DIPLOMARBEIT

Das Zeichensystem N

Eine aussagenlogische Notation

eingereicht von

Margarete Leitner

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Philosophie (Mag. phil.)

Wien, im September 2008

Studienkennzahl: A 296 315
Studienrichtung: Philosophie/ Kunstgeschichte

Betreuerin: MMag. DDr. Esther Ramharter

INHALT

EINLEITUNG

Das Zeichensystem N, der Gegenstand der vorliegenden Arbeit, wurde entwickelt ausgehend von zentralen semiotischen Fragestellungen des Tractatus logico-philosophicus. N ist eine aussagenlogische Notation mit den folgenden Besonderheiten:

1) Sie ist eine zweidimensionale Notation.
2) Sie hat keine Verknüpfungszeichen und keine Klammern.
3) Dasselbe Satzeichen kann auf mehr als eine Art aufgefaßt werden, wobei die unterschiedlichen Lesarten äquivalent sind.
4) Die Satzzeichen sind transparent bezüglich der fundamentalen logischen Eigenschaften von Sätzen und logischen Beziehungen zwischen Sätzen, soweit diese im Rahmen der Aussagenlogik aufweisbar sind.

Zur Darstellung des Gegenstands sei bemerkt:

1) Die Lektüre erfordert keine Vorkenntnisse auf dem Gebiet der formalen Logik. Vorausgesetzt werden lediglich einige wenige bekannteste, einfachste Begriffe der Mathematik, insbesondere der Mengenlehre. Allenfalls ist eine gewisse Sensibilität für den Umgang mit Variablen verlangt.
2) Wir haben uns weitgehend um durchgängige Nachvollziehbarkeit bemüht.
3) Der aus den genannten Ansprüchen resultierenden Mühsamkeit der Lektüre steht die Möglichkeit gegenüber, Teile der Arbeit zu überspringen.

In den Kapiteln 'Die aussagenlogische Sprache AL' und 'Interpretation von AL' werden im Rahmen unserer Erfordernisse die Grundlagen der Aussagenlogik dargestellt. Das erstgenannte, der Syntax gewidmete Kapitel, bewegt sich im Rahmen der üblichen Standards ohne sich an ein bestimmtes Vorbild anzulehnen, das zweitgenannte, der Semantik zuordenbare, orientiert sich zum Teil an Ansätzen des frühen und mittleren

Wittgenstein[1]. Dies in Abweichung von der vorherrschenden reduktionistischen Auffassung der Wahrheitsfunktionen, welche aufgrund der formalen Autonomie der aussagenlogischen Semantik in technischer Hinsicht zwar ausreichend ist, das Prinzip der logischen Analyse aber verschleiert, was zu philosophischen Mißverständnissen führen kann.

Der Hauptteil der vorliegenden Arbeit umfaßt im wesentlichen die folgenden Schritte:

1) Vorstellung des Zeichensystems N.
2) Vorstellung der aussagenlogischen Sprache AL.
   AL ist eine herkömmliche lineare aussagenlogische Notation mit Verknüpfungszeichen und Klammern.
3) Definition eines Übertragungsverfahrens Ü1.
   Ü1 ordnet jedem syntaktisch vollwertigen Zeichen von AL, jeder wohlgeformten Formel (wff), unendlich viele syntaktisch vollwertige Zeichen von N, unendlich viele wohlgeformte Anordnungen (wAon) zu.
4) Definition dreier Leseverfahren, L1, L2, L3. (Ein weiteres Leseverfahren, L', dient ausschließlich technischen Zwecken.)
   L1 ordnet jeder wAo von N genau eine wff von AL zu, ebenso L2. L3 ordnet jeder wAo von N unendlich viele wffs von AL zu.
5) Interpretation von AL.
6) Beweis der folgenden Zusammenhänge:
   a) Gegeben sei eine wff. Dazu eine wAo, die dieser wff durch Ü1 zugeordnet wird. Dazu eine wff, die dieser wAo durch L1, L2 oder L3 zugeordnet wird. Dann sind die beiden wffs semantisch äquivalent. (Sie ergeben also bei gleicher Interpretation der frei interpretierbaren Teile denselben Gehalt.)
   b) Gegeben sei eine wAo. Dazu zwei wffs, deren jede dieser wAo durch eines der Leseverfahren L1, L2 oder L3 zugeordnet wird. Dann sind die beiden wffs semantisch äquivalent.

