

NICHTLOKALE KORRELATION IN KAONISCHEN SYSTEMEN

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Magister der Naturwissenschaften
an der
UNIVERSITÄT WIEN

eingereicht von
Hatice TATAROGLU

betreut von
Ao. Univ. Prof. Dr. Reinhold A. Bertlmann

November 2009, Wien

Inhaltsverzeichnis

1	Quantenmechanik der Kaonen	8
1.1	Die Phänomenologie der Kaonen	8
1.1.1	Strangeness	9
1.1.2	Symmetrie	11
1.1.3	CPT Symmetrie	12
1.1.4	Klassifikation CP Verletzung	13
1.1.5	Die Wigner-Weisskopf-Näherung	13
1.2	Zerfall Formalismus	17
1.2.1	Einfluss der CP-Invarianz	17
1.2.2	Zerfallsprozesse in der Weisskopf-Wigner-Approximation	18
1.2.3	Matrix Beschreibung	21
1.3	Die CP-Verletzung der Kaonen	22
1.3.1	Beschreibung der CP-Verletzung	22
1.3.2	Die Analyse des $K^0 \rightarrow 2\pi$ -Zerfall	24
1.3.3	Die wichtigen Parameter für den Zerfall in zwei Pionen	26
1.4	Regeneration des K_S	27
1.4.1	Verhalten der neutralen Kaonen in Materie	28
1.4.2	Diagonalisierung der Hamiltonoperator des Kaonen	29
1.4.3	Zeitentwicklung in der Materie	30
2	Verschränkte Quantensysteme	32
2.1	Verschränkung und Hidden-Variable Theorie	32
2.1.1	Das EPR-Paradoxon	33
2.1.2	Theorie der verborgenen Variablen	34
2.2	Das Bellsche Theorem	35
2.2.1	Die CHSH Ungleichung	38
2.2.2	Die Wigner-Ungleichung	39
2.2.3	Die CH-Ungleichung	40
2.2.4	Die Eberhard Ungleichung	41
3	Bell'sche Ungleichungen für neutrale kaonische Systeme	43
3.1	Der Quasispin der Kaonen und die Analogie zu Photonen	43
3.2	Unitäre Zeitentwicklung für verschränkte Zustände	44
3.2.1	Die $\{Y, Y\}, \{N, N\}, \{Y, N\}$ und $\{N, Y\}$ Wahrscheinlichkeiten	46
3.3	Allgemeine Bell Ungleichung für Kaonen	46
3.3.1	Die Wahrscheinlichkeiten	47

3.3.2	Die allgemeine Bell-CHSH Ungleichung	48
3.3.3	Die allgemeine Bell-CHSH Ungleichung in Wigner Version	48
3.3.4	Bell Ungleichung für Kaonen - CP Verletzung	49
3.4	Test der Bell-Ungleichung mit Kaon und Antikaon	51
3.4.1	Verschränkter Zustand mit Regenerator in einem Kaon Strahl	51
3.4.2	Test der lokalen Realismus ohne Ungleichung	52
3.4.3	Die Clauser-Horne Ungleichung mit neutralen Kaonen	54
3.4.4	Die Eberhard Ungleichung mit neutralen Kaonen	55
3.4.5	Diskussion der CH und Eberhard Ungleichungen und das Detektoreffizienz Loophole	56
4	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	58
4.1	Zusammenfassung	58
4.2	Schlußfolgerungen	59

Abbildungsverzeichnis

1.1	Erzeugung eines Kaons	9
1.2	Darstellung der Umwandlung zwischen neutrale Kaonen	11
1.3	Kontur zum Beweis von der Gl. (??)	15
1.4	Mögliche Zerfälle der neutralen Kaonen	21
1.5	Semileptonische Zerfall	23
1.6	Regeneration des kurzlebigen Kaons	28
2.1	Schematische Darstellung eines Bell-Gedankexperiments	35
2.2	Schematische Darstellung eines Bell-Experiments mit absorptiven Analy- satoren	40
3.1	Die vier Kurven, die die Wert von η und $\bar{\eta}$ bestimmen (siehe Ref. [9, 10]), für die gilt $E_{QM} = 1$ (3.82) und $CH_{QM} = 1$ (3.79). Die QM verletzt die Ungleichungen (3.82) und (3.79) für Werte von η und $\bar{\eta}$, die über der entsprechenden Kurve liegen.	57

WIDMUNG

Diese Arbeit ist Herrn Prof. Reinhold A. Bertlmann in großer Dankbarkeit für die große Unterstützung während meiner Diplomarbeit gewidmet. Ich kann die ausreichenden Worte nicht finden, um ihm zu danken. Ich schätze mich sehr glücklich ihn kennengelernt zu haben.

DANKSAGUNG

Diese Diplomarbeit entstand am Institut für Theoretische Physik der Universität Wien unter der Leitung von Herrn Prof. Reinhold A. Bertlmann. Über allem stehen natürlich meine lieben Eltern und meine beste Freundin Nilüfer Gülerüz, ohne die dieses Studium nie möglich gewesen wäre. Die Unterstützung von der Familie Bostanci, Ak-Der, IGMG ermöglichte mir für 7 Jahre einen schönen Auslandsaufenthalt in Wien. Für die freundliche Wohnatmosphäre möchte ich mich bei Yasemin Aygün und Ebru Durak bedanken.

Bei Dilek Demir, Michael Lechermann und Nicolai Friis möchte ich mich für das Korrekturlesen dieser Arbeit und für die hilfreichen Anmerkungen bedanken. Außerdem gilt mein Dank Güler Ay und der Arbeitsgruppe von Prof. Bertlmann: Tanja Traxler, Andreas Gabriel und Philipp Krammer, die mir immer hilfreich und freundlich waren.

EINLEITUNG

Die Nichtlokalität von Quantensystemen steht im Mittelpunkt der heutigen Physik. Sie ergibt sich direkt aus dem Superpositionsprinzip. Sie ist eine Eigenschaft, die aus dem Wellencharakter von Quantenobjekten folgt. Die Nichtlokalität gibt uns Physikern noch immer einige Rätsel auf. So hat man durch statistische Messungen mit Hilfe der Bellschen Ungleichungen nachweisen können, dass die Nichtlokalität nicht etwa ein scheinbarer Effekt ist, der nur auf Unkenntnis der wahren Verhältnisse zurückzuführen ist, sondern zu realen Effekten, wie z.B. der Quantenteleportation, führt.

Diese Arbeit untersucht die nichtlokalen Korrelationen in kaonischen Systemen in Lichte der zwei Gebiete, nämlich der Teilchen Physik und der Grundlagen der Quantenmechanik. Der erste Teil bringt eine Einführung in die neutralen Kaonen. Die Verletzung der CP- Symmetrie (charge, parity) ist für das Verständnis der Elementarteilchenphysik von entscheidender Bedeutung, insbesondere zur Erklärung des Materieüberschusses bei der Teilchen-Antiteilchen Erzeugung im frühen Universum. Durch das Experiment von Christensen, Cronin und Fitch (1964) [1] wissen wir, dass beim Zerfall der neutralen Kaonen die CP- Symmetrie verletzt wird und dies bedeutet, dass auf Grund des CPT Theorems auch die Zeitumkehr T verletzt ist. Weiters wird im ersten Teil auch der Regenerationseffekt der Kaonen abgeleitet.

Im zweiten Teil werden die verschränkten Quantensysteme besprochen. Die Standard-Interpretation der Quantenmechanik geht davon aus, dass die quantenmechanische Beschreibung eines Systems im allgemeinen nur statistische Aussagen über einzelne Messungen ermöglicht. Im Jahre 1935 konstuierten Einstein, Podolsky und Rosen [2] unter gewissen Annahmen (insbesondere Lokalität) ein Beispiel, das die Existenz verborgener lokaler Parameter zeigen sollte; dieses Beispiel wird als EPR Paradoxon bezeichnet. 30 Jahre später zeigte Bell [3] in seiner berühmten Ungleichung für bestimmte Messwerte, dass die Annahmen des EPR Paradoxons im Widerspruch zur Quantenmechanik stehen. Diese Ungleichung wurde 1969 von Clauser, Horne, Shimony, und Holt (CHSH) [4] für reale Experimente angepasst. Neben der CHSH-Ungleichung gibt es zahlreiche weitere Ansätze zur Verletzung der Bellschen Ungleichung. Im folgenden werden die Ungleichungen für Zweiteilchensysteme vorgestellt; dies sind CH [5] (Clauser,Horne), Wigner [6], CHSH [4] und Eberhard [7] Ungleichungen.

Der dritte Teil bringt die Verwendung der Bell Ungleichungen für neutrale Kaonensysteme. Wir haben die Bell Ungleichungen mit Regenerator durch den Vergleich zwischen dem lokalen Realismus und Quantenmechanik getestet [8]. Damit haben wir zwei spezielle Ungleichungen - CH und Eberhard - näher diskutiert [9, 10, 11]. Zum Schluss wurde ein Schlupfloch (Detektionseffizienz) für diese speziellen Ungleichungen überprüft [9].

Hatice Tataroglu, Wien 2009

ABSTRACT

Nonlocality of quantum systems is one focus of today's physics. It can be derived directly from the principle of superposition. This property results out of the wave characteristics of quantum objects. Nonlocality still poses a major challenge to physicists. Statistical evaluations of measurement values together with Bell inequalities have shown nonlocality not to be just a virtual effect resulting solely out of ignorance of the true effects, but leading to real effects, like e.g. quantum teleportation.

This work aims to examine nonlocal correlations in kaonic systems by means of particle physics and foundations of quantum mechanics (QM). The first part is an introduction into the topic of neutral Kaons. The CP violation (charge, parity) in particle physics is fundamental for the understanding of particle and anti-particle production in the early universe.

In 1964 Christensen, Cronin and Fitch [1] showed that the CP symmetry is violated in the decay of the neutral Kaons, which implies, due to the CPT Theorem, that the time reversal T is violated too. We also include in this first part the derivation of the so-called regeneration-effect of the kaons.

In the second part entangled quantum systems are discussed. According to the standard-interpretation of quantum mechanics the description of a system makes only a statistical conclusion about a single measurement. In 1935 Einstein, Podolsky und Rosen [2] constructed under certain assumptions (particularly locality), an example in favour of the existence of hidden local parameters, which is also known as EPR Paradox. 30 years later showed Bell [3] in his famous inequality for certain measurement values, that the assumptions of the EPR Paradox are in contradiction to QM. This inequality was reformulated in 1969 by Clauser, Horne, Shimony and Holt [4] for real experiments. Besides the CHSH inequality there are a couple of different formulations of Bell's inequality. Other inequalities for two particle systems, like the CH [5] (Clauser, Horne), Wigner [6], CHSH [4] and Eberhard [7] inequality are presented.

The third part brings together Bell's inequality and the neutral kaonic system. We tested the Bell inequality with the regenerator in connection with the local realism and QM [8], which allows us to discuss the special form of CH and Eberhard inequality [9, 10, 11]. At the end we look at the loopholes for these two special inequalities [9].

1 Quantenmechanik der Kaonen

1.1 Die Phänomenologie der Kaonen

Hinweise für die Existenz einer neuer Art von Teilchen gab es durch das Studium eines ‘Shower’ bei kosmischen Strahlen. Die entdeckten Teilchen besitzen folgende Eigenschaften:

Sie sind nicht stabil (d.h. sie zerfallen), elektrisch geladen und ungeladen, ihre Ruhemassen sind ungefähr gleich 1000 Elektron-Ruhmassen.

Diese Teilchen wurden als Kaonen bezeichnet. Wie alle Mesonen haben Kaonen ganzzahligen Spin und sind somit Bosonen. Sie unterliegen der starken Wechselwirkung und gehören damit zur Klasse der Hadronen. Heute versteht man unter Mesonen Teilchen, die aus einem Quark und einem Antiquark zusammengesetzt sind. Sie haben ganzzahligen Spin.

Quantenzahlen der Mesonen: Mesonen sind Bindungszustände von Quark und Antiquark. Bei den Mesonzuständen mit den niedrigsten Massen haben Quark und Antiquark keinen relativen Bahndrehimpuls; das System befindet sich also in einem Zustand mit $L = 0$. Da Quarks und Antiquarks entgegengesetzte intrinsische Paritäten haben, ist die Parität dieser Mesonen $(-1)^{L+1} = -1$. Die Spins von Quark und Antiquark können zum Gesamtspin $S = 1$ oder $S = 0$ koppeln, was dann dem Gesamtdrehimpuls J des Mesons entspricht.

Die Mesonen mit $J^P = 0^-$ nennt man *pseudosklare Mesonen*, diejenigen mit $J^P = 1^-$ heißen *Vektormesonen*. Auf Grund von Symmetrieüberlegungen (Flavour SU(3)) werden jeweils 9 verschiedene Mesonen zu Multiplets (Oktlett und Singlett) zusammengefaßt, die aus Kombinationen von 3 verschiedenen Quarks (u,d,s), d.h. (up Quark, down Quark, strange Quark) mit 3 Antiquarks ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$), hervorgehen.

Isospin: Das u- und d-Quark bilden ein Isospinduplett ($I = 1/2$) mit $I_3 = +1/2$ für das u-Quark und $I_3 = -1/2$ für das d-Quark. Der starke Isospin ist eine Erhaltungsgröße der starken Wechselwirkung, d.h. alle beliebig im starken Isospinraum gedrehten Zustände sind für die starke Wechselwirkung äquivalent. Quantenmechanisch wird der Isospin genauso behandelt wie ein Drehimpuls, insbesondere bzgl. der Addition zweier Isospins und der Anwendung von Leiteroperatoren. Ebenso wie die Spins zweier Elektronen zu einem (Spin-)Triplet und einem Singlett koppeln, bilden die 2×2 Kombinationen aus u- und d-Quark sowie \bar{u} - und \bar{d} -Quark ein (Isospin-)Triplet und ein Singlett.

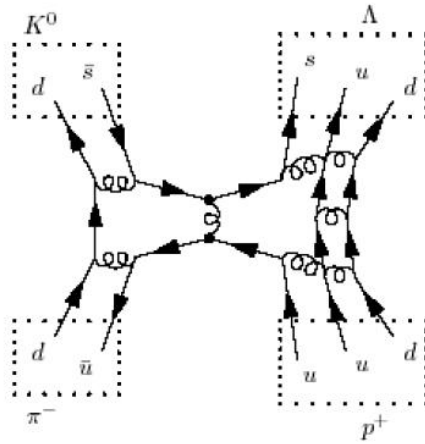


Abbildung 1.1: Erzeugung eines Kaons

B	S	I	-1	$-\frac{1}{2}$	I_3	$\frac{1}{2}$	1
1	0	$\frac{1}{2}$					
1	-1	0					
0	0	1	π^-		π^0		π^+
0	+1	$\frac{1}{2}$		K^0		K^+	
0	-1	$\frac{1}{2}$		K^-		\bar{K}^0	

Tabelle 1.1: Isospin und Strangeness für Teilchen

1.1.1 Strangeness

Die Kaonen wurden 1947 [12] über den Prozess $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda$ in der Höhenstrahlung entdeckt. Die Entdeckung dieser neuen Teilchen war eine Überraschung und ihr Verhalten seltsam. Deshalb wurden sie als "strange" Teilchen bezeichnet.

In den Jahren 1954-1955 versuchte Gell-Mann [13], und unabhängig von ihm Nishijima, das Konzept des Isospin auf die neuen Teilchen zu erweitern. Auf diese Weise musste eine andere Quantenzahl, die Strangeness S genannt wird, durch folgende Definition eingeführt werden:

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \quad (1.1)$$

In dieser Definition ist I_3 die Projektion des Isospin auf die '3' Achse, B die Baryonzahl und Q die Ladung. Dabei erhielt jedes Baryon die Baryonzahl $B = 1$ und jedes Meson $B = 0$. Unter diesem Klassifikationsschema gibt es zwei verschiedene neutrale K Teilchen, anders als im Fall von π^0 . Mit dieser Charakterisierung ist überprüft worden, dass bei starken und elektromagnetischen Wechselwirkungen die Strangeness erhalten bleibt, während sie sich in der schwachen Wechselwirkung ändern kann.

Es gibt vier Mesonen, die als Kaonen bezeichnet werden. Die sind in Tabelle 1.2 aufge-

Kaon	Quarks	Strangeness	Isospin
K^+	$u\bar{s}$	+1	+1/2
K^-	$\bar{u}s$	-1	-1/2
K^0	$d\bar{s}$	+1	-1/2
\bar{K}^0	$\bar{d}s$	-1	+1/2

Tabelle 1.2: Zusammensetzung der Kaonen

listet.

- Das negativ geladene Kaon K^- hat eine Masse von $493,677 \pm 0,013$ MeV und eine mittlere Lebensdauer von $(1,2385 \pm 0,0024) \cdot 10^{-8}$ s.
- Antiteilchen ist das positiv geladene Kaon K^+ . Masse und mittlere Lebensdauer des Antiteilchens müssen aufgrund der CPT-Invarianz mit den entsprechenden Werten des Teilchens übereinstimmen.
- Das elektrisch neutrale K^0 . Seine Masse beträgt $(497,648 \pm 0,022)$ MeV.
- Sein Antiteilchen ist das ebenfalls elektrisch neutrale \bar{K}^0 . Die Massendifferenz zwischen den beiden neutralen Kaonen ist kleiner als 10^{-15} MeV. Dies bestätigt die CPT-Invarianz.

Die Kaonen können durch die Operatoren Strangeness S, Parity P, Ladungsumkehr C und CP-Symmetrie CP charakterisiert werden.

Die Parität bezeichnet in der Physik eine Symmetrieeigenschaft eines physikalischen Systems, welche das Verhalten gegenüber räumlichen Spiegelungen beschreibt. Der Parität kann ein Operator P zugeordnet werden, der nur existiert, wenn es zu dem zu spiegelnden Objekt auch wirklich sein Spiegelbild gibt. Beschreibt $|\psi(\vec{r})\rangle$ das Objekt und $|\psi(-\vec{r})\rangle$ sein Spiegelbild, dann gilt: $P|\psi(\vec{r})\rangle = |\psi(-\vec{r})\rangle = \pm |\psi(\vec{r})\rangle$

Die Ladungskonjugation oder C-Parität ersetzt in quantenmechanischen Zuständen jedes Teilchen durch sein Antiteilchen. Sie spiegelt so das Vorzeichen der Ladung und lässt Energie, Impuls, Masse und Spin jedes Teilchens unverändert.

Wenn man die starke Wechselwirkung der neutralen Kaonen untersucht, findet man, dass K^0 und \bar{K}^0 pseudoskalere Teilchen sind und ihr Paritätsoperator ergibt

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad (1.2)$$

Die Ladungskonjugation transformiert Teilchen und Antiteilchen ineinander

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle. \quad (1.3)$$

Die Kaonen sind leichte Mesonen, sie entstehen durch Prozesse der starken Wechselwirkung, aber zerfallen langsamer als erwartet unter schwacher Wechselwirkung, da unter

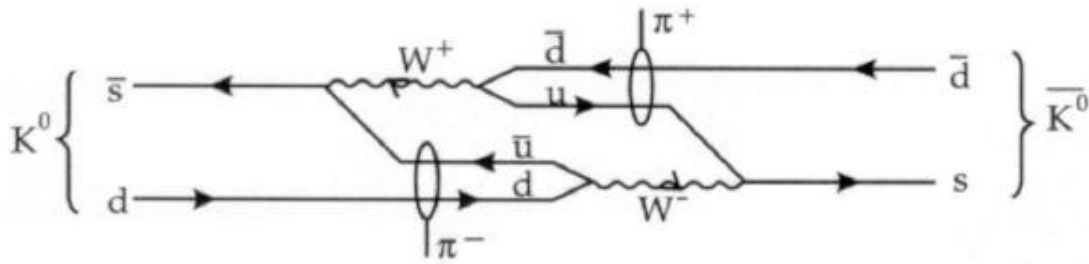


Abbildung 1.2: Darstellung der Umwandlung zwischen neutrale Kaonen

der starken Wechselwirkung Strangeness erhaltend ist. Im Weiteren wollen wir nur noch das neutrale Kaon K^0 und sein Antiteilchen das \bar{K}^0 betrachten. Diese werden durch den Beschuss eines fixed targets mit Protonen erzeugt. Hierbei sind folgende Prozesse möglich:

$$p + p \rightarrow K^+ + \bar{K}^0 + p + n \quad p + n \rightarrow \Lambda + K^0 + p$$

Neutrale Kaonen können sowohl in zwei als auch in drei Pionen zerfallen. Das zwei Pion System hat positive Parität, hingegen hat das drei Pion System negative Parität. Da das K^0 und das \bar{K}^0 in die gleichen Endzustände zerfallen können, können sie sich über einen virtuellen pionischen Zwischensummenzustand ineinander umwandeln,

$$K^0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2\pi \\ 3\pi \end{pmatrix} \longleftrightarrow \bar{K}^0$$

Die Zwei- und Drei-Pion-Systeme sind Eigenzustände des kombinierten Operators CP mit unterschiedlichen Eigenwerten

$$CP | \pi^0 \pi^0 \rangle = +1 \cdot | \pi^0 \pi^0 \rangle \quad CP | \pi^0 \pi^0 \pi^0 \rangle = -1 \cdot | \pi^0 \pi^0 \pi^0 \rangle \quad (1.4)$$

während K^0 und \bar{K}^0 keine Zustände mit definierter CP -Parität sind

$$CP | K^0 \rangle = | \bar{K}^0 \rangle \quad CP | \bar{K}^0 \rangle = | K^0 \rangle. \quad (1.5)$$

1.1.2 Symmetrie

Symmetrien lassen sich in zwei Kategorien unterteilen, die kontinuierlichen Symmetrien (z.B. Drehungen und Translation) und die diskreten Symmetrien (C, P und T). Emmy Noether [14] fand bereits 1918 heraus, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße gehört und umgekehrt. Pauli [15] und Lüders [16], ebenso J.S. Bell [17], stellten 1955 das CPT Theorem auf, das besagt, dass jede relativistische lokale Feldtheorie unter der kombinierten Operation CPT invariant sein muss.

