universität wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Über die Unendlichkeit der Irrationalzahlen"

Verfasser

Mario Steigberger

angestrebter akademischer Grad

Magister der Philosophie (Mag.phil.)

Wien, April 2009

Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 190 299 406
Studienrichtung lt. Studienblatt:	PP
Betreuerin:	MMag. DDr. Esther Ramharter

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

2. Die Entdeckung der Inkommensurabilität

3. Überblick der wichtigsten historischen Entdeckungen nach der Antike

4. Das Unendliche und die Irrationalzahlen

4.1. Das Potentiell-Unendliche wider das Aktual-Unendliche

4.2. Vorstellungen zum Begriff des Aktual-Unendlichen in der Mathematik

4.3. Verteidigung der Existenz des Aktual-Unendlichen

4.4. Zählungen an unendlichen Mengen und unendliche Zahlen

5. Das Kontinuum

5.1. Die Kontinuitätslehre des Aristoteles

5.1.1. Die Definition des Kontinuums

5.1.2. Die Auseinandersetzung mit Zenons Paradoxien

5.2. Ein Kontinuum aus Punkten

5.3. Die Einbeziehung des Aktual-Unendlichen

5.4. Paradoxien des arithmetischen Kontinuums

5.5. Die Diskrepanz zwischen einem anschaulichen und einem arithmetischen Kontinuum

6. Die klassischen Definitionen der Irrationalzahlen

6.1. Der Grenzwertbegriff (Die Transparenz des Unendlichen)

6.2. Überblick der Konstruktionen des reellen Zahlenkörpers

6.3. Die Weierstraßsche Einführung der Irrationalzahlen

6.3.1. Konstruktionen der reellen Zahlen mittels Aggregate

6.3.2. Das Prinzip der Intervallschachtelung

6.4. Cantors Wirklichkeit der Zahlen

6.4.1. Cantors Fundamentalfolgen

6.5. Kritik von theologischer Seite (an Weierstraß und Cantor)

6.6. Dedekinds Schnitte

6.7. Vergleich der drei klassischen Definitionen

6.8. Intuitionistische Kritik an den klassischen Definitionen

7. Cantors Beitrag

7.1. Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

7.1.1. Die Idee der Abzählbarkeit für unendliche Mengen

7.1.2. Kritische Betrachtungen zur Abzählbarkeit

7.1.3. Überabzählbarkeit

7.2. Die unendliche Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen

7.3. Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionalzahl

7.4. Der Übergang zum allgemeinen Begriff der Mächtigkeit

7.5. Die Mächtigkeit der Potenzmenge

7.6. Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen

8. Zusammenfassung

9. Literaturverzeichnis

1 Einführung

„Die Philosophen dagegen wollen vor allem sich ihrer selbst und ihrer Tätigkeit immer tiefer bewusst werden, und diese Neigung führt viele unter ihnen dazu, sich auch mit den Grundlagen der Mathematik zu beschäftigen, . . .“ [1]

Wenn von der Philosophie gesagt wird, sie beginne mit dem „Staunen“, sollten wohl auch die Irrationalzahlen auf ihre Rechnung gesetzt werden. Das große „Staunen“ über diese Größen hat mit den Pythagoreern begonnen, mit Cantor einen neuen Aufschwung erlebt und ist bis heute nicht versiegt.

In dieser Arbeit wird einerseits die Frage einer arithmetischen Definition der Irrationalzahlen selbst behandelt und andererseits nach der gesamten Menge der reellen Zahlen, sozusagen nach der Darstellung eines arithmetischen Kontinuums, gefragt. Anschauungen von möglichen, beziehungsweise unmöglichen Formen der Unendlichkeit spielen dabei eine große Rolle, da man bei beiden Fragen unweigerlich mit dem Unendlichen konfrontiert wird.
So wird neben den „klassischen“ Konstruktionen der irrationalen Zahlen von Weierstraß, Cantor und Dedekind auch die Einbeziehung der aktualen Unendlichkeit in die Mathematik diskutiert.

Im letzten Kapitel werden Cantors wichtigste Sätze zu den Irrationalzahlen vorgestellt. Darunter finden sich erste Beweise der Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen wie der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen von 1874, das bekannte Cantorsche Diagonalverfahren sowie der Satz über die Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionalzahl.

[1] Max Dehn – Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles, S.200

2 Die Entdeckung der Inkommensurabilität*

Die Pythagoreer gelten als die wahren Entdecker des Inkommensurablen. Auch wenn diese Entdeckung als eine der größten Leistungen der griechischen Mathematik anmutet, löste sie andererseits auch eine Krise aus, glaubte man doch, das Wesen der Wirklichkeit in rationalen Zahlenverhältnissen ausdrücken zu können. Die enttäuschende Erkenntnis, dass sich nicht alle Strecken durch Verhältnisse ganzer Zahlen darstellen lassen, soll, Legenden zufolge, die Götter veranlasst haben, den Entdecker selbst im Meer ertrinken zu lassen.

Dieser schicksalhafte Schlag galt dem pythagoräischen Mathematiker und Musiktheoretiker Hippasos von Metapont, welcher um das 5. Jahrhundert vor Christus gerade am eigenen Ordenssymbol, dem Pentagramm, feststellte, dass sich das Verhältnis, das später als goldener Schnitt bekannt wurde, von Seite und Diagonale eines Pentagons nicht mit derselben Maßeinheit messen lässt.

Auf Grund der strengen Geheimhaltung ihrer Lehre ist jedoch nicht mit Sicherheit feststellbar, ob die Pythagoreer die ersten inkommensurablen Strecken wirklich am Fünfeck, oder doch am Quadrat, beziehungsweise am gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreieck, feststellten. Jedenfalls war ihnen die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale eines Quadrats bekannt.[2] Die überraschende Enttäuschung der Pythagoreer über die Inkommensurabilität wird vielleicht verständlicher, wenn man bedenkt, dass die mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes berechnete Hypotenuse eines jeden beliebigen gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks mit der zugehörigen Kathete kein rationales Verhältnis hat.

Festzuhalten ist der geometrische Ursprung der irrationalen Zahlen, womit sich diese auch auf mit Zirkel und Lineal konstruierbare Strecken beschränkten. Die Unzulänglichkeit der Arithmetik, alle Strecken durch Verhältnisse ganzer Zahlen auszudrücken, sicherte der Geometrie die „Vorherrschaft“ gegenüber der Arithmetik, was für die gesamte griechische Mathematik der Antike bestimmend sein sollte.

Euklid widmete in seinem Werk *„Die Elemente“* der Inkommesurabilität ein ganzes Buch. In diesem findet man neben geometrischen Inkommensurabilitätsbeweisen auch den ersten arithmetischen Beweis für die Irrationalität einer Zahl, welcher mit ziemlicher Sicherheit ebenfalls den Pythagoreern zuzuschreiben ist.

---

* Deiser – Reelle Zahlen
  Ebbinghaus – Zahlen
  Kokkinos – Das mathematische Inkommensurable und Irrationale bei Platon

[2] vgl. Kokkinos – Das mathematische Inkommensurable und Irrationale bei Platon, S. 23

3 Überblick der wichtigsten historischen Entdeckungen nach der Antike*

Obwohl es noch Eudoxos von Knidos im 4. Jahrhundert vor Christus gelang, eine geometrische Proportionenlehre auch für inkommensurable, also irrationale Längen, zu entwickeln, wurden diese Größen nicht als Zahlen angesehen, sondern lediglich als Verhältnisse von geometrischen Größen. In der antiken griechischen Mathematik umfasste der Zahlbegriff ausschließlich ganze Zahlen, wobei Brüche als Verhältnisse von ganzen Zahlen interpretiert wurden.
Das Interesse am Rechnen mit Zahlen, darunter auch Quadratwurzeln, rückt erst durch den Einfluss der indisch-arabischen Algebra wieder mehr in den Vordergrund.
Im 16. Jahrhundert beschäftigten sich einige italienische Mathematiker, darunter Scipione del Ferro, Niccolò Fontana Tartaglia und Gerolamo Cardano auch mit Lösungsformeln für Gleichungen 3. und 4. Grades. So beginnt man mit neuen Wurzelausdrücken und sogar mit imaginären Größen zu rechnen, ohne diese jedoch als Zahlen zu begreifen. Auch der deutsche Theologe und Mathematiker Michael Stifel (1486-1567) bemerkt dazu in einem Kapitel, das als Erläuterung des X Buches von Euklid aufgefasst werden kann, seines Werks *„Arithmetica integra“* von 1544:

„So wie eine unendliche Zahl keine Zahl ist, so ist eine irrationale Zahl keine wahre Zahl, weil sie sozusagen unter einem Nebel der Unendlichkeit verborgen ist.“ [3]

Im 17. und Anfang des 18. Jahrhunderts bemühen sich unter anderen Rene Descartes, John Wallis, Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton um eine zunehmende Arithmetisierung geometrischer Begriffe. So werden geometrische Konstruktionen in arithmetische Operationen übersetzt und den geometrischen Größen erstmals auch Zahlen zugeordnet. Die Zahl selbst wird dabei als dasjenige aufgefasst, was sich zur Einheit verhält, wie eine gerade Linie zu einer gewissen anderen Geraden, welche als Einheit angenommen wird.[4]

---

* Vgl.: Cantor, Moritz – Vorlesungen über Geschichte der Mathematik
Deiser – Reelle Zahlen (1.1 Irrationale Zahlen)
Ebbinghaus – Zahlen (Kapitel 2. Reelle Zahlen, § 1. Historisches)
Pringsheim – Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse (I. Irrationalzahlen)

[3] Stifel – Arithmetica integra (Buch II, Kapitel 1), S.103

[4] Siehe Definition bei Newton (1707 Arithmetica universalis) oder Christian Wolf (1710 Elementa Arithmeticae)

Irrationale Zahlen werden durch unbegrenzt fortsetzbare Algorithmen mit rationalen Zahlen gewonnen. Die Berechtigung dazu, das Ergebnis als eine (irrationale) Zahl zu bezeichnen, ist jedoch noch rein geometrischer Natur, nämlich als Umsetzung der geometrischen Messungsmethode ins arithmetische, was schließlich wieder darauf hinaus läuft, dass von den arithmetisch definierten Irrationalitäten lediglich die geometrisch konstruierbaren als Zahlen zu betrachten sind. Dennoch ist ein erster Schritt zur Arithmetisierung des Kontinuums getan.
Im Laufe des 18. Jahrhunderts entwickelte sich bei Leibniz und Euler auch die Idee der Existenz von Zahlen, welche sich mit Hilfe algebraischer Methoden nicht beschreiben lassen, also sich nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung darstellen lassen. Der, sich auf Grund einer Bewerbung um einen Lehrstuhl mit Augustin Louis Cauchy (* 21. August 1789 in Paris; † 23. Mai 1857 in Sceaux) streitende, ebenfalls französische Mathematiker Joseph Liouville (1809 - 1882) konnte dann auch 1844 als Erster die Existenz solcher transzendenter Zahlen beweisen.

Das Bedürfnis, die Natur der reellen Zahlen arithmetisch festzulegen, war nach der Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz besonders groß. Weder die Argumentation mit unendlich kleinen, so genannten infinitesimalen Größen von Leibniz, noch die Verwendung des Begriffs der Stetigkeit bei Newton waren exakt definiert und vor Widersprüchen sicher. Auch von philosophischer Seite wurde Kritik laut. George Berkeley bezeichnete die für ihn mysteriösen infinitesimalen Zahlen als eher religiös als mathematisch. Andere Mathematiker, unter ihnen Jakob und Johann Bernoulli, wie Leonhard Euler, hoben jedoch den rechnerischen Gehalt hervor und scheuten sich nicht auch nach Leibniz noch „infinitesimal“ zu rechnen. Darüber hinaus verwendeten sie auch bei der Zahlendarstellung durch unendliche Summen und Produkte die infinitesimalen Größen. So hieß es beispielsweise, dass sich eine konvergente Folge von ihrem Grenzwert nur um eine infinitesimal kleine Größe unterscheidet.
Erst im 19. Jahrhundert gelang eine strenge Einführung des Grenzwertbegriffs.[5] Die wohl bekannteste Definition gab Cauchy, mit Hilfe des nach ihm benannten Konvergenzkriteriums, das er 1821 in seinem klassischen Vorlesungsskriptum *„Cours d'Analyse“* formulierte. Doch auch Bernard Bolzano (* 5. Oktober 1781 in Prag; † 18. Dezember 1848 in Prag) und Karl Weierstraß (* 31. Oktober 1815 in Ostenfelde bei Ennigerloh/Münsterland; † 19. Februar 1897 in Berlin) arbeiteten mit exakten Grenzwertdefinitionen. Die reellen Zahlen waren für diese Begriffe von großer Bedeutung, da sie selbst erst die Vollständigkeit gewährleisten

[5] Vgl.: 6.1 Der Grenzwertbegriff

konnten, gibt es doch Folgen, welche das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllen, obwohl sie in der Menge der rationalen Zahlen keinen Grenzwert besitzen. Obwohl Bolzano bewies, dass der Grenzwert einer „Cauchy-Folge“ eindeutig bestimmt sein muss, wurde die Existenz des Grenzwerts selbst vorausgesetzt.
Erst die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entstandenen Theorien der reellen Zahlen, welche in den folgenden Kapiteln noch ausführlicher dargestellt werden, untersuchten den für die Fundierung der Analysis so wichtigen Begriff der reellen Zahlen genauer.
Unter anderen beschäftigten sich vor allem der in Berlin unterrichtende Professor Karl Weierstraß, sein prominentester Schüler Georg Cantor (* 3. März 1845 in Sankt Petersburg; † 6. Januar 1918 in Halle (Saale)), der Braunschweiger Mathematiker Richard Dedekind (* 6. Oktober 1831 in Braunschweig; † 12. Februar 1916 in Braunschweig), welcher als letzter Schüler Gauß' promovierte, und Heinrich Eduard Heine (* 18. März 1821 in Berlin; † 21. Oktober 1888 in Halle (Saale)), der Ideen von Weierstraß und Cantor übernahm, mit einer arithmetischen Konstruktion der irrationalen Zahlen. [6]

Während bei Weierstraß, Heine und Dedekind die Konstruktion des reellen Zahlkörpers im Vordergrund stand, beschäftigte sich Cantor auch mit der Beschaffenheit der Menge der reellen Zahlen selbst. So verglich er verschiedene Mengen von Zahlen und stellte schließlich 1873 die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen fest.[7] Auf Grund so mancher neuer Ideen, wie der Aufhebung der Nicht-Existenz aktual-unendlicher Mengen[8], war Cantor jedoch auch Zielpunkt heftiger Kritik. Allen voran weigerte sich einer seiner ehemaligen Lehrer, Leopold Kronecker (* 7. Dezember 1823 in Liegnitz; † 29. Dezember 1891 in Berlin) die von Cantor begründete Mengenlehre anzuerkennen. Die Kontroverse zwischen Cantor und Kronecker kann als Ausgangspunkt des Anfang des 20. Jahrhunderts entstehenden Streits zwischen Hilberts Formalismus und Brouwers Intuitionismus gesehen werden. In der sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik stellt die intuitionistische Richtung Ansprüche, welchen die klassischen Theorien nicht gerecht werden können und verlangt somit, die Existenzberechtigung einiger Begriffe und Anschauungen aufzugeben.

[6] Vgl.: 6 Die klassischen Definitionen der Irrationalzahlen
[7] Vgl.: 7.1 Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit
[8] Vgl.: 4 Das Unendliche und die Irrationalzahlen

4 Das Unendliche und die Irrationalzahlen

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.“ [9]

4.1 Das Potentiell-Unendliche wider das Aktual-Unendliche[*]

Der deutsche Logiker und Mathematiker Paul Lorenzen (* 24. März 1915 in Kiel; † 1. Oktober 1994 in Göttingen), der sich vor allem um eine konstruktive Grundlegung der Mathematik, wie dessen Widerspruchsfreiheit bemühte, erklärt sehr anschaulich wie das Unendliche in der Mathematik Fuß gefasst hat und wie man in weiterer Folge das Potentiell-Unendliche vom Aktual-Unendlichen unterscheiden kann. Dazu führt er die Zahlen ganz einfach als Mittel zum Zählen ein, wobei unsere Zahlzeichen 1, 2, 3, . . . hier als Ersatz für reale Gegenstände, wie etwa Steine, dienen. Das Zählen selbst kann nur in endlicher Form stattfinden. Erst durch die Betrachtung der Zahlen für sich selbst ergibt sich die Möglichkeit der unendlichen Weiterführung. Das primitive Zählen selbst setzt schon ein Konstruktionsschema voraus, nach welchem jede Zahl durch ihre vorhergehende definiert wird. Anders ausgedrückt, kann zu jeder beliebigen Zahl x die Nachfolgezahl $x+1$ konstruiert werden. Nach diesem Schema ist es somit theoretisch möglich unendlich viele Zahlen zu bilden. Gerade diese Möglichkeit bezeichnet das Potentiell-Unendliche. Wird dagegen behauptet, dass unendlich viele, in unserem Fall natürliche Zahlen, wirklich vorhanden sind, also als vollendete Menge schon existieren, begreift man das Unendliche als ein aktuales.

Aristoteles hat als erster diese Unterscheidung des Unendlichen vorgenommen, wobei er, im Gegensatz zu Pythagoras und Platon, überzeugt war, dass nur dem Potentiell-Unendlichen Existenz zukommen kann.

---

[9] Hilbert – Über das Unendliche, S.163

[*] Cantor – Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche
Lorenzen – Das Aktual-Unendliche in der Mathematik
Meschkowski. – Georg Cantor
Seeck – Die Naturphilosophie des Aristoteles

"Ganz allgemein kommt ja Unbegrenztes in der Weise vor, dass immer wieder ein Anderes hinzugenommen wird, und das Hinzugenommene / ist zwar jeweils begrenzt, aber es ist immer und immer wieder ein anderes, […]"[10]

Auf Grund der Entstehung unterscheidet er weiters zwei Arten des Potentiell-Unendlichen. Eines, welches durch ständiges Hinzufügen, ein anderes, das durch ständiges Zerlegen zum Unendlichen wird. Dabei beschreibt der Begriff der Anzahl (bei Aristoteles einfach Zahl) das durch Hinzufügung entstehende und die Größe das durch Zerlegung entstehende Unendliche.[11]

Der eigentliche Existenzgrund des Unendlichen ist für Aristoteles der unbegrenzt fortsetzbare Denkprozess, der zugleich als das eigentliche Prinzip des Unendlichen erscheint. Die Unendlichkeit selbst kann für Aristoteles jedoch nur als Merkmal eines Dinges auftreten, ist also bloß eine akzidentielle Bestimmung.

Bis ins 19. Jahrhundert vertraten die meisten Mathematiker, unter ihnen auch so namhafte wie Gauß und Descartes, Aristoteles Ansicht der alleinigen Existenzberechtigung des Potentiell-Unendlichen. Die explizite Einbeziehung des Aktual-Unendlichen in die Mathematik begann wohl erst mit Cantor und Bolzano.

Obwohl Cantor weiß, dass er mit seinen neuartigen Anschauungen über das Wesen des Unendlichen und der Zahlgröße gewiss im Gegensatz zu verbreiteten Meinungen steht, betont er deren Notwendigkeit und Unumgänglichkeit für die Mathematik.

Das Potentiell-Unendliche bezeichnet Cantor als Uneigentlich-Unendliches. Dieses tritt als veränderliche, aber stets endlich bleibende Größe auf. Kommt das Unendliche aber in einer bestimmten Form vor, wie bei der Betrachtung des Verhaltens eines unendlich entfernten Punktes einer analytischen Funktion, so spricht er vom Eigentlich-Unendlichen, das mit dem Aktual-Unendlichen verglichen werden kann.

Bernard Bolzano verteidigt schon 1851 in seiner Schrift *„Paradoxien des Unendlichen"* das Eigentlich-Unendliche. Das Uneigentlich-Unendliche tritt in der Gestalt von Differenzialen bei unendlichen Reihensummen oder bei sonstigen Grenzprozessen auf. Hinsichtlich dieser Art des Unendlichen, welches kein eigentliches Sein hat, gibt und gab es keine wesentlichen Meinungsverschiedenheiten.

---

[10] Aristoteles – Physik, Buch III, Kapitel 6 (S. 135 / 137)

[11] Vgl.: 5.1 Die Kontinuitätslehre des Aristoteles

Obwohl sich die unter Cantor entstandene Mengenlehre, und somit auch die Verwendung des Aktual-Unendlichen, in der Mathematik etabliert hat und kaum mehr wegzudenken ist, gibt es nach wie vor Bedenken. Einer der ersten und größten Widersacher Cantors war Leopold Kronecker, der bezüglich der Grundlegung der Mathematik Ansichten vertrat, die in vielen Punkten die Konzeptionen des Intuitionismus vorwegnahmen. Für Kronecker war ein Beweis, wie ihn Cantor beispielsweise für die Existenz transzendenter Zahlen geführt hatte, die reinste Ketzerei. Cantor führt hier einen so genannten nichtkonstruktiven oder reinen Existenzbeweis, der auf der Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten auf unendliche Mengen beruht. Dieser Beweis liefert kein Verfahren auch nur eine einzige transzendente Zahl wirklich anzugeben.

Kronecker glaubte, die gesamte Analysis auf Beziehungen zwischen ganzen Zahlen zurückführen zu können, wobei die natürlichen Zahlen alleine „gottgegeben“ seien. Die irrationalen Zahlen hingegen sollten auf Grund ihres unendlichen Charakters dabei nichts verloren haben.

