBARDO, Philip G. & GERRIG, Richard J. (2004): *Psychologie*.- München u.a.: Pearson Studium, 16., aktualisierte Auflage.

ZÖFEL, Peter (2003): *Statistik für Psychologen im Klartext*.- München: Pearson.

B) WWW – DOKUMENTE:

BAYERISCHES STAATSMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT UND KULTUR: *Lehrplan für die Grundschule, Mathematik.* Online im WWW unter URL:
http://www.isb.bayern.de/isb/download.aspx?DownloadFileID=e3e56d177fef177dcfcd7910ffa68941 [09.12.2009]

BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH (2009): Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards im Schulwesen.- Online im WWW unter URL:
http://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20006166 [09.12.2009]

BUNDESINSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG, INNOVATION UND ENTWICKLUNG DES ÖSTERREICHISCHEN SCHULWESENS: *PISA-Ergebnisse 2006.*- Online im WWW unter URL:
http://www.bifie.at/pisa-ergebnisse-2006 [09.12.2009]

BUNDESINSTITUT FÜR BILDUNGSFORSCHUNG, INNOVATION UND ENTWICKLUNG DES ÖSTERREICHISCHEN SCHULWESENS: *TIMMS 2007. Die Studie im Überblick.*- Online im WWW unter URL:
http://www.bifie.at/timss-2007-0 [09.12.2009]

BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR (2008): *Lehrplan der Volksschule. BGBl. Nr. 134/1963 in der Fassung BGBl. II Nr. 290/2008 vom 12. August 2008.*- Online im WWW unter URL:
http://www.bmukk.gv.at/medienpool/14055/lp_vs_gesamt.pdf [09.12.2009]

CAHILL, Larry (2006): *Why sex matters for neuroscience*.- In: *Nature Reviews Neuroscience*. Published online 10 May 2006. Online im WWW unter URL:
http://www.cbd.ucla.edu/downloads/Why%20sex%20matters.pdf [09.12.2009]

GAIDOSCHIK, Michael (2008): *Schriftliches Dividieren. Einige Anregungen zur Erarbeitung*. Online im WWW unter URL:
http://www.rechenschwaeche.at/pra/dividieren.htm [09.12.2009]

GAIDOSCHIK, Michael (2001a): *Kritik der "kybernetischen Methode".*- In: *Österreichisches Rechenschwäche Magazin*, H. 5, S.1-6. Online im WWW unter URL:
http://www.rechenschwaeche.at/magazin/magazin4_01.pdf [09.12.2009]

GAIDOSCHIK, Michael (2001b): *Literatur über Rechensstörungen. Rezension von: Moog & Schulz: "Zahlen begreifen. Diagnose und Förderung bei Kindern mit Rechenschwäche."*- In: *Österreichisches Rechenschwäche Magazin*, H. 5, S.6-7. Online im WWW unter URL:
http://www.rechenschwaeche.at/magazin/magazin4_01.pdf [09.12.2009]

GERSTER, Hans-Dieter & SCHULTZ, Rita (2000): *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.*- Freiburg im Breisgau: PH Freiburg. Online im WWW unter URL:
http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397 [09.12.2009]

HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM: *Rahmenplan Grundschule*. Online im WWW unter URL: http://www.hessisches-kultusministerium.de/irj/HKM_Internet?cid=5df05f498ea6a7b1f8b10a875c9983ca [09.12.2009]

KLUGE, Susann (2000): *Empirisch begründete Typenbildung in der qualitativen Sozialforschung* [14 Absätze].- In: *Forum Qualitative Sozialforschung/ Forum: Qualitative Social Research,* 1 (1), Art. 14. Online im WWW unter URL: http://qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1124/2497 [09.12.2009]

LANDESSCHULRAT FÜR NIEDERÖSTERREICH: *NÖ Schulführer*. Online im WWW unter URL: http://www.lsr-noe.gv.at/schulen-in-noe.html [09.12.2009]

LUCYSHYN, Josef & SCHATZ, Andreas (2004): klasse:zukunft. Bildungsstandards. building new standards. Herausgegeben vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur. Online im WWW unter URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/12093/bildungsstandards_folder.pdf [09.12.2009]

NC TM (2006): *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*: A Quest for Coherence.- Online im WWW unter URL: http://www.nctm.org/catalog/product.aspx?ID=13089 [09.12.2009]

NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*.- Online im WWW unter URL: http://my.nctm.org/standards/content.aspx?id=3098 [09.12.2009]

STATISTIK AUSTRIA: *Männer im Alter von 15 und mehr Jahren nach Altersgruppen und der höchsten abgeschlossenen Ausbildung, 1951 bis 2001*. - Online im WWW unter URL: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/volkszaehlungen_registerzaehlungen/bevoelkerung_nach_dem_bildungsstand/022874.html [09.12.2009]

STATISTIK AUSTRIA: *Frauen im Alter von 15 und mehr Jahren nach Altersgruppen und der höchsten abgeschlossenen Ausbildung, 1971 bis 2001*.- Online im WWW unter URL: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/volkszaehlungen_register zaehlungen/bevoelkerung_nach_dem_bildungsstand/022875.html [09.12.2009]

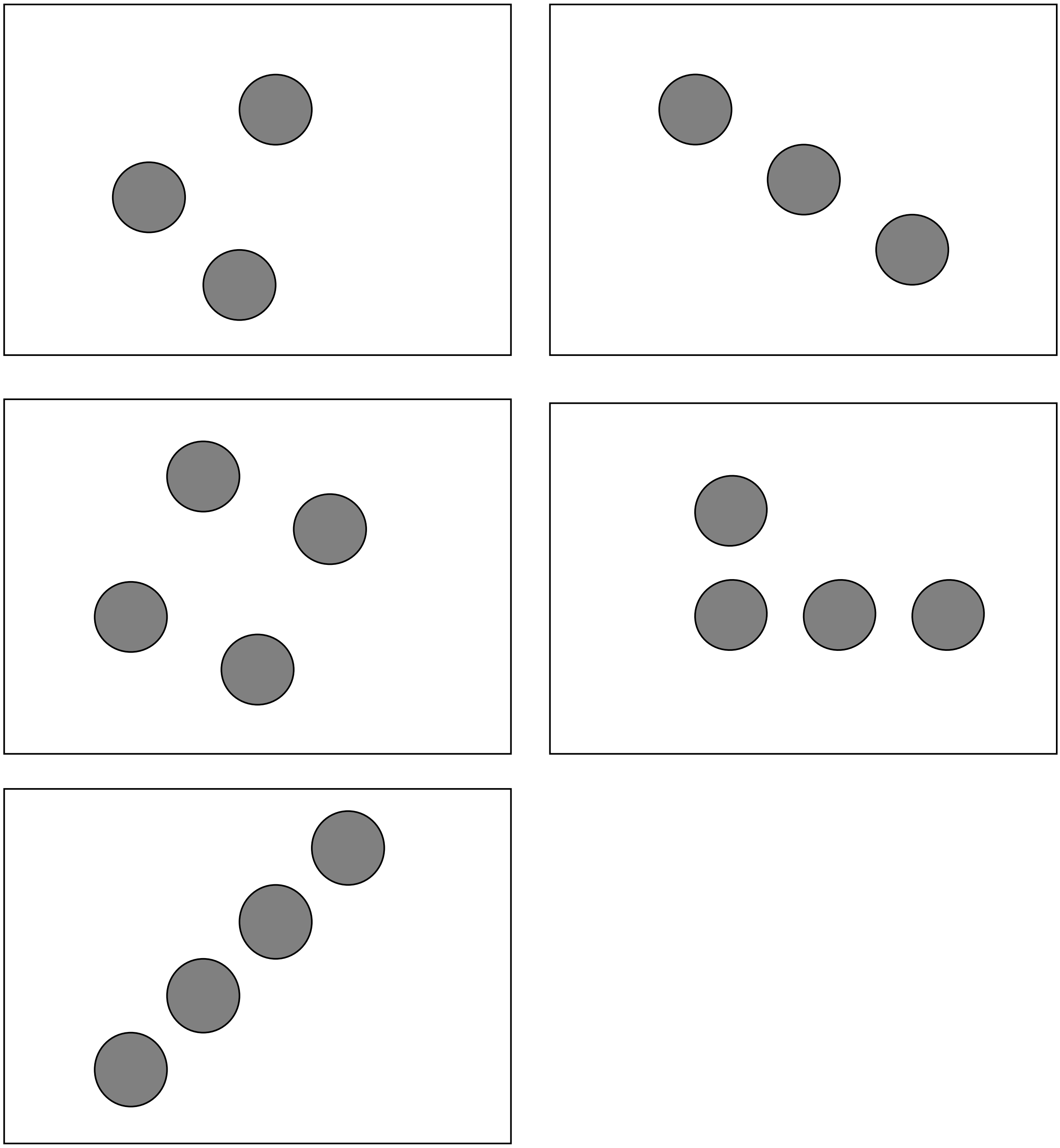
WITTMANN, Erich Ch. (2008): *"Das Wesen der Mathematik ist ihre Freiheit" – Fachliche Argumente für individuelle Lern- und Lösungswege*.- Hauptvortrag am 18. Symposium mathe 2000, Samstag, 20. September 2008. Passwortgeschützter Download unter URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/symp-archiv18.html [09.12.2009]

