DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Wachstumsmodelle mit GeoGebra 3.2

Verfasserin

Judith Eva Maria Wolf

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im Juni 2009

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 406 299
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Lehramt Mathematik
Betreuerin:	Mag. Dr. Anita Dorfmayr

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Aus meiner eigenen Schulzeit habe ich den Eindruck gewonnen, dass in der Vergangenheit Wachstumsmodelle im Mathematikunterricht nur sehr rudimentär behandelt wurden. So wurde in meinem Mathematikunterricht am Gymnasium lediglich das lineare Wachstum und das exponentielle Wachstum besprochen. Die Bearbeitung des linearen Wachstums diente hierbei in erster Linie der Einführung des Funktionenbegriffs. Bei der Arbeit mit dem exponentiellen Wachstum stand vor allem der Logarithmus im Vordergrund. Insbesondere rekursive Berechnungen wurden in diesem Zusammenhang gänzlich ausgespart. Ein Grund hierfür könnte im erheblichen Rechen- und Schreibaufwand liegen, welcher mit den rekursiven Darstellungsformen von Wachstumsmodellen verbunden ist.
Nachdem Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker wie etwa Hans Georg Weigand [35], Hellmut Scheuermann [29], Willibald Dörfler [7] explizit den Einsatz des Computers im Mathematikunterricht propagiert haben, befindet sich der Mathematikunterricht seit einigen Jahren im Wandel. In zahlreichen Lehrer- und Lehrerinnenfortbildungsprogrammen[1] und Publikationen [7] [34] [17] [28] [35] werden Möglichkeiten des sinnvollen Einsatzes „Neuer Medien“ im Mathematikunterricht aufgezeigt. Zugleich werden Schülerinnen und Schüler, wie ich im Rahmen einiger Hospitationen an verschiedenen Wiener Gymnasien feststellen konnte, im Mathematikunterricht zunehmend mit Tabellenkalkulation, Dynamischen Geometrie Systemen und Computer Algebra Systemen vertraut

[1] Informationen zu aktuellen Lehrer- und Lehrerfortbildungsprogrammen findet man auf der Homepage der Pädagogischen Hochschulen `https://www.ph-online.ac.at`, sowie auf der Homepage der Bundesministeriums für Unterricht und Kultur `http://www.bmukk.gv.at/schulen/lehr/index.xml`. Informationen zu Fortbildungen zu GeoGebra findet man auf der Homepage `http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/Fortbildungen`.

gemacht.
Gerade im Bereich der Tabellenkalkulation konnte ich hierbei eine sehr starke Fixierung an das Softwareprodukt der Firma Microsoft beobachten. In der vorliegenden Arbeit soll eine Alternative zum Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft EXCEL™ im Mathematikunterricht aufgezeigt werden. Zu diesem Zweck werden bereits bestehende Materialien zum Bereich Wachstumsmodelle, die mit Hilfe von Tabellenkalkulationsprogrammen bearbeitet werden, analysiert. Besonderes Augenmerk wird hierbei auf die Zielsetzungen und die Variantenvielfalt der Materialien gelegt. Im Folgenden werden Materialien zu linearen, exponentiellen, begrenzten und logistischen Wachstumsprozessen für und mit GeoGebra 3.2 vorgestellt. Diese Vorschläge orientieren sich zum Teil an bereits bestehenden für Microsoft EXCEL™ konzipierten Materialien. Zum Teil habe ich sie eigens im Rahmen der vorliegenden Diplomarbeit für GeoGebra 3.2 entwickelt.

Alle Aufgabenstellungen und Materialien verstehen sich als Anregungen und sollen Möglichkeiten des Einsatzes der Listen und der Tabellenkalkulation in GeoGebra 3.2 im Mathematikunterricht der Unter- und Oberstufe einer allgemeinbildenden höheren Schule im Bereich Wachstumsmodelle aufzeigen.
Dies ist ganz im Sinne eines didaktischen Grundsatzes, der in den Bildungszielen des Mathematikunterrichts erwähnt wird zu verstehen:

> „Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geomeriesoftware oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Kennen lernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.“ [2]

2 Computereinsatz im Mathematikunterricht

Die Informationen zu diesem Kapitel stammen vorwiegend aus meinem Lehramtsstudium Informatik und Informatikmanagement, [29], [35], [23] und von den Internetseiten [36] und [21].

Als Anfang 1975 erstmals ein kleiner und preisgünstiger Computerbausatz [1] auf den Markt kam, begannen erstmals auch Privatpersonen kleine Computer für zu Hause zu besitzen. Seither dringen derartige Maschinen in zunehmendem Maße in viele Lebensbereiche des Menschen ein. Während zu Beginn dieser Entwicklung noch vielfach debattiert wurde, ob der Einsatz von Computern im Mathematikunterricht didaktisch sinnvoll sei, herrscht in der heutigen Gesellschaft weitgehender Konsens darüber, dass Jugendliche in der Schule an den Umgang mit Computern herangeführt werden müssen. So ist es auch nicht verwunderlich, dass es im allgemeinen Teil des Mathematik-Lehrplans für die AHS-Unterstufe heißt: „*Schülerinnen und Schüler sollen verschiedene Technologien (z.B. Computer) einsetzen können.*“ [3]. In den didaktischen Grundsätzen desselben Lehrplanes heisst es sogar: „*Arbeiten mit dem Taschenrechner und dem Computer: Grundsätzlich sind schon ab der 1. Klasse Einsatzmöglichkeiten zur planmäßigen Nutzung von elektronischen Hilfen beim Bearbeiten von Fragestellungen der Mathematik und als informationstechnische Hilfe (in Form von elektronischen Lexika, Statistiken, Fahrplänen, Datenbanken, ...) gegeben. Die Möglichkeiten elektronischer Systeme bei der Unterstützung schülerzentrierter, experimenteller Lernformen sind zu nutzen. Das kritische Vergleichen von Eingaben und Ausgaben bei verschiedenen Programmen und Geräten bezüglich der Problemstellung kann zum Entwickeln eines problem- und softwa-*

[1] Der Altair 8800 gilt als der erste „Personal Computer“

readäquaten Analysierens, Formulierens und Auswertens beitragen.“
Die oben angedeutete Entwicklung ging nicht von heute auf morgen von statten. Um die Problematik rund um den Einsatz von Computern im Mathematikunterricht besser bewerten zu können, gebe ich zunächst einen kurzen historischen Abriss über die Entwicklung von Rechenhilfen und Anwenderprogrammen.
Danach werde ich sowohl die positiven Aspekte, als auch die möglichen Probleme des Einsatzes von Computern im Mathematikunterricht aufzeigen.
Im dritten Abschnitt stelle ich Möglichkeiten vor, in denen der Computer im Mathematikunterricht genutzt werden kann.

2.1 Entwicklung von Rechenhilfen

Das älteste bekannte Rechengerät ist der Abakus[2]. In der Literatur finden sich unterschiedlichste Daten zu seiner Entstehung, seinen Ursprung scheint er jedoch im indo-chinesischen Raum zu haben. Er ermöglicht nicht nur die Durchführung der vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, sondern auch das Ziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, und ist heute noch als Rechenhilfsmittel für Blinde in Gebrauch.
Doch erst mit der Entstehung des dezimalen Stellenwertsystems im 6. Jahrhundert in Indien wurden Rechenalgorithmen für die Grundrechenarten entwickelt. Diese indischen Ziffern, welche bei uns als arabische Ziffern bekannt sind, kamen durch die Kreuzzüge (1095 – 1254) ins katholische Europa. Doch erst als der Rechenkünstler Adam Ries 1522 sein 2. Rechenbuch[3] veröffentlichte, setzte sich die Neuerung des Ziffernrechnens mit Hilfe eines Algorithmus durch.

[2] Eine gut verständliche Einführung zur Funktionsweise des Abakus, sowie zahlreiche Rechenbeispiele findet man auf `http://www.benjaminwrightson.de/abakus/homepage.htm`.
Sehr schöne Darstellungen diverser Abakuse aus verschiedenen Regionen und Epochen findet man auf [21]

[3] Das 2. Rechenbuch von Adam Ries heisst „Rechenung auff der linihen vnd federn“ wendet sich hauptsächlich an junge Kaufmanns- und Handwerkerlehrlinge. In diesem Buch dient das Linienrechnen (Rechnen mit dem Abakus) nur noch der Hinführung zum Ziffernrechnen mit dem Algorithmus.

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts entstanden die ersten Rechenmaschinen, mit denen das Addieren mit automatischem Zehnerübertrag mechanisiert wurde.[4] 1673 stellte G.W. Leibnitz in London seine Rechenmaschine für alle vier Grundrechenarten vor, weil es „eines Menschen unwürdig ist, gleich einem Sklaven Stunden mit eintönigen stupiden Berechnungen zu verlieren" [35, Seite 2]. Da Rechenschieber und Zahlentafeln (Logarithmentafeln) lange Zeit für die alltägliche Rechenarbeit ausreichten, vollzog sich die Weiterentwicklung der Rechenmaschinen zunächst eher schleppend. Doch als 1870 in Deutschland und in den USA die industrielle Herstellung von Rechenmaschinen begann, zogen diese auch in die Schulen ein. Ab diesem Zeitpunkt könnte man sagen, war die Schulmathematik geboren, denn „*[d]as Denken in Handlungsabläufen trat gegenüber dem arithmetischen Denken in den Vordergrund.*“ [35, Seite 2].
Unter Computer-Historikern herrscht Uneinigkeit darüber, welcher Computer „der erste“ gewesen sei. Dies rührt vorwiegend daher, dass der Begriff „Computer“ für diese Art von Rechnern noch nicht gebraucht wurde, und diese noch wenig mit unseren heutigen Computern gemein haben. Auf der „1st International Conference on the History of Computing“ in Paderborn einigte man sich darauf die Zuse Z3 als ersten Computer zu betrachten.
Den ersten elektronischen handflächengroße Taschenrechner entwickelte 1967 Texas Instruments. Dieser wog lediglich 1,5 kg und funktionierte mit Hilfe von Batterien, während Geräte mit vergleichbarer Rechenleistung zu dieser Zeit 25 kg und mehr wogen, und ständig an das Stromnetz angeschlossen sein mussten.
1972 kam schließlich mit dem HP-35 von Hewlett-Packard der erste wissenschaftliche Taschenrechner auf den Markt. Dieser kostete damals 1987 Mark, und löste zu Weihnachten 1972 einen regelrechten Taschenrecher-Boom aus. „Fünf Jahre später kaufte Krause als Student seinen ersten Taschenrechner mit wissenschaftlichen Funktionen für 198 Mark bei Quelle.“ [20] 1978 wurde

[4] Die erste mechanische Rechenmaschine konstruierte und baute Wihelm Schickard, Professor an der Universität Tübingen. Diese Maschine wurde vor allem für die Multiplikation entwickelt und benutzt das Prinzip der Rechenstäbe. Zudem wird erstmals ein dekadisches Zählrad für die Addition und die Subtraktion verwendet. [36]

der Taschenrechner in der Bundesrepublik Deutschland im Unterricht[5] erlaubt. Mit der Verfügbarkeit billiger universeller Mikroprozessoren kündigte sich Anfang der 70er Jahre des Vergangenen Jahrhundert eine Revolution auf dem Computermarkt an. Nachdem 1976 Apple I die Vorlage für eine erfolgreiche Mikrocomputer-Architektur lieferte, begann Ende der 1970er Jahre das Zeitalter der „Personal Computer“ , in dem diese Geräte immer mehr in unseren Alltag vordrangen und das Schlagwort „Computer Literacy“ geprägt wurde, um wie Hans-Georg Weigand und Thomas Wenth in [35] meinen „*auf die Gefahr eines Computer Analphabetismus hinzuweisen*“ . Unbestritten ist, dass spätestens seit diesem Zeitpunkt der Ruf der Öffentlichkeit nach einer „informations- und kommunikationstechnologischen Grundbildung“ für alle Schülerinnen und Schüler laut wurde.

Ähnlich große Erwartungen wie zuvor in die Einführung der arithmetischen Taschenrechner setzte man auch in die ersten Taschencomputer TI-92 und Casio FX 2.0, welche Ende des letzen Jahrhunderts erstmals im Rahmen von Schulversuchen im Mathematikunterricht in Realgymnasien eingesetzt wurden, und nach wie vor Verwendung finden. Angesichts der nicht unwesentlichen Kosten dieser Geräte, und der Tatsache, dass Notebooks heute verhältnismäßig günstig sind, wird nun der Umstieg von den Taschencomputern auf die leistungsstärkeren Notebooks diskutiert, der vereinzelt bereits stattgefunden hat.

In Österreich stellte das bm:bwk allen Schulen eine Lizenz für das Computeralgebraprogramm DERIVE [5] (für Windows) der Firma Soft Warehause, Inc. zur Verfügung, welche es Lehrerinnen und Lehrern ebenso wie Schülerinnen und Schülern erlaubt die Software auf ihrem Heimcomputer zu installieren.

Einen großen Beitrag leisten auf dem Gebiert der Computermathematik im Unterricht leisten auch die auch die

[5] meist ab Klasse 9

2.2 Neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen?

Der Ausgangspunkt der zunehmenden gesellschaftliche Relevanz neuer Medien und die informationstechnischen Entwicklungen im letzten Jahrhundert war die Mathematik. Folglich sollen diese Veränderungen auch auf die auf den Mathematikunterricht rückwirken. Die Relevanz der neuen Medien für die Bildung junger Menschen ist unumstritten. So ist es nicht überraschend, dass diese bereits Ausdruck in den Fachlehrplänen [6] gefunden hat. Auch in der Konzeption und der praktischen Durchführung des Unterrichts werden diese Neuerungen immer bedeutungsvoller. So stellt man sich im Fachkollegium seit einigen Jahren die Frage, wie die Erreichung der Lernziele durch den Einsatz des Computers, sei es als Medium zur Demonstration in der Hand des Lehrenden oder als Werkzeug in der Hand von Schülerinnen und Schülern, effizient unterstützt werden kann. Vorrangig geht es also nicht um die Veränderung von Zielen und Inhalten des Mathematikunterrichts, sondern um deren Vermittlung und den Umgang mit einzelnen Inhalten.

2.2.1 Fundamentale Ideen

In meiner bisherigen Lehrtätigkeit habe ich erkannt, dass es für Schülerinnen und Schüler überaus wichtig ist Beziehungsnetze, sog. „rote Fäden“ im Mathematikunterricht zu erkennen. Eine Hilfe für die Orientierung in der großen Stofffülle einer Wissenschaft stellen „Fundamentale Ideen[7]“ dar. Sie zeigen Grundzüge eines Faches auf, wobei sie sich an Begriffen oder Aktivitäten orientieren. Fundamentale Ideen des Mathematikunterrichts sind z.B. Messen, Steigung, Krümmung, Symmetrie, Zahl, Algorithmus, Zuordnung, Variable, Zufall, Optimierung, u.s.w.[8].
Nach [35] unterstützen neue Technologien wie etwa der Computer diese fun-

[6] vergl. [3] und [2]

[7] Der Begriff der „Fundamentalen Idee“, die ein Fach sowohl wissenschaftlich, als auch erkenntnistheoretisch strukturieren, geht auf J.Bruner (1970) zurück.

[8] Eine ausführliche Erörterung der fundamentalen Ideen des Mathematikunterrichts findet sich in [33]

damentalen Ideen im Unterricht aufzuzeigen.

2.2.2 Entlastung von Routinerechnungen

Im Mathematikunterricht kann der Computer zur Ausführung aufwendiger und langwieriger Berechnungen verwendet werden. Dies bietet die Möglichkeit vermehrt Aufgaben zu stellen, bei denen das Erfassen, Verstehen und Interpretieren von Daten bzw. Formelausdrücken im Mittelpunkt steht. Der algorithmisch-kalkülmäßige Anteil des Mathematikunterricht, dem bei Verwendung von herkömmlichen Taschenrechnern[9] das Hauptaugenmerk zukommt, tritt durch den Einsatz dieses neuen Hilfsmittels immer mehr in den Hintergrund. Hierzu heißt es in [27]:„Gerade aber durch den Wegfall der ‚rein technischen Arbeit‘ besteht die Möglichkeit, Bedeutung und Sinnhaftigkeit zu reflektieren.„Ein Beispiel für diesen positiven Aspekt ist die „gerade“ Kurvendiskussion, wie sie sowohl in der AHS, als auch in der BHS durchgeführt wird. Hier gehen Schülerinnen und Schüler im Wesentlichen nach dem Schema Differenzieren, Nullstellen, Extremwerte, Extremwertentscheidung, Monotonieverhalten, Wendepunkte, Krümmungsverhalten ohne erwähnenswerte geistige Leistungen vor. Auch die Berechnung von Funktionswerten, als eine im Mathematikunterricht häufig wiederkehrende Tätigkeit, stellt eine rein technische Arbeit ab, die von Schülerinnen und Schülern nur ungenügend reflektiert wird. Indem der Computer diese technischen Arbeiten, in denen nach der dritten analogen Aufgabe nur wenig Geistestätigkeit steckt, übernimmt, ist es möglich entscheidend mehr Aufgaben zu behandeln, die Ergebnisse zu vergleichen und zu reflektieren.

Diese technischen Änderungen erfordern einerseits versierte Lehrkräfte, die mit den neuen Hilfsmitteln des computerunterstützten Unterrichts umgehen können[10], als auch neue Aufgabenstellungen.

[9] Hier sind tragbare handliche Rechenmaschinen ohne Computeralgebrasystem (CAS) gemeint, die über keine Grafik verfügen, und mit denen nur numerischen Berechnungen durchgeführt werden können gemeint.

[10] Es ist nötig die Lehrenden in der Bedienung des Computers und der verwendeten Software zu schulen. Vergleiche dazu [27, Seite 9-11]

Da verschiedene Softwarepakete den Schülerinnen und Schülern die Berechnung teilweise abnehmen, kommt es unweigerlich zu neuen Schwerpunktsetzungen und neuen Lehr-/ und Lernzielen. Um ein Abgleiten der Lehr-/ und Lernziele des Mathematikunterrichts zu verhindern, müssen diese neu definiert werden. Andernfalls bewahrheitet sich [32, Seite 191]: „[...] there is a temptation to continue to teach mathematics in the traditional way and just to use the computer for the hard manipulative work. The computer and algebra package are used in much the same way as a calculator is used for arithmetic. The result is that the students learn no more mathematics than in the past and do not even acquire the manipulative skills they would previously have developed.“

2.2.3 Entdeckendes Lernen

Auf Grund der enormen Rechengeschwindigkeit moderner Computer können selbst komplexe Aufgaben mit seiner Hilfe rasch gelöst werden. Zudem motivieren dynamische Arbeitsblätter[11] Schülerinnen und Schüler mit den Objekten der Mathematik zu experimentieren. So wird durch den Computereinsatz entdeckendes Lernen gefördert. In Team-, Paar- oder Einzelarbeit können Schülerinnen und Schüler Vermutungen aufstellen, die sie anschließend selbst überprüfen können. So wird aus dem ehemals starren Gebiet der Mathematik eine spannende Spielwiese, in der es nicht mehr nur gilt Formeln auswendig zu lernen, sondern selbst Gesetzmäßigkeiten aufzufinden.
Währen man früher beispielsweise die Regeln für das Verschieben von Grafen mehr oder weniger als Gesetze auswendig lernte, können die Auswirkungen von Parameteränderungen auf Funktionsgrafen nun mit Hilfe eines passenden Softwarepaketes studiert werden. Somit bietet der Computereinsatz neue Möglichkeiten des selbstständigen Erarbeitens von Sachverhalten und selbstgesteuerten Lernens. Diese neuen Entwicklungen lassen zudem eine Differenzierung im Unterricht zu. Schülerinnen und Schüler, welche bereits die primären

[11] z.B. bei GeoGebra

Aufgabenstellungen erledigt haben, können versuchen weitere Eigenschaften herauszufinden, und selbstständig Entdeckungen machen.
Um zu verhindern, dass Lernende den Computer unreflektiert verwenden, ist es unumgänglich die Auswirkungen von Verfahrens- und Rundungsfehlern auf die Zahlenwerte zu diskutieren. Dabei sind die Grenzen der empirisch gewonnener Aussagen aufzuzeigen. Zudem ist die daraus entstehende Notwendigkeit formulierte Gesetzmäßigkeiten zu beweisen den Lernenden zu verdeutlichen. Hierzu schreibt Weigand in [34]: „Beim Arbeiten mit dem Computer ist es jedoch unumgänglich, die Grenzen dieses Werkzeuges von Anfang an deutlich herauszustellen. Wichtig scheint es mir zu sein, daß, wenn Computer in der Schule benutzt werden, solche Grenzen für Schüler bewußt gemacht werden. Dies ermöglicht auch eine Distanzierung von dem und damit eine Reflexion über den Computer“ . Trotz dieser Grenzen, die vom Standpunkt der Mathematik als Wissenschaft sehr wichtig sind, ist zu bemerken, dass es in der Schule um, wie Reichel in [27] meint „ein ‚persönliches Verhältnis‘ zur Mathematik und um Heuristik “ geht. Somit ist die empirische Erkenntnis aus dem direkte Vergleich und der sinnlichen Erfahrung ein wichtiger neuer Aspekt in Unterstufen- und Oberstufenmathematik. Der „spielrerische“ Zugang der sich durch das entdeckende Lernen zu bestimmten Themen der Mathematik eröffnet, birgt bestimmt so manches „Aha-Erlebnis“ für so manche Schülerin und so manchen Schüler.

2.2.4 Förderung der Fähigkeit zu Modellbildungen

Nach Heinrich Winter ist der Mathematikunterricht allgemein bildend, weil er drei Grunderfahrungen ermöglicht: „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen, mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen, in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische

Fähigkeiten), zu erwerben.“ [4]
All diese Grunderfahrungen, die im wesentlichen Teilleistungen der Modellbildung bzw. Modellierung sind, können durch den Einsatz von Computern im Mathematikunterricht unterstützt werden. Zunächst greift Winter die Problemformulierung auf, die im herkömmlichen Unterricht leider eher vernachlässigt wird, weil den Lernenden das Problem bereits in kleinen Schritten erläutert wird, und er die angegebenen Fragen nur noch der Reihe nach beantworten muss. In der Informatik wird oft mehr betont, dass die exakte Formulierung des Problems bereits die halbe Lösung ist. Da beim Einsatz von Computeralgebrasystemen die korrekte Eingabe entscheidend für den Erfolg ist, liegt die Annahme nahe, dass Schülerinnen und Schüler durch die Verwendung derartiger Softwarepakete eine genauere Arbeitsweise entwickeln und ihre Schritte besser planen.

2.2.5 Unterstützung der Anschauung

Im herkömmlichen Mathematikunterricht beansprucht das Zeichnen von Funktionsgrafen viel kostbare Unterrichtszeit. Nachdem die Schülerinnen und Schüler bereits einige Grafen selbst auf Papier gezeichnet haben lernen sie in der Tätigkeit des Zeichnens nichts mehr dazu. Das Zeichnen der Grafen dient dann lediglich der Unterstützung der Anschauung. Dieses Ziel gerät durch den langwierigen Zeichenprozess jedoch oft außer Sicht.
Mit Hilfe eines Geometrieprogrammes ist es nicht nur möglich in wesentlich kürzerer Zeit exaktere Zeichnungen anzufertigen, sondern auch mehrere verschiedene Grafen, welche man miteinander vergleichen kann. So gewinnt die Anschauung, die den Schülerinnen und Schülern oft lieber ist, als die rein algebraische Sicht eine stärkere Position in der Mathematik.
Im Gegensatz zu Grafiken auf Papier oder Folie haben die Grafen, welche am PC erstellt wurden zudem den Vorteil, dass interaktiv Veränderungen , wie z.B. die Veränderung von Parametern, oder das Verschieben von Tangenten, vorgenommen werden können. In diesem Zusammenhang nennt Weigand in [34, Seite 46 f.] weitere Gesichtspunkte „Der Computer kann dazu beitragen, dem Aufbau

von Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff entgegenzuwirken, indem es möglich wird, den Aufbau von Tabellen Diagrammen und Graphiken schrittweise zu verfolgen, Eingabedaten beliebig zu verändern und mehrere Darstellungen bzw. Darstellungsformen gleichzeitig auf dem Bildschirm betrachten zu können. [...] Durch den sequentiellen Bildaufbau kann die Eindeutigkeit funktionaler Zuordnungen sowie die dynamische Sichtweise einer Funktion verdeutlicht werden.“

3 Tabellenkalkulation

Bevor ich in Kapitel 4 auf das Softwarepaket GeoGebra näher eingehen werde, möchte ich in diesem Kapitel einige allgemeine Bemerkungen zur Tabellenkalkulation machen. Zunächst werde ich mich um eine Begriffsklärung bemühen und das Wesen der Tabellenkalkulation erklären. Im weiteren werde ich einige Anwendungsbereiche der Tabellenkalkulation aufzeigen, und hierbei insbesondere auf mögliche Anwendungen im Mathematikunterricht eingehen.

3.1 Was versteht man unter Tabellenkalkulation?

Unter einem Tabellenkalkulationsprogram (engl. „spreadsheat program“) versteht man eine Computeranwendung, für die interaktive Eingabe und Verarbeitung von numerischen und alphanumerischen Daten in Tabellenform. Im Wesentlichen werden hierbei Zahlen in einzelne Zellen eines Tabellenblattes eingetragen, welche anschließend mit Hilfe von Formeln und Verknüpfungen für Berechnungen eingesetzt werden können.
Das Bildschirmfenster eines Tabellenkalkulationsprogrammes ist dabei in Zeilen und Spalten eingeteilt. Je nach Bedienungskonzept wird dieser Bereich als Arbeitsblatt, Worksheet bzw. Spreadsheet bezeichnet. Jede Zelle der Tabelle wird durch ihre Zeile und Spalte eindeutig bezeichnet und kann eine Konstante (Zahl, Text, Datum, Uhrzeit ...) oder eine Formel enthalten, welche wiederum Werte aus anderen Zellen verwende kann.
Je nach Softwarepaket stellen Tabellenkalkulationsprogramme auch verschiedene Analysemöglichkeiten zur Verfügung. Die meistern Computeranwendungen im Bereich der Tabellenkalkulation ermöglichen zudem die grafische Darstellung der Ergebnisse in verschiedenen Darstellungsformen. Je nach Problemstellung können die Ergebnisse aus der Tabelle in zwei- und dreidimensionalen

Grafiken als Punkte- , Linien-, Balken- oder Kreisdiagramme dargestellt werden. Mit diesem Merkmal ist die Tabellenkalkulation sowohl als Werkzeug für Berechnungen, als auch als Hilfsmittel im Rahmen von Präsentationen einsetzbar.
Neben der Textverarbeitung ist die Tabellenkaluklation sowohl im privaten, als auch in der Berufswelt eine der häufigsten Anwendungen auf dem Computer. Das bekannteste und meist verbreitete Softwareprodukt zur Tabellenkalkulation ist „Microsoft Excel™“ im kommerziellen Office-Paket „Microsoft Office“. Es gibt jedoch auch zahlreiche alternative Programme, welche dieselben Funktionen anbieten, wie zum Beispiel „Calc“ im freien Office-Paket „OpenOffice.org“ bzw. „NeoOffice®[1]“, „Supercalc“ und viele mehr.

3.1.1 Anwendungsmöglichkeiten

Die Anwendungsmöglichkeiten der Tabellenkalkulation sind äußerst vielfältig. Mit derartigen Computeranwendungen ist es sowohl möglich einen Budgetplan oder eine Notenstatistik zu erstellen, die aktuelle Fussballtabelle auf Grund der Spielergebnisse der laufenden Saison zu berechnen, das Kassabuch eines kleineren Unternehmens zu führen, als auch die Benutzung öffentlicher Verkehrsmittel grafisch darzustellen.
Im Bereich von Büros war die Berechnung finanzieller Modelle und die Durchführung von Planspielen insbesoncere in der Anfangszeit der Tabellenkalkulation eine zentrale Anwendung, weil das Programm die Auswirkungen von Veränderungen einzelner Parameter sofort anzeigt. Heute werden die Arbeitsblätter auch oft als Ersatz für Datenbanktabellen herangezogen.
Im wissenschaftlichen Bereich werden Werte von Funktionen und deren Ableitungen oft mittels Tabellenkalkulation dargestellt. Bemerkenswert ist hierbei, dass diese Berechnungen nur wenigen Sekunden benötigen, und die Ergebnisse sehr einfach in Grafiken dargestellt werden können. Für das Auffinden von Extremwerten mit Hilfe von Tabellenkalkulation ist es zudem nicht nötig dif-

[1] NeoOffice ist ein Projekt, dessen Ziel es ist, das Office-Paket OpenOffice.org nativ auf Mac OS X ohne X11-Umgebung zu portieren.

ferenzieren zu können.
Vor allem Zins- und Darlehensberechnungen können mittels Tabellenkalkulationsprogrammen übersichtlich und aussagekräftig realisiert werden. So lässt sich z.B. mit der sog. Zielwertsuche per Knopfdruck ermitteln wie hoch der Zinssatz sein muss, damit ein gewisses Kapital nach einer bestimmten Anzahl an Jahren auf einen gewünschten Betrag angewachsen ist.

In der Schule erfährt die Tabellenkalkulation oft Anwendung in der Buchhaltung und der Mathematik. Es würde vermutlich den Umfang dieser Arbeit sprengen, würde ich versuchen alle Möglichkeiten der Anwendung der Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht aufzeige zu wollen. Somit kann ich Reichel nur zustimmen, wenn er in [27, Seite 87] schreibt: *„Bei Tabellenkalkulation handelt es sich um derart mächtige und gleichzeitig flexible Instrumente, daß man sie praktisch in jedem Teilgebiet der Schulmathematik einsetzen kann bzw. könnte.“*

3.2 Sinnvoller Einsatz von Tabellenkalkulationen im Mathematikunterricht

Um einen gewinnbringenden Einsatz der Tabellenkalkulation zu gewährleisten, ist es nötig einige Eigenheiten von Tabellenkalkulationsprogrammen zu berücksichtigen. So weist Neuwirth in [24, Seite 207] explizit darauf hin, die Tabelle als „konzeptuelles Notizpapier“ zu verwenden, damit bereits die Erstellung der Tabelle selbst den Modellierungsprozess ausdrückt. Dies bedeutet, dass in den Aufbau der Tabelle die Überlegungen zur Modellierung des Problems direkt einfließen sollen. Wie dies von statten gehen könnte zeige ich in den Beispielen in Kapitel 7.
Viele Schülerinnen und Schüler haben große Schwierigkeiten ihre Überlegungen als Formel auszudrücken. Aus diesem Grund ist es sinnvoll die Formeln, welche der Berechnung zu Grunde liegen, mittels einer „visuellen“ Methode einzugeben. Diese Methode wird in der Literatur oftmals als sog. „Hinzeigemethode“

bezeichnet, und bedeutet, dass zum Aufbau einer Formel in einer bestimmten Zelle die „Inputs“ aus anderen Zellen nicht durch Eintippen der Zelladresse mit Hilfe der Tastatur, sondern durch Anklicken der betreffenden Zellen mit der Maus bzw. mit den Cursortasten übernommen werden. Lediglich die Zeichen der Rechenoperation werden mittels Tastatur eingegeben.

Eine der Hauptschwierigkeiten bei der Arbeit mit Tabellenkalkulation ist die schwere Lesbarkeit der Formeln. Da der Benennung der einzelnen Zellen von Tabellenkalkulationsprogrammen üblicherweise ein cartesisches Koordinatensystem zu Grunde liegt, und die interne Darstellung der Formeln die Zelladressen verwendet, ist die Aussage der Formel nicht auf den ersten Blick erkennbar. Um eine Formel aus einem Tabellenkalkulationsprogramm zu verstehen, muss die Benutzerin/ der Benutzer zunächst hinterfragen welcher „Input“ sich hinter der verwendeten Zelladresse verbirgt. Für eine aussagekräftigere und einfachere Vorgangsweise empfehle ich bei der Präsentation die Beziehungen zwischen den einzelnen Zellen wie z. B. in Abbildung 3.1 mittels Pfeilen auszudrücken. Diese Darstellung stellt zwar eher eine „Bauanleitung“ der Formel, denn eine Beschreibung des mathematischen Modells dar, entspricht jedoch sehr gut dem dynamischen Aspekt der Tabellenkalkulation. Sie sollte eine Vorstufe der Formulierung des statischen, mathematischen Modells darstellen.

Jahr	Kontostand	Einzahlung	neuer Kontostand	Zinsen	End-kontostand
0	0	1000	1000	28,12	= +

Abbildung 3.1: Darstellung der Beziehungen mit Hilfe von Pfeilen

4 GeoGebra im Mathematikunterricht

Im Folgenden wird dem Leser die Mathematiksoftware GeoGebra [12] vorgestellt. Nach einem kurzen Abriss über die Entstehung und Entwicklung von Geogebra wird auf die Besonderheiten der neuen Version GeoGebra 3.2 eingegangen. Im Anschuss widme ich mich der Fragestellung, nach den möglichen Einsatzweisen dieser Software im Mathematikunterricht, bevor ich auf einige Probleme beim Umgang mit GeoGebra eingehen werde.

4.1 Was ist GeoGebra?

GeoGebra ist eine kostenlose, plattformunabhängige Mathematiksoftware, die für den Einsatz im Unterricht an Schulen entwickelt wurde. Ursprünglich als Geometrieprogramm konzipiert verbindet diese Software seit mehreren Versionen Geometrie, Algebra und Analysis.
Da dieses Softwarepaket dynamisch ist, können Konstruktionen mit Punkten, Vektoren, Strecken, Geraden, Kegelschnitten und Funktionen erstellt und anschleißend dynamisch verändert werden. Auf Grund der hohen Benutzerfreundlichkeit und intuitiven Verwendung ist GeoGebra äußerst leicht zu bedienen und bedarf keiner langen Einführung in die Funktionsweisen des Programms. Es ist jedoch auch eine direkte Eingabe von Gleichungen und Koordinaten möglich. Auf diese Weise ermöglicht GeoGebra auch das Rechnen mit Zahlen, Vektoren und Punkten. Zusätzlich stehen dem Benutzer zahlreiche Befehle zur Verfügung, mit deren Hilfe neue Objekte erzeugt oder bestehende verändert werden. Auf Grund des enormen Umfangs der mittlerweile verfügbaren Befehle ist eine detailierte Auflistung hier nicht möglich. Dem Leser sei an dieser Stelle das Kapitel 4.3. der GeoGebra Hilfe [16] sehr empfohlen, in dem alle Befehle der aktuellen Version aufgelistet und dokumentiert sind.

4.2 GeoGebra 3.2

GeoGebra 3.2 bieten nun auch das Werkzeug Listen. Passend zu dieser Neuheit ist es nun auch möglich im Ansichtsmodus „Tabelle“ zu wählen. Durch diese Komponente ist es fortan möglich auch Tabellenkalkulationen mit Hilfe dieser Software vorzunehmen. Diese Neuheit könnte nicht nur von ökonomischer Seite eine große Bereicherung für die Schule darstellen.
Eine für die Schule sehr hilfreiche Besonderheit von GeoGebra ist die nun dreifache Sichtweise der Objekte. Der Schüler bzw. die Schülerin kann mit Hilfe dieses Softwarepaketes ein mathematisches Objekt sowohl als Audruck im Algebrafenster, als auch in Form einer Liste in der Tabelle, oder einem Grafen im Geometriefenster beobachten. Leider ist es bis jetzt noch nicht möglich diese drei Ausgaben dynamisch miteinander zu verknüpfen. Lediglich das Algebrafenster und das Geometriefenster sind gekoppelt. Die alleinige Tatsache, dass diese drei Ebenen nun in einem Programm zur selben Zeit betrachtet werden können ist jedoch bereits ein großer Erfolg und könnte sich positiv auf das ganzheitliche Verständnis der Mathematik auswirken. Indem es alle Seiten eines Objektes beleuchtet und direkt vergleichbar gemacht werden, wird die ganzheitliche Sichtweise der mathematischen Stuktur ermöglicht. Gerade in diesem Zusammenhang verspricht die Interaktivität der Software ganz neue Zugänge zur Mathematik.

4.3 Was spricht für den Einsatz von GeoGebra?

Computer Algebra Systeme wie etwa Derive, Mathematica, Maple oder MuPAD und dynamische Geometrie Software wie z.B. Geometer's Strechpad oder Cabri Geometry sind mächtige Werkzeuge im Mathematikunterricht. Zahlreiche Untersuchungen zeigten, dass diese Software Pakete nützlich sein können um Erfahrung und Experimentierfreude im Mathematikunterricht zu fördern. Zudem helfen deren Visualisierungsfunktionen mathematische Inhalte effektvoll darzustellen und Verbindungen zu anderen Lehrinhalten zu knüpfen. [18]

Trotz all dieser Vorteile schrecken Lehrende oftmals wohlbegründet vor dem Einsatz dieser Software Pakete zurück, weil es zahlreicher Unterrichtsstunden bedarf den Schülerinnen und Schüler die Handhabung der verschiedenen Pakete nahe zu bringen. Insbesondere das Erlernen des Einsatzes von Computer Algebra Systeme beansprucht viel Zeit, da man die Syntax und die Befehle des Programms zunächst vermittelt bekommen muss. GeoGebra ist ein ziemlich mächtiges Werkzeug, das sowohl den Stoff der Unterstufe, als auch der Oberstufe abdeckt. Ein Oberstufenschüler bzw. eine Oberstufenschülerin, die bereits in der Unterstufe mit dem Programm vertraut war bleibt es erspart mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad der Lehrinhalte die Bedienung weitere Programme zu lernen. Er/ Sie kann mit der bereits vertrauten Software weiterarbeiten und sich auf die mathematischen Inhalte konzentrieren.
GeoGebra verbindet wie kein vergleichbares Produkt dynamische Geometrie und Computeralgebra. In der Laudatio der Jury des „digita 2004“ hieß es in diesem Zusammenhang: „Die Jury erkennt mit großer Freude den Förderpreis dem Programm GeoGebra zu, weil es in hervorragender Weise entdeckendes, handlungsorientiertes Lernen fördert und sich zur Lösung von Problemaufgaben eignet. Das Werkzeug hat durch die neuartige Verbindung von dynamischer Geometrie und Computeralgebra auf den behandelten Gebieten didaktische Vorteile die andere vergleichbare Werkzeuge so nicht bieten. “

4.4 Dokumentation

In diesem Kapitel werden die ersten Schritte mit GeoGebra 3.2 dokumentiert. Diese Ausführungen sollen lediglich eine erste Hilfe für den Benutzer und die Benutzerin darstellen. Im folgenden werden daher vor allem jene Funktionen vorgestellt, welche für die Aufgaben im dritten Teil der vorliegenden Arbeit relevant sind. Für eine detaillierte Dokumentation und zum Nachschlag bestimmter Funktionen sei dem Leser und der Leserin die das offizielle Handbuch **??** nahe gelegt.

4.4.1 Oberfläche

Nachdem GeoGebra gestartet wurde, sind zunächst nur wie in Abbildung 4.1 das Albegra- und das Geometriefenster sichtbar.