Während eine platonistische Haltung, wie sie auch von Cantor vertreten wurde, aktual-unendliche Mengen durchgängig akzeptiert, findet man bei anderen Richtungen differenziertere Ansichten. Für den Intuitionismus gibt es keine allgemeinen, einheitlichen Kriterien für die Zulassung von aktual-unendlichen Mengen. Aus konstruktivistischer Sicht lassen sich jedoch „operativ abgeschlossene“ von „operativ nicht abgeschlossenen“ Mengen unterscheiden. Für erstere lässt sich ein Algorithmus finden, mit dessen Hilfe jedes Element dieser Menge in endlich vielen Schritten erzeugt werden kann. Während die natürlichen Zahlen eine operativ abgeschlossene Menge bilden, ist es bei den reellen Zahlen nicht möglich ein Verfahren anzugeben, das jede reelle Zahl erzeugen kann.[12]

[12] Genau dies besagt die, von Cantor bewiesene Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.

4.2 Vorstellungen zum Begriff des Aktual-Unendlichen in der Mathematik*

Cantor verteidigt vehement die Existenz wie die Notwendigkeit des Aktual-Unendlichen in der Mathematik. Die Verwendung von aktual-unendlichen Mengen ist grundlegend für seine Begründung der Mannigfaltigkeitslehre, die später vor allem unter dem deutsch-israelischen Mathematiker Adolf Fraenkel weiterentwickelt wurde.
Dieser beschäftigte sich auch mit der Frage, wie aktual-unendliche Mengen überhaupt zu denken sind. Dies erläuterte er an der Menge aller Halbierungspunkte, wobei von einer beliebigen Strecke ausgegangen wird, denn

„[…] unser Verstand, zur gleichzeitigen Auffassung gesetzmäßig geschaffener Mannigfaltigkeiten glücklich eingerichtet, mag sogar den Begriff dieser Gesamtmenge von unendlich vielen Punkten einfacher finden, als den Begriff einer Teilmenge von etwa einer Milliarde dieser Punkte; einer Teilmenge, die trotz ihrer Endlichkeit infolge der großen Anzahl von / Elementen der naiv-anschaulichen Erfassung vielleicht größere Schwierigkeiten bereitet als die Gesamtmenge.“ [13]

Ein Grund dafür ist laut Fraenkel die Tatsache, dass die Vorstellung der oben erwähnten unendlichen Menge nur eines einzigen Schritts bedarf, den der vollständigen Induktion. Bei der Umfangsbestimmung endlicher Mengen muss hingegen immer die konkrete Anzahl der Elemente gedacht werden.

Auch der bei Cantor in Halle studierende Mathematiker Felix Bernstein, der außerdem an der Ausarbeitung einiger mengentheoretischer Arbeiten Cantors beteiligt war, befasste sich mit dem Problem der Anschauung des Aktual-Unendlichen. Er versucht insbesondere Argumente der Finitisten, welche überhaupt nur endlichen Mengen eine Existenzberechtigung zusprechen, unendlichen hingegen selbst die Möglichkeit des Gedacht-Werdens absprechen, ungeltend zu machen.

---

* Bernstein – Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus
Fraenkel – Einleitung in die Mengenlehre

[13] Fraenkel – Einleitung in die Mengenlehre, S.8/9

An Zenons Paradoxon von Achilleus und der Schildkröte illustriert Felix Bernstein wie dieses, von den Finitisten verleugnete, Aktual-Unendliche zu denken sei. Zenon selbst hat gezeigt, dass Achilleus unmöglich die Schildkröte einholen kann, wenn man jeden einzelnen Schritt der unendlichen Folge berücksichtigt. Gerade dieses Argument, der Unmöglichkeit der Angabe eines jeden Elements, veranlasst den Finitisten die Existenz einer solchen unendlichen Menge, als Ganzes, abzusprechen. Nun weist Bernstein darauf hin, dass Cantors Begriff der aktual-unendlichen Menge keinesfalls verlangt, dass jedes Element, vom Anfang bis zum Ende der Menge, vorgestellt werden soll und kann, vielmehr wird die Menge selbst

„[…] genauso gedacht, wie wir denken, dass Achilleus die Schildkröte einholt, nämlich in einem ganzen Akt.“ [14]

Die Verbindung dieses Denkaktes und der Vorstellung der unendlich vielen Stationen der Annäherung wird wiederum durch den Begriff der Grenze einer unendlichen Reihe gegeben. Ausschlaggebend für diese Definition des Grenzbegriffs war unsere Anschauung, nämlich die der stetigen Bewegung.

[14] Felix Bernstein – Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus, S.66,67

4.3 Verteidigung der Existenz des Aktual-Unendlichen[*]

Cantor führt die meisten Missverständnisse und „Unmöglichkeitsbeweise“ von aktual-unendlichen Mengen auf die unbegründete Annahme zurück, dass den aktual-unendlichen Mengen dieselben Eigenschaften zukommen, wie den endlichen, woraus sich im Weiteren Zirkelschlüsse ergeben.

Als Beispiel soll dazu die Kontroverse mit dem deutschen Philosophen und katholischen Theologen Constantin Gutberlet (1837–1928), der sich mit metaphysischen und mathematischen Betrachtungen des Unendlichen beschäftigt hat, kurz dargestellt werden.

Gutberlet meint, dass sich Widersprüche im Unendlichen vermeiden ließen, würde man ausschließlich dem Potentiell-Unendlichen Gültigkeit zusprechen. Es soll jedoch angenommen werden, eine aktual-unendliche Linie, vorgestellt als unendlich langer Draht, existiere. Demzufolge wäre es möglich an einer beliebigen Stelle eine bestimmte, endliche Länge l herauszunehmen und anschließend die übrigen zwei Stücke der Geraden wieder zusammenzuführen. Gutberlet ist nun der Meinung, dass diese neue Gerade, ohne das Stück der Länge l, nicht mehr unendlich ist. Bei der Zusammenfügung der beiden Stücke wurden diese von der Unendlichkeit hereingerückt und sind deshalb nach der Seite der Unendlichkeit hin begrenzt. Da sie aber andererseits auch nach der Mitte hin, also dort wo l herausgenommen wurde, begrenzt sind, kann aus der Vereinigung zweier endlicher Strecken wieder nur eine endliche Strecke entstehen. Aus demselben Grund folgt nun auch, dass die ursprüngliche Gerade endlich gewesen sein muss.

Cantor betrachtet nun eines der beiden Teilstücke aus der neu entstandenen Geraden. Dieses wird, bei der Zusammenführung mit dem anderen Stück, um eine gewisse Länge nach innen verschoben und somit sollte auch jeder Punkt dieses Stücks um genau diese Länge verschoben werden. Wäre das Teilstück endlich, würde dies auch zutreffen. Bei unserer Betrachtung handelt es sich jedoch um eine unendliche Gerade. Die Verschiebung gilt auf jeden Fall für jeden endlich entfernten Punkt, „[…] *wer sagt Ihnen aber dass hier auch das gleiche gilt vom unendlich fernen Zielpunkt 0 ?“* [15]

---

[*] Bolzano – Paradoxien des Unendlichen
Cantor – Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten
Gutberlet – Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet

[15] Cantor – Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, S.397

Lässt man nun, wie Gutberlet, diese Eigenschaft auch für unendlich entfernte Punkte gelten, so ergibt sich der oben dargestellte Widerspruch. Während Gutberlet daraus die Unmöglichkeit der Existenz einer aktual-unendlichen Geraden folgert, muss für Cantor schon die Annahme, ein unendlich entfernter Punkt könne ins Endliche gebracht werden, falsch sein.

Auch Bolzano ist von der Existenz des Aktual-Unendlichen überzeugt. In seiner Schrift: „Paradoxien des Unendlichen" klärt er zunächst einen vermeintlichen Widerspruch über die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen. Dieser liegt in der scheinbar paradoxen Vorstellung der Unendlichkeit der Reihe der natürlichen Zahlen, wenn doch jede beliebige Menge natürlicher Zahlen der Anzahl nach immer endlich bleibt.

„Wenn jede (natürliche) *Zahl, dürfte man sagen, ihrem Begriffe nach eine bloß endliche Menge ist, wie kann die Menge aller Zahlen eine unendliche sein?* [16]

Bolzano löst dieses Problem, indem er einfach auf die Definition der natürlichen Zahlen selbst hinweist. Das Bildungsgesetz der natürlichen Zahlen ordnet jeder Zahl einen Nachfolger zu. Somit kann unmöglich eine obere Begrenzung der Zahlen existieren. Die Annahme es gebe eine letzte, größte, natürliche Zahl erweist sich also als falsch.

Weiters meint Bolzano, die Existenz des Potentiell-Unendlichen ist vom Aktual-Unendlichen abhängig, denn alleine in letzterem ist es möglich nach jeder beliebig gesetzten Grenze noch weiter zu gehen. Demnach muss das Unendliche tatsächlich, also aktual existieren.

„Der Geist schafft ja beim Weiterdenken keine neue Ausdehnung, keine größere Menge, sondern erkennt sie bloß als objektiv möglich an ..." [17]

---

[16] Bolzano – Paradoxien des Unendlichen, S. 21
[17] Gutberlet – Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet, S.11-12

4.4 Zählungen an unendlichen Mengen und unendliche Zahlen*

Cantor wollte wohl als erster die Anzahl der Elemente von unendlichen Mengen vergleichen. Unter Aristoteles philosophischem Machtspruch „infinitum actu non datur“ erscheint dies völlig unmöglich, da die Gesamtheit einer unendlichen Menge nie begriffen werden kann. Cantor meint jedoch, dass sich an endlichen wie unendlichen Mengen Zählungen durchführen lassen, sobald man den Mengen ein Fortbildungsgesetz gegeben hat, das eine Wohlordnung derselben Menge möglich macht.
Ohne ein solches Gesetz wäre eine Zählung auch bei endlichen Mengen nicht möglich.
Der wesentliche Unterschied endlicher und unendlicher Mengen ist, dass bei ersteren die Anzahl von der Anordnung der Elemente unabhängig ist, hingegen wird die Anzahl bei unendlichen Mengen durch das Gesetz der Zählung mitbestimmt. Cantor weigert sich jedoch wegen diesem, in der Natur selbst begründeten Unterschied, die Existenz des Unendlichen aufzugeben. Außerdem müsste diese „Verleugnung“ nach Cantor auch Konsequenzen für das Endliche haben.
Im siebenten Kapitel wird näher auf Cantors Vergleich von unendlichen Mengen eingegangen, wobei die Ausgangsmenge der natürlichen Zahlen neben den reellen Zahlen im Mittelpunkt steht.
Neben der Unterscheidung der Anzahl von Mengen entwickelte Cantor auch den Begriff der transfiniten Zahlen oder Ordinalzahlen.[18] Wesentlich für den hier behandelten Unendlichkeitsbegriff ist die Kreation einer Erweiterung der natürlichen Zahlen über unendliche Zahlen, welche als feste Objekte suggeriert werden sollen. In Folge rechnet Cantor auch mit den neuen transfiniten Zahlen und zeigt wie sich deren Rechengesetze von denen der endlichen Zahlen unterscheiden.

Beispielsweise ist die Addition von endlichen und unendlichen Zahlen nicht kommutativ. Bezeichnet ω eine unendliche Zahl, so soll nach Cantor $1+\omega=\omega$ gelten, während $\omega+1$ eine von ω verschiedene Zahl bestimmt.

* Cantor – Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten
Cantor – Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten

[18] Auf die Entwicklung der Theorie der Ordinalzahlen wird hier nicht näher eingegangen (Verweis auf: O. Deiser – Einführung in die Mengenlehre 2004, 2. Abschnitt - Ordnungen und Mengen reeller Zahlen)

Somit ist es einerseits möglich eine unendliche Zahl um eine endliche zu erweitern, andererseits kann jedoch auch die endliche Zahl bei der Addition mit einer unendlichen Zahl „wegfallen".

Schon hier zeigt sich, dass ein wesentlicher Grund der Ablehnung unendlicher ganzer Zahlen die Auffassung des Begriffs der Zahl selbst sein kann, wenn sie die Endlichkeit derselben voraussetzt.

Cantor geht aber über die Endlichkeit hinaus in das Transfinitum, einer unbegrenzten Stufenleiter von bestimmten unendlichen Modi, die selbst als bestimmte Zahlen darstellbar sind und sich auch untereinander unterscheiden.

Wie sich gezeigt hat, ergeben sich gewisse Eigentümlichkeiten, die Schwierigkeiten und Missverstehen bei den Rechenoperationen mit den neuen Zahlen hervorrufen können, vor allem wenn man den neuen, unendlichen Zahlen dieselben Eigenschaften wie den endlichen zuschreibt. Solche Zuschreibungen ergeben notwendigerweise Widersprüche und vielfach werden gerade diese Unzulänglichkeiten der unendlichen Zahlen als Gründe für die Nicht-Existenz derselben angeführt. Cantor sieht in dieser Schlussfolgerung wieder einen Zirkelschluss, denn dem neuen Begriff der unendlichen Zahlen werden völlig unbegründet alle Gesetzmäßigkeiten der endlichen Zahlen aufgedrängt. Dass diese Vorgehensweise widersinnig ist zeigt Cantor an der Einführung der komplexen Zahlen, welche im Gegensatz zu den reellen weder positiv noch negativ sind. Analog gedenkt er die unendlichen ganzen Zahlen mit deren neuartigen Eigenschaften einzuführen.

Dabei können auch solche Eigenschaften auftreten, welche für endliche Zahlen undenkbar wären. Beispielsweise lässt sich für unendliche Zahlen einerseits zeigen, dass sie weder gerade noch ungerade sind, da sich ω weder in der Form $2\cdot\alpha$, noch in der Form $2\cdot\alpha+1$ darstellen lässt, und andererseits, dass sie sowohl gerade als auch ungerade sind, da $\omega=\omega\cdot 2$ und $\omega=1+\omega\cdot 2$ gleichermaßen gelten. Hier finden sich also einander vermeintlich widersprechende Merkmale an ein und derselben Zahl vereint.

5 Das Kontinuum

5.1 Die Kontinuitätslehre des Aristoteles*

„Der Weg des Unendlichen besteht nur in der Unendlichkeit des Weges.“ [19]

Wenn von den großen Leistungen der aristotelischen Philosophie gesprochen wird, bleibt eine Erwähnung seiner Kontinuitätslehre meist aus. Zu Unrecht meinen vor allem Mathematik- und Physikinteressierte, da Aristoteles mit seinen Auseinandersetzungen über Zeit, Raum und Kontinuum ein hohes Niveau erreicht hat und seine Grundlagenfragen nichts von ihrer Aktualität verloren haben.[20]

Aristoteles Abhandlungen über das Kontinuum finden sich vor allem im sechsten Buch der „*Physik*“, allerdings erstreckt sich die Erörterung des Begriffs des Kontinuums über weite Teile des Gesamtwerks. Grund dafür ist der enge Zusammenhang mit der Bewegung, welche sich nur als kontinuierliche denken lässt. Da eine Bewegung jedoch ohne Ort und Zeit nicht vorstellbar ist, werden auch diese Begriffe, welchen selbst eine Kontinuitätsstruktur eigen ist, behandelt. Dabei sollte beachtet werden, dass die vorkommenden Definitionen nicht nur der mathematischen, geometrischen Anschauung dienen, sondern auf allgemeine Bereiche anwendbar sein sollten. Aristoteles begreift das Kontinuum als Grundstruktur der vorgegebenen Welt. Sein Ziel ist es nicht eine Strukturtheorie zu begründen, sondern die Voraussetzungen zu bestimmen, welche den Kontinuumszuschreibungen selbst zu Grunde liegen.

---

* G.A. Seeck – Die Naturphilosophie des Aristoteles (1975) Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles – Max Dehn (S.199 – 218), Das Kontinuum in der aristotelischen Physik – Wolfgang Wieland (S. 251 – 300)
Aristoteles – Physik

[19] Wieland – Das Kontinuum in der aristotelischen Physik, S. 271

[20] Siehe: Wieland – Das Kontinuum in der aristotelischen Physik, S. 252

5.1.1 Die Definition des Kontinuums

Auch wenn Aristoteles das Kontinuum nicht als bloßen Eigenschaftsbegriff auffasst, beschäftigt er sich mit der Frage, wie sich die Kontinuität als Eigenschaft einer Linie zeigt. Aristoteles stellt fest, dass zwischen unteilbaren Teilen keine Kontinuitätsrelationen bestehen können und sich somit das Kontinuum nicht aus „Unteilbarem" zusammensetzen kann.
Dazu fragt er zunächst, ob die Kontinuität als mögliche Form eines Zusammenhangs oder einer Verknüpfung von Elementen aufzufassen ist, also eine kontinuierliche Linie demnach aus zusammenhängenden Punkten bestehen kann. Dabei gelten zwei Dinge als zusammenhängend,

„[…] *wenn die Grenzen beider, da wo sie sich berühren, eine und dieselbe geworden ist […]"* [21]

Punkte werden stets als etwas Unteilbares aufgefasst. Zwei zusammenhängende Punkte sollen nach Definition jedoch nur eine Grenze haben. Auf Grund seiner Unteilbarkeit kann der Punkt aber von seiner Grenze nicht verschieden sein, wodurch er mit seinem zusammenhängenden Punkt eins wird. Somit ist gezeigt worden, dass eine stetige Linie unmöglich aus zusammenhängenden Punkten bestehen kann.
Eine andere Möglichkeit wäre sich eine Linie aus einander bloß berührenden Punkten vorzustellen. Wegen der Unteilbarkeit der Punkte können sich diese wiederum aber nur als Ganzes berühren, wodurch sie wieder in einem Punkt zusammenfallen.
Zuletzt stellt Aristoteles noch ein aus benachbarten Punkten bestehendes Kontinuum vor. Zwischen zwei benachbarten Punkten darf nichts von der gleichen Art sein, jedoch ist noch genügend Platz um eine Linie zu ziehen, auf welcher sich wieder beliebig viel weitere Punkte finden lassen. Das widerspricht wiederum der Kontinuität selbst.

Wenn man nun annimmt, das Kontinuum bestehe aus unteilbaren Punkten, so wäre es auch möglich, diese Punkte aufzuteilen. Wie oben gezeigt, ist dies bei der Anschauung des Kontinuums aus zusammenhängenden oder aus einander berührenden Punkten jedoch nicht möglich. Da auch die dritte Möglichkeit, der benachbarten Punkte, die Kontinuität einer stetigen Linie nicht widerspruchsfrei beschreibt, folgert Aristoteles, dass das Kontinuum nicht aus Punkten besteht.

---

[21] Aristoteles – Physik, Buch V, § 226f (S.19)

Aristoteles folgert, dass ein Kontinuum nicht aus Einfacherem ableitbar ist. Trotzdem muss es sich in verschiedene und getrennte Teile zerlegen lassen, obwohl die Unreduzierbarkeit vorausgesetzt wird. Das bedeutet, dass sich eine Linie immer wieder nur in weitere Linien aufteilen lässt, wobei dieser Vorgang beliebig oft iterierbar ist. Somit muss für Aristoteles für jedes Kontinuum die Bedingung erfüllt sein, dass es *teilbar in immer wieder Teilbares* ist. Dies ist Bestimmungsstück und zugleich Definition des Kontinuums.

Das Wesentliche bei der Definition ist der Begriff der Teilung, nicht des Teils, denn obwohl das Kontinuum nun teilbar ist, besteht es nicht aus echten Teilen, sondern zerfällt immer wieder nur in weitere Kontinua. Die Teile selbst lassen sich gar nicht weiter bestimmen, außer durch die Möglichkeit der unbegrenzten Teilung ihrer selbst. Eine inhaltliche Bestimmung des Begriffs der Kontinuität legt Aristoteles dabei nicht fest (vielmehr ist es gleichgültig, ob es sich um eine Größe, eine Bewegung oder eine Zeit handelt).

5.1.2 Die Auseinandersetzung mit Zenons Paradoxien

Aristoteles begreift auch die Kontinuität der Zeit, wie die der Bewegung, nach seiner oben dargestellten Definition. Somit kann weder die Zeit aus einer Menge von unteilbaren Momenten bestehen, wie auch die Bewegung nicht aus weiter unteilbaren Bewegungsschüben zusammengesetzt wird.

Wenn man, wie Zenon, das Kontinuum als aktual-unendliche Punktmenge begreift, ergeben sich die bekannten Paradoxien, aus welchen Zenon die Unmöglichkeit aller Bewegung folgert. Aristoteles hat der Folgerichtigkeit dieser Beweisgänge nichts entgegenzusetzen, allerdings kann er, wie oben gezeigt, Zenons Voraussetzung eines aus Punkten bestehenden Kontinuums nicht zustimmen.

Für Aristoteles' Kontinuitätslehre ist die anschauliche Bewegung in der natürlichen Welt eine Tatsache und somit zugleich entscheidender Grund für seine Ausarbeitung des Kontinuitätsbegriffes, da eine Bewegung notwendigerweise kontinuierlich sein muss. Somit ist der Begriff der Kontinuität nicht mathematischen, sondern eigentlich physikalischen Ursprungs, was auch zur Erklärung beiträgt, warum sich die griechischen Mathematiker der Antike weder mit Zenons Paradoxien, noch mit dem Kontinuitätsproblem selbst beschäftigten.

Für den Beweis der Kontinuität einer jeden Bewegung verwendet Aristoteles Zenons Idee des Pfeil-Paradoxons. Aristoteles meint, wenn man annimmt, die gesamte Laufbahn einer Bewegung bestünde aus unteilbar kleinsten Abschnitten, wäre eine kontinuierliche Bewegung undenkbar, stattdessen müsste sie ruckartig von sich gehen. Für Zenon gibt es dagegen gar keine Bewegung, da sich der bewegende Körper in jedem Abschnitt in Ruhe befindet.
Da Aristoteles jedoch von dem unbezweifelbaren Faktum der Bewegung ausgeht, kommt er zu der Schlussfolgerung, dass die Annahme der Diskontinuität den Begriff der Bewegung selbst aufhebt.
Die Kontinuität in der Bewegung zeigt sich jedoch nur, wenn man die Bewegung selbst mit der Zeit und der Größe in Verbindung setzt und diese aneinander misst.