[1] Als Einführungen in die elementare Logik seien hier Carnap 1960, Kutschera 1967 und Mates 1978 genannt. Zur Position Wittgensteins s. Wittgenstein 1966, Wittgenstein 1984, Wittgenstein 1996, Ramsey 1966 und Waismann 1973.

Abgeleitete Feststellungen in der Art von Theoremen sind durch eine eingeklammerte fortlaufende Nummer über dem betreffenden Absatz ausgewiesen (numerierte Sätze).

In den meisten Fällen befindet sich bei einem numerierten Satz unter der Überschrift 'Beweis' ein nach einem bestimmten Muster strukturierter Beweis für den Satz (Beweise mit Absatzzählung). Die zentralen Gliederungseinheiten eines solchen Beweises sind Absätze, welche mit Nummern in arabischen Ziffern durchgezählt sind. Den einzelnen Absätzen sind außerdem Zahlen in kleinen römischen Ziffern beigegeben. (Ihren Zweck werden wir sogleich erläutern.)

Es ist außerdem möglich, daß ein Textabschnitt, der einen oder mehrere numerierte Sätze einschließt, eventuell zusammen mit einem Beweis mit Absatzzählung, einen Beweis für einen numerierten Satz darstellt. In diesem Fall wird der intendierte Satz meist angekündigt. (z. B.: '⇒ Satz 32')

Beweise mit Absatzzählung können grundsätzlich übersprungen werden, ohne daß das Verständnis des übrigen beeinträchtigt wird.

In bestimmten Fällen ist neben der Nummer eines numerierten Satzes das Zeichen '>' oder '°' vermerkt. (gekennzeichnete numerierte Sätze).
Unter einer Serie von gekennzeichneten numerierten Sätzen verstehen wir eine Abfolge von gekennzeichneten numerierten Sätzen, für die gilt:

1) Der letzte numerierte Satz vor dem ersten Satz der Abfolge ist nicht gekennzeichnet.
2) Zwischen den einzelnen Sätzen der Abfolge befinden sich keine nicht gekennzeichneten numerierten Sätze.
3) Der erste numerierte Satz nach dem letzen Satz der Abfolge ist nicht gekennzeichnet.

Gegeben sei eine Serie von gekennzeichneten numerierten Sätzen. Wir setzen voraus, daß alle Beweise mit Absatzzählung innerhalb der Serie übersprungen werden, ebenso ein eventuell vorhandener Beweis mit Absatzzählung für den ersten numerierten Satz, der auf die Serie folgt. Dann können auch alle mit '>' gekennzeichneten Sätze der Serie übersprungen werden, ohne daß das Verständnis des übrigen beeinträchtigt wird.

Es ist außerdem möglich, das Kapitel 'Ü1-L1-Äquivalenz' weitgehend zu überspringen, sofern die Sätze 113 und 123 zur Kenntnis genommen werden. Ähnliches gilt für das Kapitel 'L1-L3-Äquivalenz'. Hier sind die Sätze 135 und 136 zu beachten.

Hinweise zu Beweisen mit Absatzzählung:

Die zentralen Gliederungseinheiten dieser Beweise sind Absätze, welche mit Nummern in arabischen Ziffern durchgezählt sind. Außerdem ist jedem Absatz noch eine Zahl in kleinen römischen Ziffern beigegeben (Strukturierungszahlen).
Als allgemeine Regel gilt: Ein Absatz A[u] eines Beweises steht innerhalb des Beweises so lange zur Verfügung, bis sich eine der folgenden Situationen ergibt:

1) Es erscheint ein Absatz, der eine niedrigere Strukturierungszahl hat als A[u]. Dann ist A[u] von diesem Absatz an bis zum Ende des Beweises nicht mehr verfügbar.
2) Nach einem Absatz, der dieselbe Strukturierungszahl hat wie A[u], erscheint das Zeichen '~'. Dann ist A[u] von dem folgenden Absatz an bis zum Ende des Beweises nicht mehr verfügbar.