Der Operator T kehrt die Zeitrichtung eines Prozesses um. Die Operatoren C, P und T sind einzeln je unter der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung erhalten, nicht aber unter der schwachen Wechselwirkung. Ohne den Beweis dafür anzugeben, folgt CPT -Symmetrie aus wenigen, sehr fundamentalen Annahmen:

- Es herrscht Symmetrie gegenüber kontinuierlichen Transformationen der speziellen Relativitätstheorie mit einer Zeit- und drei Raumkoordinaten.
- Die physikalischen Gesetze sind lokal, ihre Wirkung breitet sich kontinuierlich, also mit einer endlichen Geschwindigkeit (und nicht instantan) im Raum aus.
- Gültigkeit der Gesetze der Quantenmechanik. Lokalität bedeutet hier, dass sich gleichzeitige Messungen an verschiedenen Orten nicht gegenseitig beeinflussen.
- Es gibt einen Zustand niedrigster Energie.
- Die quantenmechanische Gesamtwahrscheinlichkeit ist konstant.
- Es gibt eine endliche Anzahl von Teilchen, aus denen alle bekannten Teilchen aufgebaut sind.

Als Folge des CPT-Theorems hat jedes Teilchen die gleiche Masse wie das dazu gehörige Antiteilchen. Ebenso ist die Lebensdauer von Teilchen und Antiteilchen identisch.

1.1.3 CPT Symmetrie

In der QFT gibt es einen Satz, der besagt, dass die kombinierten Transformationen CPT eine Symmetrie von QFT ist, wenn die Lagrange-Funktion hermitesch und unter Lorentz Transformationen invariant ist. Daher besagt eine invariante Theorie

$$\langle p | H | p \rangle = \langle p | (CPT)^{-1} H (CPT) | p \rangle = \langle \bar{p} | H | \bar{p} \rangle \quad (1.6)$$

wo p für Teilchen und \bar{p} für Anti-Teilchen steht. Das Ergebnis gibt an, dass die Energiespektren in dem transformierten und untransformierten System gleich sind. In Abwesenheit von jeden Wechselwirkungen impliziert es die Gleichheit der Massen, die experimentell gut verifiziert ist; z.B. die Massen von Proton und Antiproton unterscheiden sich durch

$$\left| \frac{m_p - m_{\bar{p}}}{m_p} \right| \approx 2 \cdot 10^{-11} \quad (1.7)$$

Der beste Test von CPT Symmetrie kommt von der neutralen Kaonen

$$\left| \frac{m_{K^0} - m_{\bar{K}^0}}{m_{proton}} \right| \leq 10^{-18} \quad (1.8)$$

Aufgrund der schwachen Wechselwirkung H_{ww} ist der gesamte Zerfallssatz des Zustands $|p\rangle$ in einen Zustand $|f\rangle$ gegeben durch

$$\Gamma = \sum_f |k_f \langle f | H_{ww} | p \rangle|^2 \quad (1.9)$$

Die totale Lebenszeit für Teilchen und Anti-Teilchen ist gleich

$$\tau_p = \tau_{\bar{p}} \quad (1.10)$$

Wenn CP Symmetrie verletzt ist, d.h., ist T auch verletzt.

1.1.4 Klassifikation CP Verletzung

Man unterscheidet folgende Arten der CP-Verletzung: Zuerst ist die indirekte CP Verletzung durch Mischung $A \longleftrightarrow X \longleftrightarrow \bar{A}$ zu nennen. Diese wird im Falle der Kaonen üblicherweise durch den Parameter ϵ beschrieben. Eine allgemeine Bedingung für die indirekte CP-Verletzung ergibt sich durch

$$\left| \frac{q}{p} \right| \neq 1 \quad \text{für} \quad \left| \frac{q}{p} \right| = \left| \frac{M_{12}^* - (i/2) \Gamma_{12}^*}{M_{12} - (i/2) \Gamma_{12}} \right| \quad (1.11)$$

wenn M die Massenmatrix und Γ die Zerfallsmatrix ist. Die direkte CP-Verletzung wird dagegen durch eine Verletzung der CP-Symmetrie im Zerfallsprozess selbst verursacht, welche eigentlich allgemein die Gleichheit der Zerfallsraten $\Gamma(A \rightarrow B) = \Gamma(\bar{A} \rightarrow \bar{B})$ von Teilchen und Antiteilchen formuliert. Ist $|f\rangle$ der Zustand der Endprodukte und $|P\rangle$ der Zustand der pseudoskalaren zerfallenden Teilchen, so lautet die allgemeine Bedingung der direkten CP-Verletzung

$$\left| \frac{\bar{A}}{A} \right| \neq 1 \quad \text{für} \quad \left| \frac{\langle \bar{f} | H | \bar{P} \rangle}{\langle f | H | P \rangle} \right| \quad (1.12)$$

Im Rahmen der direkten CP-Verletzung der Kaonen entspricht der Quotient $\frac{\epsilon'}{\epsilon}$ dieser Größe.

1.1.5 Die Wigner-Weisskopf-Näherung

Das Problem ist die Berechnung des zeitlichen Verhaltens der Wellenfunktion instabiler Zustände. Dazu denken wir uns den Hamiltonoperator für die Elementarteilchen in zwei Anteile aufgespalten, die zur starken bzw. schwachen Wechselwirkung gehören:

$$H = H_0 + H'. \quad (1.13)$$

Wir betrachten nun den Zerfall von diskreten entarteten H_0 Eigenzuständen $|\alpha\rangle$ zum Eigenwert E_0 . Wir haben im nächsten insbesondere ruhende neutrale Kaonen und Antikaonen im Blick. Wir fragen nun nach dem Zerfall dieser Zustände in irgendwelche anderen Teilchen. I.a. werden dies Vielteilchenzustände $|\beta\rangle$ mit kontinuierlichen E_0 -Eigenwerten E_β sein. Wigner und Weisskopf [18] haben eine einfache Methode gefunden, zum Resultat zu gelangen, die ausschließlich auf quantentheoretischen Grundlagen beruht, ohne daß man ein bestimmtes quantenfeldtheoretisches Modell benutzen muß.

Dazu wechseln wir ins Wechselwirkungsbild bzgl. H' hinüber. Beginnen wir zunächst im Schrödinger-Bild. Diese Operatoren sind definitionsgemäß zeitunabhängig (es sei denn es liegt eine explizite Zeitabhängigkeit vor). Insbesondere sind H_{0S} und H'_S zeitunabhängig. Aus Konvergenzgründen schreiben wir jedoch

$$H'_S \rightarrow e^{\eta t} H'_S. \quad (1.14)$$

Dabei ist $\eta > 0$. Wir stellen uns die schwache Wechselwirkung also ab $t \rightarrow -\infty$ langsam eingeschaltet vor. Am Schluß der Rechnung nehmen wir $\eta \rightarrow 0$. Hier ist η eine Art

Regularisierungsparameter, den wir ab der zweiten Ordnung Störungstheorie benötigen, wenn wir das hier gestellte Problem lösen wollen:

Die Berechnung der Abnahme von Energieeigenzuständen bzgl. H_0 aufgrund einer gegen H_0 kleinen Störung H' . Wir betrachten den Fall, dass wir nur Übergangsmatrixelemente zwischen Zuständen verschiedener Energie berechnen wollen. Wir gelangen nun vom Schrödingerbild zum Wechselwirkungsbild, indem wir eine zeitabhängige unitäre Transformation der Operatoren und Zustände vornehmen

$$|\psi, t\rangle = e^{iH_0 t} |\psi, t\rangle_S, \quad H'(t) = e^{iH_0 t} H'_S e^{-iH_0 t}, \quad H_0 = H_{0S}. \quad (1.15)$$

Die Schrödingerzustände genügen der Zeitentwicklungsgleichung

$$i\partial_t |\psi, t\rangle_S = H_S |\psi, t\rangle_S, \quad (1.16)$$

und für die Zustände im Wechselwirkungsbild gilt

$$i\partial_t |\psi, t\rangle = H'(t) |\psi, t\rangle. \quad (1.17)$$

Wir können nun jeden Hilbertraumvektor, also auch den gemäß dem Wechselwirkungsbild zeitabhängigen Zustandsket, nach dem vollständigen orthonormierten Satz der H_0 -Eigenzustände entwickeln:

$$|\psi, t\rangle = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}(t) |\alpha\rangle + \sum_{\beta} b_{\beta}(t) |\beta\rangle. \quad (1.18)$$

Dabei haben wir der Einfachheit halber auch für die kontinuierlichen Zustände eine Summe geschrieben, obwohl eigentlich ein Integral gemeint ist. Die H_0 -Eigenzustände sind nun zeitunabhängig, da $H_0 = H_{0S}$ zeitunabhängig ist. Bilden wir die Zeitableitung von (1.18), wenden die Bewegungsgleichung (1.16) an und multiplizieren die entstehenden Gleichungen mit $|\beta\rangle$ bzw. $|\alpha\rangle$, so liefert dies das folgende Differentialgleichungssystem für die Koeffizienten a_{α} und b_{β} :

$$\dot{a}_{\alpha}(t) = -ie^{\eta t} \sum_{\alpha'=1}^n H'_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'} - ie^{\eta t} \sum_{\beta'} e^{i(E_0 - E_{\beta})t} H'_{\alpha\beta'} b_{\beta'} \quad (1.19)$$

$$\dot{b}_{\beta}(t) = -ie^{\eta t} \sum_{\alpha'} e^{i(E_{\beta} - E_0)t} H'_{\beta\alpha'} a_{\alpha'} - ie^{\eta t} \sum_{\beta'} e^{i(E_{\beta} - E_{\beta'})t} H'_{\beta\beta'} b_{\beta'}. \quad (1.20)$$

Dabei haben wir die Matrixelemente des Störhamiltonoperators H'_S im Schrödingerbild eingeführt:

$$H'_{\gamma\gamma'} = \langle \gamma | H'_S | \gamma' \rangle, \quad \gamma, \gamma' \in \{\alpha, \beta\}. \quad (1.21)$$

Diese sind zeitunabhängig, so daß auf der rechten Seite der Gleichungen (1.19) und (1.20) nur die Exponentialfunktionen und die gesuchten Koeffizienten a_{α} und b_{β} zeitabhängig sind.

Die Wigner-Weisskopfnäherung ergibt sich nun in zwei Schritten. Die Anfangsbedingungen unseres Problems sind nun die folgenden:

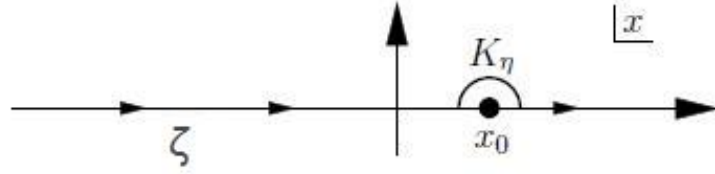


Abbildung 1.3: Kontur zum Beweis von der Gl. (1.30)

Bei $t = t_0$ soll nur ein Teilchen, dessen Zerfall wir betrachten wollen, vorhanden sein (also ein Kaon oder Antikaon), d.h. es ist

$$a_\alpha(t_0) = \psi_\alpha^0, \quad b_\beta(t_0) = 0. \quad (1.22)$$

Unter Berücksichtigung dieser Anfangsbedingungen läßt sich bei Vernachlässigung der β' -Summe in (1.20) diese Gleichung in eine Integralgleichung umformen:

$$b_\beta(t) = -ie^{\eta t} \int_{t_0}^t dt' \sum_{\alpha'} e^{i(E_\beta - E_0)t'} H'_{\beta\alpha'} a_{\alpha'}(t'). \quad (1.23)$$

Das Weglassen der schwachen Wechselwirkung der Zerfallsprodukte untereinander ist die erste Näherung. Dies in die ebenfalls mit $\int_0^t dt'$ integrierte Gleichung (1.19) eingesetzt, ergibt schließlich ein Integralgleichungssystem für die endlich vielen Koeffizienten a_α :

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) &= \psi_\alpha^0 - i \int_{t_0}^t dt_1 e^{\eta t_1} \sum_{\alpha'} H'_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}(t_1) \\ &+ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{\eta(t_1+t_2)} \sum_{\alpha',\beta} e^{i(E_0 - E_\beta)(t_1-t_2)} H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'} a_{\alpha'}(t_2) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Wir können durch Iteration eine Reihe in Matrixelementen $H'_{\gamma\gamma'}$ mit $\gamma\gamma' \in \{\alpha, \beta\}$ gewinnen und nehmen die untere Grenze der Integrale $t_0 \rightarrow -\infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) &= \psi_\alpha^0 - \frac{ie^{\eta t}}{\eta} \sum_{\alpha'} H'_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}^0 + \frac{(-i)^2 e^{2\eta t}}{2\eta} \sum_{\beta\alpha'} \frac{H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'}}{E_0 - E_\beta + i\eta} \psi_{\alpha'}^0 \\ &+ \frac{(-i)^2 e^{2\eta t}}{2\eta^2} \sum_{\alpha'\alpha''} H'_{\alpha\alpha''} H'_{\alpha''\alpha'} \psi_{\alpha'}^0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Leiten wir dies wiederum nach der Zeit ab, folgt

$$\begin{aligned} \dot{a}_\alpha(t) &= -ie^{\eta t} \sum_{\alpha'} H'_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}^0 + (-i)^2 e^{2\eta t} \sum_{\beta\alpha'} \frac{H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'}}{E_0 - E_\beta + i\eta} \psi_{\alpha'}^0 \\ &+ \frac{(-i)^2 e^{2\eta t}}{\eta} \sum_{\alpha'\alpha''} H'_{\alpha\alpha''} H'_{\alpha''\alpha'} \psi_{\alpha'}^0. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Nun läßt sich $\psi_{\alpha'}^0$ durch Umkehrung von (1.25) abgesehen von Beiträgen in zweiter oder höherer Ordnung in Matrixelementen H' durch die $a_{\alpha}(t)$ ausdrücken:

$$\psi_{\alpha}^0 = a_{\alpha} + \frac{i \exp \eta t}{\eta} \sum_{\alpha'} H'_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}(t). \quad (1.27)$$

Dies reicht aus, um (1.26) bis hin zu Größen zweiter Ordnung in $H'_{\alpha\beta}$ und $H'_{\alpha\alpha'}$ durch eine für $\eta \rightarrow 0$ endliche Gleichung auszudrücken:

$$\dot{a}_{\alpha} \cong_{\eta \rightarrow 0} -i \sum_{\alpha'} \Delta \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'} \quad (1.28)$$

mit der Massenkorrekturmatri

$$\Delta \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} = H'_{\alpha\alpha'} + \mathcal{P} \sum_{\beta} \frac{1}{E_0 - E_{\beta}} H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'} - i\pi \sum_{\beta} \delta(E_0 - E_{\beta}) H'_{\alpha\beta} H'_{\beta\alpha'}. \quad (1.29)$$

Dabei bezeichnet \mathcal{P} den Cauchy' schen Hauptwert des Integrals. Es wurde dabei das wichtige Integral

$$\int dx \frac{f(x)}{x - x_0 + i\eta} \underset{\eta \rightarrow 0}{=} -i\pi f(x_0) + \mathcal{P} \int dx \frac{f(x)}{x - x_0} \quad (1.30)$$

verwendet, das für jede stetige, im Unendlichen hinreichend schnell fallende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, die in einer Umgebung von x_0 zu einer komplexen Funktion analytisch fortsetzbar ist. Für endliches η definiert dann das Integral auf der linken Seite offenbar eine komplexe Funktion $f(x_0)$, die in der ganzen oberen Halbebene analytisch ist. Wir können dabei für hinreichend kleine η den Integrationsweg deformieren, indem wir statt entlang der reellen Achse entlang der Kontur ζ integrieren, die in Abb. 1.3 gezeichnet ist. Das Integral entlang des kleinen Halbkreises K_{η} berechnen wir mittels einer konkreten Parametrisierung desselben:

$$K_{\eta} : x(t) = x_0 - \eta e^{-it} \longrightarrow \int_{K_{\eta}} dx \frac{f(x)}{x - x_0} = i \int_0^{\pi} dt f[x_0 - \eta e^{-it}] \cong_{\eta \rightarrow 0} i\pi f(x_0) \quad (1.31)$$

Weiter ist die Definition des Hauptwertes

$$\mathcal{P} \int dx \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \eta} dx \frac{f(x)}{x - x_0} + \int_{x_0 + \eta}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x - x_0} \right] \quad (1.32)$$

was dem Integral entlang dem Rest von ζ für $\eta \rightarrow 0_+$ entspricht.

Betrachten wir nun wieder den Zustand im Schrödingerbild, so folgt

$$\langle \alpha | \psi, t \rangle_S = a_{\alpha}(t) e^{-iE_0 t} \quad (1.33)$$

und wir sehen, dass unsere nichthermitesche Massenmatrix durch

$$\mathcal{M}_{\alpha\alpha'} = E_0 + \Delta \mathcal{M}_{\alpha\alpha'} \quad (1.34)$$

gegeben ist. Insbesondere folgt aus der Hermitizität von $H'_{\alpha\beta}$ die positive Definitheit des antihermiteschen Anteils (siehe Ref. [19, 20])

$$\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\alpha'} = \pi \sum_{\beta} H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha'} \delta(E_0 - E_{\beta}). \quad (1.35)$$

1.2 Zerfall Formalismus

1.2.1 Einfluss der CP-Invarianz

Wenn wir davon ausgehen, daß die schwache Wechselwirkung zwar die P und C-Parität separat verletzt, aber invariant unter der Anwendung von CP ist, dann muß der Anfangszustand beim Zerfall des Kaons ebenfalls ein Zustand mit definierter CP- Parität sein. Durch Linearkombination kann man solche CP- Eigenzustände konstruieren:

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\} \quad \text{mit} \quad CP |K_1^0\rangle = +1 \cdot |K_1^0\rangle \quad (1.36)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\} \quad \text{mit} \quad CP |K_2^0\rangle = -1 \cdot |K_2^0\rangle \quad (1.37)$$

Unter der Annahme der CP- Erhaltung muß man den hadronischen Zerfall eines neutralen Kaons als Zerfall eines K_1 in zwei Pionen bzw. eines K_2 in drei Pionen beschreiben. Die beiden Zerfallswahrscheinlichkeiten sollten sich stark voneinander unterscheiden. Der Phasenraum für den Drei-Pion-Zerfall ist erheblich kleiner als für den Zwei-Pion-Zerfall, weil die Ruhemasse von drei Pionen fast schon so groß wie die des neutralen Kaons ist. Demgemäß sollte der K_2 Zustand wesentlich langlebiger sein als der K_1 Zustand.

Da die neutralen K-Mesonen den Spin 0 haben, müssen die zwei Pionen des Endprodukts aufgrund der Drehimpulserhaltung ebenfalls den Drehimpuls $l = 0$ haben. Unter dem Paritäts-Operator und damit auch dem CP-Operator hat der kurzlebige Zustand des Zwei-Pionen-Zerfalls daher den Eigenwert +1. Somit folgt $|K_S\rangle = |K_1^0\rangle$ und analog $|K_L\rangle = |K_2^0\rangle$ unter CP-Invarianz. Da der langlebige Zustand einen von +1 verschiedenen Eigenwert hat, kann er deshalb nicht in zwei Pionen zerfallen.

Die Zerfallszeiten in Zwei- bzw. Dreipionenzustände sind $\tau_S = \Gamma_S^{-1} = (0,8923 \pm 0,0022) \cdot 10^{-10}$ s bzw. $\tau_L = \Gamma_L^{-1} = (5,183 \pm 0,040) \cdot 10^{-8}$ s. Die Lebensdauer hängt entsprechend der Unschärferelation $\tau\Gamma \geq \hbar$ über $\tau \propto \Gamma^{-1}$ mit der Energiehalbwertsbreite der Teilchen zusammen.

Die unterschiedlichen Lebensdauern führen u.a. zu Phänomenen wie der sogenannten Strangeness-Oszillation auf die aber nicht näher eingegangen werden soll. Insgesamt erhält man unter der Annahme von CP- Invarianz, dass nur der Zustand K_S^0 in zwei Pionen zerfallen kann, wohingegen der Zustand K_L^0 nur in drei Pionen zerfallen kann. Der zwei Pionenzerfall geht natürlich viel schneller, da ein Teilchen weniger erzeugt werden muß und mehr Energie frei wird.

Experimentell findet man in der Tat, dass z.B. der Zustand K_L^0 hauptsächlich wie folgt zerfällt:

$$\begin{aligned}
K_L^0 &\longrightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 & 12.55 \% \\
K_L^0 &\longrightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0 & 21.13 \% \\
K_L^0 &\longrightarrow \pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu & 27.18 \% \\
K_L^0 &\longrightarrow \pi^\pm e^\mp \nu_e & 38.78 \%
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Allerdings wurde in dem fundamentalen Experiment von Christensen, Cronin, Fitch und Turlay [1] (Nobelpreis für Cronin und Fitch) herausgefunden, dass auch die langlebigen K-Mesonen mit einer allerdings sehr geringen Wahrscheinlichkeit ($\approx 10^{-3}$) in zwei Pionen zerfallen können; damit ist die CP-Symmetrie verletzt.

$$\begin{aligned}
K_L^0 &\longrightarrow \pi^+ \pi^- & 0.203 \% \\
K_L^0 &\longrightarrow \pi^0 \pi^0 & 0.094 \%
\end{aligned} \tag{1.39}$$

1.2.2 Zerfallsprozesse in der Weisskopf-Wigner-Approximation

Alle Zerfallsprozesse der Natur finden in exponentieller zeitlicher Abhängigkeit statt. Trotzdem ist die Beschreibung eines exponentiellen Zerfallsprozesses im Rahmen der Quantenmechanik kein triviales Problem. Die Schrödinger-Gleichung [21] impliziert für einen stationären Zustand durch die formale Lösung

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \implies A(t) = \langle \psi^{(0)} | \psi(t) \rangle = \langle \psi^{(0)} | e^{iE_0 t} | \psi^{(0)} \rangle \tag{1.40}$$

für den exponentiellen Abfall der Amplitude einen komplexwertigen Energie-Eigenwert E_0 . Ein komplexer Eigenwert kann aber nicht zu einem hermiteschen bzw. selbstadjungierten Hamilton-Operator gehören. Wir werden sehen, dass die Weisskopf-Wigner-Approximation dieses Problem ignoriert.