In Bezug auf Zenons Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, meint Aristoteles, es wäre falsch zu behaupten eine „unendliche Strecke“ lasse sich nicht in begrenzter Zeit durchlaufen, denn gerade so, wie die Strecke auf Grund ihrer unendlich vielen Teile als unendlich aufgefasst wird, ist auch die Zeit unbegrenzt teilbar und somit eigentlich in dem selben Sinne wie die Strecke unendlich. In weiterer Folge löst Aristoteles Zenons paradoxes Problem auf, indem er dem Kontinuum nur die Möglichkeit der unbegrenzten Teilung zugesteht. Bei einer wirklichen Teilung in verschiedene Stücke, verliert das Kontinuum seine Kontinuität.

„Wenn jemand eine zusammenhängende (Linie) in zwei Halbstücke teilt, so benutzt der die eine Marke wie zwei, er macht sie nämlich zu Anfang und Ende. […] Nimmt man aber so auseinander, so sind weder die Linie noch die Bewegung (auf ihr) noch zusammenhängend; fortlaufende Bewegung steht doch in Verbindung mit / zusammenhängender (Erstreckung), in so einem Zusammenhängenden sind zwar unendlich viele Halbstücke enthalten, nur nicht in Wirklichkeit, sondern bloß der Möglichkeit nach.“ [22]

Somit ist eine Strecke, wie auch die Zeit, in Wirklichkeit immer ungeteilt, es existiert nur die Möglichkeit der Teilung. Diese Teilung ist eine Tätigkeit des Denkens, welche erst die „unendliche Struktur“ des Kontinuums zum Vorschein bringt. Die Wahrnehmung selbst erkennt Kontinuität immer nur als ungeteiltes Ganzes, deswegen bereiten uns die Zenonischen Paradoxien in der bloßen Wahrnehmung auch keinerlei Schwierigkeiten.

---

[22] Aristoteles – Physik, 8. Buch 263 a , (S. 215/217)

5.2 Ein Kontinuum aus Punkten[*]

Obwohl Aristoteles mit mengentheoretischen Begriffen und der Auffassung des Kontinuums als aktual-unendliche, überabzählbare Menge von Punkten, natürlich nicht vertraut war, lässt sich feststellen, dass er jede Deutung des Kontinuums als Punktmenge ausgeschlossen hat. Es ist bekannt, dass sich Aristoteles gegen die Existenz einer aktualen Unendlichkeit ausgesprochen hat. Es wäre jedoch nicht richtig auf Grund dieser Tatsache Aristoteles eine Auffassung des Kontinuums als potentiell-unendliche Punktmenge zuzuschreiben, weil er immer nur von der Möglichkeit der unbegrenzten Teilung spricht, die Teilung selbst wird jedoch niemals wirklich angewendet.

Die Ablehnung des Punktekontinuums galt über 2000 Jahre als unwiderruflich. Noch Immanuel Kant sprach sich gegen eine atomistische Betrachtung des Kontinuums aus. In der *„Kritik der reinen Vernunft“* bezeichnet er Raum und Zeit als fließende (kontinuierliche) Größen, welche sich nicht in einfachere Bestandteile zerlegen lassen. Ein Raum kann also wieder nur aus weiteren Räumen bestehen, die Zeit nur aus weiteren Zeiten.
Punkte sind für Kant nur Grenzen,

„[…] bloße Stellen ihrer Einschränkung; Stellen aber setzen jederzeit jene Anschauungen, die sie beschränken oder bestimmen sollen, voraus, und aus bloßen Stellen, als aus Bestandteilen, die noch vor dem Raume oder der Zeit gegeben werden können, kann weder Raum noch Zeit zusammengesetzt werden.“ [23]

Trotz der Einwände gegen ein aus Punkten bestehendes Kontinuum erscheint uns das Punktekontinuum in der modernen Mathematik als etwas Selbstverständliches. Es wird von einem arithmetischen Kontinuum gesprochen, also einem aus Zahlen (nämlich den reellen Zahlen) bestehenden Kontinuum. Dabei kann jeder Zahl ein Punkt auf einer Geraden (die stets als kontinuierlich gedacht wird) zugeordnet werden und die gerade Linie kann somit arithmetisch beschrieben werden.[24]

---

[*] Deiser – Reelle Zahlen
Kant – Kritik der reinen Vernunft
Seeck – Die Naturphilosophie des Aristoteles

[23] Kant – Kritik der reinen Vernunft, S.211

[24] Siehe: 6. Die klassischen Definitionen der irrationalen Zahlen (besonders 6.6 Dedekinds Schnitte)

Über die, sich aus einem arithmetischen Kontinuum ergebenden paradoxen Konsequenzen, sieht man meist kühl hinweg. Gerade das ist ein wichtiger, meist unberücksichtigter Punkt, denn das Kontinuum aus Zahlen, oder Punkten ist nicht entstanden, weil sich die bekannten Widersprüche aufgelöst hätten, sondern aus einer Notwendigkeit heraus. Es war die Notwendigkeit, wegen der zunehmenden Bedeutung der Analysis, nicht zuletzt durch die Infinitesimalrechnung, analytische Sätze zahlentheoretisch formulieren zu können. Dazu wiederum war eine arithmetische Einführung der reellen Zahlen von Nöten. Somit wird nun auch klar, warum die griechischen Mathematiker der Antike eine Arithmetisierung des Kontinuums überhaupt nicht durchführen konnten. Es fehlte ihnen der Zahlbegriff für irrationale Größen. Das Kontinuum existierte für sie nur in der Anschauung, war also nur geometrisch gegeben.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs vollzog sich nur sehr langsam und mühsam. Erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte sich, mit den klassischen Konstruktionen der reellen Zahlen, welche der mathematischen Anschauung des eindimensionalen Kontinuums entsprechen sollen, die Arithmetisierung des Kontinuums durch. Dies geschah anfangs jedoch nicht ohne Widerstände, da die aktual-unendliche Punktmenge nach wie vor mit Paradoxien zu kämpfen hat. Grund dafür ist das unvermeidliche Auftreten der aktualen Unendlichkeit bei der Arithmetisierung des Kontinuums.

5.3 Die Einbeziehung des Aktual-Unendlichen[*]

Für Lorenzen war die Erweiterung des Zahlbegriffs das Ausschlaggebende für die Einbeziehung des Aktual-Unendlichen. Während in der Antike die Arithmetik geometrisiert wurde, inkommensurable Größen geometrisch dargestellt wurden, beginnt seit dem 19 Jahrhundert ein umgekehrter Prozess, die arithmetische Begründung der Irrationalzahlen. So sollte auch die Vorstellung einer kontinuierlichen Menge, wie die der reellen Zahlen, die geometrisch als Gerade interpretiert wird, arithmetisch fassbar werden. Das so genannte arithmetische Kontinuum soll nun jeder Strecke, beziehungsweise jedem Punkt genau eine rationale oder irrationale Zahl zuschreiben. Wird aber eine kontinuierliche Menge oder Strecke als vollständige Punktmenge verstanden, dann natürlich nur unter der Voraussetzung der Existenz des Aktual-Unendlichen.

„Das arithmetische Kontinuum ist nun das Musterbeispiel einer aktualistisch aufgefassten Unendlichkeit. Es gibt kein Schema, nach dem die reellen Zahlen zu konstruieren wären in dem aristotelischen Sinne, dass immer ein Anderes und wieder ein Anderes genommen wird, das eben Genommene aber immer ein Endliches ist. Man stellt sich vielmehr die reellen Zahlen als alle auf einmal wirklich vorhanden vor –[...]“ [25]

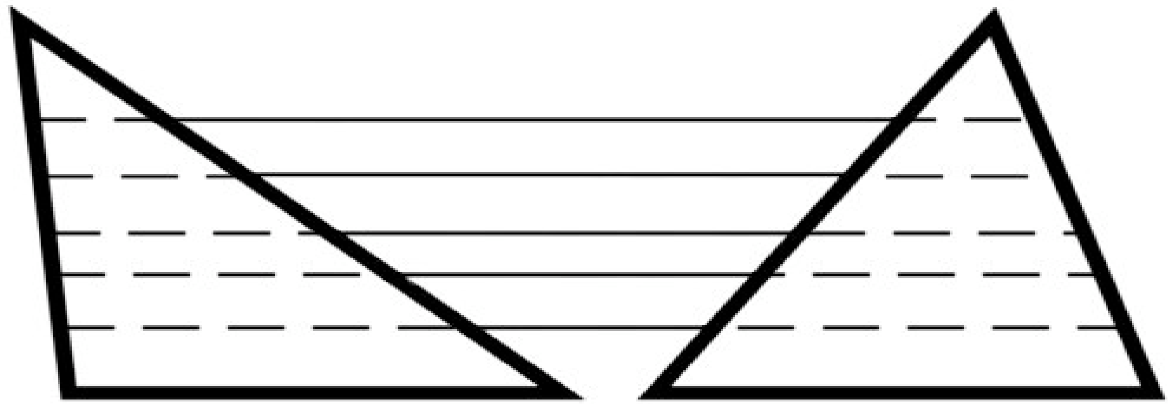
Das Aktual-Unendliche übernimmt nach Lorenzen jedoch gleich zweimal eine tragende Rolle. Nicht nur bei der Zusammenfassung aller reellen Zahlen, sondern auch in der Vorstellung einer reellen Zahl selbst, wird es verwendet. Bei der Auffassung, jeder abgeschlossenen Strecke entspräche genau ein Punkt, wird nämlich insgeheim vorausgesetzt, dass alle Punkte selbst genau bestimmbar wären. Eine irrationale Zahl würde demzufolge so vorgestellt, als ob sämtliche der unendlich vielen Ziffern bekannt wären.

Obwohl die Zerlegung des Kontinuums in eine aktual-unendliche Menge erst Mitte des 19. Jahrhunderts mit Hilfe einer strengen arithmetischen Definition der Irrationalzahlen zu begründen versucht wurde, arbeitete man auch schon früher, ohne solche Definitionen, mit einer atomistischen Auffassung vom Kontinuum.

[*] Lorenzen – Das Aktual-Unendliche in der Mathematik
[25] Lorenzen – Das Aktual-Unendliche in der Mathematik, S. 8

Einer, welcher sich das Aktual-Unendliche für seine mathematischen Theorien zu Nutzen machte, war Galileis Schüler Bonaventura Cavalieri (* 1598 wahrscheinlich in Mailand; † 3. Dezember oder 30. November 1647 in Bologna). In seinem geometrisch motivierten, Cavalierischen Prinzip fasst er eine Strecke als aktual-unendliche Menge von Punkten, eine Fläche als aktual-unendliche Menge von Strecken und einen Körper als aktual-unendliche Menge von Flächen auf.

Er stellte fest, dass Dreiecke mit derselben Grundkante und Höhe flächengleich sein müssen, da jeder Schnitt von Geraden, die parallel zur Grundfläche sind, mit den Dreiecken an jeder Höhe exakt dieselbe Länge aufweisen.



Der Flächeninhalt der Dreiecke wird in diesem Fall als Summe aller Schnitte aufgefasst. Eine gegebene Fläche, von endlichem Flächeninhalt, wird somit als aktual-unendliche Menge (beziehungsweise Summe), da die Fläche ja abgeschlossen ist, von Strecken interpretiert.
Die Gleichheit der Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Grundlinie und Höhe kann man leicht anschaulicher nachweisen. Dazu verdoppelt man erst die Dreiecke, so dass Parallelogramme entstehen. Der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms entspricht nun genau dem des Rechtecks aus Grundlinie und Höhe, womit auch die Flächeninhalte der ursprünglichen Dreiecke übereinstimmen müssen.
Das Cavalierische Prinzip kann jedoch auch im Raum angewendet werden. Danach haben Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe auch dasselbe Volumen, da jede Ebene, die zur Grundfläche parallel ist, mit den Pyramiden flächengleiche Schnitte hat. Im Raum findet man jedoch nicht so leicht einen ähnlich leichten Ausweg (wie im $\mathbb{R}^2$) diesen Sachverhalt zu beweisen.
Cavalieri selbst konnte keinen strengen Beweis seines Prinzips angeben, er stützte sich auf die bereits in ähnlicher Form von Kepler verwendete Methode der Indivisibilien.

5.4 Paradoxien des arithmetischen Kontinuums*

Ein mathematisches Kontinuum als Punktmenge zu denken erscheint uns heute fast als selbstverständlich. Über die Konsequenzen, welche unter Anderen gerade Aristoteles herausgearbeitet hat, wird oft hinweggesehen.
Alleine schon auf Grund der Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen, also sämtlicher Punktindividuen des Kontinuums, ist es schwierig, sich diese Menge irgendwie vorzustellen.

„Auf der rationalen Zahlengerade liegen benachbarte Zahlen unendlich eng nebeneinander. Aber auf der reellen Zahlengeraden liegen benachbarte enger als unendlich eng zusammen. Selbst wenn wir Spiegel benutzen würden, wäre dies eine Illusion, die wir nicht erzeugen könnten. Betrachten Sie zum Beispiel zwei Spiegel, die sich gegenüber stehen. Wenn Sie in den einen schauen würden, so könnten Sie ein wiederholtes Bild des anderen sehen. Stellen Sie sich vor, dass jedes Bild eine Markierung auf einer Zahlengerade ist. Wenn Sie die Spiegel nun näher zusammenrücken, werden / die Spiegelungen zusammengedrückt und der Platz zwischen den Spiegeln schrumpft. Der Platz zwischen den Markierungen auf einer rationalen Zahlengeraden würde dem Platz zwischen den Bildern entsprechen, wenn die Spiegel unendlich nah beieinander stünden – mit anderen Worten, sich berühren. Der Platz zwischen den Markierungen auf einer reellen Zahlengeraden dagegen würde dem Platz zwischen den Bildern entsprechen, wenn die Spiegel sich noch näher wären als im Berührungszustand. Aber dies kann nur dann eintreten, wenn die Spiegel ineinander übergehen, wie Alice im Wunderland, die in den Spiegel eintritt.“ [26]

Die Gesamtanzahl der Punktindividuen des Kontinuums muss wegen der Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese [27] immer eine „Dunkelziffer“ bleiben.

Obwohl die Menge der irrationalen Zahlen selbst überabzählbar ist, lässt sich zwischen je zwei Punkten des Kontinuums immer eine rationale Zahl finden. Somit könnten die rationalen Zahlen als Lücken zwischen irrationalen Zahlen betrachtet werden. Merkwürdigerweise ist jedoch die Anzahl der „Lücken“ abzählbar, während die „lückenbildenden Elemente“ nicht abgezählt werden können. Das grundlegende Problem ist, dass wir uns von der unmöglichen

---

* Deiser – Reelle Zahlen
Guillen – Brücken ins Unendliche
Locher – Merkwürdiges vom Kontinuum

[26] Guillen – Brücken ins Unendliche, S.40/41

[27] Vgl.: 7. Cantors Beitrag

Vorstellung einer eineindeutigen Zuordnung der Menge der „Lücken“ und der Menge der „lückenbildenden Elemente“ täuschen lassen.
Besteht das Kontinuum aus unteilbaren Punkten ohne Ausdehnung, so stellt sich außerdem die Frage, wie eine Zusammenfassung derselben, sei sie noch so groß, beziehungsweise überabzählbar, beispielsweise eine Strecke vom Maß 1 ergeben kann, wenn doch jeder einzelne Punkt die Länge 0 aufweist.

Weiters ist es ebenso möglich, durch die Funktion $f(x) = (x, x)$ das Einheitsintervall auf die Diagonale des Einheitsquadrats bijektiv abzubilden. Somit existiert eine stetige, „Punkt für Punkt-Abbildung“ einer Strecke der Länge 1 auf eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$, wodurch zwei unterschiedlich lange Strecken aus gleich vielen Punktindividuen bestehen.

5.5 Die Diskrepanz zwischen einem anschaulichen und einem arithmetischen Kontinuum*

Im Folgenden sollen kurz zwei „moderne“ Betrachtungen über die Unvereinbarkeit des Kontinuums in der Anschauung mit dem mathematischen Punktekontinuum dargestellt werden. Zunächst das von dem deutschen Mathematiker Hermann Weyl (* 9. November 1885 in Elmshorn; † 8. Dezember 1955 in Zürich) als dynamisches Wesen bezeichnete Merkmal des Kontinuums. Weyl glaubte, eine seiner Anschauung des Kontinuums entsprechende, mathematische Theorie in Brouwers intuitionistischen Arbeiten, welche er sehr schätzte, zu finden.
Im Anschluss soll noch der Grundgedanke der Gegenüberstellung des anschaulichen und des mathematischen Kontinuums von dem deutschen Philosophen und Kant-Experten Friedrich Kaulbach (* 19. Februar 1912 in Nürnberg; † 10. Mai 1992 in Heilsbronn) erwähnt werden.[28]

Weyl untersucht das Verhältnis zwischen einem anschaulich gegebenen und einem mathematischen Kontinuum anhand der Zeit. Er bezieht sich dabei jedoch nur auf die subjektiv erlebte Zeit, in Form von Bewusstseinserlebnissen, die er der objektiven gegenüberstellt.
Um eine Beziehung zwischen dieser „phänomenalen Zeit“ und dem Zahlbegriff herzustellen soll jeder Moment, jedes „Jetzt“ in der Zeit einem mathematisch definierten Punkt, dem Zeitpunkt, entsprechen.[29] Weyl ist jedoch überzeugt, dass die Zeitanschauung selbst diese Korrespondenz zwischen Zeitpunkt und reellen Zahlen nicht rechtfertigen kann:

„Wohl die Kategorie der natürlichen Zahlen, nicht aber das Kontinuum, wie es in der Anschauung gegeben ist, kann das Fundament einer mathematischen Disziplin abgeben.“ [30]

Wie Aristoteles bemängelt er, dass das anschauliche Kontinuum schon am Begriff des Punktes selbst scheitert. So stellt sich beim Beispiel unseres Bewusstseinsstroms in der Zeit die Frage, woher die konkrete Dauer jedes Erlebens kommen mag (wenn die einzelnen Zeitpunkte isoliert voneinander existieren).

---

* Emrich – *Die Logik des Unendlichen*
Kaulbach – Philosophisches und mathematisches Kontinuum
Weyl – Das Kontinuum

[28] Siehe dazu Friedrich Kaulbachs Aufsatz: *„ Philosophisches und mathematisches Kontinuum“* , in: Rationalität, Phänomenalität, Individualität, Bonn 1966

[29] Vgl. dazu das „Cantorsche Korrespondenzaxiom“

[30] Weyl – Das Kontinuum, S.68

Bei jedem Wahrnehmungserlebnis eines bestimmten Moments hat man nicht nur das derzeitige Wahrnehmungserlebnis, sondern gleichzeitig Erinnerungen an andere Wahrnehmungserlebnisse von anderen vergangenen Momenten. Bei diesen zu letzt genannten Wahrnehmungserlebnissen kommen jedoch wieder Erinnerungen an frühere Momente hinzu. Dieser Verlauf kann nun unendlich oft fortgesetzt werden, wodurch die kontinuierliche Wahrnehmung somit *„[…] aus unendlichvielen, ineinander geschachtelten und aufeinander bezogenen Systemen unendlichvieler Erinnerungen […]* [31] bestünde.
Eine Vorstellung von Wahrnehmungen dieser Art wäre jedoch vollkommen widersinnig und somit kann auch die kontinuierliche Bewegung nicht mit Hilfe von einzelnen, isolierten Punktindividuen beschrieben werden. Obwohl wir selbst jederzeit wahrnehmen, ist es äußerst schwierig diese erlebte Kontinuität der Erfahrungen zu beschreiben. Weyl sieht das Jetzt, das beständig Daseiende, als ein immer Neues, sich ständig wandelndes. Das Bestimmen eines exakt fixierten Zeitpunkts widerspricht dem Wesen der Zeit. So ist es für jedes anschaulich gegebene Kontinuum unmöglich einen einzelnen Punkt aufzuweisen. Darüber hinaus können diese Punkte nicht auf Grund ihrer Eigenschaften charakterisiert werden, da sie selbst, im Gegensatz zu den Punkten eines mathematischen Kontinuums, welche selbst einzelne Individuen sind, keine Existenzform haben.

Friedrich Kaulbach war auch der Ansicht, das anschauliche Kontinuum könne nicht durch die Menge der reellen Zahlen erfasst werden. Das Problem ein Kontinuum aus Punkten als ein „Zusammenhängendes“ zu denken versucht er zu lösen, indem die Gerade nun nicht mehr als Aggregat von Punkten aufgefasst wird, sondern als Zusammenhang, an dem auch Punkte notwendigerweise angebracht werden können. Dieser Zusammenhang, beziehungsweise das Kontinuum, soll als eine Art modellierter Hintergrund gedacht werden.

[31] Weyl – Das Kontinuum, S.69

6 Die klassischen Definitionen der Irrationalzahlen

6.1 Der Grenzwertbegriff*

Der Grenzwertbegriff steht im engen Zusammenhang mit den arithmetischen Irrationalzahltheorien, da die irrationalen Zahlen selbst, als Grenzen von rationalen Zahlenfolgen beschrieben werden können.

Der Ursprung des Begriffs der Grenze ist einmal mehr in der Geometrie der antiken griechischen Mathematik zu finden. Der Sophist Antiphon war der Meinung, ein Kreis lasse sich von einem ihm eingeschriebenen Vieleck mit genügend großer Seitenzahl genau beschreiben. Obwohl er die Unmöglichkeit, ein solches Vieleck tatsächlich zu finden, nicht erkannte, lieferte er die grundlegende Idee für die von Eudoxox von Knidos entwickelte Exhaustionsmethode.[32] Bei dieser Methode werden die Inhalte einzelner Figuren nicht gemessen, sondern nur untereinander verglichen. Wenn es nicht gelingt, eine berechenbare, inhaltsgleiche Figur zu einer gesuchten Figur zu finden (wie es bei der oben dargestellten Flächeninhaltsberechnung des Kreises der Fall ist), versucht man diese approximativ zu beschreiben, so dass der Unterschied ihrer Inhalte möglichst klein, beziehungsweise beliebig klein wird. John Wallis (* 3. Dezember/23. November 1616 in Ashford, Kent; † 8. November/28. Oktober 1703 in Oxford) verwendete in seinem Buch „*Arithmetica Infinitorum*“ von 1655 als einer der Ersten diese Idee für die arithmetische Definition der Grenze einer unbegrenzt fortsetzbaren, konvergierenden Zahlenfolge. Dabei sollte eine bestimmte Zahl a als Grenze einer unbegrenzt fortsetzbaren Zahlenfolge $a_n \, (n = 0,1,2,...)$ gelten, wenn die Differenz $a - a_n$ mit hinlänglich wachsenden Werten von n beliebig klein wird.[33]

Während es so gelang, den Grenzbegriff arithmetisch zu definieren, fehlte es an einer hinreichenden Bedingung um aus der Beschaffenheit einer Zahlenfolge auf die Existenz eines Grenzwerts der Folge schließen zu können.