C) Verwendete Statistik-Software

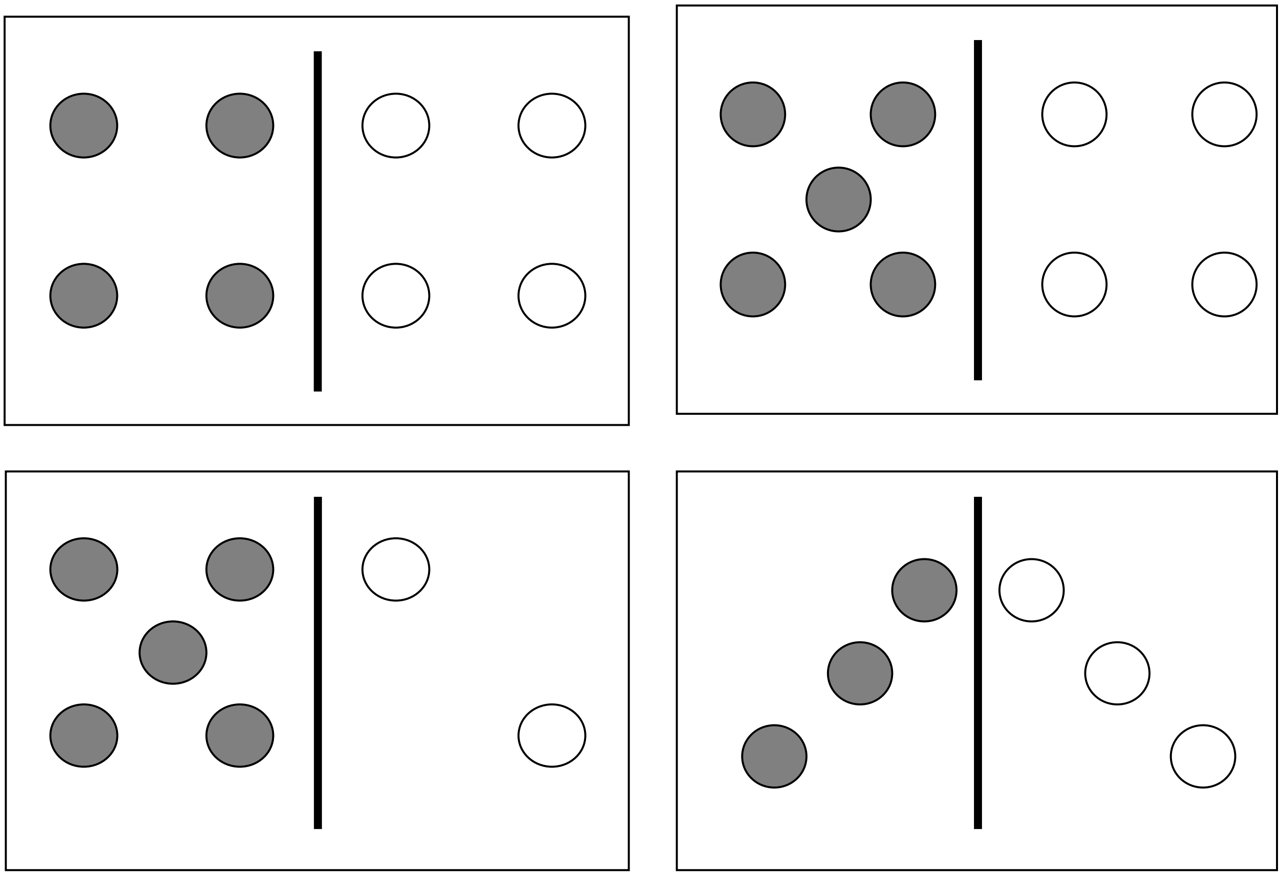
SPPS 15.0 für Windows

STRUNK, Guido (2009): *GStat Statistik Tools*.- Download im WWW unter URL: http://www.complexity-research.com/HealthCare.htm [09.12.2009]

Anhang 1: Kopiervorlage für Aufgabenkärtchen zur Erfassung der Spontanerfassung



Anhang 2: Kopiervorlage für Aufgabenkärtchen zur Erfassung der Quasi-Simultanerfassung



Anhang 3: Kopiervorlagen für die beim zweiten Interview gestellten Zusatzaufgaben

3 + 3 = ___
3 + 4 = ___
3 + 5 = ___
__ + __ = ___

10 – 5 = ___
10 – 6 = __
10 – 7 = ___
__ – __ = ___

4 + 5 = ___
3 + 6 = ___
2 + 7 = ___
__ + __ = ___

3 + 5 = 8
8 – 5 = _

3 + 6 = 9
_ – _ = _

Anhang 4: Kopiervorlagen für Kärtchen, die beim zweiten und dritten Interview unterstützend zur Frage, wie gern das Kind Rechnen in der Schule habe, vorgelegt wurden

Anhang 5: Beispiel für ein Aufgabenkärtchen, mit dem in den Interviews Rechenaufgaben präsentiert wurden (im Original DIN-A7)

2 + 2

Anhang 6: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres

Sehr geehrte Kollegin!

Ich habe mit Ihrer Unterstützung in drei Interviewsitzungen versucht, die Entwicklung kindlicher Rechenstrategien näher zu ergründen. Zur Abrundung dieses Forschungsprojekts bitte ich Sie nun abschließend um einige Angaben zu Ihrem Unterricht.

Diese Angaben werden vollkommen anonym und vertraulich behandelt (selbstverständlich auch gegenüber Vorgesetzten, Schulbehörden etc.).

Es geht mir keinesfalls um eine Bewertung oder gar „Benotung“ Ihres Unterrichts. Ich benötige Ihre Angaben aber als Hintergrundwissen zum besseren Verständnis der im Rahmen der Studie untersuchten kindlichen Entwicklung!

Im Interesse der Gewinnung von gesicherten Erkenntnissen zu kindlichen Lernprozessen bitte ich Sie, die Fragen sorgfältig, nach bestem Wissen und Gewissen zu beantworten und danke im Voraus für die Zeit, die Sie sich dafür nehmen!

1. Angaben zu Ihrer Person

1.1 Abschluss der Ausbildung zur Volksschullehrerin im Jahr ___________

1.2 Anzahl der Dienstjahre: ________

1.3 Allfällige zusätzliche Ausbildung(en), Fortbildung(en) (bitte ankreuzen/ergänzen):

- ❑ Lehramt für Sonderschulen
- ❑ Lehramt für Hauptschulen, Fächer: ______________________________________
- ❑ Begonnenes Studium, nämlich ________________________, seit ______________
- ❑ Abgeschlossenes Studium, nämlich ______________________________________
- ❑ Sonstige Ausbildungen, nämlich ____

  ____

- ❑ Fortbildungsveranstaltungen über Mathematik, insgesamt ca. __________ Einheiten

  *Sofern Sie sich erinnern können, bitte ich Sie um Angabe von **Jahr** (ungefähr), **Titel** bzw. **Inhalten**, eventuell auch **ReferentInnen** der besuchten Fortbildungen!*

  ____

  ____

  ____

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 2*

2. Zum Schulbuch

Sie und Ihre SchülerInnen haben im abgelaufenen Schuljahr im Mathematik-Unterricht das Schulbuch

xxx (xxx-Verlag)

verwendet. Kreuzen Sie mit Bezug auf Ihre Verwendung dieses Schulbuches bitte das Zutreffende an bzw. ergänzen Sie Fehlendes:

2.1 Zur Reihenfolge der Themen

- ❑ Ich habe **durchgehend die im Buch vorgegebene Reihenfolge** eingehalten.

- ❑ Ich bin von der im Buch vorgegebenen Reihenfolge **in folgender Weise abgewichen**:

  ____

  ____

2.2 Zahlenräume generell

Bezüglich der im Laufe des Jahres behandelten Zahlenräume

- ❑ befand bzw. befinde ich mich **in völliger Übereinstimmung mit dem Schulbuch**, also frühes Arbeiten im ZR bis vier, Behandlung der Null, dann Erweiterung in Einerschritten bis zehn, dann Zahlen bis 20, dann Zahlen bis 30, zuletzt Zehnerzahlen bis 100.

- ❑ habe ich im Unterricht **andere Wege beschritten als das Schulbuch**, nämlich ________

  ____

2.3 Zahlenraum bis zehn

Bis zu welcher Schulwoche haben Sie mit Ihren SchülerInnen im Einstiegszahlenraum der „Zahlenreise“ (Zahlenraum 4) gearbeitet?

____

In welcher Schulwoche haben Sie mit Ihren SchülerInnen erstmals im *gesamten* Zahlenraum bis zehn gearbeitet?

____

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 3*

2.4 Zur Verwendung des Erarbeitungsteiles:

Vom Erarbeitungsteil haben die Kinder (grob geschätzt) folgende Anteile in der Klasse bzw. zu Hause bearbeitet: In der Klasse: ca. _______ % Zu Hause: ca. _______ %

2.5 Zur Verwendung der Übungsteile (A und B):

Von den Übungsteilen haben die Kinder (grob geschätzt) folgende Anteile in der Klasse bzw. zu Hause bearbeitet: In der Klasse: ca. _______ % Zu Hause: ca. _______ %

2.6 Zur Verwendung des „Lehrerbegleitheftes“

Das zum Schulbuch angebotene „Lehrerbegleitheft“
- ❑ stand mir nicht zur Verfügung.
- ❑ stand mir zur Verfügung.

Sofern Ihnen das Lehrerbegleitheft zur Verfügung stand, bitte im Folgenden das Passende ankreuzen bzw. ergänzen!

2.6.1 Häufigkeit der Verwendung des Lehrerbegleitheftes

- ❑ Das Lehrerbegleitheft habe ich nicht gelesen.
- ❑ Das Lehrerbegleitheft habe ich nicht im Detail studiert.
- ❑ Das Lehrerbegleitheft habe ich einmal im Detail studiert, aber im Laufe des Schuljahres sonst nicht zur Hand genommen.
- ❑ Das Lehrerbegleitheft habe ich bei einzelnen Themen zur Hand genommen und dabei im Detail studiert. Das waren im Einzelnen folgende Themen:

  ____

- ❑ Das Lehrerbegleitheft habe ich begleitend zum Unterricht laufend zu Rate gezogen und dabei jeweils im Detail studiert.

2.6.2 Eigene Übereinstimmung bzw. Nicht-Übereinstimmung mit dem Lehrerbegleitheft
Wie weit decken sich die Anregungen des Lehrerbegleitheftes mit Ihrer eigenen methodisch-didaktischen Linie?

- ❑ Die Anregungen decken sich **völlig oder weitestgehend** mit meiner eigenen Linie.

- ❑ Die Anregungen decken sich im Großen und Ganzen mit meiner eigenen Linie, **aber mit Folgendem stimme ich NICHT überein:**

  ____

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 4*

❑ Die Anregungen decken sich **in einigen mir wichtigen Punkten NICHT** mit meiner Linie, nämlich den folgenden:

___

___

❑ Die Anregungen **decken sich (fast) nie mit meiner eigenen Linie**. Meine wichtigsten Abweichungen vom Lehrerbegleitheft sind die folgenden:

___

___

___

2.7 Meine persönliche Beurteilung des Schulbuches nach dem Schulnotensystem

	1	2	3	4	5
Gesamt-Note:	❑	❑	❑	❑	❑
Reihenfolge der einzelnen Themen:	❑	❑	❑	❑	❑
Gewichtung der einzelnen Themen:	❑	❑	❑	❑	❑
Didaktische Qualität der Erarbeitungsseiten	❑	❑	❑	❑	❑
Didaktische Qualität der Abbildungen/ Veranschaulichungen	❑	❑	❑	❑	❑
Qualität der Übungsaufgaben:	❑	❑	❑	❑	❑
Quantität der Übungsaufgaben:	❑	❑	❑	❑	❑
Angebote für innere Differenzierung:	❑	❑	❑	❑	❑

Raum für zusätzliche Anmerkungen zum Schulbuch:
(Sie können dafür gerne auch die Rückseite benützen!)