Selbstverständlich ist es möglich, daß ein Beweisabschnitt, dessen Absätze für einen bestimmten Absatz nicht verfügbar sind, als Ganzes für die Begründung dieses Absatzes herangezogen wird.

Die Strukturierungszahl wird in den folgenden Fällen angehoben:

1) wenn die Bedingung eines zu beweisenden Konditionals angenommen wird
2) bei einer Fallunterscheidung
3) wenn für eine reductio ad absurdum das Gegenteil des zu Beweisenden angenommen wird
4) wenn für den Beweis einer allgemeinen Aussage über Gegenstände einer bestimmten Art ein beliebiger Gegenstand dieser Art angenommen wird.

Es wird sich des öfteren die folgende Situation ergeben:

1) Die Existenz und Einzigkeit eines Gegenstands einer bestimmten Art oder die Existenz mindestens eines Gegenstands einer bestimmten Art sind gesichert.
2) Wir versehen den bewußten Gegenstand mit einer Gebrauchsbezeichnung bzw. greifen einen beliebigen Gegenstand der bewußten Art heraus und versehen ihn mit einer Gebrauchsbezeichnung.

Beispiele:
(α)
Es gibt genau eine Zahl, sodaß diese größer als 200 und eine Primzahl ist, und alle Zahlen, die größer als 200 und zugleich Primzahlen sind, mit dieser Zahl identisch sind oder größer sind als sie.

Diese Zahl sei a.

(β)

Es gibt mindestens eine Primzahl, die größer ist als 200.

Eine solche sei b.

Die zusätzliche Vorgabe ist so zu interpretieren, daß sie der Existenzbehauptung inhaltlich nichts hinzufügt. Die eingeführte Bezeichnung ist dementsprechend zu handhaben.

Wir heben in solchen Fällen die Strukturierungszahl für die zusätzliche Vorgabe nicht an.

Allgemeine Hinweise zu sprachlichen Konventionen:

(verbindlich nur im Bereich der technischen Rede)

In zwei verschiedene, gleich definierte Variablen kann gleich oder verschieden eingesetzt werden. Die Verwendung des Plurals hebt in solchen Fällen die Möglichkeit gleicher Einsetzung nicht auf.

Beispiel:

'x, y seien Zahlen > 3.'

Es ist möglich, in x und y verschiedene Zahlen einzusetzen, oder auch dieselbe Zahl.

Kommt in einer Zeichenkombination K_1 eine Zeichenkombination K_2 vor, so heißt derjenige Teil von K_1, der K_2 enthält, ein Vorkommnis von K_2 in K_1.

Stellen wir in einem Text, der unter Anführungszeichen steht, Vorkommnisse einer Variablen kursiv, so wird nicht das Zeichen der Variablen zitiert, zumindest nicht unmittelbar. Es ist entweder eine beliebige, gleich definierte Variable gemeint oder diejenige Zeichenkombination, deren Vorkommnisse die Vorkommnisse der Variablen im Einsetzungsfall ersetzen. (Dies gilt nicht nur für Variablen, sondern auch für funktional vergleichbare Ausdrücke.)

Mit 'Menge' meinen wir immer eine nichtleere Menge.

Unter einer Reihe verstehen wir eine Aufzählung von Gegenständen, bei der es erstens auf die Reihenfolge ankommt, und in der zweitens ein Gegenstand auch mehrmals aufscheinen kann. Ein Gegenstand, der an u-ter Stelle angeführt wird, heißt das u-te Glied der Reihe.