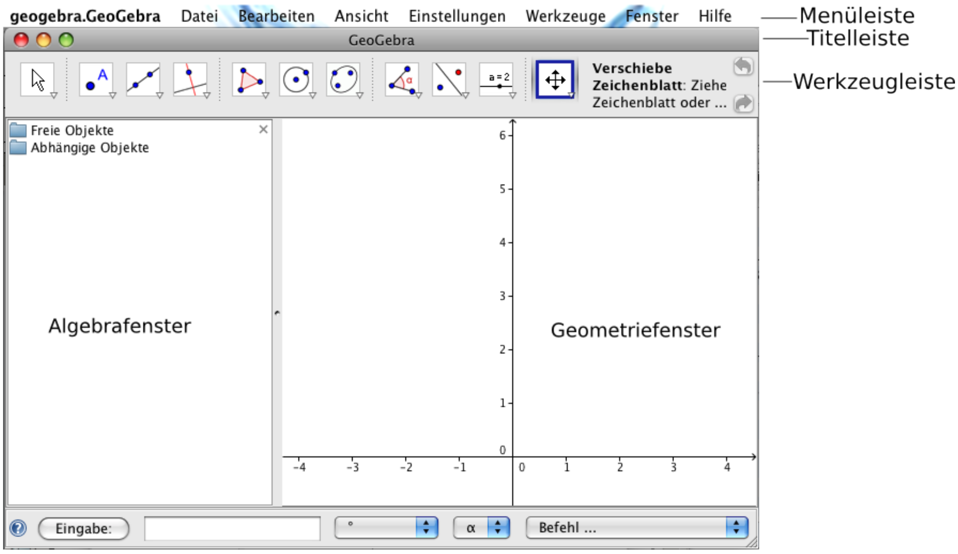


Abbildung 4.1: Bildschirmansicht GeoGebra 3.2 (Algebra- und Geometriefenster)

Um Tabellenkalkulationen durchführen zu können muss der Benutzer zunächst die Tabelle zuschalten. Dies ist über das Menü [Ansicht] → [Tabelle] möglich. Rechts neben dem Geometriefenster wird nun wie in Abbildung 4.2 eine leere Tabelle angezeigt.

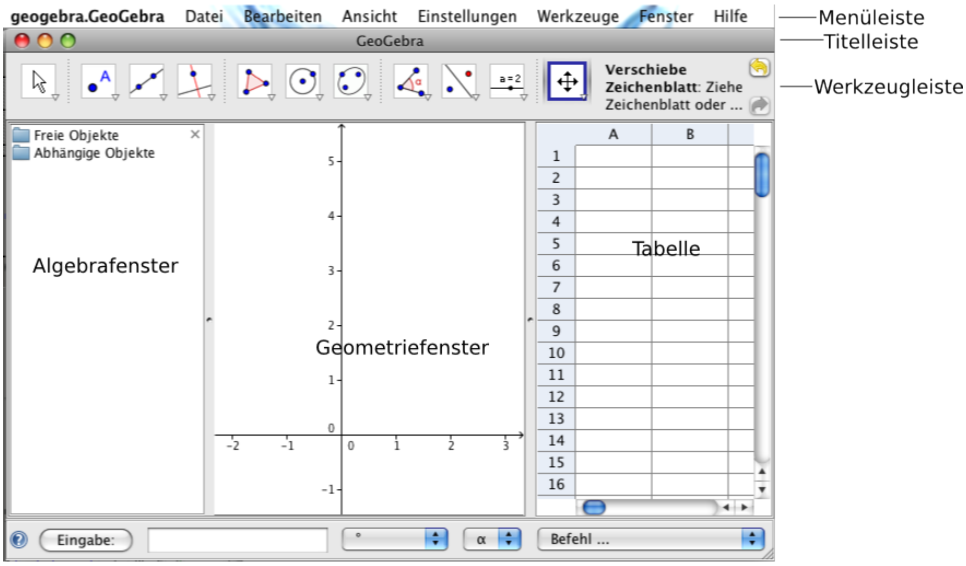


Abbildung 4.2: Bildschirmansicht GeoGebra 3.2 (Algebra-, Geometriefenster und Tabelle)

Klickt man mit der Maus in eine Zelle der Tabelle, welche durch den Namen der Spalte und den Namen der Zeile eindeutig adressiert ist[1], kann man in dieser Zelle eine Eingabe tätigen. Alternativ ist es auch möglich in der Eingabeleiste nach der Zelladresse und einem Gleichheitszeichen (etwa ‚E4 =‘) diese Eingabe zu machen. Alle Eingaben, gleich ob direkt in eine Zelle oder adressiert über die Eingabezeile, werden von GeoGebra als Zahlen oder Texte interpretiert. Es ist jedoch auch möglich andere Objekte wie zum Beispiel Punkte oder Kreise einer bestimmten Zelle zuzuordnen, welche dann automatisch angezeigt werden.

Da diese Eingaben, egal ob Zahlen, Texte oder andere Objekte, als Hilfsobjekte behandelt werden, scheinen sie üblicherweise nicht im Algebrafenster auf. Ihre Eigenschaften (Farbe, Position, ...) kann man ebenso wie die jedes anderen

[1] In einem Tabellenblatt sind Zellen in einem Raster aus Zeilen und Spalten, vergleichbar mit einer Matrix, angeordnet. Die einzelnen Elemente bzw. die Position einer Zelle ist durch die Kombination einer Zeile und einer Spalte bestimmt. Dabei sind die Spalten mit Buchstaben A, B, C, ... und die Zeilen mit Ziffern 1,2,3,4,5,... bezeichnet.

Hilfsobjekts verändern. Diese Veränderungen scheinen in der Tabelle auf.

4.4.2 Zellbezüge

Ebenso wie andere Tabellenkalkulationsprogrammen unterstützt auch GeoGebra die „Drag & Drop"-Methode, welche einfaches Verschieben ermöglicht. Wenn die Inhalte der jeweiligen Zellen beim Verschieben und Kopieren von Zellen und Zellbereichen verschoben bzw kopiert werden, nehmen sie den Bezugsnamen der neuen Zielzelle an. Hierbei ist es wichtig mit Zellbezügen zu arbeiten, damit eine bereits definierte Formel nicht immer wieder geändert werden muss.
Es wird zwischen drei Arten von Bezügen unterschieden:

4.4.2.1 Der relative Bezug

Prinzipiell ist jeder in eine Formel eingegebene Bezug ein relativer Zellbezug. Das bedeutet, dass der Bezugsname der Zelle relativ zur Zellposition ist. Beim Kopieren von Formeln in eine andere Zelle, die relative Zellbezüge enthalten, werden nach dem Einfügen der neuen Formel die Bezüge automatisch angepasst um auf andere Zellen relativ zur neuen Position der Formel zu verweisen. Kopiert man z.B. die Formel „$= B2+C2$" von Zelle $D2$ in Zelle $D3$, so ändert sich die Formel automatisch in „$= B3 + C3$".

4.4.2.2 Der absolute Bezug

Bei Verwendung eines absoluten Bezugs ändert, verändert sich die Formel vom Kopieren von einer Zelle in eine adere Zelle nicht. Man erkennt den absoluten Bezug an dem \$-Zeichen vor dem Spalten- und dem Zeilenbezug.
Kopiert man z.B. die Formel „$= B3 + \$C\$1$" von Zelle $C3$ in Zelle $C4$, so ändert sich in der Formel der Zellbezug $B3$ automatisch auf $B4$, der Zellbezug $\$C\$1$ bleibt jedoch unverändert. („$= B4 + \$C\$1$")

4.4.2.3 Der gemischte Bezug

Der gemischte Bezug ist eine Synkope aus relativem- und absolutem Bezug. Das „$“-Zeichen steht hier lediglich vor dem Spalten- oder dem Zeilenbezug. Beim Kopieren bleibt der Bezugsteil unverändert, vor welchem das $-Zeichen steht.

4.4.3 Funktionen

4.4.3.1 Ausfüllen von Zellen mit Hilfe von AutoAusfüllen

Mit dem Feature AutoAusfüllen ist es möglich eine Reihe (Zelle bzw. Spalte) automatisch automatisch auszufüllen. Möchte man die Zahlen von 0 bis 25 in einer Spalte haben, so genügt es „0“ einzugeben. Wenn die Zelle markiert ist, sieht man in der rechten unteren Ecke ein kleines Quadrat. Zieht man dieses Quadrat mit gedrücktem Cursor bis zur gewünschten Anzahl an Zahlen nach unten, so erhält man eine Reihe von Zahlen beginnend mit 0, jeweils um eins erhöht.
Möchte man eine andere Schrittweite, so muss man die ersten beiden Zahlen eingeben, und die beiden Felder markieren. Nun sieht man wieder rechts unten das kleine Quadrat, welches man mit gedrücktem Cursor bis zur gewünschten Anzahl an Zahlen nach unten zieht.
Da diese Ergänzung dynamisch ist, passt sich bei Veränderung der Ausgangszahlen die ganze Reihe an.
Ebenso einfach wie das AutoAusfüllen funktioniert das Kopieren von Formeln. Möchte man etwa in einer Reihe aus vorgegebenen Werten durch eine Formel Werte berechnen lassen, so muss man diese Formel nicht immer wieder eingeben. Es genügt die Formel für die Berechnung des ersten Wertes einzugeben, und die Berechnung durchführen zu lassen. Wichtig ist hierbei, dass man in der Formel die ”Relative Adressierung” verwendet. Die Formeln für die restliche Reihe kann man analog zum oben beschriebenen AutoAusfüllen von Zellen kopieren.

4.4.3.2 Funktionen und Variablen in der Tabellenkalkulation

Funktionen und Parameter, welche im Algebra- bzw. im Geometriefenster von GeoGebra 3.2 festgelegt sind, können auch in der Tabellenkalkulation von GeoGebra 3.2 verwendet werden. So kann man beispielsweise Funktionsgleichungen zur Berechnung von Wertetabellen heranziehen, Parameter als Teil einer Formel verwenden, oder Werte eines Schiebereglers in der Tabelle verwenden.

4.4.3.3 Erstellung von Listen aus einer Tabelle

Indem man einen einspaltigen Bereich markiert und danach im betreffenden Tabellenbereich rechts klickt, kann man eine Liste aus den Elementen des markierten Bereichs erstellen. Diese Liste wird als Hilfsobjekt erstellt und kann somit im Algebrafenster angezeigt werden.
Markiert man einen zweispaltigen Bereich in der Tabelle, so kann man mittels Rechtsklick auf den markierten Tabellenbereich eine Liste von Punkten aus den Elementen dieses Bereichs erstellen. Diese Punkte werden zugleich im Algebra- und im Geometriefenster angezeigt. Da GeoGebra 3.2 diese Punkte als Hilfsobjekte definiert, muss man die Punkte unsichtbar machen, wenn man nicht möchte, dass er im Algebrafenster aufscheint. Es genügt nicht lediglich die Liste unsichtbar zu machen.

4.4.4 Abfragen über Zellen

Zeile [<Zelle>] gibt die Zeile der Zelle als Zahl aus.

Spalte [<Zelle>] gibt die Spalte der Zelle als Zahl aus.

Zellbereich [<Anfangszelle> , <Endzelle>] gibt eine Liste der Elemente von Anfangszelle bis Endzelle aus.

4.4.5 Schieberegler

Zur grafischen Darstellung freier Zahlen und freier Winkel werden in GeoGebra Schieberegler verwendet. Sie finden vor allem dann Einsatz, wenn ein Wert innerhalb eines festgelegten Intervalls beliebig verändert werden können soll. Um einen Schieberegler zu erstellen, klickt man zunächst in der Werkzeugleiste mit der linken Maustaste auf das in Abbildung 4.3 markierte Feld, um die Funktion “Schieberegler„ zu aktivieren.

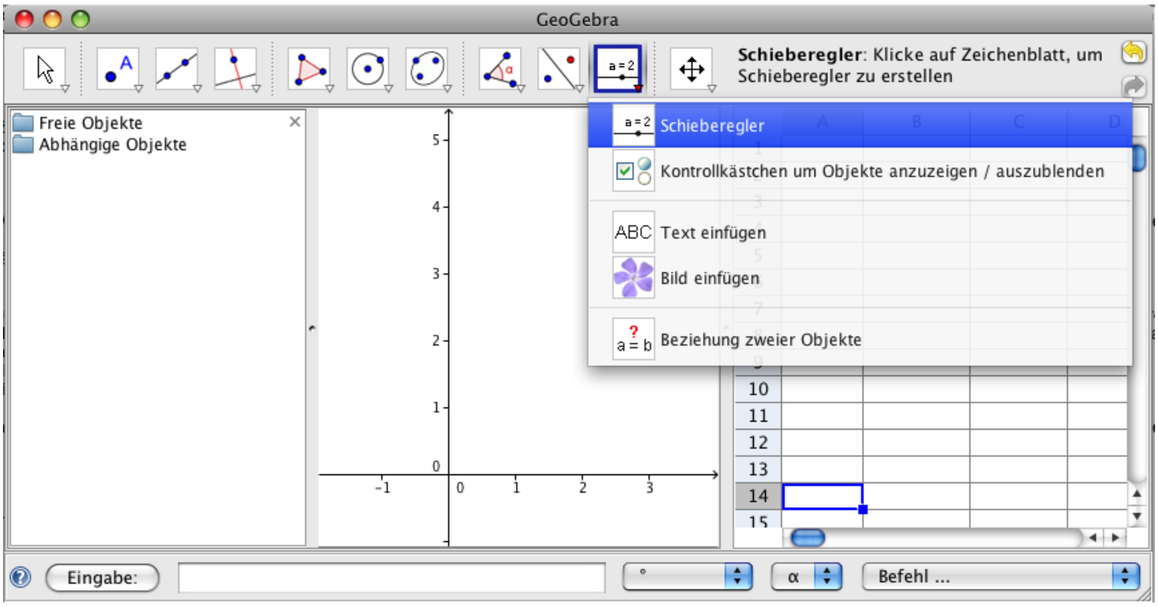


Abbildung 4.3: Feld für den Schieberegler

Um die Position des Schiebereglers im Geometriefenster festzulegen, klickt man anschließend auf eine freie Stelle im Geometriefenster. Sogleich erscheint das in Abbildung 4.4 abgebildete Dialogfenster, in dem wir die Einstellungen für den neuen Schieberegler festlegen können. Man kann wählen, ob es sich um eine Zahl oder einen Winkel handeln soll. Weitere Einstellungen betreffen den Namen, das Intervall [min, max], in dem sich der Schieberegler bewegen lassen soll, und die Schrittweite. Zudem können auch die Ausrichtung und die Breite des Schiebereglers in Bildpunkten festgelegt werden. Die Position des Schiebereglers ist prinzipiell veränderbar. Möchte man die Position des Schiebereglers fixieren, so ist dies entweder absolut am Bildschirm[2] oder relativ zum

[2]Der Schieberegler bleibt bei jeder Anpassen der Grafik-Ansicht immer sichtbar

Koordinatensystem[3] möglich. Nachdem man alle Einstellungen vorgenommen hat, klickt man auf „Übernehmen“.

Abbildung 4.4: Erstellung eines Schiebereglers

Möchte man den neuen Schieberegler auf einen bestimmten Wert setzen, so wählt man, wie in Abbildung 4.5 dargestellt, im Menü „Bearbeiten“ →„Eigenschaften“.

[3] Beim Vergrößern des Bildausschnittes könnte der Schieberegler vom sichtbaren Bereich des Zeichenblattes verschwinden

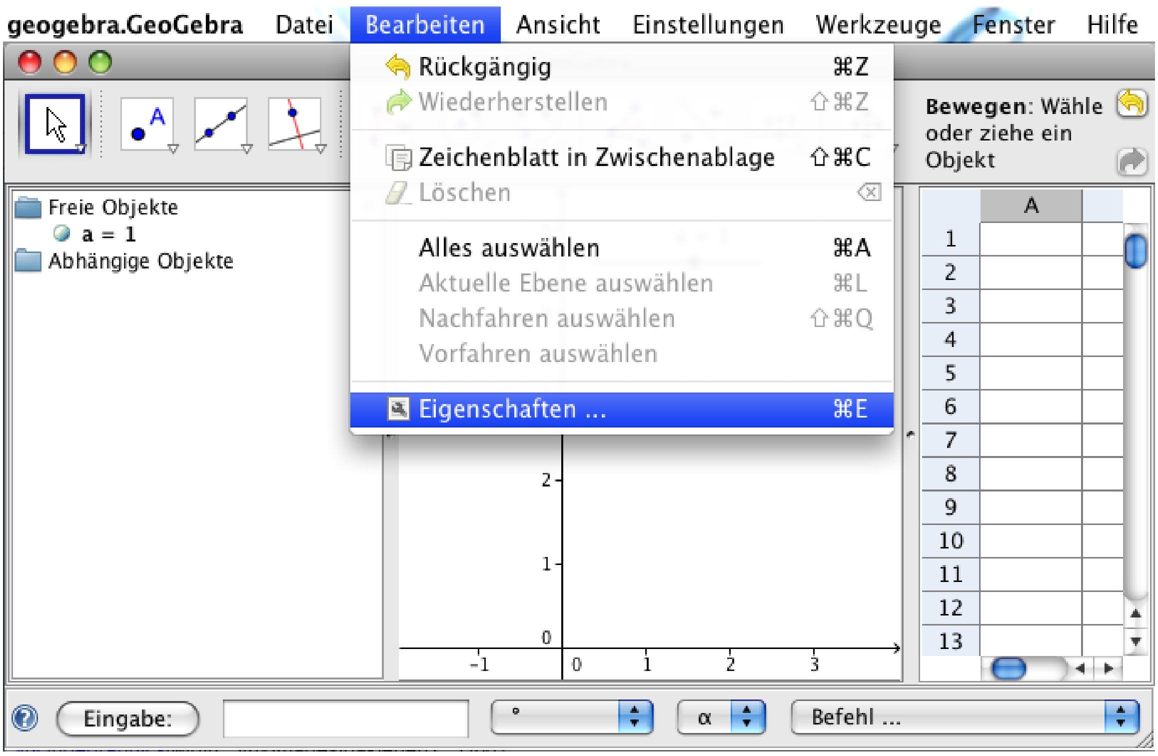


Abbildung 4.5: Eigenschaften

Im nun aufscheinenden Dialogfenster (siehe Abbildung 4.6) wählt man im linken Menü den eben erstellten Schieberegler, den man unter „Zahl“ unter seinem Namen findet.

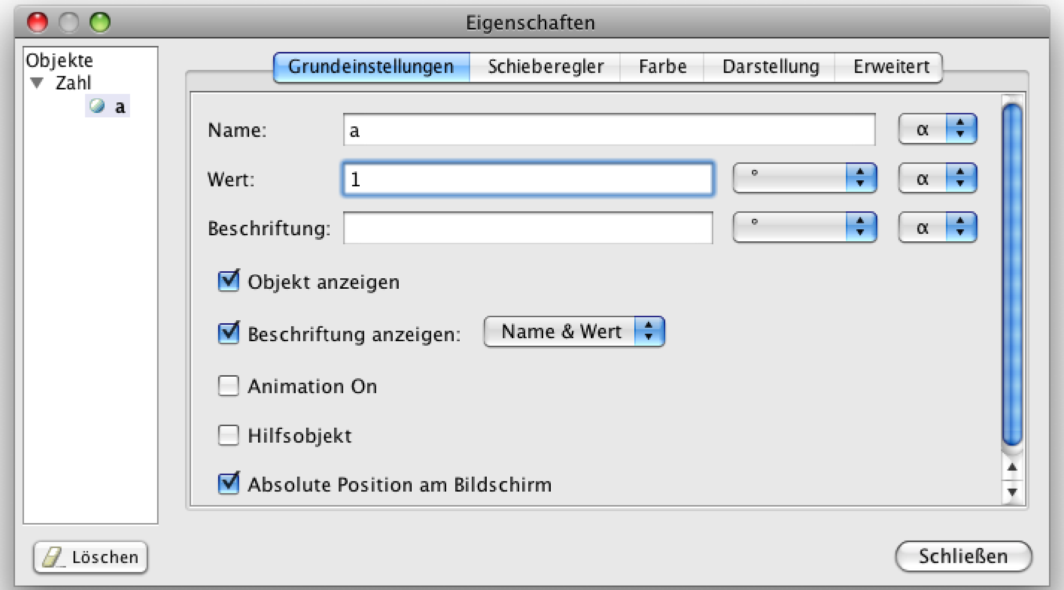


Abbildung 4.6: Festlegung eines Wertes für den Schieberegler

4.4.6 Features

Ebenso wie im Algebrafenster erhält man auch in der Tabelle Informationen über eine bestimmte Zelle, wenn sich der Cursor auf dieser Zelle befindet.

5 Mathematische Hintergründe zu Wachstumsmodellen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Hintergründe zu den Wachstumsmodellen beschrieben, welche im dritten Teil der Arbeit behandelt werden. Obwohl die Schülerinnen und Schüler keine Kenntnis über diese mathematische Hintergründe benötigen, um die im dritten Teil vorgestellten Probleme zu behandeln und selbst Wachstumsmodelle aufzustellen, ist es meiner Ansicht nicht unwesentlich, dass die Lehrperson über das entsprechende Hintergrundwissen verfügt.

5.1 Grundbegriffe

[6] [31]

Der Träger des Wachstumsvorganges bzw. des Abnahmevorgangs wird im Folgenden als *Bestand B* bezeichnet. Dieser wird sowohl für die Anzahl der Bevölkerung, als auch für die Größe einer Tierpopulation, die Anzahl von Pflanzen auf einem gewissen Gebiet, die Anzahl von Hefebakterien in einer Hefekultur oder anderen chemischen Substanzen, die in Laborversuchen ermittelt wird, oder eine wirtschaftliche Größe wie etwa das Sozialprodukt, der Lohn, oder das angesparte Vermögen verwendet.
Da Wachstumsvorgänge im Laufe einer gewissen Zeit stattfinden, ist der jeweilige Bestand in Zusammenhang mit dem *Zeitpunkt t* der Beobachtung zu sehen. Wir sprechen somit immer von einem Bestand zu einem gewissen Zeitpunkt. Wir bezeichnen diesen momentanen Bestand zum Zeitpunkt t mit $B(t)$. Der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$ heisst *Anfangsbestand* $B(0)$. Für den Zeitpunkt

t gilt:

$$t = n \cdot \Delta t \tag{5.1}$$

n bezeichnet hierbei die Anzahl der *Zeitintervalle*, in welche der gesamte Beobachtungszeitraum geteilt wird.

Die Änderung des Bestandes ist bei den meisten Wachstums- bzw. Abnahmevorgängen zu verschiedenen Zeiten unterschiedlich groß. Im Folgenden werden einige Begriffe vorgestellt, mit denen die Stärke des Wachstums- bzw. die Stärke der Abnahme angegeben werden kann.

Der *absolute Zuwachs* bzw. die *absolute Abnahme* des Bestandes wird auch als *absolute Änderungsrate* ΔB bezeichnet. Sie ist die Differenz zwischen den Beständen in zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten und wird wie folgt berechnet:

$$\Delta B = B_{n+1} - B_n \tag{5.2}$$

In Abbildung 5.1 ist die grafische Interpretation der absoluten Änderungsrate zu sehen.

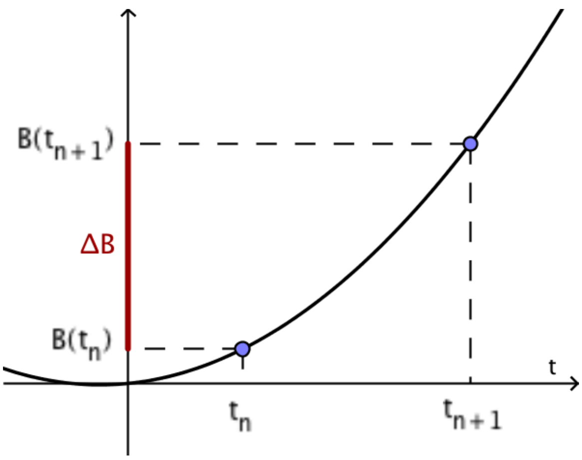


Abbildung 5.1: grafische Interpretation der absoluten Änderungsrate

Die Tatsache dass die absolute Änderungsrate nicht dimensionslos ist und je nach Größe der Zeitintervalle andere Werte liefert, führt insbesondere bei Vergleichen zu Problemen. Möchte man ein vergleichbares Maß für die Änderung angeben, bzw. ist man an der prozentuellen bzw. einer dimensionslosen Änderung interessiert, so verwendet man die *relative Änderung*, also die Änderung des Bestandes bezogen auf den ursprünglichen Bestand:

$$\frac{\Delta B}{B_n} = \frac{B_{n+1} - B_n}{B_n} \tag{5.3}$$

Die *Zuwachsgeschwindigkeit* bzw. die *Abnahmegeschwindigkeit* wird durch die *mittlere Änderungsrate* $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ ausgedrückt. Sie ist die durchschnittliche Änderung einer zeitabhängigen Messgröße zwischen zwei Zeitpunkten und wird als Quotient aus der Differenz der Bestände zu den beiden Zeitpunkten und der Differenz der Zeitpunkte, also der Dauer, berechnet:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B_{n+1} - B_n}{t_{n+1} - t_n} \tag{5.4}$$

Grafisch lässt sich die mittlere Änderungsrate einer Funktion im Intervall $[t_1, t_2]$ als mittlere Steigung des Funktionsgrafen im Intervall $[t_1, t_2]$ interpretieren (siehe Abbildung 5.2). Die mittlere Änderungsrate ist somit ein Maß für die „Steilheit“des Funktionsgrafen, und ändert sich in nichtlinearen Funktionen mit der Wahl des betrachteten Zeitintervalls.

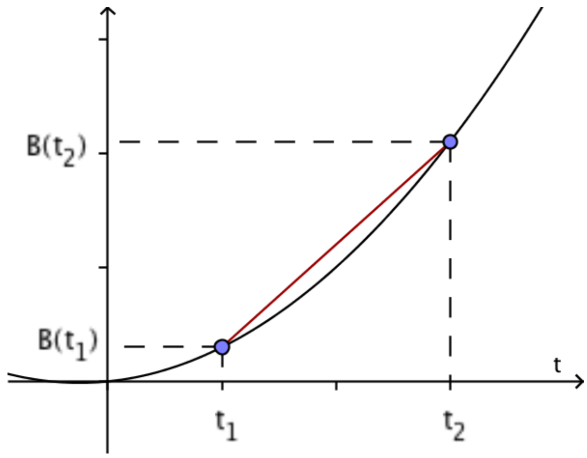


Abbildung 5.2: grafische Interpretation der mittleren Änderungsrate

Die *mittlere relative Zuwachs-* bzw. *Zerfallsrate* (kurz: Zuwachs- bzw. Zerfallsrate) drückt die absolute Änderung des Bestandes ΔB bezogen auf den alten Bestand B_n und die Zeitspanne Δt aus. Sie ist somit äquivalent zur relativen Änderung des Bestandes $\frac{B_{n+1}-B_n}{B_n}$ bezogen auf die Zeitspanne $t_{n+1} - t_n$ bzw. die mittlere Änderungsrate des Bestandes $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ bezogen auf den alten Bestand B_n. Dem entsprechend wird sie in Prozent pro Zeiteinheit angegeben und folgendermaßen berechnet:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t \cdot B_n} = \frac{B_{n+1} - B_n}{(t_{n+1} - t_n) \cdot B_n} \tag{5.5}$$

Wählt man als Zeitintervall $\Delta t = 1$, so ist die Zuwachsgeschwindigkeit gleich der relativen Änderung (vgl. 5.3).

Der Quotient aus den Beständen zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ wird *Wachstumsrate* genannt.
Die *momentane Zuwachsrate* bzw. die *momentane Zerfallsrate*, bezeichnet man allgemein als *momentane Änderungsrate des Bestandes*. Diese entspricht dem Grenzwert der mittleren Änderungsrate des Bestandes für $\Delta t \to 0$ und wird

folgender Weise berechnet:

$$\lim_{t_{n+1}\to t_n} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \lim_{t_{n+1}\to t_n} \frac{B_{n+1} - B_n}{t_{n+1} - t_n} = m'(t) \tag{5.6}$$

Möchte man die *momentane relative Zuwachsrate* bzw. die *momentane relative Zerfallsrate* berechnen, so geschieht dies über den Grenzwert der mittleren relativen Änderungsrate für $\Delta t \to 0$ mittels

$$\lim_{t_{n+1}\to t_n} \frac{\Delta B}{\Delta t \cdot B_n} = \lim_{t_{n+1}\to t_n} \frac{B_{n+1} - B_n}{(t_{n+1} - t_n) \cdot B_n} = \frac{m'(t)}{m(t)} \tag{5.7}$$

5.2 Lineares (additives) Wachstum

Das Wachstum bzw. die Abnahme (negatives Wachstum) eines Bestandes wird als *linear* bzw. *additiv* bezeichnet, wenn sich der Wachstumsvorgang durch eine lineare Funktion beschreiben lässt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der absolute Zuwachs (die absolute Abnahme) pro Zeiteinheit konstant ist. Charakteristisch für solch ein Wachstum ist daher, dass die mittlere Änderungsrate $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ konstant ist. Somit ist der Bestand gleich dem Bestand im letzten Zeitpunkt plus dem konstanten Zuwachs. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 5.3 veranschaulicht.

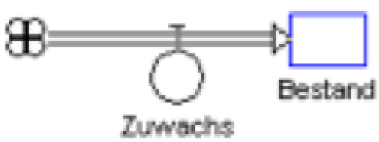


Abbildung 5.3: Flussdiagramm für linearesWachstum

Da wir den Bestand immer nur in einzelnen Zeitpunkten bestimmen, stellen wir zunächst die Gleichung für das lineare Wachstum im diskreten Modell auf. Für die Zuwachsgeschwindigkeit (mittlere Änderungsrate) gilt nach den Überlegungen in Kapitel 5.1:

$$B_{n+1} - B_n = k \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.8}$$

Somit erhalten wir durch Umformung die Iterationsformel

$$B_{n+1} = B_n + k \tag{5.9}$$

Berechnet man mit Hilfe dieser Formel die ersten Werte, dann folgt für die Berechnung des Bestandes zum Zeitpunkt n:

$$B(n) = n \cdot k + B(0) \tag{5.10}$$

Da der Bestand nicht nur in den Zeitpunkten zu- bzw. abnimmt, sondern sich diese Veränderung vielmehr kontinuierlich vollzieht, können wir das kontinuierliche Modell verwenden und davon ausgehen, dass nach den Überlegungen in 5.1 für die momentane Zuwachsgeschwindigkeit (momentane Änderungsrate) gilt:

$$\frac{dB}{dt} = k \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.11}$$

Wir lösen diese Differentialgleichung mittels Integration:

$$\int dB = k \cdot \int dt + c \tag{5.12}$$

$$B(t) = k \cdot t + c \qquad (c \in \mathbb{R}) \tag{5.13}$$

Die Integrationskonstante c ist hierbei wegen $B(0) = k \cdot 0 + c$ nichts anderes als der Bestand zu Beginn der Messung ($t = 0$). Somit folgt das lineare Wachstumsgesetz:

$$B(t) = k \cdot t + B(0) \tag{5.14}$$

Dabei bezeichnet k den Zuwachs bzw. die Abnahme pro Zeiteinheit und $B(t)$ den Bestand zum Zeitpunkt t. Diese Änderungsrate k wird auch als Steigung bezeichnet. Ist $k > 0$, so liegt ein linearer Zuwachs vor. Ist $k < 0$ so handelt es

sich um eine lineare Abnahme.
Ist bereits zu Beginn der Messung ein gewisser Bestand zu beobachten, so ist $B(0) \neq 0$ und das Wachstum wird durch eine inhomogene Funktion (siehe Abbildung 5.4 repräsentiert.
Ist zu Beginn der Messung kein Bestand vorhanden, so spricht man von einer homogenen Funktion (siehe Abbildung 5.5. In diesem Fall lautet die Wachstumsformel $B(t) = k \cdot t$. Der Graf solch einer Funktion geht im Gegensatz zum Grafen einer inhomogenen Funktion durch den Koordinatenursprung (0/0).

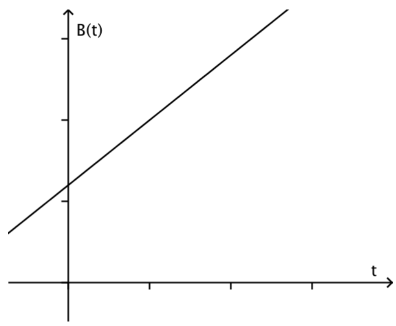


Abbildung 5.4: Funktionsgraf einer inhomogenen linearen Funktion

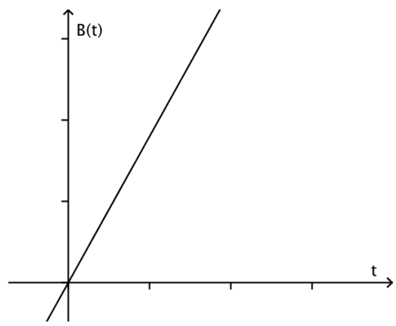


Abbildung 5.5: Funktionsgraf einer homogenen linearen Funktion

In der Natur können Wachstumsvorgänge nur für kurze Zeitabschnitte durch lineares (additives) Wachstum angenähert werden. Über längere Zeit kann lineares Wachstum in der Natur nicht beobachtet werden.

Beispiele für Wachstumsprozesse, welche mit Hilfe des linearen Modells modelliert werden können:

- einfache Verzinsung
- Handytarife von Wertkartenhandys
- Befüllen/ Leeren eines Schwimmbeckens
- Zurückgelegter Weg bei gleichbleibender Geschwindigkeit
- Anwachsen einer Oxidschicht/ Eisschicht

5.3 Exponentielles (unbegrenztes) Wachstum

Das Wachstum bzw. die Abnahme (negatives Wachstum) eines Bestandes wird als *exponentiell* bezeichnet, wenn sich der Wachstumsvorgang durch eine Exponentialfunktion beschreiben lässt. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich der Bestand pro Zeiteinheit nicht wie beim linearen Wachstum um einen festen Wert ändert, sondern um einen festen Prozentsatz. Somit ist der Zuwachst pro Zeiteinheit beim exponentiellen Wachstum proportional zum jeweils letzten Bestand, der relative Zuwachs, die so genannte Wachstumsrate hingegen konstant. Diese Modellidee ist in Abbildung 5.6 veranschaulicht.

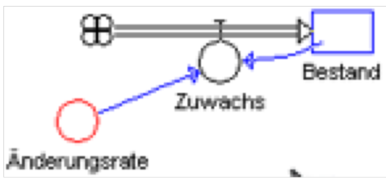


Abbildung 5.6: Flussdiagramm für exponentielles Wachstum

Für die Gleichungsdarstellung betrachten wir ebenso wie in Kapitel 5.2 wieder zunächst das diskrete Modell.

Da nach den obigen Überlegungen die relative Änderung konstant ist, folgt:

$$\frac{B_{n+1} - B_n}{B_n} = k \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.15}$$

Durch Umformung erhalten wir die Iterationsformel

$$B_{n+1} = B_n \cdot (1 + k) \tag{5.16}$$

Mittels dieser Formel berechnen wir die Bestände in den einzelnen Zeitpunkten berechnen, daraus auf folgende Formel für die Berechnung des Bestandes zum Zeitpunkt n schließen:

$$B_n = B_0 \cdot (1 + k)^n \tag{5.17}$$

Da wir auch beim exponentiellen Wachstum einen kontinuierlichen Vorgang annehmen können, betrachten wir nun das kontinuierliche Modell für diesen Wachstumsprozess.
Für die momentane Änderungsrate gilt hier analog zu oben:

$$\frac{dB(t)}{dt} = k \cdot B(t) \tag{5.18}$$

Wir formen diese Differentialgleichung für den momentanen Zuwachs (die momentane Abnahme) um und lösen sie mittels Integration:

$$\int \frac{B'(t)}{B(t)} dt = \int k \cdot dt + c \tag{5.19}$$

$$\ln |B(t)| = k \cdot t + c \tag{5.20}$$

$$B(t) = e^{k \cdot t + c} = e^c \cdot e^{k \cdot t} \tag{5.21}$$

Die Konstante e^c ist hierbei wegen $B(0) = e^c \cdot e^{k \cdot 0} = e^c \cdot e^0 = e^c$ nicht anderes als der Bestand zu Beginn der Messung ($t = 0$). Somit folgt das exponentielle Wachstumsgesetz:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t} \tag{5.22}$$

Dabei ist $B(0)$ der Anfangsbestand ($t = 0$) und $B(t)$ der Bestand zum Zeitpunkt t.
In Abbildung 5.7 ist der Funktionsgraf einer exponentiellen Funktion zu sehen.

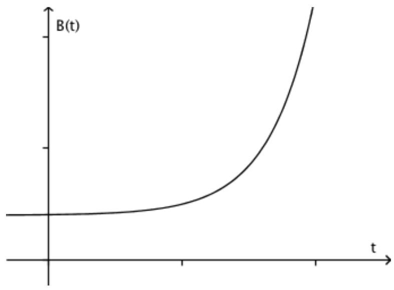


Abbildung 5.7: Funktionsgraf einer exponentiellen Funktion

Charakteristisch für den exponentiellen Vorgang ist der Exponent k, der die Wachstumskonstante (exponentielles Wachstum) bzw. Zerfallskonstante (exponentielle Abnahme) angibt. Ist $k > 0$, so liegt exponentielle Zunahme vor. Ist $k < 0$, so handelt es sich um exponentielle Abnahme.
Die Verdoppelungszeit, d.h. die Zeit, in welcher ein bestimmter Bestand auf seine doppelte Menge anwächst, bzw. die Halbwertszeit, d.h. die Zeit, in welcher die Hälfte der Menge eines Bestandes zerfällt, ist direkt proportional zum Parameter k:

$$2 \cdot B(0) = B(0) \cdot e^{k \cdot t} \tag{5.23}$$

$$t = \frac{\ln 2}{k} \qquad \ldots \text{Verdoppelungszeit} \tag{5.24}$$

$$\frac{1}{2} \cdot B(0) = B(0) \cdot e^{k \cdot t} \tag{5.25}$$

$$t = \frac{\ln 0,5}{k} \qquad \ldots \text{Halbwertszeit} \tag{5.26}$$

In den Formeln 5.24 und 5.26 wird eine interessante Eigenschaft der exponentiellen Wachstumsfunktion ersichtlich. Die Zeitspanne zum Verdoppeln der Wachstumsgröße (Verdoppelungszeit) ist unabhängig von der erreichten Größe

immer konstant. Wenn sich der Bestand z.B. nach 20 Zeiteinheiten verdoppelt hat, so hat er sich nach 40 Zeiteinheiten vereits vervierfacht, nach 80 Zeiteinheiten verachtfacht und nach 160 Zeiteinheiten kann man bereits eine Versechzehnfachung feststellen.
Die Tatsache, dass die Verdoppelungszeit mit zunehmendem exponentiellen Faktor kleiner wird, dh. dass, die Verdoppelungszeit indirekt proportional zum exponentiellen Faktor ist, ist bereits seit langem bekannt. Bereits in der Legende um die Erfindung des Schachspiels erbittet der Erfinder vom König auf das erste Feld ein Weizenkorn, und auf jedes weitere Feld jeweils doppelt so viele Weizenkörner als auf dem vorangegangenen liegen. Selbst in einem französischen Kinderreim wird die dargestellte Problematik thematisiert: Eine Wasserlilie wächst jeden Tag auf die doppelte Größe an. Nachdem bereits der halbe See bedeckt ist, wird die Frage gestellt, wie lange es noch dauert, bis der See vollständig überwuchert ist.
Trotz all dieser Beispiele und Geschichten ist das exponentielle (unbegrenzte) Wachstum intuitiv nur schwer nachvollziebar.