Daher ist ein plausibler Ansatz zur Beschreibung eines exponentiellen Zerfalls für Zeiten $t > 0$ durch den Zustandsvektor

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\left(m - i\frac{\Gamma}{2}\right)t\right] |\psi(0)\rangle \tag{1.41}$$

gegeben, wo m die Masse, Γ die totale Zerfallsrate und t die Eigenzeit ist. Diese zeitliche Evolution führt zu dem gewünschten exponentiellen Abklingen der Wahrscheinlichkeit, da

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = e^{-\Gamma t} \tag{1.42}$$

gilt. Dieser Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ genügt dann einer effektiven Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \left(m - i\frac{\Gamma}{2}\right) |\psi(t)\rangle \tag{1.43}$$

mit der komplexen Masse $m - i\frac{\Gamma}{2}$. Gehen wir nun zu den K-Mesonen über. Bei den Kaonen verhält es sich etwas komplizierter, da nach den obigen Überlegungen auch Übergänge von Kaonen zu Antikaonen möglich sind. Das bedeutet, daß der Schrödingerbild-Zustandsvektor im gemeinsamen Zustandsraum von Kaonen und Antikaonen anzusetzen ist, also eine beliebige Superposition aus Kaonen- und Antikaonenzuständen sein muß:

$$|\psi(t)\rangle = \psi_1(t) |K^0\rangle + \psi_2(t) |\bar{K}^0\rangle. \quad (1.44)$$

Dabei sind $\psi_1(t), \psi_2(t)$ die Amplitude und $|\psi_1(t)|^2, |\psi_2(t)|^2$ die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t ein K^0, \bar{K}^0 - anzutreffen. Analog zum Zerfall der Zustände aus oben ist der Zerfall des Superpositions-Zustandsvektors durch die effektive Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \mathcal{M} |\psi(t)\rangle \quad (1.45)$$

beschrieben. Dabei ist \mathcal{M} ein Operator in dem obigen zweidimensionalen Zustandsraum. Wegen der Kaonen-Oszillation ist der Zustandsraum eines ruhenden neutralen Kaons zweidimensional, so dass bezüglich einer Basis der Operator \mathcal{M} einer 2×2 -Matrix entspricht. Eine beliebige Matrix lässt sich durch $X = A + iB$ in einen hermiteschen und antihermiteschen Anteil zerlegen, wobei im konkreten Fall

$$\mathcal{M} = M - i\frac{\Gamma}{2} \quad (1.46)$$

gilt und beide Matrizen $M, \Gamma \in 2 \times 2$ -Matrix hermitesch und M die Massenmatrix und Γ die Zerfallsmatrix sind.

Wir betrachten das Eigenwert-Problem für \mathcal{M} . Die beide Eigenvektoren von \mathcal{M} bezeichnen wir mit $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$, normiert und von der Phase so gewählt, dass $\langle K_S | K_L \rangle = \langle K_S | K_L \rangle^* \geq 0$ erfüllt ist. Da \mathcal{M} nicht hermitesch ist, sind die Eigenvektoren im allgemeinen nicht orthogonal zueinander und die Eigenwerte λ_S bzw. λ_L nicht reell, es wird die Zerlegung

$$\lambda_S = \left(m_S - i\frac{\Gamma_S}{2} \right) \quad \lambda_L = \left(m_L - i\frac{\Gamma_L}{2} \right) \quad (1.47)$$

gewählt, wobei $m_S, m_L, \Gamma_S, \Gamma_L \in \mathbb{R}$ reell seien und $\Gamma_S \geq \Gamma_L$ sein soll - die Indizierung der Objekte bezieht sich also auf die **Kurz-/Langlebigkeit des Zustands**, die durch die Zerfallsrate bestimmt ist. Die Ausgangs-Superposition dieser unterschiedlich rasch zerfallenden Zustände sei nun durch zwei Konstanten c_S und c_L gegeben, so dass

$$|\psi(0)\rangle = c_S |K_S\rangle + c_L |K_L\rangle \quad (1.48)$$

gilt. Die Zeitentwicklung dieses Überlagerungszustandes ist dann völlig analog zum Einzel-Zustands-System durch

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\left(m_S - i\frac{\Gamma_S}{2}\right)t\right] c_S |K_S\rangle + \exp\left[-i\left(m_L - i\frac{\Gamma_L}{2}\right)t\right] c_L |K_L\rangle \quad (1.49)$$

gegeben, so dass die Gesamtwahrscheinlichkeit ein nicht zerfallenes neutrales Kaon anzutreffen durch

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= |c_S|^2 e^{-\Gamma_S t} + |c_L|^2 e^{-\Gamma_L t} \\ &+ 2 \operatorname{Re} \left\{ c_S^* c_L \langle K_S | K_L \rangle e^{-i(m_S - m_L)t} \right\} e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_S + \Gamma_L)t} \end{aligned} \quad (1.50)$$

gegeben ist. Dieser Ausdruck enthält Information über die zwei Zerfallsarten Γ_S und Γ_L und über die Massendifferenz $\Delta m = 3.49 \times 10^{-6} \text{eV}$. Ein rein exponentielles Zerfallsgesetz erhalten wir für die Zustände $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$, wenn entweder $c_L = 1$ und $c_S = 0$ oder $c_L = 0$ und $c_S = 1$ ist, also zur Zeit $t = 0$ ein reiner M-Eigenzustand vorliegt. Die Zerfallskonstanten sind Γ_L und Γ_S , d.h. das Kaon bzw. Antikaon ist die Superposition eines längerlebigen und eines kürzerlebigen Anteils.

Es stellt sich nun heraus, dass K_S und K_L nicht immer auf die gleiche Weise zerfallen. Jedes hat quasi seinen bevorzugten Zerfall, allerdings tritt (im Vergleich dazu natürlich selten) auch der jeweils andere Zerfall auf, sodass sich diese Teilchen als eine Superposition darstellen lassen. Experimentell führt dies auf den Ansatz

$$|K_S\rangle = \frac{1}{N} \{p |K^0\rangle - q |\bar{K}^0\rangle\} \quad (1.51)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{N} \{p |K^0\rangle + q |\bar{K}^0\rangle\} \quad (1.52)$$

mit $N^2 = |p|^2 + |q|^2$. Die Bedeutung von p und q werden wir in den nächsten Absatz sehen. Für die nächsten Berechnungen setzen wir $p = q = 1$, damit $N = \sqrt{2}$.

Weil $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$ Superpositionen der Zustände $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ sind, lässt sich deren Zeitentwicklung aus den ersteren beiden bestimmen. Nach ein wenig Rechnerei in Wigner-Weisskopf-Näherung berechnet sich die Zeitentwicklung eines reinen K^0 - Strahls zu

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i\lambda_S t} |K_S\rangle + e^{-i\lambda_L t} |K_L\rangle \right\} \quad (1.53)$$

Angenommen man erzeugt einen $|K^0\rangle$ - Strahl zum Zeitpunkt $t = 0$, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass man ein $|K^0\rangle$ bzw. ein $|\bar{K}^0\rangle$ auffindet, durch folgende Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} |\langle K^0 | K^0(t) \rangle|^2 &= \frac{1}{4} |e^{-i\lambda_S t} + e^{-i\lambda_L t}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \operatorname{Re} \left\{ e^{i(m_L - m_S)t} \right\} \cdot e^{-\frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2} t} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) \cdot e^{-\frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2} t} \right\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

sowie analog

$$|\langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left\{ e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) \cdot e^{-\frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2} t} \right\}. \quad (1.55)$$

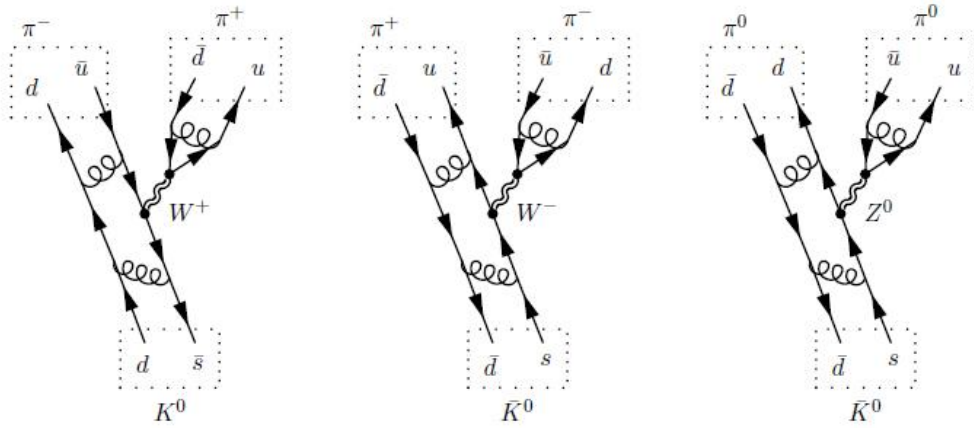


Abbildung 1.4: Mögliche Zerfälle der neutralen Kaonen

Diese Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich nur durch den Interferenz Term. Sie wird durch die drei Konstanten Γ_S , Γ_L und $\Delta m = m_L - m_S$ charakterisiert, wobei Γ_S viel größer als Γ_L ist. Die experimentelle Werte diesen drei Konstansten sind

$$\begin{aligned}\Gamma_S &= \frac{1}{\tau_S} = \frac{1}{(0.8934 \pm 0.0008) \cdot 10^{-10} \text{s}} \approx 1.12 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}} \\ \Gamma_L &= \frac{1}{\tau_L} = \frac{1}{(5.17 \pm 0.04) \cdot 10^{-8} \text{s}} \approx 1.9 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{s}} \\ \Delta m &= m_L - m_S = (0.5301 \pm 0.0014) \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}}\end{aligned}\quad (1.56)$$

Wir können von diesem Bild leicht lesen, dass das langlebige Kaon über 100 Male länger als das kurzlebige Kaon lebt und der Massenunterschied ca. die Hälfte von Γ_S ist.

Dies sind Eigenschaften, die das neutrale Kaon-System charakterisieren. Wenn man einen $|K^0\rangle$ - Strahl startet und nach einer gewissen Zeitspanne misst, so findet auch ein semileptonischer Zerfall der Teilchen in die Endprodukte π^\pm , e^\pm und ν -Neutrinos statt. Misst man jetzt die Zahl N^\pm der Zerfälle mit dem Auftreten von e^\pm , so erhält man den Ausdruck

$$\delta(t) = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} \approx \frac{\cos(\Delta mt)}{\cosh(\frac{\Delta\Gamma}{2}t)} \quad (1.57)$$

mit $N^+ \propto P(K^0)$, $N^- \propto P(\bar{K}^0)$ und damit die Möglichkeit, die Masse m zu bestimmen.

1.2.3 Matrix Beschreibung

Mit Hilfe der Matix Beschreibung, können wir CPT Überlegungen gut verstehen. Im von K^0 und \bar{K}^0 aufgespannten Hilbertraum wird der Hamilton Operator durch eine folgende Form beschrieben:

$$H \equiv \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21} & M_{22} - \frac{i}{2}\Gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle K^0 | H^{(0)} | K^0 \rangle & \langle K^0 | H^{(2)} | \bar{K}^0 \rangle \\ \langle \bar{K}^0 | H^{(2)} | K^0 \rangle & \langle \bar{K}^0 | H^{(0)} | \bar{K}^0 \rangle \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

wobei $H = H^{\Delta S=0} + H^{\Delta S=2}$ ist und $H^{(0)}$ den Anteil von H, der den Strangeness erhält, und $H^{(2)}$ den Anteil, der den Strangeness verletzt, bezeichnet. Nach dem allgemeingültigen CPT-Theorem verhalten sich Teilchen und Antiteilchen gleich, woraus man die Gleichheit der Diagonalelemente dieser Matrix folgern kann.

$$M_{11} = M_{22} := M_0 \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22} := \Gamma_0 \quad (1.59)$$

Verwendet man diese Beziehung und die Hermitizität der Matrizen, $M_{ij} = M_{ji}^*$, $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}^*$, dann erhält man

$$H \equiv \begin{pmatrix} M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^* & M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Um den Masseneigenzustand in Relation zu den Flavoureigenzuständen zu setzen, führen wir zwei komplexe Zahlen p und q ein, sodass, wenn wir z.B. die Massenkomponten mit K_L und K_S bezeichnen, folgende Beziehung haben:

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= p |K^0\rangle + q |\bar{K}^0\rangle \\ |K_S\rangle &= p |K^0\rangle - q |\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \quad (1.61)$$

mit der Normierung $|p|^2 + |q|^2 = 1$. Die Lösung des Eigenwertproblems ergibt Eigenvektoren, die zu

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{M_{12}^* - (i/2)\Gamma_{12}^*}{M_{12} - (i/2)\Gamma_{12}} \quad (1.62)$$

führen.

1.3 Die CP-Verletzung der Kaonen

1.3.1 Beschreibung der CP-Verletzung

Wäre nun die CP-Symmetrie der schwachen Wechselwirkung exakt erfüllt, dürften die K_L Kaonen nur in drei Pionen zerfallen. Es hat sich nun bei der Durchführung genau eines solchen Experiments gezeigt, dass mit der kleinen Wahrscheinlichkeit von etwa $3 \cdot 10^{-3}$ die langlebigen Kaonen doch in zwei Pionen zerfallen. Damit ist die CP-Symmetrie verletzt. Die heute gültigen Werte sind:

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma_L} = (2,03 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \quad (1.63)$$

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\Gamma_L} = (0,94 \pm 0,18) \cdot 10^{-3} \quad (1.64)$$

Einen besonders klaren Beweis für die CP-Verletzung findet man aus den Zerfällen

$$K_L \rightarrow \pi^\pm l^\mp \nu \quad (1.65)$$

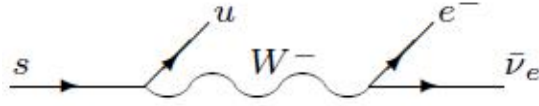


Abbildung 1.5: Semileptonische Zerfall

mit $l = e\mu$. Das strange Quark zerfällt schwach als Bestandteil von \bar{K}^0 . Wegen des Quarksinhalt haben das Kaon $K^0(\bar{s}d)$ und Antikaon $\bar{K}^0(s\bar{d})$ folgenden Zerfall

$$\begin{aligned} K^0(d\bar{s}) &\longrightarrow \pi^-(d\bar{u}) l^+ \nu_l, & \bar{s} &\longrightarrow \bar{u} l^+ \nu_l \\ \bar{K}^0(\bar{d}s) &\longrightarrow \pi^+(\bar{d}u) l^- \bar{\nu}_l, & s &\longrightarrow u l^- \bar{\nu}_l \end{aligned} \quad (1.66)$$

Bei dem semileptonischen Zerfall des K_L mißt man eine Asymmetrie zwischen der Entstehung von Teilchen und Antiteilchen. Falls K_L ein Eigenzustand des CP- Operator ist, müssen die totalen Raten für den l^- - und l^+ - Zerfall gleich sein: (also bei CP-Invarianz)

$$\Gamma(K_L \longrightarrow \pi^+ l^- \nu) = \Gamma(K_L \longrightarrow \pi^- l^+ \nu) \quad (1.67)$$

Experimentell findet man stattdessen:

$$\delta = \frac{\Gamma(K_L \longrightarrow \pi^- l^+ \nu) - \Gamma(K_L \longrightarrow \pi^+ l^- \nu)}{\Gamma(K_L \longrightarrow \pi^- l^+ \nu) + \Gamma(K_L \longrightarrow \pi^+ l^- \nu)} = (3.27 \pm 0.012) \cdot 10^{-3} \quad (1.68)$$

wobei δ die Ladungsasymmetrie ist und jeder Term in der Definition von δ gibt an, wie oft der angegebene Zerfall stattfindet. Um nun den Einfluss der CP- Verletzung in die obigen Überlegungen einzubinden, müssen die kurz- und langlebigen Zustände $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$ so definiert werden, dass sie Anteile beider CP- Eigenzustände $|K_1^0\rangle$ und $|K_2^0\rangle$ enthalten. Durch Diagonalisierung der Matrix (1.58) bekommen wir der folgende Massen Eigenzustand

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \{ |K_1^0\rangle + \epsilon |K_2^0\rangle \} \quad (1.69)$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \{ |K_2^0\rangle + \epsilon |K_1^0\rangle \} \quad (1.70)$$

mit der Parameter ϵ

$$\epsilon = \frac{\sqrt{M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}} - \sqrt{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}}{\sqrt{M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11}} + \sqrt{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}} = \frac{p-q}{p+q} \quad (1.71)$$

Durch Umformungen erhalten wir

$$|K_1^0\rangle = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{1-\epsilon^2} \{ |K_S\rangle - \epsilon |K_L\rangle \} \quad (1.72)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{1-\epsilon^2} \{ |K_L\rangle - \epsilon |K_S\rangle \}. \quad (1.73)$$

Allgemein könnte man noch ϵ für den kurz und langlebigen Zustand unterscheiden, aber die Gleichheit ist durch CPT-Invarianz bedingt, wobei T für die Zeitumkehr steht. Bis jetzt gibt es keine Anzeichen dafür, dass die Symmetrie gebrochen sein sollte, damit gilt in unserem Fall, wenn CP verletzt ist, ist auch T verletzt. Das neutrale Kaon-System ist ein sehr gutes System, um die CPT Symmetrie zu untersuchen. So erhalten wir für neutral Kaonen

$$|K^0\rangle = \frac{N}{2p} \left\{ |K_S\rangle + |K_L\rangle \right\} \quad (1.74)$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{N}{2q} \left\{ -|K_S\rangle + |K_L\rangle \right\} \quad (1.75)$$

mit $N = |p|^2 + |q|^2$ und $p = 1 + \epsilon$, $q = 1 - \epsilon$. K_S, K_L sind jene beiden physikalischen Zustände, welche mit $|\epsilon| \approx 10^{-3}$ CP verletzend zerfallen. Der Wert ϵ kann man experimentell durch Amplituden-Messung des Zerfallsverhältnisses bestimmen (siehe Ref. [22, 23, 24]).

1.3.2 Die Analyse des $K^0 \rightarrow 2\pi$ -Zerfall

Wir machen eine phänomenologische Analyse, in der wir die Wigner-Weisskopf Näherung anwenden und die CPT-Invarianz des Zerfalls $K^0 \rightarrow 2\pi$ annehmen [25]. Wir haben gesehen, dass K^0 und \bar{K}^0 durch schwache Wechselwirkung ineinander transformieren können. Ein Zustand als K^0 oder \bar{K}^0 wird sich im Laufe der Zeit in eine Superposition von zwei Zuständen entwickeln.

Da wir das zu diskutierende neutrale Kaon mit diesen zwei Zustände zusammen behandeln müssen, betrachten wir eine zweikomponentige Wellenfunktion

$$\Psi = \begin{pmatrix} a \\ \bar{a} \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

deren obere und untere Komponente die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Feststellung eines K^0 bzw. \bar{K}^0 ist. Die Zeitabhängigkeit von Ψ in Wigner-Weisskopf Näherung ist gegeben durch

$$i \frac{d\Psi}{dt} = H\Psi \quad (1.77)$$

wobei H i.a. eine beliebige 2×2 -Matrix ist. Wir wählen als die CPT invariante Form von H den Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} A & B/x \\ xB & A \end{pmatrix}, \quad (1.78)$$

mit komplexen Zahlen A, B und x . Die zwei normierten Eigenvektoren von H sind definiert durch

$$H\Phi = \lambda\Phi \quad (1.79)$$

Der entsprechenden Eigenwerten sind damit

$$\lambda_{1,2} = A \pm B. \quad (1.80)$$

Die Eigenwertgleichung ergibt

$$(H - \lambda_{1,2}\mathbf{1}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_{1,2} : \quad k_1 = \pm \frac{1}{x} k_2 \quad (1.81)$$

Mit $k_2 = x$ sind die Eigenzustände

$$\Phi_{1,2} = (1 + |x|^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm x \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

und ausgedrückt durch die einzelnen Komponenten K^0 und \bar{K}^0 erhalten wir als Eigenzustände von H

$$|K_S\rangle = [1 + |x|^2]^{-1/2} \{ |K^0\rangle + x | \bar{K}^0\rangle \} \quad (1.83)$$

$$|K_L\rangle = [1 + |x|^2]^{-1/2} \{ |K^0\rangle - x | \bar{K}^0\rangle \} \quad (1.84)$$

Beachten Sie, dass x die CP Verletzung, beschreibt. Wir können diesen Parametern mit dem CP Verletzungsparameter ϵ verknüpfen,

$$\epsilon = \frac{1 - x}{1 + x} \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \quad (1.85)$$

wenn wir die Gleichungen (1.83) und (1.84) mit den entsprechenden Gleichungen (1.69) und (1.70) von Kapitel 1.3.1 vergleichen.

Die Phase von x hat keine physikalische Bedeutung, weil sie abhängig von der Wahl der relativen Phasen der K^0 und \bar{K}^0 -Zustände ist.

Die starke Wechselwirkung, die Strangeness erhaltend ist, ist unfähig diese Phase zu bestimmen. Wenn alle Wechselwirkungen CP invariant sein würde, wäre eine natürliche Wahl diejenige, die alle Zerfallsamplituden reell macht und zwar in niedrigster Ordnung der schwachen Wechselwirkung. Wenn CP-Invarianz nicht anwendbar ist, wird eine solche Wahl i.a. nicht möglich sein. Jedoch kann man immer diese Phase auf solche Weise wählen, dass die K^0 und \bar{K}^0 Amplituden auf einem bestimmten Kanal die Voraussetzung der CP-Invarianz erfüllen.