Ein Ausdruck der Form '$a_1, ..., a_n$' bezeichnet eine endliche Reihe. Wenn im Einzelfall sich nicht anderes aus dem Kontext ergibt, oder festgelegt wird, dann soll gelten: n≥1. Die Reihe hat also mindestens ein Glied.

Wir werden außerdem Typen von Ausdrücken ähnlicher Art einführen. Für sie soll Vergleichbares gelten.

Zur Erläuterung des allgemeinen Gebrauchs solcher Typen von Audrücken die folgenden Beispiele: (Es ergibt in jeder Zeile der linke Ausdruck für n=1 bzw n=2 das in der Mitte Stehende und für n=5 das rechts Stehende.)

$a_1, ..., a_n$	a_1	a_1, a_2, a_3, a_4, a_5
$W(...W(a_1, a_2), ..., a_n)$ $(n\geq 2)$	$W(a_1, a_2)$	$W(W(W(W(a_1, a_2), a_3), a_4), a_5)$
$(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)$	φ_1	$(\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3\wedge_4\wedge\varphi_5)$
$(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\wedge\varphi_{n+1})$ $(n\geq 2)$	$(\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3)$	$(\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3\wedge\varphi_4\wedge\varphi_5\wedge\varphi_6)$
$((\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)\wedge\varphi_{n+1})$ $(n\geq 2)$	$((\varphi_1\wedge\varphi_2)\wedge\varphi_3)$	$((\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3\wedge\varphi_4\wedge\varphi_5)\wedge\varphi_6)$

Das Wort 'oder' hat von sich aus nichtausschließende Bedeutung. Eine Ausschließung kann sich aber aus dem Kontext ergeben.

Der Gebrauch von Wendungen der Form 'alle *B*', 'jedes *B*' ist möglich, ohne daß die Existenz mindestens eines B gesichert ist. Auch impliziert eine Behauptung über alle B oder jedes B nicht die Existenz mindestens eines B.
Ein Satz der Form
'Alle *B sind F*.' bzw.
'Jedes *B ist F*.'
kann umschrieben werden mit:
'Wenn etwas ein *B* ist, dann *ist* es *F*.'
Er ist, im Fall, daß es kein B gibt, wahr. Also folgt aus ihm nicht, daß es etwas gibt, das F ist.
Beispiel:
'Alle Zahlen, die größer als 20 und kleiner als 30 und ein Vielfaches von 17 sind, sind durch 17 teilbar.' bedeutet:
Nimm eine beliebige Zahl x. Wenn x größer als 20 und kleiner als 30 und ein Vielfaches von 17 ist, dann ist x durch 17 teilbar.
Dies ist wahr.

Wendungen mit dem bestimmten Artikel der Form 'das *B*' (singuläre Kennzeichnungen) werden im allgemeinen nur dann verwendet, wenn Existenz und Einzigkeit des beschriebenen Gegenstands gesichert sind. Sie werden nicht mit dem Satz, in welchem die singuläre Kennzeichnung vorkommt, angenommen oder behauptet.

Die Negation eines Satzes der Form

'Das *B ist F*.'

ist:

'Das *B ist nicht F*.'

Wir weichen von der oben formulierten Regel nur dann ab, wenn der Gebrauch eindeutig und die Verwendung der Kennzeichnung unproblematisch ist.

Ist die Sicherung der Existenz mindestens eines Gegenstands einer bestimmten Art trivial, so kann es sein, daß wir entsprechende Hinweise fortlassen, auch dann, wenn die Sicherung wichtig ist. In sensiblen Fällen weist der Vermerk '[*e*.]' (– hier zitieren wir das kursive 'e' –) darauf hin, daß die Existenz mindestens eines Gegenstands der beschriebenen Art gewährleistet ist.

KAPITEL 1

DIE ZEICHEN VON N

Bei der Behandlung künstlicher Sprachen sind zwei Unterscheidungen von grundlegender Bedeutung: erstens die Abgrenzung von Objekt- und Metasprache und zweitens die Bereichsaufteilung in Syntax und Semantik.