___

___

___

Anhang 6: *LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 5*

3. Aktivitäten in meinem Mathematikunterricht

Die Methodenfreiheit gibt der Lehrerin viele Möglichkeiten, ihren Mathematikunterricht zu gestalten. Im Folgenden sind Unterrichtsaktivitäten aufgeführt, die in der fachdidaktischen Literatur immer wieder genannt werden. Geben Sie bitte für jede dieser Aktivitäten an, wie häufig sie in Ihrem Mathematikunterricht im laufenden Schuljahr 2006/2007 war!
Sollte ich Aktivitäten vergessen haben, die aber gerade für Ihren Unterricht wichtig sind, dann bitte ich Sie, diese in den freien Feldern (unten) bzw. rückseitig zu ergänzen!
Gehen Sie bei den „Pro-Woche"-Angaben bitte von regulären Schulwochen aus (ohne Feiertage, ohne besondere schulische Ereignisse etc.).

Sollte hier zu wenig Platz sein, schreiben Sie bitte auf der Rückseite weiter!

Aktivität	In (fast) jeder Mathe-Stunde	Öfter als 1mal pro Woche	Etwa 1mal pro Woche	Seltener als 1mal pro Woche	Nie oder nur sehr selten
Jedes Kind arbeitet für sich in Einzelarbeit.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder arbeiten in Partner- oder Gruppenarbeit.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder erklären, wie sie das Material bei einer Aufgabe verwendet haben.	❑	❑	❑	❑	❑
Ich stelle eine Aufgabe mündlich oder an der Tafel, die Kinder bearbeiten die Aufgabe in ihrem Heft.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder arbeiten im Stationenbetrieb.	❑	❑	❑	❑	❑
Ein Kind erklärt mir und anderen Kindern, wie es eine Aufgabe gelöst hat.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder üben Kopfrechnen (ohne Aufschreiben der Zahlen).	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder diskutieren (mit mir, miteinander) über mathematische Themen.	❑	❑	❑	❑	❑
Verschiedene Kinder(gruppen) bearbeiten unterschiedliche Aufgaben.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder verwenden Abbildungen als Lösungshilfe.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder sollen einen Sachverhalt begründen.	❑	❑	❑	❑	❑
Ein oder mehrere Beispiele werden vorgerechnet, dann üben die Kinder ähnliche Beispiele.	❑	❑	❑	❑	❑
Ich erkläre etwas für die ganze Klasse.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder bearbeiten ein Arbeitsblatt/Arbeitsblätter.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder haben Anschauungsmaterial vor sich und arbeiten damit.	❑	❑	❑	❑	❑
Wir spielen „Rechenkönig".	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder spielen andere Rechenspiele.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder bearbeiten eine neue Problemstellung, ohne dass ich vorher irgendetwas erkläre.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder arbeiten im Schulbuch oder bearbeiten Aufgaben aus dem Schulbuch im Heft.	❑	❑	❑	❑	❑
Ich arbeite mit einzelnen Kindern, während die anderen Kinder für sich arbeiten.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder machen eine „Rechenprobe", „Lernzielkontrolle" oder ähnliches.	❑	❑	❑	❑	❑
Die Kinder erklären, wie sie eine Abbildung verstehen.	❑	❑	❑	❑	❑
	❑	❑	❑	❑	❑
	❑	❑	❑	❑	❑

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 6*

4. Erarbeitungs- bzw. Veranschaulichungsmaterial
Beziehen Sie unter „Material" bitte auch die Finger ein, sofern Sie diese im Mathematik-Unterricht selbst verwendet haben bzw. die Kinder aufgefordert haben, diese zu verwenden!

Zur Demonstration (für Erklärungen, zum Vorzeigen …) verwendete ich selbst im abgelaufenen Schuljahr folgende(s) Material(ien):

____

____

Die Kinder selbst konnten im Klassen-Unterricht folgende(s) Material(ien) verwenden:

____

____

Für Hausübungen konnten die Kinder folgende(s) Material(ien) verwenden:

____

____

Kreuzen Sie bitte noch jeweils das Zutreffende an bzw. ergänzen Sie:

❑ Bezüglich der Verwendung oben genannter Materialien habe ich meinen SchülerInnen **völlig freie Hand** gelassen (jede/r verwendete das Material wann, auf welche Weise, wie lange, wie oft er/sie wollte).

❑ Bezüglich der Verwendung oben genannter Materialien durch meine SchülerInnen habe ich **folgende Einschränkungen** gemacht bzw. auf Folgendes Wert gelegt:

____

____

Die **Verwendung der Finger** im ersten Schuljahr sehe ich grundsätzlich

❑ positiv, weil

____

❑ negativ, weil

____

Bei der Verwendung der Finger im ersten Schuljahr muss meiner Ansicht nach das Folgende beachtet werden:

____

____

Anhang 6: *LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 7*

TEIL 2: Behandlung einzelner Rechenstrategien im Unterricht

Sehr geehrte Kollegin!

Bereits die bisher ausgewerteten Interviews vom Beginn und Mitte des Schuljahres haben ergeben, dass die Kinder eine **erstaunliche Vielfalt an sehr unterschiedlichen Lösungsstrategien** zeigen. Ein und dieselbe Rechenaufgabe im Zahlenraum 10 oder 20 wurde von den einzelnen Kindern also auf ganz unterschiedlichen Wegen (mit und ohne Material) bewältigt.

Um diese Strategievielfalt wissenschaftlich erfassen zu können, bitte ich Sie um Ihre Mithilfe:

Ich bitte Sie noch um möglichst genaue Angaben dazu, ob und in welcher Weise Sie einzelne, bei den Kindern im Rahmen dieses Forschungsprojekts beobachtete Lösungsstrategien in Ihrem Unterricht behandelt haben. Um die Lösungswege der Kinder verstehen zu können, ist es ja wichtig zu wissen, ob und wie ausführlich diese Lösungswege im Unterricht erarbeitet und geübt wurden (oder aber ob die Kinder ihre Strategien von zuhause mitbringen oder …).

Meine Fragen beziehen sich ausschließlich auf das vergangene Schuljahr 2006/2007.

Ich bitte dabei auch um Angaben bezüglich einzelner Schulmonate; diese sind selbstverständlich nur als „ungefähr“-Angaben gemeint. Sollten beim Bearbeiten dieser Fragen irgendwelche Unklarheiten auftauchen, bitte ich Sie um einen kurzen Anruf (ich rufe dann natürlich zurück, um Ihnen Telefonkosten zu ersparen)!

Selbstverständlich werden auch diese Angaben streng anonym behandelt.

Ich danke Ihnen vielmals schon im Voraus für die Zeit, die Sie sich für diesen letzten, aufwändigen Teil des Fragebogens nehmen! Und erschrecken Sie bitte nicht über den Umfang: Die Fragen sind großzügig formatiert und benötigen deshalb viel Platz, im Wesentlichen geht es nur um das Ankreuzen von vorgegebenen Antwortmöglichkeiten!

Anhang 6: *LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 8*

Lösungsweg: Legen und Zählen mit Material bei Plus bzw. Minus, am Beispiel 3 + 4:

- **Kind zählt zuerst 3 Würfel: „eins, zwei, drei." (oder Perlen, auch Finger …).**
- **Kind zählt dann 4 Würfel. „eins, zwei, drei, vier."**
- **Kind schiebt dann die beiden Mengen zusammen. (Bei Minus: Nimmt eine Menge weg.)**
- **Kind ermittelt zuletzt die Gesamtanzahl durch Zählen, wieder von „eins" beginnend.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: Zählend dazu bzw. weg mit strukturiertem Material oder Fingern, Bsp. 3 + 4:

- **Kind zeigt drei Finger oder legt 3 Plättchen in ein Rechenschiffchen o.ä.**
- **Kind streckt nacheinander 4 Finger aus (legt 4 Plättchen dazu), zählt dabei „eins, zwei, drei, vier"**
- **Kind liest die Gesamtanzahl vom „Fingerbild" (vom strukturierten Rechenmaterial…) ab, ohne noch einmal zu zählen.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: Weiterzählen bzw. Zurückzählen mit Material, Beispiele 3 + 4/ 9 - 3:

1) Kind sagt/denkt: „drei" bzw. „neun"

2) Kind sagt/denkt: „vier, fünf, sechs, sieben" bzw. „acht, sieben, sechs" und kontrolliert die Zählschritte mit Zählmaterial (Finger, Perlenkette, Zahlenstrahl, Entenstreifen usw.)

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Anhang 6: *LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 9*

Lösungsweg: Weiterzählen bzw. Zurückzählen ohne Material, am Beispiel 3 + 4/9 - 3:
- **Kind sagt/denkt: „drei“ bzw. „neun“**
- **Kind sagt/denkt: „vier, fünf, sechs, sieben“ bzw. „acht, sieben, sechs“ und kontrolliert die Zählschritte „im Kopf“. Es kommt kein Zählmaterial zum Einsatz.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: Weiterzählen im Kopf, bewusst von der größeren Zahl ausgehend, Bsp. 3 + 6:
- **Kind sagt/denkt: „sechs“ („weil das die größere Zahl ist“)**
- **Kind sagt/denkt: „sieben, acht, neun“**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: Tauschaufgabe bei Plus, am Beispiel 1 + 7:
- **Kind weiß, dass 7 + 1 = 8**
- **Kind erkennt, dass 1 + 7 = 7 + 1 und nennt daher bei „1 + 7“ schnell „8“ als Ergebnis**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Anhang 6: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 10

Lösungsweg: „noch 1 dazu“ („Nachbaraufgabe“) bei Plus, am Beispiel 3 + 4:

- **Kind weiß 3 + 3 = 6 schon auswendig**
- **Kind sagt/denkt: „3 + 3 = 6, 3 + 4 ist noch 1 dazu, also 7“**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: „Nachbaraufgabe“ bei Minus, am Beispiel 8 - 5

- **Kind weiß, dass 8 – 4 = 4**
- **Kind sagt/denkt: „8 – 4 = 4, bei 8 – 5 muss ich noch 1 weg, bleibt 3“**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: „Umkehraufgabe“ bei Minus, Beispiel 9 - 8:

- **Kind sagt/denkt: „8 + 1 = 9, dann ist 9 – 8 = 1“**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Anhang 6: *LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 10*

<u>Lösungsweg: Fingerrechnen ohne Zählen, Beispiel 8 – 5:</u>
- **Kind zeigt 8 Finger als „eine volle Hand und noch drei Finger“**
- **Kind nimmt die volle Hand (5 Finger) in *einer* Bewegung (ohne Abzählen) weg und nennt „drei“ (ohne Abzählen) als Ergebnis.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