Die diskret entwickelte Iterationsformel gilt nur für ganze Zeitschritte. Möchte man die Iteration beliebig fein gestalten, d.h. pro Zeiteinheit beliebig viele Iterationsschritte machen, so muss Δt entsprechend klein gewählt werden. Um dies machen zu können, muss man zunächst die vom gewählten Zeitintervall Δt abhängige Zuwachstrate $k_{\Delta t}$ berechnen. Für unendlich kleine Δt findet man folgenden Ansatz:

$$B_0 \cdot (1 + k_{\Delta t} \cdot \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = B_0 \cdot e^{k \cdot t} \tag{5.27}$$

Mittels Umformung folgt:

$$k_{\Delta t} = \frac{e^{k \cdot \Delta t} - 1}{\Delta t} \tag{5.28}$$

Beispiele für Wachstumsprozesse, welche mit Hilfe des exponentiellen Modells modelliert werden können, sind folgende:

- Radioaktiver Zerfall
- Bakterienwachstum
- Anwachsen von Kapital, bzw. Schulden, durch Zins und Zinseszins

5.4 Beschränktes (begrenztes) Wachstum

In der Natur entsprechen Wachstumsvorgänge oft nur über kurze Zeiträume dem exponentiellen Wachstum. Auf lange Sicht wird das Wachstum durch verschiedene Einflüsse beschränkt. Sowohl das Nahrungsangebot, als auch der begrenzte Lebensraum bilden für den anwachsenden Bestand $B(t)$ eine natürliche Grenze, die er nicht überschreiten kann. In diesem Fall spricht man von beschränktem Wachstum.

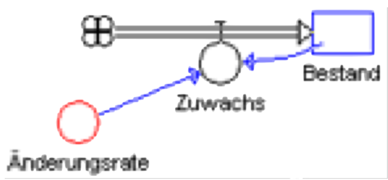


Abbildung 5.8: Flussdiagramm für beschränktes Wachstum

Charakteristisch für das beschränkte Wachstum ist die Kapazitätsgrenze G, d.h. jener Bestand B(t) der bei vorherschenden Umweltbedingungen maximal möglich ist. Diese Kapazitätsgrenze G wird zwar nicht überschritten, der anwachsende Bestand nähert sich ihr jedoch immer mehr an. Der Zuwachs pro Zeitintervall ist jedoch umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand $B(t)$ der Kapazitätsgrenze G annähert, je geringer also die Differenz $G - B(t)$ ist. Diese Differenz bezeichnet man als Freiraum, bzw. Restkapazität.
Stellt man die Kapazitätsgrenze als monotone lineare Funktion dar, so verläuft ihr Graf parallel zur Zeitachse, und ist eine Asympote des Grafen der Funktion B(t).

Betrachtet man für die Aufstellung der Wachstumsgleichung das diskrete Modell, so gilt:

$$B_{n+1} - B_n = k \cdot (G - B_n) \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.29}$$

Durch Umformung erhalten wir die Iterationsformel

$$B_{n+1} = B_n + k \cdot (G - B_n) \tag{5.30}$$

Setzen wir in der Formel 5.30 $a = 1 - k$ und $b = k \cdot G$, so ergibt sich folgende Berechnung für den Bestand zum Zeitpunkt n:

$$\begin{aligned} B_n &= a^n \cdot B_0 + a^{n-1} \cdot b + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b + \dots && (5.31)\\ &= a^n \cdot B_0 + b\frac{1-a^n}{1-a} && (5.32)\\ &= a^n(B_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a} && (5.33) \end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution erhält man die Gleichung für die Berechnung des Bestandes im Zeitpunkt n:

$$\begin{aligned} B_n &= (1-k)^n(B_0 - \frac{k \cdot G}{1-(1-k)}) + \frac{k \cdot G}{1-(1-k)} && (5.34)\\ &= (1-k)^n(B_0 - G) + G && (5.35) \end{aligned}$$

Betrachten wir im kontinuierliche Modell die Zuwachsgeschwindigkeit bzw. Abnahmegeschwindigkeit in Form der mittleren Änderungsrate $\frac{\Delta B}{\Delta t}$, so fällt auf, dass sich diese zur Restkapazität $G - B(t)$ direkt proportional verhält. Somit gilt:

$$\frac{dB(t)}{dt} = k \cdot (G - B(t)) \qquad (k = k_{konst} \in \mathbb{R}) \tag{5.36}$$

Diese Differentialgleichung formen wir wie folgt um und lösen sie anschließend mittels Integration.

$$\begin{aligned} \frac{dB(t)}{G - B(t)} &= k \cdot dt \\ \int \frac{dB(t)}{G - B(t)} &= \int k \cdot dt \\ |G - B(t)| &= e^{-k \cdot t - c} = e^{-k \cdot t} \cdot e^{-c} \end{aligned}$$

Da $|G - B(0)| = e^{-k \cdot 0} \cdot e^{-c} = 1 \cdot e^{-c} = e^{-c}$, folgt $|G - B(t)| = (G - B(0)) \cdot e^{-kt}$
Somit lautet die Gleichung für das beschränkte Wachstumsmodell:

$$B(t) = G + (B_0 - G) \cdot e^{-kt} \qquad (G > 0) \tag{5.37}$$

Hierbei bezeichnet $B(t)$ den Bestand zum Zeitpunkt t und G die Kapazitätsgrenze bzw. Sättigungsmenge, der sich der Bestand für $t \to \infty$ annähert.

5.5 Logistisches Wachstum

In unserer endlichen Welt kann weder lineares, noch exponentielles Wachstum unbegrenzt andauern. Doch auch das beschränkte Wachstum, welches die Grenzen der Umwelt in Form von Nahrungs- und Platzangebot mit einbezieht, entspricht nicht immer dem tatsächlichen Wachstum. Ein mathematisches Modell, welches noch mehr Faktoren als das beschränkte Wachstum berücksichtigt, ist das vom Belgier Pierre-Francois Verhulst (1804 - 1849) im Jahre 1837 vorgeschlagene logistische Wachstum.
In diesem Wachstumsmodell wird durch eine mit steigender Population fallende Wachstumsrate dafür gesorgt, dass auf lange Sicht ein stabiles Gleichgewicht eintritt.

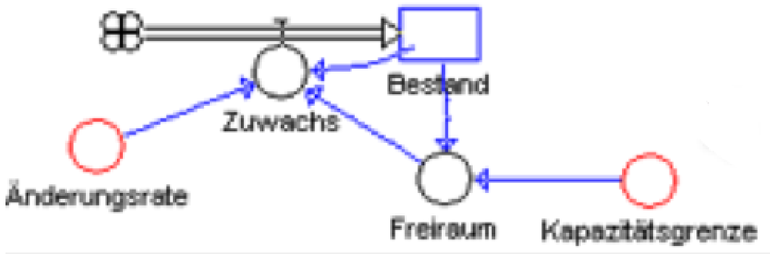


Abbildung 5.9: Flussdiagramm für logistisches Wachstum

Beobachtet man z.B. die Anzahl der Bakterien in einem Gefäß, so stellt man folgendes fest: Zu Beginn können sich die die Bakterien wegen ihrer geringen Anzahl nur sehr langsam vermehren, sodass der absolute Zuwachs und damit auch die Wachstumsrate gering ist. Zu diesem Zeitpunkt spielt die Kapazitätsgrenze noch keine gewichtige Rolle und behindert das Wachstum noch nicht entscheidend. Dies hat zur Folge,dass das logistische Wachstum in seiner ersten Phase dem exponentiellen Wachstum sehr ähnlich ist. Im Laufe der Zeit nimmt die Wachstumsrate auf Grund der immer größer werdenden Anzahl an Bakterien jedoch zu, bis sie schließlich 50% der Kapazität, d.h. jener Menge an Bakterien, die maximal in diesem Gefäß leben können, erreicht hat. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Wachstumsrate wieder und strebt schließlich gegen Null.
Die zweite Phase des logistischen Wachstums gleicht somit dem begrenzten Wachstum, da mit zunehmender Anzahl nun die Wachstumsrate sinkt. Ausschlag gebend ist hierfür ebenso wie beim begrenzten Wachstum die immer geringer werdende Restkapazität.

Betrachtet man zunächst wieder das diskretes Modell, d.h. das Wachstumsmodell für einzelne Zeitpunkte, so gilt:

$$B_{n+1} - B_n = k \cdot B_n \cdot (G - B_n) \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.38}$$

Durch Umformung erhält man die Iterationsformel

$$B_{n+1} = B_n + k \cdot B_n \cdot (G - B_n) \tag{5.39}$$

Im Unterschied zum exponentiellen Wachstum, wo die pro Zeiteinheit auftretende Zu- bzw. Abnahme proportional zum momentanen Bestand ist ($B'(t) = k \cdot B(t)$) oder zum bestschränkten Wachstum, bei dem die Zu- bzw. Abnahme proportional zur momentanen Restkapazität ist ($B'(t) = k \cdot (G - B(t))$, ist die Zu- bzw. Abnahme beim logistischen Wachstum sowohl zum momentanen Bestand als auch zur momentanen Restkapazität proportional. Somit gilt für das kontinuierliche Modell:

$$\frac{dB}{dt} = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) \qquad (k \in \mathbb{R}) \tag{5.40}$$

Um diese Differentialgleichung zu lösen, verwendet man die so genannte „Trennung der Variablen“:

$$\int \frac{1}{B \cdot (G - B)} \cdot dB = \int k \cdot dt + c \tag{5.41}$$

Da mittels Partialbruchzerlegung $\frac{1}{B \cdot (G-B)} = \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{B} + \frac{1}{G} \cdot \frac{1}{G-B}$ gilt, können wir im obigen Integral Konstante herausheben und erhalten folgende Gleichung, die wir nach B integrieren:

$$\frac{1}{G}\int\frac{1}{B}\cdot dB+\frac{1}{G}\int\frac{1}{G-B}\cdot dB=\int k\cdot dt+c \tag{5.42}$$

$$\frac{1}{G}\ln|B|-\frac{1}{G}\ln|G-B|=k\cdot t+c \tag{5.43}$$

$$\ln|\frac{B}{G-B}|=G\cdot k\cdot t+G\cdot c \tag{5.44}$$

$$|\frac{B}{G-B}|=e^{G\cdot k\cdot t}\cdot e^{G\cdot c} \tag{5.45}$$

$$|\frac{G-B}{B}|=e^{-G\cdot k\cdot t}\cdot e^{-G\cdot c}=e^{-G\cdot k\cdot t}\cdot\widetilde{c} \tag{5.46}$$

$$|\frac{G}{B}-1|=\widetilde{c}\cdot e^{-G\cdot k\cdot t} \tag{5.47}$$

Setzt man nun $t=0$ ein, so erhält man die Iterationskonstante $\widetilde{c}$ für $B(0)\neq 0$:

$$|\frac{G}{B(0)}-1|=\widetilde{c} \tag{5.48}$$

Löst man die Gleichung 5.47 nach B auf, so erhält man für $G\neq 0$ die Gleichung für das logistische Wachstumsmodell[1]:

$$B(t)=\frac{G}{(\frac{G}{B(0)}-1)\cdot e^{-G\cdot k\cdot t}+1} \tag{5.49}$$

Führt man weitere Untersuchungen dieser Wachstumsfunktion durch, so ist es naheliegend den Wendepunkt, also jenen Punkt, ab dem das Wachstum gerin-

[1]Auf Grund der Symmetrie genügt es, lediglich den positiven Fall zu betrachten.

ger wird, zu berechnen. Im Folgenden will ich diese Berechnung durchführen.

$$
\begin{aligned}
B'(t) &= k \cdot B(t) \cdot (G - B(t)) && (5.50)\\
B''(t) &= k \cdot B'(t) \cdot (G - B(t)) + k \cdot B(t) \cdot (-B'(t) && (5.51)\\
&= k \cdot B'(t) \cdot G - 2 \cdot B(t)) && (5.52)\\
&= k \cdot (k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))) \cdot G - 2 \cdot B(t)) && (5.53)\\
B''(t_W) &= k \cdot (k \cdot B(t_W) \cdot (G - B(t_W))) \cdot G - 2 \cdot B(t_W)) = 0 && (5.54)\\
G - 2 \cdot B(t_W) &= 0 && (5.55)\\
B(t_W) &= \frac{G}{2} && (5.56)
\end{aligned}
$$

Somit wird im Wendepunkt gerade die Hälfte der Sättigungsmenge überschritten.

Obwohl dieses Wachstumsmodell der Realität sehr nahe kommt, ist es lediglich ein Versuch diese zu beschreiben. Betrachtet man zum Beispiel Bevölkerungszahlen, so erkennt man, dass global gesehen die Wachstumsrate der Weltbevökerung steigt. Man kann also nie die Realität, das Leben, berechnen, sondern nur Prognosen anstellen. Komplexe mathematische Modelle approximieren die Praxis jedoch oft sehr gut.

6 Analyse vorhandener Unterrichtsmaterialien

Die Behandlung von Funktionen zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse, der Vergleich von Modellen, zu denen auch Wachstumsmodelle gehören, sowie das Erkennen der Grenzen von Modellbildungen ist traditionell im Mathematik-Lehrplan der 10. Schulstufe (vergl. [2]) verankert.

- *Beschreiben von Änderungen durch Änderungsmaße (absolute und relative Änderung, Differenzenquotient)*
- *Anwenden von Funktionen zur Beschreibung kontinuierlicher Prozesse, Vergleichen von Modellen, Erkennen der Grenzen von Modellbildungen*

Obwohl das Gebiet der Wachstumsmodell im Lehrplan einen wichtigen Platz einnimmt, beschränken sich die behandelten Problemstellungen in der Regel auf die Untersuchung von exponentiellen Wachstumsprozessen, d.h. Wachstumsmodellen, die sich mit Hilfe von Exponentialfunktionen beschreiben lassen.

6.1 Aufgaben in Mathematik-Schulbüchern

Betrachtet man die Aufgabenstellungen in Mathematik-Schulbüchern, so stößt man, vor allem bei älteren, auf sogenannte Anwendungsprobleme, denen das Modell des exponentiellen Wachstums mehr oder weniger unkritisch „übergestülpt“ wird. Dieses Modell ist zwar für die ersten Beobachtungswerte passend, betrachtet man die Entwicklung jedoch über einen längeren Zeitpunkt, so erweist sich dieses Modell in der Praxis leider als unpassend, da exponentielles Wachstum unbeschränkt ist. Reale Wachstumsprozesse sind auf Grund unserer begrenzten Welt jedoch naturgemäß beschränkt. Meiner Ansicht nach sollte dieses Problem auch bei den Beispielen thematisiert werden. Andernfalls könnte es sein, dass die Schülerinnen und Schüler den Eindruck gewinnen, dass das exponentielle Modell der tatsächlichen Entwicklung in allen Zeitpunkten entspricht.

Ein in Mathematik-Schulbüchern der 10. Schulstufe äußerst beliebtes Beispiel für exponentielle Wachstumsmodelle ist das Bevölkerungswachstum.

Bürger, Fischer, Malle, Kronfellner, Mühlgassner und Schlöglhofer stellen folgende Aufgaben an die Schülerinnen und Schüler:

> *„Die Bevölkerung eines Staates wachse exponentiell, wobei pro Jahr ein Zuwachs von 9 % zu verzeichnen sei. Wie groß wird die Bevölkerung nach 5, 6, 10, 20, 30 Jahren sein, wenn sie heute 8,5 Millionen beträgt?“* [6, Seite 120]
> *„Angenommen die Bevölkerung einer Stadt wächst exponentiell. Die Stadt hatte 1960 37000 Einwohner, 1970 waren es 49000 Einwohner Wie viele Menschen werden 1985 in dieser Stadt wohnen?“*

[6, Seite 121]
Diese Beispiele erwecken den Anschein Anwendungsprobleme zu bearbeiten und einen Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler herzustellen. Näher betrachtet werden hier jedoch lediglich bestimmte Rechenaufgaben in Text eingekleidet. Die einzige Zielsetzung dieser Aufgabe besteht darin das Rechnen mit Exponentialfunktionen zu trainieren. In Hinblick auf das verwendete Wachstumsmodell wird zwar der Konjunktiv verwendet, jedoch nicht betont, dass diese Annahme nur für einen bestimmten Zeitpunkt sinnvoll ist.

Sehr ähnlich ist auch die Aufgabe zum Bevölkerungswachstum bei Malle, Ramharter, Ulovec und Kandl angelegt:

> *„Die Bevölkerung einer Stadt wächst in einem bestimmten Zeitraum annähernd exponentiell nach dem folgenden Wachstumsgesetz [$N(t) = 1300 \cdot 1,06^t$]. Dabei ist N(t) die Einwohnerzahl nach t Jahren. Wie viele Einwohner sind zu Beginn, wie viele nach 5 Jahren vorhanden? Um wie viel Prozent nimmt die Einwohnerzahl jährlich zu?“* [22, Seite 65]

Obwohl dieses Schulbuch erst 5 Jahre nach jenem von Bürger, Fischer, Malle, Kronfellner, Mühlgassner und Schlöglhofer herausgegeben wurde, ist es beinahe gleich gestaltet. Der wesentliche Unterschied ist jedoch, dass hier in der Angabe bemerkt wird, dass die Bevölkerung „in einem bestimmten Zeitpunkt annähernd exponentiell„ wächst.

Auch im Lehrbuch von Götz, Reichel, Müller und Hanisch wird das exponentielle Modell für das Bevölkerungswachstum herangezogen. Hier ist die Aufgabenstellung jedoch anders konzipiert.

> *„In vielen Ländern der Erde wächst die Bevölkerung. In den niederösterreichischen Bezirken Gmünd und Zwettl aber nahm die Bevölkerungszahl in den letzten 30 Jahren durchschnittlich um 0,4 % pro Jahr ab. 2001 betrug sie 85685 Einwohner (Quelle: Volkszählung 2001).*
> *(1) Gib Formeln an, um die Bevölkerungszahl nach t Jahren berechnen zu können! Nimm dazu a) eine lineare, b) eine exponentielle Entwicklung an!*
> *(2) Zeichne die beiden Graphen für t∈[0;100]!*
> *Nach einer der beiden Annahmen müsste die Bevölkerung dieser zwei Bezirke aussterben. Wann wäre dies und wie viele Einwohner hätten die Bezirke Gmünd und Zwettl zu diesem Zeitpunkt nach der anderen Annahme?“* [11, Seite 199]

Zum einen wird hier nicht von einem Zuwachs, sondern von einer Abnahme der Bevölkerung ausgegangen. Dies erleichtert bereits eine kritische Herangehens-

weise an das Modell, weil die Schüerinnen und Schüler durch das Aussterben der Bevölkerung vermutlich eher auf die Grenzen des Modells aufmerksam werden.
Zum anderen werden zur Modellierung zwei verschiedene Modelle herangezogen. Dies legt gemeinsam mit den bereits erkannten Grenzen die Idee nahe, dass es auch noch ein drittes Modell zur Modellierung verwendet werden könnte.
Über dies ist auch der allgemeinbildende Ansatz und die Anknüpfung an die Lebenswelt der österreichischen Schülerinnen und Schüler sehr ansprechend.

Ein weiterer Anwendungsbereich, für den sehr oft exponentielle Wachstumsmodelle herangezogen werden, ist das Bakterienwachstum:

> *„Die Keine in der Kuhmilch vermehren sich exponentiell. In 1 cm^3 Kuhmilch waren 3 Stunden nach dem Melken 66000 Keime, 2 Stunden später 1,1 Millionen. Wie viele Keime waren es 2 bzw. 6 Stunden nach dem Melken? “* [6, Seite 121] [22, Seite 69]
> *„Eine Bakterienkultur wächst um 15 % in der Stunde*
> *a) Wenn am Anfang 200000 Bakterien vorhanden sind, nach wie vielen Stunden sind es 500 000?*
> *b) In welcher Zeit verdoppelt sich die Bakterienanzahl? “* [6, Seite 121]

> *„Bei günstigen Bedingungen (Feuchtigkeit, Wärme und Nährstoffe) vermehren sich Bakterien relativ rasch (zB die des Zahnbelags). Angenommen sie vedoppeln sich alle a) 15 min, b) 30 min, c) 60 min bzw. bei Verwendung einer Zahnpasta in d) 120 min, wie viele Bakterien entstehen dann innerhalb eines Tages aus einer einzigen?“* [11, Seite 199]

6.2 online-Materialien zum Thema Wachstumsmodelle

Die Materialien, welche im Internet zum Thema Wachstumsmodelle zu finden sind, sind äußerst inhomogen. Ähnlichkeiten zwischen den einzelnen Beiträgen zu diesem umfassenden Thema sind nur dann erkennbar, wenn diese in einer „online“-Materialiensammlung wie zum Beispiel jener des ACDCA – Austrian Center for Didactics of Computer Algebra [9][1] oder jener des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen [2]. Abgesehen von diesen Sammlungen variieren die zur Verfügung gestellten Materialien sehr stark in Qualität, Zielsetzung und Aufbereitung.
Im Wesentlichen lassen sich zwei große Typen von Materialien unterscheiden. Zum einen gibt es eine Reihe von Materialien im „pdf‘-Format, welche Arbeitsanweisungen und Hintergrundinformationen für die Lernenden enthalten. Das Internet dient hier lediglich als Plattform, auf der diese Materialien zur Verfügung gestellt werden. Die digitale Form dieser Unterlagen ist bei weitem nicht notwendig. Man könnte die Materialien ebenso gut als Kopien an die Schülerinnen und Schüler ausgeben. Derartige Unterlagen findet man sowohl auf der Homepage des ACDA [9], als auch auf jener des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. Obwohl die Materialien von unterschiedlichen Personen ausgearbeitet wurden, sind sie innerhalb der Sammlung sehr homogen aufgearbeitet, sodass der Lernende sich bei einer neuen Aufgabenstellung sehr rasch zurechtfinden kann und nicht unnötig Aufmerksamkeit auf die Struktur und die Aufbereitung der Aufgabe vergeuden muss. Da beide Sammlungen zudem sehr umfangreich sind, ist es durchaus möglich diesen Themenkreis anhand der in einer Sammlung präsentierten Materialien zu erarbeiten. In Bezug auf die Zielsetzungen der Materialien in den beiden oben erwähnten online-Materialsammlungen sind große Unterschiede festzustellen. Die Aufgabenstellungen des Austrian Center for Didactics of

[1] ACDA – Austrian Center for Didactics of Computer Algebra an der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich, Dechant-Pfeifer-Str. 3, 2020 Hollabrunn
[2] Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, Völklingerstr. 49, 40190 Düseldorf, `http://www.schulministerium.nrw.de`

Computer Algebra sind relativ kurz und prägnant. Sie weisen eine sehr detaillierte Aufgabenstellung auf, die dem Lernenden genau vorgibt, wie das Problem zu lösen ist. Ziel ist es den Umgang mit den einzelnen Wachstumsmodelle zu üben, diese zu erproben und gewisse Charakteristika derselben fest zu stellen. Die Ausarbeitungen zu den einzelnen Aufgaben werden sowohl mit Derive, als auch mit dem TI 92 zur Verfügung gestellt.

Die Materialien der AG Neue Medien im Mathematikunterricht des Landesinstituts für Schule und Weiterbildung [26][3] haben den Charakter von Modellierungsaufgaben. In diesem Sinne ist die Aufgabenstellung relativ umfangreich. Die Themen der behandelten Probleme sind sehr interessant und unterscheiden sich von den herkömmlichen Aufgaben. So wird zum Beispiel das beschränkte Wachstum anhand des Wassergehalts des Bodens bzw. anhand eines Fallschirmsprungs bearbeitet. Zur Bearbeitung des logistischen Wachstums zieht man die Vermehrung von Grönlandwalen heran, welche für Schülerinnen und Schüler vermutlich interessanter ist, als das Bakterienwachstum in einer Schale. Zur Bearbeitung dieser Aufgaben wird Microsoft Excel™ nahegelegt.
Auf der Lernplattform „mathe-online„ [8] findet sich eine Lerneinheit zum Thema Exponential- und Logarithmusfunktionen [4], in der man sich unter anderem auch dem exponentiellen Wachstum widmet. Im Wesentlichen werden hier lediglich Hintergrundinformationen geboten. Dieses Angebot wird jedoch durch Querverweise und einen sogenannten Wachstumsrechner aufgewertet. Leider fehlt bei diesem Material die Möglichkeit der Aktivität in Form von Aufgabenstellungen.

Die zweite große Gruppe der „online“-Materialien zum Thema Wachstumsprozesse besteht aus interaktiven Materialien. An erster Stelle sei hier die „Lernspirale Wachstumsprozesse“ des BLK-Modellversuchs „Selbstlernen in der gymnasialen Oberstufe – Mathematik“ – kurz „SelMa“ des Landes Nordrhein-

[3] `http://www.learn-line.nrw.de/angebote/medienmathe/`
[4] `http://www.mathe-online.at/mathint/log/i.html`

Westfalen [30] [5] erwähnt. Die Aufgabenstellungen sind ebenso wie die oben erwähnen Aufgaben aus der Materialsammlung des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen sehr problemorientiert und offen. „Die erstellte Lernspirale folgt dabei dem didaktischen Konzept von Heinz Klippert (2001) und fördert neben der Methoden- und Kommunikationskompetenz vor allem das eigenverantwortliche Arbeiten und Lernen der Schülerinnen und Schüler[6]“ Für die Ausarbeitung der Aufgaben ist das Tabellenkalkulationsprogramm Microsoft Excel™ vorgesehen. Die Lernspirale ist gut aufgebaut. Es finden sich zahlreiche Materialien und Hinweise zu deren Einsatz im Unterricht für Lehrende. Für die Durchführung im Unterricht genüg es jedoch die bereitgestellten Arbeitsblätter zu kopieren und den Schülerinnen und Schülern aus zu händigen.

`http://home.eduhi.at/teacher/alindner/Sites/tabkalk/verzeichnis.htm`

[5] Das Ziel von SelMa bestand darin zu zeigen, wie Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe zu gestalte ist, wenn Eigentätigkeit und selbstständiges Arbeiten mit neen Medien gefördert werden soll.

[6] [30] `http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/beschreibung/beschrdinlaken4.htm`

7 Materialien zum Bereich Wachstumsmodelle für GeoGebra 3.2

Wie lassen sich Wachstumsvorgänge mit Hilfe von GeoGebra 3.2 modellieren? Welche Möglichkeiten bietet dieses Programm Wachstumsvorgänge darzustellen und mathematisch zu analysieren? Die folgenden Aufgaben sollen zeigen, in welcher Weise die Software GeoGebra die fortgeschrittene Untersuchung von linearen und nichtlinearen Wachstumsprozessen ab der 10. Schulstufe im Mathematikunterricht unterstützen kann.

7.1 Sparen

Zur Einführung in die Arbeit mit GeoGebra möchte ich mit einem Standardbeispiel aus dem Bereich der Zinseszinsrechnung beginnen. Hierfür werden anhand der in Kapitel 7.1.1 beschriebenen Ausgangssituation verschiedene Ansparungsmodelle miteinander verglichen.
Ausgangspunkt für die Berechnungen in diesem Kapitel ist die einfache Zinsrechnung. Sie stellt die einfachste Grundaufgabe der Finanzmathematik dar und macht die Lernenden mit den wichtigsten Begriffen dieses Themenkomplexes bekannt. Mit der einfachen Zinsrechnung werden zunächst rekursiv alle Berechnungen durchgeführt. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler in einem Abstraktionsschritt die explizite Formel herausfinden.

7.1.1 Aufgabenstelllung

Elisabeth Schenner beginnt kommenden Herbst mit ihrem Musikstudium. Sie hat sich bei der Studienprogrammleitung erkundigt und rechnet damit, dass sie ihr Studium in sechs Jahren abschließen wird. Bis dahin möchte sie genug Geld *angespart haben, um sich einen Flügel um 7200 € leisten zu können. Elisabeth hat sich überlegt, dass sie jedes Jahr vermutlich 1000 € sparen kann. Um eine geeignete Sparform zu finden, holt sie bei ihrer Bank einige Angebote ein.*

1. *Der Bankangestellte bietet Elisabeth Schenner einen Sparbrief an, bei dem das Geld mit 3,75 % p.a. verzinst wird, wenn es für sechs Jahre fest angelegt wird.*
   Da er meint die Zinsen könnten in den nächsten Jahren steigen, offeriert er auch einen Sparbrief mit vierjähriger Bindung bei 3,5 % p.a.. Nach Ablauf dieser vier Jahre könne sie das Geld zu den dann geltenden Bedingungen neu anlegen.

2. *Der Bankangestellte bietet Elisabeth Schenner einen Sparbrief an, bei dem das Geld mit 3,75 % p.a. verzinst wird, wenn es für sechs Jahre fest angelegt wird.*
   Da er meint die Zinsen könnten in den nächsten Jahren steigen, offeriert er auch einen Sparbrief mit vierjähriger Bindung bei 3,5 % p.a.. Nach Ablauf dieser vier Jahre könne sie das Geld zu den dann geltenden Bedingungen neu anlegen.

3. *Da sie das Geld erst in sechs Jahren benötigt, schlägt er ihr auch einen Bausparvertrag vor. Dieser Klassiker unter den Anlagevarianten ist ideal, wenn man für die gesamte Laufzeit einen fixen Zinssatz wünscht. Dieser Zinssatz beträgt 3,0 % p.a.. Zusätzlich zu den Zinsen erhält der Sparer bzw. die Sparerin die Bausparprämie. Die Prämie wird vom Sparbetrag berechnet - jährlich jedoch höchstens von 1000 €. D.h. je mehr man spart, desto höher wird die Prämie und damit der Gesamtgewinn. Die Höhe der Prämie hängt von der Entwicklung des österreichischen Kapitalmarktes ab. Wenn die Zinsen steigen, steigt auch die Prämie und damit der Ertrag. Die Bandbreite der Prämie liegt zwischen 3 % p.a. und 8 % p.a.. Für das Jahr 2008 betrugt die Prämie 4 % p.a.. Hierbei ist zu beachten die Prämie zwar prozentuell vom Sparbetrag berechnet wird, jedoch mit*

40€ gedeckelt ist.
Bei all diesen Angeboten sind folgende Fragen zu berücksichtigen[1]*:*

- *Welche Variante würdest du Elisabeth Schenner empfehlen?*
- *Ab welchem Zinssatz in vier Jahren ist der zweite Sparbrief günstiger als der erste?*
- *Bei welcher jährlichen Einzahlung würde sie nach sechs Jahren genau den Kaufpreis angespart haben?*

7.1.2 Umsetzung

7.1.2.1 Sparbrief A

Zunächst schreiben wir in die erste Zelle die Überschrift „Sparbrief A", damit wir unsere Berechnungen später einfach unterscheiden und zuordnen können. Danach legen wir eine Spalte „Jahr" an, welche die Anzahl der bereits verzinsten Jahre enthält. Diese Spalte beginnt mit 0, für den Anfangszeitpunkt, setzt sich jeweils mit dem Zeitschritt 1 fort, und endet mit 6. Anstatt die Zahlen 0 bis 6 alle direkt einzugeben, schreiben wir nur die erste Zeile 0. In die nächsten Zeile geben wir die Formel „= [Klick in die Zelle, in der 0 steht] + 1" ein. In Abbildung 7.1 ist diese Eingabe mittels Pfeildiagrammen dargestellt. Diese Formel wird anschließend in die darunter liegenden Zeilen kopiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.2 zu sehen. Selbstverständlich wäre es auch möglich die Einträge in der Spalte „Jahr" direkt zu tätigen. Der Vorteil dieser Eingabe besteht einerseits darin, dass die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf den Zeitschritt gelenkt wird, und andererseits darin, dass durch eine Veränderung der Formel in der Zeile unterhalb des Anfangszeitpunktes

[1] Die Kapitalertragsteuer (KESt) ist eine Erhebungsform der Einkommenssteuer, und ist in Österreich als Abgeltungssteuer konzipiert. Dies bedeutet, dass der Kapitalertrag mit der Abführung der KESt abschließend besteuert ist und bei der Berechnung des steuerpflichtigen Einkommens mit mehr berücksichtigt wird. In Österreich beträgt sie Kapitalertragsteuer 25 % des Kapitalertrags. Nähere Informationen hierzu sind auf `http://www.steuerverein.at/einkommensteuer/29_kapitalertragsteuer_01.html` nachzulesen.

der Zeitschritt für die gesamte Tabelle auf einmal verändert werden kann. Auf diesen Vorteil werde ich am Ende des Beispiels genauer eingehen.
Alternativ wäre es auch möglich diese Spalte mit Hilfe der in **??**Kapitel]sssc:autoausfuellen beschriebenen Funktion auszufüllen. Zu Beginn verspricht die oben beschriebene Vorgehensweise jedoch ein besseres Verständnis dessen, was bei den Berechnungen geschieht.

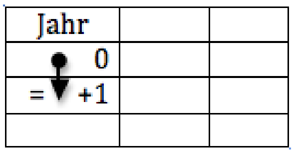


Abbildung 7.1: Eingabe des Jahres

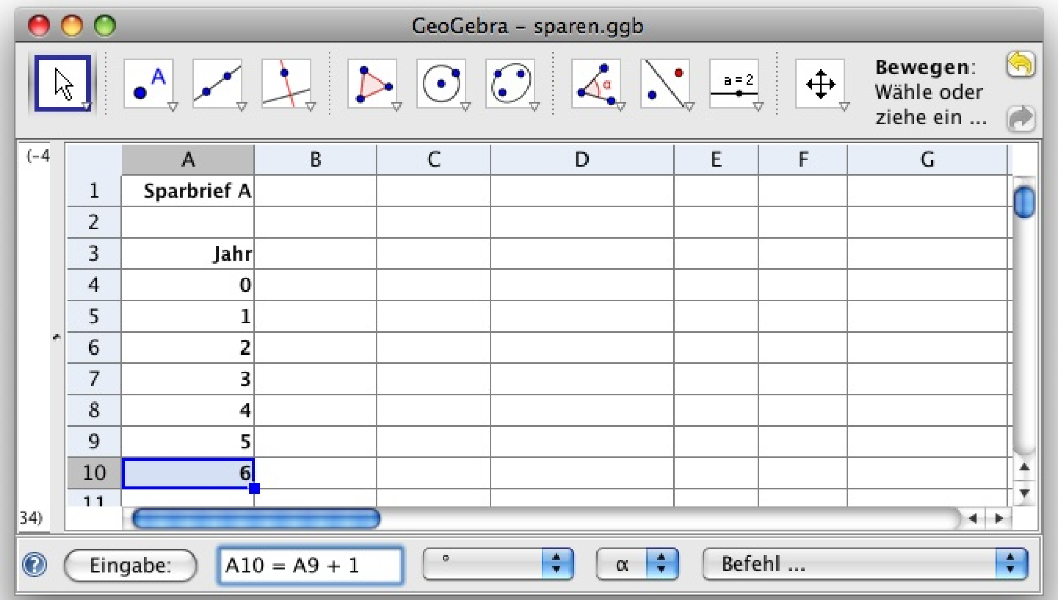


Abbildung 7.2: Sparbrief A - Zeitschritte

Neben der Spalte „Jahr“ legen wir eine Spalte „Kontostand“ , eine Spalte „Einzahlung“ , eine Spalte „neuer Kontostand“ , eine Spalte „Zinsen“ , sowie eine Spalte „Endkontostand“ an.
Da zu Beginn noch kein Betrag auf dem Konto liegt, schreiben wir in die Zelle für den Kontostand am Beginn ersten Jahres „0“.
Wie oben beschrieben gedenkt Elisabeth Schenner jährlich 1000 € einzuzahlen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Einzahlungen jeweils am 1. Jänner getätigt werden. Somit schreiben wir in eine weitere Zelle diesen Einzahlungsbetrag. Ebenso verfahren wir, wie in Abbildung 7.3 zu erkennen ist, mit dem offerierten Zinssatz von 3,75 %p.a.[2].

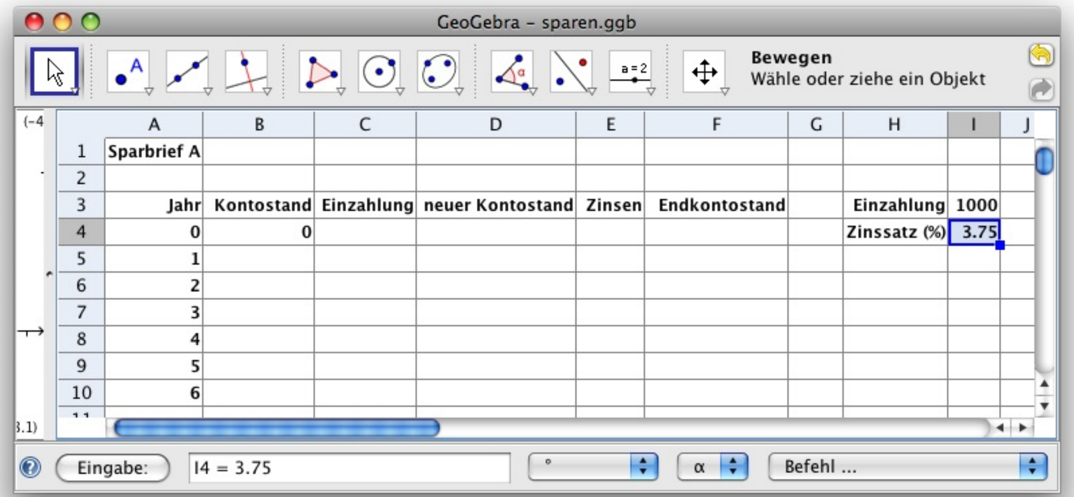


Abbildung 7.3: Sparbrief A - Erstellung der Tabelle

Den ersten Wert in der Spalte „Einzahlung“ beziehen wir aus der Zelle, in die wir soeben den jährlichen Einzahlungsbetrag geschrieben haben. In unserem Fall geschieht dies mit dem absoluten Zellbezug „C4=I3„. Die Summe aus

[2]Bei der Eingabe von Dezimalzahlen in GeoGebra ist zu beachten, dass das Komma als Punkt geschrieben wird. D.h. es muss 3.75 eingegeben werden.

dem Kontostand am Beginn des Jahres und der Einzahlung ergibt den neuen Kontostand. Multipliziert man diesen Betrag mit dem effektiven Zinssatz (= Zinssatz $\cdot$ 0, 75) dividiert durch 100, so erhält man die Zinsen für das erste Jahr. Der Kontostand am Ende des Jahres ist die Summe aus dem neuen Kontostand und den Zinsen. In Abbildung 7.4 ist die Berechnung der Zinsen in der Eingabezeile zu sehen.