Ist eine künstliche Sprache selbst Gegenstand der Betrachtung, so ist sie die Objektsprache, während die Sprache, mit der auf sie Bezug genommen wird, die Metasprache ist. Objekt- und Metasprache sind streng voneinander zu trennen.

Die Syntax ist die Lehre von den Zeichen einer Sprache. Die Syntax behandelt die Sprache ausschließlich auf der Zeichenebene.

Die Semantik befaßt sich mit den Zuordnungen zu den Zeichen bzw. mit Zusammenhängen, die sich aus diesen Zuordnungen ergeben. Im engeren Sinne versteht man unter Semantik die Lehre von den Bedeutungen der Zeichen.

Das gegenständliche Kapitel ist der Syntax von N gewidmet.

Die Zeichen von N bestehen aus waagrechten und senkrechten, färbigen Balken, welche in Reihen und Kolonnen zu voll besetzten Vierecken angeordnet sind.

Die Balken können z. B. von bunten Dominosteinen repräsentiert werden. Besser geeignet sind quadratische Spielsteine mit entsprechend adaptierter Oberfläche, da sie bei beliebiger Ausrichtung aneinander geschoben und blockweise bewegt werden können.

1.1 BALKENANORDNUNGEN

Jedes materielle Objekt, das als physisches Zeichen von N gelten kann, hat die Gestalt einer Balkenanordnung, kurz Anordnung (Ao).

In Bezug auf Balkenanordnungen vereinbaren wir das folgende:

1) Balkenfarben sind die Farben Blau, Grün, Rot, Gelb, gegebenenfalls weitere Farben.
   Die Anzahl der Balkenfarben ist endlich und ≥4, darüber hinaus beliebig.
   Die Balkenfarben sind in eine Reihe geordnet, die mit den Farben Blau, Grün, Rot, Gelb beginnt.
2) Balkenausrichtungen sind die Ausrichtung Waagrecht und die Ausrichtung Senkrecht.
3) Gegeben sei eine freistehende Gestalt, die aus endlich vielen Balken besteht. Die Balken sollen in Reihen und Kolonnen zu einem voll besetzten Viereck angeordnet sein. (Eine Reihe bzw. Kolonne von Balken kann aus nur einem Balken bestehen.)
   Jeder Balken soll eine Farbe haben, die eine Balkenfarbe ist.
   Jeder Balken soll entweder waagrecht oder senkrecht ausgerichtet sein.
   (Farbe und Ausrichtung eines Balkens sind unabhängig von Farbe und Ausrichtung der übrigen Balken.)
   Eine solche Gestalt ist eine Ao.
4) Nichts sonst ist eine Ao.

Beispiel für eine Ao, s. Abb. 1.

Im vorliegenden Zusammenhang verstehen wir unter einer 'Reihe' bzw. 'Kolonne' immer eine bestimmte ganze Reihe bzw. Kolonne von Balken einer bestimmten Ao.
Eine bestimmte Reihe bzw. Kolonne einer Ao wird durch ihre Lage innerhalb der Ao identifiziert. Die Lage innerhalb der Ao ist ihr wesentlich.
Ebenso verstehen wir unter einem 'Balken' immer einen bestimmten Balken einer bestimmten Ao.
Ein bestimmter Balken einer Ao wird durch seine Lage innerhalb der Ao identifiziert. Die Lage innerhalb der Ao ist ihm wesentlich.

Eine Ao mit nur einem Balken nennen wir punktförmig, mit mindestens zwei Balken und nur einer Reihe waagrecht linear, mit mindestens zwei Balken und nur einer Kolonne senkrecht linear, mit mindestens zwei Reihen und mindestens zwei Kolonnen flächig.

Für nicht näher bestimmte Aon verwenden wir die Buchstaben: 'a', 'd', 'e', 'f', 'g'; 'a_1', d_1' usw.