---

* Heuser – Lehrbuch der Analysis
  Pringsheim – Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse (II. Grenzbegriff)

[32] Die Exhaustionsmethode wurde erst durch die im 17. Jahrhundert aufkommende Integralrechnung abgelöst.

[33] Vgl.: Pringsheim – Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse, II.12. Die Arithmetisierung des Grenzbegriffs)

Erst Cauchy gelang eine Definition einer konvergenten Folge, welche den Grenzwert nicht bereits zuvor voraussetzt, jedoch zugleich ein Kriterium liefert, welches für die Existenz einer bestimmten Grenze hinreicht. Sie ist bekannt unter dem Namen „Cauchysches Konvergenzkriterium“:

Die Folge $(a_i)_{i \in IN}$ *heißt* Cauchyfolge*, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *einen Index* n_0 *gibt, so dass für alle* $m, n > n_0$ *stets* $|a_m - a_n| < \varepsilon$ *bleibt.*[34]

Cauchy hat jedoch nicht bewiesen, dass diese Definition eine hinreichende Bedingung für die Grenzwertexistenz liefert, vielmehr hat er es als selbstverständlich angenommen. Erste Beweise finden sich dann erst bei den arithmetischen Theorien der irrationalen Zahlen von Weierstraß, Cantor und Dedekind.

Nebenbei sei erwähnt, dass sich am modernen Grenzwertbegriff, wie er von Cauchy definiert wurde, auch eine sehr schöne „Anwendung“ des Potentiell-Unendlichen zeigt.

Wenn bei konvergenten Folgen von einer beliebig nahen Annäherung der Folgeglieder an den Grenzwert gesprochen wird, tritt das Unendliche nämlich stets als ein Veränderlich-Endliches auf.

Bei divergenten Folgen sagt man die Folgeglieder werden mit unbegrenzt wachsendem Index unendlich groß, statt von einer unendlich großen Zahl zu sprechen, womit das Unendliche nur als ein „Werdendes“ vorkommt.

[34] Vgl.: Heuser – Lehrbuch der Analysis, S. 156, 157

6.2 Überblick der ersten Konstruktionen des reellen Zahlkörpers*

Schon in seinen mathematischen Grundvorlesungen der 1860er Jahre erkannte Weierstraß die Notwendigkeit, die reellen Zahlen arithmetisch zu definieren um Sätze der Analysis streng beweisen zu können. So führte er reelle Zahlen als konvergente rationale Zahlenfolgen ein, wobei erst seine Schüler diese Ideen publizierten. Einer der bekanntesten Schüler war Cantor, der 1872 als erster eine ähnliche, jedoch eigenständige Konstruktion darstellte.
Kurz darauf führt Dedekind seine „Schnitte“ in der kleinen Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“ ein, wobei Cantor in einer späteren Schrift[35], wo er auch die Dedekindsche und Weierstraßsche Einführungsart wiedergibt und erläutert sowie seine eigenen Ideen nochmals modifiziert, betont, als erster eine arithmetische Konstruktion der reellen Zahlen publiziert zu haben. Außerdem findet Cantor seine Definitionsform, neben der von Dedekind und Weierstraß, am „[...] *einfachsten und natürlichsten und man hat an ihr den Vorteil, dass sie sich dem analytischen Kalkül am unmittelbarsten anpasst.“* [36]

Das auffälligste gemeinsame Merkmal der drei Beschreibungen der reellen Zahlen ist die Verwendung der rationalen Zahlen, welche stets als gegeben angesehen werden.[37] Bei der Weierstraß- und Cantorschen Einführungsart werden Folgen rationaler Zahlen betrachtet, hingegen stellt Dedekind die reellen Zahlen als Teilmenge der rationalen dar.

Dedekind und vor allem Cantor ist die vollständige Arithmetisierung des Kontinuums zu verdanken. Beide erwähnen in ihren Darstellungen, dass unbedingt ein Axiom von Nöten ist, welches jedem Element der reellen Zahlen eine bestimmte Strecke, beziehungsweise einen bestimmten Punkt auf der Geraden zuordnet. Erst durch dieses Axiom, bekannt als Cantorsches „Korrespondenzaxiom“, ist die Stetigkeit der Geraden gewährleistet.

---

* Ebbinghaus – Zahlen
  Deiser – Reelle Zahlen

[35] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten

[36] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, S.565

[37] In der Mengenlehre ist es üblich die Struktur der natürlichen Zahlen nur mit Hilfe der leeren Menge aus den Axiomen herzuleiten, um in Folge die ganzen, rationalen und schlussendlich reellen Zahlen zu gewinnen.

6.3 Die Weierstraßsche Einführung der Irrationalzahlen *

Zunächst soll die Weierstraßsche Definition der reellen Zahlen, wie sie Cantor in seiner Arbeit: *„Über unendliche Punktmannigfaltigkeiten“* dargestellt hat, wiedergegeben werden. Weierstraß arbeitete auch mit dem Intervallschachtelungsprinzip, das eine zentrale Vorstellung vom Begriff der reellen Zahlen mit sich bringt. Da es außerdem zur Definition der reellen Zahlen selbst verwendet werden kann, soll es anschließend kurz erläutert werden.

6.3.1 Konstruktion der reellen Zahlen mittels Aggregate

Ist (a_n), wobei hier wie auch im Folgenden stets $n \in \mathbb{N}$ gilt, eine Folge positiver, rationaler Zahlen $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ und bleibt weiters die Summe jeder endlichen Anzahl von Folgegliedern unter einer angebbaren Grenze, so heißt (a_n) ein Aggregat. Das bedeutet auch, dass a_n gegen Null strebt, wenn n beliebig groß wird, also ist $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Um das Größer-, Kleiner-, beziehungsweise Gleichsein zweier Aggregate (a_n) und (a_n') zu bestimmen, vergleicht man das Auftreten aller $\frac{1}{n}$ in den beiden Folgen.

So können sich drei mögliche Fälle ergeben:

Erstens kann es der Fall sein, dass alle $\frac{1}{n}$ in beiden Folgen gleich oft vorkommen, zweitens kann es sein, dass von einem gewissen n an, in der ersten Folge $\frac{1}{n}$ stets öfter enthalten ist als in der zweiten und drittens kann $\frac{1}{n}$ in der zweiten stets öfter als in der ersten enthalten sein.

Wenn b die durch das Aggregat (a_n) definierte Zahl ist und b' für (a_n') steht, gilt $b = b'$ genau dann wenn der erste Fall eintritt, im zweiten gilt $b > b'$ und im dritten $b < b'$.

*Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, 5. Fortsetzung, §9
Ebbinghaus – Zahlen

Wie dieses „Vergleichen aller $\frac{1}{n}$ " durchzuführen ist erwähnt Cantor allerdings nicht. Eine Möglichkeit wäre, sich zunächst ein bestimmtes $\frac{1}{n}$ auszuwählen. Auf Grund der Konvergenz der Folgen lässt sich für jedes Aggregat ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, ab welchem alle weiteren Folgeglieder kleiner als $\frac{1}{n}$ sind. Nun wird die Summe aller Glieder, deren Indizes kleiner als n_0 sind, (dies müssen stets endlich viele sein) berechnet. Weiters bestimmt man, wie oft die Brucheinheit $\frac{1}{n}$ maximal in der Summe enthalten ist. Diese Anzahl ermittelt man für zwei beliebige Aggregate (a_n) und $(a_n^{'})$ und vergleicht sie anschließend. In dieser Form soll auch der Vergleich zu jedem, beliebig gewähltem $\frac{1}{n}$ durchgeführt werden.

Die Definition der Addition von $b + b'$ ergibt sich bei der Vereinigung von (a_n) und $(a_n^{'})$ zu der Folge $(a_n, a_n^{'})$, dargestellt durch $a_1 + a_1^{'}, a_2 + a_2^{'}, a_3 + a_3^{'}, \ldots$. Analog wird die Multiplikation und Division eingeführt.

Cantor betont, dass Weierstraß die neu eingeführte Zahl nicht etwa mit der Summe einer unendlichen Folge rationaler Zahlen gleichsetzt, vielmehr kommt nur die Aufsummierung über endliche Summen zur Anwendung.

„*Es würde hierin ein logischer Fehler liegen, weil vielmehr die Definition der Summe erst durch Gleichsetzung mit der notwendig vorher schon definierten Zahl b gewonnen wird.*" [38]

Cantor meint in der Vermeidung dieses Fehlers die Beseitigung aller Unklarheiten und Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Begriff der irrationalen Zahlen zu sehen, da diese nun in derselben Deutlichkeit der rationalen Zahlen erscheinen.

[38] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, S.566

6.3.2 Das Prinzip der Intervallschachtelung

Die Idee der Intervallschachtelung wurde im 19. Jahrhundert vor allem von Weierstraß und Bolzano für Beweise von Sätzen der Analysis herangezogen. Unter anderem wurde sie für den Beweis des nach ihnen benannten Satzes, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge enthält, verwendet, woraus folgt, dass jede konvergente Folge reeller Zahlen eine Cauchyfolge beziehungsweise Fundamentalfolge ist.[39] Auch die Umkehrung der letzten Folgerung kann bewiesen werden, womit ein sehr wichtiger Satz der Analysis gewonnen ist, der besagt, dass jede Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist.[40]

Das Prinzip der Intervallschachtelung selbst war jedoch schon den Pythagoreern bekannt. Da das geometrischen Mittel $\sqrt{a \cdot b}$ zweier Zahlen a und b durch das harmonische Mittel $\frac{2ab}{a+b}$ einerseits und das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ andererseits eingegrenzt, beziehungsweise eingeschachtelt werden kann, ergibt sich eine Berechnung von Näherungswerten von Wurzeln, wenn man den Spezialfall $b = 1$ betrachtet. So ergeben sich die Näherungswerte für $\sqrt{a}$, wenn $a > 1$ ist, nach folgendem Verfahren:

$$a > \sqrt{a} > 1,$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(a+1) > \sqrt{a} > \frac{a}{x_0},$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) > \sqrt{a} > \frac{a}{x_1},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) > \sqrt{a} > \frac{a}{x_2}.$$

[39] Für die Definition der Fundamentalfolge siehe Cantors Definition der Irrationalzahlen.
[40] Bekannt als „Cauchysches Konvergenzprinzip“.

6.3.3 Einführung der reellen Zahlen über Intervallschachtelungen*

Bei der Einführung der reellen Zahlen durch Intervallschachtelungen betrachtet man eine Folge von Intervallen $I_1, I_2, I_3, ..., I_n, ...$, von denen jedes komplett im vorhergehenden enthalten ist. Außerdem soll die Länge des n-ten Intervalls mit wachsendem n gegen Null konvergieren, also beliebig klein werden.

Sei nun eine Intervallschachtelung in $\mathbb{Q}$, also eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_1 = [r_1, r_1], I_2 = [r_2, r_2], ...$ mit $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ gegeben. In dieser Intervallschachtelung, die mit $[r_n, s_n]$ bezeichnet werden soll, liegt höchstens eine rationale Zahl, welche in allen Intervallen enthalten ist. Falls so eine rationale Zahl, bezeichnen wir sie mit s, für $[r_n, s_n]$ existiert, ist s völlig eindeutig durch $[r_n, s_n]$ bestimmt und somit kann man $[r_n, s_n]$ synonym für s verwenden. Es gibt aber auch Intervallschachtelungen, wie zum Beispiel $[e_n, e'_n]$ mit $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $e'_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, die keine solche rationale Zahl s enthalten. Verlangt man, dass jede Intervallschachtelung eine wohlbestimmte Zahl definiere, gelingt es somit auch die übrigen, irrationalen Zahlen zu definieren, indem sie, wie die rationalen Zahlen durch die Bezeichnung der jeweiligen Intervallschachtelung selbst ersetzt werden. Somit bestimmt die oben erwähnte Schachtelung $[e_n, e'_n]$ die nach L. Euler benannte reelle Zahl $e = 2{,}71828...$.

---

* Ebbingaus – Zahlen (S.37-39)
Knopp – Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen

6.4 Cantors Wirklichkeit der Zahlen*

Cantor vergleicht die Wirklichkeit der ganzen Zahlen, endlicher wie unendlicher, mit der Realität von irgendwelchen Begriffen und Ideen. Weiters unterscheidet er die intrasubjektive oder immanente Realität, welche sich nur in unserem Verstand manifestiert, von der transsubjektiven oder transienten Realität, welche in der Form von Abbildern oder Vorgängen in Beziehung zur Außenwelt steht. Wenn auch die Auffindung der transienten Realität eine oft schwierige und mühsame Aufgabe ist, kommt sie immer gemeinsam mit einer immanenten Wirklichkeit vor. Grund dafür ist die Einheit des Alls. Der Mathematiker braucht sich nicht abmühen, zu jeder immanenten Realität ihr Gegenstück zu finden beziehungsweise zu prüfen. Diese alleinige Beschäftigung mit den gedanklichen, ideellen Begriffen zeichnet die Mathematik vor allen anderen Wissenschaften aus und Cantor bezeichnet sie deshalb als „freie“ Wissenschaft.

Diesem Charakteristikum sollte die Mathematik auch treu bleiben und deshalb wäre eine „[…] *überflüssige Einengung des mathematischen Forschungstriebes […]*“ [41] eine große Gefahr.

Für Cantor sind neben den endlichen ganzen Zahlen ebenso die rationalen, irrationalen und komplexen Zahlen wirklich existent, wobei auch der Praxisbezug der neuen Begriffe wichtig ist, denn würden sie sich als unzweckmäßig erweisen, sollten sie ausgeschlossen werden.

6.4.1 Cantors Fundamentalfolgen

Cantors erste Fassung einer Definition der Irrationalzahlen findet sich in der Arbeit: *„Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“*. Schon 1883 stellt er eine weitere Festlegung in dem umfangreichen Werk *„Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten“* vor, in dem er auch die Definitionen von Weierstraß und Dedekind wiedergibt.

Das Gemeinsame an den drei Einführungsarten ist die Ausgangsmenge, jene der rationalen Zahlen. Diese Menge wird nun, in jeweils unterschiedlicher Weise, mit neu zu definierenden Zahlen verknüpft, um diese erzeugen zu können. Dafür muss die Menge der rationalen Zahlen auch gewisse Bedingungen erfüllen, die vorher festgelegt werden.

---

* Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten 5. Fortsetzung, §8

[41] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, S.564

Cantor führt eine so genannte Fundamentalfolge[42] (a_ν), bestehend aus rationalen Gliedern $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ein, welche die Bedingung erfüllen sollen, dass zu jeder, noch so kleinen, vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ eine bestimme Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, ab welcher sämtliche Glieder, die größer als a_N sind, paarweise einen Unterschied aufweisen dessen Betrag kleiner als ε ist.

Man schreibt dafür: $\lim\limits_{\nu \to \infty}(a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0$ (bei beliebig gelassenem μ)

Einer solchen Folge (a_ν) wird eine neue Zahl b zugeordnet, wobei $b = 0$ gilt, falls für jede beliebig vorgegebene positive Zahl alle Glieder der Reihe ab einem gewissen ν, abhängig von dieser Zahl, an dem absoluten Betrag nach kleiner sind als diese Zahl. Sind sämtliche Glieder, ab einem gewissen ν an größer als eine bestimmt angebbare positive rationale Zahl, so ist $b > 0$, sind sie aber kleiner als eine bestimmt angebbare negative rationale Größe, definiert man das b als negativ.

Die Elementaroperationen werden analog zur Weierstraßschen Theorie eingeführt und anschließend die Relationen =, <, > für die neuen Größen definiert.

Nachdem Cantor diese Vorbereitungen getroffen hat, widmet er sich dem Grenzwertbegriff der unendlichen Folge. Wie bei der Weierstraßschen Definitionsform werden die, durch die Folgen neu erzeugten Zahlen, nicht von vorneherein als Grenzen definiert. Vielmehr verhält sich die Sache so, „[…] *dass durch unsere vorangegangenen Definitionen der Begriff b mit solchen Eigenschaften und Beziehungen zu den rationalen Zahlen bedacht worden ist, dass daraus mit logischer Evidenz der Schluss gezogen werden kann:* $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu$ *existiert und ist gleich b.*“ [43]

Cantor meint, mit seiner Definition die Existenz der neuen, irrationalen Zahlen gesichert zu haben, denn er schaffte es, „[…] *Definitionen von ihnen zu geben, durch welche ihnen eine solche Bestimmtheit und unter Umständen eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen verliehen wird, dass sie sich in gegebenen Fällen unter einander bestimmt unterscheiden lassen.*“ [44]

[42] Zu Ehren Cauchys auch Cauchyfolge genannt
[43] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, S.568
[44] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, S.563

6.5 Kritik von theologischer Seite (an Weierstraß und Cantor)*

Neben Mathematikern und Philosophen interessierten sich auch Theologen für Cantors Arbeiten, denen er selbst einige Exemplare seiner Werke zukommen ließ, da Cantor unter anderem auch die Frage nach dem in Gott realisierten Aktual-Unendlichen behandelte.
Mengentheoretische Fragestellungen beschäftigten die Theologen kaum. Eine Ausnahme war Constantin Gutberlet, der im Briefwechsel mit Cantor öfters auf einen gewissen Herrn Eberhard Illigens zu sprechen kam, von welchem außer einer Veröffentlichung des Buches *„Die unendliche Anzahl und die Mathematik“* von 1893 nicht viel bekannt ist. Obwohl Cantor Illigens Schaffen eher skeptisch gegenüberstand, hatte er nichts gegen eine Veröffentlichung von dessen Arbeiten[45], in welchen die Definitionen der Irrationalzahlen von Cantor, Weierstraß, und Dedekind kritisiert werden, einzuwenden. Im Folgenden sollen die wesentlichen Kritikpunkte, sowie Cantors Reaktion[46] auf Illigens Schriften behandelt werden.

Illigens stellt Cantors Folgerung von der Definition der Irrationalzahlen auf die Gleichsetzung derselben mit Grenzen unendlicher Reihen von rationalen Zahlen in Frage. Dabei sieht er nicht einmal eine Möglichkeit, die Existenz einer Grenze nachweisen zu können.
Das entscheidende Kriterium für die Ablehnung der von Cantor eingeführten Irrationalzahlen liegt für Illigens jedoch in deren Beschaffenheit. Während die rationalen Zahlen eine Vielheit, oder eine Quantität von Dingen bezeichnen, sind Cantors irrationale Zahlen völlig anderer Natur, denn „[…] *wenn der Zahlreihe* (a_v) *als neue, durch diese Zahlreihe zu definirende Zahl das Zeichen* b *zugeordnet wird, so ist, wenigstens vor Aufstellung weiterer Definitionen,* b *ein vollständig qualitätsloses Ding ganz unbekannter Gattung; was* b *an sich ist, kommt überhaupt nicht in Betracht;* b *wird eben lediglich als Zeichen dafür verwendet, dass durch irgend ein Gesetz die Zahlreihe* (a_v) *gegeben sei.*“[47]

---

* Cantor – Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen
Illigens – Zur Weierstrass'- Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen
Illigens – Zur Definition der Irrationalzahlen
Tap – Kardinalität und Kardinäle

[45] E. Illigens – Zur Weierstrass'- Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen, Beckum März 1888
E. Illigens – Zur Definition der Irrationalzahlen, Beckum März 1889

[46] G. Cantors Antwortschreiben - Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen, Halle Jänner 1889

[47] Illigens – Zur Weierstrass'- Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen, S.157

Auch durch Cantors Einführung der Relationen „größer“, „kleiner“ und „gleich“ zwischen zwei neuen Zahlen, sofern man diese auf „quantitätslose“ Begriffe übertragen darf, kann denselben keine Quantität zugeschrieben werden. Der Grund dafür liegt wieder in der Eigenart der irrationalen Zahlen. Betrachtet man nämlich zwei unterschiedlich große rationale Zahlen, so lässt sich stets ein bestimmter Überschuss an Einheiten, beziehungsweise Brucheinheiten der größeren, gegenüber der kleineren Zahl feststellen. Bei Cantors Zahlreihenzeichen ist ein solcher Vergleich unsinnig, denn „[…] *von einem Überschusse des Zahlreihezeichens* b *[...] über das „ kleinere“ Zeichen* b' *lässt sich natürlich gar nicht reden, in dem Zahlreihezeichen sind gar keine Einheiten vorhanden.“* [48]
Ebenso verhält es sich mit den Rechenoperationen der Addition und Subtraktion.

Illigens bemerkt, dass kein Grund für die Forderung besteht, die für die rationalen Zahlen geltenden Begriffe des „Größerseins“ einfach auf die neu definierten irrationalen zu übertragen. Entscheidend ist jedoch, dass, auch wenn die Größer-Relation von irrationalen Zahlen anders begriffen wird, sie doch auch auf die rationalen Zahlen anwendbar sein muss, da diese wiederum als Spezialfälle der allgemeinen Zahlen auftreten.

Auch der Versuch, einer rationalen Zahl a die konstante Folge $(a, a, a, ...)$ zuzuordnen, löst das Problem nicht, denn a würde hiermit seine Bezeichnung als Vielheit verlieren und als bloßes, willkürlich gesetztes Zeichen[49] degradiert werden.