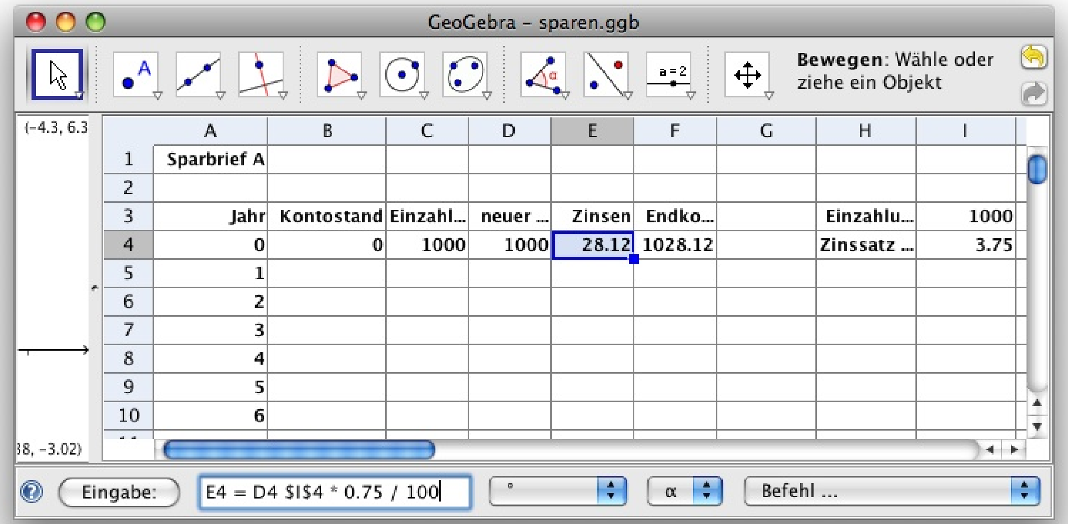


Abbildung 7.4: Sparbrief A - Berechnungen für das 1. Jahr

Selbstverständlich entspricht der Kontostand zu Beginn des neuen Jahres dem Kontostand am Ende des alten Jahres. Daher können wir, wie in Abbildung 7.5 mittels Pfeildiagramm dargestellt, den zweiten Wert in der Spalte „Kontostand“ direkt aus der Spalte „neuer Kontostand“ beziehen.

Jahr	Kontostand	Einzahlung	neuer Kontostand	Zinsen	End-kontostand
0	0	1000	1000	28.12	1028.12
1					

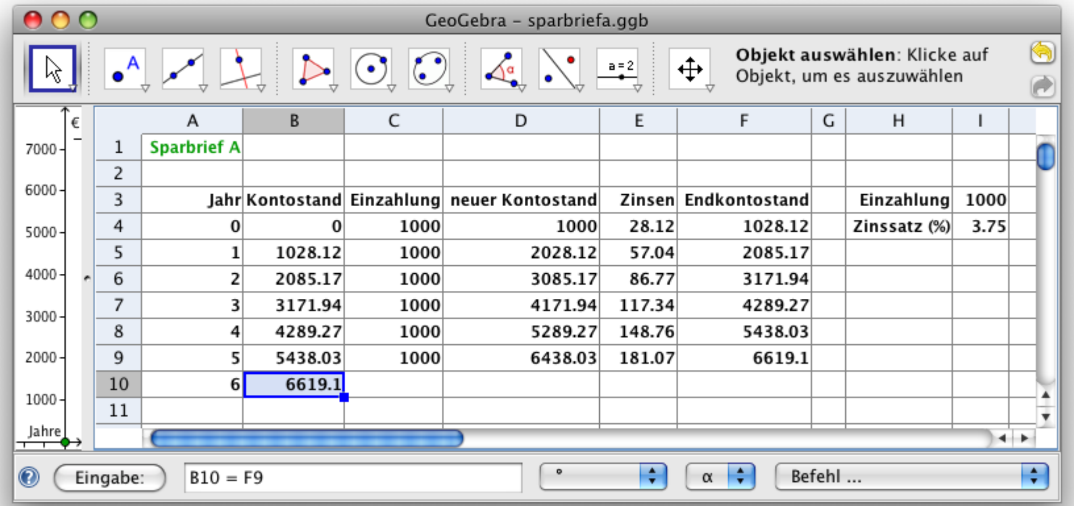
Abbildung 7.5: Sparbrief A - Übernahme des Kontostandes

Dem aufmerksamen Leser wird vermutlich aufgefallen sein, dass in Abbildung 7.4 in der Formel zur Berechnung der Zinsen der Bezug auf die Zelle, in welcher der Zinssatz eingetragen ist, absolut ist. Für die Berechnung der Zinsen im ersten Jahr ist dies unwesentlich, da die Berechnungen auch mir relativem Zellbezug korrekt wären. Der Grund für diese Entscheidung zeigt sich erst bei der Berechnung der zweiten Zeile.
An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass es selbstverständlich jedem Lehrenden selbst überlassen ist, wie er die exakte Vorgangsweise wählt. Diese Arbeit soll lediglich Anregungen für den Einsatz der Tabellenkalkulation in GeoGebra geben. Wenn die Schülerinnen und Schüler bereits Erfahrung mit Tabellenkalkulation und den verschiedenen Arten von Bezügen haben, ist es angebracht (wie in der Arbeit vorgestellt) sofort den absoluten Bezug zu verwenden. Andernfalls wäre es ratsam zunächst den Zinssatz direkt in die Formel einzugeben und diesen erst bei der Überarbeitung durch den absoluten Bezug zu ersetzen.
Nach diesen grundsätzlichen Überlegungen, wollen wir uns wieder unserem Beispiel aus der Zinseszinsrechnung zuwenden. Da die Einzahlung in jedem Jahr gleich hoch ist und die Berechnung des Kapitals, der Zinsen und des Endkontostandes anolog zu den Berechnungen im vorangegangenen Jahr sind, können wir die Formeln wie in Abbidung 7.6 als Pfeildiagramm dargestellt in die jeweils darunter liegenden Zellen kopieren.

Jahr	Kontostand	Einzahlung	neuer Kontostand	Zinsen	End-kontostand
0	0	1000	1000	28.12	1028.12
1	1028,12				

Abbildung 7.6: Sparbrief A - Kopieren der Formeln

Nachdem die Überlegungen für die folgenden Jahre analog zu jenen für das zweite Jahr sind, und wir die Spalte „Jahr“ bereits komplett ausgefüllt haben, können wir die entsprechenden Berechnungen mit Hilfe der Funktion Auto-Ausfüllen, welche in Kapitel 4.4.3.1 erklärt wurde, durchführen.
Als Ergebnis erhält man die in Abbildung 7.7 abgebildete Tabelle.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Sparbrief A								
2									
3	Jahr	Kontostand	Einzahlung	neuer Kontostand	Zinsen	Endkontostand		Einzahlung	1000
4	0	0	1000	1000	28.12	1028.12		Zinssatz (%)	3.75
5	1	1028.12	1000	2028.12	57.04	2085.17			
6	2	2085.17	1000	3085.17	86.77	3171.94			
7	3	3171.94	1000	4171.94	117.34	4289.27			
8	4	4289.27	1000	5289.27	148.76	5438.03			
9	5	5438.03	1000	6438.03	181.07	6619.1			
10	6	6619.1							
11									

Abbildung 7.7: Sparbrief A - fertige Tabelle

In Abbildung 7.8 sind die Kontostände am Ende jedes Jahres grafisch dargestellt.

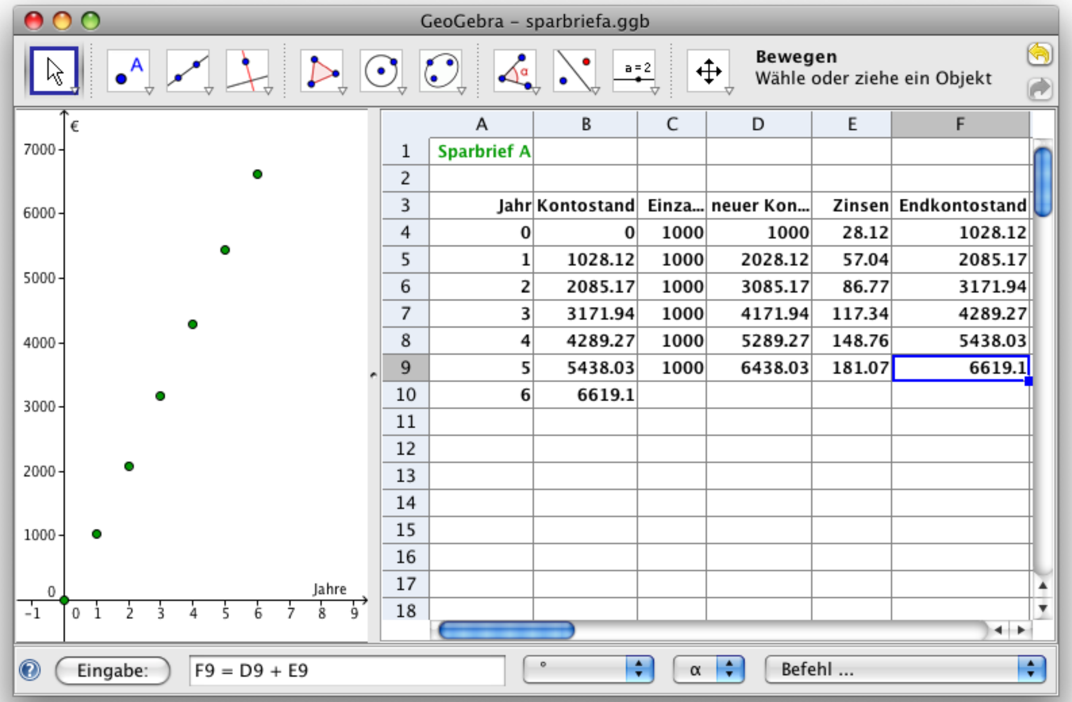
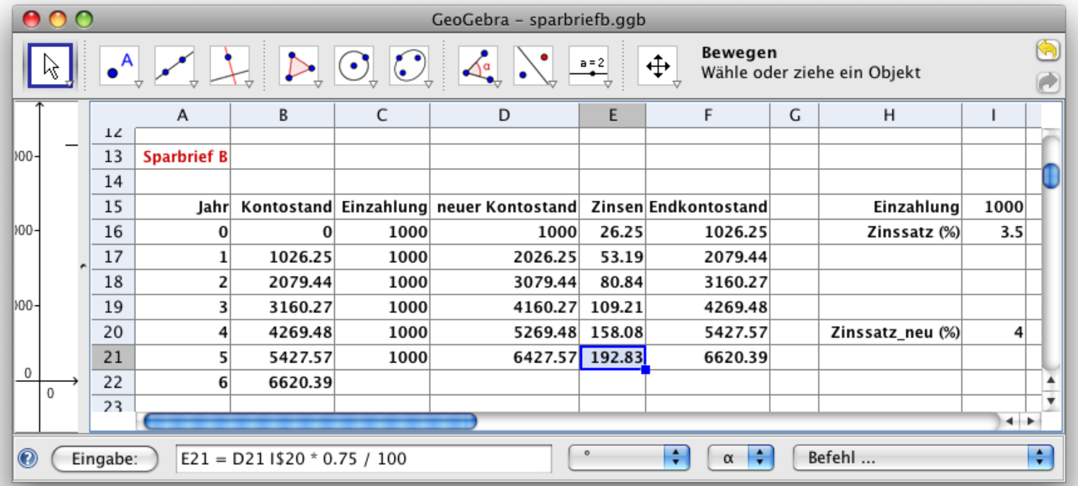


Abbildung 7.8: Sparbrief A - grafische Darstellung im Geometriefenster

7.1.2.2 Sparbrief B

Die Erstellung der Tabelle zur rekursiven Berechnung des zweiten Sparbriefes erfolgt zunächst genau so, wie jene für den ersten Sparbrief. Der einzige Unterschied ist die Wahl des Zinssatzes (3,5 %p.a.). Da sich dieser Zinssatz nach vier Jahren ändern wird, schreiben wir in eine weitere Zelle den dann zu erwartenden Zinssatz (z.B. 4,0 % p.a.) und beziehen ab dem fünften Jahr den Zinssatz (mit absolutem Bezug) aus dieser Zelle.
Als Ergebnis erhält man die in Abbildung 7.9 abgebildete Tabelle.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
13	Sparbrief B								
14									
15	Jahr	Kontostand	Einzahlung	neuer Kontostand	Zinsen	Endkontostand		Einzahlung	1000
16	0	0	1000	1000	26.25	1026.25		Zinssatz (%)	3.5
17	1	1026.25	1000	2026.25	53.19	2079.44			
18	2	2079.44	1000	3079.44	80.84	3160.27			
19	3	3160.27	1000	4160.27	109.21	4269.48			
20	4	4269.48	1000	5269.48	158.08	5427.57		Zinssatz_neu (%)	4
21	5	5427.57	1000	6427.57	192.83	6620.39			
22	6	6620.39							

Abbildung 7.9: Sparbrief B - fertige Tabelle

In Abbildung 7.10 sind die Kontostände am Ende jedes Jahres grafisch dargestellt.

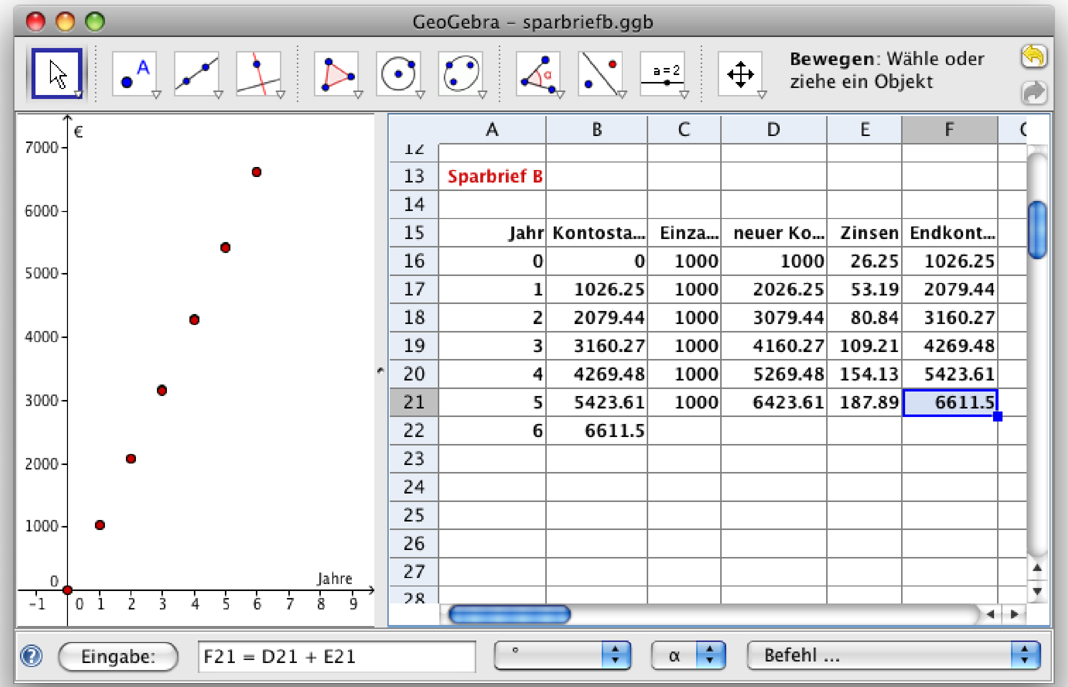


Abbildung 7.10: Sparbrief B - grafische Darstellung im Geometriefenster

Da wir nicht exakt vorher sagen können, welchen Zinssatz Elisabeth Schenner in vier Jahren zu erwarten hat, ist es sinnvoll für diesen Wert einen Schieberegler zu erstellen. Mit diesem ist es möglich einen Wert innerhalb eines festgelegten Intervalls beliebig zu verändern.
Um einen Schieberegler zu erstellen, klicken wir zunächst in der Werkzeugleiste mit der linken Maustaste auf das in Abbildung 7.11 abgebildete Feld.

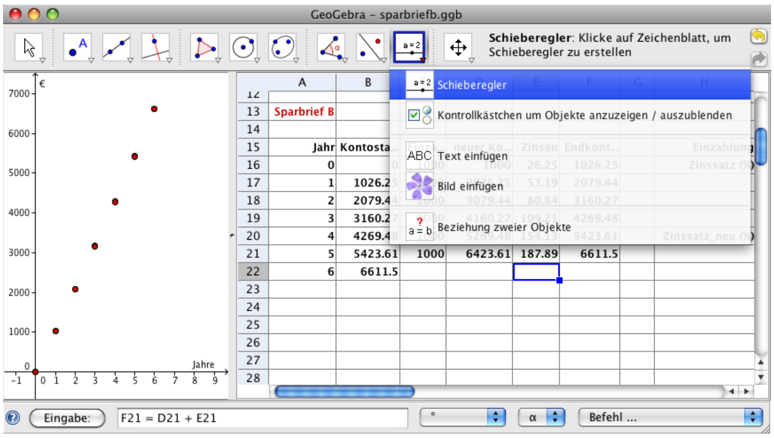


Abbildung 7.11: Feld zur Erstellung eines Schiebereglers

Nun klickt man mit der linken Maustaste in das Geometriefenster. Sogleich erscheint das in Abbildung 7.12 abgebildete Dialogfenster, in dem wir die Einstellungen für den neuen Schieberegler festlegen können. Dies sind einerseits der Name, als auch das Intervall, in dem sich der Schieberegler bewegen lassen soll, und die Schrittweite. Nachdem man alle Einstellungen vorgenommen hat, klickt man auf „Übernehmen“.

Abbildung 7.12: Erstellung eines Schiebereglers

Bevor man den Schieberegler mittels Maus verändern kann, muss man in der Werkzeugleiste auf den in Abbildung 7.13 abgebildeten Knopf drücken. Macht man dies nicht, werden weitere Schieberegler erstellt.

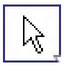


Abbildung 7.13: Knopf für Mausfunktion

Damit man die Berechnungen in der Tabelle mit den durch den Schieberegler gewählten Zinssätzen durchführen lassen kann, muss der Schieberegler mit den Berechnungen in Verbindung gebracht werden. Dies bewerkstelligen wir indem wir dir Zelle, in der der Wert für den neuen Zinssatz steht, auf den Schieberegler beziehen. Dazu schreiben wir, wie in Abbildung 7.14 zu sehe ist, hinter einem Gleichheitszeichen den Namen des Schiebereglers in die besagte Zelle.

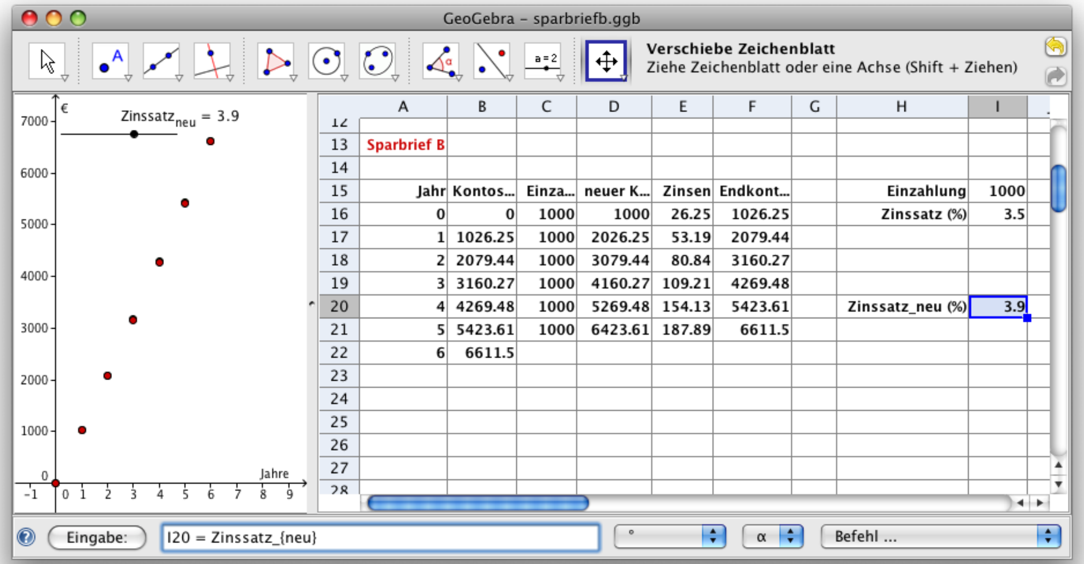


Abbildung 7.14: Verknüpfung des Schiebereglers mit der Tabelle

Der Vergleich der beiden Sparbriefe in Abbildung 7.15 zeigt, dass die zweite Variante erst dann günstiger für Elisabeth ist als die erste, wenn der Zinssatz nach vier Jahren auf mindestens 4 % p.a angestiegen ist. Bei einem $Zinssatz_{neu}$ von unter 4 % p.a. ist der Kontostand nach sechs Jahren beim Sparbrief A höher als beim Sparbrief B. Bei einem $Zinssatz_{neu}$ von 4 % p.a. ist der Kontostand nach sechs Jahren bei Sparbrief A gleich groß wie bei Sparbrief B. Erst bei einem $Zinssatz_{neu}$ von über 4 % p.a. ist der Kontostand nach sechs Jahren beim Sparbrief B höher als beim Sparbrief A.
Ob man die erste oder die zweite Form des Sparbriefes wählt, hängt also von der Beurteilung der Situation auf dem Geldmarkt ab. Ist eine Zinserhöhung absehbar so wird man die zweite Variante wählen, während man bei einer zu erwartenden Zinssenkung die erste Variante bevorzugen wird.

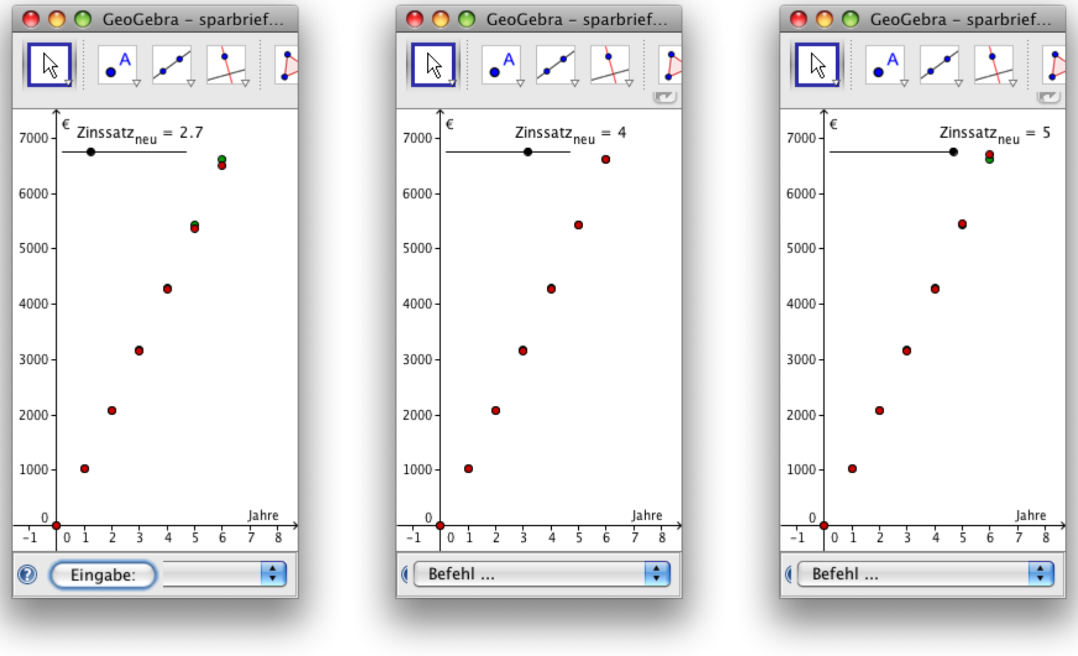


Abbildung 7.15: Vergleich von Sparbrief A und Sparbrief B

7.1.2.3 Bausparvertrag

Zunächst legen wir, wie in Abbildung 7.16 zu sehen ist, analog zu den Tabellen der beiden Sparbriefen eine Tabelle. Diese Tabelle beinhaltet die Spalten „Jahr“, „Kontostand“, „Einzahlung“, „Prämie“, „neuer Kontostand“, „Zinsen“ und „Endkontostand“. Zudem schreiben wir in Zellen außerhalb dieser Tabelle ebenso wie in Kapitel 7.1.2.1 den Betrag der jährlichen Einzahlung (1000 €) und den Zinssatz (3 %). Da beim Bausparvertrag als zusätzlicher Anreiz eine staatliche Prämie zu erwarten ist, schreiben wir in eine weitere Zelle auch diese Prämie (4 %).
Die Eintragungen in der Spalte „Jahr“ gestalten sich ebenso wie in Kapitel 7.1.2.1. Da der Kontostand vor der ersten Einzahlung 0 € beträgt, schreiben wir in die erste Zeile der Spalte „Kontostand“ „0“. Die erste Einzahlung über-

nehmen wir aus der Zelle, in welchen wir zuvor den Betrag der jährlichen Einzahlung geschrieben haben.
Bei der Berechnung der Prämie müssen wir einige Überlegungen anstellen. Der Sparer bzw. die Sparerin erhält eine Prämie, welche prozentuell vom eingezahlten Betrag berechnet wird. Ist die errechnete Prämie kleiner als 40 €, so berechnet man die Prämie mittels „Sparbetrag mal Prämie (in %) dividiert durch 100“. Würde die errechnete Prämie mindestens 40 € betragen, so erhält der Sparende 40 €. In GeoGebra lässt sich diese Berechnung mit Hilfe einer sog. „Wenn-Funktion“durchführen. Die dazu gehörige Formel lautet somit:

$$= \text{WENN}[\,[\textit{Einzahlung}] \cdot [\textit{Prämie}(\%)] \leq 40, [\textit{Einzahlung}] \cdot [\textit{Prämie}(\%)]\,, 40\,] \tag{7.1}$$

Die obige Formel ist in Abbildung 7.16 in der Eingabezeile zu sehen.

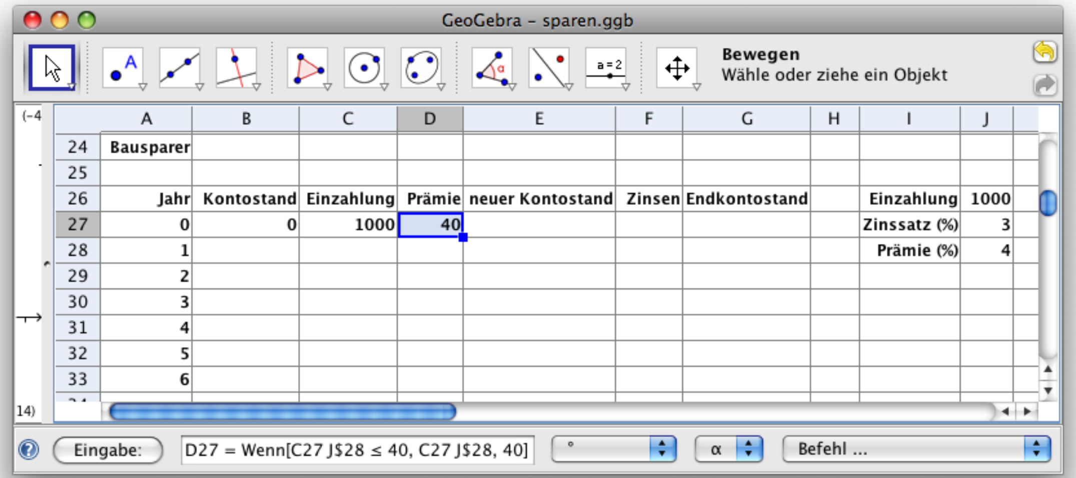


Abbildung 7.16: Bausparer - Berechnung der Prämie

Die Summe aus den Werten der Spalten „Kontostand“, „Einzahlung“ und „Prämie“ ergibt den Wert in der Spalte „neuer Kontostand“.

Zur Berechnung der Zinsen multipliziert man, wie in Abbildung ?? den neuen Kontostand mit dem Zinssatz dividiert durch 100 und multipliziert mit 0,75. Die Multiplikation mit 0,75 bewirkt, dass die effektiven Zinsen, d.h. die Zinsen ohne Kapitalertragssteuer (kurz KESt), berechnet werden.

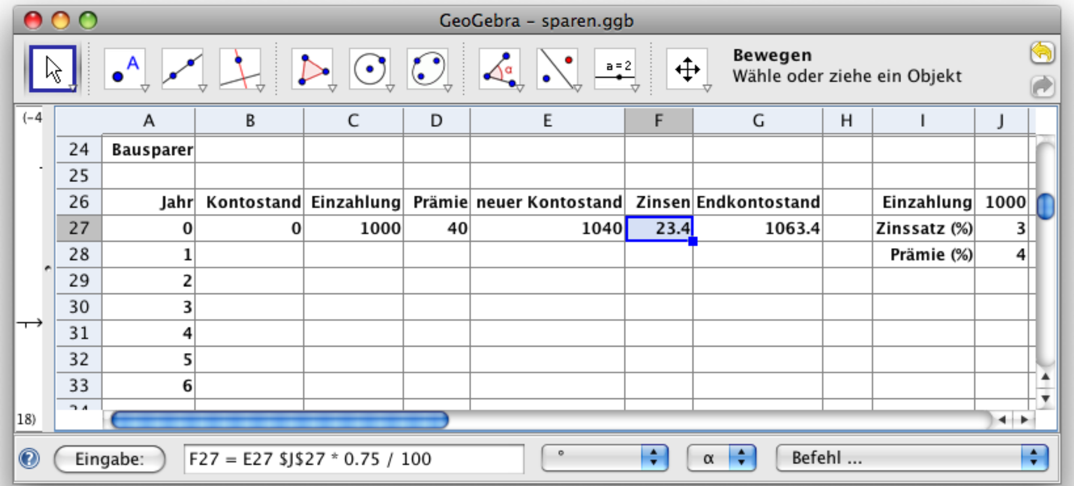
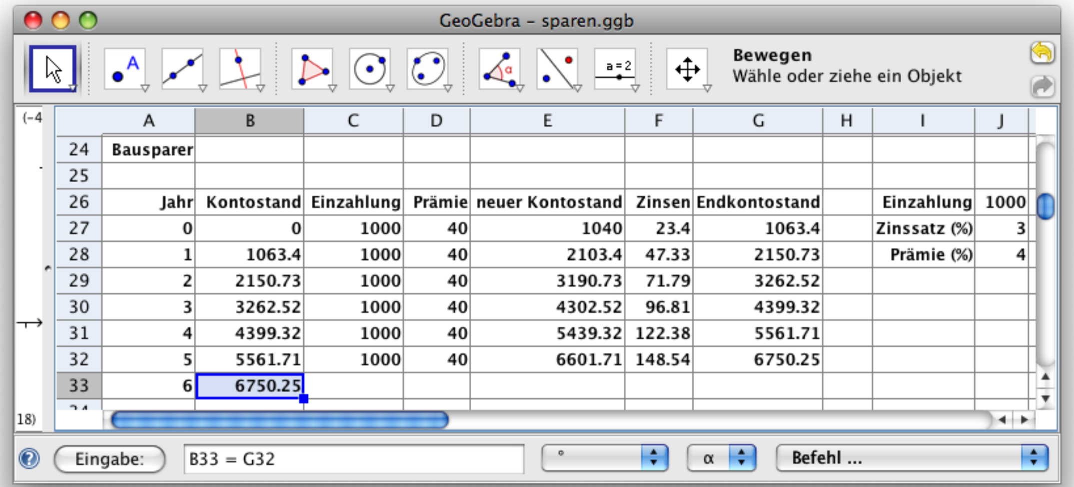


Abbildung 7.17: Bausparer - Berechnungen für das erste Jahr

Da der Kontostand zu Beginn des nächsten Jahres gleich dem Kontostand am Ende des vorangegangenen Jahres ist, übernehmen wir als zweiten Eintrag in der Spalte „Kontostand“ den Eintrag der ersten Zeile der Spalte „Endkontostand“. Alle übrigen Einträge für das zweite Jahr erhalten wir, indem wir die Formeln zur Berechnung der Werte im ersten Jahr jeweils analog zu Abbildung 7.6 grafisch, kopieren.
Für die Berechnung der weiteren Jahre benutzen wir, wie oben, die Funktion AutoAusfüllen. Als Ergebnis erhalten wir die Tabelle in Abbildung 7.18.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
24	Bausparer									
25										
26	Jahr	Kontostand	Einzahlung	Prämie	neuer Kontostand	Zinsen	Endkontostand		Einzahlung	1000
27	0	0	1000	40	1040	23.4	1063.4		Zinssatz (%)	3
28	1	1063.4	1000	40	2103.4	47.33	2150.73		Prämie (%)	4
29	2	2150.73	1000	40	3190.73	71.79	3262.52			
30	3	3262.52	1000	40	4302.52	96.81	4399.32			
31	4	4399.32	1000	40	5439.32	122.38	5561.71			
32	5	5561.71	1000	40	6601.71	148.54	6750.25			
33	6	6750.25								

Abbildung 7.18: Bausparer - fertige Tabelle

In Abbildung **??** sind die Kontostände am Ende jedes Jahres grafisch dargestellt.

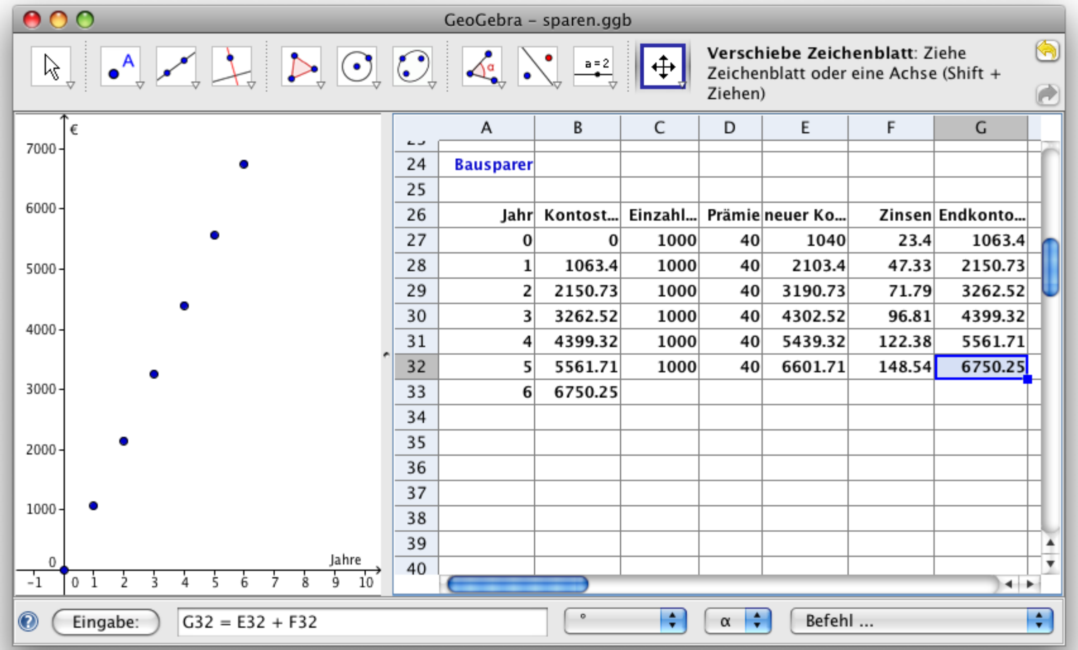


Abbildung 7.19: Bausparvertrag - grafische Darstellung im Geometriefenster

7.2 Bakterien

7.2.1 Aufgabenstellung

Bakterien sind einzellige Mikroorganismen, die keinen echten Zellkern, und somit auch keine Chromosomen im Inneren des Zellkörpers, besitzen. Die zellkernähnlichen Erbgutträger (Nukleoide) schwimmen im Zytoplasma, welches die Zelle ausfüllt. Sie sind ungeschlechtlich, haben eine Größe von ca. 0,001 mm und zählen zu den ältesten bekannten Lebewesen. Erste fossile Bakterienreste anaerober Bakterien fanden sich in den Sedimenten der etwa 3,5 Milliarden Jahre alten präkambrischen Onverwacht-Serie Südafrikas. Bisher sind über 4 500 Bakterienarten beschrieben worden, die tatsächliche Zahl wird auf über 500

000 bis zu einer Milliarde geschätzt. Die meisten Bakterienarten konnten bisher nicht kultiviert werden, sie sind nur anhand genetischer Merkmale, z. B. ihrer ribosomalen RNA, nachweisbar.

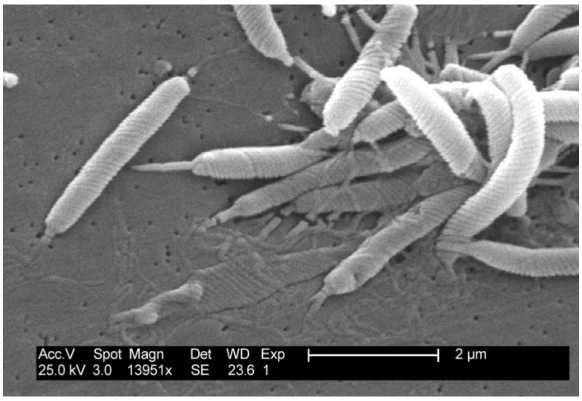


Abbildung 7.20: Helicobacter pylori, ein gramnegatives, mikroaerophiles Stäbchenbakterium, das im menschlichen Magen vorkommt. [10]

Wie die meisten Einzeller vermehren sich auch Bakterien durch Zweiteilung. Dabei wird das Erbmaterial, das sich in den Nukleoiden befindet, vollständig aufgeteilt. Nach der Teilung der Nukleoide bildet sich eine Trennwand und letztendlich lösen sich die beiden Tochterzellen voneinander ab. Da das Erbgut nicht im festen Kernen vorliegt, dieser also nicht erst aufgelöst werden muß, können sie sich dadurch sehr schnell vermehren. Solch eine Teilung findet in etwa alle 20 Minuten statt. Dies entspricht einem Wachstum der Bakterienpopulation um 3,5 % pro Minute.
Wir untersuchen nun die Anzahl von Bakterien in einer Schale mit Nährlösung. Bei der ersten Untersuchung dieser Lösung hat man festgestellt, dass sie 100 Bakterien beinhaltet. Wie wird sich die Anzahl der Bakterien in den nächsten Stunden entwickeln?

7.2.2 Exponentielles Wachstum ohne Kapazitätsbegrenzung

Da sich Bakterien durch Zellteilung vermehren, hängt der Zuwachs der Bakterienpopulation von ihrem aktuellen Wert ab. Gibt es nur eine geringe Anzahl an Bakterien, so ist der absolute Zuwachs geringer als bei einer größeren Anzahl. Da angenommen werden kann, dass die Zellteilung bei jeder Bakterie und in jedem Zeitschritt in gleicher Weise stattfindet, kann der prozentuelle Zuwachs der Population als konstant angesehen werden. Somit erscheint das exponentielle Wachstumsmodell naheliegend.

Zunächst legen wir, wie in Abbildung 7.21 zu sehen ist, eine Spalte mit Zeitabschnitten an. Diese Spalte kann beliebig lang laufen, sollte jedoch mindestens 100 Zeiteinheiten umfassen.[3]
Neben der Spalte t mit den Zeiteinheiten legen wir eine Spalte $B(t)$ für die Anzahl der Bakterien an.
Zu Beginn seien also 100 Bakterien in einer Schale, die sich proportional zum Bestand mit einer Wachstumsrate von 3,5 % vermehren. In der nächsten Spalte wollen wir den absoluten Zuwachs an Bakterien berechnen. Wir legen daher rechts neben der Spalte B(t) die Spalte $\Delta B(t)$ an. Diese Spalte benötigt man zur rekursiven Berechnung des Bakterienbestandes $B(t)$.
Den Anfangsbestand $B_0 = 100$ und die Wachstumsrate $\alpha = 0,035$ schreiben wir jeweils in eine Zelle[4]
Der erster Wert in der Spalte $B(t)$ ist gleich dem Anfangsbestand. D.h. wir können den Wert für $B(0)$ aus der Zelle, in der der Anfangsbestand steht beziehen. Der Zuwachs in der ersten Minute ist α von B_0, d.h. $\Delta B(1) = B_0 \cdot \alpha$.