Die Reihen einer Ao zählen wir von oben nach unten, die Kolonnen von links nach rechts. Die Balken innerhalb einer Reihe zählen wir von links nach rechts, die Balken innerhalb einer Kolonne von oben nach unten.

a sei eine Ao mit n Reihen und m Kolonnen. Für die Reihen von a schreiben wir: 'r1(*a*)', ..., 'r*n*(*a*)', für die Kolonnen von a: 'c1(*a*)', ..., 'c*m*(*a*)'.
Für einen Balken von a, der zugleich der u-ten Reihe (u≤n) und der v-ten Kolonne (v≤m) angehört, schreiben wir 'b*u*:*v*'.
(Der Hinweis auf die Ao kann entfallen, wenn sich der Bezug aus dem Zusammenhang ergibt. Dies gilt auch bei vergleichbaren Konventionen.)

Unter einem Anordnungsteil (AoT) einer Ao a verstehen wir einerseits den flächendeckenden Teil, andererseits jeden zusammenhängenden kleineren Teil von a, der in isolierter Position selbst eine Ao wäre.
Ein bestimmter AoT einer bestimmten Ao wird durch seine Dimensionierung und seine Lage innerhalb der Ao identifiziert. Seine Dimensionierung und seine Lage innerhalb der Ao sind ihm wesentlich.

Der flächendeckende AoT einer Ao ist mit ihr identisch.

Für nicht näher bestimmte AoTe einer Ao a schreiben wir 'd(*a*)', 'e(*a*)' usw.

Einen AoT d(a) einer Ao a, durch den nur eine Reihe und nur eine Kolonne von a hindurchgeht, nennen wir punktförmig, gehen nur eine Reihe und mindestens zwei Kolonnen hindurch, nennen wir ihn waagrecht linear, nur eine Kolonne und mindestens zwei Reihen, senkrecht linear, mindestens zwei Reihen und mindestens zwei Kolonnen, flächig.

a sei eine Ao. ru, ..., r(u+v) sei eine zusammenhängende Abfolge von Reihen von a und cw, ..., c(w+x) eine zusammenhängende Abfolge von Kolonnen von a. d(a) sei derjenige AoT von a, durch den genau die Reihen ru, ..., r(u+v) und genau die Kolonnen cw, ..., c(w+x) hindurchgehen. Dann schreiben wir für d(a): 'AoT*u-(u+v)*:*w-(w+x)*(*a*)'.

d(a) und e(a) seien AoTe einer Ao a. d(a) heißt in e(a) als kleinerer AoT enthalten, genau dann, wenn jeder Balken von a, der in d(a) enthalten ist, auch in e(a) enthalten ist, und mindestens ein Balken von a nicht in d(a), wohl aber in e(a) enthalten ist.

Ein Balkentyp ist ein Paar, dessen erstes Glied eine Farbe aus der Reihe der Balkenfarben, und dessen zweites Glied eine der beiden Balkenausrichtungen ist.

Zwei Balkentypen T_1 und T_2, heißen (zueinander) invers, genau dann, wenn sie dieselbe Balkenfarbe, aber verschiedene Balkenausrichtungen enthalten.

Eine Menge α von Balkentypen heißt homogen, genau dann, wenn es keine Balkenfarbe gibt, sodaß α beide Typen dieser Farbe als Elemente enthält. Im anderen Fall heißt sie inhomogen.

Zwei Mengen α und β von Balkentypen heißen (miteinander) invers verschränkt, genau dann, wenn es mindestens eine Balkenfarbe gibt, sodaß die eine der Mengen den einen Typ, und die andere Menge den anderen Typ dieser Farbe enthält.

Zwei Mengen α und β von Balkentypen heißen (zueinander) invers, genau dann, wenn wir aus α β erhalten, wenn wir jedes Element von α durch den inversen Typ ersetzen.

Ein Balken d(a) einer Ao a hat den Balkentyp T, genau dann, wenn d(a) sowohl die in T enthaltene Farbe, als auch die in T enthaltene Ausrichtung hat.

Eine Ao a und eine Ao d sind identisch bzw. dieselbe Ao, genau dann, wenn a und d dieselbe Anzahl von Reihen und dieselbe Anzahl von Kolonnen aufweisen, und jeder Balken von a hinsichtlich des Balkentyps übereinstimmt mit demjenigen Balken von d, der ihm in Bezug auf die Lage innerhalb der Ao entspricht.