<u>Lösungsweg: Zehnerüberschreitung durch Alles-Zählen mit Material, Beispiel 7 + 5:</u>
- **Kind zählt 7 (Würfel, Perlen …) ab.**
- **Kind zählt 5 ab und gibt sie zu den bereits abgezählten 7.**
- **Kind zählt die Gesamtmenge ab, von 1 beginnend.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

<u>Lösungsweg: Zehnerüberschreitung, „einzeln dazu“, strukturiertes Material, Bsp. 7 + 5:</u>
- **Kind stellt die Zahl 7 mit strukturiertem Material dar, z.B. in einer Eierschachtel, einem Zehnerschiffchen/am Rechenrahmen (je 10 Perlen in einer Reihe) …**
- **Kind füllt den Zehner auf und zählt dabei „eins, zwei, drei“.**
- **Kind gibt mit „vier, fünf“ zwei weitere Plättchen/Perlen in den zweiten Zehner.**
- **Kind liest das Ergebnis ab, ohne neu zu zählen.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 11*

Lösungsweg: Zehnerüberschreitung, „in Paketen dazu“, strukturiertes Material, Bsp. 7 + 5:

- **WIE OBEN, UNTERSCHIED: Kind sagt schon *vor* dem Dazugeben (ohne abzuzählen), wie viele Plättchen/Perlen im ersten Schritt (bis 10) und wie viele im zweiten Schritt (zu 10) dazugegeben werden. Bei Verwendung eines Rechenrahmens oder einer Perlenkette: 3 und dann 2 werden jeweils „mit einem Strich“ (ohne einzeln abzuzählen) dazu geschoben.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: Zehnerüberschreitung durch Weiterzählen ohne Materialhilfe, Beispiel 7 + 5:

- **Kind sagt „sieben“.**
- **Kind zählt von „sieben“ um fünf Zahlwörter im Kopf (ohne Materialhilfe) weiter: „acht, neun, zehn, elf, zwölf.“**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Lösungsweg: Zehnerüberschreitung durch Weiterzählen mit Materialhilfe, Beispiel 7 + 5:

- **Kind sagt / denkt „sieben“.**
- **Kind zählt von „sieben“ um fünf Zahlwörter weiter: „acht, neun, zehn, elf, zwölf.“**
- **UNTERSCHIED ZU OBEN: Kind hat dabei Materialhilfe, z.B. Würfel, Finger, Perlen, eventuell auch Zahlenstrahl, Entenstreifen, Rechenkette, Zwanziger- oder Dreißigertafel …**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Anhang 6: *LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 12*

<u>Lösungsweg: Zehnerüberschreitung im Kopf durch Zerlegen der zweiten Zahl, Bsp. 7 + 5:</u>

- **Kind rechnet als ersten Schritt im Kopf (ohne Materialhilfe) 7 + 3 = 10.**
- **Kind zerlegt dabei die zweite Zahl 5 im Kopf in 3 + 2.**
- **Kind rechnet als zweiten Schritt im Kopf 10 + 2 = 12.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

<u>Lösungsweg: Zehnerüberschreitung durch Zerlegen beider Zahlen in 5er-Portionen, Bsp. 7 + 7:</u>

1) Kind zerlegt die beiden Siebener jeweils in 5 + 2.
2) Kind rechnet 5 + 5 = 10, 2 + 2 = 4.
3) Kind rechnet als letzten Schritt 10 + 4 = 12.

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

<u>Lösungsweg: Zehnerüberschreitung durch „Verdoppeln plus 1“, Beispiel 6 + 7:</u>

- **Kind weiß 6 + 6 bereits auswendig.**
- **Kind sagt/denkt: 6 + 6 = 12, dann ist 6 + 7 um 1 mehr, also 13.**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 13*

<u>Lösungsweg: Zehnerüberschreitung durch Nachbaraufgabe plus/minus 10, Beispiel 14 - 9:</u>
- **Kind rechnet 14 – 10 = 4.**
- **Kind sagt/denkt: 14 – 9 ist um eins mehr, also 5.**
- **(Analog bei 5 + 9: 5 + 10 = 15, 5 + 9 ist um 1 weniger, also 14.)**

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

WEITERE LÖSUNGSWEGE

Auf den vorangegangenen Seiten wurden nur die am häufigsten beobachteten Lösungswege aufgelistet. Möglicherweise kommen manche Lösungswege, die in Ihrem Unterricht besonders wichtig waren, gar nicht vor. Ich bitte Sie, solche Lösungswege t gegebenenfalls zu ergänzen und jeweils an einem Beispiel zu erläutern!

Folgende weitere Lösungswege habe ich in meinem Unterricht behandelt:

Lösungsweg /Beispiel:

____

____

____

Behandlung im Klassenunterricht:

Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet und über längere Zeit immer wieder gezielt geübt.	Dieser Lösungsweg wurde erarbeitet, gezieltes Üben war auf die Zeit bei / kurz nach der Erarbeitung beschränkt.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, habe ich sie dabei belassen.	Dieser Lösungsweg wurde nicht erarbeitet. Wenn Kinder so rechneten, versuchte ich, sie davon abzubringen.
❑	❑	❑	❑

Falls erarbeitet und gezielt geübt: In welchem Monat? (Gegebenenfalls mehrere Monate ankreuzen!)

Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	März	April	Mai	Juni
❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑	❑

Verwenden Sie bitte die Rückseite, falls Sie weitere Lösungswege ergänzen wollen!

***Anhang 6**: LehrerInnen-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 14*

ZUSATZBLATT: GEZIELTES AUSWENDIGLERNEN

Haben Sie im abgelaufenen Schuljahr 2006/2007 gezielt Maßnahmen ergriffen, um zu erreichen, dass die Kinder die Plus- und Minusaufgaben im Zahlenraum bis zehn **auswendig lernen**?

Ja	Nein
☐	☐

Wenn ja, ab welchem Monat?

____

	Ja	Nein
Wurden dafür Maßnahmen in der Klasse gesetzt?	☐	☐

Wenn ja, welche, und mit welchem zeitlichen Aufwand?

____

____

____

	Ja	Nein
Wurden dafür Anregungen/Aufträge an die Eltern gegeben?	☐	☐

Wenn ja, welche, und mit welchen zeitlichen Vorgaben?

____

____

____

HERZLICHEN DANK FÜR IHRE UNTERSTÜTZUNG!

Anhang 7: Eltern-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres

Elternfragebogen

Bitte schrecken Sie sich nicht über den Umfang von 3 Seiten:
Der Großteil ist nur zum Ankreuzen und deshalb recht schnell erledigt!

Name Ihres Kindes: ______________________________

Geburtsdatum Ihres Kindes: ______________________________

Name der Mutter: ______________________________

Name des Vaters: ______________________________

Kontaktmöglichkeit: ______________________________

(*Zur Erläuterung: Bislang lief unser Kontakt ausschließlich über die Schule. Ich habe direkte Information der Eltern angeboten für den Fall, dass die Endauswertung der Befragungen gezielte Förderung für ein Kind ratsam erscheinen lassen sollte. In diesem Fall benötige ich aber Ihre* ***Adresse, noch besser: eine Mailadresse und/oder Telefonnummer****. Sollten Sie keinen direkten Kontakt wünschen, dann lassen Sie diese Angaben bitte einfach weg!)*

1. Angaben zum Kind
1.1 Besuchte Ihr Kind einen Kindergarten?

❑ ja ❑ nein
Wenn ja: Von wann bis wann? ______________________________

1.2 Mit welcher Motivation geht Ihr Kind Ihrem Eindruck nach derzeit (Mai/Juni 2007) im Allgemeinen in die Schule?

❑	❑	❑	❑	❑
sehr gerne	gerne	ohne besondere Emotionen	eher ungern	sehr ungern

1.3 Wie hat sich diese Motivation zum Schulbesuch bei Ihrem Kind seit Schulbeginn Ihrem Eindruck nach entwickelt?

❑	❑	❑	❑	❑
stark verbessert	eher verbessert	nicht verändert	eher verschlechtert	stark verschlechtert

1.4 Hat Ihr Kind regelmäßig Mathematik-Hausübungen?

❑ ja ❑ nein
Wenn ja:

Wie lange braucht es durchschnittlich dafür? ca. ______ Minuten

Anhang 7: Eltern-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 2

Wie selbständig macht es die Hausübungen üblicherweise?

❑	❑	❑	❑
braucht (fast) nie Hilfe	braucht selten Hilfe	braucht oft Hilfe	braucht (fast) immer Hilfe

Mit welcher Einstellung macht Ihr Kind Ihrem Eindruck nach derzeit (Mai/Juni 2007) seine Mathematik-Hausübungen?

❑	❑	❑	❑	❑
sehr gerne	gerne	ohne besondere Emotionen	eher ungern	sehr ungern

Wie hat sich diese Einstellung Ihres Kindes zu den Mathematik-Hausübungen in den letzten Monaten (seit Hausübungen gegeben werden) entwickelt?

❑	❑	❑	❑	❑
stark verbessert	eher verbessert	nicht verändert	eher verschlechtert	stark verschlechtert

1.5 Haben Sie mit Ihrem Kind (über allfällige Hausaufgabenhilfe hinaus) Rechnen geübt?

❑	❑	❑	❑
ja, schon bevor es in die Schule kam	ja, etwa seit Schulbeginn (Herbst)	ja, etwa seit dem Monat __________	nein, nie

Wenn Sie mit Ihrem Kind Rechnen geübt haben:

Wie häufig haben Sie üblicher Weise (außerhalb der Ferienzeiten) geübt?

❑	❑	❑	❑	❑
6 – 7mal pro Woche	4 – 5mal pro Woche	2 – 3mal pro Woche	1mal pro Woche	nur ab und zu (seltener als 1mal/Woche)

Wie lange dauerte eine solche Übungseinheit durchschnittlich? __________ Minuten

Mit welcher Einstellung übt Ihr Kind Ihrem Eindruck nach derzeit (Mai/Juni 2007) zuhause das Rechnen?

❑	❑	❑	❑	❑
sehr gerne	gerne	ohne besondere Emotionen	eher ungern	sehr ungern

Wie hat sich diese Einstellung Ihres Kindes zu Rechenübungen in den letzten Monaten (seit Sie damit begonnen haben) entwickelt?