[3] In den ersten Zeitschritten ist nur ein marginaler Unterschied zwischen dem linearen und dem exponentiellen Wachstum zu erkennen. Aus diesem Grund ist es wichtig die Entwicklung der Anzahl der Bakterienpopulation über längere Zeit zu betrachten.

[4] Diese Werte können wir später, wenn wir das Modell des exponentiellen Wachstums von diesem konkreten Beispiel abstahieren, auch mit Hilfe eines Schiebereglers verändern.

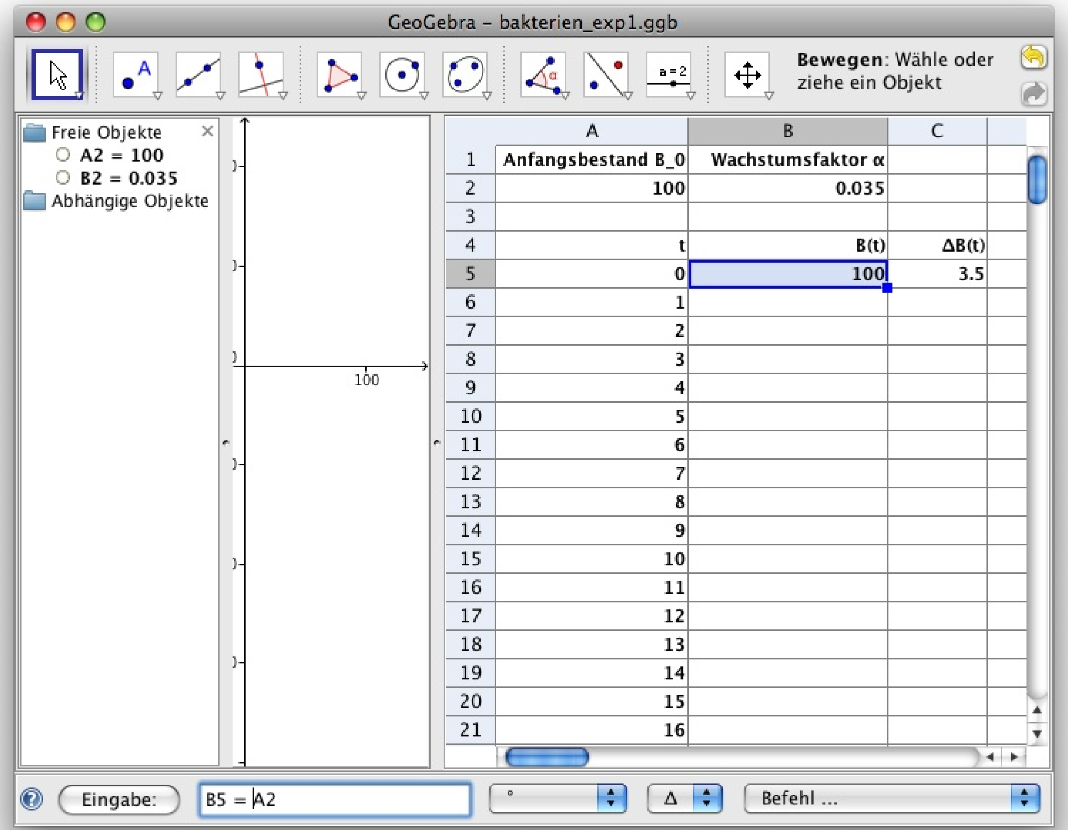


Abbildung 7.21: Berechnung der ersten Werte

Nach einer weiteren Minute befinden sich bereits 100 Bakterien plus 3,5 % von 100 Bakterien in der Nährlösung. Somit berechnen wir mittels Zellbezügen $B(1) = B(0) + \Delta B(0)$. Würden wir $B(0)$ einsetzen, so erhielten wir $B(1) = 100 + 0,035 \cdot 100 = 100 \cdot (1 + 0,035)$. Die weiteren Zellen in den und Spalten zur Berechnung der Bakterien zum Zeitpunkt t, also $B(t)$, und zur Berechnung des absoluten Zuwachs $\Delta B(t)$ berechnen wir mit der Funktion „AutoAusfüllen“. Damit es hierbei nicht zu unangenehmen Überraschungen kommt, ist es wichtig, dass der Bezug auf die Zelle, in der der Wachstumsfaktor steht, absolut ist.

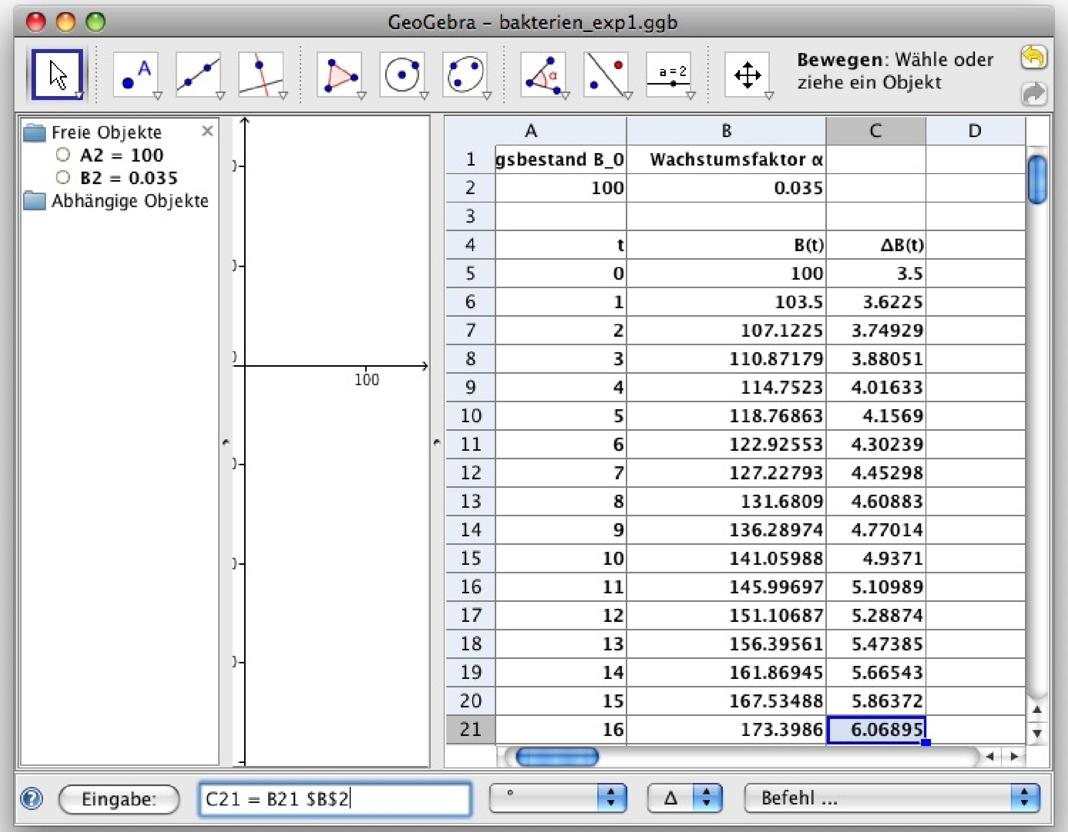


Abbildung 7.22: Berechnung der einzelnen Werte

Nun erstellen wir mit den erhaltenen Daten ein Punktediagramm. Hierzu markieren wir die Werte in den Spalten t und $B(t)$, klicken rechts und wählen im nun aufscheinenden Menü „Liste erstelllen“ .

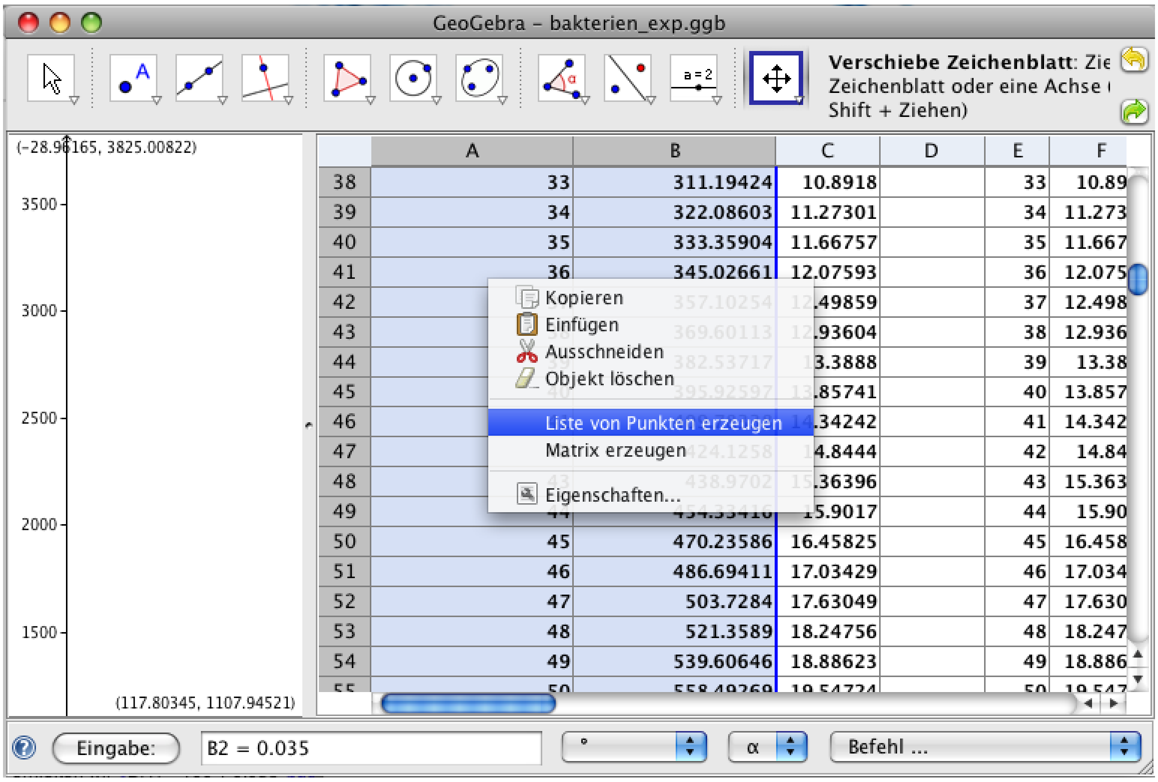


Abbildung 7.23: Liste von Punkten erzeugen

Sogleich erscheint im Algebrafenster eine Liste welche die gewünschten Punkte enthält und im Geometriefenster das entsprechende Punktediagramm.

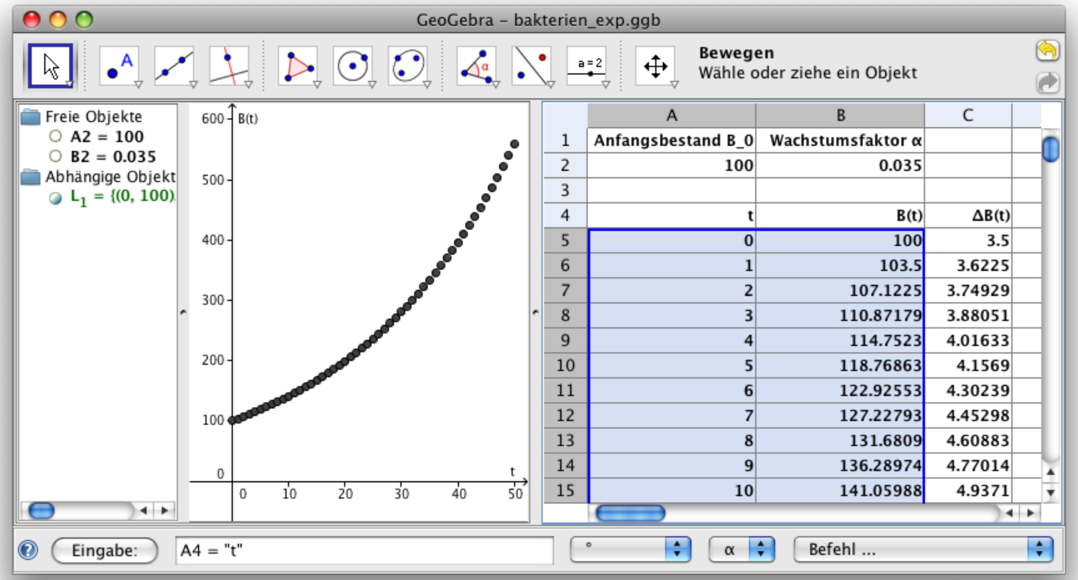


Abbildung 7.24: Liste und Punktediagramm für $B(t)$

Zunächst wird jeder Punkt standardmäßig grau angezeigt. Mittels „Bearbeiten → Einstellungen“ können Einstellungen wie Farbe und Beschriftung verändert werden. Im nun aufscheinenden Dialogfenster klickt man zunächst im linken Menü auf „Punkt“ im Register „Grundeinstellungen“ klickt man dann das Häckchen vor „Beschriftung anzeigen“ weg. Im Register „Farbe“ kann man zudem eine beliebige Farbe für die Darstellung der Punkte bzw. der Liste auswählen. Möchte man die gleichen Einstellungen für mehrere Objekte vornehmen, so muss man sie nicht für jedes einzelne Objekt durchführen. Es genügt die gewünschten Objekte zunächst im linken Menü zu markieren und die Einstellungen dann für alle Objekte zu verändern.

Abbildung 7.25: Einstellungen der Objekte verändern

Alternativ kann man in Geogebra 3.2 auch Punkte definieren (siehe Abbildung 7.26), und diese Punkte aus der Spalte in der Tabelle, ohne den Umweg über Listen, plotten lassen. Dies hat den erheblichen Vorteil, dass das resultierende Punktediagramm interaktiv mit der Tabelle verknüpft ist. Dies bedeutet, dass jede Veränderung in der Tabelle, sofort im Punktediagramm zu sehen ist und umgekehrt.

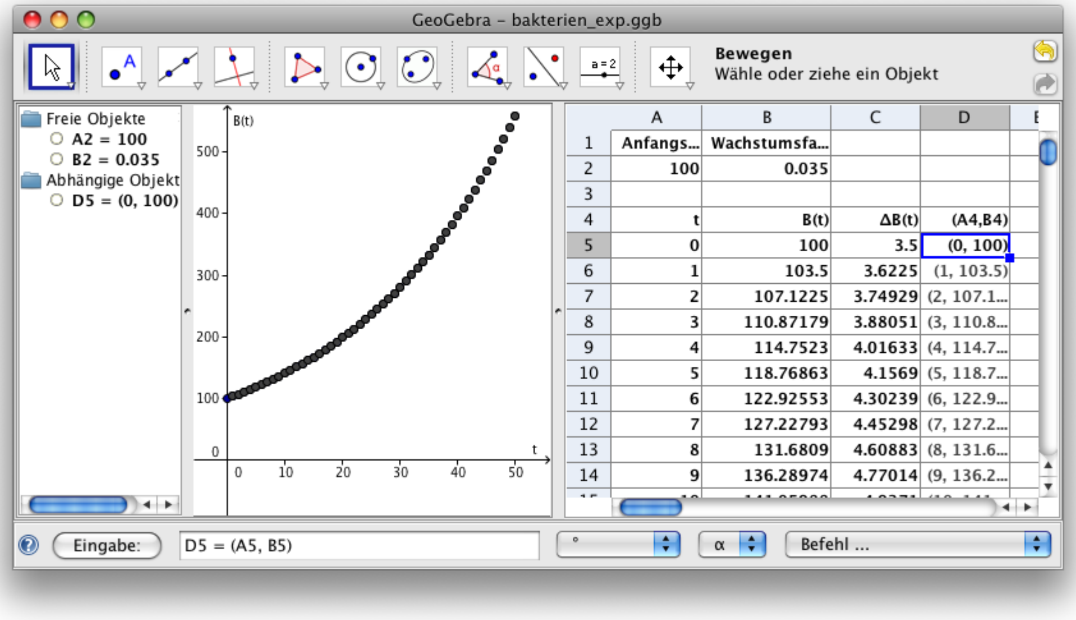


Abbildung 7.26: Definition der Punkte für den Bakterienbestand $B(t)$

Möchte man auch die absolute Änderung in den jeweiligen Zeitintervallen als Punktediagramm darstellen lassen, müsste man bei Verwendung von „Listen“ zunächst die hierfür benötigten Einträge aus den Spalten t und $\Delta B(t)$ kopieren, sodass sie unmittelbar nebeneinander stehen. Anschließend kopiert man wie zuvor die Werte in diesen beiden neuen Spalten, klickt rechts und lässt sich eine Liste aus Punkten erstellen. Da dieser Weg ungleich komplizierter und konstruierter ist, als die Definition von Punkten in einer Spalte, gehen wir, wie in Abbildung **??** zu sehen ist, analog zu oben vor. Um die beiden Punkdiagramme unterscheiden und richtig zuordnen zu können, färben wir diese Punkte wie oben beschrieben.

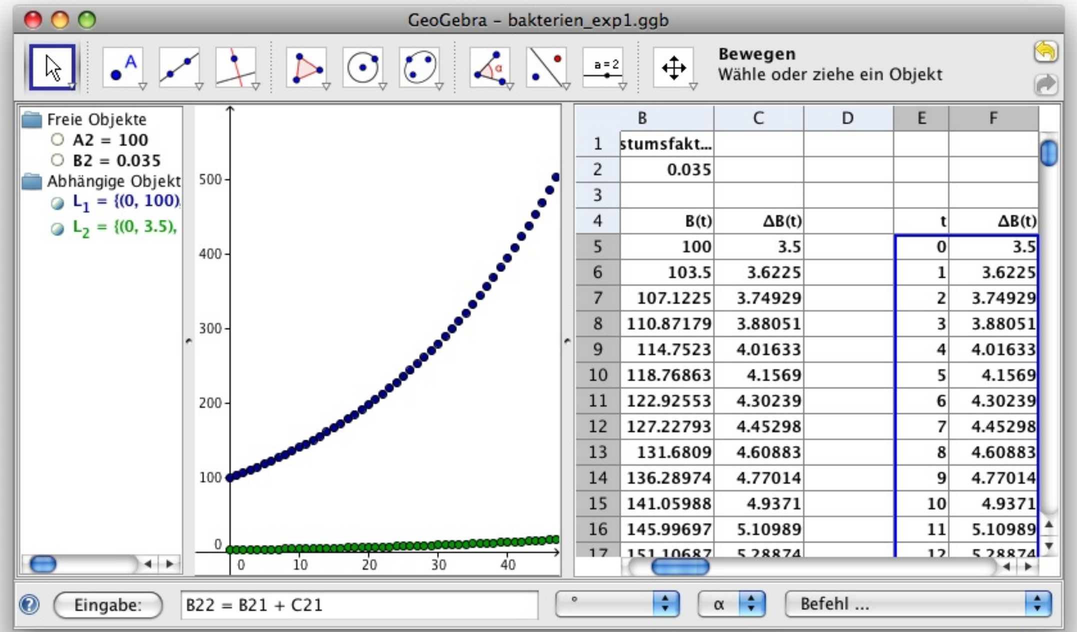


Abbildung 7.27: Definition der Punkte für die absolute Änderung des Bakterienbestandes $\Delta B(t)$

Betrachten wir unser Diagramm vor dem Hintergrund, dass sich diese exponentiell wachsende Anzahl an Bakterien in einer Schale befindet, so liegt der Schluss nahe, dass diese Schüssel bald ihre maximales Fassungsvermögen erreichen wird, und keine Bakterien mehr aufnehmen kann. Sie besitzt sozusagen eine obere Schranke, welche wir in unserem bisherigen Modell nicht berücksichtigt haben.

7.2.3 Exponentielles Wachstum mit Kapazitätsbeschränkung

Da die Nährlösung, in der sich die Bakterien befinden nicht unendlich viele Nährstoffe beinhaltet und der Lebensraum der Bakterien beschränkt ist, müssen wir annehmen, dass die Schale ein maximales Fassungsvermögen an

Bakterien besitzt. Dies hat zur Konsequenz, dass die Wachstumsrate nicht wie bisher konstant ist, sondern immer kleiner wird, je größer der Bakterienbestandes ist. Zu Beginn können sich die Bakterien noch annähernd nach dem exponentiellen Wachstumsmodell vermehren, da die Nährlösung noch genügend Lebensraum für die Nachkommen bietet. Im weiteren Verlauf wird dieser Lebensraum jedoch immer kleiner, sodass sich die Bakterien nicht mehr so schnell vermehren können.
Für die folgende Modellierung ist es daher sinnvoll auf die Spalte t auf 300 Zeiteinheiten zu erweitern. Würde man diese Erweiterung nicht tätigen, würde der Unterschied zum exponentiellen Wachstum nicht so gut ersichtlich sein.
Wir benötigen nun zur Modellierung des Wachstumsmodells den momentanen Bestand an Bakterien $B(t)$, die „Füllung“ d.h. die reative Füllung an Bakterien, der Schale. Dies ist der Quotient $\frac{B(t)}{G}$, wobei G die Kapazitätsgrenze bezeichnet.
Hierzu müssen wir zuerst in eine Zelle die Kapazität G (Fassungsvermögen an Bakterien der Schale) schreiben. In unserem Modell setzen wir $G := 1000$. Ebenso wie für den Anfangswert B_0 und die Wachstumsrate α kann man auch hier einen Schieberegler einsetzen.
Für die Werte der Füllung legen wir eine weitere Spalte an. Die Werte in dieser Spalte berechnet wie bereits angedeutet durch $\frac{B(t)}{G}$, wobei der Zellbezug auf die Kapazitätsgrenze absolut sein muss. In Abbildung 7.28 ist die Tabelle und die Berechnung der Füllung zum Zeitpunkt t zu sehen.

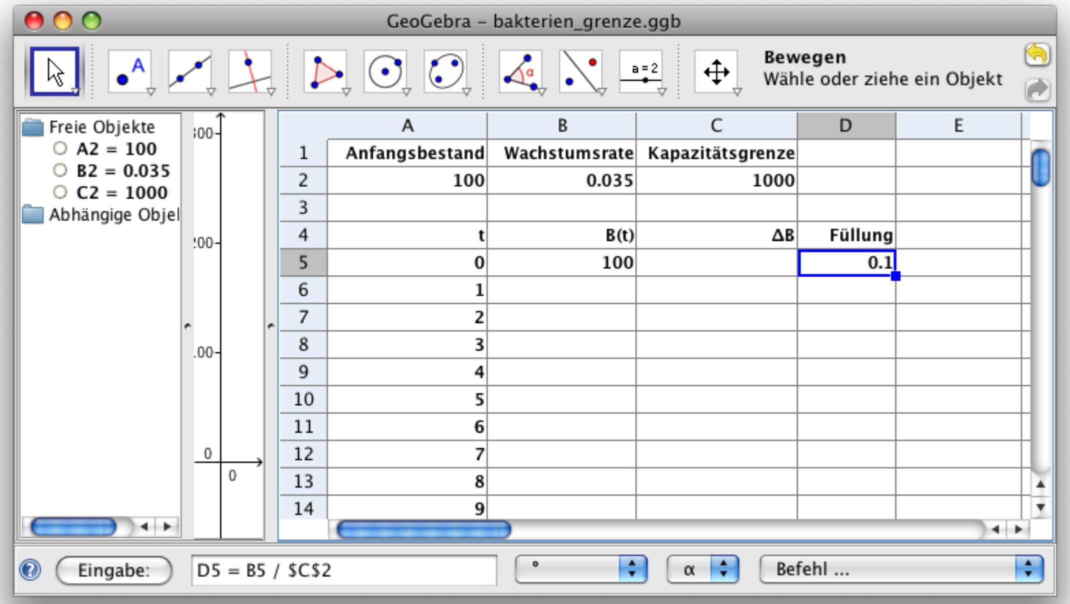


Abbildung 7.28: Berechnung der Füllung zum Zeitpunkt t

Erhält man für die Füllung den Wert 1, also 100 %, so ist die Schale bis zum Rand gefüllt.
Aus der Füllung lässt sich nun, wie in Abbildung 7.29 zu sehen ist, leicht die momentane Restkapazität (= 1 − momentane Füllung) der Schale berechnen.

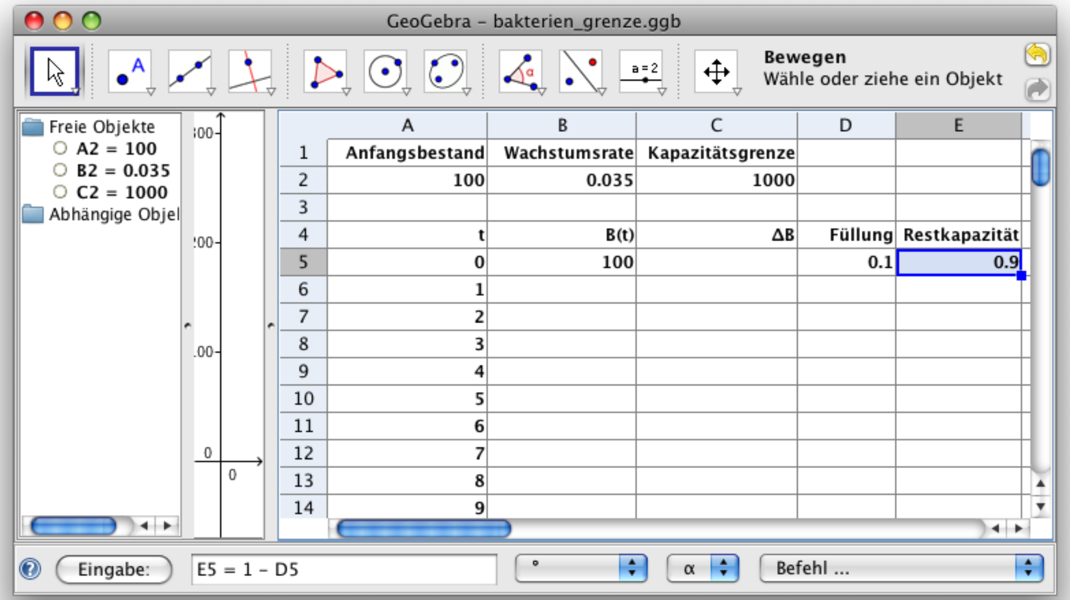


Abbildung 7.29: Berechnung der Restkapazität zum Zeitpunkt t

Die Restkapazität fliest nun in unsere Berechnung der Wachstumsrate insofern mit ein, als wir die Wachstumsrate von 3,5 % mit der Restkapazität multiplizieren und erst mit diesem Produkt, der neuen Wachstumsrate, die Anzahl der Bakterien in der nächsten Zeiteinheit berechnen. Auch hier ist wichtig, dass der Zellbezug auf die Zelle, in der die Wachstumsrate k steht, absolut ist (siehe Abbildung 7.30).

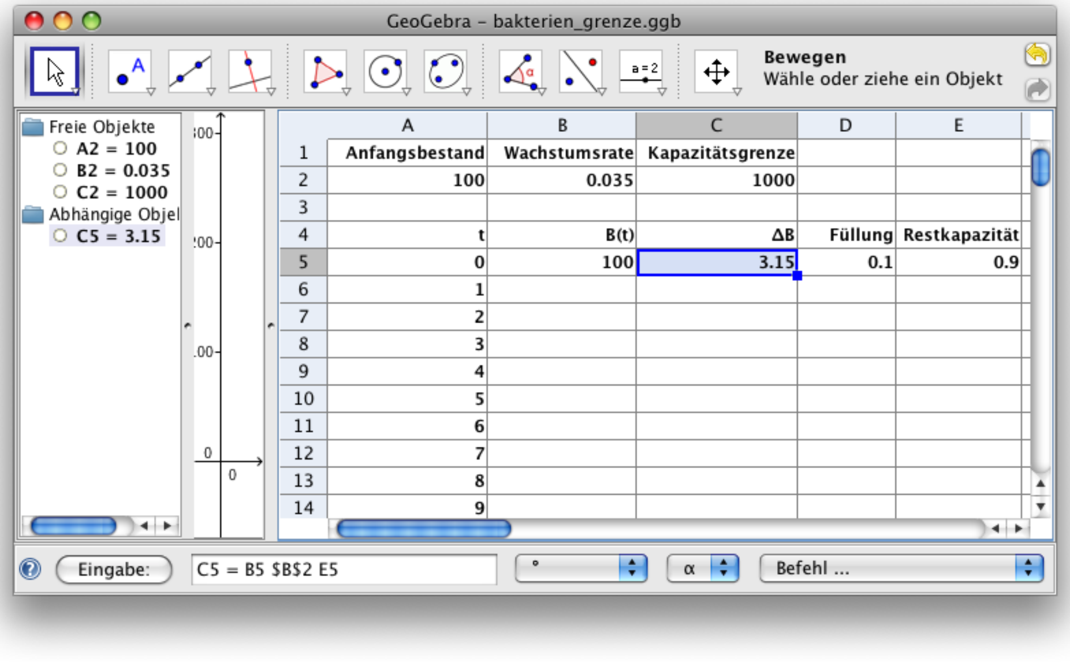
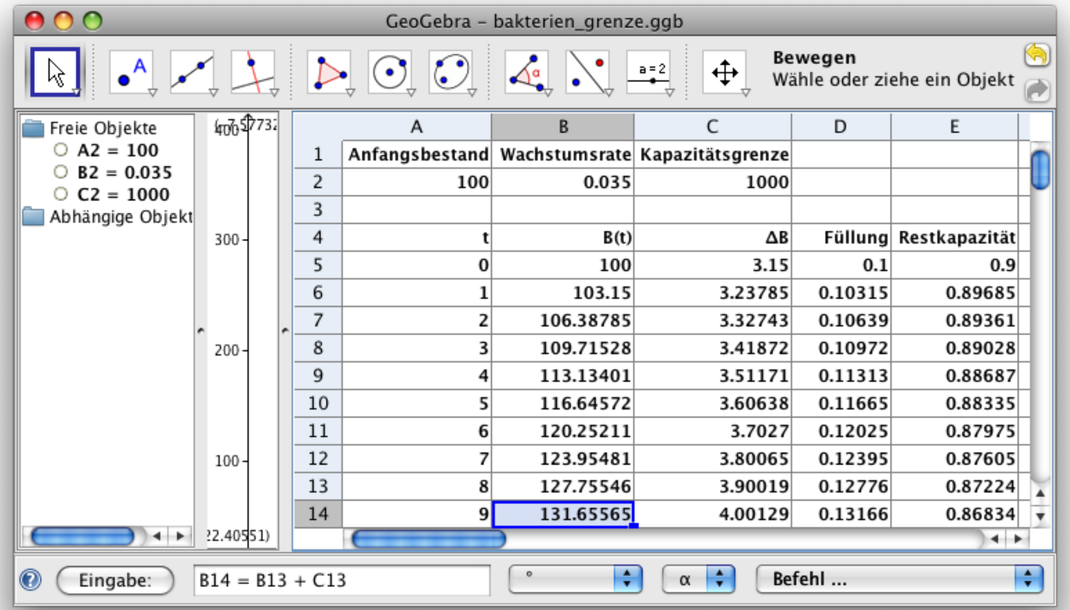


Abbildung 7.30: Berechnung der absoluten Zuwachsrate im Zeitintervall t

Anschließend berechnen wir genauso wie bei der letzten Tabelle, den Bestand zum Zeitpunkt t rekursiv mittels $B(n+1) = B(n) + \Delta B(n)$ und kopieren die Formeln in den einzelnen Spalten mittels der Funktion AutoAusfüllen in die unteren Zellen. In Abbildung 7.31 ist die hieraus resultierende Tabelle zu sehen.



	A	B	C	D	E
1	Anfangsbestand	Wachstumsrate	Kapazitätsgrenze		
2	100	0.035	1000		
3					
4	t	B(t)	ΔB	Füllung	Restkapazität
5	0	100	3.15	0.1	0.9
6	1	103.15	3.23785	0.10315	0.89685
7	2	106.38785	3.32743	0.10639	0.89361
8	3	109.71528	3.41872	0.10972	0.89028
9	4	113.13401	3.51171	0.11313	0.88687
10	5	116.64572	3.60638	0.11665	0.88335
11	6	120.25211	3.7027	0.12025	0.87975
12	7	123.95481	3.80065	0.12395	0.87605
13	8	127.75546	3.90019	0.12776	0.87224
14	9	131.65565	4.00129	0.13166	0.86834

Abbildung 7.31: Berechnung des Bestandes zum Zeitpunkt t

Wenn wir nun unsere Werte nun betrachten und versuchen diese zu interpretieren, können wir folgende Eigenschaften erkennen: Sobald die Schale zur Hälfte gefüllt ist, d.h. die Restkapazität = Füllung = 0,05, beträgt die modifizierte Wachstumsrate $1,75\% = \frac{1}{2} \cdot k$. Bei einer halbvollen Schale beträgt die Wachstumsrate somit nur mehr die Hälfte.
Ebenso verhält es sich bei einer Füllung von 75 %. Hier beträgt die Restkapazität nur mehr 25% bzw. 0,25, was eine modifizierte Wachstumsrate von $0,875\% = \frac{1}{4} \cdot k$ liefert.
Wir können somit mit Hilfe einer vollständigen Induktion zeigen, dass sich die Wachstumsrate direkt proportional zur Restkapazität verhält.
Ebenso wie für das zuvor untersuchte exponentielle Wachstum erstellen wir nun, wie in Abbildung 7.32, auch ein Diagramm für das exponentielle Wachstum mit Kapazitätsgrenze. Letzteres nennt man auch „logistisches Wachstum

mit linearem Hemmfaktor“.

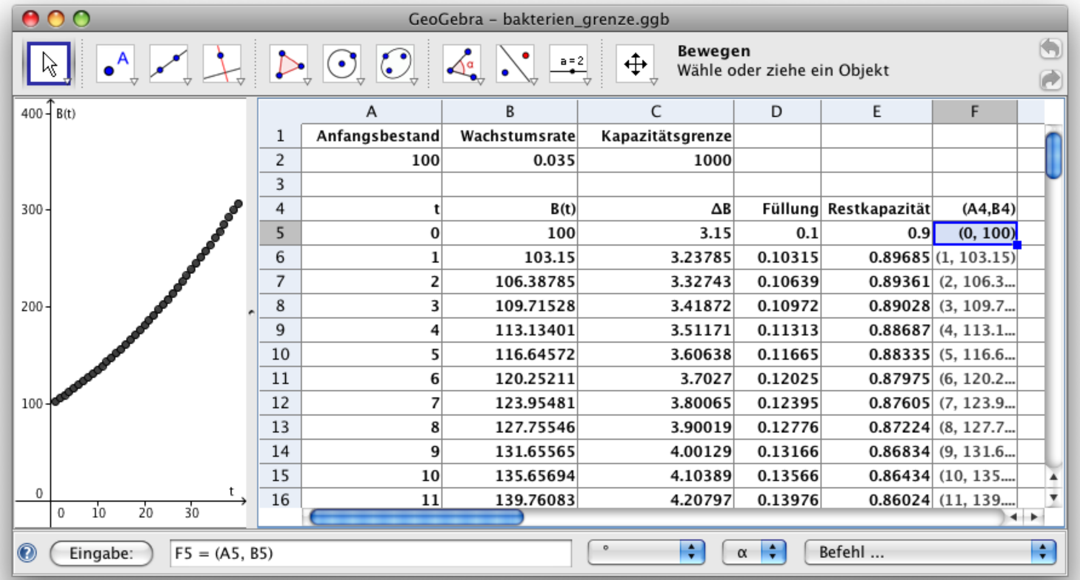


Abbildung 7.32: Punktdiagramm von $B(t)$

Der Funktionsgraf des logistischen Wachstums steigt nicht so steil an, wie jener des exponentiellen Wachstums. Zudem besitzt er eine Asymptote, welche in unserem Bakterienbeispiel die Kapazität (das maximale Fassungsvermögen) der Nährlösung in der Schale ist.

Ebenso wie beim exponentiellen Wachstum kann man zusätzlich auch den absolute Zuwachs im jeweiligen Zeitintervall als Punktediagramm darstellen lassen. In Abbildung **??** sieht man das fertige Punktediagramm, welches noch durch die Definition der Punkte in Spalte G geplottet wurde.