Ein AoT d(a) einer Ao a und eine Ao e heißen anordnungsidentisch, genau dann, wenn d(a) in isolierter Position die Ao e wäre.
Ein AoT d(a) einer Ao a und ein AoT f(e) einer Ao e sind anordnungsidentisch, genau dann, wenn es eine Ao g gibt, sodaß sowohl d(a) als auch f(e) anordnungsidentisch sind mit g.

Ein Reihen/Kolonnen-Typ (RC-Typ) ist eine (nichtleere) Menge von Balkentypen.

Eine Reihe oder Kolonne d(a) einer Ao a hat den RC-Typ T, genau dann, wenn es zu jedem Balkentyp, der Element von T ist, in d(a) mindestens einen Balken dieses Typs gibt, und wenn kein Balken von d(a) einen Balkentyp hat, der nicht Element von T ist.

Wir nennen der Einfachheit halber einen Balkentyp, der ein Element des RC-Typs einer Reihe oder Kolonne d(a) einer Ao a ist, auch einen Balkentyp von d(a) usw.

Zwei Balken d(a) und e(a) einer Ao a heißen (zueinander) invers, genau dann, wenn sie inverse Balkentypen haben.

Eine Reihe bzw. Kolonne einer Ao a heißt homogen, genau dann, wenn sie einen homogenen RC-Typ hat. Andernfalls heißt sie inhomogen.

Eine Ao heißt homogen, genau dann, wenn sie mindestens eine homogene Reihe und mindestens eine homogene Kolonne hat.

Eine Ao heißt waagrecht inhomogen, genau dann, wenn sie keine homogene Reihe hat.

Eine Ao heißt senkrecht inhomogen, genau dann, wenn sie keine homogene Kolonne hat.

α sei eine Menge von Reihen oder eine Menge von Kolonnen einer Ao a. Unter einer Balkentypenauswahl für α verstehen wir eine Menge von Balkentypen, die genau dadurch erhalten werden kann, daß wir aus jeder Reihe bzw. Kolonne, die ein Element von α ist, genau einen Balkentyp auswählen, der in dieser Reihe bzw. Kolonne vorkommt, wobei für mehrere Reihen bzw. Kolonnen derselbe Typ gewählt werden darf.

Eine Reihenauswahl einer Ao a ist eine Balkentypenauswahl für die Menge aller Reihen von a.

Eine Kolonnenauswahl einer Ao a ist eine Balkentypenauswahl für die Menge aller Kolonnen von a.

Eine Ao a heißt syntaktisch orthogonal gebunden, genau dann, wenn jede homogene Reihenauswahl von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens ein Element gemeinsam hat.

1.2 WOHLGEFORMTE ANORDNUNGEN

1.2.1 *Die allgemeine Formregel von N*

Wir greifen nun mithilfe einer allgemeinen Formregel aus der Gesamtheit aller Anordnungen bestimmte heraus, die wir wohlgeformte Anordnungen (wAon) nennen. Jedes materielle Objekt, das die Gestalt einer wohlgeformten Anordnung hat, soll als physisches Zeichen von N geeignet sein. Nichts sonst ist ein physisches Zeichen von N.

<u>Allgemeine Formregel von N (N-FR)</u>:
Eine Ao a ist eine wAo, genau dann, wenn a syntaktisch orthogonal gebunden ist.
Nichts sonst ist eine wAo.

Bei jeder Ao läßt sich mechanisch in einer endlichen Anzahl von Schritten entscheiden, ob sie eine wAo ist.

Beispiel für eine Ao, die keine wAo ist, s. Abb. 2.
Beispiele für wAon, s. Abb. 3-13. (Ebenso Abb. 1.)