Weiters ist Illigens der Meinung, dass sich das Verhältnis der rationalen Zahlen zu den Zahlreihezeichen auch dann nicht ändert, „[…] *wenn gezeigt wird, dass* b *minus* a_n *mit wachsendem* n *dem absoluten Betrage nach kleiner wird, als jede denkbare rationale Zahl* ρ *und diese Schlussfolgerung mit den Worten ausgedrückt wird, dass* b *für ein wachsendes* n *der Grenzwerth von* a *sei.“* [50]

[48] Illigens – Zur Weierstrass’- Cantor’schen Theorie der Irrationalzahlen, S.158

[49] Illigens meint man hätte mit demselben Recht für die oben erwähnte Zahlreihe ein anderes Zeichen, wie $\frac{a}{2}$ oder a^2 bestimmen können.

[50] Illigens – Zur Weierstrass’- Cantor’schen Theorie der Irrationalzahlen, S.159

Das auf diese Weise als Grenzwert definierte Zahlreihezeichen lässt sich nicht mit dem Begriff der Grenze bei rationalen Zahlen vergleichen. Illigens kann nicht akzeptieren, wie ein bloßes Zeichen als Grenze von Vielheiten, den rationalen Zahlen nämlich, aufgefasst werden kann, wenn es selbst durch keine Vielheit bezeichnet wird.
Somit folgt für Illigens endgültig, dass es Cantor nicht gelungen ist die Irrationalzahlen als wirkliche Zahlen, neben den rationalen, einzuführen, da eine Quantitätszuschreibung derselben ausbleibt. Diese ist jedoch eine notwendige Bedingung für die Existenz der Zahlen, was Illigens an einem einfachen Beispiel demonstriert. Die irrationale Zahl $\sqrt{3}$ muss die Gleichung $x^2 = 3$ erfüllen. Da nun 3 eine Vielheit ist, muss auch $\sqrt{3}$ durch eine solche darstellbar sein, weil sich eine Vielheit nur durch Verknüpfungen von Vielheiten und nicht von anderen Dingen ergibt. Man könnte beispielsweise $\sqrt{2}$ als Zahlreihezeichen auffassen und demnach eine Linie von $\sqrt{2}$ Metern als Grenze der Linien von 1.4, 1.41, 1.414, . . . Metern bezeichnen, was insofern durchaus evident ist, jedoch nur unter der, in diesem Falle nicht erfüllten Voraussetzung, dass $\sqrt{2}$ selbst schon eine Quantität bedeutet.

In seinem Antwortschreiben erkennt Cantor die von Illigens behauptete Quantitätslosigkeit der durch die Fundamentalreihen eingeführten irrationalen Zahlbegriffe $b, b', b'', \ldots$ an. Das Wesentliche ist jedoch, dass mit deren Hilfe konkrete Größen wie Strecken quantitativ genau bestimmt werden können.
Darüber hinaus merkt er an, Illigens Auffassung der Irrationalzahlen auf dieselbe Weise kritisieren zu können, denn wenn Illigens $\sqrt{3}$ als Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ anerkennt, so gilt es eine Zahl zu suchen, deren Quadrat 3 ist.

„$\sqrt{3}$ *ist also nur ein Zeichen für eine Zahl, welche erst noch gefunden werden soll* [somit keine Vielheit]*, nicht aber deren Definition.“* [51]

In einem weiteren Schreiben hebt Illigens nochmals die Sinnlosigkeit hervor, von einer Linie von $\sqrt{3}$ Metern zu sprechen, wenn $\sqrt{3}$ doch nur ein Zeichen für das Gegebensein einer Zahlreihe ist. Wieder führt er den möglichen Ausweg an, $\sqrt{3}$ Meter als Grenze der Linien von 1.7 Metern und 1.73 Metern etc. zu definieren, was aber nicht in Frage kommen kann, da

[51] Cantors Antwortschreiben – Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantor'schen Theorie der Irrationalzahlen, S. 154

die im eigentlichen Sinne gebräuchliche Bedeutung des Begriffs der Grenze nicht für bloße Zahlreihezeichen angewendet werden kann.

Auf Grund der Unzulänglichkeiten der Theorien von Cantor, Weierstraß und Dedekind und vielleicht auch wegen Cantors Bemerkung, es fehle Illigens selbst an einer geeigneten Definition, versucht sich dieser selbst. Das Ziel seiner Einführung ist natürlich die irrationalen Zahlen als eigentliche Größen, denen wirkliche Quantitätsbezeichnungen zukommen, darzustellen.

Der grundlegende erste und zugleich wichtigste Schritt ist für Illigens die ganz allgemeine Erklärung[52], was es für eine jede Quantität heißt kleiner, größer oder gleich zu sein als eine gewisse andere Quantität. Der schwierige Schritt nun den irrationalen Zahlen solche Quantitäten zuzuschreiben scheint für Illigens nicht allzu problematisch zu sein. Die irrationalen Zahlen werden als angenommene Grenzwerte von Cantors Fundamentalreihen eingeführt, wobei diese Grenzwerte einfach als Quantitäten zu denken sind, jedoch nichts anderes als gedachte Größen sind. Illigens verwendet weiters Cantors Definition der Gleichheit zweier Zahlreihen nur als Kriterium derselben.

Der wesentliche Unterschied zu Cantors Einführung ist die bei Illigens konkrete Zuordnung einer, zwar erdachten, aber bestimmten Größe zu einer Zahlreihe, während dieses zuordnende Zeichen bei Cantor, ganz unbestimmter Natur, „[…] *ein ganz beliebig zu wählendes Ding, dessen Abhängigkeit von der Zahlreihe durch keinerlei Gesetz bestimmt wird […]* [53], ist. Solche „unbestimmte Zeichen“ können auch durch das untereinander Vergleichen derselben der Größe nach, nicht zu echten „Größen“ werden. Dies ist vor allem dann unmöglich, wenn man sich, nach einem Beispiel von Illigens, die neuen Zeichen als Farben oder Laute denkt.

Cantor veröffentlichte kein weiteres Antwortschreiben, es ist jedoch anzunehmen, dass er mit Illigens Vorstellung der Einführung irrationaler Zahlen nicht einverstanden war, hat dieser doch gerade den Fehler begangen, vor dem er in seiner Abhandlung warnte.[54] Wenn Illigens einer Fundamentalreihe eine bestimmte Größe zuordnet, so muss diese Größe selbst schon vollständig gegeben sein, was natürlich bei einer irrationalen Zahl nicht möglich ist. Gerade deswegen lobte Cantor die Weierstraßsche Definition, da jener für die Bestimmung der irrationalen Größen stets ein endliches Verfahren, nämlich die Aufsummierung endlich vieler Summanden, benutzte, um somit die Irrationalzahl beliebig genau angeben zu können.

---

[52] Analog zur Definition der Gleichheit, des Größer- und Kleinerseins bei ganzen Zahlen
[53] Illigens – Zur Definition der Irrationalzahlen, S.454
[54] Vgl.: 6.4.1 Cantors Fundamentalfolgen

6.6 Dedekinds Schnitte *

Dedekind beschreibt gleich im Vorwort seiner Schrift *„Stetigkeit und irrationale Zahlen"* die Notwendigkeit einer rein arithmetischen Beschreibung und Definition des Grenzwertes einer unendlichen Reihe, wie des Begriffs der Stetigkeit, da die geometrische Anschauung allein „keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit machen kann".
Er meint, eine derartige Definition des Grenzwertes in seiner Beschreibung der Irrationalzahlen zu finden und damit das Prinzip der Stetigkeit zu erläutern.
Mit dieser Grundlegung lässt sich nun der, für die Infinitesimalanalysis fundamentale Satz, dass sich jede wachsende, beschränkte Folge mit Sicherheit einem Grenzwert nähern muss, arithmetisch beweisen.

Dedekind sieht den natürlichen Akt des Zählens als Ursprung der gesamten Arithmetik an. Aus ihm ergeben sich die natürlichen Zahlen, wobei jedes Element durch seinen Vorgänger bestimmt wird. Auf Grund der nur beschränkten Ausführbarkeit der Subtraktion ergeben sich in weiterer Folge die negativen ganzen Zahlen und in analoger Weise die rationalen Zahlen aus der beschränkten Ausführbarkeit der Division. Die rationalen Zahlen haben demnach die besondere Eigenschaft, dass alle vier Rechenoperationen (mit je zwei Elementen) ohne Einschränkung, immer ausführbar sind, wobei natürlich die Division durch Null ausgeschlossen ist. Die negativen und rationalen Zahlen entstanden durch den Akt der freien Schöpfung, die Rechengesetze dieser Zahlen lassen sich auf die Gesetze der Rechnungen mit natürlichen Zahlen zurückführen.

Dedekind vergleicht die rationalen Zahlen mit den Punkten einer geraden Linie. Unter der Bestimmung eines Ausgangspunktes und einer Längeneinheit kann nun für jede rationale Zahl eine entsprechende Länge und der zugehörige Endpunkt der Länge konstruiert werden. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, denn wie bereits die Pythagoreer wussten, lassen sich auch Längen konstruieren, welche nicht als Brüche darstellbar sind. Das einfachste Beispiel einer „irrationalen Länge" ist die Diagonale des Einheitsquadrats. Zu jeder Länge einer irrationalen Zahl gehört nun wiederum auch der entsprechende Endpunkt. Somit können die rationalen Zahlen alleine keine stetige Gerade beschreiben, da diese gewisse Lücken haben würde und

---

* Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten
Dedekind – Stetigkeit und irrationale Zahlen
Deiser – Reelle Zahlen

deshalb unvollständig wäre. Da es bekanntlich unendlich viele irrationale Längen gibt, befinden sich in der, aus den rationalen Zahlen gegebenen Geraden auch unendlich viele Lücken. Um nun ein arithmetisches Äquivalent für die, in der Geraden gegebene Stetigkeit, zu schaffen, bedarf es der Schöpfung der neuen, irrationalen Zahlen. Wie die rationalen Zahlen alleine aus den, bereits vorhandenen ganzen Zahlen entstanden sind, sollen nun auch die irrationalen alleine durch die rationalen Zahlen vollständig definiert werden.

Zunächst fragt Dedekind genauer nach dem Merkmal der Stetigkeit, wobei er von philosophischen Diskursen über den ununterbrochenen Zusammenhang von kleinsten Teilen absehen will. Schließlich findet er das Wesen der Stetigkeit in folgendem Prinzip:

„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“ [55]

Diese anschauliche, einleuchtende Vorstellung kann jedoch unmöglich bewiesen werden und muss daher als Axiom gelten. Es garantiert nun selbst die Stetigkeit, welche weder in der Geraden, noch im Raum notwendig vorhanden sein muss. Vielmehr bleibt jedoch die Möglichkeit, im Gedanken dieselbe doch anzunehmen, wobei diese Annahme in unserem Fall wieder nichts anderes, als die Schöpfung neuer Punktindividuen bedeutet.

Wie oben erwähnt, geht man nun von den rationalen Zahlen aus. Im Folgenden soll nun jede Einteilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen, A_1 und A_2, mit der Bedingung, dass jede Zahl von A_1 kleiner ist als jede Zahl von A_2, als Schnitt (A_1, A_2) bezeichnet werden.
Jede rationale Zahl a bringt nun einen Schnitt hervor, da sie die Menge aller übrigen Rationalzahlen in solche zwei Klassen teilt, dass eine Klasse davon (A_1) alle Zahlen enthält, welche $< a$ sind und die andere Klasse (A_2) all jene Zahlen, die $> a$ sind. Für jede Zahl der ersten Klasse A_1 gilt daher, dass sie kleiner ist als jede Zahl der zweiten Klasse A_2. Außerdem hat jede rationale Zahl a die besondere Eigenschaft, dass sie entweder die größte Zahl von A_1, oder die kleinste von A_2 ist.

[55] Dedekind – Stetigkeit und irrationale Zahlen, S.322

Ist umgekehrt ein Schnitt gegeben, welcher in einer Klasse eine größte oder kleinste Zahl besitzt, wird er gerade durch diese rationale Zahl selbst hervorgebracht.
Nun gibt es aber auch Schnitte, welche nicht durch rationale Zahlen definiert werden. Dedekind gibt folgendes Beispiel eines solchen Schnitts:
Ausgehend von einer positiven ganzen Zahl D, die nicht Quadrat einer ganzen Zahl ist, bildet man zwei Klassen, von denen die erste, A_1, alle rationalen Zahlen enthält deren Quadrat kleiner als D ist und die zweite, A_2, diejenigen Rationalzahlen, deren Quadrat größer als D ist. Da nun wieder jede Zahl von A_1 kleiner als jede Zahl von A_2 ist, erhält man durch diese Einteilung einen Schnitt (A_1, A_2).
Doch wie schon Euklid in den *„Elementen“* bewiesen hat, gibt es keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich D ist. Das bedeutet, dass der Schnitt durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird. Da jedes Quadrat einer rationalen Zahl entweder $< D$ oder $> D$ sein muss, gibt es weder eine größte Zahl in A_1, noch eine kleinste in A_2.
Nun soll jedes Mal, wenn ein Schnitt vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl bestimmt wird, eine neue, irrationale Zahl erschaffen werden, welche zugleich durch diesen Schnitt hervorgebracht und auch vollständig definiert wird. Der Unterschied zu den, aus rationalen Zahlen hervorgehenden Schnitten, ist, dass es weder eine größte Zahl in der ersten Klasse, noch eine kleinste in der zweiten Klasse gibt.
Das bedeutet zusammenfassend, dass jeder Schnitt genau eine rationale Zahl oder irrationale Zahl definiert, wobei der Schnitt selbst immer auf der rein rationalen Zahlengeraden ausgeführt wird. Über die Konstruktion der Schnitte der restlichen irrationalen Zahlen verliert Dedekind allerdings kein Wort.
Des Weiteren wird die Wohlordnung aller Schnitte, also der reellen Zahlen, gezeigt und in Folge die Anwendbarkeit der bekannten Rechengesetze durch Zurückführung auf die rationalen Zahlen.

6.7 Vergleich der drei klassischen Definitionen*

Bei dem Vergleich der Intervallschachtelung mit den Dedekindschen Schnitten und Cantorschen Fundamentalfolgen, liegt der praktische Vorteil der Intervallschachtelung in der Gewissheit über die Lage der irrationalen Zahlen. Während die, durch eine gewisse Schachtelung bestimmte reelle Zahl x durch die jeweiligen Intervalle selbst, innerhalb bestimmter Schranken fixiert wird, weiß man bei einer Fundamentalfolge (a_ν) durch die Angabe nur eines a_ν noch nichts über die Lage von x .
Der theoretische Nachteil liegt jedoch in der mühevollen Einführung der $\leq$-Relationen wie der Körpereigenschaften für die Addition und Multiplikation.

Cantor sieht es als äußerst vorteilhaft an, dass zwei Zahlen bei der Dedekindschen Theorie nur dann als gleich gelten, wenn die ihnen zugrunde liegenden Schnitte auch vollkommen identisch sind. Das resultiert aus der eindeutigen Darstellung der Zahlen bei dieser Definition, während es bei Cantor und Weierstraß mehrere, eigentlich unendlich viele Darstellungen von ein und derselben Zahl gibt, was wiederum bei der Betrachtung der Menge aller reellen Zahlen verwirrend wirken kann. Jedoch kann dies unter Verwendung von Äquivalenzklassen oder eindeutigen Reihenentwicklungen, wie der Dezimalbruchentwicklung oder Kettenbruchentwicklung vermieden werden.
Andererseits kritisiert Cantor an Dedekinds Darstellung, „[…] *dass die Zahlen in der Analysis sich niemals in der Form von „Schnitten" darbieten, in welche sie erst mit großer Kunst und Umständlichkeit gebracht werden müssen."* [56]
Trotz dieses Umstandes wird die von Cantor entdeckte Beziehung[57] zwischen $\mathbb{R}$ und der Potenzmenge der rationalen, beziehungsweise der natürlichen Zahlen, bei den Dedekindschen Schnitten besonders deutlich, erscheinen die reellen Zahlen doch als eine Struktur, welche aus Teilmengen einer abzählbaren Menge besteht.

---

* Deiser – Reelle Zahlen
[56] Cantor – Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, S.567
[57] Vgl.: 7.7 Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen

6.8 Intuitionistische Kritik an den klassischen Definitionen*

Mit den Konstruktionen von Cantor, Weierstraß und Dedekind gelang es, die reellen Zahlen streng formal durch die rationalen approximativ zu beschreiben, sei es durch Fundamentalfolgen oder Schnitte. Eine reelle Zahl kann demnach durch eine bestimmte Folge, beziehungsweise Teilmenge rationaler Zahlen eindeutig bestimmt werden.

Um nun aber die Stetigkeit einer Geraden, also das eindimensionale Kontinuum, arithmetisch vollständig zu erfassen, braucht man die Menge aller reellen Zahlen oder anders gesagt die Menge aller Teilmengen der rationalen Zahlen. Genau hier setzt die intuitionistische Kritik mit der Frage: „Was sind alle möglichen Teilmengen?" ein. [58]

Wie wir, nach Cantor, wissen, ist die Menge aller reellen Zahlen überabzählbar.[59] Das bedeutet aber auch, dass es unmöglich ist, das Erzeugungsprinzip jeder reellen Zahl zu kennen. Vielmehr lassen sich stets nur die Gesetze der Erzeugung von einer abzählbaren Menge reeller Zahlen bestimmen. Die Existenz der restlichen, nicht bestimmbaren irrationalen Zahlen muss vorausgesetzt werden oder, wie es für den Intuitionisten üblich ist, als unzulässig erklärt werden.
Bei der Forderung eines konstruktiven Aufbaus der gesamten Analysis wird natürlich auch die Konstruierbarkeit der reellen Zahlen verlangt, ansonsten ist eine Existenz derselben ausgeschlossen.

So spricht beispielsweise Lorenzen nur von der Menge der reellen Zahlen, die bereits bekannt ist. Das praktische Rechnen mit irrationalen Zahlen wird dadurch in keiner Weise eingeschränkt, da ohnehin nur mit bereits bekannten Größen gerechnet werden kann, allerdings widerspricht diese Auffassung auch der Cantorschen Theorie der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen.

---

* Deiser – Reelle Zahlen
  Emrich – Die Logik des Unendlichen

[58] In den 30er Jahren des 20.Jahrhunderts beschäftigten sich Logiker und Mathematiker mit der rechnerischen Zugänglichkeit abzählbarer Teilmengen von IR und stellten fest, dass es eine berechenbar abzählbare Teilmenge von IN gibt, deren charakteristische Funktion nicht berechenbar ist.

[59] Vgl.: 7.1 Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

7 Cantors Beitrag

7.1 Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit

7.1.1 Die Idee der Abzählbarkeit für unendliche Mengen*

Cantor beschäftigte sich schon früh mit der Untersuchung von unendlichen Mengen. Viele seiner Ideen teilte er Dedekind, den er 1872 in der Schweiz kennen lernte, und mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verbinden sollte, in Briefen mit.

Im Zentrum der Aufmerksamkeit stand das Problem der Abzählbarkeit. Während endliche Mengen Element für Element abgezählt werden können, ist dies bei unendlichen nicht möglich. Trotzdem gelang es Cantor eine Methode zu finden, um unendliche Mengen ihrer Größe nach zu vergleichen. Er bezeichnete eine Menge genau dann abzählbar unendlich, wenn sich eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Menge zur Menge der natürlichen Zahlen finden lässt. Dieses Prinzip lässt sich auch trivial bei endlichen Mengen anwenden. Ohne zu zählen, kann man beispielsweise feststellen, ob in einem Stadion ebenso viele Sitzplätze wie Zuschauer vorhanden sind. Es würde reichen zu kontrollieren ob jeder Platz besetzt ist, wenn kein Zuschauer mehr steht.

Die Gesamtheit der natürlichen Zahlen, sowie jene Mengen, welche sich dieser eineindeutig zuordnen lassen, besitzen nun denselben „Status der Unendlichkeit", beziehungsweise, wie Cantor es später formulierte, dieselbe Mächtigkeit. Beispielsweise beschreibt die Funktion $f(x) = x^2$ eine Bijektion zwischen den natürlichen Zahlen und den Quadratzahlen. Ebenso trivial kann eine eineindeutige Zuordnung zu den geraden, ungeraden, sowie allen ganzen Zahlen festgestellt werden.

Sogar die Abzählbarkeit der Rationalzahlen war Cantor schon 1873 bekannt. Ein Beweis findet sich allerdings erst in einem Brief von 1886 wieder. Cantor gibt der Menge der positiven, rationalen Zahlen ein Wohlordnungsgesetz, nach dem sich die Rangfolge der Zahlen nach der Größe des Zählers und Nenners richtet. Sind zwei Rationalzahlen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m'}{n'}$ in der irreduziblen Form, was bedeutet, dass Zähler mit Nenner nicht mehr gekürzt werden kann, gegeben, so bestimmt der Wert $m+n$ beziehungsweise $m'+n'$ die Rangfolge, wobei der kleinere Wert den Vorrang hat. Sollten diese Werte zweier, oder mehrerer Rationalzahlen

---

* Cantor – Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen
Cantor – Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten
Meschkowski – Georg Cantor – Leben, Werk und Wirkung
Purkert – Georg Cantor

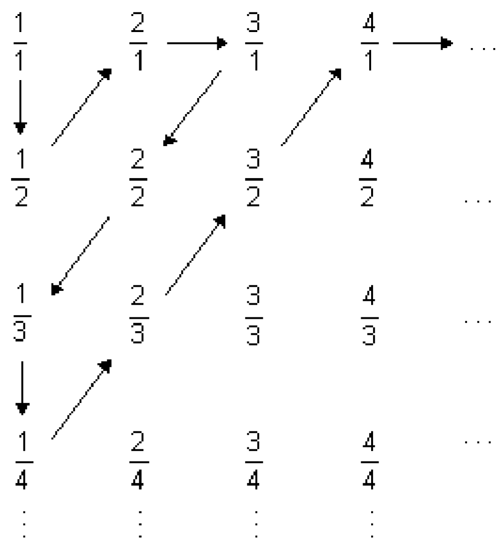
gleich sein, so bestimmt alleine der Zähler die Abfolge, wobei wieder der größere Wert dem kleineren folgt.