❑	❑	❑	❑	❑
stark verbessert	eher verbessert	nicht verändert	eher verschlechtert	stark verschlechtert

Anhang 7: Eltern-Fragebogen für die Befragung am Ende des Schuljahres / Seite 3

1.6 Hat Ihnen die Lehrerin Ihres Kindes geraten, mit Ihrem Kind (zusätzlich zu den Hausübungen) regelmäßig Rechnen zu üben? ❑ ja ❑ nein

Wenn ja: In welchem Schulmonat hat sie erstmals dazu geraten? ________________

Wenn ja: Hat sie Ihnen konkrete Anregungen dafür gegeben, was genau und auf welche Weise Sie üben sollten? ❑ ja ❑ nein

1.7 Wie viele Tage hat Ihr Kind in diesem Schuljahr den Unterricht versäumt? ca. ____ Tage

2. Angaben zu den Eltern

2.1 Mutter des Kindes

Erlernter Beruf: ____
Derzeit ausgeübter Beruf: ____
(Ich bitte aus methodischen Gründen um möglichst genaue Angaben, also z.B. nicht einfach „Angestellte“, sondern um eine möglichst genaue Berufsbeschreibung.)

Eigene Bildungslaufbahn (Bitte alle zutreffenden Stationen ankreuzen!):
❑ Abschluss der allgemeinen Sonderschule
❑ Abschluss der Volksschule
❑ Abschluss der Hauptschule
❑ Abschluss der Berufschule mit bestandener Prüfung
❑ Abschluss einer Berufsfachschule ohne Matura (z.B. Handelsschule)
❑ Matura (z.B. AHS, HAK, HTL …)
❑ Abschluss einer Pädagogischen Akademie
❑ Abgeschlossenes akademisches Studium

2.2 Vater des Kindes

Erlernter Beruf: ____
Derzeit ausgeübter Beruf: ____
(Ich bitte aus methodischen Gründen um möglichst genaue Angaben, also z.B. nicht einfach „Angestellter“, sondern um eine möglichst genaue Berufsbeschreibung.)

Eigene Bildungslaufbahn (Bitte alle zutreffenden Stationen ankreuzen!):
❑ Abschluss der allgemeinen Sonderschule
❑ Abschluss der Volksschule
❑ Abschluss der Hauptschule
❑ Abschluss der Berufschule mit bestandener Prüfung
❑ Abschluss einer Berufsfachschule ohne Matura (z.B. Handelsschule)
❑ Matura (z.B. AHS, HAK, HTL …)
❑ Abschluss einer Pädagogischen Akademie
❑ Abgeschlossenes akademisches Studium

HERZLICHEN DANK FÜR DAS AUSFÜLLEN DIESES FRAGEBOGENS!

Anhang 8: Schulbuchanalyse

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Erarbeitungsteil (ET) und Übungsteil (ÜT) des Schulbuchs "Zahlenreise 1" (BRUNNER u.a. 2004)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
ET S. 18	1							1
21	2					2		
23	2					2		
24	1	1						
25	4					4		
26	1					1		
28	3					3		
29	3					3		
31	2		1			1		
32	3					3		
34	7		2			5		
35	4					4		
36	2					2		
37	3					3		
38	1					1		
39	2					1		1
43	7					7		
ÜT S. 18	2					1	1	
20	5					3		2
24	2					1	1	
25	4					3		1
27	3					3		
28	4					4		
29	1	1						
30	3					3		
31	6					6		
34	1					1		
35	1					1		
36	1					1		
37	1				1			
38	3					3		
39	4					4		
40	3					3		
42	3					3		
43	1					1		
44	4					4		
45	3					3		
46	1						1	
48	3					3		
49	4					4		
50	7					7		
51	3					3		
53	2					2		

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Erarbeitungsteil (ET) und Übungsteil (ÜT) des Schulbuchs "Zahlenreise 1" (BRUNNER u.a. 2004), Fortsetzung

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
ÜT S. 54	4					4		
55	6					6		
56	7					6	1	
57	4		1			3		
60	4					4		
62	6					6		
63	2	1	1					
64	1					1		
65	2						2	
68	4					4		
69	6					6		
70	3					3		
71	4					4		
72	9					9		
73	4					3	1	
74	5	4	1					
75	3						3	
76	4					3	1	
Summe	201	7	6	0	1	171	11	5
Prozent	100 %	3,5 %	3,0 %		0,5 %	85,1 %	5,5 %	2,5 %

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Erarbeitungsteil (Teil A / Teil B) und im Arbeitsheft (AH) des Schulbuchs "Zahlen-Zug 1" (BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2005)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
Teil A S. 19	2		2					
21	7		4			3		
25	7					7		
26	4					3	1	
31	6		4			2		
32	8		1			5		2
33	7		2			5		
39	9		3			3		3
40	3					3		
41	13		4			4	2	3
56	4		1			3		
60	10		10					
61	4					4		
62	6		6					
63	4		2			2		
64	5		4				1	
65	8						8	
69	4	4						
70	3	2	1					
71	7	5	2					
72	5					1	2	2
73	6					6		
74	4	1	2			1		
75	6		3			1	1	1
76	12		1			9		2
77	5					5		
78	12						12	
79	16		8			7		1
80	6		1					5
81	11					11		
82	8					6		2
83	15		3			12		
84	1		1					
85	1		1					
86	3		3					
87	12				5	7		
88	7					3		4
AB B S. 34	4	1	1			1		1
35	3	1	2					

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Erarbeitungsteil (Teil A / Teil B) und im Arbeitsheft (AH) des Schulbuchs "Zahlen-Zug 1" (BUBLATH, FÜRNSTAHL, HÖNISCH u.a. 2005) (Fortsetzung)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
AH S. 6	1					1		
7	3					3		
9	11				11			
10	8		5			2		1
12	2				2			
13	9				9			
17	4		3			1		
25	4		3			1		
26	4					4		
27	17		6		5	4		2
28	8		8					
29	2	1	1					
33	4		2			2		
Summe	335	15	100	0	32	132	27	29
Prozent	100 %	4,5 %	29,9 %		9,6 %	39,4 %	8,1 %	8,7 %

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn in Teil 1 und Teil 2 des Schulbuchs "Mein erstes Mathematikbuch" (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
Teil 1 S. 23	8				1	7		
25	1					1		
26	8					5		3
28	7		1			6		
29	5					4		1
30	6		1			5		
31	9					7		2
32	5					5		
33	5		5					
34	5		3			2		
38	3					3		
40	2					1		1
41	3					3		
42	3					1		2
43	5					5		
44	7		1			5		1
45	1					1		
46	5				1	4		
47	1							1
50	9		4			1		4
51	7					6		1
56	3					3		
57	2					2		
58	9		2			6		1
59	5		5					
60	8					8		
61	5					4		1
66	2					2		
67	4					3		1
68	4					4		
69	8					8		
70	4					4		
71	3					3		
72	10				2	7		1
73	2					2		
74	1						1	
75	4					4		
77	1					1		
78	4					4		
79	9		2			7		

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn in Teil 1 und Teil 2 des Schulbuchs "Mein erstes Mathematikbuch" (EDER, JAROLIM & SCHÖN 2001) (Fortsetzung)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
80	8		2			6		
81	10		8			2		
82	3					3		
83	3			1		2		
84	1					1		
85	5	1				4		
86	4					4		
87	2		1					1
88	3					3		
89	3		1			2		
90	4		1			1		2
91	12	1	6			5		
92	4			2		1	1	
93	4					4		
Teil 2 S. 4	4		2			2		
5	6		2			4		
6	2					2		
7	11		5	1	1	3		1
10	3			1		2		
11	9					7		2
13	11			2		9		
14	2				1		1	
Summe	307	2	52	7	6	211	3	26
Prozent	100 %	0,7 %	16,9 %	2,3 %	2,0 %	68,7 %	1,0 %	8,5 %

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Übungsbuch A zum Schulbuch "Matheblitz 1" (AG MATHEMATIK 2003c)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
6	4		3			1		
7	2					2		
8	3		3					
9	4		3			1		
10	2		2					
11	4		4					
12	4		4					
13	2		2					
14	3		3					
15	4		4					
16	1		1					
17	3		3					
18	4		4					
19	3		3					
20	4		4					
21	2		2					
22	3		3					
23	4		4					
24	4		2			2		
25	3		2			1		
26	4		3					1
27	3		3					
28	4		2			2		
Summe	74	0	64	0	0	9	0	1
Prozent	100 %		86,5%			12,2%		1,4%

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Übungsbuch B zum Schulbuch "Matheblitz 1" (AG MATHEMATIK 2003c)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
3	3					3		
4	3					3		
5	7		1			6		
6	6		1			5		
7	5				2	3		
8	8		2			4		2
9	7		1			4		2
10	4				4			
11	10		2			8		
12	8		3			4		1
13	2				1	1		
14	10		3			7		
15	8		5			2		1
17	12		2			5		5
18	9					9		
19	12					8		4
20	8		1			7		
21	3		1			2		
16	4				3			
22	7		1			6		1
23	15					11		4
24	4		2			2		
25	8					8		
26	6		2		1	1		2
27	8				1	7		
Summe	177	0	27	0	12	116	0	22
Prozent	100 %		15,3 %		6,8 %	65,5 %		12,4 %

Anhang 8: Schulbuchanalyse (Fortsetzung)

Auflistung aller Übungspäckchen im Zahlenraum bis zehn im Arbeitsheft (AH) und Arbeitsbuch (AB) des Schulbuchs "Funkelsteine 1 Mathematik" (FRIEDL 2004)

Seite	Anzahl Päckchen gesamt	schön im eigentlichen Sinne	schematisch "schön"	offen mit Struktur	offen ohne Struktur	"graue Päckchen"	"bunte Hunde"	nicht eindeutig
AH 13	4					4		
14	2					2		
15	3					3		
16	6					6		
18	3						3	
20	1					1		
21	4					4		
22	8						8	
24	1					1		
25	5					5		
26	4					4		
27	2					2		
28	1		1					
29	5	1				4		
30	7	7						
31	6						6	
32	4					4		
33	1		1					
34	6		1			5		
35	7					7		
48	7					1	6	
49	5					5		
50	3					3		
AB 13	2					2		
14	4					3		1
16	6		3			3		
18	8		3			5		
21	5					5		
22	3					3		
23	12					12		
25	7					7		
26	4	3	1					
27	1					1		
29	3					3		
30	3	3						
32	3					3		
33	9		2			4		3
46	7					7		
Summe	172	14	12	0	0	119	23	4
Prozent	100 %	8,1 %	7,0 %			69,2 %	13,4 %	2,3 %

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

A) Multivariate Tests zur Kovarianzanalyse mit Messwiederholung zum Einfluss der Performanz im Vorwärtszählen und in der Quasi-Simultanerfassung zu Schulbeginn sowie von Geschlechtszugehörigkeit, Bildungsgrad der Eltern auf den Anteil Fakten nutzender Strategien beim Rechnen im Zahlenraum bis zehn zu Beginn, Mitte und am Ende des ersten Schuljahres (vgl. Kap. 9.1.5)