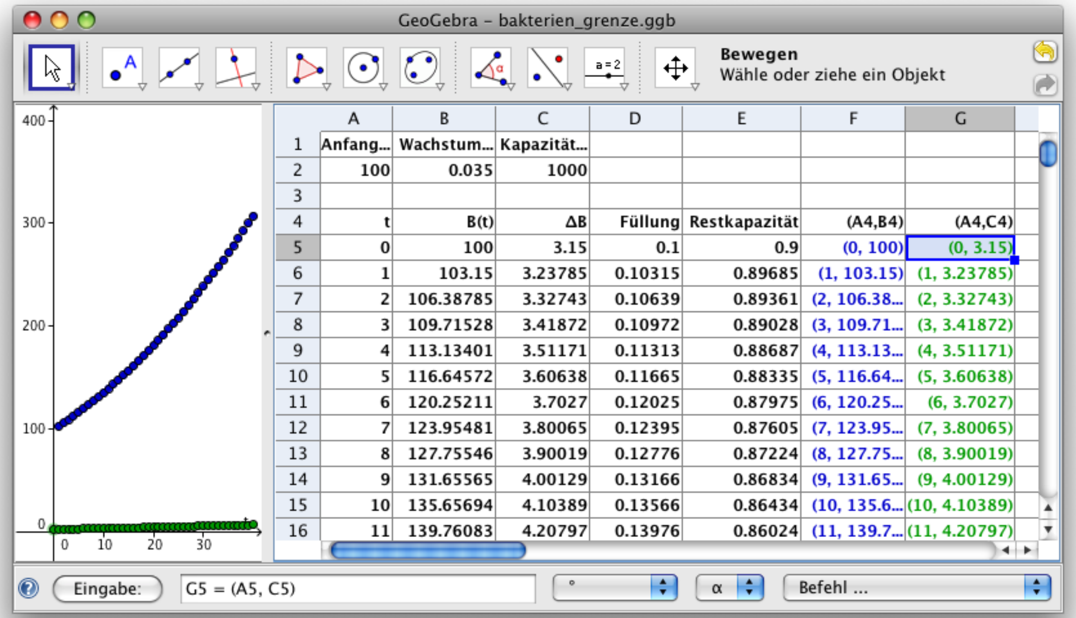
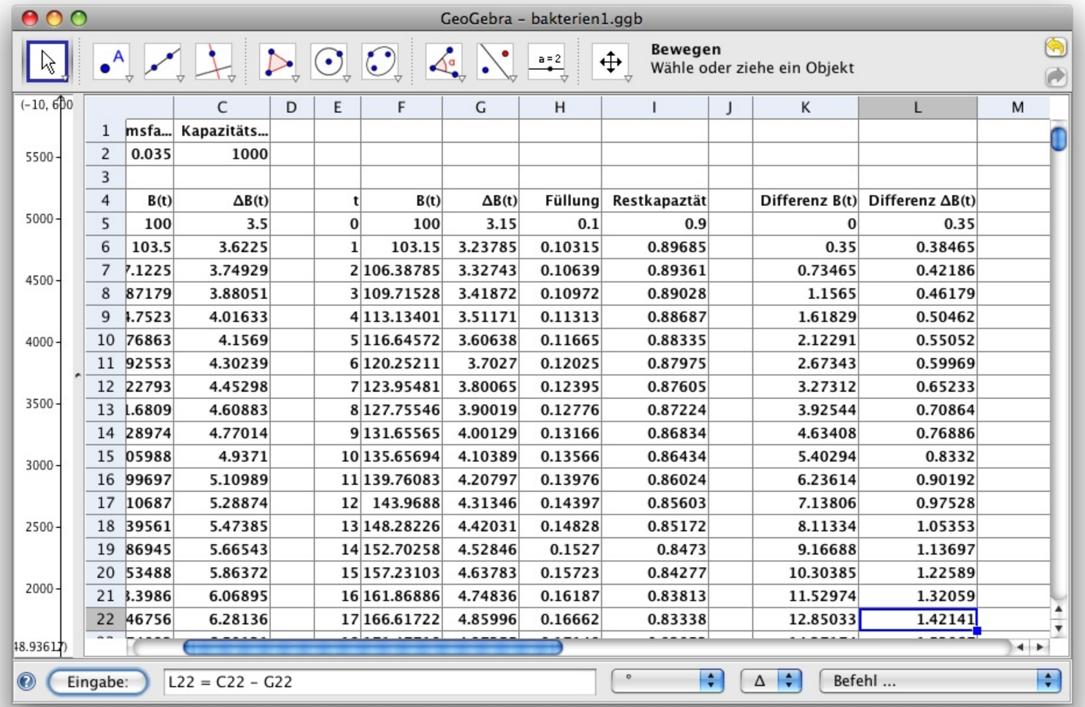


Abbildung 7.33: Punktdiagramm von $B(t)$

7.2.4 Vergleich

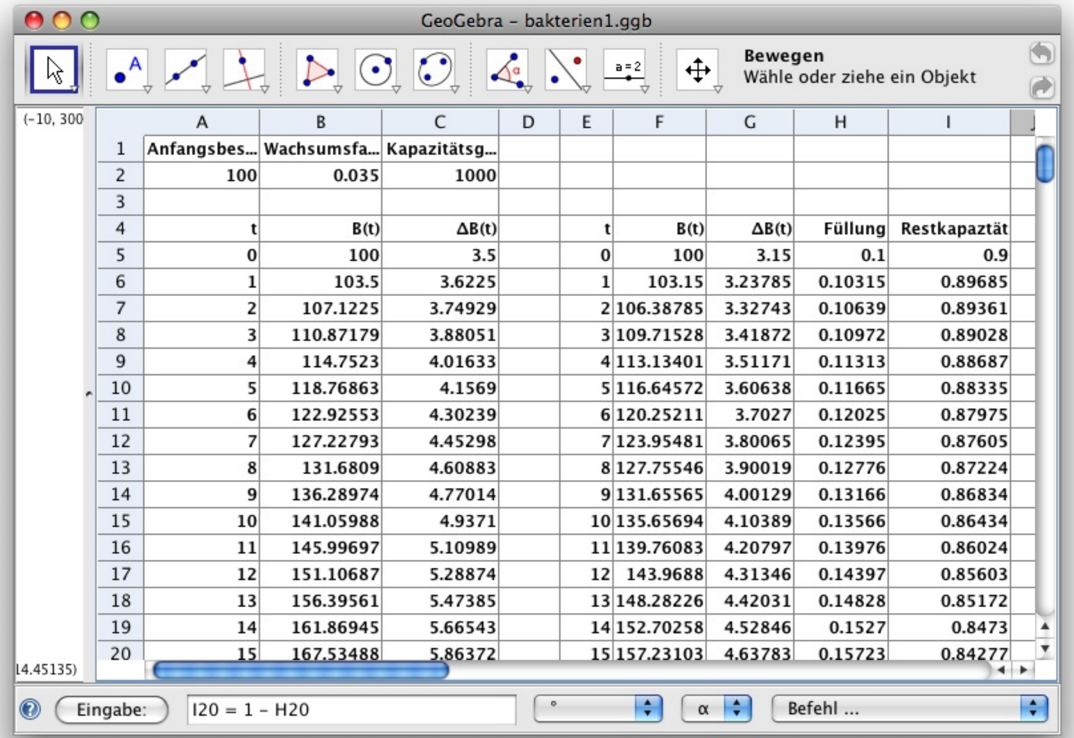
Die soeben anhand des Wachstums eines Bakterienbestandes modellierten Wachstumsvorgänge können wir nun miteinander vergleichen.
Dazu erstellen wir die in Abbildung 7.34 darbestellte Tabelle, in der wir den Bakterienbestand $B(t)$ mit dem exponentiellen Wachstumsmodell sowohl ohne Kapazitätsgrenze als auch mit Kapazitätsgrenze berechnen.



	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	msfa...	Kapazitäts...										
2	0.035	1000										
3												
4	B(t)	ΔB(t)		t	B(t)	ΔB(t)	Füllung	Restkapaztät		Differenz B(t)	Differenz ΔB(t)	
5	100	3.5		0	100	3.15	0.1	0.9		0	0.35	
6	103.5	3.6225		1	103.15	3.23785	0.10315	0.89685		0.35	0.38465	
7	7.1225	3.74929		2	106.38785	3.32743	0.10639	0.89361		0.73465	0.42186	
8	87179	3.88051		3	109.71528	3.41872	0.10972	0.89028		1.1565	0.46179	
9	4.7523	4.01633		4	113.13401	3.51171	0.11313	0.88687		1.61829	0.50462	
10	76863	4.1569		5	116.64572	3.60638	0.11665	0.88335		2.12291	0.55052	
11	92553	4.30239		6	120.25211	3.7027	0.12025	0.87975		2.67343	0.59969	
12	22793	4.45298		7	123.95481	3.80065	0.12395	0.87605		3.27312	0.65233	
13	1.6809	4.60883		8	127.75546	3.90019	0.12776	0.87224		3.92544	0.70864	
14	28974	4.77014		9	131.65565	4.00129	0.13166	0.86834		4.63408	0.76886	
15	05988	4.9371		10	135.65694	4.10389	0.13566	0.86434		5.40294	0.8332	
16	99697	5.10989		11	139.76083	4.20797	0.13976	0.86024		6.23614	0.90192	
17	10687	5.28874		12	143.9688	4.31346	0.14397	0.85603		7.13806	0.97528	
18	39561	5.47385		13	148.28226	4.42031	0.14828	0.85172		8.11334	1.05353	
19	86945	5.66543		14	152.70258	4.52846	0.1527	0.8473		9.16688	1.13697	
20	53488	5.86372		15	157.23103	4.63783	0.15723	0.84277		10.30385	1.22589	
21	3.3986	6.06895		16	161.86886	4.74836	0.16187	0.83813		11.52974	1.32059	
22	46756	6.28136		17	166.61722	4.85996	0.16662	0.83338		12.85033	1.42141	

Abbildung 7.34: exponentielles vs. logistischem Wachstum

Zusätzlich berechnen wir die Differenzen der Bestände $B(t)$, sowie die Differenzen der absoluten Zuwächse $\Delta B(t)$. Die Berechnung dieser absolute Unterschiede ist in Abbildung 7.35 zu sehen.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Anfangsbes...	Wachsumsfa...	Kapazitätsg...						
2	100	0.035	1000						
3									
4	t	B(t)	ΔB(t)		t	B(t)	ΔB(t)	Füllung	Restkapaztät
5	0	100	3.5		0	100	3.15	0.1	0.9
6	1	103.5	3.6225		1	103.15	3.23785	0.10315	0.89685
7	2	107.1225	3.74929		2	106.38785	3.32743	0.10639	0.89361
8	3	110.87179	3.88051		3	109.71528	3.41872	0.10972	0.89028
9	4	114.7523	4.01633		4	113.13401	3.51171	0.11313	0.88687
10	5	118.76863	4.1569		5	116.64572	3.60638	0.11665	0.88335
11	6	122.92553	4.30239		6	120.25211	3.7027	0.12025	0.87975
12	7	127.22793	4.45298		7	123.95481	3.80065	0.12395	0.87605
13	8	131.6809	4.60883		8	127.75546	3.90019	0.12776	0.87224
14	9	136.28974	4.77014		9	131.65565	4.00129	0.13166	0.86834
15	10	141.05988	4.9371		10	135.65694	4.10389	0.13566	0.86434
16	11	145.99697	5.10989		11	139.76083	4.20797	0.13976	0.86024
17	12	151.10687	5.28874		12	143.9688	4.31346	0.14397	0.85603
18	13	156.39561	5.47385		13	148.28226	4.42031	0.14828	0.85172
19	14	161.86945	5.66543		14	152.70258	4.52846	0.1527	0.8473
20	15	167.53488	5.86372		15	157.23103	4.63783	0.15723	0.84277

Abbildung 7.35: Berechnung der absoluten Unterschiede

Wie in Abbildung 7.36 zu sehen ist der Unterschied zwischen den beiden Wachstumsmodellen besonders gut in einem gemeinsamen Diagramm zu erkennen.
Zu Beginn der Beobachtungszeit ist kaum ein Unterschied zwischen dem Verlauf des Grafen des exponentiellen Wachstums ohne Kapazitätsbegrenzung und jenem des exponentiellen Wachstums mit Kapazitätsbegrenzung festzustellen. Im Laufe der Zeit wird der Unterschied zwischen den beiden Verläufen jedoch immer größer, da die Kapazitätsgrenze immer mehr Einfluss auf das Wachstum der grünen Kurve nimmt.

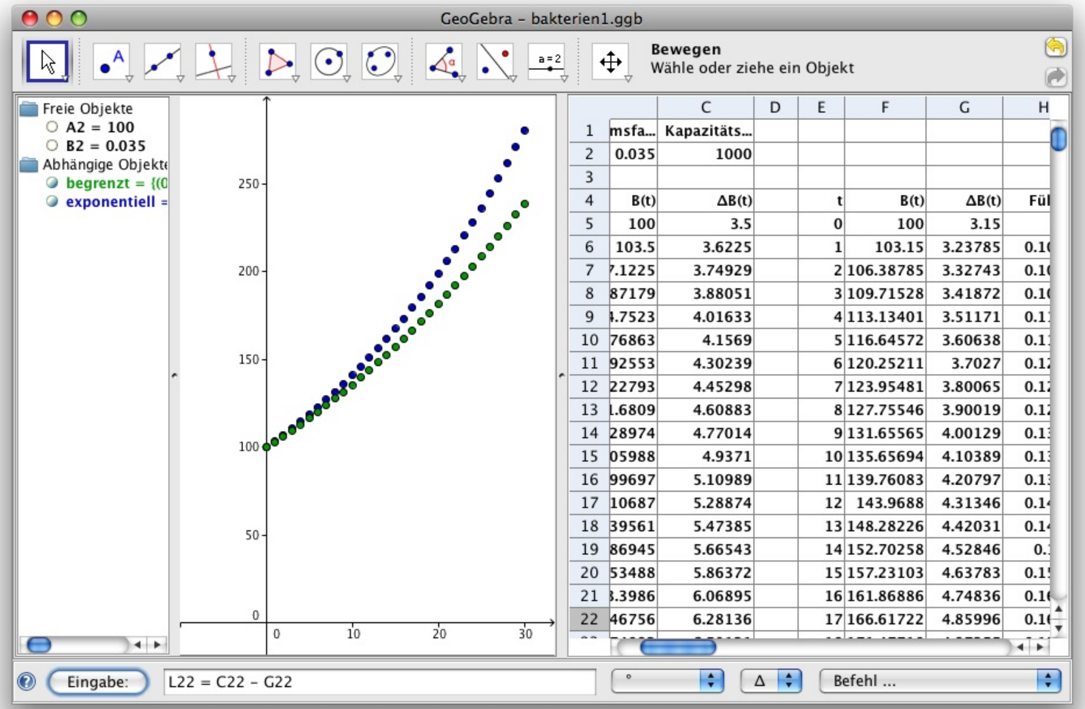


Abbildung 7.36: Punktediagramme des exponentionellen und des logistischen Wachstum

Um die in dieser Aufgabe behandelten Wachstumsmodelle noch besser untersuchen zu können, ist es interessant ihr Verhalten auch bei anderen Anfangsbeständen, Wachstumsfaktoren und Kapazitätsgrenzen zu kennen. Um dies möglichst schnell und unkompliziert machen zu können, erstellen wir im Geometriefenster von GeoGebra Schieberegler.[5]

Damit Berechnungen in der zuvor erstellten Tabelle mit Hilfe des Schiebereglers verändert werden können, muss dieser mit der Tabelle verknüpft werden, d.h. man muss die Werte für den Anfangsbestand B_0 den Wachstumsfaktor k

[5]Die Erstellung eines Schiebereglers wird in Kapitel 4.4.5 ausführlich beschrieben.

und die Kapazitätsgrenze G von den entsprechenden Schieberegler beziehen. Hierfür schreibt man z.B. in die Zelle, in die wir zunächst den Anfangsbestand 100 geschrieben haben, „= Anfangsbestand“ . Ebenso gehen wir bei den anderen beiden Werten vor. Die beschriebene Verknüpfung des Schiebereglers mit der Tabelle ist in Abbildung 7.37 zu sehen.

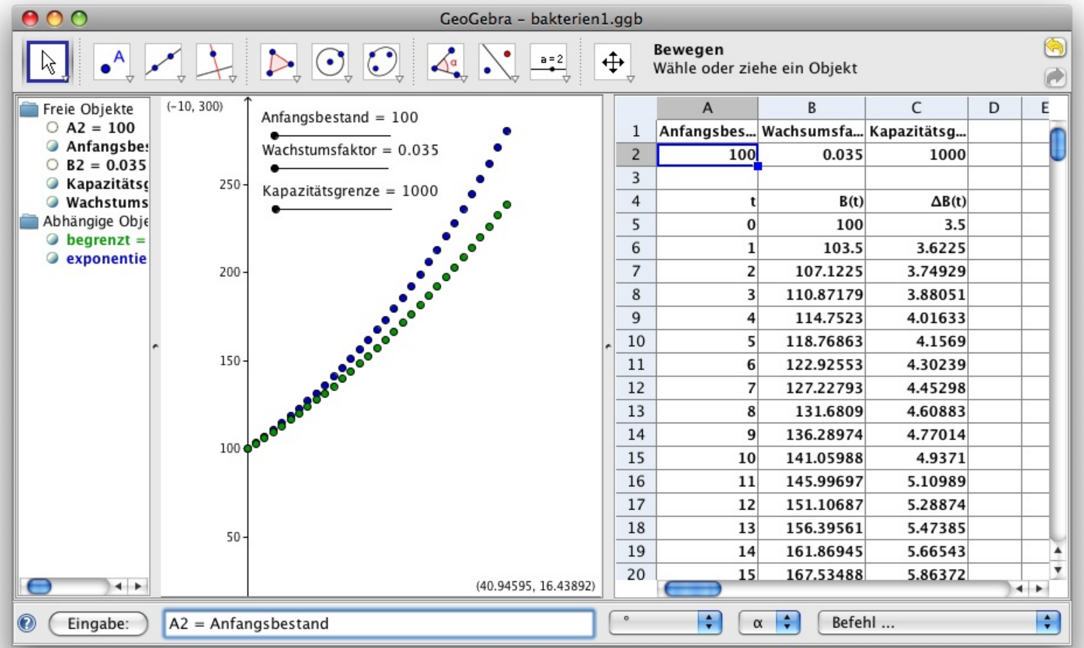


Abbildung 7.37: Verknüpfung des Schiebereglers mit der Tabelle

7.3 Grönlandwale

Die Idee zu dieser Aufgabenstellung habe ich der Internetseite des Ministeriums für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen [26] entnommen.

7.3.1 Arbeitsauftrag

Eine Population von 1000 Grönlandwalen lebt in einem abgegrenzten Lebensraum des nördlichen Eismeeres (Nordpolarmeer). Da die Wale keine natürlichen Feinde haben und im bezeichneten Lebensraum ein reichhaltiges Nahrungsangebot vorfinden, werden sie sich zunächst exponentiell vermehren. Durch die Zunahme der Anzahl der Wale sinkt aber das Nahrungsangebot, da das als Nahrung dienende Plankton nicht in unbeschränkter Menge zur Verfügung steht. Die Wale können sich nicht mehr mit dem anfänglichen Zuwachsfaktor vermehren, das nördliche Eismeer bietet nur einer begrenzten Anzahl G von Grönlandwalen Lebensraum. Diese Zahl liegt nach vorsichtigen Schätzungen bei 10000 Tieren. Bei Annäherung an diese Sättigungsgrenze G wird der Zuwachs der Wale abnehmen, d.h. bei Annäherung an G geht das Wachstumsverhalten der Population in ein begrenztes Wachstum über.
Realistisch kann das Wachstum der Grönlandwalpopulation demnach im Anfangszustand - wenn der Bestand noch weit von der Sättigungsgrenze entfernt ist - als exponentielles Wachstum und im fortgeschrittenen Zustand - wenn sich der Bestand der Sättigungsgrenze nähert - als begrenztes Wachstum beschrieben werden. Ein solches Wachstumsverhalten wird als logistisches Wachstum bezeichnet und lässt sich iterativ durch das folgende Modell beschreiben:
$B_{neu} = B_{alt} + r \cdot (G - B_{alt}) \cdot B_{alt}$
Naturschützer beobachten die Tiere und ermitteln, dass die Anzahl der Tiere im ersten Beobachtungsjahr um 15 % wächst. Für die Vermehrung der Grönlandwale kann logistisches Wachstum angenommen werden.

7.3.2 Wachstum ohne Abfang

Auf Grundlage des iterativen logistischen Wachstumsmodells kann man die Entwicklung der Grönlandwalpopulation für einen Zeitraum von 50 Jahren darstellen.
Hierfür erstellen wir zunächst eine Tabelle, die jeweils den Anfangsbestand B_{alt} und den Endbestand B_{neu} eines jeden Jahres sowie den Zuwachs ΔB enthält.

Oberhalb dieser Tabelle schreiben wir die Bedingungen, unter denen die Grönlandwal-Population wachsen wird. Dies sind einerseits die Anfangspopulation $B_0 := 1000$, der Endbestand bzw. Sättigungsgrenze $G := 1000$ und der empirisch festgestellte Wachstumsfaktor im ersten Jahr $\alpha := 0.15$. Die Wachstumsrate r können wir als Quotient aus dem Wachstumsfaktor des ersten Beobachtungsjahres und der Restkapazität berechnen. Somit lautet die Formel für die Wachstumsrate, deren Berechnung in Abbildung 7.38 zu sehen ist, $r = \frac{\alpha}{G-B_0}$.

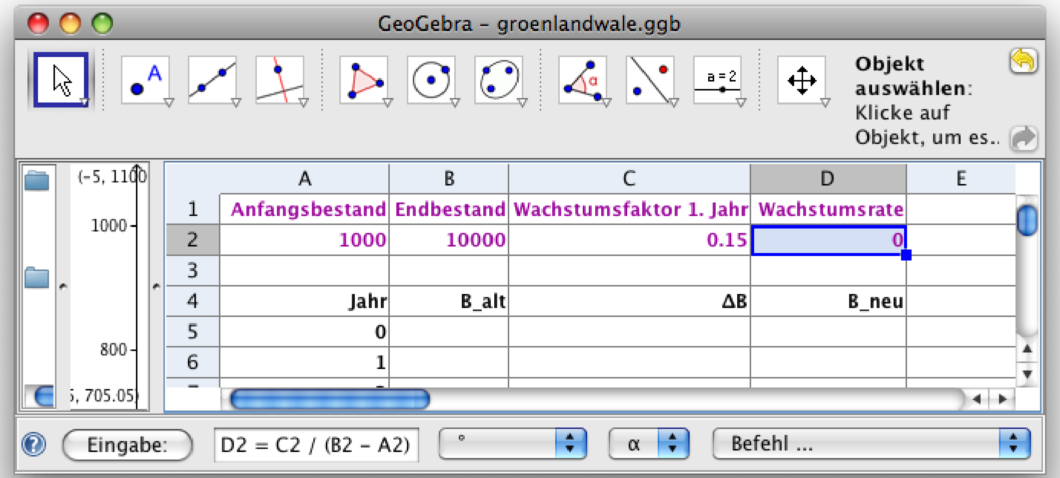


Abbildung 7.38: Anfangsbestand, Endbestand, Wachstumsrate und Berechnung des Wachstumsfaktors des ersten Jahres

Der Walbestand zu Beginn des ersten Jahres $B(0)$ ist selbstverständlich gleich dem Anfangsbestand B_0. Aus diesem Grund übernehmen wir den Wert für diese Population aus der Zelle, in die wir zuvor die Anfangspopulation geschrieben haben. Am einfachsten geschieht dies wie so oft mit Hilfe der sog. Hinzeigemethode, was auch durch die Formel in Abbildung 7.39 ersichtlich ist.

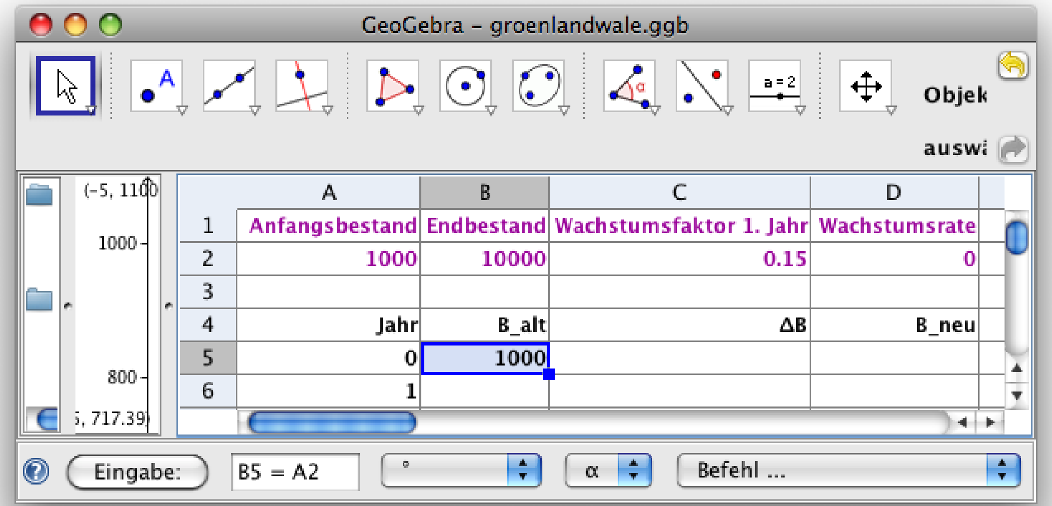


Abbildung 7.39: Bestand zu Beginn des ersten Jahres

Den Zuwachs ΔB berechnen wir, indem wir den Bestand zu Beginn des jeweiligen Jahres B_{alt} mit der Restkapazität zu Beginn des jeweiligen Jahres $G - B_{alt}$ und der Wachstumsrate r multiplizieren. Somit erhalten wir für die in Abbildung 7.40 durchgeführte Berechnung die Formel $\Delta B(t) = r \cdot (G - B_{alt}(t)) \cdot B_{alt}(t)$.

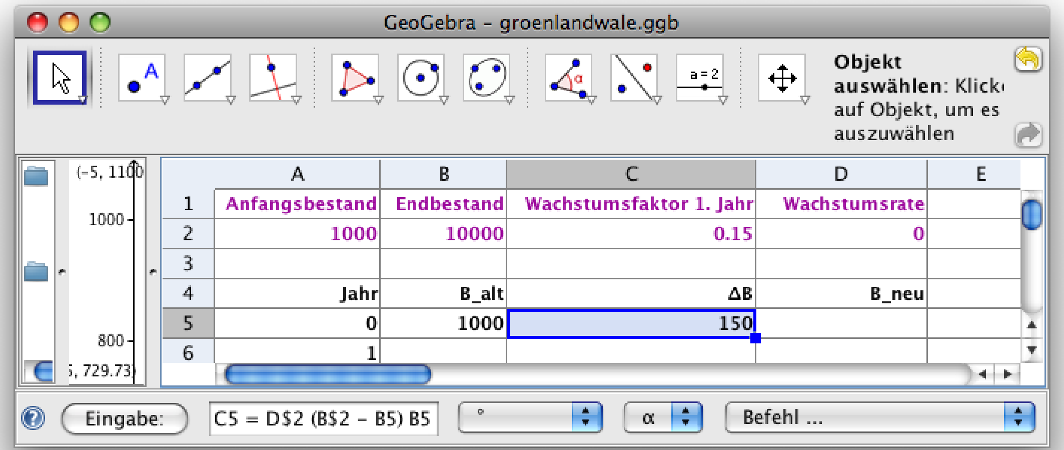
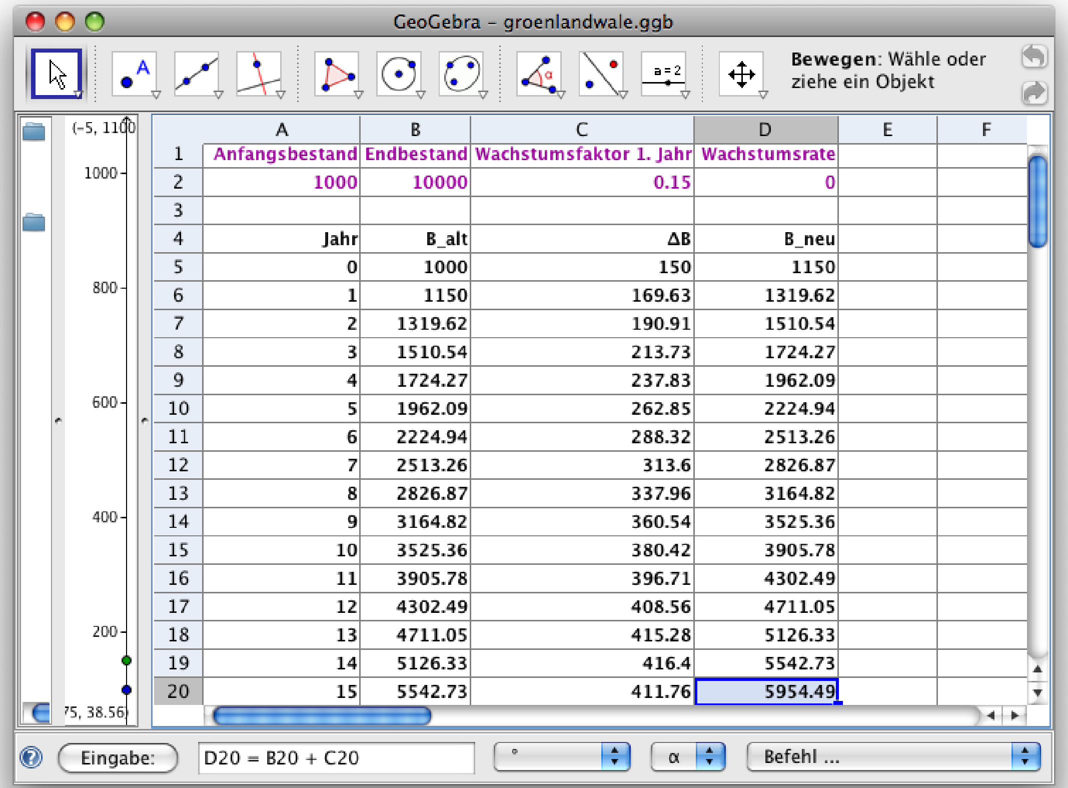


Abbildung 7.40: Berechnung des Zuwachs

Indem man den Bestand zu Jahresbeginn und den Zuwachs addiert, erhält man den Walbestand am Ende des Jahres ($B_{neu}(t) = B_{alt}(t) + \Delta B(t)$). (siehe Abbildung 7.41
Den Wert für den Bestand zu Beginn des nächsten Jahres können wir aus der Zelle übernehmen, in welcher der Wert für den Bestand am Ende des vorangegangenen Jahres steht, da $B_{neu}(n) = B_{alt}(n+1)$ gilt. Die Formeln für die Berechnung des Zuwachs und Bestand am Ende des zweiten Jahres erhalten wir indem wir schlicht die Formeln zur Berechnung dieser Werte im ersten Jahr jeweils eine Zeile nach unten kopieren. Zur Berechnung aller Werte ab dem dritten Jahr verwenden wir, nachdem wir bereits die Spalte „Jahr" vollständig ausgefüllt haben, die Funktion „AutoAusfüllen". Als Ergebnis erhalten wir die in Abbildung 7.41 dargestellte Tabelle.



	A	B	C	D	E	F
1	Anfangsbestand	Endbestand	Wachstumsfaktor 1. Jahr	Wachstumsrate		
2	1000	10000	0.15	0		
3						
4	Jahr	B_alt	ΔB	B_neu		
5	0	1000	150	1150		
6	1	1150	169.63	1319.62		
7	2	1319.62	190.91	1510.54		
8	3	1510.54	213.73	1724.27		
9	4	1724.27	237.83	1962.09		
10	5	1962.09	262.85	2224.94		
11	6	2224.94	288.32	2513.26		
12	7	2513.26	313.6	2826.87		
13	8	2826.87	337.96	3164.82		
14	9	3164.82	360.54	3525.36		
15	10	3525.36	380.42	3905.78		
16	11	3905.78	396.71	4302.49		
17	12	4302.49	408.56	4711.05		
18	13	4711.05	415.28	5126.33		
19	14	5126.33	416.4	5542.73		
20	15	5542.73	411.76	5954.49		

Abbildung 7.41: fertige Tabelle

Möchte man die erhaltenen Werte grafisch darstellen, so ist dies mit einem Punktediagramm möglich. Soll lediglich der Bestand in Abhängigkeit zur Zeit dargestellt werden, so genügt es Punkte aus den Spalten „Jahr“und „B_{alt}“ zu definieren, und diese plotten zu lassen. Für den Fall dass man den Wahlbestand und den Zuwachs der Population in Abhängigkeit von der Zeit in einem gemeinsamen Diagramm darstellen möchte, wird man rasch erkennen, dass dies kaum sinnvoll ist, ohne die Werte zuvor zu modifizieren, weil die Werte für die Population ungleich größer sind, als jene für den Zuwachs. Aus diesem Grund dividieren wir die Werte der Spalte „B_{alt}“ durch 10, wie in Abbildung **??**.

Die Werte für diese Spalten „Jahr“ übernehmen wir dabei jeweils durch Referenz aus der ursprünglichen Spalte Jahr. Dies hat den Vorteil, dass sich bei einer Änderung des Zeitschrittes in dieser ursprünglichen Spalte für die Zeitabschnitte sich sogleich auch die grafische Darstellung dem entsprechend dynamisch ändert. Auch die Werte für die neue Spalte „ΔB“ erhalten wir mittels Referenzierung auf die ursprüngliche Spalte „ΔB“. Die Erstellung dieser Wertetabelle ist lediglich deshalb nötig, da eine Liste aus Punkten nur dann erstellt werden kann, wenn die betreffenden Werte in nebeneinander liegenden Spalten stehen.

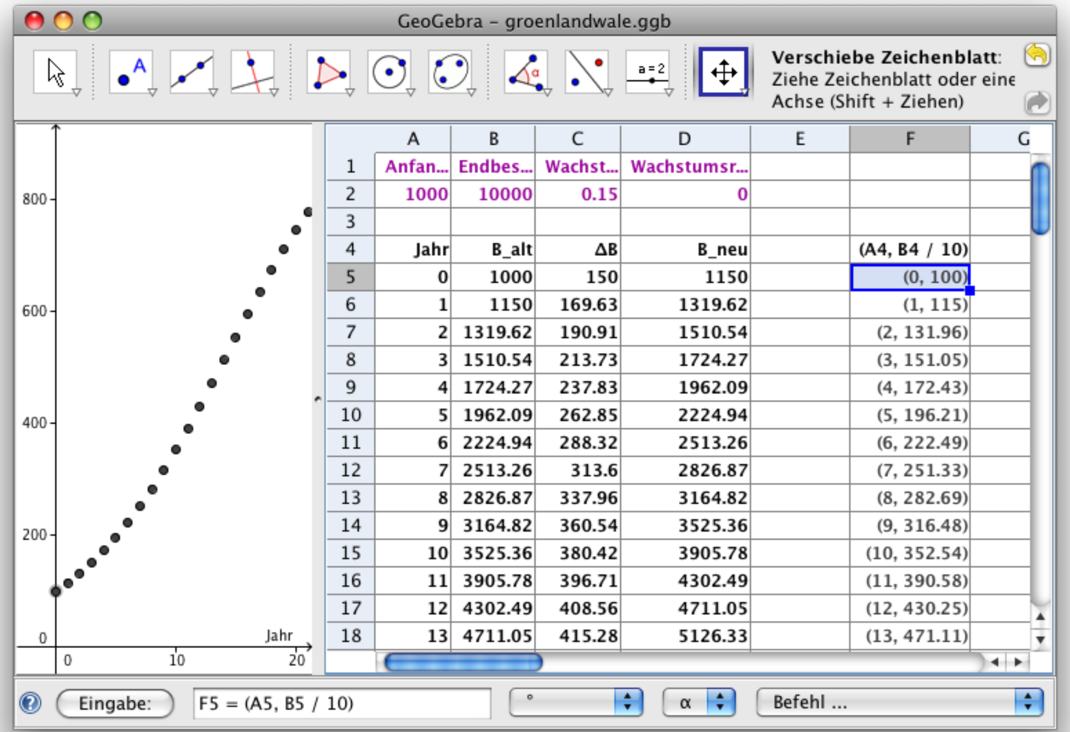


Abbildung 7.42: Definition der Punkte für den Bakterienbestand $B(t)/10$

Analog definieren und plotten wir Punkte aus den Spalten „Jahr“und „ΔB“.

Zur besseren Übersicht färben wir die Punktediagramme und die zugehörigen Spalten. In Abbildung 7.43 sind die fertigen Punktediagramme sowie die Spalten, in welchen die Punkte definiert wurden abgebildet.

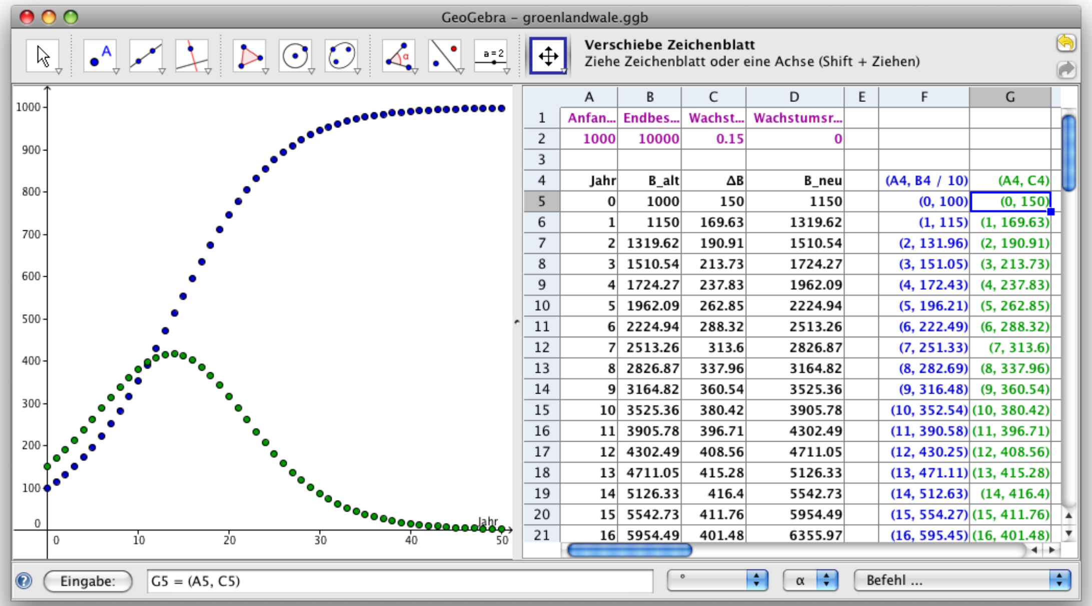


Abbildung 7.43: grafische Darstellungen der Grönlandwalpopulation $B(t)/10$und des absoluten Zuwachs $\Delta B(t)$ derselben

Um feststellen zu können, welchen Einfluss die Ausgangswerte (der Anfangsbestand, die Sättigungsgrenze und der Wachstumsfaktor im ersten Beobachtungsjahr) auf die Entwicklung der Walpopulation haben, erstellen wir für diese Werte jeweils einen Schieberegler.[6]

Die Einstellungen für den Schieberegler für den Anfangsbestand sind in Abbildung 7.44 zu sehen.

[6]Die Erstellung von Schiebereglern wurde in Kapitel 4.4.5 beschrieben.

Abbildung 7.44: Erstellung eines Schiebereglers

Damit man die Berechnungen in der Tabelle mit den durch den Schieberegler gewählten Anfangsbestand durchführen lassen kann, muss der Schieberegler mit den Berechnungen in Verbindung gebracht werden. Dies bewerkstelligen wir indem wir dir Zelle, in der der Wert für den neuen Zinssatz steht auf den Schieberegler beziehen. Dazu schreiben wir, wie in Abbildung 7.45 zu sehen ist, hinter einem Gleichheitszeichen den Namen des Schiebereglers in die besagte Zelle.

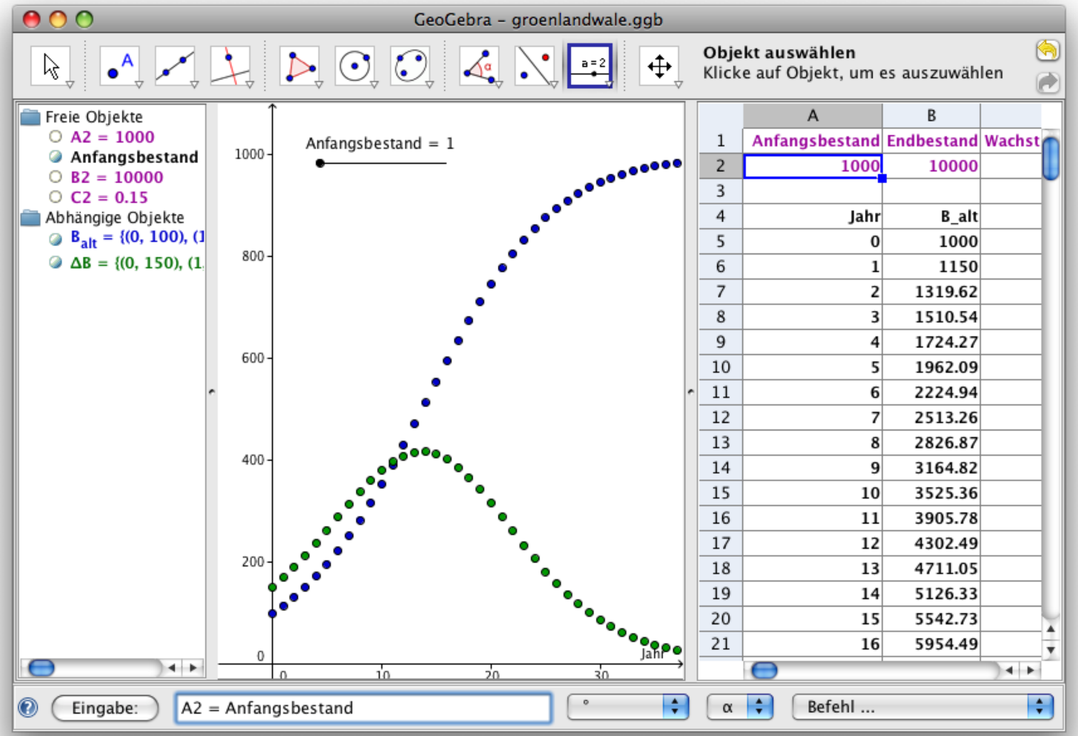


Abbildung 7.45: Verknüpfung des Schiebereglers mit der Tabelle

Ebenso erstellen wir auch die Schieberegler für die restlichen Ausgangsgrößen. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler mittels Schieberegler die Werte verändern, die Auswirkungen ihrer Veränderungen beobachten und versuchen Schlüsse daraus zu ziehen.
In Abbildung 7.46 wurde dies gemacht und festgestellt dass die Sättigungsgrenze G umso schneller erreicht wird, je größer der Anfangsbestand bzw. der Wachstumsfaktor im ersten Beobachtungsjahr ist.