Somit ergibt sich folgende Anordnung aller positiven Rationalzahlen,

$$\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1},\frac{1}{5},\frac{5}{1},\frac{1}{6},\frac{2}{5},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{5}{2},\frac{6}{1},...\right)$$

welche ebenso als Folge $r_1, r_2, r_3, ...$ angeschrieben werden kann. Die gesamte Menge der rationalen Zahlen erhält man ganz einfach durch die Folge $0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, ...$.

Bekannt geworden ist jedoch ein anderer Beweis, der auch als Cantors erstes Diagonalargument bezeichnet wird. Dazu ordnet man alle positiven Brüche nach dem folgenden Schema an:



Folgt man nun den Pfeilen, ergibt sich die wohlgeordnete Folge $\left(1,\frac{1}{2},2,3,\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4,5,...\right)$ aller positiven Rationalzahlen, wobei kürzbare Brüche einfach übersprungen werden. Analog zum obigen Beweis fügt man nun die Null sowie alle negativen Rationalzahlen zur Folge hinzu und erhält somit die Abzählbarkeit aller rationalen Zahlen.

Am 29. November 1873 stellte Cantor die Frage nach der Möglichkeit einer bijektiven Abbildung der Menge der natürlichen Zahlen und der reellen Zahlen an Dedekind, wobei diese anfangs von beiden als nicht besonders wichtig erachtet wurde. Dedekind konnte die Frage nicht beantworten, er soll jedoch in seinem Antwortschreiben bewiesen haben, dass sogar alle algebraischen Zahlen eineindeutig den natürlichen Zahlen zugeordnet werden können. Doch schon am 7.Dezember 1873 konnte Cantor seinen höchst bedeutsamen Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen seinem Kollegen Dedekind mitteilen. Nachdem dieser die Richtigkeit des Beweises bestätigte und Cantor zum Ergebnis beglückwünschte, veranlasste Cantors Lehrer Weierstraß, der den größten Einfluss auf seine wissenschaftliche Entwicklung ausübte, die Veröffentlichung der Resultate im Crelleschen Journal von 1874 unter dem Titel: *„Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen"*.
In dieser Schrift zeigt Cantor auch die Abzählbarkeit der reellen algebraischen Zahlen, wobei er die Beweisidee von Dedekind übernimmt.[60]

Allgemein versteht man unter einer algebraischen Zahl x alle reellen oder komplexen Lösungen einer Gleichung der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

mit rationalen Koeffizienten a_k ($k = 1,2,\ldots,n$).

Cantor beschränkt sich für seinen Beweis auf so genannte „irreduktible" Gleichungen [61] der Form (1), wobei er noch dazu fordert, dass alle vorkommenden Koeffizienten a_n ganze Zahlen und ohne gemeinsame Teiler sind. Außerdem soll der Koeffizient a_0 stets positiv und der Grad n der Gleichung eine positive, natürliche Zahl sein. Dadurch wird die Eindeutigkeit einer jeden solchen Gleichung, welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, erreicht.

[60] Vgl.: Meschkowski – Georg Cantor – Leben, Werk und Wirkung, S.28

[61] Irreduktible (beziehungsweise irreduzible) Polynome lassen sich nicht als Produkt zweier nicht invertierbarer Polynome schreiben. So ist beispielsweise $p_1(x) = x^2 + 4x + 4$ über $\mathbb{Z}$ reduzibel, während $p_2(x) = x^2 + 4x + 2$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist (auf Grund der nicht rationalen Nullstellen).

Die Gesamtheit aller reellen algebraischen Zahlen bezeichnet Cantor mit ω. Wie die Menge aller rationalen Zahlen, sollen sich nun auch alle Zahlen aus ω in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, ... \qquad (2)$$

anordnen lassen, wobei sich die Stelle eines jeden ω_k mit $k = 1,2,...$ durch den zugehörigen Index bestimmen lässt.

Mit den oben genannten Voraussetzungen soll nun einer reellen algebraischen Zahl m, welcher einer völlig bestimmten Gleichung (1) vom Grad n genügt, eine Zahl N, welche die Höhe der Zahl m genannt wird, zugeordnet werden. Diese wird folgendermaßen berechnet:

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + ... + |a_n| \qquad (3)$$

Umgekehrt gibt es zu jedem positiven ganzzahligen Wert von N nur eine endliche Anzahl reeller algebraischer Zahlen, für welche N die zugehörige Höhe ist.[62] Diese Anzahl wird mit $\varphi(N)$ bezeichnet.

Im Folgenden soll die Berechnung für $\varphi(1)$ kurz dargestellt werden:

Für die Bestimmung der Gleichungen, welche zur Höhe 1 gehören, kann man sich auf Gleichungen ersten Grades beschränken. Jedes Polynom höheren Grades muss von vorne herein ausgeschlossen werden, da es der Gleichung (3) nicht genügen kann.
Eine Gleichung ersten Grades hat folgende Form: $a_0 + a_1 \cdot x = 0$
Da der Koeffizient a_1 nun nicht Null sein darf, kann er nur mehr die Werte 1 oder -1 annehmen, da er einerseits die Gleichung $1 = 0 + |a_0| + |a_1|$ erfüllen muss und andererseits, nach Voraussetzung, ganzzahlig ist. Daraus folgt wiederum, dass a_0 Null sein muss.
Somit ergibt sich $x = 0$ als einzige Lösung der Gleichung. Ebenso ist 0 die einzige algebraische Zahl, welcher der Höhe 1 entspricht und daher gilt $\varphi(1) = 1.$.

[62] Dies folgt einerseits aus dem Gaußschen Fundamentalsatz der Algebra und andererseits aus der Ganzzahligkeit der Koeffizienten.

In analoger Weise können auch alle anderen, den jeweiligen Höhen entsprechenden Zahlen, gefunden werden. Nun wird diejenige Zahl, welche zur Höhe 1 gehört, mit ω_1 bezeichnet. Die beiden, der Höhe 2 zugeordneten reellen algebraischen Zahlen ω_2 und ω_3 werden untereinander der Größe nach steigend geordnet.

Mit Hilfe des fortschreitenden induktiven Verfahrens erhält man so die Menge ω aller reellen algebraischen Zahlen in der Form (2), einer wohlgeordneten Reihe, womit die Abzählbarkeit aller algebraischen Zahlen bewiesen ist.

Bei Betrachtung des Beweises der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, welchen Cantor in der gleichen Arbeit veröffentlichte, wird klar warum er die komplexen Zahlen ausschloss.

Die allgemeine Idee hinter dem oben dargestellten Beweis ist, dass die Menge $\{(m_1, m_2, ..., m_n)\}$ aller endlichen Folgen eine abzählbare Menge ist.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen. Betrachtet man das Cantorsche Diagonalverfahren, welches für den Beweis der Abzählbarkeit der rationalen Zahlen verwendet wurde, sieht man sofort, dass sogar die Menge aller abzählbaren Mengen $\{(m_1, m_2, m_3, ...)\}$ wieder abzählbar sein muss.

7.1.2 Kritische Betrachtungen zur Abzählbarkeit*

Obwohl Cantor behauptet, mit seinem Diagonalverfahren alle rationalen Zahlen „abzählen" zu können, erscheint der Beweis doch etwas paradox. Vor allem, wenn man bedenkt, dass zu jeder Spalte, wie zu jeder Zeile potentiell-unendlich viele Nachfolger gehören.
In der ersten Zeile kommen alle natürlichen Zahlen vor, wobei es für jede von ihnen unmöglich ist, die nächst kleinere rationale Zahl anzugeben. So gesehen müssen immer unendlich viele „Lücken" bleiben.
Die eigentliche Kritik am Begriff der Abzählbarkeit setzt jedoch viel früher an, nämlich schon bei der Definition derselben. So könnte man sich fragen, wie man überhaupt behaupten könne die gesamte Menge der natürlichen Zahlen ließe sich „abzählen", wo man doch weiß, dass man nie zu einem Ende kommen kann, da sich, streng genommen, immer nur endliche Mengen wirklich, konkret abzählen lassen. Somit könnte man Cantors Abzählbarkeitsbeweis mehr einen Beschluss als einen Beweis nennen.
Auch die Tatsache, dass sich zwischen je zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen befinden und sich somit die Menge der Rationalzahlen als viel umfangreicher als jene der natürlichen darstellt, könnte man doch im Widerspruch zu Cantors Behauptung der Gleichmächtigkeit der beiden Mengen sehen. Deswegen sollten, um nicht zwangsläufig Widersprüche zu erhalten, dem Mächtigkeitsbegriff im Endlichen und im Unendlichen verschiedene Bedeutungen zukommen.
Dass bekannteste Beispiel, welches den paradoxen Charakter der Abzählbarkeit und des Aktual-Unendlichen widerspiegelt stammt von David Hilbert und ist unter dem Namen „Hilberts Hotel" bekannt geworden. Dabei handelt es sich um ein Hotel mit abzählbar vielen Zimmern, das voll belegt ist. Jedem Gast G_n wird dabei das Zimmer mit der Nummer n $(n = 1,2,3,...)$ zugeordnet. Trotz der Vollbelegung können noch weitere Gäste ohne Probleme aufgenommen werden, indem einfach jeder Gast G_n um ein Zimmer weiter rückt. Darüber hinaus ist es sogar möglich, dass abzählbar viele weitere Gäste kommen können.
Vergleicht man dieses Beispiel mit der Debatte von Cantor und Gutberlet, könnte man, wie Gutberlet, einerseits auf die Unmöglichkeit der Vorstellung von aktual unendlichen Mengen schließen, oder andererseits mit Cantor, nur den, gegen die naive Intuition gerichteten, abstrakten Charakter der unendlichen Mengen unterstreichen.

* Heuser – Lehrbuch der Analysis

7.2 Überabzählbarkeit*

Erst durch den Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen bekam Cantors Abzählbarkeitsbegriff eine entscheidende Bedeutung. Von nun an war es möglich sogar im Unendlichen Größenunterscheidungen machen zu können. Diese Erkenntnis selbst war die Grundlegung der später entstandenen Mengelehre.

Im zweiten Teil der Arbeit *„Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“* veröffentlichte Cantor seinen ersten Beweis. Dabei verwendete er allerdings nicht das bekannte Diagonalisierungsverfahren, sondern das Prinzip der Intervallschachtelung.

In etwas abgeänderter Form soll dieser Beweis nun dargestellt werden:

Es soll indirekt gezeigt werden, dass, wenn man annimmt es existiere eine nach beliebigem Gesetz gegebene unendliche Reihe aller reellen Zahlen,

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n, \ldots \qquad (1)$$

wobei sich keine Zahlen wiederholen sollen, sich immer unendlich viele Zahlen finden lassen, welche nicht in dieser Reihe vorkommen.

Für den Beweis wird ein beliebiges Intervalls $[\alpha; \beta]$ gewählt, von dem gezeigt wird, dass sich eine Zahl η innerhalb des Intervalls finden lässt, welche in der Reihe (1) nicht vorhanden ist.

Für das Intervall $[\alpha; \beta]$ soll $\alpha < \beta$ gelten.

Zunächst wählt man die ersten beiden Zahlen der Reihe (1), welche im Inneren des Intervalls liegen. Falls dies nicht möglich ist, tritt der, im nächsten Absatz erwähnte erste Fall ein. Findet man jedoch zwei solche Zahlen, bezeichnet man sie mit α' beziehungsweise β', so dass $\alpha' < \beta'$ gilt. So ergibt sich das neue Intervall $[\alpha'; \beta']$. Wieder bestimmt man, falls möglich, die nächsten beiden Zahlen α'' und β'', welche in der Reihe (1) vorkommen und innerhalb des Intervalls $[\alpha'; \beta']$ liegen. Dieser Prozess soll so weit wie möglich fortgesetzt werden. Von den sich dabei ergebenden Intervallen schließt ein jedes alle folgenden ein. Die Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$, welche ihrer Größe nach fortlaufend zunehmen, und $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$, welche ihrer Größe nach abnehmen, sind dabei alle in der Reihe (1) enthalten.

---

* Cantor – Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen
Purkert – Georg Cantor

Dementsprechend können nun zwei Fälle eintreten:

Entweder die Anzahl der vorkommenden Intervalle ist endlich. In Folge existiert ein letztes Intervall $\lfloor \alpha^n;\beta^n \rfloor$, in welchem höchstens eine Zahl μ von (1) enthalten sein kann. Falls keine solche Zahl μ in (1) vorkommt, hat man den Satz bewiesen, da keine Zahl, welche innerhalb von $\lfloor \alpha^n;\beta^n \rfloor$ liegt, in der Reihe (1) vorkommt. Existiert jedoch eine Zahl μ in der Reihe (1), ist jede Zahl, welche im Inneren von $\lfloor \alpha^n;\mu \rfloor$ liegt kein Element der Reihe (1).[63]

Zweitens kann die Anzahl der Intervalle unendlich groß sein. Ist dies der Fall, müssen sowohl alle $\alpha',\alpha'',\alpha''',\ldots$, wie auch alle $\beta',\beta'',\beta''',\ldots$ konvergieren, da sie auf Grund der Beschränktheit des ursprünglichen Intervalls $[\alpha;\beta]$ nicht ins Unendliche wachsen können. Sei α^∞ der Grenzwert von $\alpha',\alpha'',\alpha''',\ldots$ und β^∞ der Grenzwert von $\beta',\beta'',\beta''',\ldots$. Falls $\alpha^\infty < \beta^\infty$ ist erfüllt jede Zahl zwischen den beiden Grenzwerten die Bedingung, nicht in (1) enthalten zu sein. Gilt aber $\alpha^\infty = \beta^\infty$, so kann dieser Wert nicht in der Reihe (1) vorkommen. Wenn man indirekt annimmt, es gäbe eine Zahl η, welche in (1) enthalten ist, so müsste sie nach endlich vielen Schritten im fortlaufenden Intervall $\lfloor \alpha^n;\beta^n \rfloor$ vorkommen und könnte somit nicht mehr in den folgenden Intervallen enthalten sein, was zu ihrer Definition im Widerspruch steht.

Als besonders wertvoll erachteten Cantor und Dedekind bei diesem Beweis folgende Schlussfolgerung:
Die Menge der reellen Zahlen besteht aus der Vereinigungsmenge der algebraischen und der transzendenten Zahlen. Da jedoch die Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen gezeigt wurde und die Vereinigung abzählbarer Mengen wieder höchstens abzählbar ist, muss die Menge aller transzendenten Zahlen überabzählbar sein.
Im Allgemeinen ist es aufwendig und vor allem schwierig die Transzendenz einer bestimmten Zahl nachzuweisen.[64] Umso erstaunlicher ist Cantors Korollar, welches besagt, dass „fast alle“, also alle, bis auf abzählbar viele Ausnahmen, der reellen Zahlen transzendent sind.

---

[63] Um zu zeigen, dass sich in jedem beliebigen Intervall $[a;b]$ noch eine Zahl befindet, führt man einfach den Intervallmittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ an.

[64] Erst Charles Hermite (1822-1902) gelang es 1872 die Transzendenz der Eulerschen Zahl e nachzuweisen. Ferdinand von Lindemann (* 12. April 1852 in Hannover; † 6. März 1939 in München) bewies in der Arbeit „Über die Zahl Pi“ von 1882, welche Cantor referiert hat, erstmals die lang vermutete Transzendenz der Kreiszahl π.

Allerdings basiert dieses Korollar auf einem reinen Existenzbeweis, was bedeutet dass zwar die Existenz überabzählbar vieler, transzendenter Zahlen als bewiesen gilt, sich jedoch keine einzige dieser Zahlen explizit angeben lässt. Dies, wie auch die Einbeziehung der aktualen Unendlichkeit, welche für das „Abzählen“ von unendlichen Mengen vorauszusetzen ist, waren mit unter Gründe für die Missachtung und Inakzeptanz, welche den Cantorschen Erkenntnissen entgegengebracht wurde. So blieb die eigentliche Bedeutung der Schrift: *„Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“* weitgehend unerkannt und unberücksichtigt.

Einer der einflussreichsten Widersacher Cantors war Kronecker, der maßgebend für die Herausgabe des Crelleschen Journals für die reine und angewandte Mathematik verantwortlich war. Er kritisierte vor allem die „nicht-konstruktiven“ Methoden Cantors. Außerdem sollten seiner Ansicht nach die irrationalen Zahlen selbst, auf Grund ihres unendlichen Charakters, aus der Mathematik verbannt werden, da sich ohnehin alles auf die „gottgegebenen“ natürlichen Zahlen zurückführen ließe. Darüber hinaus verfasste Kroneckers Schüler Eugen Netto später auch eine gering schätzende Rezension der Cantorschen Arbeit.

Als weiteres Korollar ergibt sich aus Cantors erstem „Überabzählbarkeitsbeweis“ sofort, dass auch jedes reelle Intervall überabzählbar ist.

Der bekanntere Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, wie er in den meisten mathematischen Lehrbüchern angegeben wird, basiert auf dem nach Cantor benannten Diagonalverfahren und wurde erst 1892 in der Schrift: *„Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“* veröffentlicht. Dieser mathematische „Trick“ des Diagonalverfahrens liefert einen weit aus einfacheren Beweis, der gänzlich unabhängig von den irrationalen Zahlen geführt wird.

Im Original von 1892 betrachtet Cantor eine Menge M aller Folgen, welche aus den Koordinaten m und w gebildet werden können. Beispielsweise sind die unendlichen Folgen $(m,m,m,m,...),(w,w,w,w,...),(m,w,m,w,...)$ Elemente von M.
Könnte die gesamte Menge M nun abgezählt werden, würden sich ihre Elemente zeilenweise untereinander ordnen lassen, wobei $(a_{n1},a_{n2},a_{n3},...)$ der n-ten Folge einer beliebig vorgenommenen Abzählung entspricht.

Somit ergäbe sich folgendes Schema:

$$
\begin{array}{l}
(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots) \\
(a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Nun wird eine Folge $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ so konstruiert, dass $b_n = m$ ist, wenn $a_{nn} = w$ ist und $b_n = w$ sein soll, falls $a_{nn} = m$ ist. Da b nur aus den Koordinaten m und w besteht, muss es ein Element der Menge M sein. Andererseits kann es aber in der obigen Abzählung nicht vorkommen, weil es sich von jeder n-ten Folge an der n-ten Stelle unterscheidet, da stets $b_n \neq a_{nn}$ gilt. Aus diesem Widerspruch folgt die Überabzählbarkeit von M und gilt daher auch für die Menge aller Zahlfolgen.

Anschließend soll noch gezeigt werden, dass sich jede reelle Zahl eindeutig als unendliche Zahlfolge, beziehungsweise als unendlicher Dezimalbruch darstellen lässt. Mit dieser Voraussetzung lässt sich die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mittels des Cantorschen Diagonalverfahrens sehr gut einsehen.

7.3 Die unendliche Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen*

Zunächst wird eine Definition der Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl a gegeben. Man bildet die Folge der Zahlen,

$$a_1 := z_0 + \frac{z_1}{10}$$

$$a_2 := z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$a_n := z_0 + \frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \ldots + \frac{z_n}{10^n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei z_0 eine nichtnegative ganze Zahl und $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ eine Folge lauter Ziffern, von denen jede einer Zahl aus der Menge $\{0,1,2,\ldots,9\}$ entspricht, ist. Die Folge a_n ist wachsend, jedoch durch $z_0 + 1$ nach oben beschränkt, da für alle Folgen $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$ und $\forall n \in IN_0$ gilt: *

$$\frac{z_1}{10} + \frac{z_2}{10^2} + \ldots + \frac{z_n}{10^n} \le \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} < \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Auf Grund der Beschränktheit der Folge a_n muss ein Grenzwert a existieren. Die Darstellung von a in der Form $a = z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ wird Dezimalbruchdarstellung genannt. Somit ist durch jeden Dezimalbruch $z_0, z_1 z_2 z_3 \ldots$ eine Folge und gleichzeitig der Grenzwert derselben definiert. Die Dezimalbruchdarstellungen können nun endlich, wenn sie ab einer gewissen Stelle abbrechen, oder unendlich, wenn sie nicht abbrechen, sein.

Unsere Forderung war jedoch, dass sich jede reelle Zahl als unendlicher Dezimalbruch darstellen lassen soll. Der „Trick“ dabei ist, die endlichen Dezimalbrüchen alternativ zu definieren, indem zum Beispiel die Zahl 1 durch $0{,}9999\ldots$ ersetzt wird.

Um dies zu zeigen, genügt es, sich auf das reelle Intervall $(0,1]$ zu beschränken. Der hier vorgestellte Beweis bedient sich wieder dem Intervallschachtelungsprinzip.