CP-Verletzungsparameter	experimentelle Wert
δ	$(3.27 \pm 0.12) \cdot 10^{-3}$
$ \eta_{00} $	$(2.262 \pm 0.017) \cdot 10^{-3}$
$ \eta_{+-} $	$(2.276 \pm 0.017) \cdot 10^{-3}$
$ \frac{\eta_{00}}{\eta_{+-}} $	0.9936 ± 0.0014
$\text{Re}\{\frac{\epsilon'}{\epsilon}\}$	$(2.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$

Tabelle 1.3: Die experimentellen Parameter-Werte vom Zerfall des Masseneigenzustands in zwei Pionen

1.3.3 Die wichtigen Parameter für den Zerfall in zwei Pionen

Beginnen wir mit den Amplituden des Masseneigenzustands, und definieren wir die folgenden Größen η_{+-} und η_{00}

$$\begin{aligned}
\eta_{+-} &= \frac{\langle \pi^+ \pi^- | K_L \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | K_S \rangle} \\
&= \frac{\langle \pi^+ \pi^- | K_2 + \epsilon K_1 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 + \epsilon K_2 \rangle} \\
&= \frac{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 \rangle + \epsilon \langle \pi^+ \pi^- | K_2 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 \rangle + \epsilon \langle \pi^+ \pi^- | K_2 \rangle} \\
&= \epsilon \frac{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 \rangle + \epsilon \langle \pi^+ \pi^- | K_2 \rangle} + \frac{\langle \pi^+ \pi^- | K_2 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 \rangle + \epsilon \langle \pi^+ \pi^- | K_2 \rangle} \\
&= \epsilon + \underbrace{\frac{\langle \pi^+ \pi^- | K_2 \rangle}{\langle \pi^+ \pi^- | K_1 \rangle}}_{\equiv \epsilon'}
\end{aligned} \tag{1.86}$$

und

$$\eta_{00} = \frac{\langle \pi^0 \pi^0 | K_L \rangle}{\langle \pi^0 \pi^0 | K_S \rangle} \tag{1.87}$$

Die beiden zwei-Pion Zustände $|\pi^+ \pi^- \rangle$ und $|\pi^0 \pi^0 \rangle$ sind in einem s-Wellen Zustand. Aufgrund Bose Statistik sind die möglichen Werte für Isospin 0 und 2. Die Isospin Zerlegung der Zerfallsamplituden kann man mit Hilfe der Clebsch-Gordan Koeffizienten beschreiben

$$\begin{aligned}
A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ A_2 e^{i\delta_2} + \sqrt{2} A_0 e^{i\delta_0} \right\} \\
A(K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{2} A_2 e^{i\delta_2} - A_0 e^{i\delta_0} \right\}
\end{aligned} \tag{1.88}$$

wobei δ_0 und δ_2 die Isospin-Phasen der starken Wechselwirkung aufgrund $\pi\pi$ - Streuung sind und

$$A_0 = \langle \pi\pi, I = 0 | H_W | K^0 \rangle \quad A_2 = \langle \pi\pi, I = 2 | H_W | K^0 \rangle \tag{1.89}$$

sind die entsprechenden Zerfallsamplituden. Aus der (1.86) kann man folgende Gleichungen leicht einsehen

$$\eta_{+-} = \epsilon + \epsilon' \quad (1.90)$$

$$\eta_{00} = \epsilon - 2\epsilon'. \quad (1.91)$$

Der Parameter ϵ' ist ein Maß für die CP-Verletzung und ist gegeben durch

$$\epsilon' \approx \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i(\delta_2 - \delta_0)} \frac{\text{Im}(A_2)}{\text{Re}(A_0)} \quad (1.92)$$

Diese Relationen heißen, formale Bedingungen an die direkte CP-Verletzung: Es existieren zwei Amplituden A_0 und A_2 und eine relative Phase zwischen A_0 und A_2 . Wenn die komplexen Parameter η_{+-} und η_{00} identisch sind, würde es keinen Teil geben, der von der direkten Verletzung kommt, daher würde ϵ' völlig verschwinden. Im Experiment wird normalerweise das Verhältnis $\frac{\epsilon'}{\epsilon}$ gemessen und es bestätigt, dass ϵ' nicht Null ist. Die experimentellen Werte für die Parameter der CP-Verletzung sind in Tabelle 1.3 angegeben.

Es gibt im Wesentlichen zwei Theorien für die Ursache der CP-Verletzung, mit denen die CP Parameter berechnet werden können. Die erste ist das Superweak-Modell, die zweite das Standard Modell. Auf beide Modelle wollen wir im weiteren nicht näher eingehen.

1.4 Regeneration des K_S

Hier wollen wir zeigen, dass man K_S beliebig verschwinden lassen und wieder erzeugen kann. Dieses Regenerationsphänomen wird von der Differenz der Streuungsamplitude des Kaon und Anti-Kaon verursacht. Pais und Piccioni haben im Jahr 1955 [26] vorgeschlagen, dass das K_S schließlich wieder in dem Strahl entstehen würde, da die K^0 und \bar{K}^0 -Komponenten in K_L anwesend sind und sehr unterschiedlich mit der Materie wechselwirken.

Wie gehen wir dazu vor? K^0 werden durch hadronische Reaktionen erzeugt. Ein K^0 -Strahl besteht aus K_S und K_L . Wenn man ein K^0 erzeugt, dann wird dessen K_S -Komponente in zwei Pionen zerfallen und erst sehr viel später die noch weiterliegende K_L -Komponente in drei Pionen. Führt man zwischen diesen beiden Zerfällen eine Messung durch, dann findet man keine K_S Komponente mehr im weiterfliegenden Teilchen. Befinde sich nun zwischen den beide Zerfällen ein Materialblock. Den K_L Strahl schießen wir dann auf ein Target, vornehmlich "Regenerator" genannt. Vor dem Regenerator haben wir noch je 50% Anteile und somit

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle \} \quad (1.93)$$

Wenn wir f und \bar{f} die Amplituden der Streuung von K^0 und \bar{K}^0 auf die Atomkerne in die Materie bezeichnen, dann gilt $f \neq \bar{f}$. Die starke Wechselwirkung von K^0 und \bar{K}^0 im Regenerator behandelt die Komponenten verschieden:

$$|K^0\rangle \rightarrow f |K^0\rangle, \quad |\bar{K}^0\rangle = \bar{f} |\bar{K}^0\rangle \quad f, \bar{f} \in \mathbb{C} \quad (1.94)$$

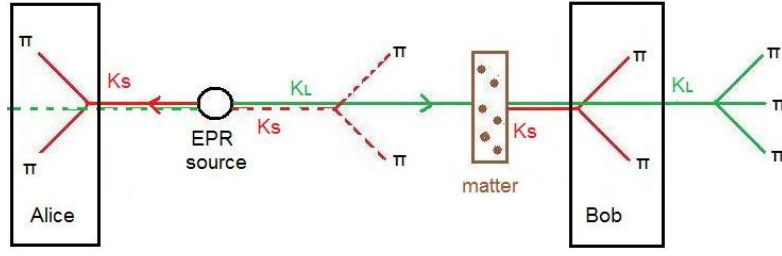


Abbildung 1.6: Regeneration des kurzlebigen Kaons

Sei ψ_{in} die Wellenfunktion des übrig gebliebenen K_L -Teilchens, welches in den Block hineinfliegt

$$|\psi_{in}\rangle = |K_L\rangle = \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.95)$$

so wird die auslaufende Wellenfunktion durch

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [f |K^0\rangle + \bar{f} |\bar{K}^0\rangle] \\ &= \frac{1}{2} [f \{|K_S\rangle + |K_L\rangle\} + \bar{f} \{-|K_S\rangle + |K_L\rangle\}] \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \{(f + \bar{f}) |K_L\rangle + (f - \bar{f}) |K_S\rangle\} \\ &= \frac{1}{2} (f + \bar{f}) \{|K_L\rangle + r |K_S\rangle\} \end{aligned} \quad (1.97)$$

beschrieben, wobei man $r = (f - \bar{f})/(f + \bar{f})$ als Regenerationsparameter bezeichnet und damit ist $r \neq 0$. Und wir sehen, dass die K_S Komponente nach dem Regenerator wieder da ist. Die starke Wechselwirkung hat also die Karten, die K^0 und die \bar{K}^0 Komponente neu gemischt [27].

1.4.1 Verhalten der neutralen Kaonen in Materie

Wir überlegen den Durchgang der neutralen Kaonen durch ein homogenes Medium mit der Dichte ν pro Volumeneinheit und mit den Streuamplituden f und \bar{f} für K^0 und \bar{K}^0 Mesonen. Die Ausbreitung der kohärenten Welle wird mit dem Brechungsindex ($n = k_{medium}/k_{free}$) beschrieben und daher bekommen wir den allgemeinen komplexen Brechungsindex

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi\nu}{k^2} f(0) \quad (1.98)$$

wobei $f(0)$ die Vorwärts-Streuamplitude für jede individuelle Streuung ist. Da der Strangeness Eigenzustand unterschiedliche Streuamplitude hat, wird der Brechungsindex in der Matrix Form geschrieben.

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi\nu}{k^2} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \bar{f} \end{pmatrix}. \quad (1.99)$$

Es gibt keine offdiagonalen Elementen für Wechselwirkungen, die Strangeness erhalten. Die Zeitentwicklung der inneren Wellenfunktion, die einen neutralen Kaonzustand beschreibt, ist in Materie gegeben durch die Gleichung

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} \quad (1.100)$$

wobei $x = x(\tau)$ durch den Kaonimpuls bestimmt ist. Dies kann man umformulieren

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Psi}{d\tau}\right)_{med} &= \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} + \frac{dx}{d\tau} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{free} + \frac{dx}{d\tau} \left\{ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{med} - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{free} \right\} \\ &= \left(\frac{d\Psi}{d\tau}\right)_{free} + \frac{dx}{d\tau} \left\{ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{med} - \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)_{free} \right\} \end{aligned} \quad (1.101)$$

wobei $\left(\frac{d\Psi}{d\tau}\right)_{free}$ der entsprechende Ausdruck im freien Raum ist. Nach der Theorie für kohärente Streuung können wir

$$\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)_{med} = ikn\Psi \quad (1.102)$$

setzen und wir berücksichtigen nur Terme zu niedrigster Ordnung in $(n^2 - 1)$.

Mit $\left|\frac{dx}{d\tau}\right| = \beta\gamma$ für die Geschwindigkeit des Kaons ($\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$) erhalten wir

$$\left(\frac{d\Psi}{d\tau}\right)_{med} = \left(\frac{d\Psi}{d\tau}\right)_{free} + i\beta\gamma \frac{2\pi\nu}{k} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \bar{f} \end{pmatrix} \Psi \quad (1.103)$$

Wenn wir Resultat (1.103) mit der Schrödinger Gleichung vergleichen und weiters $k = m_K\beta\gamma$ einsetzen, finden wir schließlich für den Hamiltonoperator

$$H_{med} = H - \frac{2\pi\nu}{m_K} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \bar{f} \end{pmatrix}. \quad (1.104)$$

Somit ergibt die Wirkung der Streuung ins Medium einen zusätzlichen Term zur Energie Matrix, aber nur für den diagonalen Term. Die Regeneration wirkt nicht auf den offdiagonalen.

1.4.2 Diagonalisierung der Hamiltonoperator des Kaonen

Analog zu der Abschnitt 1.3.2 können wir den Hamiltonoperator in der folgende Form schreiben

$$H_{med} = H - \frac{2\pi\nu}{m_K} \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \bar{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B/x \\ xB & \bar{A}' \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

mit $A' = A - \frac{2\pi\nu}{m_K}f$ und $\bar{A}' = A - \frac{2\pi\nu}{m_K}\bar{f}$, wobei m_K die Durchschnittsmasse von Kaonen ist. Wieder müssen wir die stationäre Schrödinger Gleichung lösen

$$\begin{aligned} \det(H_{med} - \lambda\mathbf{1}) &= 0 \\ \longrightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{A' + \bar{A}'}{2} \pm \sqrt{\frac{(A' - \bar{A}')^2}{4} + B^2} \end{aligned} \quad (1.106)$$

Weil wir die Differenz der Vorwärts-Streuamplitude klein - ungefähr 10^{-2} - annehmen, können wir die quadratische Wurzel durch B approximiere, wir bekommen die folgende zwei Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} \approx A \pm B - \frac{\pi\nu}{m_K} (f + \bar{f}) \quad (1.107)$$

Die Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} (H_{med} - \lambda_{1,2}\mathbb{1}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \longrightarrow \lambda_{1,2} : \frac{k_2}{k_1} &\doteq -x \left(\pm 1 + \frac{2\pi\nu}{m_K} \frac{f - \bar{f}}{2B} \right) = -x(\pm 1 + 2\rho) \end{aligned} \quad (1.108)$$

und mit der Formulierung $k_1 = 1$ finden wir die Eigenzustände

$$|K_S^R\rangle \approx |K^0\rangle - x(1 + 2\rho) |\bar{K}^0\rangle \quad (1.109)$$

$$|K_L^R\rangle \approx |K^0\rangle + x(1 - 2\rho) |\bar{K}^0\rangle \quad (1.110)$$

Wir können diese Zustände in der $K_L K_S$ Basis schreiben

$$|K_S^R\rangle \approx |K_S\rangle - \rho |K_L\rangle \quad (1.111)$$

$$|K_L^R\rangle \approx |K_L\rangle + \rho |K_S\rangle \quad (1.112)$$

mit der Regenerationsparameter $\rho = \frac{\pi\nu(f - \bar{f})}{m_K(\lambda_L - \lambda_S)}$, wobei mit

$$\lambda_S = m_S - i\frac{\Gamma_S}{2} = M_0 - i\frac{\Gamma_0}{2} - \sqrt{(M_{12} - i\frac{\Gamma_{12}}{2}) \cdot (M_{12}^* - i\frac{\Gamma_{12}^*}{2})} \quad (1.113)$$

$$\lambda_L = m_L - i\frac{\Gamma_L}{2} = M_0 - i\frac{\Gamma_0}{2} + \sqrt{(M_{12} - i\frac{\Gamma_{12}}{2}) \cdot (M_{12}^* - i\frac{\Gamma_{12}^*}{2})} \quad (1.114)$$

$\lambda_L - \lambda_S = B$ ist. Beachten Sie hier, dass der Regenerationseffekt nicht abhängig von dem Parameter der CP Verletzung ist, d.h. x , bzw. ϵ .

1.4.3 Zeitentwicklung in der Materie

Die Eigenzustände sind in der Materie gegeben durch

$$|K_S^R\rangle \approx |K_S\rangle - \rho |K_L\rangle \quad (1.115)$$

$$|K_L^R\rangle \approx |K_L\rangle + \rho |K_S\rangle \quad (1.116)$$

und umgekehrt sind die Masseneigenzustände ohne Materie gegeben durch

$$|K_S\rangle \approx |K_S^R\rangle + \rho |K_L^R\rangle \quad (1.117)$$

$$|K_L\rangle \approx |K_L^R\rangle - \rho |K_S^R\rangle. \quad (1.118)$$

Die zeitliche Entwicklung ist in der Materie für den kurzlebigen Zustand durch $\lambda_S^R = \lambda_S - \frac{\pi\nu}{m_K} (f + \bar{f})$ und für langlebigen durch $\lambda_L^R = \lambda_L - \frac{\pi\nu}{m_K} (f + \bar{f})$ gegeben. Wenn ein

Strahl des kurzlebigen Zustands eine dünne Platte der Materie durchquert, erhalten wir den Regenerationseffekt für die kurze Zeit δt in der Materie mit $r = i\delta t \frac{\pi\nu}{2m_K} (f - \bar{f})$, wobei $\lambda_L^R - \lambda_S^R = \lambda_L - \lambda_S$ ist.

$$\begin{aligned}
|K_S\rangle &\rightarrow |K_S^R\rangle + \rho |K_L^R\rangle \\
&\xrightarrow{\text{materie}} e^{-i\lambda_S^R\delta t} |K_S^R\rangle + \rho e^{-i\lambda_L^R\delta t} |K_L^R\rangle \\
&\approx e^{-i\lambda_S^R\delta t} \left\{ |K_S\rangle + \rho \left(-1 + e^{-i(\lambda_L^R - \lambda_S^R)\delta t} \right) |K_L\rangle \right\} \\
&\approx e^{-i\lambda_S^R\delta t} \left\{ |K_S\rangle - i\rho(\lambda_L - \lambda_S)\delta t |K_L\rangle \right\} \\
&\approx e^{-i\lambda_S^R\delta t} \left\{ |K_S\rangle - r |K_L\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{1.119}$$

Nach dem Regenerator bekommen wir für einen Anfangsstrahl von K_L und K_S die folgende Superpositionen

$$\begin{aligned}
|K_S\rangle^{in} &\longrightarrow |\psi_S\rangle^{out} \approx e^{-i\lambda_S^R\delta t} \left\{ |K_S\rangle - r |K_L\rangle \right\} \\
|K_L\rangle^{in} &\longrightarrow |\psi_L\rangle^{out} \approx e^{-i\lambda_L^R\delta t} \left\{ |K_L\rangle - r |K_S\rangle \right\}
\end{aligned} \tag{1.120}$$

2 Verschränkte Quantensysteme

2.1 Verschränkung und Hidden-Variable Theorie

Der Begriff der Verschränkung stammt von Erwin Schrödinger aus dem Jahre 1935 [28], als er ein Quantensystem mit weit voneinander entfernten Teilsystemen betrachtet hat. Er definierte ursprünglich als verschränkten Zustand, wenn zwar das Gesamtsystem in einem wohldefinierten Zustand verweilt, nicht aber die einzelnen Teilsysteme. Betrachtet man beispielsweise zwei Teilchen mit Spin oder alternativ zwei polarisierte Photonen, dann finden sich insgesamt die vier Produktzustände $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\downarrow\rangle$, welche jeweils Elemente des entsprechenden Tensorraumes $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ sind. Sei etwa $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dann wäre $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0, 0, 0)$ gegeben. Wenn sich ein System über einem solchen Produktzustand beschreiben lässt, dann sind die einzelnen Teilsysteme sehr wohl definiert.

Im Falle eines verschränkten Systems ist dies nicht mehr gültig. Verschränkte Zustände sind definiert als *nicht separable Zustände*, das heißt, dass man den Gesamtzustand zweier Teilchen $|\psi\rangle_{12}$ nicht als Tensorprodukt aus zwei Einteilchen-Zuständen $|\psi\rangle_1$ und $|\psi\rangle_2$ schreiben kann:

$$|\psi\rangle_{12} \neq |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2. \quad (2.1)$$

Prominentestes Beispiel von verschränkten Zuständen sind die *Bell-Zustände*

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right) & |\varphi\rangle_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle \right) \\ |\psi\rangle_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right) & |\varphi\rangle_- &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Alle möglichen Zustände eines Systems sind entweder separabel oder verschränkt, wobei die separablen Zustände im Hilbertraum stets eine konvexe Menge innerhalb der verschränkten Zustände bilden. Liegt etwa ein System $|\psi\rangle_-$ vor, dann wird entweder A $|\uparrow\rangle$ und B $|\downarrow\rangle$ messen oder A $|\downarrow\rangle$ und B $|\uparrow\rangle$. Es finden sich also insgesamt zwei Möglichkeiten, von denen jeweils eine mit der Wahrscheinlichkeit von 50 % eintreten wird. Die beiden Teilsysteme befinden sich demnach definitiv nicht in einem wohldefinierten Zustand. Trotz dieser Unbestimmtheit weißt man jedoch, dass die Messungen nicht unabhängig voneinander sind, sondern eine Korrelation zwischen ihnen besteht. Dies führt auf das Konzept der Nichtlokalität und hat wichtige Auswirkungen auf die Struktur einer Theorie.

2.1.1 Das EPR-Paradoxon

Im Jahre 1935 [2] veröffentlichte Einstein dann mit Hilfe seiner beiden Assistenten Podolsky und Rosen einen Artikel, welcher das später nach Einstein, Podolsky und Rosen benannte Paradoxon beschreibt. In diesem Artikel definieren sich die Autoren zunächst die Begriffe physikalische Wirklichkeit, Vollständigkeit, Lokalität und Kausalität, um an einem Gedankenexperiment zu zeigen, dass die Quantenmechanik zu einem Widerspruch führt. In der Argumentation des Aufsatzes gehen im Wesentlichen drei zentrale Annahmen über eine physikalische Theorie ein:

- **Vollständigkeit:** Eine vollständige physikalische Theorie muß für jedes Element der physikalischen Realität ein entsprechendes theoretisches Gegenstück (Konzept, Begriff, etc.) haben.
- **Realität:** Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit vorhersagen, ohne ein System dabei in irgendeiner Weise zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Wirklichkeit, das dieser physikalischen Größe entspricht.
- **Lokalität:** Wenn zwei Systeme nicht mehr miteinander wechselwirken (z.B. weil sie weit voneinander entfernt sind), dann kann keine wirkliche Veränderung am zweiten System als Folge eines Eingriffs in das erste System auftreten.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Quantenmechanik unvollständig. Wir machen hier eine kurze mathematische Erklärung für die oben gegebene Argumentation. Seien gegeben zwei Teilchen, die bis zu einem Zeitpunkt wechselwirken, und danach getrennt werden. Wenn wir die Zustände der Teilchen vorher gekannt haben, können wir mit Hilfe der Quantentheorie den gemeinsamen Zustand der beiden Teilchen nach der Wechselwirkung berechnen. Dieser Zustand sei

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp. \quad (2.3)$$

Er kann in Eigenfunktionen $u_p = e^{(2\pi i/h)px_1}$ von $P_1 = (h/2\pi i)\partial/\partial x_1$ ausgedrückt werden als

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \quad (2.4)$$

wobei die $\psi_p(x_2)$ gleichzeitig Eigenfunktionen von P_2 zum Eigenwert $-p$ sind. Man kann den Zustand (2.3) auch in Eigenfunktionen $v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$ von $Q_1 = x_1$ entwickeln.

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx \quad (2.5)$$

mit $\varphi_x(x_2) = h\delta(x - x_2 + x_0)$ als Koeffizienten. Diese Koeffizienten sind aber wiederum Eigenfunktionen von $Q_2 = x_2$ zum Eigenwert $x + x_0$.

Nach den Regeln der Quantentheorie legen wir durch eine Messung von Teilchen 1 fest, welche Eigenzustände nach der Messung vorliegen. Wir könnten also, ohne das Teilchen

2 zu beeinflussen, Eigenzustände zweier nicht kommutierender Operatoren messen und jeweils die Meßergebnisse mit Sicherheit voraussagen. Damit hätten wir zwei simultane Elemente der Realität, was in der Quantentheorie für Messungen nicht kommutierender Operatoren nicht erlaubt ist. Damit sagen die Autoren, dass die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung der Realität ist.

Niels Bohr versuchte in einem Gegenartikel darzulegen, dass die Quantenmechanik sehr wohl vollständig ist. Laut seiner Theorie existiere keinerlei physikalische Realität vor der Messung, sie werde erst bei einer Messung erzeugt. Dies führte natürlich unweigerlich auf die berühmte Frage: "Ist der Mond da, wenn niemand hinschaut?" Zur Lösung dieses Problem wäre eine Theorie mit verborgenen Parametern, kurz *Hidden Variable Theory* notwendig.

2.1.2 Theorie der verborgenen Variablen

Es legt der für eine realistische Interpretation unbefriedigende statistische Charakter der Quantenmechanik nahe, die Möglichkeiten einer der Quantenmechanik unterliegenden Theorie verborgener Parameter zu untersuchen. No-Go-Theoreme, die diese Möglichkeit drastisch einschränken, wurden im Laufe der Zeit entwickelt.