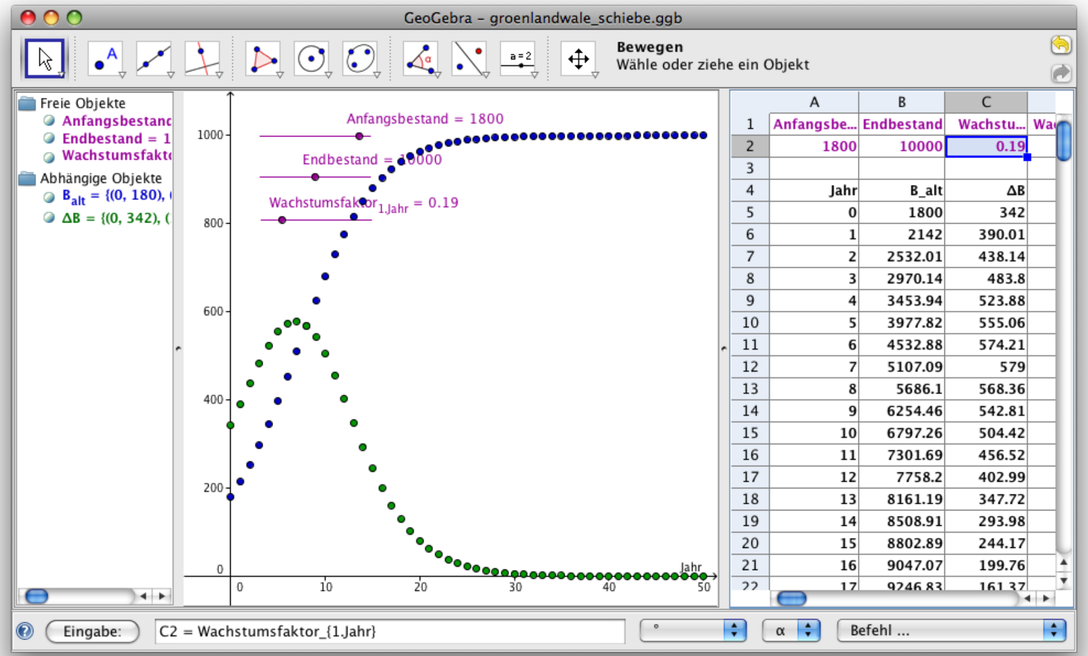


Abbildung 7.46: fertige Tabelle mit allen Schiebereglern

7.3.3 Wachstum mit prozentuellem Abfang

Um die Grönlandwalpopulation wirtschaftlich nutzen zu können, fischt man einen bestimmten prozentualen Anteil pf der Walpopulation von Beginn der Beobachtungszeit an ab.

Auf der Grundlage der Eingangsdaten erstellen wir nun ein iteratives Wachstumsmodell, welches die relative Abfangquote $pf := 0,1$ mit einbezieht und setzen dieses in GeoGebra für einen Zeitraum von 50 Jahren rechnerisch und graphisch um.

Dazu schreiben wir zu Beginn des Tabellenblattes neben die Wachstumsrate r die relative Abfangrate $pf := 0,1$. Anschließend legen wir eine Spalte „Abfangmenge“ an, in welcher wir die absolute Abgfangmenge berechnen. Dabei gilt: Abfallmenge $= B_{alt} \cdot pf$. Um auch die Auswirkungen einer veränderten relativen Abfangrate beobachten zu können, erstellen wir (wie zuvor für die anderen Ausgangsgrößen) auch für die relative Abfangrate einen Schieberegler, welchen wir in analoger Weise mit der Tabelle verknüpfen. In Abbildung 7.47 sieht man das Ergebnis dieser Arbeitsschritte.

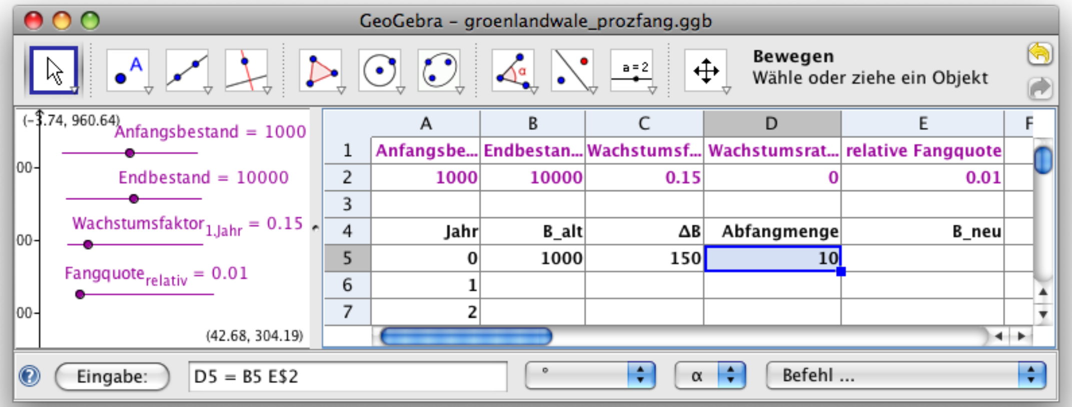
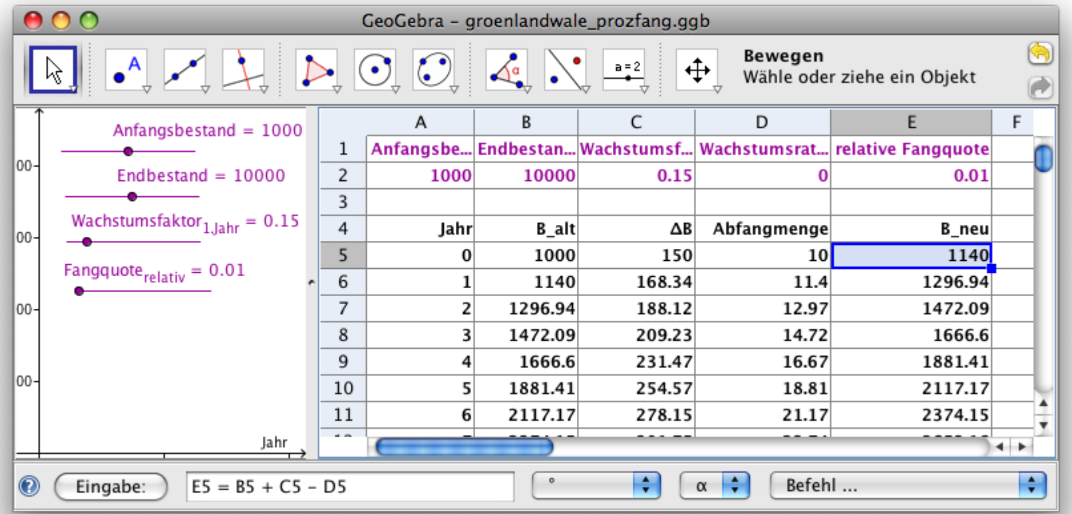


Abbildung 7.47: Schieberegler für relative Abfangrate

Für die Berechnung des Walbestandes am Ende des Jahres ergibt sich nun selbstverständlich eine Änderung zur obigen Berechnung. Von der Summe aus dem „Bestand am Beginn des Jahres“ und dem „Zuwachs“ wird nämlich, wie in Abbildung **??** zu sehen ist, die „Abfangmenge“ abgezogen.



	A	B	C	D	E
1	Anfangsbe...	Endbestan...	Wachstumsf...	Wachstumsrat...	relative Fangquote
2	1000	10000	0.15	0	0.01
3					
4	Jahr	B_alt	ΔB	Abfangmenge	B_neu
5	0	1000	150	10	1140
6	1	1140	168.34	11.4	1296.94
7	2	1296.94	188.12	12.97	1472.09
8	3	1472.09	209.23	14.72	1666.6
9	4	1666.6	231.47	16.67	1881.41
10	5	1881.41	254.57	18.81	2117.17
11	6	2117.17	278.15	21.17	2374.15

Abbildung 7.48:

Nun ist es möglich, dass die Schülerinnen und Schüler den Wert für die Abfangsquote pf mit Hilfe des Schiebereglers verändern. Dabei sollen sie untersuchen für welchen Wert von pf die Walpopulation weiterhin wächst, bei welchen Werten von pf sie konstant bleibt und wann die Grönlandwalpopulation abnimmt und schließlich ausstirbt.

Um diese Untersuchung auch grafisch anschaulich gestalten zu können, erstellt man zuvor analog zur obigen Aufgabenstellung Punktdiagramme des Bestandes am Jahresanfang dividiert durch zehn $\frac{B_{alt}(t)}{10}$, des Zuwachs $\Delta B(t)$ und der absoluten Abfangmenge.

In den folgenden Abbildung wurde diese Untersuchung durchgeführt und herausgefunden, dass der Walbestand für $pf < 0,15$ weiterhin wächst (siehe Abbildung 7.49), für $pf = 0,15$ konstant bleibt (siehe Abbildung 7.50) und für $pf > 0,15$ abnimmt, bis die Walherde schließlich ausstirbt (siehe Abbildung 7.51).

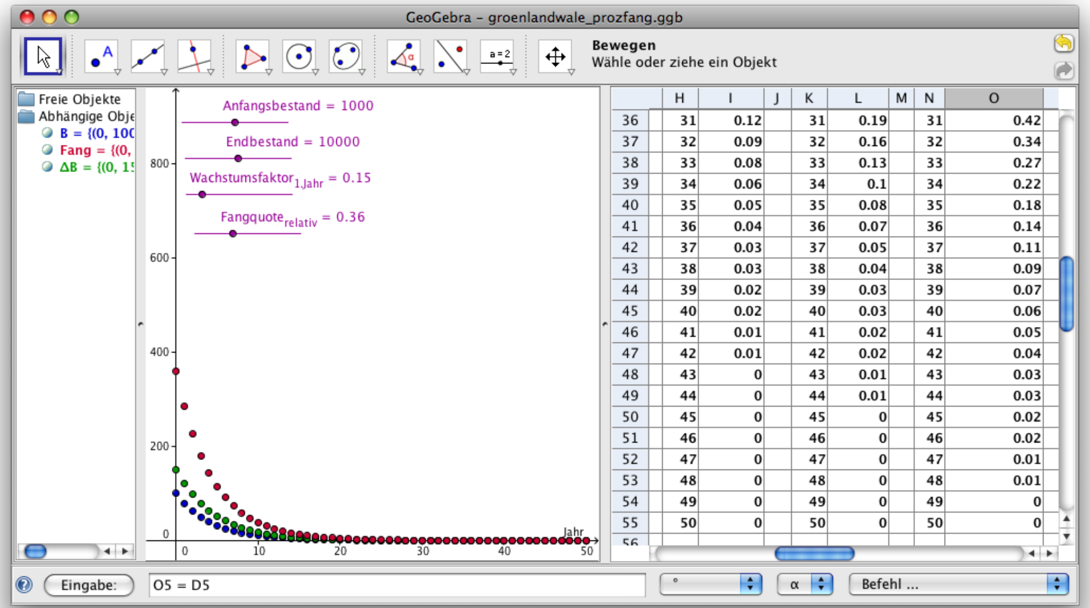


Abbildung 7.49: Untersuchung mit $pf < 0,15$

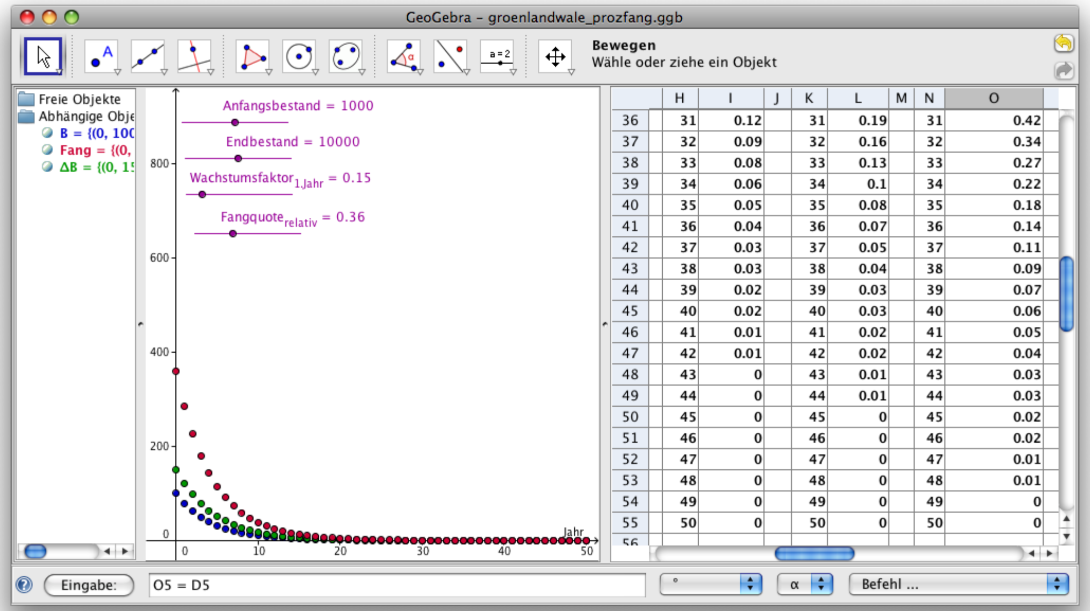


Abbildung 7.50: Untersuchung mit $pf = 0,15$

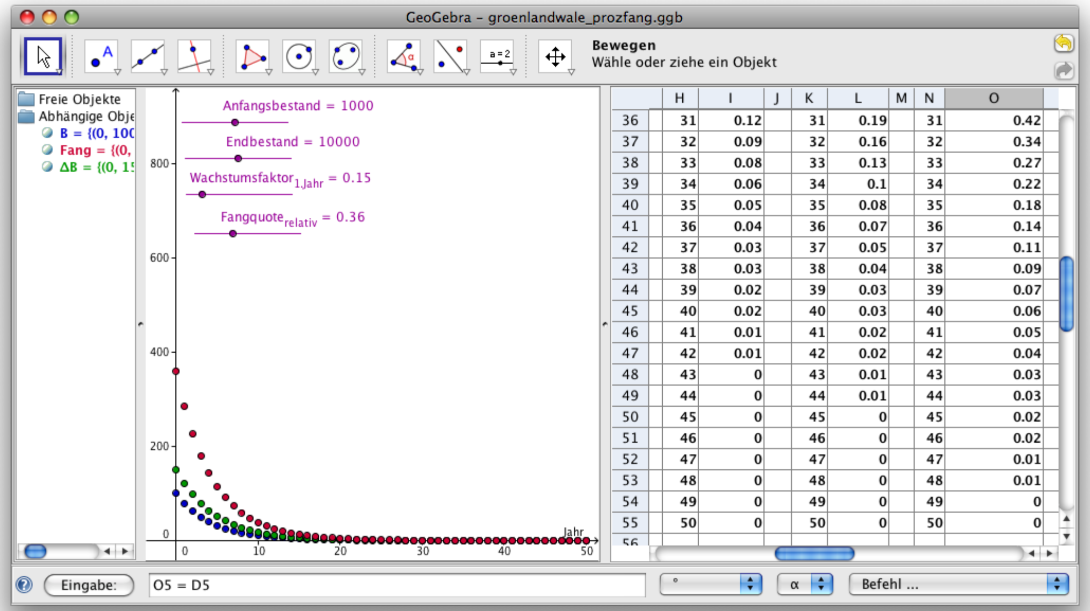


Abbildung 7.51: Untersuchung mit $pf > 0,15$

Der Grenzwert g der Grönlandwalpopulation in Abhängigkeit von der relativen Abfangrate pf und der Wachstumsrate r lässt sich algebraisch folgenderweise ermitteln:

$$g = g + r \cdot (10000 - g) \cdot g - pf \cdot g \tag{7.2}$$

$$0 = g \cdot r \cdot (10000 - g) - pf \cdot g \tag{7.3}$$

$$g = 0 \vee r \cdot (10000 - g) = pf \tag{7.4}$$

$$g = 0 \vee g = 10000 - \frac{pf}{r} \tag{7.5}$$

7.3.4 Wachstum mit konstanter Abfangrate

Ein zweites Modell der wirtschaftlichen Nutzung sieht eine konstante Abfangrate kf vor. Wie zuvor können wir auch hier auf der Grundlage der Ein-

gangsdaten ein iteratives Wachstumsmodell, welches die konstante Abfangquote $kf := 100$ mit einbezieht, für einen Zeitraum von 50 Jahren erstellen.
Da es sich bei einer konstanten Abfangquote um absolute Werte handelt, d.h. in unserem Fall um einzelne Wale, sollte nicht darauf vergessen werden bei den Einstellungen des Schiebereglers dem entsprechend die Schrittweite auf „1“ zu ändern und dies auch zu thematisieren.
In der Tabelle referenzieren wir, wie in Abbildung 7.52 zu sehen ist, in der Spalte *Abfangmenge* die Werte aus der Zelle am Beginn des Tabellenblattes, anstatt sie wie in bei der prozentuellen Abfangquote über den Bestand zu berechnen.

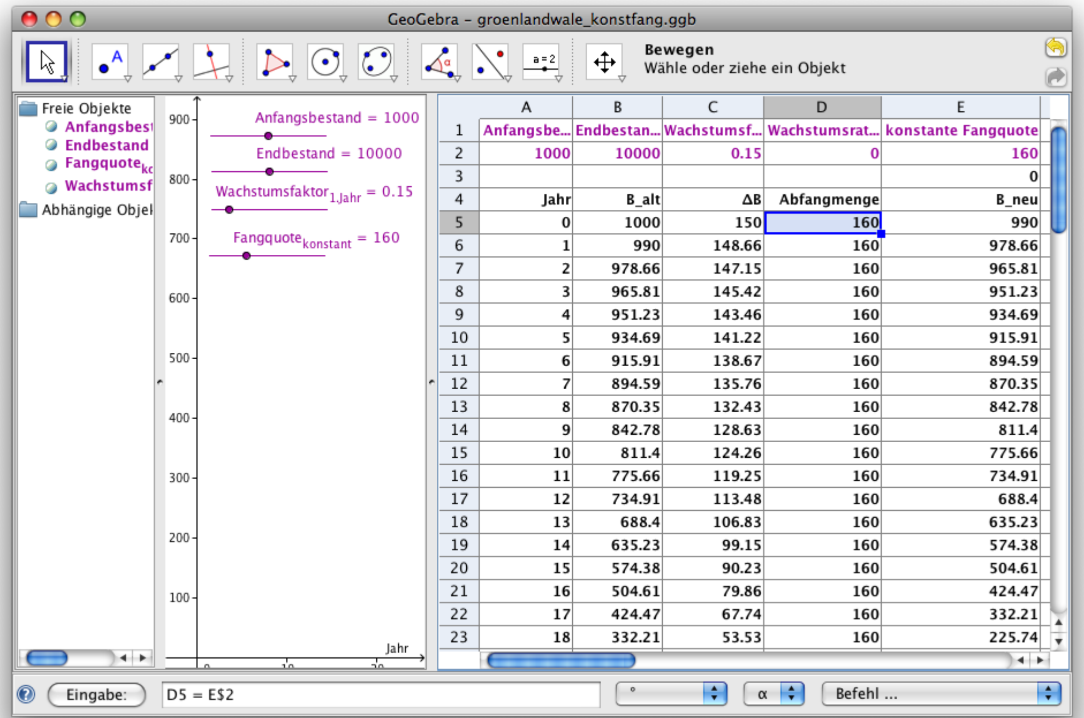


Abbildung 7.52: Tabelle mit konstanter Abfallquote

Nun sollen die Schülerinnen und Schüler analog zu oben mit der konstanten

Abfangrate kf experimentieren. Für welche Werte von kf wächst die Grönlandwalpopulation weiterhin, wann bleibt die Population konstant und wann stirbt die Walherde aus?
Da die Daten für die Punktdiagramme aus der Liste gelesen werden, welche leider nicht dynamisch ist, muss man bevor man die grafische Untersuchung beginnen kann die Punktdiagramme nochmals aus den dafür erstellten Wertetabellen erzeugen.
In den folgenden Abbildung wurde die vorgeschlagene Untersuchung durchgeführt und herausgefunden, dass die Grönlandwalpopulation für $kf < 150$ weiterhin wächst (siehe Abbildung 7.53), für $kf = 150$ konstant bleibt (siehe Abbildung 7.54) und für $kf > 150$ abnimmt, bis die Walherde schließlich sehr schnell ausstirbt (siehe Abbildung 7.50).

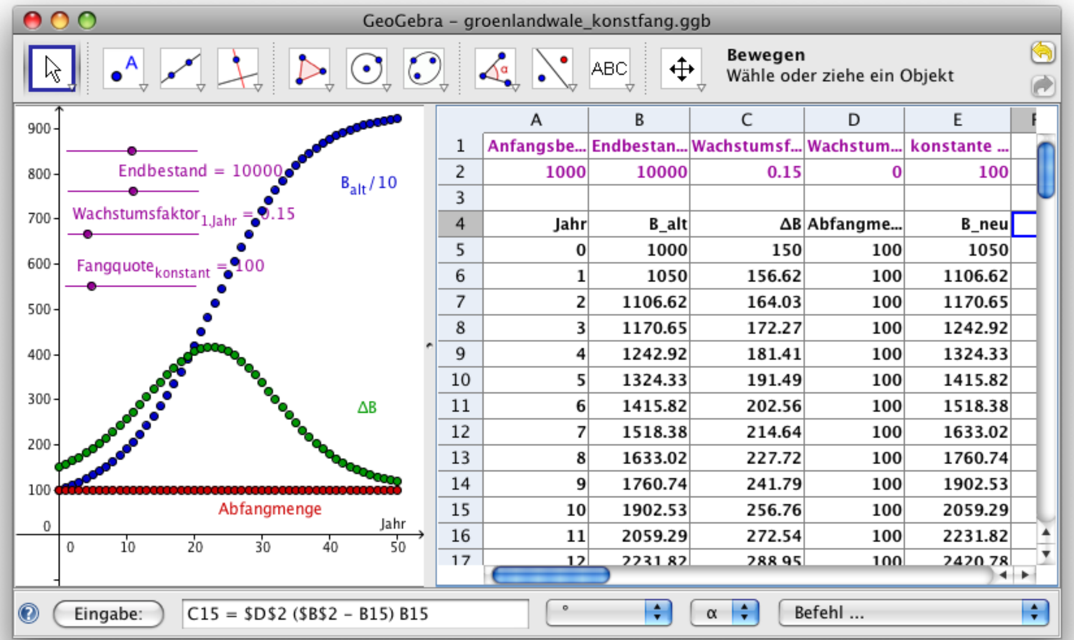


Abbildung 7.53: Untersuchung mit $kf < 150$

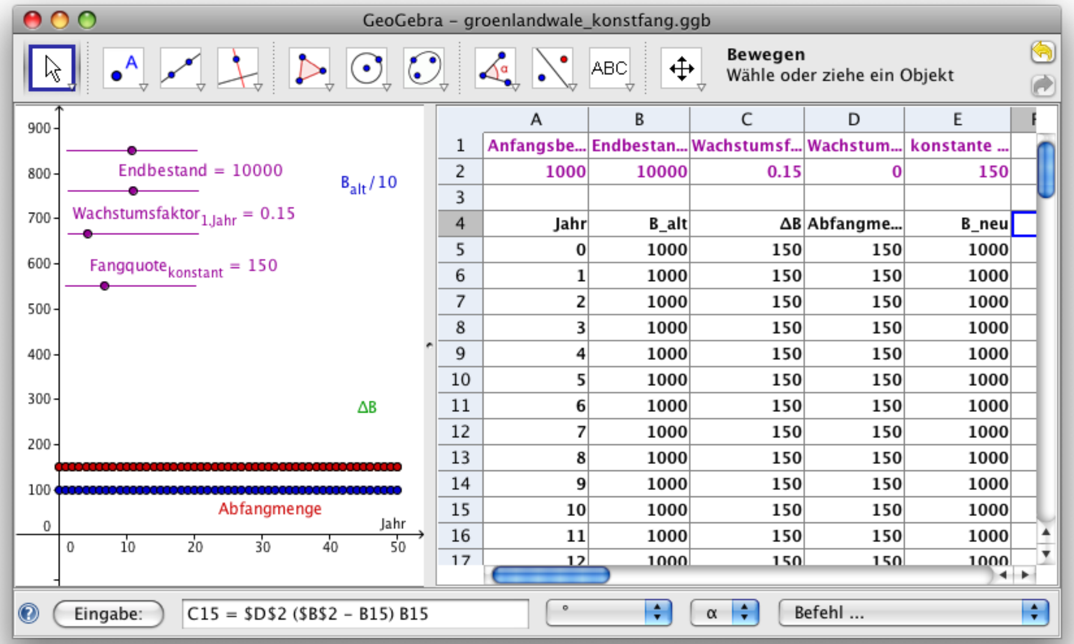


Abbildung 7.54: Untersuchung mit $kf = 150$

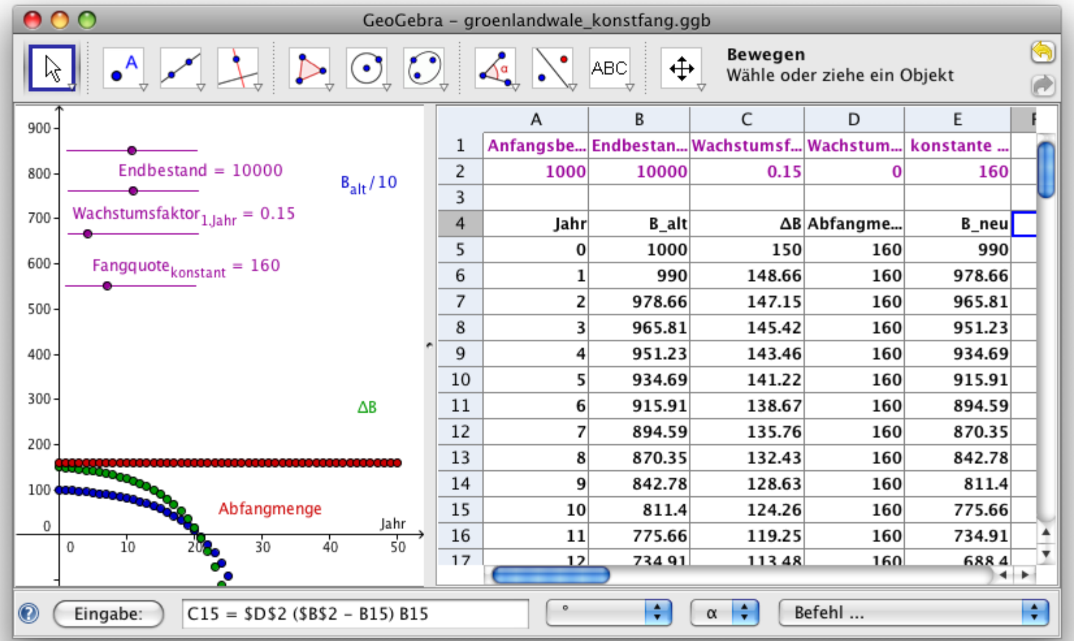


Abbildung 7.55: Untersuchung mit $kf > 150$

Nachdem man diese heuristische Untersuchung durchgeführt hat, ist e auch möglich den Grenzwert g der Grönlandwalpopulation wie folgt in Abhängigkeit von kf und r algebraisch zu ermitteln.

$$g = g + r \cdot (10000 - g) \cdot g - kf \tag{7.6}$$

$$g = 5000 \pm \sqrt{5000^2 - \frac{kf}{r}} \tag{7.7}$$

Hat man den Schülerinnen und Schülern bereits die (stetige) logistische Wachstumsgleichung $B(t) = \frac{G}{1+B_0 \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}}$ vorgestellt, so kann man sie nun mit Hilfe der Ausgangsdaten die konkrete Wachstumsgleichung für diese Grönlandwalpopulation aufstellen lassen. Dies könnte folgender Weise aussehen:

$$G = 10000 \qquad B(0) = 1000 \qquad B(1) = 1150 \tag{7.8}$$

Durch Einsetzen in die logistische Wachstumsfunktion folgt:

$$\begin{aligned}
B(t) &= \frac{G}{1 + B_0 \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}} && (7.9)\\
1150 &= \frac{10000}{1 + 1000 \cdot e^{-10000 \cdot k \cdot 1}} && (7.10)\\
e^{-10000 \cdot k} &= \frac{\frac{10000}{1150} - 1}{1000} && (7.11)\\
k \cdot \ln e^{-10000} &= \ln \frac{\frac{10000}{1150} - 1}{1000} && (7.12)\\
k &= \frac{\ln \frac{\frac{10000}{1150} - 1}{1000}}{\ln e^{-10000}} \approx -0,0000156569 && (7.13)\\
\Rightarrow B(t) &= \frac{10000}{1 + 9 \cdot e^{-0,156569 \cdot t}} && (7.14)
\end{aligned}$$

Für die Verdoppelungszeit des Walbestandes gilt:

$$\begin{aligned}
2000 &= \frac{10000}{1 + 9 \cdot e^{-0,156569 \cdot t}} && (7.15)\\
1 + 9 \cdot e^{-0,156569 \cdot t} &= \frac{10000}{2000} && (7.16)\\
e^{-0,156569 \cdot t} &= \frac{\frac{10000}{2000} - 1}{9} && (7.17)\\
t \cdot \ln e^{-0,156569} &= \ln \frac{\frac{10000}{2000} - 1}{9} && (7.18)\\
t &= \frac{\ln \frac{\frac{10000}{2000} - 1}{9}}{\ln e^{-0,156569}} \approx 5,18 && (7.19)
\end{aligned}$$

Zum Schluss können Schülerinnen und Schüler höherer Schustufen zeigen, dass $B(t)$ die logistische Diffferentialgleichung $B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (G - B(t))$ erfüllt. In diesem Fall sollte jedoch nicht darauf verzichtet werden diese Differentialgleichung auch ausreichend zu interpretieren.

7.4 Das Räuber-Beute Modell

7.4.1 Räuber-Beute-Beziehungen

Räuber-Beute-Beziehungen sind ein Teilaspekt der Nahrungsnetze und Nahrungsketten in der Ökologie.
Ernährt sich eine Tierart (Räuber) vorwiegend von einer einzigen anderen Art (Beute) desselben Lebensraumes und wandern Tiere weder zu noch ab, dann steigt die Anzahl der Räuber, wenn die Anzahl der Beutetiere zunimmt. Je größer das Nahrungsangebot ist, desto mehr Nachkommen können die Räuber aufziehen. Die Anzahl der Beutetiere wirkt sich also positiv auf die Anzahl der Räuber aus. Je länger die Generationsdauer der Räuber ist, desto später tritt diese Wirkung ein. Die Zunahme der Räuber erfolgt also erst einige Zeit nach der Zunahme der Beutetiere. Da aber mehr Räuber auch mehr Beutetiere fressen, mindert die Anzahl der Räuber die Anzahl der Beutetiere (negative Rückwirkung). Auch hierbei beobachtet man eine gewisse Verzögerung (Totzeit) in der Änderung der Individuenzahl. Die Wechselwirkung der Populationsdichten von Beutetier und Räuber kann als Regelkreis beschrieben werden.

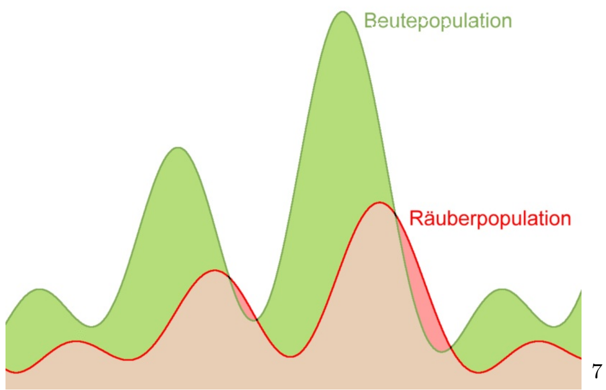


Abbildung 7.56: Populationsschwankungen bei Räuber und Beute

Umso größer die Population der Beutetiere ist, desto größer ist das Nahrungsangebot der Räuber. Somit nimmt die Anzahl der Räuber verschoben zur Anzahl der Beutetiere zu. Mit dem Tod der Beutetiere nimmt die Population der Räuber durch die fehlende Nahrung ab. Mit der Zeit kommt es zu einem biologischen Gleichgewicht welches die Populationsdichten der betreffenden Tierarten in Grenzen hält. Im Sinne einer Koevoluation wird das Verhalten von Räuber- und Beutetieren immer stärker auf einander abgestimmt. Neben dem Nahrungsangebot beeinflussen auch die Faktoren Klima, Krankheitserreger, Parasiten, andere Räuber und Raumkonkurrenz die Struktur einer Räuber-Beute-Beziehung.

Alle Ökofaktoren, die für ein Individuum von Bedeutung sind, wirken sich auch auf eine Population als Ganzes aus. Je dichter die Population einer Beute ist, desto leichter fällt es ihren Fressfeinden, Nahrung zu erwerben, desto stärker wird deren Population wachsen. Je dichter die Population des Fressfeinds aber wird, desto weniger Beute steht dem Einzeltier zur Verfügung, desto geringer wird die Population des Fressfeinds wachsen, desto rascher wird sich die Beutepopulation wieder erholen. In der theoretischen Biologie wurden diverse mathematische Modelle entwickelt um allgemeine dynamische Eigenschaften von Räuber-Beute-Beziehungen aufzuzeigen. Einige quantitative Aspekte der Räuber-Beute-Beziehung haben 1925 und 1926 unabhängig von einander der österreichisch-amerikanische Mathematiker Alfred James Lotka mit dem italienische Mathematiker und Physiker Vito Volterra und der Physiker Vito Volterra in Gesetzmäßigkeiten gefasst, welche Lotka-Volterra-Regeln bzw. Lotka-Volterra-Gesetze genannt werden. Mittels dieser Gesetze wurden erstmalig unter interspezifischer Konkurrenz quantitativ Aspekte der Populationsdynamik formuliert.

„Durch die Lotka-Volterra-Regeln wird die zahlenmäßige Entwicklung zweier Populationen unter interspezifischer Konkurrenz über große Zeiträume beschrieben. Alle drei Regeln gelten nur unter der Voraussetzung, dass lediglich zwischen den betrachteten beiden Arten eine Räuber-Beute-Beziehung besteht und die sonstigen biotischen und abiotischen Umweltfaktoren konstant oder zu vernachlässigen sind.

Erste Lotka-Volterra-Regel (Periodische Populationsschwankung): Die Populationsgrößen von Räuber und Beute schwanken periodisch. Dabei folgen die Schwankungen der Räuberpopulation phasenverzögert denen der Beutepopulation. Die Länge der Perioden hängt von den Anfangsbedingungen und von den Wachstumsraten der Populationen ab.

Zweite Lotka-Volterra-Regel (Konstanz der Mittelwerte): Die über genügend lange Zeiträume gemittelten Größen (Mittelwert) der Räuber- bzw. Beutepopulation sind konstant. Die Größe der Mittelwerte hängt nur von den Wachstums- und Schrumpfungsraten der Populationen, nicht aber von den Anfangsbedingungen ab.

Dritte Lotka-Volterra-Regel (Störung der Mittelwerte): Werden Räuber- und Beutepopulation gleichermaßen proportional zu ihrer Größe dezimiert, so vergrößert sich kurzfristig der Mittelwert der Beutepopulation, während der Mittelwert der Räuberpopulation kurzfristig sinkt.

Die Lotka-Volterra-Regeln sind strenggenommen nur unter Beachtung ihrer selten erfüllten Voraussetzungen anwendbar. Trotzdem sind sie in der praktischen Ökologie von großer Bedeutung, weil sich zeigt, dass sie auch bei komplexeren Nahrungsbeziehungen und schwankenden Umweltfaktoren durchaus noch brauchbare Abschätzungen liefern.“ [1]

7.4.2 Aufgabenstellung

Wir nehmen an, dass es in einem Revier eine bestimmte Anzahl an Füchsen und Hasen gibt. Diese beiden Tierarten regulieren einander in ihrer Ausbreitung. Tötet ein Fuchs (Räuber) einen Hasen (Beute) so kann sich dieser nicht mehr fortpflanzen und das Wachstumsprozess der Hasen wird gehemmt. Töten die Füchse zu viele Hasen, so leiden sie in Folge unter Nahrungsmangel, sodass auch sie sterben und ihr Wachstumsprozess gehemmt wird. Wir haben es hierbei mit einer Populationsdynamik zu tun, welche auf ein Gleichgewicht zwischen Füchsen und Hasen hinzielt.

7.4.3 Umsetzung in GeoGebra 3.2

Zunächst erstellen wir eine Spalte, welche die Zeiteinheiten angibt. Wir beginnen wiederum mit $t = 0$ und schreiten mit dem Wert 1 fort. Daneben legen wir jeweils eine Spalte für die Anzahl der Hasen $x_1(t)$ und die Anzahl der Füchse $x_2(t)$ an. In unsrem Beispiel starten wir, wie auch in Abbildung **??** zu sehen ist mit $x_1(0) := 80$ und $x_2(0) := 20$.
Da wir an den Wachstumsprozessen der beiden Tierarten interessiert sind müssen wir auch noch für die Änderungsrate der Hasen $\Delta x_1(t)$ und die Änderungsrate der Füchse $\Delta x_2(t)$ jeweils eine Spalte anlegen.
Die Änderungsraten werden durch folgende Formeln beschrieben:

$$\Delta x_1(t) = \alpha \cdot x_1(t) - \beta \cdot x_2(t) \cdot x_1(t) \tag{7.20}$$

$$= (\alpha - \beta \cdot x_2(t)) \cdot x_1(t) \ldots \text{Änderungsrate der Hasen} \tag{7.21}$$

$$\Delta x_2(t) = -\gamma \cdot x_2(t) - \delta \cdot x_1(t) \cdot x_2(t) \tag{7.22}$$

$$= (\gamma + \delta \cdot x_1(t)) \cdot x_2(t) \ldots \text{Änderungsrate der Füchse} \tag{7.23}$$

Dabei sei $\alpha := 3\%$, $\beta := 0,015\%$, $\gamma := 2\%$ und $\delta := 0,01\%$.