Effekt		Wert	F	Hypothese df	Fehler df	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat	Beobachtete Schärfe(a)
Zeit	Pillai-Spur	,486	62,479(b)	2,000	132,000	,000	,486	1,000
	Wilks-Lambda	,514	62,479(b)	2,000	132,000	,000	,486	1,000
	Hotelling-Spur	,947	62,479(b)	2,000	132,000	,000	,486	1,000
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,947	62,479(b)	2,000	132,000	,000	,486	1,000
Zeit* T1QuasiSimultan	Pillai-Spur	,002	,130(b)	2,000	132,000	,878	,002	,016
	Wilks-Lambda	,998	,130(b)	2,000	132,000	,878	,002	,016
	Hotelling-Spur	,002	,130(b)	2,000	132,000	,878	,002	,016
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,002	,130(b)	2,000	132,000	,878	,002	,016
Zeit* T1Zahlwortreihe	Pillai-Spur	,077	5,532(b)	2,000	132,000	,005	,077	,654
	Wilks-Lambda	,923	5,532(b)	2,000	132,000	,005	,077	,654
	Hotelling-Spur	,084	5,532(b)	2,000	132,000	,005	,077	,654
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,084	5,532(b)	2,000	132,000	,005	,077	,654
Zeit* Geschlecht	Pillai-Spur	,005	,352(b)	2,000	132,000	,704	,005	,029
	Wilks-Lambda	,995	,352(b)	2,000	132,000	,704	,005	,029
	Hotelling-Spur	,005	,352(b)	2,000	132,000	,704	,005	,029
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,005	,352(b)	2,000	132,000	,704	,005	,029
Zeit* BildungsgradEltern	Pillai-Spur	,045	3,097(b)	2,000	132,000	,048	,045	,344
	Wilks-Lambda	,955	3,097(b)	2,000	132,000	,048	,045	,344
	Hotelling-Spur	,047	3,097(b)	2,000	132,000	,048	,045	,344
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,047	3,097(b)	2,000	132,000	,048	,045	,344
Zeit* Geschlecht* BildungsgradEltern	Pillai-Spur	,001	,072(b)	2,000	132,000	,931	,001	,013
	Wilks-Lambda	,999	,072(b)	2,000	132,000	,931	,001	,013
	Hotelling-Spur	,001	,072(b)	2,000	132,000	,931	,001	,013
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,001	,072(b)	2,000	132,000	,931	,001	,013

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,01 berechnet
(b) Exakte Statistik
(c) Design: Konstanter Term+T1QuasiSimultan+T1Zahlwortreihe+Geschlecht+BildungsgradEltern+Geschlecht * BildungsgradEltern
Innersubjekt-Design: Zeit

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

B) Tests der Innersubjekteffekte zur Kovarianzanalyse mit Messwiederholung zum Einfluss der Performanz im Vorwärtszählen und in der Quasi-Simultanerfassung zu Schulbeginn sowie von Geschlechtszugehörigkeit, Bildungsgrad der Eltern auf den Anteil Fakten nutzender Strategien beim Rechnen im Zahlenraum bis zehn zu Beginn, Mitte und am Ende des ersten Schuljahres (vgl. Kap. 9.1.5)

Quelle		Quadrat-summe vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signi-fikanz	Partielles Eta-Quadrat	Beobachtete Schärfe(a)
Zeit	Sphärizität angenommen	48371,728	2	24185,864	64,792	,000	,328	1,000
	Greenhouse-Geisser	48371,728	1,610	30044,612	64,792	,000	,328	1,000
	Huynh-Feldt	48371,728	1,688	28655,820	64,792	,000	,328	1,000
	Untergrenze	48371,728	1,000	48371,728	64,792	,000	,328	1,000
Zeit * T1QuasiSimultan	Sphärizität angenommen	139,772	2	69,886	,187	,829	,001	,019
	Greenhouse-Geisser	139,772	1,610	86,815	,187	,782	,001	,019
	Huynh-Feldt	139,772	1,688	82,802	,187	,792	,001	,019
	Untergrenze	139,772	1,000	139,772	,187	,666	,001	,017
Zeit * T1Zahlwortreihe	Sphärizität angenommen	2113,116	2	1056,558	2,830	,061	,021	,314
	Greenhouse-Geisser	2113,116	1,610	1312,497	2,830	,073	,021	,262
	Huynh-Feldt	2113,116	1,688	1251,828	2,830	,070	,021	,272
	Untergrenze	2113,116	1,000	2113,116	2,830	,095	,021	,180
Zeit * Geschlecht	Sphärizität angenommen	278,995	2	139,498	,374	,689	,003	,031
	Greenhouse-Geisser	278,995	1,610	173,289	,374	,643	,003	,029
	Huynh-Feldt	278,995	1,688	165,279	,374	,653	,003	,029
	Untergrenze	278,995	1,000	278,995	,374	,542	,003	,025
Zeit * BildungsgradEltern	Sphärizität angenommen	1457,701	2	728,851	1,953	,144	,014	,193
	Greenhouse-Geisser	1457,701	1,610	905,406	1,953	,153	,014	,163
	Huynh-Feldt	1457,701	1,688	863,554	1,953	,151	,014	,169
	Untergrenze	1457,701	1,000	1457,701	1,953	,165	,014	,116
Zeit * Geschlecht * Bildungs-gradEltern	Sphärizität angenommen	64,386	2	32,193	,086	,917	,001	,014
	Greenhouse-Geisser	64,386	1,610	39,991	,086	,879	,001	,014
	Huynh-Feldt	64,386	1,688	38,143	,086	,888	,001	,014
	Untergrenze	64,386	1,000	64,386	,086	,769	,001	,013
Fehler(Zeit)	Sphärizität angenommen	99293,283	266	373,283				
	Greenhouse-Geisser	99293,283	214,130	463,707				
	Huynh-Feldt	99293,283	224,507	442,272				
	Untergrenze	99293,283	133,000	746,566				

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,01 berechnet

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

C) Details zur explorativen Varianzanalyse mit Messwiederholung mit der dreistufigen Variablen "ZahlwortreiheKlassen" als Faktor neben Geschlecht und Bildungsgrad (vgl. Kap. 10.1).

T1ZahlwortreiheKlassen

		Häufigkeit	Prozent	Gültige Prozente	Kumulierte Prozente
Gültig	bis 28	46	33,1	33,1	33,1
	bis 99	45	32,4	32,4	65,5
	über 99	48	34,5	34,5	100,0
	Gesamt	139	100,0	100,0	

Multivariate Tests

Effekt		Wert	F	Hypothese df	Fehler df	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Zeit	Pillai-Spur	,508	64,502(b)	2,000	125,000	,000	,508
	Wilks-Lambda	,492	64,502(b)	2,000	125,000	,000	,508
	Hotelling-Spur	1,032	64,502(b)	2,000	125,000	,000	,508
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	1,032	64,502(b)	2,000	125,000	,000	,508
Zeit* T1Quasi-Simultan	Pillai-Spur	,007	,458(b)	2,000	125,000	,634	,007
	Wilks-Lambda	,993	,458(b)	2,000	125,000	,634	,007
	Hotelling-Spur	,007	,458(b)	2,000	125,000	,634	,007
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,007	,458(b)	2,000	125,000	,634	,007
Zeit*T1Zahl wortreihe-Klassen	Pillai-Spur	,132	4,454	4,000	252,000	,002	,066
	Wilks-Lambda	,872	4,437(b)	4,000	250,000	,002	,066
	Hotelling-Spur	,143	4,420	4,000	248,000	,002	,067
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,097	6,082(c)	2,000	126,000	,003	,088
Zeit * Geschlecht	Pillai-Spur	,008	,516(b)	2,000	125,000	,598	,008
	Wilks-Lambda	,992	,516(b)	2,000	125,000	,598	,008
	Hotelling-Spur	,008	,516(b)	2,000	125,000	,598	,008
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,008	,516(b)	2,000	125,000	,598	,008
Zeit* BildungsgradEltern	Pillai-Spur	,024	1,549(b)	2,000	125,000	,216	,024
	Wilks-Lambda	,976	1,549(b)	2,000	125,000	,216	,024
	Hotelling-Spur	,025	1,549(b)	2,000	125,000	,216	,024
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,025	1,549(b)	2,000	125,000	,216	,024
Zeit* T1Zahlwort-reiheKlassen * Geschlecht	Pillai-Spur	,069	2,261	4,000	252,000	,063	,035
	Wilks-Lambda	,931	2,281(b)	4,000	250,000	,061	,035
	Hotelling-Spur	,074	2,301	4,000	248,000	,059	,036
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,073	4,583(c)	2,000	126,000	,012	,068
Zeit* T1Zahlwort-reiheKlassen *Bildungs-gradEltern	Pillai-Spur	,013	,427	4,000	252,000	,789	,007
	Wilks-Lambda	,987	,425(b)	4,000	250,000	,791	,007
	Hotelling-Spur	,014	,423	4,000	248,000	,792	,007
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,014	,860(c)	2,000	126,000	,426	,013
Zeit* Geschlecht* Bildungs-gradEltern	Pillai-Spur	,005	,291(b)	2,000	125,000	,748	,005
	Wilks-Lambda	,995	,291(b)	2,000	125,000	,748	,005
	Hotelling-Spur	,005	,291(b)	2,000	125,000	,748	,005
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,005	,291(b)	2,000	125,000	,748	,005
Zeit* T1Zahlwort-reiheKlassen *Geschlecht *Bildungs-gradEltern	Pillai-Spur	,010	,320	4,000	252,000	,864	,005
	Wilks-Lambda	,990	,319(b)	4,000	250,000	,865	,005
	Hotelling-Spur	,010	,317	4,000	248,000	,866	,005
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,010	,644(c)	2,000	126,000	,527	,010

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,01 berechnet (b) Exakte Statistik

(c) Die Statistik ist eine Obergrenze auf F, die eine Untergrenze auf dem Signifikanzniveau ergibt.

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

D) Details zur explorativen Varianzanalyse mit Messwiederholung mit der dreistufigen Variablen "ZahlwortreiheKlassen" als Faktor neben Geschlecht und Bildungsgrad (vgl. Kap. 10.1).

Geschätzte Randmittel: T1ZahlwortreiheKlassen * Zeit

T1ZahlwortreiheKlassen	Zeit	Mittelwert	Standard-fehler	99% Konfidenzintervall	
				Untergrenze	Obergrenze
bis 28	1	10,362	3,423	1,409	19,316
	2	33,955	5,033	20,791	47,119
	3	54,891	5,229	41,216	68,567
bis 99	1	8,534	2,676	1,534	15,533
	2	50,097	3,935	39,806	60,389
	3	70,219	4,088	59,528	80,910
über 99	1	20,080	3,342	11,339	28,822
	2	56,235	4,914	43,383	69,087
	3	60,724	5,105	47,373	74,075

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

E) Details zur explorativen Multivariaten Varianzanalyse mit dem Faktor "Geschlecht" und den abhängigen Variablen "Zahlwortreihe (N) t1" und "Quasi-Simultan (N) t1" (vgl. Kap. 10.2).