Bohm 1952: QM-Theorie *nicht-lokaler* verborgener Parameter [29]

Gleason 1957: Im Hilbert Raum eines Quantensystems, der Dimension größer als zwei, gilt die Additivität der Erwartungswerte von kommutierenden Operatoren *nicht* für dispersionsfreie Zustände [30] (Siehe auch Bell, Ref. [31])

Bell 1964: Keine QM-Theorien mit *lokalen* verborgenen Parameter [3]

Kochen-Specker 1967: QM besitzt die Eigenschaft der Kontextualität [32]

GHZ 1989: Es gibt keine definiten Eigenschaften in der QM [33]

Wir können mathematisch die verborgenen Parameter durch ein Symbol λ beschreiben. Für ein bestimmtes λ sind die Werte aller Observablen reellwertige Funktionen über dem Bereich Λ der möglichen Werte der verborgenen Variablen. Sei Q eine Observable für einen Quantenzustand $|\psi\rangle$. Den Wert von Q schreiben wir dann als $Q_\psi(\lambda)$. Für unseren Quantenzustand muss auch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho_\psi(\lambda)$ der verborgenen Variablen existieren. Mit Hilfe dieser Verteilung können wir den Erwartungswert einer Observablen für einen Quantenzustand berechnen.

$$\langle Q \rangle_\psi = \int_{\Lambda} Q_\psi(\lambda) \rho_\psi(\lambda) d\lambda \quad (2.6)$$

Verborgene lokale Parameter in zwei Dimensionen

In einem zweidimensionalen Raum, z.B. dem Spin-Raum eines einzelnen Spin-1/2-Teilchens, wird ein beliebiger linearer Operator A durch eine 2×2 -Matrix repräsentiert. Er ist also darstellbar als $a_0 \mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$. Für einen hermiteschen Operatoren A sind a_0 und \vec{a} reell und



Abbildung 2.1: Schematische Darstellung eines Bell-Gedankenexperiments

die Eigenwerte sind $a_0 \pm \|\vec{a}\|$. Für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ existiert eine Richtung \vec{n} , so dass \vec{v} Eigenvektor des Operators $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$ zum Eigenwert $+1$ ist, d.h. $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) |\vec{n}, +\rangle = |\vec{n}, +\rangle$ mit der Schreibweise $\vec{v} = |\vec{n}, +\rangle$. Für den quantenmechanischen Erwartungswert von A ergibt sich damit

$$\langle A \rangle = \langle \vec{n}, + | A | \vec{n}, + \rangle = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (2.7)$$

und da A nur zwei Eigenwerte besitzt, ist dadurch die Verteilung der Meßwerte festgelegt. Wir nehmen an, dass jedem durch $|\vec{n}, +\rangle$ beschriebenen System ein Einheitsvektor \vec{m} als verborgener Parameter zugeordnet ist und sich die Meßwerte von A durch die Regeln [31]

$$\begin{aligned} v_n(A) &= a_0 + \|\vec{a}\|, & (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} &\geq 0 \\ v_n(A) &= a_0 - \|\vec{a}\|, & (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} &< 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ergeben, dann folgt für den Erwartungswert

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\|\vec{m}\|=1} v_n(A) = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (2.9)$$

d.h. die Verteilung aufgrund des verborgenen Parameters und die quantenmechanische Verteilung sind identisch.

Man unterscheidet die Theorien zwischen lokalen und nichtlokalen verborgenen Variablen. Im folgenden werden die Grundlagen beschrieben, wie zwischen der Gültigkeit von lokal realistischen Theorien und der Quantenmechanik unterschieden werden kann.

2.2 Das Bellsche Theorem

In diesem Abschnitt wird das Bellsche Theorem vorgestellt und die erste Form einer Aussage über die Unverträglichkeit von Quantenmechanik und Theorien verborgener lokaler Parameter hergeleitet. In der historischen Arbeit von Bell [3] bezüglich Einstein-Podolsky-Rosen Paradox fand er einen Beweis, dass Theorien mit lokalen verborgenen Variablen nicht in jeder Hinsicht die quantentheoretischen Vorhersagen für gewisse Systeme reproduzieren können.

Das ist schon im wesentlichen das Bellsche Theorem, zusammenfassend können wir folgendes sagen:

Bellsches Theorem: *Lokal realistische Theorien mit verborgenen Parameter können nicht alle Vorhersagen der Quantenmechanik reproduzieren.*

Dazu wir betrachten ein System (siehe Abbildung 2.1) bestehend aus zwei Spin-1/2 Teilchen, die im Singlett-Zustand

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right\} \quad (2.10)$$

erzeugt wurden, mit $|\pm\rangle$ ist ein Zustand mit Spinkomponente $\pm\hbar/2$ in z-Richtung beschrieben. Wir können am Teilchen 1 den Spin $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})_1$ und $(\vec{\sigma} \cdot \vec{b})_2$ am Teilchen 2 in Richtung \vec{a} und \vec{b} messen. Die Eigenwerte dieser Operatoren sind ± 1 . Die Matrixelemente von $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})$ in der Basis $|\pm\rangle$ werden beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Berechnen wir damit den Erwartungswert E für das Produkt der beiden Spinnmessungen.

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{b} | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \langle + | \vec{\sigma} \cdot \vec{a} | + \rangle \langle - | \vec{\sigma} \cdot \vec{b} | - \rangle - \langle + | \vec{\sigma} \cdot \vec{a} | - \rangle \langle - | \vec{\sigma} \cdot \vec{b} | + \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle - | \vec{\sigma} \cdot \vec{a} | + \rangle \langle + | \vec{\sigma} \cdot \vec{b} | - \rangle + \langle - | \vec{\sigma} \cdot \vec{a} | - \rangle \langle + | \vec{\sigma} \cdot \vec{b} | + \rangle \right\} \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{b} = E(a, b) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jetzt führen wir durch den Parameter λ eine Vervollständigung der Quantentheorie ein. Das Ergebnis A einer Messung der quantenmechanischen Observablen $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})_1$ am Teilchen 1 wird nun durch a und λ bestimmt. Analog ist das Meßergebnis B am Teilchen 2 eine Funktion von b und λ . Dann gilt

$$A(a, \lambda) = \pm 1, \quad B(b, \lambda) = \pm 1 \quad (2.13)$$

Die entscheidende Annahme - *Bell'sche Lokalitätshypothese* -, wie schon oben angedeutet, ist, dass das Ergebnis B für Teilchen 2 nicht von a, der Analyserichtung für Teilchen 1, abhängt, und auch nicht umgekehrt das Ergebnis A für Teilchen 1 von b. Wir nehmen weiters für λ eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\lambda)$ an. $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$. Damit erhalten wir für den Erwartungswert $E(a, b)$

$$E(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) \quad (2.14)$$

Dann müssen einige offensichtliche Bedingungen erfüllt sein, wenn der quantentheoretische Erwartungswert E reproduziert werden soll,

$$\begin{aligned} E(a, a) &= -E(a, -a) = -1 \\ E(a, a) &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nun kann man aus den obigen Annahmen einen Widerspruch zum quantentheoretischen Ergebnis ableiten. Der Ausdruck (2.14) kann nicht kleiner als -1 werden. Er kann nur dann -1 sein, wenn $a = b$ und

$$A(a, \lambda) = -B(a, \lambda). \quad (2.16)$$

Damit können wir den Ausdruck (2.14) zur nächsten Gleichung vereinfachen,

$$E(a, b) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) \quad (2.17)$$

Wenn \vec{c} ein weiterer Einheitsvektor ist, dann gilt

$$\begin{aligned} E(a, b) - E(a, c) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) \{A(a, \lambda)A(b, \lambda) - A(a, \lambda)A(c, \lambda)\} \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) \{A(b, \lambda)A(c, \lambda) - 1\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} |E(a, b) - E(a, c)| &= \left| \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) \{A(b, \lambda)A(c, \lambda) - 1\} \right| \\ &\leq \int d\lambda |\rho(\lambda) A(a, \lambda) A(b, \lambda) \{A(b, \lambda)A(c, \lambda) - 1\}| \end{aligned} \quad (2.19)$$

Betrachtet man die Beträge der Ausdrücke, so folgt für alle Richtungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ die Bellsche Ungleichung

$$|E(a, b) - E(a, c)| \leq 1 + E(b, c) \quad (2.20)$$

Diese Ungleichung gibt uns die erste Form einer mathematischen Bedingung an jene lokal realistischen Theorien, welche den obengenannten Bedingungen genügen.

Wir machen jetzt einen Vergleich mit quantenmechanischen Resultaten und zeigen, dass die Quantentheorie diese Bellsche Ungleichung nicht erfüllt.

Sei eine Richtung \vec{n} mit den Winkeln $\varphi \in [0; 2\pi)$ und $\vartheta \in [0; \pi]$ gegeben, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})$ der zugeordnete Spin-Operator mit den Eigenzuständen $|\vec{n}, +\rangle$ und $|\vec{n}, -\rangle$, d.h.

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) |\vec{n}, +\rangle &= + |\vec{n}, +\rangle \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) |\vec{n}, -\rangle &= - |\vec{n}, -\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Transformation in die Basis der Eigenzustände $|+\rangle$ und $|-\rangle$ des Spin-Operators der \vec{e}_z -Richtung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} |\vec{n}, +\rangle &= + \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle \\ |\vec{n}, -\rangle &= - \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Daraus folgt für den Singlett Zustand bzgl \vec{n} :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\vec{n}, +\rangle_1 |\vec{n}, -\rangle_2 - |\vec{n}, -\rangle_1 |\vec{n}, +\rangle_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 \right\} \quad (2.23)$$

d.h. der Singlett-Zustand ist rotationsinvariant und damit auch nicht in ein Produkt von Einteilchenzuständen zerlegbar, also verschränkt. Im folgenden seien $\vec{b} = \vec{e}_z$ und \vec{a} habe den Azimutalwinkel $\varphi = 0$ und den Polarwinkel $\vartheta \in [0; \pi]$. Mit (2.22)

$$\begin{aligned} |\vec{a}, +\rangle &= +\cos\frac{\vartheta}{2} |\vec{b}, +\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2} |\vec{b}, -\rangle \\ |\vec{a}, -\rangle &= -\sin\frac{\vartheta}{2} |\vec{b}, +\rangle + \cos\frac{\vartheta}{2} |\vec{b}, -\rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{Singlett}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\vec{a}, +\rangle_1 |\vec{a}, -\rangle_2 - |\vec{a}, -\rangle_1 |\vec{a}, +\rangle_2 \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\sin\frac{\vartheta}{2} |\vec{a}, +\rangle_1 |\vec{b}, +\rangle_2 + \cos\frac{\vartheta}{2} |\vec{a}, +\rangle_1 |\vec{b}, -\rangle_2 \right. \\ &\quad \left. - \cos\frac{\vartheta}{2} |\vec{a}, -\rangle_1 |\vec{b}, +\rangle_2 - \sin\frac{\vartheta}{2} |\vec{a}, -\rangle_1 |\vec{b}, -\rangle_2 \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Der Erwartungswert $E(\vec{a}, \vec{b})$ ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) &= P_{++} - P_{+-} - P_{-+} + P_{--} \\ &= \sin^2\frac{\vartheta}{2} - \cos^2\frac{\vartheta}{2} \\ &= -\cos\vartheta = -\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wobei $P_{++}, P_{+-}, P_{-+}, P_{--}$ die Projektionsoperatoren auf die Zustände $|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle$ bedeuten. Wählt man nun beispielweise \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} koplanar mit $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$ und $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2\pi}{3}$, so gilt nach Bellsche Ungleichung

$$\underbrace{\left| -\cos\frac{\pi}{3} \right|}_{=-\frac{1}{2}} + \underbrace{\left| \cos\frac{2\pi}{3} \right|}_{=-\frac{1}{2}} \leq 1 - \underbrace{\left| \cos\frac{\pi}{3} \right|}_{=\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2} \quad (2.27)$$

was ein Widerspruch ist. Die Ungleichung ist maximal verletzt.

2.2.1 Die CHSH Ungleichung

Clauser, Horne, Shimony und Holt [4] haben eine viel besser an die Realität angepasste Formulierung der Ungleichung gefunden (siehe auch [34]). Es gibt zwei wichtige Unterschiede zum ursprünglichen Ansatz. Für den ersten Unterschied wird nicht mehr gefordert, dass $P(a, b) = -1$ ist, eine Bedingung, die wesentlichen Anteil am ursprünglichen Beweis hat.

Der zweite Unterschied ist, dass die Meßvorrichtungen für die zwei Teilchen nicht mehr perfekt sein müssen, sondern auch Teilchen auslassen dürfen. Diese ausgelassenen Messungen werden als Null Ergebnisse interpretiert. Daraus ergeben sich gemittelte

Meßergebnisse A und B und für die gilt $|A|, |B| \leq 1$. Bei CHSH wird diese Tatsache in ihrer Beziehung so berücksichtigt, dass die Korrelationen $E(a, b)$ zu parallelen oder orthogonalen Analysatoren für die beiden Teilchen nicht ideal (± 1) sein müssen, sondern auch Fehler zugelassen werden. Die folgende Gleichheit gilt, wenn a' und b' alternative Einstellungen der beiden Apparate sind

$$\begin{aligned} E(a, b) - E(a, b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)B(b, \lambda) [1 \pm A(a', \lambda)B(b', \lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)B(b', \lambda) [1 \pm A(a', \lambda)B(b, \lambda)] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Daraus ergibt sich mit den obigen Beschränkungen für A und B

$$\begin{aligned} |E(a, b) - E(a, b')| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm A(a', \lambda)B(b', \lambda)] \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 \pm A(a', \lambda)B(b, \lambda)] \end{aligned} \quad (2.29)$$

oder

$$|E(a, b) - E(a, b')| \leq 2 \pm [E(a', b') + E(a', b)] \quad (2.30)$$

Die Zeichen für den Absolutbetrag auf der rechten Seite konnten weggelassen werden, weil es sich immer um positive Größen handelt. Eine der bekanntesten Formen der Bellschen Ungleichung ergibt sich aus dem obigen Ausdruck.

$$S(a, b, a', b') = |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)| \leq 2 \quad (2.31)$$

2.2.2 Die Wigner-Ungleichung

Ausgehend von der Bellschen Ungleichung wurde von Wigner [6] eine Ungleichung für Wahrscheinlichkeiten formuliert. Dazu hat er ein Zweiteilchensystem betrachtet und drei möglichen Messungen an jedem einzelnen Teilchen. Die zwei entscheidenden Annahmen zur Herleitung waren die Lokalität oder besser gesagt Nichtkontextualität¹ der Messungen an den beiden Teilen des Systems, und die perfekte Antikorrelation bei gleichartigen Messungen. Aus der originalen Bell Ungleichung (2.20) mit dem Erwartungswert (mit $\sum P = 1$)

$$\begin{aligned} E(a, b) &= P(\uparrow a, \uparrow b) + P(\downarrow a, \downarrow b) - P(\uparrow a, \downarrow b) - P(\downarrow a, \uparrow b) \\ &= 2P(\uparrow a, \uparrow b) - 2P(\uparrow a, \downarrow b) \\ &= -1 + 4P(\uparrow a, \uparrow b) \end{aligned} \quad (2.32)$$

kommen wir gleich zu der Version von Wigner für die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\uparrow a, \uparrow b) \leq P(\uparrow a, \uparrow c) + P(\uparrow c, \uparrow b) \quad (2.33)$$

¹Nichtkontextualität bedeutet, daß das einzelne Meßergebnis, das von dem verborgenen Parameter bestimmt wird, nicht vom experimentellen Kontext abhängt. Den experimentellen Kontext bestimmen hier jene Arten von Messungen, die am anderen Teil des Gesamtsystems durchgeführt werden könnten.

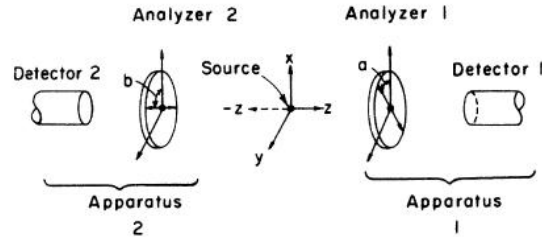


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung eines Bell-Experiments mit absorptiven Analysatoren

2.2.3 Die CH-Ungleichung

Wir werden hier noch eine Ungleichung angeben, welche von Clauser und Horne [5] gefunden wurde. Wir brauchen diese Ungleichung für den Test der Bell Ungleichung mit neutralen Kaonen. Diese Ungleichung gilt nicht mit Erwartungswerten, sondern nur mit Wahrscheinlichkeiten und eignet sich dadurch besser für Experimente, die mit absorptiven Analysatoren aufgebaut werden. Wir sehen in Abbildung 2.2 das Schema eines solchen Experiments.

Die Zweiteilchenquelle emittiert N Teilchenpaare während einer gewissen Zeit mit einer fixen Einstellung der Parameter a und b . $N_a(a)$ und $N_b(b)$ ist die Zahl der Teilchen, die in derselben Zeit in Detektor A bzw. im Detektor B registriert werden. Mit $N_{AB}(a, b)$ bezeichnen wir die Anzahl der simultanen Ereignisse in beiden Detektoren. Die relativen Ensemble-Wahrscheinlichkeiten sind dann

$$p_A(a) = N_A(a)/N \quad p_B(b) = N_B(b)/N \quad p_{AB}(a, b) = N_{AB}(a, b)/N \quad (2.34)$$

Wir nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeiten durch einen verborgenen Parameter λ bestimmt werden und es gilt $\int d\lambda \rho(\lambda) = 1$. Dann sind die oben beschriebenen Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_A(a) &= \int d\lambda \rho(\lambda) p_A(\lambda, a) \\ p_B(b) &= \int d\lambda \rho(\lambda) p_B(\lambda, B) \\ p_{AB}(a, b) &= \int d\lambda \rho(\lambda) p_{AB}(\lambda, a, b) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Jetzt konzentrieren wir uns auf den Fall, in welchem die Koinzidenzwahrscheinlichkeit faktorisiert, also $p_{AB}(\lambda, a, b) = p_A(\lambda, a)p_B(\lambda, b)$. Diese Bedingung ist eine Form der Lokalitätsannahme, welche die Unabhängigkeit der beiden Messungen fordert. Nun betrachten wir zusätzliche Orientierungen a' und b' der Analysatoren A und B. Damit alle Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, müssen wir noch fordern, dass

$$0 \leq p_A(\lambda, *) \leq 1, \quad 0 \leq p_B(\lambda, *) \leq 1 \quad (2.36)$$

Wir können nun aus diesen elementaren Eigenschaften rein algebraisch eine Ungleichung herleiten. Für beliebige Zahlen $0 \leq x_1, x_2 \leq X, 0 \leq y_1, y_2 \leq Y$ gilt die Ungleichung

$$-XY \leq x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - Yx_2 - Xy_1 = S \leq 0 \quad (2.37)$$

Wir beweisen die obere Grenze in zwei Fällen

$$\begin{aligned} x_1 \geq x_2 &\implies S = (x_1 - X)y_1 + (y_1 - Y)x_2 + (x_2 - x_1) \leq 0 \\ x_1 \geq x_2 &\implies S = x_1(y_1 - y_2) + (x_2 - X)y_1 + x_2(y_2 - Y) \leq \\ &\leq x_1(y_1 - y_2) + (x_2 - X)y_1 + x_1(y_2 - Y) = \\ &= (x_2 - X)y_1 + x_1(y_1 - Y) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die untere Grenze wird in drei Fällen bewiesen

$$\begin{aligned} x_2 \geq x_1 &\implies S + XY = (X - x_2)(Y - y_1) + x_1y_1 + (x_2 - x_1)y_2 \geq 0 \\ y_1 \geq y_2 &\implies S + XY = (X - x_2)(Y - y_1) + x_2y_2 + x_1(y_1 - y_2) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

$x_2 < x_1$ und $y_1 < y_2 \implies S + XY = (X - x_2)(Y - y_1) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_1) + x_2y_1 \geq 0$
weil $(X - x_2) \geq (x_1 - x_2) \geq 0$ und $(Y - y_1) \geq (y_2 - y_1) \geq 0$. Wir können die allgemeine Ungleichung auch auf unsere Wahrscheinlichkeiten anwenden, weil die Beschränkungen (2.36) für diese gelten.

$$\begin{aligned} -1 &\leq p_A(\lambda, a)p_B(\lambda, b) - p_A(\lambda, a)p_B(\lambda, b') + \\ &+ p_A(\lambda, a')p_B(\lambda, b) + p_A(\lambda, a')p_B(\lambda, b') - \\ &- p_A(\lambda, a') - p_B(\lambda, b) \leq 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die gesamte Ungleichung integrieren wir nun über $\rho(\lambda)d\lambda$ und erhalten die Clauser-Horne Ungleichung

$$-1 \leq p_{AB}(a, b) - p_{AB}(a, b') + p_{AB}(a', b) + p_{AB}(a', b') - p_A(a') - p_B(b) \leq 0 \quad (2.41)$$

Die Quantentheorie verletzt auch diese Ungleichung.

2.2.4 Die Eberhard Ungleichung

Zum Schluß besprechen wir noch eine Ungleichung, die Eberhard abgeleitet hat, die auch für Detektoreffizienzen unter $2(\sqrt{2} - 1) \approx 82.8\%$ gilt und die geeignet ist das Loophole der Detektoreffizienz zu schließen. Wir werden diese Ungleichung im folgenden auch bei Kaonen anwenden.

Wir nehmen an, dass Anfangszustand als Superposition von zwei Photonen A und B präpariert ist, mit korrelierten Polarisierungsebenen, der eine Zustand sei als $|HV\rangle$ definiert, das heißt A horizontal polarisiert, B vertikal, der andere Zustand $|VH\rangle$.

Für beide Photonen werden die Polarisationsmessungen mit Nicol Prismen durchgeführt und zwar so, dass der ordentliche Strahl die horizontalen Photon beinhaltet und der außerordentliche Strahl die vertikal polarisierten. Vor jedem Nicol Prisma ist eine

Anordnung aufgestellt, die die Polarisationsebene der Photonen dreht. Den Drehwinkel bei A nennen wir α und bei B β .

Für eine Bell Ungleichung benötigen wir die Erwartungswerte von bestimmten Größen, die in vier experimentellen Setups gemessen werden. Diese Setups bezeichnen wir mit den Symbolen (α_1, β_1) , (α_1, β_2) , (α_2, β_1) und (α_2, β_2) , wobei die erste Index den Wert bei A angibt und der zweite bei B.