---

* Heuser – Lehrbauch der Analysis

*Nach der geometrischen Summenformel gilt für alle reellen Zahlen $q \neq 1$ und alle natürlichen n die Gleichung $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Daher strebt die Reihe $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ für jedes feste q mit $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

Dazu wird das Intervall $I_0 := (0,1]$ in n gleiche Teile geteilt, wobei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gelten soll. Für die übliche, dekadische Darstellung sollte man die Zehnteilungsmethode verwenden. So entstehen zehn halboffene Teilintervalle $\left(0,\frac{1}{10}\right],\left(\frac{1}{10},\frac{2}{10}\right],...,\left(\frac{9}{10},1\right]$. Ist nun a eine beliebige, bestimmte reelle Zahl aus dem Intervall I_0, so gibt es genau eine Ziffer z_1, so dass

$$\frac{z_1}{10} < a \leq \frac{z_1+1}{10} \qquad (1)$$

ist. Nun wird das Prinzip der Intervallschachtelung iterativ angewendet, wodurch man das nächst kleinere Intervall $I_1 := \left(\frac{z_1}{10},\left(\frac{z_1+1}{10}\right)\right]$, in welchem a enthalten ist, wieder in zehn gleiche Teile zerlegt. Somit ergeben sich analog zu den ersten zehn Teilintervallen die folgenden Intervalle $\left(\frac{z_1}{10},\frac{z_1}{10}+\frac{1}{10^2}\right],\left(\frac{z_1}{10}+\frac{1}{10^2},\frac{z_1}{10}+\frac{2}{10^2}\right],...,\left(\frac{z_1}{10}+\frac{9}{10^2},\frac{z_1}{10}+\frac{1}{10}\right]$. Da a nun wieder genau in einem dieser Teilintervalle enthalten sein muss, ergibt sich die nächste Ziffer z_2. Somit gibt sich die, gegen den Grenzwert a konvergierende unendliche Reihe

$$\frac{z_1}{10}+\frac{z_2}{10^2}+\frac{z_3}{10^3}+...$$

Die Unendlichkeit der Reihe ergibt sich aus der Forderung (1), da die linke Seite immer kleiner als a bleibt, was natürlich auch für alle weiteren Einschränkungen von a gilt. Jede, bestimmte reelle Zahl $a \in (0,1]$ hat somit eine eindeutig bestimmte* Dezimalbruchdarstellung und lässt sich folgendermaßen anschreiben: $a = 0,z_1z_2z_3...$

Wie oben erwähnt, ist die Festsetzung der Anzahl der jeweiligen Teilintervalle willkürlich. Verwendet man beispielsweise die Halbierungsmethode, und teilt somit jedes Intervall in genau zwei Teilintervalle, bekommt man eine dyadische Bruchdarstellung. Dies bedeutet, dass sich jede reelle Zahl im Intervall $(0,1]$ auch eindeutig als Zahlenfolge lauter Einser beziehungsweise Nuller darstellen lässt. Diese Darstellung lässt sich nun ideal auf Cantors Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mittels dem Diagonalverfahren übertragen, indem man einfach m und w durch 0 und 1 ersetzt. Auf Grund dieser Einfachheit wird der Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen oft aus der Überabzählbarkeit aller Folgen, welche aus 0 und 1 gebildet werden können, gefolgert, da somit die Menge aller Zahlenfolgen, welche den reellen Zahlen entsprechen, erst recht überabzählbar sein muss.

---

* Für den Beweis der Eindeutigkeit siehe: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 14 Auflage Teubner Verlag 2001, S.162-163

7.4 Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionalzahl[*]

Nachdem Cantor die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen gezeigt hatte, beschäftigte ihn die nahe liegende nächste Frage, ob sich ein zweidimensionales Kontinuum eineindeutig auf ein eindimensionales abbilden lässt. Wieder formulierte er diese Frage in einem Brief vom 5. Januar 1874 an Dedekind:

„Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluß der Begrenzung) auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluß der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?“ [65]

Cantor war sich, wie viele seiner Kollegen, schon fast sicher, die Frage mit Nein beantworten zu können. Umso mehr verwunderte ihn der Beweis des Gegenteils, den er allerdings erst am 20. Juni 1877 seinem Freund Dedekind mitteilen konnte. Dieser fand noch kleine Lücken im Beweisverfahren, welche Cantor kurz darauf verbesserte und darüber hinaus die Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionalzahl zeigte, so dass er schon am 25.6.1877 voller Stolz schreiben konnte:

„Da sieht man, welch' wunderbare Kraft in den gewöhnlichen reellen rationalen und irrationalen Zahlen doch liegt, dass man durch sie im Stande ist die Elemente einer ρ-fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit eindeutig mit einer einzigen Koordinate zu bestimmen;...“ [66]

Durch diese Feststellung hat Cantor die unbewiesene Annahme, dass zur Bestimmung der Elemente der Menge $\mathbb{R}^n$ stets n voneinander unabhängige reelle Koordinaten benötigt werden, widerlegt.

---

[*] Deiser – Einführung in die Mengenlehre
Purkert, Ilgauds – Georg Cantor

[65] Purkert, Ilgauds – Georg Cantor, S.32

[66] Deiser, Einführung in die Mengenlehre, 2.Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004

Im Folgenden soll Cantors erster Versuch eines Beweises einer bijektiven Abbildung des reellen Einheitsintervalls $[0;1]$ auf die Einheitsfläche $[0;1]\times[0;1]$ des IR^2 dargestellt werden. Dazu möchte er jedem Punkt (x_1, x_2) der Fläche, wobei die beiden Koordinaten x_1, x_2 in Dezimalbruchdarstellung gegeben sind, genau einen Punkt y des Intervalls sowie auch umgekehrt jedem Punkt des Intervalls genau einen eindeutigen Punkt der Fläche zuordnen. Die Grundidee ist, die Ziffern der Koordinaten x_1, x_2 so zu „mischen", dass abwechselnd eine Ziffer der ersten, dann eine der zweiten Koordinate verwendet wird um eine eindimensionale Koordinate zu erhalten. Somit ergibt sich die Zuordnung

$$\left\{\begin{matrix} 0,a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\ldots \\ 0,a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\ldots \end{matrix}\right\} \longleftrightarrow 0,a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_3^{(1)}a_3^{(2)}\ldots$$

wobei $x_1 = 0,a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\ldots$, $x_2 = 0,a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\ldots$ und $Y = 0,a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_3^{(1)}a_3^{(2)}\ldots$ entspricht. Auf dieselbe Weise lassen sich auch n-dimensionale Gebiete auf Strecken abbilden.

Wie oben erwähnt, hat Dedekind allerdings einen Fehler in diesem Beweis gefunden. Cantor hat anscheinend nicht berücksichtigt, dass durch die, in der Dezimalbruchschreibweise üblichen, unendlichen Darstellung aller nicht periodischen rationalen Zahlen, die Eindeutigkeit seiner Zuordnung verletzt wird. Beispielsweise wäre das Urbild der Zahl $y = 0{,}210608040\ldots$ nämlich $(0{,}2000\ldots;0{,}1684\ldots)$. Da jedoch $0{,}2$ auch als $0{,}1999\ldots$ dargestellt wird, gibt es entweder kein Urbild für y, oder zwei verschiedene Zahlen y, die demselben Urbild entsprechen.

Es dauerte nicht lange, bis Cantor, unter Verwendung von Kettenbrüchen, einen gültigen, jedoch weit aus aufwendigeren Beweis fand. Dieser findet sich in der Schrift *„Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre"* wieder. Cantor erwähnt ebenso seinen Beweis mittels der Dezimalbruchentwicklung, um einerseits auf die Schwierigkeiten aufmerksam zu machen und andererseits vielleicht in der Hoffnung, beziehungsweise im Glauben, es würde sich im Laufe der Zeit ein Weg finden lassen, um den Satz auf diese einfache Weise beweisen zu können.

In der Tat schaffte es der, bei Kronecker und Weierstraß studierende, ungarische Mathematiker Julius König (ungarisch: Gyula K_nig, * 16. Dezember 1849 in Györ; † 8. April 1913 in Budapest), dem Cantor, auf Grund seiner teilweise kritischen, aber auch gewinnbringenden Ansichten sowie Beiträgen zur Mengenlehre, skeptisch gegenüberstand,

noch vor 1900 durch einen einfachen „Trick“ Cantors lückenhaften Beweis zu vervollständigen. Um die Eindeutigkeit der Abbildung der quadratischen Einheitsfläche auf das Einheitsintervall gewährleisten zu können, mischt König nicht die Ziffern von beiden Dezimalbrüchen, sondern ganze Ziffernblöcke. Diese Blöcke enthalten jeweils eine Ziffer zwischen 1 und 9, sowie all jene Nullen, welche bis zu dieser Ziffer vorkommen.
Beispielsweise wird laut diesem Schema dem Punkt

$\begin{Bmatrix} 0{,}4001088... \\ 0{,}7200548... \end{Bmatrix}$ des Quadrats der Punkt $0{,}470012080058488...$ zugeordnet.

Ebenso entspricht umgekehrt auch jedem eindimensionalen Punkt genau ein Punkt des $\mathbb{R}^2$.

Neben der Prüfung der Richtigkeit der von Cantor konstruierten Beweise, machte Dedekind die, besonders für die Dimensionstheorie, höchstbedeutsame Bemerkung, dass eine bijektive Abbildung zwischen zwei Kontinua von unterschiedlicher Dimensionszahl unstetig sein muss. Nachdem Cantor an einem lückenlosen Beweis der obigen Annahme scheiterte und es Hilbert 1891 schaffte eine stetige Surjektion von $[0;1]$ nach $[0;1]\times[0;1]$ zu konstruieren, gelang es schlussendlich 1911 gerade dem Intuitionisten Brouwer einen vollständigen Beweis zu finden.

7.5 Der Übergang zum allgemeinen Begriff der Mächtigkeit[67]

Den heute üblichen und auch in den vorigen Darstellungen schon verwendeten Begriff der Mächtigkeit entwickelt Cantor erst nach seinen ersten „Überabzählbarkeitsbeweisen" in der Schrift *„Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre"*. Obwohl er diese Arbeit schon am 12. Juli 1877 beim Crelleschen Journal einreichte, erschien sie erst im Jahre 1878, was vermutlich auf eine Verzögerung der Herausgabe durch Kronecker zurückzuführen ist.
Weiters erwähnt Cantor in dieser Schrift zum ersten Mal die Kontinuumshypothese, welche besagt, dass es zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der der reellen keine weitere Mächtigkeit gibt. Diese relativ einfach darzustellende Vermutung beweisen zu wollen kostete Cantor viel Zeit und Mühe. Schlussendlich musste er zwangsmäßig resignieren, denn, wie sich später herausstellte ist die Kontinuumshypothese in der klassischen Mathematik weder beweisbar noch widerlegbar. Die Unmöglichkeit der Widerlegbarkeit konnte Kurt Gödel 1938 zeigen, die Unbeweisbarkeit stellte erst 1963 Paul Cohen fest.[68]

In weiterer Folge soll nun der, für die Mengenlehre grundlegende Begriff der Mächtigkeit, wie er von Cantor selbst ausgearbeitet wurde, dargestellt werden.[*]

Nachdem Cantor den Begriff der Menge als Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung definiert ordnet er jeder solchen Menge eine bestimmte Mächtigkeit zu, die er auch Kardinalzahl nennt. Diese Mächtigkeit ist selbst eine bestimmte Menge aus lauter Einsen, wobei jedem Element einer Menge eine Eins zukommt.
Gibt es eine Bijektion zwischen zwei Mengen M und N, so werden sie als äquivalent bzw. gleichmächtig bezeichnet. Andernfalls hat entweder die Menge M mit einer Teilmenge von N gleiche Mächtigkeit, oder es existiert umgekehrt eine Teilmenge M, welche zu N gleichmächtig ist.

---

[67] Die Mächtigkeit einer Menge M wird als $|M|$ geschrieben.

[68] Da die Kontinuumshypothese nicht unmittelbar die reellen Zahlen betrifft, wird sie hier nicht näher dargestellt. Für genauere Betrachtungen siehe Deiser, Einführung in die Mengenlehre, 2.Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004, S.149-159

[*] vgl. Cantor – Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre
Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre
Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten, 5. Fortsetzung §1-3

Besteht eine Menge aus endlich vielen Elementen, so entspricht die Mächtigkeit der Anzahl der Elemente, womit zwei endliche Mengen genau dann gleichmächtig sind, wenn die Anzahl ihrer Elemente die gleiche ist.

Neben den endlichen Mengen, mit endlichen Kardinalzahlen, soll es auch noch unendliche, bzw. nach Cantor transfinite Mengen, wie Mächtigkeiten geben. Diese unterscheiden sich jedoch grundlegend von den endlichen. Während nämlich eine Teilmenge einer endlichen Menge immer eine kleinere Mächtigkeit als die Menge selbst besitzt, muss dies bei unendlichen Mengen nicht immer gelten. Somit kann es auch vorkommen, wie wir bei den rationalen und natürlichen Zahlen gesehen haben, dass es eine Bijektion zwischen einer Menge und einer ihr echten Teilmenge geben kann. [69]

Dedekind verwendet gerade diese Eigenschaft der unendlichen Mengen als Definition derselben:

„Ein System S heißt unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heißt S ein endliches System.“ [70]

Cantor hat, neben der Existenz transfiniter Mengen, auch bewiesen, dass der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen ($|\mathbb{N}|$), was auch der Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen entspricht, die kleinste unendliche Kardinalzahl zukommt, die er als $\aleph_0$ (Alef-null) bezeichnet.[71]

Den Beweis für die Unendlichkeit der Menge aller endlichen Kardinalzahlen $\{\nu\}$, führt Cantor, indem er der Menge ein neues Element e_0 hinzufügt. Diese, neue Menge vergleicht er nun mit $\{\nu\}$ und stellt fest, dass sich eine eindeutige Zuordnung, Bijektion, der Elemente der beiden Mengen denken lässt, wobei dem Element e_0 der ersten Menge das Element 1 der zweiten, dem Element ν der ersten das Element $\nu+1$ der anderen zukommt.

Somit gilt: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

Da alle endlichen Mächtigkeiten μ jedoch von $\mu+1$ verschieden sind °, kann $\aleph_0$ keine endliche Zahl sein.

---

[69] Dieses Paradoxon der unendlichen Mengen steht im Widerspruch des von Euklid aufgestellten achten Axioms, dass das Ganze größer als der Teil ist.

[70] Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? In: Gesammelte mathematische Werke S.356 §5

[71] Der Beweis der kleinsten, transfinite, Kardinalzahl $\aleph_0$ findet sich auf S.493-495 in Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, (1895)

° Was Cantor in § 5 auf Seite 489, in Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, (1895) zeigte

7.6 Die Mächtigkeit der Potenzmenge*

Unter der Potenzmenge $P(A)$ einer Menge A versteht man allgemein die Menge aller Teilmengen von A. Trivialerweise muss deshalb bei endlichen Mengen die Potenzmenge immer eine größere Mächtigkeit haben. Durch vollständige Induktion lässt sich leicht zeigen, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge $|P(X)|$, wobei X eine endliche Menge aus n Elementen ist, durch die Zahl 2^n gegeben ist.
Erstaunlicherweise ist es Cantor gelungen durch das Diagonalisierungsverfahren nicht nur die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen auf eine verblüffend einfache Weise zu beweisen, sondern auch zu zeigen, dass allgemein die Potenzmenge einer Menge M von größerer Mächtigkeit ist als M selbst.

„[...] weil das darin befolgte Princip sich ohne weiters auf den allgemeinen Satz ausdehnen lässt, dass die Mächtigkeiten wohldefinierter Mannigfaltigkeiten kein Maximum haben oder, was dasselbe ist, dass jeder gegebenen Mannigfaltigkeit L eine andere M an die Seite gestellt werden kann, welche von stärkerer Mächtigkeit ist als L.“ [72]

Cantor zeigt, wie sich mit Hilfe der reellen Zahlen eine Menge finden lässt, welche von größerer Mächtigkeit ist als die reellen Zahlen selbst.
Dazu betrachtet er die Menge L, aller reellen Größen im Intervall $[0;1]$. Ihr gegenüber stellt er die Menge M, aller eindeutigen Funktionen $f(x)$, welche nur die beiden Werte 0 oder 1 annimmt, wobei x alle reellen Werte des Intervalls $[0;1]$ durchläuft.
Zunächst zeigt Cantor, dass die Mächtigkeit von L kleinergleich als die Mächtigkeit von M ist. Dazu betrachtet er jene Teilmenge von M, welche aus allen Funktionen besteht, die nur an einer Stelle $x_0 \in [0;1]$ den Wert 1 annehmen, überall sonst den Wert 0 haben. Da sich diese Teilmenge von M eineindeutig auf die Menge L abbilden lässt, folgt, dass M jedenfalls keine kleinere Mächtigkeit hat als L.
Andererseits beweist Cantor, dass M und L unmöglich die gleiche Mächtigkeit haben können. Indirekt wird angenommen, es existiere eine Funktion aus den beiden Veränderlichen x und z, $\varphi(x,z)$, welche jedem Element z aus L eine Funktion $f(x)$ aus M zuordnet. Nun

* Cantor – Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre
Purkert, Ilgauds – Georg Cantor
[72] Cantor – Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre S.77

bildet man eine Funktion $g(x)$, welche nur aus den Werten 0 und 1 besteht und sich in jedem x von $\varphi(x,x)$ unterscheidet. Da jede aus $\varphi(x,z)$ gebildete Funktion notwendigerweise ein Element $\varphi(z,z)$ haben muss, unterscheiden sich alle so gebildeten Funktionen an mindestens einer Stelle von $g(x)$. Da $g(x)$ jedoch ein Element der Menge M ist, können M und L nicht gleichmächtig sein.
Da die Mächtigkeit von M nun weder gleich, noch kleiner als jene von L ist, muss sie größer sein.

Mit Hilfe der Potenzmenge lassen sich nun auch für unendliche Mengen immer größere Mächtigkeiten bilden. Dabei muss allerdings berücksichtigt werden, dass niemals ein konkretes Verfahren angegeben werden kann, welches alle Teilmengen einer unendlichen Menge auflistet.
Über die Mächtigkeiten von unendlichen Mengen sagt Cantor, dass man sie auch bezeichnen könne

„[…] als die actual-unendlich-grossen Cardinalzahlen, und es kommt ihnen dieselbe Realität und Bestimmtheit zu, wie jenen (den endlichen Kardinalzahlen); *nur dass die gesetzmässigen Beziehungen unter ihnen, die auf sie bezügliche „Zahlentheorie“ zum Teil eine andersartige ist, wie im Gebiete des Endlichen.“* [73]

[73] Cantor, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre S.78

7.7 Die Potenzmenge der natürlichen Zahlen und die reellen Zahlen*

Wie das Cantorsche Diagonalisierungsverfahren zeigt, besitzen die beiden Grundstrukturen der Mathematik $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ unterschiedliche Mächtigkeiten. Im Folgenden soll jedoch bewiesen werden, dass gerade die Potenzmenge der natürlichen Zahlen zur Menge der reellen Zahlen gleichmächtig ist, womit auch verständlich wird, warum eine einzelne reelle Zahl als Teilmenge von $\mathbb{N}$ begriffen werden kann. Dabei sollte beachtet werden, dass nach Gödel und Cohen allgemein nicht gezeigt werden kann, dass die Mächtigkeit der reellen Zahlen die nächst größere, nach den natürlichen, ist.

Der hier angeführte Beweis bedient sich einer speziellen Funktion, welche als Indikatorfunktion bezeichnet wird. Diese ordnet jeder Teilmenge A einer Menge M eine bestimmte Folge von Nullen und Einser zu, wobei all jenen Elementen, welche sowohl in M als auch in A vorkommen der Wert 1 zukommt, allen anderen der Wert 0. Somit ist die Indikatorfunktion von A in M $ind_{A,M} : M \to \{0,1\}$ durch

$$ind_{A,M}(x) = \begin{cases} 1, & falls \;\; x \in A \\ 0, & falls \;\; x \notin A \end{cases}$$

definiert.

Da jeder Teilmenge A einer Menge M eine bestimmte Indikatorfunktion zugeordnet werden kann, ist es möglich die Indikatorfunktionen aller Teilmengen von M zu betrachten, diese gesamte Menge aller möglichen Indikatorfunktion von M soll mit ${}^{M}\{0,1\}$ bezeichnet werden. Für jede Menge M soll nun gezeigt werden, dass ihre Potenzmenge von selber Mächtigkeit ist, wie die Menge aller Indikatorfunktionen, also soll $|P(M)| = |{}^{M}\{0,1\}|$ sein.

Für den Beweis reicht die Angabe einer bijektiven Funktion, welche in diesem Fall durch die Indikatorfunktion gegeben ist, da jeder Teilmenge von M genau eine, eindeutig bestimmte Folge, bestehend aus den Werten 0 und 1 zukommt, sowie umgekehrt auch jeder solchen Folge genau eine Teilmenge entspricht.

---

* Deiser – Einführung in die Mengenlehre

Die Interpretation der Binärdarstellung einer reellen Zahl im Einheitsintervall als Indikatorfunktion einer Teilmenge der natürlichen Zahlen ist der Schlüsselpunkt des nun folgenden Beweises des Satzes $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$.

Es genügt die Gleichmächtigkeit des reellen Einheitsintervalls $I =]0,1]$ mit der Menge aller unendlichen Teilmengen der natürlichen Zahlen $P^*(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ ist unendlich}\}$, zu zeigen, da die Subtraktion einer abzählbaren Menge von einer überabzählbaren Menge, die Mächtigkeit nicht ändert.

Nun gilt es, eine bijektive Funktion $f : I \to P^*(\mathbb{N})$ zu finden. Dazu definiert man für jedes, in kanonischer Binärdarstellung gegebene $x \in I$ $(x = a_0 a_1 a_2 \ldots \;\; mit \;\; a_n \in \{0,1\})$ die Funktion $f(x) = \{n \mid a_n = 1\}$. Wegen der kanonischen Darstellung (siehe Dezimalbruchdarstellung der reellen Zahlen), ist $f(x)$ für alle $x \in I$ unendlich und somit auch Teilmenge von $P^*(\mathbb{N})$.

Auf Grund der Bijektivität der definierten Abbildung folgt die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $P(\mathbb{N})$.