Deskriptive Statistiken

	Geschlechtszugehörigkeit	Mittelwert	Standardabweichung	N
Zahlwortreihe (N) t1	männlich	64,40	38,982	70
	weiblich	46,25	34,277	69
	Gesamt	55,39	37,706	139
quasi-simultan (N) t1	männlich	1,51	1,530	70
	weiblich	,93	1,240	69
	Gesamt	1,22	1,420	139

Multivariate Tests

Effekt		Wert	F	Hypothese df	Fehler df	Signifi-kanz	Partielles Eta-Quadrat
Konstanter Term	Pillai-Spur	,701	159,123(b)	2,000	136,000	,000	,701
	Wilks-Lambda	,299	159,123(b)	2,000	136,000	,000	,701
	Hotelling-Spur	2,340	159,123(b)	2,000	136,000	,000	,701
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	2,340	159,123(b)	2,000	136,000	,000	,701
Geschlecht	Pillai-Spur	,061	4,456(b)	2,000	136,000	,013	,061
	Wilks-Lambda	,939	4,456(b)	2,000	136,000	,013	,061
	Hotelling-Spur	,066	4,456(b)	2,000	136,000	,013	,061
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,066	4,456(b)	2,000	136,000	,013	,061

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,05 berechnet

(b) Exakte Statistik

Tests der Zwischensubjekteffekte

Quelle	Abhängige Variable	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifi-kanz	Partielles Eta-Quadrat
Korrigiertes Modell	Zahlwortreihe (N) t1	11451,410(b)	1	11451,410	8,492	,004	,058
	quasi-simultan (N) t1	11,963(c)	1	11,963	6,159	,014	,043
Konstanter Term	Zahlwortreihe (N) t1	425409,050	1	425409,050	315,466	,000	,697
	quasi-simultan (N) t1	207,186	1	207,186	106,659	,000	,438
Geschlecht	Zahlwortreihe (N) t1	11451,410	1	11451,410	8,492	,004	,058
	quasi-simultan (N) t1	11,963	1	11,963	6,159	,014	,043
Fehler	Zahlwortreihe (N) t1	184745,612	137	1348,508			
	quasi-simultan (N) t1	266,123	137	1,943			
Gesamt	Zahlwortreihe (N) t1	622633,000	139				
	quasi-simultan (N) t1	486,000	139				
Korrigierte Gesamt-variation	Zahlwortreihe (N) t1	196197,022	138				
	quasi-simultan (N) t1	278,086	138				

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,05 berechnet
(b) R-Quadrat = ,058 (korrigiertes R-Quadrat = ,051)
(c) R-Quadrat = ,043 (korrigiertes R-Quadrat = ,036)

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

F) Details zur explorativen univariate Varianzanalyse mit der durchschnittlichen wöchentlichen Übungszeit als abhängiger Variablen und dem Geschlecht und dem Bildungsgrad der Eltern als Faktoren (vgl. Kap. 10.2).

Tests der Zwischensubjekteffekte

Abhängige Variable: Durchschnittle Übungsdauer pro Woche in Minuten lt. Eltern

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Korrigiertes Modell	5058,949(a)	3	1686,316	2,182	,093	,049
Konstanter Term	51501,483	1	51501,483	66,628	,000	,344
Geschlecht	4023,649	1	4023,649	5,205	,024	,039
BildungsgradEltern	745,908	1	745,908	,965	,328	,008
Geschlecht* Bildungs-gradEltern	7,812	1	7,812	,010	,920	,000
Fehler	98167,479	127	772,972			
Gesamt	158546,000	131				
Korrigierte Gesamtvari-ation	103226,427	130				

(a) R-Quadrat = ,049 (korrigiertes R-Quadrat = ,027)

Geschätzte Randmittel

Schätzungen

Abhängige Variable: Durchschnittle Übungsdauer pro Woche in Minuten lt. Eltern

Geschlechtszugehörigkeit	Mittelwert	Standard-fehler	99% Konfidenzintervall	
			Untergrenze	Obergrenze
männlich	14,539	3,448	5,523	23,555
weiblich	25,820	3,544	16,552	35,088

Paarweise Vergleiche

Abhängige Variable: Durchschnittle Übungsdauer pro Woche in Minuten lt. Eltern

(I) Geschlecht	(J) Geschlecht	Mittlere Differenz (I-J)	Standard-fehler	Signifikanz	99% Konfidenzintervall für die Differenz	
		Untergrenze	Obergrenze	Untergrenze	Obergrenze	Untergrenze
männlich	weiblich	-11,281	4,944	,024	-24,211	1,649
weiblich	männlich	11,281	4,944	,024	-1,649	24,211

Basiert auf den geschätzten Randmitteln

Anhang 9: Details zur Prüfstatistik

G) Details zur explorativen Multivariaten Varianzanalyse mit dem Faktor "BildungsgradEltern" und den abhängigen Variablen "Zahlwortreihe (N) t1" und "Quasi-Simultan (N) t1" (vgl. Kap. 10.2).

Deskriptive Statistiken

	BildungsgradEltern	Mittelwert	Standard-abweichung	N
quasi-simultan (N) t1	Beide Eltern ohne Matura	1,08	1,299	83
	Mindestens ein Elternteil hat Matura	1,43	1,571	56
	Gesamt	1,22	1,420	139
Zahlwortreihe (N) t1	Beide Eltern ohne Matura	47,45	36,314	83
	Mindestens ein Elternteil hat Matura	67,16	36,943	56
	Gesamt	55,39	37,706	139

Multivariate Tests

Effekt		Wert	F	Hypothese df	Fehler df	Signifi-kanz	Partielles Eta-Quadrat
Konstanter Term	Pillai-Spur	,711	167,612(b)	2,000	136,000	,000	,711
	Wilks-Lambda	,289	167,612(b)	2,000	136,000	,000	,711
	Hotelling-Spur	2,465	167,612(b)	2,000	136,000	,000	,711
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	2,465	167,612(b)	2,000	136,000	,000	,711
Bildungsgrad Eltern	Pillai-Spur	,073	5,340(b)	2,000	136,000	,006	,073
	Wilks-Lambda	,927	5,340(b)	2,000	136,000	,006	,073
	Hotelling-Spur	,079	5,340(b)	2,000	136,000	,006	,073
	Größte charakteristische Wurzel nach Roy	,079	5,340(b)	2,000	136,000	,006	,073

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,05 berechnet
(b) Exakte Statistik
(c) Design: Konstanter Term+BG2Stufig

Tests der Zwischensubjekteffekte

Quelle	Abhängige Variable	Quadratsumme vom Typ III	Df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Korrigiertes Modell	quasi-simultan (N) t1	3,962(b)	1	3,962	1,980	,162	,014
	Zahlwortreihe (N) t1	12996,962(c)	1	12996,962	9,719	,002	,066
Konstanter Term	quasi-simultan (N) t1	211,157	1	211,157	105,531	,000	,435
	Zahlwortreihe (N) t1	439207,552	1	439207,552	328,447	,000	,706
Bildungs-grad Eltern	quasi-simultan (N) t1	3,962	1	3,962	1,980	,162	,014
	Zahlwortreihe (N) t1	12996,962	1	12996,962	9,719	,002	,066
Fehler	quasi-simultan (N) t1	274,124	137	2,001			
	Zahlwortreihe (N) t1	183200,060	137	1337,227			
Gesamt	quasi-simultan (N) t1	486,000	139				
	Zahlwortreihe (N) t1	622633,000	139				
Korrigierte Gesamt-variation	quasi-simultan (N) t1	278,086	138				
	Zahlwortreihe (N) t1	196197,022	138				

(a) Unter Verwendung von Alpha = ,05 berechnet
(b) R-Quadrat = ,014 (korrigiertes R-Quadrat = ,007)
(c) R-Quadrat = ,066 (korrigiertes R-Quadrat = ,059)

Kurzzusammenfassung

In einer Längsschnittstudie mit 139 niederösterreichischen Kindern aus 20 verschiedenen Volksschulen (zweistufige Zufallsauswahl) wurde untersucht, auf Grundlage welcher zahlbezogenen Kenntnisse und Fertigkeiten und mit welchen Rechenstrategien Kinder zu Beginn ihres ersten Schuljahres (t1) Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis zehn lösen oder zu lösen versuchen und auf welche Weise sie diese Strategien (dann auch im Zahlenraum bis 20) zunächst bis zur Mitte (t2) und schließlich bis zum Ende des ersten Schuljahres (t3) weiterentwickeln. Die in qualitativen Interviews erfassten Strategien wurden ins Verhältnis gesetzt einerseits zur Didaktik und Methodik des arithmetischen Erstunterrichts, den diese Kinder im Laufe dieses Schuljahres erfahren haben, andererseits zum zahlbezogenen Wissen zu Schulbeginn, zur Geschlechtszugehörigkeit der Kinder und zum Bildungsgrad ihrer Eltern.

Die qualitative Inhaltsanalyse der im Unterricht der Kinder verwendeten Mathematik-Schulbücher wie auch die Angaben der Lehrkräfte dieser Kinder zur didaktisch-methodischen Gestaltung ihres Mathematikunterrichts lieferten starke Hinweise dafür, dass im Unterricht (und dies weitgehend einheitlich in allen erfassten Klassen) gegen zentrale Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik zur Gestaltung des arithmetischen Erstunterrichts verstoßen wurde. Insbesondere erfolgte die Behandlung von zählenden Rechenstrategien *nicht* nur im Sinne eines "Aufgreifens von Vorkenntnissen". Zählendes Rechnen scheint vielmehr mehrheitlich zumindest bis zum Ende des ersten Schulhalbjahres *gezielt geübt* worden zu sein. *Ableitungsstrategien* wurden demgegenüber gar nicht oder allenfalls in fachdidaktisch unzureichender Weise und Gewichtung behandelt. Daneben wurde aber offenbar auch dem *Auswendiglernen* von additiven Grundaufgaben mehrheitlich wenig bis keine Beachtung gewidmet. Für die Bewältigung von Aufgaben mit Zehnerübergang wurde gemäß den Angaben der Lehrkräfte als einzige nicht-zählende Strategie das "Teilschrittverfahren" erarbeitet, auch dies im deutlichen Widerspruch zu Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik.