In jedem Setup werden wir bei A und bei B noch einen weiteren Index hinzugeben, und zwar (*o*) für das Photon detektiert im ordentlichen Strahl, (*e*) für das Photon detektiert im außerordentlichen Strahl und (*u*) für ein nicht detektiertes Photon. z.B. heißt (*o, e*) Photon wird bei A im ordentlichen Strahl und bei B im außerordentlichen Strahl detektiert, (*o, o*) Photon bei A im ordentlichen Strahl und bei B auch im ordentliche Strahl detektiert, (*o, u*) Photon bei A im ordentliche Strahl bei B nicht detektiert, usw.

Bezeichnen wir noch mit $n_{o,o}(\alpha_1, \beta_1)$ die Zahl der Ereignisse, die bei A unter dem Winkel α_1 und zwar im ordentliche Strahl und bei B unter dem Winkel β_1 auch im ordentlichen Strahl auftreten, dann hat Eberhard unter der Annahme der Realität und Lokalität für eine Hidden Variable Theorie folgende Ungleichung abgeleitet

$$\begin{aligned} n_{o,o}(\alpha_1, \beta_1) - n_{u,o}(\alpha_2, \beta_1) - n_{e,o}(\alpha_2, \beta_1) - n_{o,u}(\alpha_1, \beta_2) - n_{o,e}(\alpha_1, \beta_2) \\ \leq n_{o,o}(\alpha_2, \beta_2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

d.h.

$$\begin{aligned} J_B = n_{o,e}(\alpha_1, \beta_2) + n_{o,u}(\alpha_1, \beta_2) \\ + n_{e,o}(\alpha_2, \beta_1) + n_{u,o}(\alpha_2, \beta_1) \\ + n_{o,o}(\alpha_2, \beta_2) - n_{o,o}(\alpha_1, \beta_1) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

wobei J_B der Erwartungswert einer Bellungleichung ist. Das ist die Bellungleichung, die von P.H. Eberhard [7] hergeleitet wurde.

Im weiteren konnte Eberhard zeigen, dass für einen nicht-maximal verschränkten Anfangszustand

$$\psi_0 = (1/\sqrt{1+r^2})(|HV\rangle + r|VH\rangle)$$

es möglich ist ein Loophole freies Experiment zu machen, sobald die Detektoreffizienz für den Photonzähler höher als 66,7% ist (z.B. bei einem Wert $r = 0.001$), vorausgesetzt, dass der Untergrund bestimmte Werte nicht überschreitet [7].

3 Bell'sche Ungleichungen für neutrale kaonische Systeme

3.1 Der Quasispin der Kaonen und die Analogie zu Photonen

In diesem Abschnitt ordnen wir Kaonen einen Quasispin zu, so gelte $|K^0\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$ analog für $|\bar{K}^0\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle$ (siehe Ref. [22]). Im Raum des Quasispins wirken die Paulimatrizen σ_i , $i=1,2,3$, während im "Kaonen-Raum" im wesentlichen die Operatoren S und CP wirken. Es wird sich in weiterer Folge zeigen, dass wir σ_3 mit S, $-\sigma_1$ mit CP sowie σ_2 mit der CP-Verletzung identifizieren können. Die Pauli-Matrizen lauten

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Dabei ist der Zusammenhang der obigen Matrizen (3.1) mit den jeweiligen Operatoren Strangeness S und Ladungskonjugation-Parität CP wie folgt gegeben

$$S \begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_3 \begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^0 \\ -\bar{K}^0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$CP \begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} \equiv (-\sigma_1) \begin{pmatrix} K^0 \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{K}^0 \\ -K^0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Durch die Entwicklung, beliebiger Operatoren, nach den Paulimatrizen (3.1) ergibt sich die folgende Relation

$$H = M - i\Gamma/2 = a\mathbb{1} + \vec{b} \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} a + b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & a - b_3 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Setzen wir hierbei $b_1 = b \cos \alpha$ und $b_2 = b \sin \alpha$ an, weiters ist $b_3 = 0$ ($b_3 = 0$ folgt aus dem CPT-Theorem), so folgt daraus, wenn wir die Matrizen in Gleichung (3.4) diagonalisieren, folgende Relation

$$a = \frac{1}{2}(\lambda_L + \lambda_S), \quad b = \frac{1}{2}(\lambda_L - \lambda_S) \quad (3.5)$$

Wenn wir nun $|K^0\rangle = (1, 0)$ und $|\bar{K}^0\rangle = (0, 1)$ ansetzen, dann folgt aus den Definitionen von K_S und K_L

$$|K_S\rangle = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} \quad |K_L\rangle = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Kaon	Quasispin	Photon
$ K^0\rangle$	$ \uparrow\rangle_z$	$ V\rangle$
$ \bar{K}^0\rangle$	$ \downarrow\rangle_z$	$ H\rangle$
$ K_1^0\rangle$	$ \swarrow\rangle$	$ -45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(V\rangle - H\rangle)$
$ K_2^0\rangle$	$ \nearrow\rangle$	$ +45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(V\rangle + H\rangle)$
$ K_S\rangle$	$ \rightarrow\rangle_y$	$ L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(V\rangle - i H\rangle)$
$ K_L\rangle$	$ \leftarrow\rangle_y$	$ R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(V\rangle + i H\rangle)$

Tabelle 3.1: Analogie zwischen Kaonen- und Photonenbeschreibung

Der Zusammenhang zwischen der Phase α und CP-Parameter ϵ ist

$$e^{i\alpha} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \quad (3.7)$$

wobei die komplexe Konstante ϵ bereits im Kapitel 1.3.1 als der Ursache der CP-Verletzung genannt wurde.

3.2 Unitäre Zeitentwicklung für verschränkte Zustände

Als nächstes werden wir die Zeitentwicklung der Kaon-Zustände diskutieren, und interessieren uns für verschränkte Zustände. Die Norm des Gesamtzustands bleibt unter einer unitären Zeitentwicklung im allgemeinen erhalten.

Wir können die komplette Entwicklung des $|K_S\rangle$ und $|K_L\rangle$ durch einen unitären Operator $U(t, 0)$ beschreiben, dessen Wirkung wie folgt geschrieben werden kann [22]

$$\begin{aligned} U(t, 0) |K_S\rangle &= e^{-i\lambda_S t} |K_S\rangle + |\Omega_S(t)\rangle \\ U(t, 0) |K_L\rangle &= e^{-i\lambda_L t} |K_L\rangle + |\Omega_L(t)\rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei $|\Omega_{S,L}(t)\rangle$ den Zustand aller Zerfallsprodukte bezeichnet. Eine wichtige Eigenschaft des Zeitoperators ist die Unitarität, das heißt $U^\dagger U = \mathbf{1}$. Somit gilt

$$\langle K_S(t) | K_S(t) \rangle = \langle K_S | U^\dagger(t, 0) U(t, 0) | K_S \rangle = \langle K_S | K_S \rangle = 1 \quad (3.9)$$

Damit ist

$$1 = e^{-\Gamma_S t} + \langle \Omega_S(t) | \Omega_S(t) \rangle \quad (3.10)$$

mit $\langle K_S(t) | \Omega_S(t) \rangle = 0$. So lauten die Übergangsamplituden der Zerfallsprodukte

$$\langle \Omega_S(t) | \Omega_S(t) \rangle = 1 - e^{-\Gamma_S t} \quad (3.11)$$

$$\langle \Omega_L(t) | \Omega_L(t) \rangle = 1 - e^{-\Gamma_L t} \quad (3.12)$$

$$\langle \Omega_L(t) | \Omega_S(t) \rangle = \langle K_L | K_S \rangle (1 - e^{i\Delta_m t} e^{-\Gamma t}) \quad (3.13)$$

$$\langle K_{S,L} | \Omega_S(t) \rangle = \langle K_{S,L} | \Omega_L(t) \rangle = 0 \quad (3.14)$$

Die Masseneigenzustände (1.69),(1.70) werden normiert, auf Grund der CP-Verletzung sind diese aber nicht orthogonal

$$\begin{aligned}
\langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle &= 1 \\
&= \frac{N^2}{4|q|^2} \{ \langle K_S | K_S \rangle + \langle K_L | K_L \rangle - \langle K_S | K_L \rangle - \langle K_L | K_S \rangle \} \\
&= \frac{N^2}{4|q|^2} \{ 2 - 2 \operatorname{Re} \{ \langle K_S | K_L \rangle \} \} \\
\Rightarrow \delta := \langle K_S | K_L \rangle &= \frac{|p|^2 - |q|^2}{N^2} = \frac{2 \operatorname{Re} \{ \epsilon \}}{1 + |\epsilon|^2} \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt den verschränkten Zustand der Kaonen und beginnen mit dem verschränkten Zustand, der zur Zeit $t = 0$ in der Basis $|K_S K_L\rangle$ gegeben ist

$$|\psi_0\rangle = |\psi(t=0)\rangle = \frac{N^2}{2\sqrt{2}pq} \{ |K_S\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r - |K_L\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r \} \tag{3.16}$$

Der oben angeführte Zustand (3.16) wird zur Zeit t , unter Verwendung des unitären Operators nach

$$U(t, 0) = U_l(t, 0) \otimes U_r(t, 0) \tag{3.17}$$

entwickelt.

Dabei sind $U_l(t, 0)$ und $U_r(t, 0)$ jene Operatoren des linken bzw. rechten Mesons, die in den jeweiligen Teilräumen wirken. Für die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit benötigen wir den Projektionsoperator $P_{l,r}(k_n)$ auf den Zustand $|k_n\rangle_{l,r}$.

Wir interessieren uns für die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit der Erkennung oder Nicht-Erkennung eines bestimmten Quasispinzustands auf der linken Seite $|k_n\rangle_l$ und auf der rechten Seite $|k_n\rangle_r$ der Quelle. Dafür brauchen wir den Projektionsoperator $P_{l,r}(k_n)$ und zusammen mit den Projektionsoperator $Q_{l,r}(k_n)$, der auf die orthogonalen Zustände wirkt

$$P_{l,r}(k_n) = |k_n\rangle_{l,r} \langle k_n| \quad Q_{l,r}(k_n) = 1_{l,r} - P_{l,r}(k_n) \tag{3.18}$$

Beginnend mit dem Anfangszustand (3.16) bestimmt die unitäre Zeitentwicklung (3.17) den Zustand zu einer Zeit t_r

$$|\psi(t_r)\rangle = U(t_r, 0) |\psi(t=0)\rangle = U_l(t_r, 0) U_r(t_r, 0) |\psi(t=0)\rangle \tag{3.19}$$

Messen wir einen Zustand $|k_m\rangle$ zur Zeit t_r auf der rechten Seite, so projizieren wir auf den Zustand

$$|\tilde{\psi}(t_r)\rangle = P_r(k_m) |\psi(t_r)\rangle. \tag{3.20}$$

Dieser Zustand entwickelt sich bis zur Zeit t_l , bei der ein anderes k_n auf der linken Seite gemessen wird

$$|\tilde{\psi}(t_l, t_r)\rangle = P_l(k_n) U_l(t_l, t_r) P_r(k_m) |\psi(t_r)\rangle. \tag{3.21}$$

Die Wahrscheinlichkeit der gemeinsamen Messung ist gegeben durch die Quadratsnorm des Zustands (3.21) und stimmt mit der Norm des Zustands

$$|\psi(t_l, t_r)\rangle = P_l(k_n)P_r(k_m)U_l(t_l, 0)U_r(t_r, 0) |\psi(t=0)\rangle \quad (3.22)$$

überein, was einer Faktorizierung der Eigenzeit t_l und t_r entspricht.

3.2.1 Die $\{Y, Y\}, \{N, N\}, \{Y, N\}$ und $\{N, Y\}$ Wahrscheinlichkeiten

Nun können wir die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit $P_{n,m}(Y, t_l; Y, t_r)$ für das Auffinden eines k_n zur Zeit t_l auf den linken Seite (Y..“ja” Fall) und k_m zur Zeit t_r auf der rechten Seite (Y..“ja” Fall) ausrechnen. Analog kann man die Wahrscheinlichkeiten $P_{n,m}(N, t_l; N, t_r)$ für das Nicht-Auffinden solcher Kaonen (N..“nein” Fall) ableiten und auf die gleiche Weise auch die Wahrscheinlichkeiten $P_{n,m}(Y, t_l; N, t_r)$, wenn ein Teilchen k_n zur Zeit t_l auf der linken aber kein Teilchen k_m zur Zeit t_r auf der rechten Seite entdeckt wird

$$P_{n,m}(Y, t_l; Y, t_r) = \|P_l(k_n)P_r(k_m)U_l(t_l, 0)U_r(t_r, 0) |\psi(t=0)\rangle\|^2 \quad (3.23)$$

$$P_{n,m}(N, t_l; N, t_r) = \|Q_l(k_n)Q_r(k_m)U_l(t_l, 0)U_r(t_r, 0) |\psi(t=0)\rangle\|^2 \quad (3.24)$$

$$P_{n,m}(Y, t_l; N, t_r) = \|P_l(k_n)Q_r(k_m)U_l(t_l, 0)U_r(t_r, 0) |\psi(t=0)\rangle\|^2 \quad (3.25)$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt klarerweise 1.

$$P_{n,m}(Y, t_l; Y, t_r) + P_{n,m}(N, t_l; N, t_r) + P_{n,m}(Y, t_l; N, t_r) + P_{n,m}(N, t_l; Y, t_r) = 1 \quad (3.26)$$

Für die Photon oder das Spin- $\frac{1}{2}$ System summieren sich die Wahrscheinlichkeiten des Polarisation oder das Spins automatisch, da die Polarization bzw. der Spin zu jeder Zeit erhalten ist. Die unitäre Zeitentwicklung eines Kaonzustands schließt auch die Zerfallproduktzustände mit ein, deshalb muss der gesamte Hilbertraum auch den Raum der Zerfallsprodukte $H_\Omega^l \otimes H_\Omega^r$ beinhalten, welcher orthogonal zu dem Raum $H_{kaon}^l \otimes H_{kaon}^r$ überlebender Kaonen ist. Während im Spin- $\frac{1}{2}$ Fall der Produktraum $H_{spin}^l \otimes H_{spin}^r$ ausreichend ist, um alle Spineigenschaften des verschränkten Systems zu erklären.

3.3 Allgemeine Bell Ungleichung für Kaonen

Wir werden uns im folgenden auf die Ref. [36] beziehen. Die Korrelationsfunktion $O(k_n, t_a)$ ist eine Observable auf jeder Seite der Quelle, dem der Wert +1 zugeordnet wird, falls bei einer Messung der Quasispinzustand k_n zur Zeit t_a gemessen wird, andererseits wird der Wert -1 zugeordnet.

$O(k_n, t_a; k_m, t_b)$ gibt den Wert +1, wenn beide Quasispinzustände zur einer bestimmten Zeit gemessen werden oder beide Quasispinzustände zu einer bestimmten Zeit nicht gemessen werden. Tritt der Fall auf, dass nur einer der beiden Quasispinzustände doch der andere nicht gemessen wird, dann gibt die Korrelationsfunktion den Wert -1.

Lokalität bedeutet, im Sinne der Bell'schen Ungleichung, dass die Korrelationsfunktion $O(k_n, t_a; k_m, t_b)$ gleich dem Produkt der Observablen O^l von links und O^r von rechts gleich ist

$$O(k_n, t_a; k_m, t_b) = O^l(k_n, t_a) \cdot O^r(k_m, t_b) \quad (3.27)$$

d.h., die Messung auf der linken Seite hängt von der Messungswahl auf der rechten Seite *nicht* ab und umgekehrt.

So erhalten wir die folgende Relation

$$|O(k_n, t_a; k_m, t_b) - O(k_n, t_a; k_{m'}, t_d)| + |O(k_{n'}, t_c; k_{m'}, t_d) + O(k_{n'}, t_c; k_m, t_b)| = 2 \quad (3.28)$$

wobei $k_n, k_m, k_{n'}, k_{m'}$ beliebige Quasispineigenzustände der Kaonen und t_a, t_b, t_c, t_d vier beliebige Zeiten sind.

Betrachten wir eine Serie von N-identischen Messungen und bezeichnen wir den Wert im i-ten Experiment durch O_i , dann ist der Mittelwert gegeben durch

$$M(k_n, t_a; k_m, t_b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O_i(k_n, t_a; k_m, t_b) \quad (3.29)$$

Nehmen wir die absolut Werte der Differenz und der Summe solcher Mittelwerte unter Ausnützung der Relation (3.28), so bekommen wir die Bell-CHSH Ungleichung

$$|M(k_n, t_a; k_m, t_b) - M(k_n, t_a; k_{m'}, t_d)| + |M(k_{n'}, t_c; k_{m'}, t_d) + M(k_{n'}, t_c; k_m, t_b)| \leq 2 \quad (3.30)$$

Identifizieren wir den Mittelwert $M(k_n, t_a; k_m, t_b) = E(a, b)$, so ergibt sich für die obige Ungleichung (3.30) die CHSH Ungleichung (2.31) für Spin- $\frac{1}{2}$ Fall zurück.

3.3.1 Die Wahrscheinlichkeiten

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit $P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b)$ für den Fall ein Kaon im Zustand k_n zur Zeit t_a auf der linken Seite zu finden und ein k_m zur Zeit t_b auf der rechten Seite, sowie die Wahrscheinlichkeit $P_{n,m}(N, t_a; N, t_b)$ für den Fall solche Kaonen nicht zu finden.

Ähnlich bezeichnet $P_{n,m}(Y, t_a; N, t_b)$ den Fall, wenn ein k_n zur Zeit t_a auf der linken Seite aber kein k_m zur Zeit t_b auf der rechten Seite entdeckt wird. Damit können den Erwartungswert durch die folgende Linearkombination nochmal umordnen

$$\begin{aligned} M(k_n, t_a; k_m, t_b) &= P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b) + P_{n,m}(N, t_a; N, t_b) \\ &\quad - P_{n,m}(Y, t_a; N, t_b) - P_{n,m}(N, t_a; Y, t_b) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten für $(Y, Y), (Y, N), (N, Y), (N, N)$ gleich 1 sein muss, gewinnen wir

$$M(k_n, t_a; k_m, t_b) = -1 + 2 \{P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b) + P_{n,m}(N, t_a; N, t_b)\} \quad (3.32)$$

Hierbei ist zu Beachten, dass die Relation (3.31) zwischen den Erwartungswerten und den Wahrscheinlichkeiten sowohl für QM als auch für LRT gültig ist.

3.3.2 Die allgemeine Bell-CHSH Ungleichung

Letzendlich gewinnen wir die allgemeine Form von Bell-CHSH Ungleichung für die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} & |P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b) + P_{n,m}(N, t_a; N, t_b) - P_{n,m'}(Y, t_a; Y, t_d) - P_{n,m'}(N, t_a; N, t_d)| \\ & \leq 1 \pm [-1 + P_{n',m}(Y, t_c; Y, t_b) + P_{n',m}(N, t_c; N, t_b) \\ & + P_{n',m'}(Y, t_c; Y, t_d) + P_{n',m'}(N, t_c; N, t_d)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

oder

$$\begin{aligned} S(k_n, k_m, k'_n, k'_m; t_a, t_b, t_c, t_d) &= |P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b) + P_{n,m}(N, t_a; N, t_b) \\ &- P_{n,m'}(Y, t_a; Y, t_d) - P_{n,m'}(N, t_a; N, t_d)| + |-1 + P_{n',m}(Y, t_c; Y, t_b) + P_{n',m}(N, t_c; N, t_b) \\ &+ P_{n',m'}(Y, t_c; Y, t_d) + P_{n',m'}(N, t_c; N, t_d)| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dies ist die allgemeine Bell-CHSH Ungleichung zu beliebigen Zeiten und Quasispin.

3.3.3 Die allgemeine Bell-CHSH Ungleichung in Wigner Version

Unser Ziel ist es, eine Wigner-artige Ungleichung zu finden. Im allgemeinen folgt aus der Ungleichung (3.33), wenn wir das obere Vorzeichen (+) wählen

$$\begin{aligned} P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b) &\leq P_{n,m'}(Y, t_a; Y, t_d) + P_{m',n'}(Y, t_d; Y, t_c) \\ &+ P_{n',m}(Y, t_c; Y, t_b) + h(n, m, n', m'; t_a, t_b, t_c, t_d) \end{aligned} \quad (3.35)$$

wobei

$$\begin{aligned} h(n, m, n', m'; t_a, t_b, t_c, t_d) &= -P_{n,m}(N, t_a; N, t_b) + P_{n,m'}(N, t_a; N, t_d) \\ &+ P_{n',m}(N, t_c; N, t_b) + P_{n',m'}(N, t_c; N, t_d) \end{aligned} \quad (3.36)$$

im wesentlichen eine Korrekturfunktion zur original Form von Wigner ist. Es kommt von den Zerfallszuständen für eine unitäre Zeitentwicklung her, da diese einzubeziehen sind (siehe dazu Gl. (3.8)). Für $t_{a,b} \rightarrow 0$, wenn wir keinen Zerfall haben, werden die Wahrscheinlichkeiten

$$P_{n,m}(N, t_a; N, t_b)|_{t_{a,b}=0} \equiv P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b)|_{t_{a,b}=0}, \quad (3.37)$$

dann die Korrekturfunktion (für $t_a = t_b = t_c = t_d = t = 0$) ist gleich

$$\begin{aligned} h(n, m, n', m'; t = 0) &= -P_{n,m}(Y, Y)|_{t=0} + P_{n,m'}(Y, Y)|_{t=0} \\ &+ P_{n',m}(Y, Y)|_{t=0} + P_{n',m'}(Y, Y)|_{t=0} \end{aligned} \quad (3.38)$$

und addiert sich mit Gleichung (3.35) auf solche Weise, dass wir die übliche Wigner Ungleichung bekommen, die auf einer mengentheoretischen Methode basiert

$$P_{n,m}(Y, Y)|_{t=0} \leq P_{n,m'}(Y, Y)|_{t=0} + P_{m',n'}(Y, Y)|_{t=0} + P_{n',m}(Y, Y)|_{t=0} \quad (3.39)$$

Wir interessieren uns für den Fall, dass nur drei verschiedene Zustände enthalten sind, also wir setzen $n' = m'$ und $t_c = t_d$. Aufgrund der EPR-Bell Antikorrelation verschwindet die Wahrscheinlichkeit für (Y,Y), d.h. $P_{n',n'}(Y, t_c; Y, t_c) = 0$, aber die (N,N) Wahrscheinlichkeit $P_{n',n'}(N, t_c; N, t_c) \neq 0$ (verschwindet für $t_c \rightarrow 0$). Dann gewinnen wir folgende Wigner-artige Ungleichung für drei verschiedene Quasispinszustände

$$P_{n,m}(Y, t_a; Y, t_b) \leq P_{n,n'}(Y, t_a; Y, t_c) + P_{n',m}(Y, t_c; Y, t_b) + h(n, m, n'; t_a, t_b, t_c) \quad (3.40)$$

mit der dazugehörigen Korrektionsfunktion

$$h(n, m, n'; t_a, t_b, t_c) = -P_{n,m}(N, t_a; N, t_b) + P_{n,n'}(N, t_a; N, t_c) + P_{n',m}(N, t_c; N, t_b) + P_{n',n'}(N, t_c; N, t_c) \quad (3.41)$$

Für den Limesübergang $t \rightarrow 0$ folgt die bekannte Wigner-artige Ungleichung [36]

$$P_{n,m}(Y, Y) |_{t=0} \leq P_{n,n'}(Y, Y) |_{t=0} + P_{n',m}(Y, Y) |_{t=0} \quad (3.42)$$

3.3.4 Bell Ungleichung für Kaonen - CP Verletzung

Zur Erinnerung, wenn eine Quelle im Zustand $|\psi\rangle$ verschränkte Kaonen aussendet, werden links und rechts zu den Zeiten t_L und t_R zwei verschiedene Eigenschaften gemessen. Die Wahrscheinlichkeiten sind quantenmechanisch für eine gemeinsame Messung durch $P(k_1, t_L; k_2, t_R) = |\langle k_1 |_L \langle k_2 |_R | \psi(t_L, t_R) \rangle|^2$ gegeben. Es treten zwei Parameter (k_i, t_i) für links sowie für rechts auf. Von denen wird k_i als Quasispin bezeichnet. Wir haben nun die Option, entweder den Quasispin fix zu halten und die Messzeiten zu variieren, oder genau umgekehrt. Wenn wir uns auf fixen Zeit beschränken, wird sich zeigen, dass die Bellungleichungen im Zusammenhang mit der CP Symmetrieverletzung stehen.