8 ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit beschäftigt sich im Wesentlichen mit der Frage der Existenzberechtigung der irrationalen Zahlen einerseits und andererseits mit den grundlegenden Entdeckungen über die Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen des 19 Jahrhunderts.
Die ersten Aufzeichnungen von so genannten inkommensurablen Größen finden sich in der griechischen Antike und werden in dieser Arbeit nur kurz erwähnt. Der Ursprung des Begriffs der irrationalen Zahl liegt jedenfalls in der geometrischen Anschauung. Eine arithmetische Definition solcher Größen stand wegen der Unmöglichkeit einer endlichen Darstellung außer Frage, vielmehr wurde ihnen die Existenz als Zahlen selber abgesprochen.
Erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts entstand das Bedürfnis einer exakten arithmetischen Definition. Die Grundideen der bekanntesten Darstellungen von Cantor, Dedekind und Weierstraß werden ausführlich wiedergegeben. Zuvor wird dabei der, für die Konstruktionen der irrationalen Größen, zentrale Begriffe der Grenze einer unendlichen Reihe, beziehungsweise Folge, erklärt.
Der andere Schwerpunkt der Arbeit beschäftigt sich mit Cantors wesentlichsten Entdeckungen bezüglich der Irrationalzahlen. Neben der Darstellung des bekannten Diagonalisierungsverfahrens findet sich auch sein ursprünglicher Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, neben den Abzählbarkeitsbeweisen der rationalen, wie der algebraischen Zahlen wieder. Im Anschluss wird der Begriff der Mächtigkeit definiert und in weiterer Folge der Satz von der Unabhängigkeit der Mächtigkeit eines Kontinuums von seiner Dimensionalzahl bewiesen. Zuletzt wird der, durch die Potenzmenge gegebene Zusammenhang von natürlichen und reellen Zahlen aufgeklärt.
Ein weiteres Kapitel diskutiert die Anschauung der Menge der reellen Zahlen als Kontinuum. Hier wird die atomistische Auffassung der intuitionistischen gegenübergestellt.

9 Literaturverzeichnis

Gesamtes Literaturverzeichnis

Aristoteles – *Physik*; Vorlesungen über Natur, Erster Halbband: Bücher I (A) – IV(Δ), (Griechisch – Deutsch), herausgegeben von Hans Günter Zekl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1987

Aristoteles – *Physik*; Vorlesungen über Natur, Zweiter Halbband: Bücher V(E) – VIII(Θ), (Griechisch – Deutsch), herausgegeben von Hans Günter Zekl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988

Bernstein, Felix (1919) – „Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus“; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 28, S. 63 – 78 (GDZ)*

Bolzano, Bernhard (1851) – *Paradoxien des Unendlichen;* Meiner & Reclam, Leipzig, Nachdruck 1975.

Cantor, Georg (1895) – „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“; Mathematische Annalen, Band 46, S. 481 – 513 (GDZ)

Cantor, Georg (1889) – „Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen“; Mathematische Annalen, Band 33, S. 154 (GDZ)

Cantor, Georg (1877) – „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 84, S. 242 – 258 (GDZ)

Cantor, Georg (1887) – „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“; in: Richard Dedekind – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*; Springer-Verlag, Berlin 1932, S.378 – 439 (GDZ)

Cantor, Georg (1890/91) – „Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre“; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 1, 1890/91, S. 75 – 78 (GDZ)

Cantor, Georg (1885) – „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche“; in: Richard Dedekind – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 370 – 377 (GDZ)

Cantor, Georg (1874) – „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“; in: Richard Dedekind – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts;* Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 115 – 119 (GDZ)

Cantor, Georg (1883) – „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“; 5. Fortsetzung, Mathematische Annalen, Band 21, S. 545 – 591 (GDZ)

Cantor, Moritz (1880) – *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*; Teubner-Verlag, Leipzig 1880 (Band 2, Kapitel LXII. Michael Stifel) (GDZ)

* GDZ – Göttinger Digitalisierungszentrum, (http://gdz.sub.uni-goettingen.de/)

Dedekind, Richard (1872) – „Stetigkeiten und irrationale Zahlen“; in: *Gesammelte mathematische Werke*, Band 3, Vieweg Verlag, Braunschweig 1930, S. 315 – 334 (GDZ)

Dedekind, Richard (1888) – „Was sind und was sollen die Zahlen?“; in: *Gesammelte mathematische Werke*, Band 3, Vieweg Verlag, Braunschweig 1930, S. 335 – 392 (GDZ)

Deiser, Oliver (2007 – 2008) – *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*; 2., korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007, 2008

Deiser, Oliver (2002 – 2004) – *Einführung in die Mengenlehre*; 2., verbesserte und erweiterte Auflage – Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002, 2004

Ebbinghaus, H.-D.,… (1983) – *Zahlen*; Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo; Springer, 1983 (Grundwissen Mathematik; 1)

Emrich, Johannes (2004) – *Die Logik des Unendlichen*; in: *Logische Philosophie*, Band 14, Logos Verlag Berlin, 2004

Euclides – *Die Elemente;* Bücher I – XIII / von Euklid. Aus dem Griechischen übersetzt von Clemens Thaer und einem Vorwort von W. Trageser. – Reprint, 3. Auflage – Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch 1997
(*Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften* ; Bd. 235)

Fraenkel, Adolf (1932) – „Das Leben Georg Cantors“ – in: *Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von Ernst Zemelo, Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 452 – 483 (GDZ)

Fraenkel, Adolf (1923) – „Die neueren Ideen zur Grundlegung der Analysis und Mengenlehre“; Vortrag, gehalten auf der Deutschen Mathematikertagung zu Marburg am 21. September 1923, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Band 33, Teubner-Verlag 1925, S. 97 – 104 (GDZ)

Fraenkel, Adolf (1928) – *Einleitung in die Mengenlehre;* Springer-Verlag, Berlin 1928 (GDZ)

Guillen, Michael (1984) – *Brücken ins Unendliche*; 2.Auflage August 1987, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München

Gutberlet, Constantin (1878) – *Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*; Verlag der G. Faber'schen Buchhandlung, Mainz, 1878

Heine, E. (1872) – „Die Elemente der Functionenlehre“; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 74, de Gruyter Verlag, 1872, S. 172 – 188 (GDZ)

Heuser, Harro (2001) – *Lehrbuch der Analysis*; 14. Auflage B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001

Hilbert, David (1925) – „Über das Unendliche“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 36, Teubner Verlag 1927, S. 201 – 216 (GDZ)

Illigens, E. (1889) – „Zur Definition der Irrationalzahlen“; Mathematische Annalen, Band 35, S. 451 – 456 (GDZ)

lligens, E. (1888) – „Zur Weierstrass’- Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen“; Mathematischen Annalen, Band 33, S. 155 – 160 (GDZ)

Kant, Immanuel (1781) – *Kritik der reinen Vernunft*; Willhelm Weischedel, 14. Auflage 2000, Frankfurt, Suhrkamp-Taschenbuch

Kaulbach, Friedrich (1966) – „Philosophisches und mathematisches Kontinuum“; in: *Rationalität, Phänomenalität, Individualität,* Festgabe für H. u. M. Glockner, Bonn 1966

Klein, F. (1968) – *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*; Springer-Verlag, Berlin 1968 (GDZ)

Knobloch, Eberhard (2007) – *Michael Stifel vollständiger Lehrgang der Arithmetik*; Deutsche Übersetzung von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger, Verlag: Königshausen & Neumann, 2007

Knopp, Konrad (1996) – *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*; Springer Verlag, 6.Auflage, Berlin 1996 (GDZ)

Kokkinos, J. (1997) – *Das mathematische Inkommensurable und Irrationale bei Platon;* Frankfurt am Main; Berlin; Bern; New York; Paris; Wien : Lang, 1997
(*Wiener Arbeiten zur Philosophie. Universitätsstudien;* Bd. 1)

Laugwitz, Detlef (1986) – *Zahlen und Kontinuum: e. Einf. in d. Infinitesimalmathematik*; Mannheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1986

Locher, Ernst L. (1956) – „Merkwürdiges vom Kontinuum“; Elemente der Mathematik, Band XI Nr.3, 1956, S. 49 – 50 (GDZ)

Lorenzen, Paul (1957) – „Das Aktual-Unendliche in der Mathematik“; Philosophia naturalis 4: 3-11; Klostermann-Verlag. S. 94-103

Meschkowski, H. (1983) – *Georg Cantor – Leben, Werk und Wirkung* ; 2., erw. Aufl.- Mannsheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1983

Minkowski, Hermann (1901) – „Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen“; Mathematische Annalen, Band 54, Springer-Verlag, Leipzig 1901, S 91 – 125 (GDZ)

Müller, A (1923) – „Über Zahlen als Zeichen“; Mathematische Annalen, Band 90, Springer-Verlag 1923, S. 153 – 158 (GDZ)

Pasch, M. (1892) – „Ueber die Einführung der irrationalen Zahlen“; Mathematischen Annalen, Band 40, Springer-Verlag, Leipzig 1892, S. 149 – 153 (GDZ)

Perron, Oskar (1907) – „Was sind und sollen die irrationalen Zahlen?“; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 16, Teubner-Verlag 1907, S. 142 – 155 (GDZ)

Pringsheim, Alfred (1898) – „Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse“; Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band 1, Teil 1, Leipzig, 1898, S. 47 – 146 (GDZ)

Purkert, W., und Ilgauds H. J. (1985) – *Georg Cantor;* 1. Aufl. – Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985

Schoenflies, Arthur (1931) – *Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes;* Springer-Verlag, Berlin, 1931 (GDZ)

Seeck, G.A. (1975) – *Die Naturphilosophie des Aristoteles*; Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1975, Max Dehn – „Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles“ (S.199 – 218), Wolfgang Wieland – „Das Kontinuum in der aristotelischen Physik“ (S. 251 – 300)

Tap, Christian (2005) – *Kardinalität und Kardinäle*; Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit, Franz Steiner Verlag, 2005

Taschner, Rudolf J. (1991) – *Lehrgang der konstruktiven Mathematik, 1. Teil: Zahl und Kontinuum*; Wien : Manz; Wien : Hölder-Pichler-Tempsky, 1991

Veronese, Giuseppe (1894) – *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*, Leipzig 1894 (Übersetzter: Adolf Schepp) (GDZ)

Waismann, Friedrich (1936) – *Einführung in das mathematische Denken*; Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1996

Waschkies, Hans-Joachim(1977) – *Von Eudoxos zu Aristoteles – Das Fortwirken der Eudoxischen Proportionentheorie in der Aristotelischen Lehre vom Kontinuum*; Verlag B. R. – Amsterdam - 1977

Weyl, Hermann (1918) – *Das Kontinuum – Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis;* Leipzig, Verlag von Veit & Comp. 1918

Weyl, Hermann (1921) – „Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik“; (Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich.), Mathematische Zeitschrift, Band 10, Springer-Verlag Berlin, 1921, S. 39 – 79 (GDZ)

BILDNACHWEISE

S. 25 – Die Abbildung wurde eigenhändig mit dem Programm „Paint Shop Pro 7 (2)“ erstellt.

S. 49 – Die Abbildung lehnt sich an eine Darstellung, wie sie in Heusers Lehrbuch der Analysis (siehe Literaturliste) auf Seite 138 zu finden ist.

Literaturangaben der einzelnen Kapitel

Die Entdeckung der Inkommensurabilität

Deiser, Oliver (2007 – 2008) – *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*; 2., korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007, 2008
(Kapitel 1.1 Irrationale Zahlen)

Ebbinghaus, H.-D.,… – *Zahlen*; Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo; Springer, 1983 (Grundwissen Mathematik; 1)
(Kapitel 2. Reelle Zahlen - § 1. Historisches)

Euclides – *Die Elemente;* Bücher I – XIII / von Euklid. Aus dem Griechischen übersetzt von Clemens Thaer und einem Vorwort von W. Trageser. – Reprint, 3. Auflage – Thun ; Frankfurt am Main : Deutsch 1997
(*Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften* ; Bd. 235)
(X.. Buch)

Kokkinos, J. (1997) – *Das mathematische Inkommensurable und Irrationale bei Platon;* Frankfurt am Main; Berlin; Bern; New York; Paris; Wien : Lang, 1997
(*Wiener Arbeiten zur Philosophie. Universitätsstudien;* Bd. 1)
(Kapitel 1. Allgemeines zum mathematischen Inkommensurablen und Irrationalen, Kapitel 2. Die Pythagoreer. Allgemeines über ihre Weltanschauung und ihre Lehre)

Überblick der wichtigsten historischen Entdeckungen nach der Antike

Ebbinghaus, H.-D.,… – *Zahlen*; Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo; Springer, 1983 (Grundwissen Mathematik; 1)
(Kapitel 2. Reelle Zahlen - § 1. Historisches)

Cantor, Moritz – *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*; Teubner-Verlag, Leipzig 1880 (Band 2, Kapitel LXII. Michael Stifel) (GDZ)

Deiser, Oliver (2007 – 2008) – *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*; 2., korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007, 2008
(Kapitel 1.1 Irrationale Zahlen, Intermezzo: Zur Geschichte der Analysis)

Knobloch, Eberhard (2007) – *Michael Stifel vollständiger Lehrgang der Arithmetik*; Deutsche Übersetzung von Eberhard Knobloch und Otto Schönberger, Verlag: Königshausen & Neumann, 2007
(Buch II., Kapitel 1. Vom Wesen der irrationalen Zahlen)

Pringsheim, Alfred (1898) – „Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse“; Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band 1, Teil 1, Leipzig, 1898, S. 47 – 146 (GDZ)
(Kapitel I. Irrationalzahlen)

Das Unendliche und die Irrationalzahlen

Bernstein, Felix (1919) – „Die Mengenlehre Georg Cantors und der Finitismus“; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 28, S. 63 – 78 (GDZ)*

Bolzano, Bernhard (1851) – *Paradoxien des Unendlichen;* Meiner & Reclam, Leipzig, Nachdruck 1975.
Cantor, Georg (1895) – „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“; Mathematische Annalen, Band 46, S. 481 – 513 (GDZ)

Cantor, Georg (1887) – „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“; in: Richard Dedekind – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*; Springer-Verlag, Berlin 1932, S.378 – 439 (GDZ)

Cantor, Georg (1885) – „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche“; in: Richard Dedekind – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts,* Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 370 – 377 (GDZ)

Cantor, Georg (1883) – „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“; 5. Fortsetzung, Mathematische Annalen, Band 21, S. 545 – 591 (GDZ)

Fraenkel, Adolf (1928) – *Einleitung in die Mengenlehre;* Springer-Verlag, Berlin 1928 (GDZ)
(Erstes Kapitel. Grundlagen. Begriff der Kardinalzahl)

Gutberlet, Constantin (1878) – *Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*; Verlag der G. Faber'schen Buchhandlung, Mainz, 1878

Hilbert, David (1925) – „Über das Unendliche“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 36, Teubner Verlag 1927, S. 201 – 216 (GDZ)

Lorenzen, Paul (1957) – „Das Aktual-Unendliche in der Mathematik“; Philosophia naturalis 4: 3-11; Klostermann-Verlag. S. 94-103

Meschkowski, H. (1983) – *Georg Cantor – Leben, Werk und Wirkung* ; 2., erw. Aufl.- Mannsheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1983
(Kapitel V.3. Das Aktual-Unendliche)

Seeck, G.A. (1975) – *Die Naturphilosophie des Aristoteles*; Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1975, Max Dehn – „Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles“ (S.199 – 218)

* GDZ – Göttinger Digitalisierungszentrum, (http://gdz.sub.uni-goettingen.de/)

Das Kontinuum

Aristoteles – *Physik*; Vorlesungen über Natur, Erster Halbband: Bücher I (Α) – IV(Δ), (Griechisch – Deutsch), herausgegeben von Hans Günter Zekl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1987

Aristoteles – *Physik*; Vorlesungen über Natur, Zweiter Halbband: Bücher V(Ε) – VIII(Θ), (Griechisch – Deutsch), herausgegeben von Hans Günter Zekl, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1988

Cantor, Georg (1883) – „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“; 5. Fortsetzung, Mathematische Annalen, Band 21, S. 545 – 591 (GDZ)
(§ 10)

Deiser, Oliver (2007 – 2008) – *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*; 2., korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007, 2008
(Kapitel 1.3 Charakterisierungen und Konstruktionen – Zur Geschichte des Kontinuumsbegriffs)

Emrich, Johannes – *Die Logik des Unendlichen*; in: *Logische Philosophie*, Band 14, Logos Verlag Berlin, 2004
(Kapitel 5. Das Kontinuum)

Guillen, Michael (1984) – *Brücken ins Unendliche*; 2.Auflage August 1987, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, München
(I. Phantasien – Kontinuität und Zahlen, Irrationales Denken)

Kant, Immanuel (1781) – *Kritik der reinen Vernunft*; Willhelm Weischedel, 14. Auflage 2000, Frankfurt, Suhrkamp-Taschenbuch

Kaulbach, Friedrich (1966) – „Philosophisches und mathematisches Kontinuum“; in: *Rationalität, Phänomenalität, Individualität,* Festgabe für H. u. M. Glockner, Bonn 1966

Laugwitz, Detlef (1986) – *Zahlen und Kontinuum: e. Einf. in d. Infinitesimalmathematik*; Mannheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1986
(Vorbereitungen: Kontinuum und Zahlen)

Locher, Ernst L. (1956) – „Merkwürdiges vom Kontinuum“; Elemente der Mathematik, Band XI Nr.3, 1956, S. 49 – 50 (GDZ)

Lorenzen, Paul (1957) – „Das Aktual-Unendliche in der Mathematik“; Philosophia naturalis 4: 3-11; Klostermann-Verlag. S. 94-103

Seeck, G.A. (1975) – *Die Naturphilosophie des Aristoteles*; Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1975, Max Dehn – „Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles“ (S.199 – 218), Wolfgang Wieland – „Das Kontinuum in der aristotelischen Physik“ (S. 251 – 300)

Veronese, Giuseppe (1894) – *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*, Leipzig 1894 (Übersetzter: Adolf Schepp) (GDZ)
(Buch I. Die Gerade und die geradlinigen Figuren im Allgemeinen)

Weyl, Hermann (1918) – Das Kontinuum – Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis; Leipzig, Verlag von Veit & Comp. 1918
(Kapitel II. Zahlbegriff und Kontinuum, §6. Anschauliches und mathematisches Kontinuum)

Die klassischen Definitionen der Irrationalzahlen

Cantor, Georg (1889) – „Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstrass'-Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen“; Mathematische Annalen, Band 33, S. 154 (GDZ)

Cantor, Georg (1883) – „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten“; 5. Fortsetzung, Mathematische Annalen, Band 21, S. 545 – 591 (GDZ)
(§ 9)

Dedekind, Richard (1872) – „Stetigkeiten und irrationale Zahlen“; in: *Gesammelte mathematische Werke*, Band 3, Vieweg Verlag, Braunschweig 1930, S. 315 – 334 (GDZ)

Deiser, Oliver (2007 – 2008) – *Reelle Zahlen – Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*; 2., korrigierte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007, 2008
(Kapitel 1.3 Charakterisierungen und Konstruktionen)

Ebbinghaus, H.-D.,… – *Zahlen*; Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo; Springer, 1983 (Grundwissen Mathematik; 1)
(Kapitel 2. Reelle Zahlen, § 2. Dedekindsche Schnitte, § 3. Fundamentalfolgen, § 4. Intervallschachtelungen)

Heine, E. (1872) – „Die Elemente der Functionenlehre“; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 74, de Gruyter Verlag, 1872, S. 172 – 188 (GDZ)

Heuser, Harro (2001) – *Lehrbuch der Analysis*; 14. Auflage B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001

Illigens, E. (1889) – „Zur Definition der Irrationalzahlen“; Mathematische Annalen, Band 35, S. 451 – 456 (GDZ)

lligens, E. (1888) – „Zur Weierstrass’- Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen“; Mathematischen Annalen, Band 33, S. 155 – 160 (GDZ)

Knopp, Konrad (1996) – *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*; Springer Verlag, 6.Auflage, Berlin 1996 (GDZ)

Pringsheim, Alfred (1898) – „Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse“; Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band 1, Teil 1, Leipzig, 1898, S. 47 – 146 (GDZ)
(Erster Teil. Irrationalzahlen und Grenzbegriff)

Tap, Christian (2005) – *Kardinalität und Kardinäle*; Wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit, Franz Steiner Verlag, 2005

Cantors Beitrag

Cantor, Georg (1895) – „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"; Mathematische Annalen, Band 46, S. 481 – 513 (GDZ)

Cantor, Georg (1877) – „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre"; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 84, S. 242 – 258 (GDZ)

Cantor, Georg (1890/91) – „Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre"; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band 1, 1890/91, S. 75 – 78 (GDZ)

Cantor, Georg (1874) – „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen"; in: Richard Dedekind – *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts;* Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 115 – 119 (GDZ)

Cantor, Georg (1883) – „Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten"; 5. Fortsetzung, Mathematische Annalen, Band 21, S. 545 – 591 (GDZ)
(§ 1-3)

Dedekind, Richard (1888) – „Was sind und was sollen die Zahlen?"; in: *Gesammelte mathematische Werke*, Band 3, Vieweg Verlag, Braunschweig 1930, S. 335 – 392 (GDZ)

Deiser, Oliver (2002 – 2004) – *Einführung in die Mengenlehre*; 2., verbesserte und erweiterte Auflage – Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002, 2004
(1. Abschnitt – Einführung)

Fraenkel, Adolf (1932) – „Das Leben Georg Cantors" – in: *Georg Cantor – Gesammelte Abhandlungen*, herausgegeben von Ernst Zemelo, Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 452 – 483 (GDZ)

Heuser, Harro (2001) – *Lehrbuch der Analysis*; 14. Auflage B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2001
(Kapitel II.19 Mengenvergleiche, III. Grenzwerte und Zahlenfolgen)

Meschkowski, H. (1983) – *Georg Cantor – Leben, Werk und Wirkung*; 2., erw. Aufl.- Mannsheim; Wien; Zürich: Bibliographisches Institut, 1983
(Kapitel: II., III, IV., IX.)

Purkert, W., und Ilgauds H. J. (1985) – *Georg Cantor;* 1. Aufl. – Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985
(Die Mengenlehre entsteht, S.19 – 51)

Lebenslauf

Ich bin als Sohn von Franz und Sonja Steigberger, geb. Hamersky, am 11. April 1981 in St. Pölten geboren. 1987 bis 1991 besuchte ich die Volksschule in Neulengbach, 1991 bis 2000 das Gymnasium in St. Pölten, mit mathematisch-naturwissenschaftlichem Schwerpunkt. Dieses beendete ich 2000 mit der Maturaprüfung.
Im Wintersemester 2001 begann ich das Lehramtsstudium in PP und Mathematik. Seit dem Sommersemester 2007 studiere ich außerdem noch Russisch.