Auf Grundlage dieses Unterrichts waren am Ende des ersten Schuljahres etwa 27 Prozent der Kinder auch noch im Zahlenraum bis zehn vorwiegend zählende Rechner, d.h.: Sie lösten mehr als zwei Drittel der nicht-trivialen Additionen und Subtraktionen in diesem Zahlenraum durch eine Zählstrategie. Nur etwa 35 Prozent der Kinder lösten mehr als zwei Drittel dieser Aufgaben durch Faktennutzung (Faktenabruf oder Ableitung). Aufgaben mit Zehnerübergang wurden (mit Ausnahme der von etwa 50 Prozent der Kinder auswendig gewussten Verdoppelung 6+6) von mehr als zwei Drittel der Kinder entweder gar nicht oder durch eine Zählstrategie bewältigt.

Der qualitativ-explorative Teil der Arbeit ist der Detailanalyse kindlicher Strategieentwicklungen gewidmet, dabei vor allem den in bisher vorliegenden Entwicklungsstudien wenig

untersuchten Ableitungsstrategien und deren konzeptuellen Grundlagen. Die Analyse mündet in der empirisch begründeten Bildung von sechs Typen von Strategie-Präferenzen am Ende des ersten Schuljahres. Zur Erklärung der für diese Typen jeweils charakteristischen Merkmalskonstellationen wird auf Grundlage der qualitativen Ergebnisse dieser Studie eine Theorie der Rechenstrategieentwicklung im Laufe des ersten Schuljahres formuliert.

Im quantitativen Teil der Arbeit konnten unter anderem die folgenden Effekte als statistisch signifikant abgesichert werden:

- Kinder lösen im gesamten Verlauf des ersten Schuljahres umso mehr additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien, je mehr strukturierte Zahldarstellungen sie zu Beginn des ersten Schuljahres quasi-simultan erfassen.
- Buben lösen einen höheren Anteil an additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis zehn durch Fakten nutzende Strategien als Mädchen.
- Kinder, die eine bestimmte additive Grundaufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch eine Ableitungsstrategie gelöst haben, lösen dieselbe Aufgabe am Ende des ersten Schuljahres signifikant öfter durch Faktenabruf als Kinder, die diese Aufgabe Mitte des ersten Schuljahres durch Weiterzählen oder durch Finger-Teilzählen bzw. Alleszählen gelöst haben.

Die Diskussion der Ergebnisse mündet in einem Plädoyer für eine Fortbildungsoffensive mit dem Ziel, die didaktisch-methodische Qualität des Mathematikunterrichts im ersten Schuljahr in Österreich zu verbessern. Denn die durch die Signifikanzprüfungen abgesicherte Hypothese, dass jene Kinder, die mit geringem Zahlwissen in die Schule eintreten, ein erhöhtes Risiko dafür tragen, noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend zu rechnen, muss gesehen werden vor dem Hintergrund des oben charakterisierten Unterrichts.

Als *Konsequenz für die Früherkennung* sogenannter "Rechenschwächen" lässt sich aus der vorliegenden Studie ableiten, dass Kinder, die ohne gezielte Förderung nicht bereits Mitte des ersten Schuljahres Ableitungsstrategien entdeckt haben, dies – ohne gezielte Förderung – mit einiger Wahrscheinlichkeit auch in der zweiten Hälfte des Schuljahres nicht tun werden. Als *Konsequenz für die Gestaltung des arithmetischen Anfangsunterrichts* liefert die Studie u.a. starke Hinweise dafür, dass sich eine gezielte Förderung im Nutzen von Ableitungsstrategien auch positiv auf die frühe Automatisierung der additiven Basisfakten auswirken dürfte. *Desiderate für künftige pädagogische Forschungsarbeiten* bleiben einerseits Längsschnittstudien im mikrogenetischen Design zur Klärung offener Detailfragen der Strategieentwicklung, andererseits videobasierte Studien, welche die didaktisch-methodische Qualität des Unterrichtsgeschehens mit höherer Verlässlichkeit und Genauigkeit zu erfassen versprechen, als es dieser Arbeit mit den ihr zur Verfügung stehenden Mitteln möglich war.

Abstract

A longitudinal section study encompassing 139 children from 20 elementary schools across Lower Austria (two-stage random sample) was conducted to establish the numerical knowledge and skills as well as the strategies underlying children's solving of addition and subtraction tasks with numbers up to 10 at school entry, and to examine in which ways children develop these strategies (subsequently involving numbers up to 20) until the middle and the end of the first school-year. The strategies, which were ascertained through qualitative interviews, were related to the didactics and methodology of primary arithmetic education provided to these children during the school-year, on the one hand, and their numerical knowledge at school entry, their gender and their parents' educational attainment, on the other.

A qualitative content analysis of both mathematics textbooks in use and the didactic-methodical conception of mathematics classes as described by those children's teachers strongly suggested that the way mathematics is being taught (which appeared to be largely homogeneous in all classes covered) indeed contravenes central recommendations of modern didactics regarding primary arithmetic education. Thus, strategies of calculating by counting, in particular, were *not* treated solely in the sense of "drawing upon previous knowledge". Instead, calculating by counting appears to have been *systematically exercised* in most cases (at least up to the end of the first half of the school year), whereas *strategies to derive unknown facts from known facts* were treated, if at all, inadequately in terms of both the didactic approach and how they were weighted. At the same time, however, little or no attention seems to have been paid to the *memorisation* of basic additive facts. According to teachers' information, the only non-counting strategy employed in solving exercises beyond 10 was "going through ten" which likewise clearly contradicts recent recommendations of subject didactics.

As a result of such instruction, by the end of the first school year about 27 per cent of children were still mainly resorting to calculation by counting even within the number range up to 10, solving more than two-thirds of non-trivial additions and subtractions within this number range through a counting strategy. The percentage of children who solved more than two thirds of tasks by way of fact utilisation (recall of facts or derived facts) was only about 35 per cent. Tasks involving the transition beyond 10 were solved through a counting strategy or could not be solved at all by more than two thirds of the children (except in the case of the doubling operation 6+6, which some 50 per cent were able to retrieve from memory).

The qualitative-exploratory part of this study is devoted to a detailed analysis of children's strategy developments with special emphasis being placed on derived-facts-strategies (and their conceptual basis) which have been given little attention in development studies conducted so far. This analysis yielded an empirically-based typology of six types of strategy

preferences employed by children at the end of the first school-year. For the explanation of each type's respective feature constellation a theory on the development of calculating strategies during the first school year was formulated on the basis of the qualitative results of this study.

The quantitative part of the study identified as statistically significant, among others, the following effects:

- During the first school-year, the number of basic additive tasks up to 10 that children are able to solve through fact-utilising strategies is the higher, the greater the number of structured number representations they have managed to grasp quasi-simultaneously (without counting) at the beginning of the first school year.
- Among boys the share of basic additive tasks through 10 solved by fact-utilising strategies is higher than among girls.
- Children who, by the middle of the first school year, have solved a particular basic additive task through a derived-facts-strategy, solve the same task significantly more frequently through fact retrieval at year-end than do children who, by the middle of the first school year, have solved this exercise through counting on, or by finger counting or counting all, respectively.

The analysis of results leads to a call for the implementation of large-scale further training programmes designed to improve the didactic and methodical quality of teaching mathematics in the first school year in Austria. After all, the hypothesis, backed up by significance tests, according to which children whose numerical knowledge at school entry is poor bear a higher risk of retaining calculation-by-counting strategies even by the end of the first school year has to be viewed against the background of teaching as characterised above and its non-compliance with central recommendations of contemporary didactics.

As regards the *early recognition* of so-called "dyscalculia" the study provides strong evidence that children who have not worked out derived-fact-strategies by the middle of the first school year will most probably not do so by the end of the year either unless they are provided specific support. As for the *conception of initial arithmetic education* the study, among other things, implies that systematic promotion in using derived-facts-strategies may be expected to positively influence also the early automatisation of basic additive facts. What remains as a *desideratum of future pedagogical research* is the clarification of detail issues of strategy development on the basis of microgenetic longitudinal studies, on the one hand, and the conduct of video-based studies that would provide for an analysis of the didactical and methodical quality of teaching in a more reliable and precise manner than this study could do with the means it had at its disposal.

Lebenslauf

19. 09. 1965	Geboren in Hainburg/Donau (Niederösterreich)
1971 – 1975	Volksschule Hainburg/Donau
1975 – 1976	AHS Bruck/Leitha (Niederösterreich)
1976 – 1979	HS / Schulversuch Integrierte Gesamtschule Güssing (Burgenland)
1979 – 1983	BORG Güssing (Matura am 13. Juni 1983)
1983 – 1985	Studium der Philosophie und Politikwissenschaft an der Uni Wien
1985-1991	Studium Philosophie, Pädagogik, Psychologie – Lehramt an höheren Schulen (Zweitfach: Klassische Philologie in Latein – LA)
29. 01. 1992	Sponsion zum Mag. phil. an der Universität Wien (Pädagogik, Philosophie, Psychologie LA / Latein LA)
1991 – 1995	Ausbildung zum "Rechenschwäche-Therapeuten" am Mathematischen Institut zur Behandlung der Rechenschwäche in München
1995	Gründung des Rechenschwäche Instituts Wien, seither Leitung desselben; Tätigkeitsbereiche: Förderdiagnostik, mathematikspezifische Förderung "rechenschwacher" Kinder und Jugendlicher, Beratung von Eltern und LehrerInnen; Aus- und Weiterbildung von MitarbeiterInnen des Institutes; Entwicklung von Fördermaterialien; Öffentlichkeitsarbeit; Publikationen; Vorträge.
seit 1997	Referent in der LehrerInnenfortbildung im Bereich "Fachdidaktik der Grundschulmathematik" mit Schwerpunkt im Bereich "Prävention von und Förderung bei Rechenschwächen", unter anderem am PI des Bundes in Wien (jetzt PH Wien), PI des Bundes in NÖ (jetzt PH NÖ/Baden), PI des Bundes in der Steiermark (jetzt PH Steiermark), für den Schulverbund Pustertal / Südtirol, an der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen/Bayern, an der PH Schaffhausen (CH)…
Studienjahr 2005/2005	Gastdozent für Fachdidaktik der Grundschulmathematik an der Pädagogischen Akademie des Bundes in Wien
Sept. 2005 bis Juni 2007	Konzeption und Leitung des Lehrgangs „LernberaterIn Mathematik" im Auftrag des PI des Bundes in Niederösterreich/ Baden
Okt. 2009 bis Juli 2010	Konzeption und Leitung des Lehrgangs "Fördern bei Lernschwierigkeiten in Mathematik für das Ministère de l'Éducation nationale et de la Formation professionnelle Luxembourg (gemeinsam mit Prof. Dr. Jens Holger Lorenz, Uni Heidelberg).