Wir beginnen mit der allgemeinen Bellungleichung in Wigner Version (3.40), und wählen drei Quasispins

$$\begin{aligned} |k_n\rangle &= |K_S\rangle \\ |k_m\rangle &= |\bar{K}^0\rangle \\ |k_{n'}\rangle &= |K_1^0\rangle \end{aligned} \quad (3.43)$$

Damit bekommen wir folgende Wigner-artige Ungleichung

$$P_{K_S, \bar{K}^0}(Y, t_a; Y, t_b) \leq P_{K_S, K_1^0}(Y, t_a; Y, t_c) + P_{K_1^0, \bar{K}^0}(Y, t_c; Y, t_b) + h(K_S, \bar{K}^0, K_1; t_a, t_b, t_c) \quad (3.44)$$

Wählen wir also $t = 0$ als fixen Zeitpunkt und bezeichnen die Wahrscheinlichkeit

$$P_{K_S, \bar{K}^0}(Y, 0; Y, 0) \equiv P(K_S, \bar{K}^0),$$

dann bekommen wir die Wigner-artige Ungleichung, die erstmals 1997 von Fumiyo Uchiyama [37] abgeleitet wurde

$$P(K_S, \bar{K}^0) \leq P(K_S, K_1^0) + P(K_1^0, \bar{K}^0) \quad (3.45)$$

Da $|K_1^0\rangle$ nichtphysikalisch ist, ist eine Überprüfung dieser Ungleichung nicht direkt möglich.

Aber, wie von Bertlmann, Grimus und Hiesmayr gezeigt wurde (siehe Ref. [22, 38, 39]), kann die Ungleichung (3.45) in eine andere Ungleichung umgewandelt werden, die eine physikalisch meßbare Größe enthält, nämlich eine Ladungsasymmetrie, die ein Maß für die CP Verletzung ist.

Gehen wir also von folgendem Bellzustand aus

$$\sqrt{2} |\psi\rangle = |K^0\rangle |\bar{K}^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle |K^0\rangle \quad (3.46)$$

und führen bei den unphysikalischen kaonischen Zustände noch zusätzlich eine Phase α ein

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle - e^{i\alpha} |\bar{K}^0\rangle \} \\ |K_2^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |K^0\rangle + e^{i\alpha} |\bar{K}^0\rangle \} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Der Faktor $e^{i\alpha}$ stellt einen frei wählbaren Phasenfaktor dar, der sich in physikalischen Ergebnissen nicht bemerkbar macht. Dann erhalten wir für die Wahrscheinlichkeiten mit den Übergangskoeffizienten p und q folgende Ausdrücke (unter Berücksichtigung der Gleichungen (1.36) und (1.51))

$$\begin{aligned} P(K_S, \bar{K}^0) &= \frac{1}{2N^2} |p|^2 \\ P(K_S, K_1^0) &= \frac{1}{4N^2} |pe^{i\alpha} - q|^2 \\ P(K_1^0, \bar{K}^0) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Unter der Ausnutzung $1 = |p|^2 + |q|^2$ setzen wir die Wahrscheinlichkeiten in die Ungleichung (3.45) ein und erhalten

$$2|p|^2 \leq |p|^2 + |q|^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\alpha} p^* q) + |p|^2 + |q|^2 \quad (3.49)$$

Im Realteil von $e^{i\alpha} |p| e^{i\delta_1} |q| e^{-i\delta_2}$ lässt sich die bislang frei wählbare Phase α so wählen, dass sie die Phasen δ_1 von p und δ_2 von q kompensiert, d.h. $\alpha = \delta_2 - \delta_1$. Damit geht der Realteil über in $\operatorname{Re}(\dots) = |p||q|$. Dann vereinfacht sich die obige Gleichung auf insgesamt

$$0 \leq |q|^2 - |p||q| \quad (3.50)$$

oder kurz

$$|p| \leq |q| \quad (3.51)$$

Diese Ungleichung lässt sich nun experimentell überprüfen. Der semileptonische Zerfall der Kaonen erlaubt eine Überprüfung dieser Ungleichung.

Experimentell findet man die Ladungsasymmetrie (1.68) $\delta > 0$. Das heißt, dass ein Unterschied zwischen der Welt und Antiwelt existiert. Die Ladungsasymmetrie lässt sich aber auch in der Form

$$\delta = \frac{|p|^2 - |q|^2}{|p|^2 + |q|^2} = \frac{2 \operatorname{Re} \{\epsilon\}}{1 + |\epsilon|^2} \quad (3.52)$$

angeben. Mit $|p| \leq |q|$ wandelt sich die Bell Ungleichung in

$$\delta \leq 0 \quad (3.53)$$

Damit liefert das Experiment eine Verletzung dieser Forderung.

Tauschen wir \bar{K}^0 mit K^0 aus in der Bell Ungleichung (3.45), dann erhalten wir

$$\delta \geq 0 \quad (3.54)$$

Beide Ungleichungen zusammen führen auf

$$\delta = 0 \quad (3.55)$$

damit auf strikte CP- Erhaltung, im Widerspruch zum Experiment. Dieses Ergebnis fasst zusammen, dass lokal realistische Theorien im K^0, \bar{K}^0 - System im Widerspruch zur CP- Verletzung sind. Sobald also mit $\delta \neq 0$ eine CP- Verletzung vorliegt, ist das $K^0 - \bar{K}^0$ - System **verschränkt** und **nichtlokal**.

3.4 Test der Bell-Ungleichung mit Kaon und Antikaon

3.4.1 Verschränkter Zustand mit Regenerator in einem Kaon Strahl

Wir werden hier ein EPR-Experiment mit Kaon Regenerator betrachten. Ein dünner Regenerator wird in der Nähe vom Produktionspunkt der Kaonen auf der rechten Seite des EPR Quelle festgelegt, siehe Abbildung 1.6. Hinter dem Regenerator lautet der Zustand [9, 10, 11]

$$\begin{aligned} |\Psi(\delta t)\rangle &= \frac{N_{SL}}{\sqrt{2}} e^{-i(\lambda_S + \lambda_L)\delta t \bar{r}}(\delta t) \left\{ |K_S\rangle_l \otimes |K_L\rangle_{r-} - |K_L\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r \right. \\ &\quad \left. + r \{ |K_S\rangle_l \otimes |K_S\rangle_{r-} - |K_L\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r \} \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

mit dem Regenerationsparameter $r = i\delta t \frac{\pi\nu}{2m_K} (f - \bar{f})$ und $\bar{r}(\delta t) = e^{i\frac{\pi\nu}{2m_K}(f+\bar{f})\delta t}$, siehe unsere Diskussion im Abschnitt 1.4.3. Wenn δt die im Regenerator vergangene Zeit ist, ist sie klein im Vergleich zu τ_S , somit ist $\bar{r}(\delta t) \approx 1$ eine gute Approximation. Die zeitliche Entwicklung dieses Zustands führt zu

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \frac{N_{SL}}{\sqrt{2}} e^{-i(\lambda_S + \lambda_L)t} \left\{ |K_S\rangle_l \otimes |K_L\rangle_{r-} - |K_L\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r \right. \\ &\quad \left. + r e^{-i\Delta m t - \frac{\Delta\Gamma}{2}t} [- |K_L\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r + e^{i2\Delta m t + \Delta\Gamma t} |K_S\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r] \right\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

wobei $\Delta m = m_L - m_s$ und $\Delta\Gamma = \Gamma_L - \Gamma_S$ ist, und $\tau_S \ll t \ll \tau_L \approx 579\tau_S$.

Durch schwache Wechselwirkung überlebt die Komponente $|K_L\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r$ in (3.57) viel besser als die anderen Komponente $|K_S\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r$ und $|K_L\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r$ und ist deshalb verstärkt. Dies ist im Gegensatz zur $|K_S\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r$ Komponente, die während der schwachen Wechselwirkung weiter unterdrückt wurde und im folgenden vernachlässigt wird. Deswegen können wir den Zustand für $t \gg \tau_S$ folgendermaßen definieren

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-\Gamma t}}{N(0, \delta t)} \left\{ |K_S\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r - |K_L\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r - R(t, \delta t) |K_L\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r \right\} \quad (3.58)$$

mit der komplexen zeitabhängigen Funktion $R(t, \delta t) = re^{(-i\Delta m - \frac{\Delta\Gamma}{2})t}$ (zur Erinnerung $\Gamma = \frac{\Gamma_L + \Gamma_S}{2}$).

Hier beachten wir, dass die komplexe Funktion nicht unbedingt klein ist, weil der exponentielle Faktor mit der Zeit - ($\Delta\Gamma < 0$) negativ - ansteigt und dadurch kann die Kleinheit des Regenerationsfaktors r kompensiert werden.

Die Normierung $N(0, \delta t) = \sqrt{2 + |R(0, \delta t)|^2}$ wird auf solche Weise definiert, dass der Zustand hinter dem Regenerator auf die nichtzerfallenen Paare normiert wird, d.h.

$\langle\Psi(0) | \Psi(0)\rangle = 1$, bzw. $\Gamma \approx 0$ in weiterer Approximation.

Der Zustand (3.58) wird im weiteren für den Test von Bell Ungleichungen verwendet.

3.4.2 Test der lokalen Realismus ohne Ungleichung

Wir betrachten den gleichen Aufbau wie im vorigen Kapitel, nämlich eine EPR Quelle mit Kaonen, wobei sich ein dünner Regenerator im rechten Kaon Strahl befindet, siehe Abbildung 1.6. Dann ist der verschränkte Zustand, den wir für unsere Untersuchungen zur Verfügung haben, folgender (siehe Ableitung von Gl. (3.58)):

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + |R|^2}} \left\{ |K_S\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r - |K_L\rangle_l \otimes |K_S\rangle_r - R |K_L\rangle_l \otimes |K_L\rangle_r \right\} \quad (3.59)$$

wobei

$$R \equiv re^{(-i\Delta m - \frac{\Delta\Gamma}{2})t} \quad (3.60)$$

und der Regenerationsparameter

$$r \equiv i \frac{\pi\nu}{m_K} (f - \bar{f}) \delta t. \quad (3.61)$$

Im weiteren vernachlässigen wir die CP- Verletzung und den Effekt der Fehleridentifikation bei $K_S - K_L$. Der Zustand (3.59) beschreibt alle Kaonenpaare jeweils mit dem linken und dem rechten Partner, die bis einer angemessenen Zeit t überleben, $\tau_S \ll t \ll \tau_L$.

Jetzt betrachten wir den speziellen Fall mit $R = 1$,¹ das ist der sogenannte Hardy Zustand, benannt nach dem Physiker L. Hardy [40]. Die Quantenmechanik liefert dann

¹ $R = 1$ kann man unter Verwendung, z.B., eines Beryllium(Carbon) Regenerators mit der Dichte $d = 2.83$ mm erhalten, zusätzlich wird eine Detektionszeit $t = 11.09\tau_S$ ($t = 11.31\tau_S$) verwendet.

für die Wahrscheinlichkeiten links und rechts bestimmte kaonische Zustände zu messen folgendes Resultat

$$P_{QM}(K^0, \bar{K}^0) = |\langle K^0 | \langle \bar{K}^0 | \Phi \rangle|^2 = \eta\bar{\eta}/12 \quad (3.62)$$

$$P_{QM}(K^0, K_L) = |\langle K^0 | \langle K_L | \Phi \rangle|^2 = 0 \quad (3.63)$$

$$P_{QM}(K_L, \bar{K}^0) = |\langle K_L | \langle \bar{K}^0 | \Phi \rangle|^2 = 0 \quad (3.64)$$

$$P_{QM}(K_S, K_S) = |\langle K_S | \langle K_S | \Phi \rangle|^2 = 0 \quad (3.65)$$

wobei $\eta(\bar{\eta})$ die $K^0(\bar{K}^0)$ Detektionseffizient des Experiments ist.²

Der Beweis vom Bell'schen Theorem ohne Ungleichungen (mit Ungleichungen, siehe Kap. 2.) besteht nun darin zu zeigen, dass die QM Resultate (3.62)-(3.65) von einer LRT nicht reproduziert werden können. Dabei folgen wir der Argumentation von Bramon und Garbarino [8].

In einer LRT mit verborgenen Parametern können wir Gl. (3.62) leicht reproduzieren. Nehmen wir an, das Kaon Paar wurde erzeugt in einem Zustand charakterisiert durch den Parameter $\lambda \in \Lambda_{0,\bar{0}}$, dann sind die einzelnen Kaon Wahrscheinlichkeiten, nämlich links ein K^0 zu detektieren und rechts ein \bar{K}^0 , gegeben durch $0 < p_l(K^0|\lambda) \leq 1$ bzw. $0 < p_r(\bar{K}^0|\lambda) \leq 1$. Diese Funktionen zusammen mit der Verteilung $\rho(\lambda)$ können wir so wählen, dass gilt

$$\begin{aligned} P_{LR}(K^0, \bar{K}^0) &\equiv \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p_l(K^0|\lambda) p_r(\bar{K}^0|\lambda) = \eta\bar{\eta}/12 \\ &\leq \int_{\Lambda_{0,\bar{0}}} d\lambda \rho(\lambda) =: \mu(\Lambda_{0,\bar{0}}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Gleichungen (3.63) und (3.64) haben hingegen in einer LRT folgenden Effekt:

Nehmen wir an, dass in einem Experiment die Strangeness K^0 auf der linken Seite und \bar{K}^0 auf der rechten Seite detektiert wird und die Vorhersage (3.62) korrekt ist. Dann können wir von der Tatsache, dass ein K^0 links beobachtet wurde und der Gültigkeit von Gleichung (3.63) schließen, dass wir für eine etwaige Lebensdauer Messung (mit idealem Detektor) ein K_S beobachtet hätten. D.h. wir können nach der EPR Argumentation (siehe Kapitel 2.1.1) dem K_S mit Sicherheit ein Element der Realität zuordnen.

$$p_r(K_S|\lambda) = 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{0,\bar{0}} \quad (3.67)$$

Umgekehrt können wir aus der Tatsache, dass ein \bar{K}^0 rechts beobachtet wurde und der Gültigkeit von Gleichung (3.64) schließen, dass wir links mit Sicherheit ein K_S beobachtet hätten, d.h. nach EPR

$$p_l(K_S|\lambda) = 1, \quad \forall \lambda \in \Lambda_{0,\bar{0}} \quad (3.68)$$

²Aufgrund der CP Verletzung bekommen wir $P_{QM}(K^0, K_L)/(\eta\eta_\tau) = P_{QM}(K_L, \bar{K}^0)/(\bar{\eta}\bar{\eta}_\tau) \simeq (2/3)(\text{Re } \epsilon)^2 \simeq 2 \cdot 10^{-6}$ und $P_{QM}(K_S, K_S)/\eta_\tau^2 = 8 \cdot 10^{-13}$ für das Experiment bei einer ϕ -factory $p\bar{p}$ Maschine

Messen wir nun bei den Experimenten die Lebensdauer links und rechts (mit idealen Detektoren), dann würden wir unter der Voraussetzung der Lokalität folgende Voraussage bekommen

$$\begin{aligned}
P_{LR}(K_S, K_S) &\equiv \int_{\Lambda} d\lambda \rho(\lambda) p_l(K_S|\lambda) p_r(K_S|\lambda) \\
&\geq \int_{\Lambda_{0,\bar{0}}} d\lambda \rho(\lambda) = \mu(\Lambda_{0,\bar{0}}) \\
&\geq \eta\bar{\eta}/12 = P_{LR}(K^0, \bar{K}^0)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Dieses Resultat ist aber im Widerspruch zu Gleichung (3.65).

Man kann bei obiger Argumentation auch noch eine Fehleridentifikation bei der Bestimmung von K_S und K_L berücksichtigen (d.h. nicht ideale Detektoren), dann erhält man das Gleichungssystem [9]

$$P_{QM}(K^0, \bar{K}^0) = \eta\bar{\eta}/12 \tag{3.70}$$

$$P_{QM}(K^0, K_L) = 6.77 \cdot 10^{-4} \eta \eta_\tau \tag{3.71}$$

$$P_{QM}(K_L, \bar{K}^0) = 6.77 \cdot 10^{-4} \bar{\eta} \eta_\tau \tag{3.72}$$

$$P_{QM}(K_S, K_S) = 1.19 \cdot 10^{-5} \eta_\tau^2 \tag{3.73}$$

wobei η_τ die Effizienz für die Detektion der Kaon Zerfallsprodukte ist. Der obige Widerspruch bleibt aufrecht, solange die Ungleichung [9]

$$\eta\bar{\eta} > 1.4 \cdot 10^{-4} \eta_\tau^2 \tag{3.74}$$

erfüllt ist.

3.4.3 Die Clauser-Horne Ungleichung mit neutralen Kaonen

Wir werden zum Abschluß noch zwei spezielle Ungleichungen anführen, welche die Inkompatibilität zwischen dem lokalen Realismus und QM beweisen.

Beginnen wir mit der originalen CH Ungleichung (2.41) und identifizieren die Messrichtungen a, b, a', b' mit den "Richtungen" im kaonischen Raum [9, 10], d.h. $a \rightarrow K_\alpha, b \rightarrow K_\beta, a' \rightarrow K_{\alpha'}, b' \rightarrow K_{\beta'}$, dann erhalten wir folgende CH Ungleichung für die Wahrscheinlichkeiten im kaonischen System

$$-1 \leq P(K_\alpha, K_\beta) - P(K_\alpha, K_{\beta'}) + P(K_{\alpha'}, K_\beta) + P(K_{\alpha'}, K_{\beta'}) - P(K_{\alpha'}, *) - P(*, K_\beta) \leq 0 \tag{3.75}$$

Die letzten beiden Terme bedeuten

$$\begin{aligned}
P(K_{\alpha'}, *) &= P(K_{\alpha'}, K_\gamma) + P(K_{\alpha'}, K_\gamma^\perp) + P(K_{\alpha'}, U_\gamma) \\
P(*, K_\beta) &= P(K_\delta, K_\beta) + P(K_\delta^\perp, K_\beta) + P(U_\delta, K_\beta)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

wobei K_γ^\perp der orthogonale Zustand zu K_γ ($\langle K_\gamma | K_\gamma^\perp \rangle = 0$) ist und U_γ die nicht-detektierten Zustände (die Ausfälle) repräsentiert.

Jetzt wählen wir bestimmte physikalische Kaon Zustände, nämlich $K_\alpha = K_S$, $K_\beta = \bar{K}^0$, $K_{\alpha'} = K^0$, $K_{\beta'} = K_S$, und $K_\gamma = K_S$, $K_\delta = K_L$, dann bekommen wir folgende CH Ungleichung [9, 10]

$$\frac{P(K_S, \bar{K}^0) - P(K_S, K_S) + P(K^0, \bar{K}^0) + P(K^0, K_S)}{P(K^0, *) + P(*, \bar{K}^0)} \leq 1 \quad (3.77)$$

wobei die Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(K^0, *) &= P(K^0, K_S) + P(K^0, K_L) + P(K^0, U_{lif}) \\ P(*, \bar{K}^0) &= P(K_L, \bar{K}^0) + P(K_S, \bar{K}^0) + P(U_{lif}, \bar{K}^0) \end{aligned} \quad (3.78)$$

sind und U_{lif} beschreibt die Ausfälle in der Lebenszeitsdetektion. Die Wahrscheinlichkeiten (3.78) eingesetzt, ergibt schließlich

$$\frac{P(K_S, \bar{K}^0) - P(K_S, K_S) + P(K^0, \bar{K}^0) + P(K^0, K_S)}{P(K^0, K_S) + P(K^0, K_L) + P(K^0, U_{lif}) + P(K_L, \bar{K}^0) + P(K_S, \bar{K}^0) + P(U_{lif}, \bar{K}^0)} \leq 1 \quad (3.79)$$

Der quantenmechanische Ausdruck für die Wahrscheinlichkeiten mit nicht-detektierter Lebenszeit ist

$$P_{QM}(K^0, U_{lif}) = \frac{1}{6}\eta(1 - \eta_\tau) \quad P_{QM}(U_{lif}, \bar{K}^0) = \frac{1}{6}\bar{\eta}(1 - \eta_\tau) \quad (3.80)$$

3.4.4 Die Eberhard Ungleichung mit neutralen Kaonen

Wir haben in dem Abschnitt 2.2.4 die Eberhard Ungleichung (2.42) [7] angegeben. Wie im vorigen Kapitel können wir diese Ungleichung auf das Kaon System übertragen, indem wir die Messrichtungen beim ordentlichen (o), außerordentlichen (e) und nicht-detektierten Strahl (u) mit den Richtungen im kaonischen Raum identifizieren, dann können wir wieder schreiben [9, 10]

$$P(K_{\alpha'}, K_{\beta'}) \leq P(K_{\alpha'}, K_\beta^\perp) + P(K_\alpha^\perp, K_\beta) + P(K_\alpha, K_{\beta'}) + P(K_{\alpha'}, U_\beta) + P(U_\alpha, K_\beta) \quad (3.81)$$

Wählen wir wieder bestimmte physikalische Kaon Zustände, nämlich $K_{\alpha'} = K^0$, $K_{\beta'} = \bar{K}^0$, $K_\alpha = K_L$, $K_\beta = K_S$, dann folgt die Eberhard Ungleichung in der Form

$$\frac{P(K^0, \bar{K}^0)}{P(K^0, K_L) + P(K_S, K_S) + P(K_L, \bar{K}^0) + P(K^0, U_{lif}) + P(U_{lif}, \bar{K}^0)} \leq 1 \quad (3.82)$$

Eigentlich folgt die Ungleichung (3.81) schon aus der oben angegebenen CH Ungleichung (3.75), (3.76), wenn wir $\gamma = \beta$ und $\delta = \alpha$ wählen. Die beiden Ungleichungen - Eberhard und CH - stellen echte Bell Ungleichungen dar und sind tatsächlich ableitbar vom lokalen Realismus für die beliebige Werte von R.