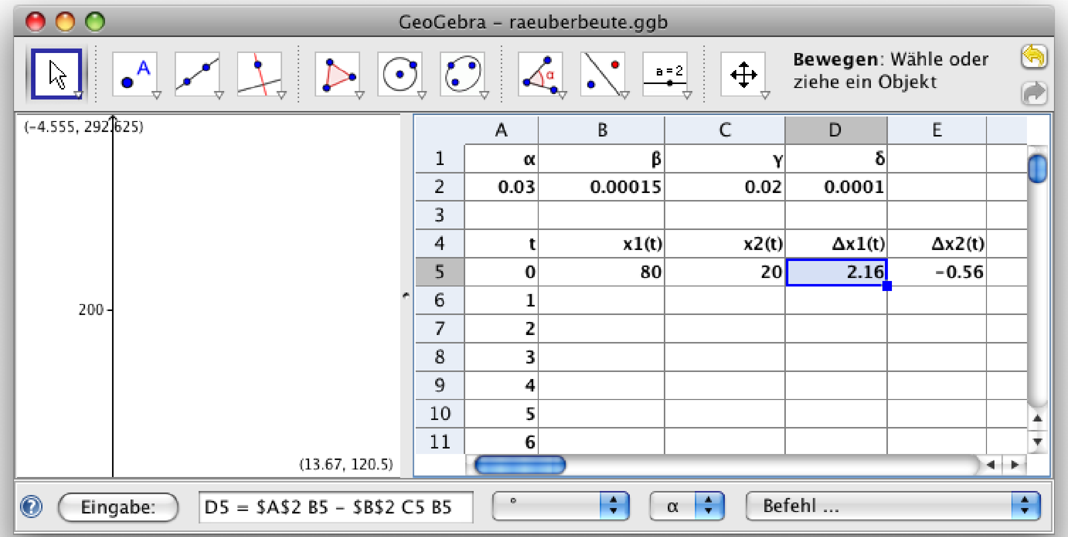


Abbildung 7.57: Tabelle mit Wachstumsraten, Anfangswerten und der absoluten Änderungsrate in der ersten Zeiteinheit

Die Anzahl der Hasen- und Fuchspopulation nach der ersten Zeiteinheit berechnen wir als Summe aus dem Anfangsbestand und dem absoluten Zuwachs. Dies Berechnung ist in Abbildung 7.58 zu sehen.

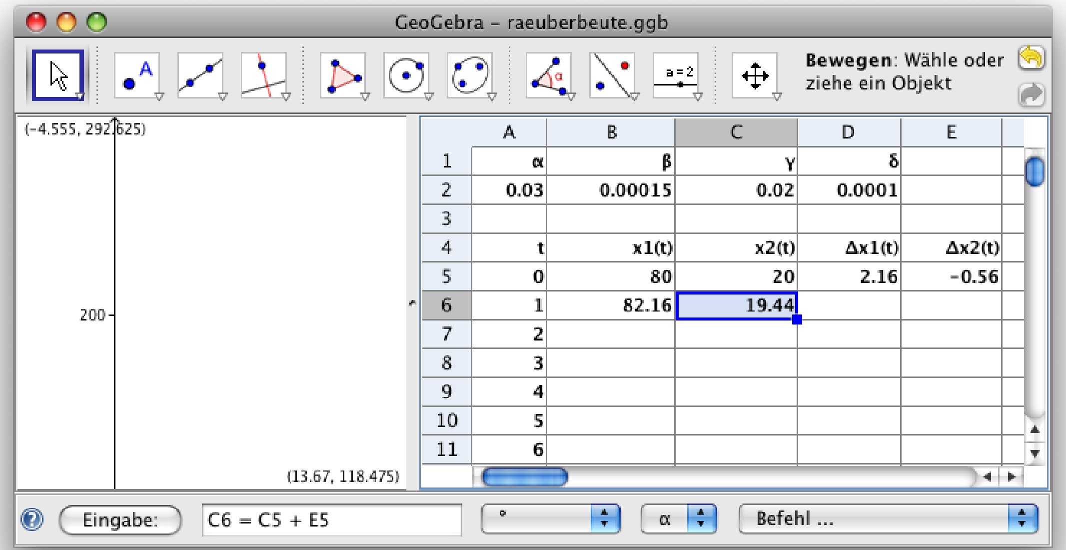
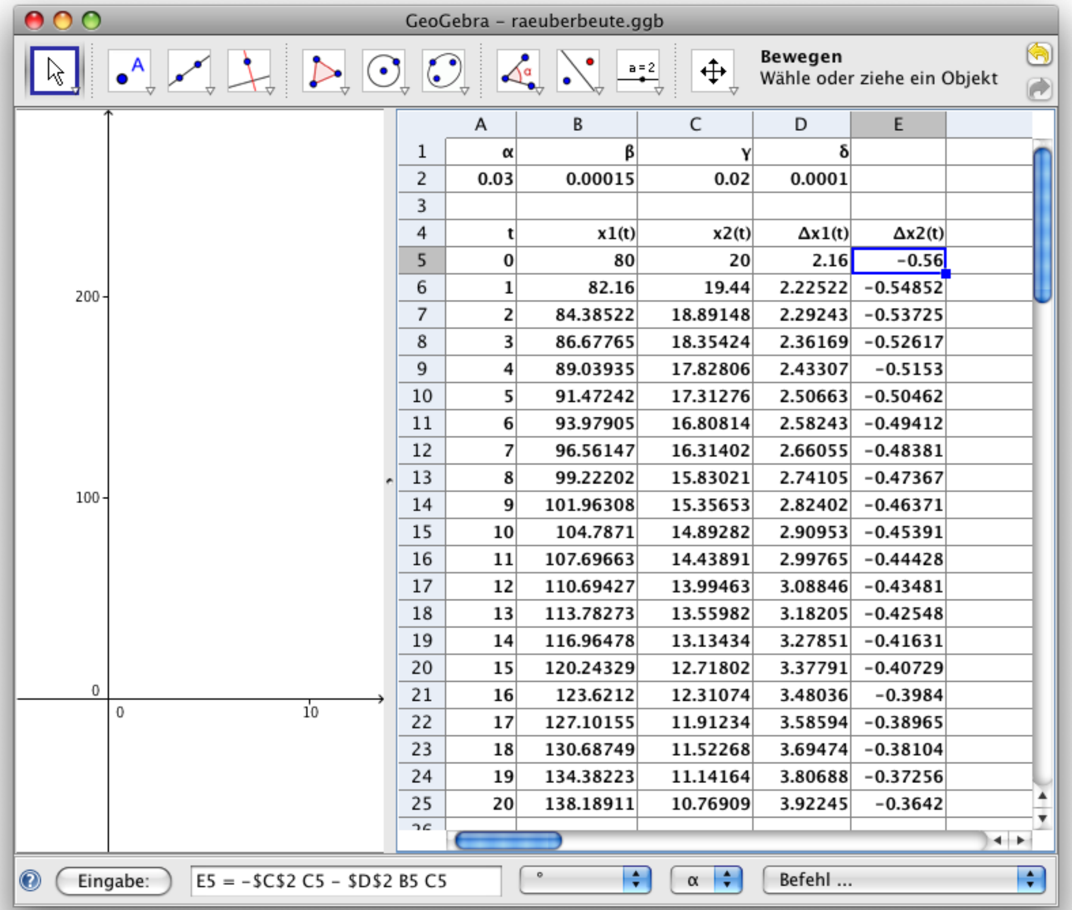


Abbildung 7.58: Berechnung der Hasen und Füchse nach der ersten Zeiteinheit

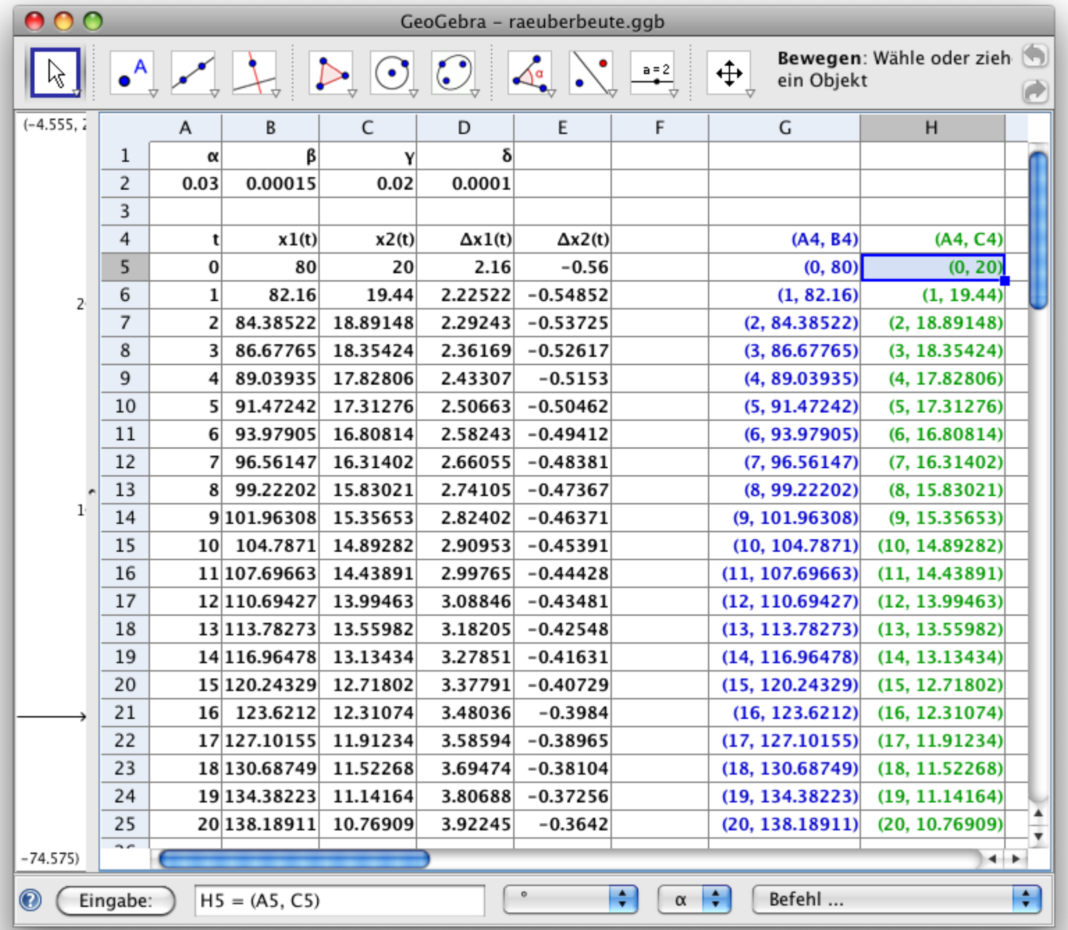
Die restlichen Werte in der Tabelle berechnen wir indem wir die Formeln jeweils in die darunter liegenden Zellen kopieren. In Abbildung 7.59 ist die fertige Tabelle dargestellt.



	A	B	C	D	E
1	α	β	γ	δ	
2	0.03	0.00015	0.02	0.0001	
3					
4	t	x1(t)	x2(t)	Δx1(t)	Δx2(t)
5	0	80	20	2.16	-0.56
6	1	82.16	19.44	2.22522	-0.54852
7	2	84.38522	18.89148	2.29243	-0.53725
8	3	86.67765	18.35424	2.36169	-0.52617
9	4	89.03935	17.82806	2.43307	-0.5153
10	5	91.47242	17.31276	2.50663	-0.50462
11	6	93.97905	16.80814	2.58243	-0.49412
12	7	96.56147	16.31402	2.66055	-0.48381
13	8	99.22202	15.83021	2.74105	-0.47367
14	9	101.96308	15.35653	2.82402	-0.46371
15	10	104.7871	14.89282	2.90953	-0.45391
16	11	107.69663	14.43891	2.99765	-0.44428
17	12	110.69427	13.99463	3.08846	-0.43481
18	13	113.78273	13.55982	3.18205	-0.42548
19	14	116.96478	13.13434	3.27851	-0.41631
20	15	120.24329	12.71802	3.37791	-0.40729
21	16	123.6212	12.31074	3.48036	-0.3984
22	17	127.10155	11.91234	3.58594	-0.38965
23	18	130.68749	11.52268	3.69474	-0.38104
24	19	134.38223	11.14164	3.80688	-0.37256
25	20	138.18911	10.76909	3.92245	-0.3642

Abbildung 7.59: Diagramm Wachstum der Hasen vs. Wachstum der Füchse

Leider ist es mit der aktuellen Version von GeoGebra 3.2 nicht möglich ausreichend viele Werte zu berechnen, weil die Berechnungen ab Zeile 25 immer zu einem Programmabsturz führen. Aus diesem Grund ist in Abbildung 7.60 lediglich die Definition der Punkte für den Vergleich der Bestände an Hasen und Füchsen abgebildet. In Abbildung 7.61 ist zu sehen, wie die grafische Darstellung dieses Vergleiches aussehen würde.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	α	β	γ	δ				
2	0.03	0.00015	0.02	0.0001				
3								
4	t	x1(t)	x2(t)	Δx1(t)	Δx2(t)		(A4, B4)	(A4, C4)
5	0	80	20	2.16	-0.56		(0, 80)	(0, 20)
6	1	82.16	19.44	2.22522	-0.54852		(1, 82.16)	(1, 19.44)
7	2	84.38522	18.89148	2.29243	-0.53725		(2, 84.38522)	(2, 18.89148)
8	3	86.67765	18.35424	2.36169	-0.52617		(3, 86.67765)	(3, 18.35424)
9	4	89.03935	17.82806	2.43307	-0.5153		(4, 89.03935)	(4, 17.82806)
10	5	91.47242	17.31276	2.50663	-0.50462		(5, 91.47242)	(5, 17.31276)
11	6	93.97905	16.80814	2.58243	-0.49412		(6, 93.97905)	(6, 16.80814)
12	7	96.56147	16.31402	2.66055	-0.48381		(7, 96.56147)	(7, 16.31402)
13	8	99.22202	15.83021	2.74105	-0.47367		(8, 99.22202)	(8, 15.83021)
14	9	101.96308	15.35653	2.82402	-0.46371		(9, 101.96308)	(9, 15.35653)
15	10	104.7871	14.89282	2.90953	-0.45391		(10, 104.7871)	(10, 14.89282)
16	11	107.69663	14.43891	2.99765	-0.44428		(11, 107.69663)	(11, 14.43891)
17	12	110.69427	13.99463	3.08846	-0.43481		(12, 110.69427)	(12, 13.99463)
18	13	113.78273	13.55982	3.18205	-0.42548		(13, 113.78273)	(13, 13.55982)
19	14	116.96478	13.13434	3.27851	-0.41631		(14, 116.96478)	(14, 13.13434)
20	15	120.24329	12.71802	3.37791	-0.40729		(15, 120.24329)	(15, 12.71802)
21	16	123.6212	12.31074	3.48036	-0.3984		(16, 123.6212)	(16, 12.31074)
22	17	127.10155	11.91234	3.58594	-0.38965		(17, 127.10155)	(17, 11.91234)
23	18	130.68749	11.52268	3.69474	-0.38104		(18, 130.68749)	(18, 11.52268)
24	19	134.38223	11.14164	3.80688	-0.37256		(19, 134.38223)	(19, 11.14164)
25	20	138.18911	10.76909	3.92245	-0.3642		(20, 138.18911)	(20, 10.76909)

Abbildung 7.60: Definition der Punkte für den Vergleich der Bestände an Hasen und Füchsen

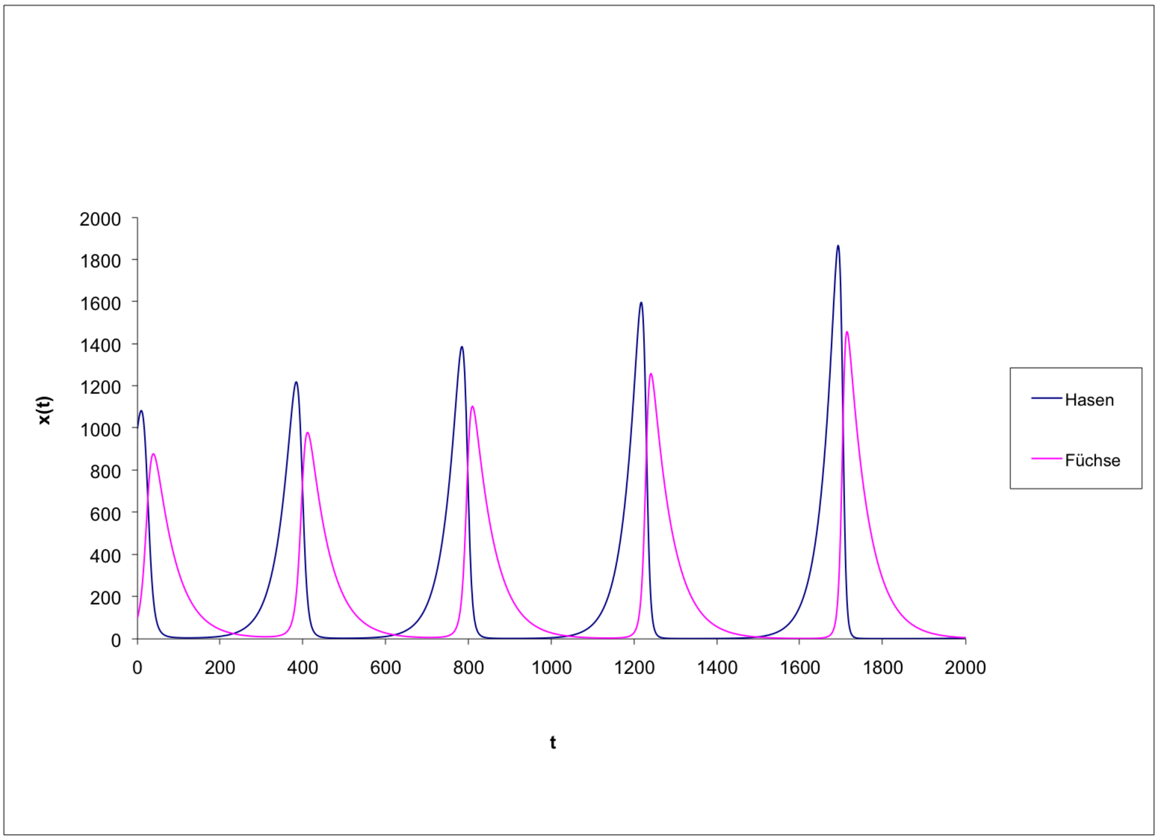
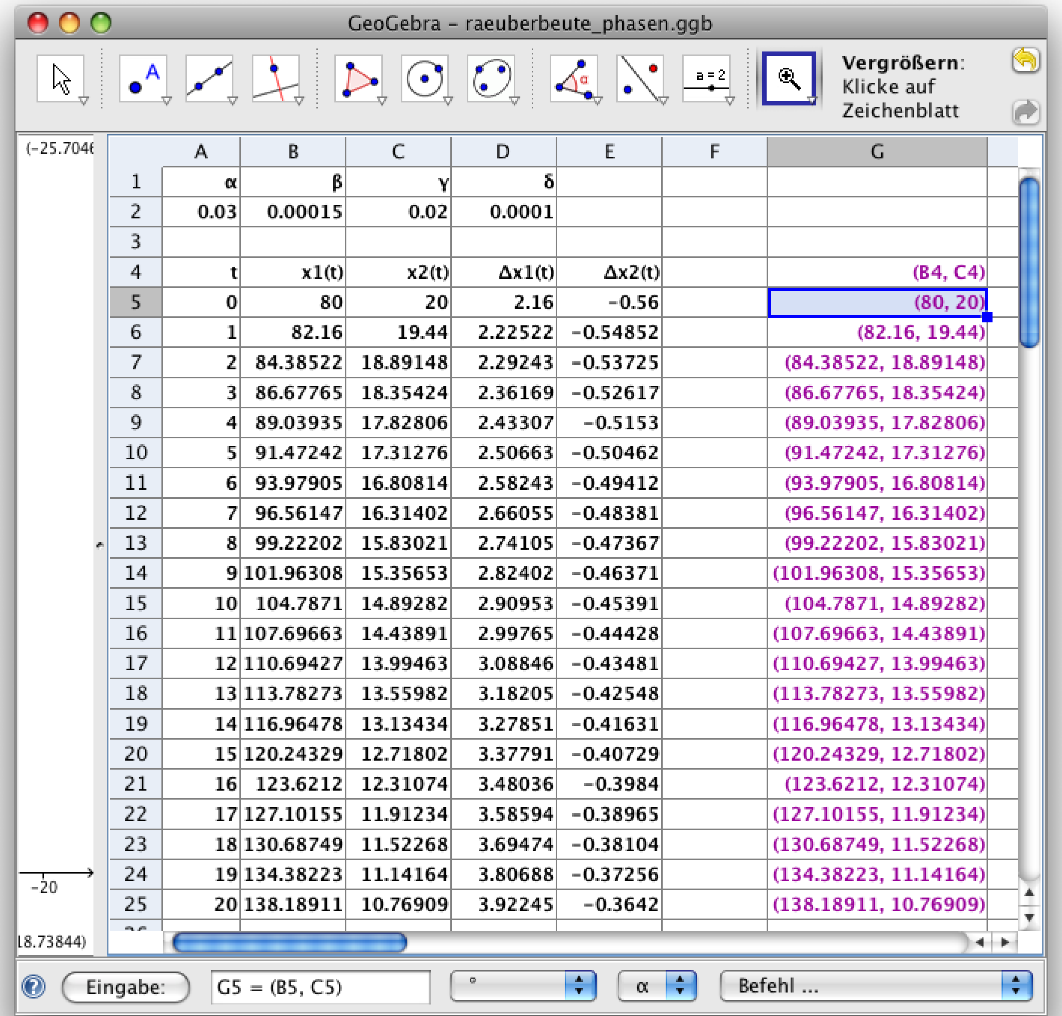


Abbildung 7.61: Vergleich der Bestände an Hasen und Füchsen

Wie leicht zu erkennen ist, handelt es sich hierbei um einen zyklischen Graphen mit Phasenverschiebung, d.h. eine Zunahme der Hasen bewirkt eine zeitversetzte (phasenverschobene) Zunahme der Füchse, sowie eine Abnahme der Hasen eine zeitversetzte (phasenverschobene) Abnahme der Füchse provoziert. Der Wachstumsprozess der Füchse hinkt jenem der Hasen quasi hinterher.

In unseren bisherigen Diagrammen stellten wir jeweils die Zeit auf der x-Achse und die jeweilige Anzahl auf der y-Achse dar.
Nun wollen wir ein sogenanntes „Phasenschaubild“ erstellen, indem wir die Anzahl der Hasen auf der x-Achse und die Anzahl der Füchse auf der x-Achse

auftragen.
Hierfür Definieren wir, wie in Abbildung 7.62 dargestellt, die Punkte für das besagte Phasenschaubild. Da auch hier in GeoGebra 3.2 noch zu wenig Werte berechnet werden können, ist auch hier kein aussagekräftiges Diagramm in GeoGebra 3.2 zu sehen. In Abbildung 7.63 ist zu sehen wie das dazugehörige Phasenschaubild aussehen würde.



	A	B	C	D	E	F	G
1	α	β	γ	δ			
2	0.03	0.00015	0.02	0.0001			
3							
4	t	x1(t)	x2(t)	Δx1(t)	Δx2(t)		(B4, C4)
5	0	80	20	2.16	-0.56		(80, 20)
6	1	82.16	19.44	2.22522	-0.54852		(82.16, 19.44)
7	2	84.38522	18.89148	2.29243	-0.53725		(84.38522, 18.89148)
8	3	86.67765	18.35424	2.36169	-0.52617		(86.67765, 18.35424)
9	4	89.03935	17.82806	2.43307	-0.5153		(89.03935, 17.82806)
10	5	91.47242	17.31276	2.50663	-0.50462		(91.47242, 17.31276)
11	6	93.97905	16.80814	2.58243	-0.49412		(93.97905, 16.80814)
12	7	96.56147	16.31402	2.66055	-0.48381		(96.56147, 16.31402)
13	8	99.22202	15.83021	2.74105	-0.47367		(99.22202, 15.83021)
14	9	101.96308	15.35653	2.82402	-0.46371		(101.96308, 15.35653)
15	10	104.7871	14.89282	2.90953	-0.45391		(104.7871, 14.89282)
16	11	107.69663	14.43891	2.99765	-0.44428		(107.69663, 14.43891)
17	12	110.69427	13.99463	3.08846	-0.43481		(110.69427, 13.99463)
18	13	113.78273	13.55982	3.18205	-0.42548		(113.78273, 13.55982)
19	14	116.96478	13.13434	3.27851	-0.41631		(116.96478, 13.13434)
20	15	120.24329	12.71802	3.37791	-0.40729		(120.24329, 12.71802)
21	16	123.6212	12.31074	3.48036	-0.3984		(123.6212, 12.31074)
22	17	127.10155	11.91234	3.58594	-0.38965		(127.10155, 11.91234)
23	18	130.68749	11.52268	3.69474	-0.38104		(130.68749, 11.52268)
24	19	134.38223	11.14164	3.80688	-0.37256		(134.38223, 11.14164)
25	20	138.18911	10.76909	3.92245	-0.3642		(138.18911, 10.76909)

Abbildung 7.62: Definition der Punkte für das Phasenschaubild

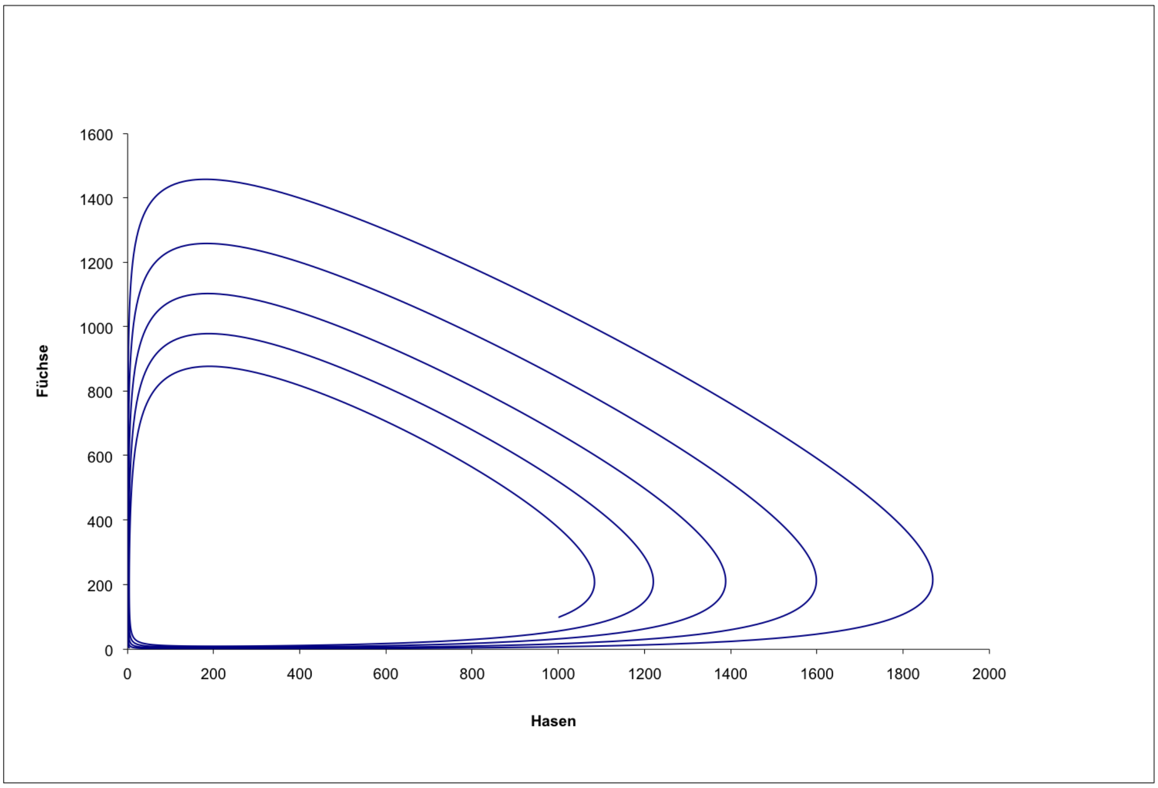


Abbildung 7.63: Phasenschaubild

Diese Darstellung erinnert ein wenig an die Kreise, welche ein ins Wasser geworfener Stein zieht. Derartige Kreise haben gewöhnlich einen Mittelpunkt. Auch unser obiges Phasenschaubild besitzt einen Mittelpunkt, welcher zugleich auch Fixpunkt ist. Diesen Punkt werden wir nun berechnen.
Die x-Koordinate des Fixpunktes ist der Quotient α/β.
Die y-Koordinate des Fixpunktes ist der Quotient γ/δ.
Durch Einsetzen unserer Werte erhalten wir den Punkt (200/200).

7.4.4 Interpretation

Abschließend beschäftigt uns die Frage, was wohl geschieht, wenn es nur Hasen bzw. nur Füchse gebe.

Mit Hilfe unseres Modells, in dem wir leicht die Anzahl der Füchse $x_2(0) := 0$ bzw. die Anzahl der Hasen $x_1(0) := 0$ setzen können, sehen wir, dass sich die Hasen ohne die Füchse exponentiell vermehren würden, und die Füchse ohne die Hasen exponentiell sterben würden.
Wenn sie jedoch gemeinsam leben, dann spricht man vom Räuber-Beute Modell.
Anzumerken ist allerdings, dass dies nur stark vereinfachtes Modell der Wirklichkeit ist. In der Natur ist der Wachstumsprozess von Hasen und Füchsen nämlich von weitaus mehr Faktoren abhängig.

Literaturverzeichnis

[1] Lotka volterra regeln. http://de.wikipedia.org/wiki/Lotka-Volterra-Regeln. [Online; Stand 28.05.2009].

[2] BMUKK. Lehrplan mathematik ahs oberstufe. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_ahs_neu_07.pdf. [Online; Stand 20.01.2009].

[3] BMUKK. Lehrplan mathematik ahs unterstufe. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/789/ahs14.pdf, 2000. [Online; Stand 19.01.2009].

[4] Peter Borneleit, Rainer Danckwerts, Hans-Wolfgang Henn, and Hans-Georg Winter. *Kerncurriculum Oberstufe*, chapter Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Beltz, 2001.

[5] Josef Böhm. Dug - derive user group. http://www.austromath.at/dug/. [Online; Stand 19.01.2009].

[6] Heinrich Bürger, Roland Fischer, Günther Malle, Manfred Kronfellner, Thomas Mühlgassner, and Franz Schlöglhofer. *Mathematik Oberstufe 2 - Arbeitsbuch für die 6. Klasse der AHS*, volume 2. öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co KG, 2000.

[7] Willibald Dörfler. *Computer - Mensch - Mathematik*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1991.

[8] Franz Embacher and Petra Oberhuemer. Acdca. http://www.mathe-online.at. [Online; Stand 19.01.2009].

[9] ACDCA Austrian Center for Didactics of Computer Algebra. Acdca. http://www.acdca.ac.at. [Online; Stand 19.01.2009].

[10] Centers for Disease Contol and Prevention. Bakterien. `http://phil.cdc.gov/phil/home.asp`. [Online; Stand 20.01.2009].

[11] Stefan Götz, Hans-Christian Reichel, Robert Müller, and Günter Hanisch. *Mathematik - Lehrbuch 6*, volume 1. öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co KG, 2005.

[12] Markus Hohenwarter. Geogebra. `http://www.geogebra.org`. [Online; Stand 19.01.2009].

[13] Markus Hohenwarter. Geogebra - ein softwaresystem für dynamische geometrie und algebra der ebene. Master's thesis, Universität Salzburg, 2002. [Online; Stand 03.02.2009].

[14] Markus Hohenwarter. *GeoGebra - didaktische Materialien und Anwendungen für den Unterricht*. PhD thesis, Universität Salzburg, 2006. [Online; Stand 03.02.2009].

[15] Markus Hohenwarter and Judith Hohenwarter. *GeoGebra Hilfe, Offizielles Handbuch 3.2*. Markus Hohenwarter, 2009. [Online; Stand 20.03.2009].

[16] Markus Hohenwarter and Judith Preiner. *GeoGebra Hilfe, Offizielles Handbuch 3.0*. Markus Hohenwarter, 2007. [Online; Stand 20.01.2009].

[17] Volker Hole. *Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer*. Auer Verlag GmbH, 1998.

[18] Z. Lavicza. Factors influencing the integration of computer algebra systems into university-level mathematics education. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 2006.

[19] Josef Lechner. Wachstummodelle als bausteine wachstumsmodelle als bausteine für systemdynamisches modellieren. `http://www.acdca.ac.at/material/kl6/6wachst.pdf`. [Online; Stand 20.01.2009].

[20] Konrad Lischka. 40 jahre elektro-addierer, der erste taschenrechner wog 1,5 kilo. *Spiegel online, Netzwelt*, November 2007. [Online; Stand 19.01.2009].

[21] Joern Luetens. Abakus-online-museum. `http://www.joernluetjens.de/sammlungen/abakus/abakus.htm`. [Online; Stand 19.01.2009].

[22] Günther Malle, Esther Ramharter, Andreas Ulovec, and Susanne Kandl. *Mathematik verstehen 6*, volume 1. öbv & hpt Verlagsgesellschaft mbH. & Co KG, 2005.

[23] Ute Mehlhase. *Informations- und kommunikationstechnische Grundbildung in einem forschenden Mathematikunterricht.* Franzbecker, Hildesheim, 1994.

[24] Erich Neuwirth. *Computereinsatz im Mathematikunterricht*, chapter Tabellenkalkulation als alternative Darstellungsform für formale Strukturen, pages 207–221. BI-Wiss.-Verl., Zürich, 1995.

[25] Erich Neuwirth and Deane Arganbright. *The Active Modeler, Mathematikcal Modeling with Microsoft Excel.* Thomson Books/Cole, 2004.

[26] Andrej Priboschek. learn : line nrw. `http://www.learn-line.nrw.de`, 2006-2009. [Online; Stand 07.02.2009].

[27] Hans-Christian Reichel, editor. *Algebraprogramme und Tabellenkalkulation im Unterricht.* Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1993.

[28] Hans-Christian Reichel. *Computereinsatz im Mathematikunterricht*, chapter Computer im Mathematikunterricht. Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus AG, Zürich, 1995.

[29] Hellmut Scheuermann. *Computereinsatz im anwendungsorientierten Analysisunterricht.* Verlag Franzbecker, Hildesheim - Berlin, 1998.

[30] Heiner Stauff. Selma. `http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/index.html`, 2006-2009. [Online; Stand 07.02.2009].

[31] Szirucsek, Dinauer, Unfried, and Schatzl. *Mathematik 6 - Allgemeinbildende höhere Schulen.* öbv & hpt VerlagsgmbH. & Co KG, 1999.

[32] D. A. Tanner. *Using Computer Algebra to Teach the Foundation of Calculus*, pages 191–212. Lund, 1992.

[33] Uwe-Peter Tietze and Frank Förster. *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 2*, volume 1 of *Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis*, chapter Fachdidaktische Grundfragen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Vieweg, Braunschweig, 2000.

[34] Hans-Georg Weigand. *MU 5, Der Funktionsbegriff im Algebraunterricht*, chapter Der Beitrag des Computers zur Entwicklung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe I. Friedrich-Verlag, 1994.

[35] Hans-Georg Weigand and Thomas Weth. *Computer im Mathematikunterricht, Neue Wege zu alten Zielen.* Spektrum, Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg - Berlin, 2002.

[36] Clemens Welle. Computer history online, 2007. `http://www.weller.to`. [Online; Stand 19.01.2009].

8 Abstract

Die freie und plattformunabhängige Mathematiksoftware GeoGebra, welche eigens für den Einsatz im Unterricht an Schulen entwickelt wurde, erfreut sich zu recht immer stärkerer Beliebtheit. In ihrer neuen Version 3.2 verbindet sie nicht nur Geometrie, Algebra und Analysis, sondern auch Tabellenkalkulation in einem interaktiven, dynamischen Softwarepaket. Sie verdeutlicht somit die verschiedenen Sichtweisen mathematischen Objekte, und vereinigt diese zu einem sinnvollen Ganzen. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Mathematik von der Grundschule bis zur Hochschulebene wunderbar entdecken. Aus diesem Grund lag es nahe sie für die Bearbeitung von Wachstumsmodellen heranzuziehen.

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit befasste ich mich mit dem Problem des Computereinsatzes im Mathematikunterricht. Nachdem ich die Entwicklung von Rechenhilfen behandelt habe, erörterte ich mit Hilfe der fachdidaktischen Literatur die Frage, ob der Computereinsatz im Mathematikunterricht neue Ziele aufwerfe, oder lediglich neue Wege zu alten Zielen eröffne. In den Kapiteln drei bis fünf widmete ich mich den drei Grundpfeilern, auf welchen die Materialien, welche ich im letzten Teil meiner Arbeit vorstelle, gründen. Dies sind die Tabellenkalkulation, die Mathematiksoftware GeoGebra und die mathematischen Hintergründe zu Wachstumsmodellen. Nachdem ich das Wesen der Tabellenkalkulation behandelt, ihre Anwendungsmöglichkeiten aufgezeigt, und Anregungen über den sinnvollen Einsatz dieses Werkzeuges im Mathematikunterricht gegeben habe, stellte ich das Geometriepaket GeoGebra vor. Dabei ging ich vor allem auf die neue Version 3.2 ein. Diese stand mir zur Zeit der Abfassung meiner Arbeit lediglich als „PreRelease“ zur Verfügung. Aus diesem Grund erachtete ich es als notwendig gewisse Funktionen, welche im letzten Teil meiner Arbeit Verwendung finden zu dokumentieren. Da Wachstumsmodelle ein Teil des Mathematik - Curriculums sind, lag es nahe bestehende Unterrichtsmaterialien zu diesem Themenkreis zu suchen und eine Qualitätsanalyse durchzuführen. Dabei unterschied ich zwischen Aufgaben in Schulbüchern und online-Materialien. Im letzten Teil meiner Arbeit präsentiere ich Aufgaben zu verschiedenen Wachstumsmodellen und dem Räuber-Beute-Modell, welche ich zum Teil selbst und zum Teil in Anlehnung an bestehende Aufgaben erstellt habe. Die Aufgabenstellungen sind bewusst weit gewählt, sodass den Schülerinnen und Schülern Platz zum eigenständigen modellieren gegeben wird. Die Ausarbeitungen sollen somit nur einen Vorschlag zur Vorgangsweise bei der Behandlung von Wachstumsmodellen mit dem Softwarepaket GeoGebra 3.2 darstellen. Die GeoGebra-Dateien zu allen behandelten Aufgaben liegen in Form einer CD-Rom der Arbeit bei.

Lebenslauf

Zur Person

Name:	Judith Wolf
Geboren:	30. August 1984
Geburtsort:	Mautern an der Donau
Staatsbürgerschaft:	Österreich
Familienstand:	ledig
Religion:	römisch-katholisch
Eltern:	OStR Dipl. Ing. Friedrich und Christa Wolf
Geschwister:	drei Schwestern

Ausbildung

1991 - 1995	Volksschule Langenlois (NÖ)
1995 - 2003	BG und BRG Krems, Piaristengasse 2 (Matura mit gutem Erfolg)
WS 2003	Internationale Betriebswirtschaftslehre (Universität Wien)
SS 2004 - SS 2009	Lehramt UF Mathematik, UF Psychologie und Philosophie (Universität Wien)
WS 2005/06 - SS 2009	Lehramt UF Mathematik, UF Informatik und Informatikmanagement (Universität Wien)
SS 2009	Informatikmanagement (Universität Wien)

Unterrichtserfahrung

Leiterin zahlreicher Intensivkurse im Fach Mathematik im Nachhilfeinstitut IFL - Dr. Rampitsch (2003-2009)

Unterrichtspraktika im Rahmen des Lehramtsstudiums an diversen Wiener Gymnasien

Workshops für StudienanfängerInnen an der Fakultät für Informatik, Universität Wien (WS 2007/08, SS 2008)

Lehrerin für das Unterrichtsfach Angewandte Mathematik an der SDV - Informatik-Akademie in Wien (Schuljahr 2007/08)

Lehrauftritte im Rahmen des EU-Projekts „Bringing Mathematics to Earth“ in Aarhus, Dänemark (September 2008)