3.4.5 Diskussion der CH und Eberhard Ungleichungen und das Detektoreffizienz Loophole

Letzendlich wollen wir auch die experimentelle Durchführbarkeit und Überprüfung von der CH und Eberhard Ungleichung diskutieren (siehe Ref. [9, 10]). Diese ist klarerweise mit der Detektionseffizienz von Kaonen verbunden.

Als Detektionsloophole (“Schlupfloch”) bezeichnet man den Fall, wenn das gemessene Ensemble nicht das gesamte Ensemble repräsentiert. Das Problem der Detektoreffizienz resultiert aus der Tatsache, dass experimentell nicht *alle* Teilchen detektiert werden können. Der Detektionseffizienzfaktor ist folglich immer kleiner als 1. Unterschreitet er sogar einen kritischen Wert, der bei perfekten übrigen Versuchsbedingungen je nach Versuch zwischen den Werten 0.67 und 0.82 liegt, ist die Ungenauigkeit so groß, dass die Bellsche Ungleichung nicht mehr verletzt wird.

Die CH (3.79) und Eberhard Ungleichung (3.82) sind beide echte Bell Ungleichungen, sie liefern dieselben Einschränkungen auf die Effizienzen $\eta, \bar{\eta}$ und η_τ , die für ein in der Detektion loophole-freies Experiment erforderlich sind.

Nehmen wir zunächst an, dass eine perfekte Unterscheidung zwischen K_S und K_L immer möglich ist, d.h. $\eta_\tau = 1$, dann gelten für die Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen (3.62)-(3.65) und wir können einen schlüssigen Test der LRT für beliebige nichtverschwindende Werte von η und $\bar{\eta}$ machen. Damit bekommen wir im quantenmechanischen Fall $E_{QM} \rightarrow \infty, \forall \eta, \bar{\eta} \neq 0$ (E: Eberhard Ungleichung (3.82))

Im zweiten idealen Fall mit keinen nicht-detektierten Ereignissen, d.h. $\eta = \bar{\eta} = \eta_\tau = 1$, sind die Ungleichungen durch QM stark verletzt, $E_{QM} \simeq 60.0$ für (3.82), $CH_{QM} \simeq 1.25$ für (3.79).

Zuletzt nehmen wir an, dass nur die Detektionseffizienz der Zerfallsprodukte von Kaonen ideal ist, d.h. $\eta_\tau = 1$, dann sind für $\eta = \bar{\eta}$ die beide Ungleichungen durch die QM verletzt, wann immer $\eta > 0.023$ ist.

Jetzt untersuchen wir die mehr realistische Situation mit kleinen und erreichbaren Werten von η und $\bar{\eta}$. Das bedeutet, dass wir große aber realistische Werte von η_τ betrachten müssen, wie zum Beispiel $\eta_\tau = 0.97, 0.98, 0.99$ und idealerweise $\eta_\tau = 1$. Wir sehen auf der Abbildung 3.1 liegen die Werte von η und $\bar{\eta}$, die einen loophole-freien Test in der Detektion zulassen (d.h. $E_{QM} > 1, CH_{QM} > 1$), über der entsprechenden Kurve, die für bestimmte Werte η_τ eingezeichnet ist.

Wenn sich η_τ verringert, vermindert sich auch das Gebiet von η und $\bar{\eta}$, d.h. größere Werte von η und $\bar{\eta}$ sind erforderlich. Die Strangeness Detektionseffizienzen (also für K^0, \bar{K}^0), die für einen schlüssigen Test der LRT versus QM notwendig sind, liegen weit unterhalb des von Eberhard geforderten Limit von $\eta = 0,67$ [7] (siehe Kapitel 2.2.4). Die Werte von η und $\bar{\eta}$ liegen nahe der gegenwärtigen experimentellen Möglichkeiten [9, 10].

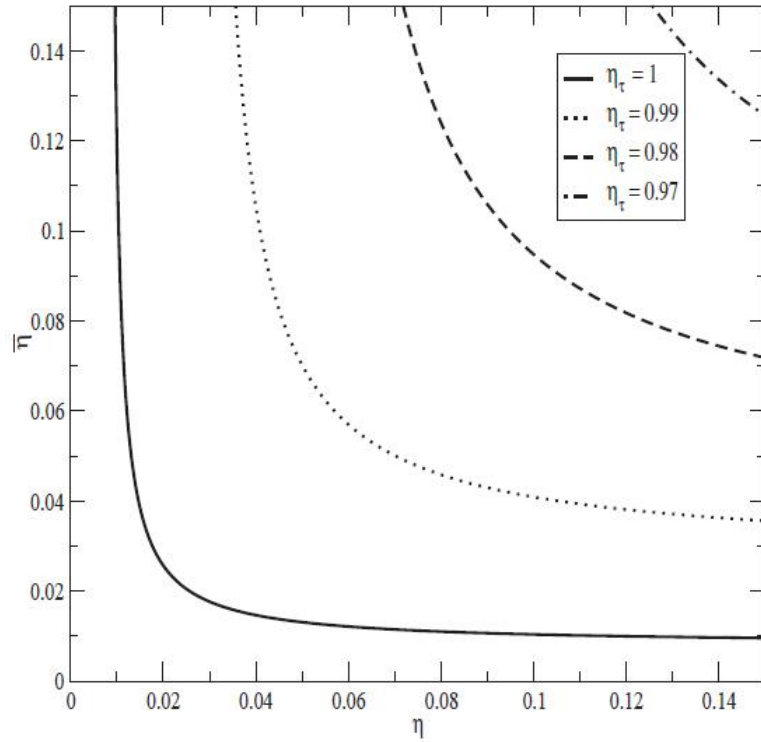


Abbildung 3.1: Die vier Kurven, die die Wert von η und $\bar{\eta}$ bestimmen (siehe Ref. [9, 10]), für die gilt $E_{QM} = 1$ (3.82) und $CH_{QM} = 1$ (3.79). Die QM verletzt die Ungleichungen (3.82) und (3.79) für Werte von η und $\bar{\eta}$, die über der entsprechenden Kurve liegen.

4 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

4.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist in drei große Kapitel unterteilt. Der erste Kapitel behandelt die QM der neutralen Kaonen. Wir haben mit der Phänomenologie der Kaonen begonnen, d.h. wir haben Eigenschaften wie die Strangeness erklärt und deren Oszillation, Symmetrien wie die CP Symmetrie beschrieben und deren Verletzung. Weiters haben wir die wichtige CPT Symmetrie (CPT Theorem) erklärt, aus der die Gleichheit der Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen folgt.

Kaonen haben einen interessanten Zerfallsmodus in kurz- und langlebige Zustände. Deshalb haben wir ausführlich die Zerfallsform der Kaonen erklärt, im speziellen die sogenannte Wigner-Weisskopf-Aproximation.

Dann haben wir den Regenerationsformalismus der Kaonen ausführlich dargestellt, da wir ihn im weiteren bei Bell Ungleichungen angewendet haben.

Im zweiten Kapitel werden die verschränkten Quantensysteme erklärt. Beginnend mit dem EPR Paradoxon besprechen wir eine lokale Theorie mit verborgenen Variablen. Dann erklären wir das Bellsches Theorem, den Gegensatz zwischen LRT und QM, und leiten die verschiedene Arten von Bell Ungleichung ab, wie die allseits bekannte CHSH Ungleichung, die Wigner Ungleichung, die CH und Eberhard Ungleichung. Die letzten drei Ungleichungen werden im weiteren auf Kaonen angewendet.

Das dritte Kapitel widmen wir den Bellschen Ungleichungen für neutrale Kaon Systeme. Wir zeigen die Analogie zwischen Kaonen und Photonen auf und berechnen die Wahrscheinlichkeiten bestimmte Kaonzustände in einem verschränkten Kaonsystem zu finden, im Rahmen einer unitären Zeitentwicklung, d.h. inklusive Zerfallsprodukte. Diese Wahrscheinlichkeiten werden benützt um eine allgemeine Bell Ungleichung aufzustellen, deren freier Parameter sowohl aus freier Wahl des Quasispin besteht, als auch aus den frei wählbaren Messzeiten.

Wir studieren eine Wigner Ungleichung im Quasispin der Kaonen bei fixen Zeiten und zeigen wie diese in eine meßbare Größe umgewandelt werden kann, nämlich in eine Ladungsasymmetrie (der Kaon Zerfälle), die ein Maß für die CP Verletzung ist. Es stellt sich heraus, dass eine CP Verletzung eine Verletzung der Bell Ungleichung zur Folge hat.

Letztendlich untersuchen wir genauer einen direkten Test von Bell Ungleichungen mittels Kaonen und Antikaonen. Dabei spielt der Regenerationsmechanismus, den wir auf verschränkte Kaon Systeme anwenden, eine große Rolle. Im speziellen haben wir eine kaonische CH Ungleichung und eine Eberhard Ungleichung aufgestellt und gezeigt für welche Detektoreffizienzen (bzw. Loopholes) sie experimentell testbar sind.

4.2 Schlußfolgerungen

Wir haben in unseren Untersuchungen herausgefunden, dass neutrale Kaonen große Ähnlichkeiten mit Photonen haben, wie z.B. den Quasispin und die Qubit Eigenschaft, aber auch große Unterschiede. Im Gegensatz zu Photonen besitzen die Kaonen eine (CP-Symmetrie), die ein wenig verletzt ist. Sie zerfallen, zeigen Oszillation zwischen Teilchen und Antiteilchen, und haben einen Regenerationsmechanismus. Somit haben Kaonen einen sehr großen Bereich, der getestet werden kann.

Es sind gerade die zusätzlichen Eigenschaften der Kaonen, die für einen Test der Lokal Realistischen Theorien versus Quantenmechanik wichtig geworden sind; d.h. für die Überprüfung einer Bell Ungleichung interessant geworden sind, vorallem um die Nichtlokalität der Quantenmechanik aufzuzeigen.

So zeigt sich, dass die CP-Verletzung der Kaonen im Zusammenhang mit der Verletzung einer Bell Ungleichung steht. Ein interessantes Faktum, das Wert ist auch bei anderen Symmetrien und deren Verletzung in der Teilchenphysik zu untersuchen.

Weiters zeigt unsere umfassende Analyse des Regenerationsmechanismus der Kaonen, dass dieser ein sehr interessanter Aspekt ist, um Bell Ungleichungen zu testen. Diese Tests liegen im Rahmen der gegenwärtigen experimentellen Möglichkeiten.

Die speziellen Eigenschaften der Kaonen machen die Quantenphysik innerhalb der Teilchenphysik zu einem interessanten Forschungsgebiet, speziell in Zusammenhang mit den Entwicklungen der Quanteninformation. Phänomene, die z.B. bei Photonen nicht auftreten, können mit Kaonen getestet werden.

Allerdings ist der tatsächliche Aufwand sehr groß, um in diese Richtung Experimente zu machen. Die verschränkten Kaon Paare müssen in den großen Teilchenbeschleunigern erzeugt werden, wie z.B. am CPLEAR im CERN oder am DAΦNE in Frascati. Experimente dieser Art können nur von großen Gruppen durchgeführt werden, aber Proposals in dieser Richtung gibt es bereits [41].

Literaturverzeichnis

- [1] J.H. Christensen, J.W. Cronin, V.L. Fitch, R. Turlay, *Evidence for the 2π Decay of the K_2^0 Meson*, Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964)
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47, 777 (1935)
- [3] J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Experiment*, Phys. 1, 195 (1964)
- [4] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969)
- [5] J.F. Clauser, M.A. Horne, *Experimental consequences of objective local theories*, Phys. Rev. 10, 526 (1974)
- [6] E.P. Wigner, *On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities*, Am. J. Phys. 38, 1005 (1970)
- [7] P. H. Eberhard, *Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment*, Phys. Rev. A, 47, R 747 (1993)
- [8] A. Bramon, G. Garbarino, *Test of Local Realism with Entangled Kaon Pairs and without Inequalities*, Phys. Rev. Lett. 89, 160401 (2002)
- [9] A. Bramon, R. Escribano, G. Garbarino, *Bells inequality tests with meson antimeson pairs*, Found. Phys. Vol. 36, 563 (2006)
- [10] A. Bramon, R. Escribano, G. Arbarino, *A review on Bell inequality tests with neutral kaons*, Frascati Phys. Ser., Vol. XLIII, (2007) Ed., A. Di Domencio, p. 217
- [11] A. Bramon, G. Garbarino, *Novel Bells inequalities for entangled $K^0\bar{K}^0$ pairs*, Phys. Rev. Lett., 88, 040403 (2002)
- [12] G.D. Rochester, C.C. Butler, *Evidence for the Existence of New Unstable Elementary Particles*, Nature 160, 855 (1947)
- [13] M. Gell-Mann, A. Pais, *Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation*, Phys. Rev. 97, 1387 (1955)
- [14] E. Noether, *Invarianten beliebiger Differentialausdrücke*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Kl. 37 (1918)

- [15] W. Pauli, *in: Niels Bohr and the development of physics*, McGraw-Hill, New York (1955): *On the conservation of the lepton charge*, Nuovo Cimento 6, 204 (1957)
- [16] G. Lüders, *On the equivalence of invariance under time reversal and under particle-antiparticle conjugation for relativistic field theories*, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd 28, no.5, (1954): *Proof of the TCP Theorem*, Ann. Phys. 2 1-15 (1957)
- [17] J.S. Bell, *Time reversal in field theory*, Proc. Roy. Soc. A231, 479 (1955)
- [18] V. Weisskopf, E. Wigner, *Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie*, Z. Phys. 63, 54 (1930) und ibid. 65, 18 (1930)
- [19] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1986)
- [20] H. van Hees, *Introduction to Quantum Field Theory*, URL <http://theory.gsi.de/van-hees/index.html> (2002)
- [21] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, In: *Annalen der Physik*, Band 79, p. 361 (1926)
- [22] R.A. Bertlmann, *Entanglement, Bell Inequalities and Decoherence in Particle Physics*, Lect. Notes Phys., 689, 1 (2006)
- [23] Branco Gustavo, *The International Series of Monographs on Physics*, 103, Oxford University Press, Oxford (1999)
- [24] B.C. Hiesmayr, *The puzzling story of the $K^0\bar{K}^0$ system or about quantum mechanical interference and Bell inequalities in particle physics*, Diploma Thesis University of Vienna (1999)
- [25] P.K. Kabir, *The cp puzzle*, Academic Press (1968)
- [26] A. Pais, O. Piccioni, *Note on the decay and absorption of the Θ^0* , Phys. Rev. 100, 1487 (1955)
- [27] Quang Ho-Kim and Xuam-Yan Pham, *Elementary Particles and Their Interactions*, Springer (1998)
- [28] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* 23, 807 (1935); 23, 823 (1935); 23, 844 (1935)
- [29] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of Hidden Variables*, Phys. Rev. 85, 166 (1952)
- [30] A.M. Gleason, *Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space*, Journal of Mathematics and Mechanics, 6, 885 (1957)
- [31] J.S. Bell, *On the problem of hidden variables in quantum mechanics*, Reviews of Modern Phys. 38, 447 (1966)

- [32] S. Kochen, E.P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics 17, 59-87 (1967)
- [33] D. Greenberger, M. Horne, A. Zeilinger, *Going Beyond Bells Theorem*, In: Kafatos, M., Hrsg.: Bells Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe. Kluwer, Dordrecht, p. 69 (1982)
- [34] J.S. Bell, *Bertlmann's socks and the nature of reality*, Journal de Physique, Tome 42, Colloque C-2, supplément au No.3, mars (1981) (siehe auch Ref [35], p. 139)
- [35] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, (1987)
- [36] R.A. Bertlmann and Beatrix C. Hiesmayr, *Bell inequalities for entangled kaons and their unitary time evolution*, Phys. Rev. A 63, 062112 (2001)
- [37] F. Uchiyama, *Generalized Bell inequality in two neutral kaon systems*, Phys. Lett. A 231 (1997)
- [38] R.A. Bertlmann, W. Grimus, and B.C. Hiesmayr, *Bell inequality and CP violation in the neutral kaon system*, Phys. Lett. A 289, 21 (2001)
- [39] R.A. Bertlmann, *Verschränkung, Dekohärenz und Geometrie von Quantensystemen*, Vorlesung (2006)
- [40] L. Hardy, *Nonlocality for two particles without inequalities for almost all entangled states*, Phys. Rev. Lett. 71, 1665 (1993)
- [41] A. Di Domenico, *Workshop on Neutral Interferometry at the Φ factory* (2006), Frascati Physics Series Vol. XLIII, (2007)
- [42] A. Bramon, G. Garbarino, B. C. Hiesmayr, *Quantum Marking and Quantum Erasure for Neutral Kaons*, Phys. Rev. Lett. 92, 020405 (2004)
- [43] A. Bramon, M. Nowakowski, *Bell Inequalities for Entangled Pairs of Neutral Kaons*, Phys. Rev. Lett. 83, 1 (1999)
- [44] A. Bramon, G. Garbarino and B.H. Hiesmayr, *Kaonic Quantum Erasers at KLOE 2: Erasing the Present, changing the Past*, Frascati Physics Series: Workshop on Neutral Kaon Interferometry at the Φ factory, 17 (2006)
- [45] A. Bramon, G. Garbarino and B.C. Hiesmayr, *Quantum Mechanics with Neutral Kaons*, Acta Phys. Polon. B, Vol. 38, 2763 (2007)
- [46] Achim Denig, *Vorlesung zur CP-Verletzung im Kaon-System* (2006)
- [47] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Teilchen und Kerne*, Springer Berlin Heidelberg (1993)

- [48] B.C. Hiesmayr, *What has a symmetry violation in particle physics to do with non-locality?*, Eur. Phys. J. Special Topics 159, 7984 (2008)
- [49] B.C. Hiesmayr, *The puzzling story of the neutral kaon system*, PhD-Thesis University of Vienna (2002)
- [50] B.C. Hiesmayr, *Nonlocality and entanglement in a strange system*, Eur. Phys. J. C 50, 73 (2007)
- [51] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, *Ladder Proof of Nonlocality without Inequalities: Theoretical and Experimental Results*, Phys. Rev. Lett. 79, 2755 (1997)
- [52] G.C. Ghirardi, R. Grassi, T. Weber, *in Proc. of Workshop on Physics and Detectors for DAΦNE, the Frascati Φ Factory*, April 9-12th, 1991, edited by G. Pancheri, p. 261
- [53] H. Genz, R. Decker, *Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik*, Vieweg, Braunschweig, (1991)
- [54] H.P. Stapp, *S-Matrix Interpretation of Quantum Theory*, Phys. Rev. D 3, 1303 (1971)
- [55] J. S. Bell, *Introduction to the hidden-variable question*, *in Foundations of Quantum Mechanics*, B. d'Espagnat, Hrsg., New York, 171 (1971)
- [56] M. Nowakowski, *Time evolution of K^0 - \bar{K}^0 system in spectral formulation*, SIS-Pubblicazioni, LNF-96/004(P); M. Nowakowski, Int. J. Mod. Phys., A 14, 589 (1999)
- [57] M.K. Sundaresan, *Handbook of Particle Physics*, CRC Press (2001)
- [58] N. David Mermin, *Hidden variables and the two theorems of John Bell*, Reviews of Modern Physics 65, 803 (1993)
- [59] N. Bohr, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. 48, 696 (1935)
- [60] Particle Data Group, *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J.C. 15 (2000)
- [61] R.A. Bertlmann, A. Zeilinger, *Quantum [Un]speakables from Bell to Quantum Information*, Springer-Verlag (2002)
- [62] R.A. Bertlmann, A. Bramon, G. Garbarino and B. C. Hiesmayr, *Violation of a Bell inequality in particle physics experimentally verified?*, Phys. Lett. A 332, 355 (2004)
- [63] R.A. Bertlmann, W. Grimus, B.C. Hiesmayr, *The EPR-paradox in massive systems or about strange particles*, *in Quantum [Un]speakables*, Eds., R.A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer, p. 163 (2002)
- [64] R.H. Dalitz, G. Garbarino, *Local Realistic Theories and Quantum Mechanics for the two-neutral-kaon system*, Nuclear Phys. B, Vol. 606, 483 (2001)
- [65] Renate Bertlmann, Foto von Lebenslauf



LEBENS LAUF

Persönliche Daten:

- Staatsangehörigkeit: Türkei
- Geburtsdaten: 15.05.1980, Rize
- Eltern: Halil Tataroglu, Yasemin Tataroglu
- Geschwister: ein Bruder, eine Schwester
- Familienstand: ledig

Ausbildung:

- 1985-1990 Grundschule, Samsun
- 1990-1996 Priestergymnasium, Samsun
- 1998-2000 Atatürk Universität Physik Fakultät, Erzurum
- 2002-2003 Vorstudiumlehrgang Deutschkurs, Wien
- 2003 Beginn des 1. und 2. Studienabschnittes der Physik an der Universität Wien
- 2008 Abschluß des 2. Abschnittes, Wien
- 2009 Beginn der Diplomarbeit mit Betreuung durch Prof. Reinhold Bertlmann, Wien

Sprachkenntnisse:

- Türkisch, Deutsch, Englisch