(<u>1</u>)
Jede nicht flächige Ao ist eine wAo.
Beweis:

i	1)	a sei eine nicht flächige Ao.
i	2)	Dann liegt mindestens einer der folgenden Fälle vor.
		Fall A:
ii	3)	a hat genau eine Reihe.
ii	4)	Dann hat jede Kolonne von a nur einen Balken.
ii	5)	Also gibt es nur eine Kolonnenauswahl von a und diese enthält jeden Balkentyp, der in a vorkommt, als Element.
ii	6)	Also hat jede homogene Reihenauswahl von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens ein Element gemeinsam.
~		Fall B:
ii	7)	a hat genau eine Kolonne.
ii	8)	Dann hat jede Reihe von a nur einen Balken.

ii 9) Also gibt es nur eine Reihenauswahl von a und diese enthält jeden Balkentyp, der in a vorkommt, als Element.

ii 10) Also hat jede homogene Reihenauswahl von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens ein Element gemeinsam.

i 11) Also hat jede homogene Reihenauswahl von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens ein Element gemeinsam.

i 12) Also ist a eine wAo.

1.2.2 *Die Operationen D, W, S, K, E, T, G*

Eine punktförmige Ao mit einem waagrechten Balken heißt eine Ausgangsanordnung. Für die Ausgangsanordnung der Farbe Blau schreiben wir 'blau', der Farbe Grün 'grün' usw. (bei Mehrdeutigkeit: ':blau' ':grün' usw.)

Wir werden nun einige auf wAon anwendbare Operationen definieren, für welche, wie wir später beweisen werden, das folgende gilt:

1) Jeder zulässige Anwendungsschritt einer der Operationen auf eine bzw. zwei bzw. mehrere wAon ergibt eine Ao, die wiederum eine wAo ist.
2) Die Operationen zusammen reichen aus, um jede beliebige wAo, die keine Ausgangsanordnung ist, schrittweise aus Ausgangsanordnungen zu erzeugen.

Bei der Definition der Operationen sind gewisse Anforderungen berücksichtigt, die sich aus der Anwendung von N ergeben.

1.2.2.1 Definitionen

Drehung (D)

a sei eine wAo. d sei diejenige Ao, die aus a entsteht, wenn a um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird.
Dann nennen wir d das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation der Drehung

auf a und schreiben für d auch 'D(*a*)'.
Wir werden beweisen, daß gilt: a sei eine wAo. Dann ist auch D(a) eine wAo.

Beispiel:
a sei die wAo in Abb. 3. Dann zeigt Abb. 5 D(a).

Waagrechte Verknüpfung (W)

a, d seien wAon. n sei die Anzahl der Reihen von a, m die Anzahl der Reihen von d. u sei die Anzahl der Kolonnen von a, v die Anzahl der Kolonnen von d. e sei diejenige Ao, die aus a und d erzeugt werden kann, wie folgt:
Zu jedem Paar, bestehend aus einer Reihe von a und einer Reihe von d, wird eine Reihe einer neuen Ao mit (n·m) Reihen und (u+v) Kolonnen hergestellt, und zwar so, daß der AoT, der die ersten u Balken der Reihe der neuen Ao umfaßt, anordnungsidentisch ist mit der Reihe von a, und der AoT, der die restlichen v Balken der Reihe der neuen Ao umfaßt, anordnungsidentisch ist mit der Reihe von d.
Für alle x(x≤n) und alle y(y≤m), gilt: zu demjenigen Paar, das aus der x-ten Reihe von a und der y-ten Reihe von d besteht, wird die (((x-1)·m)+y)-te Reihe der neuen Ao hergestellt.
Dann nennen wir e das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation der waagrechten Verknüpfung auf a und d und schreiben für e auch 'W(*a*, *d*)'.
Wir werden beweisen, daß gilt: a, d seien wAon. Dann ist auch W(a, d) eine wAo.

Beispiel:
a sei die wAo in Abb. 3, d die wAo in Abb. 4. Dann zeigt Abb. 6 W(a, d).

Senkrechte Verknüpfung (S)

a, d seien wAon. n sei die Anzahl der Reihen von a, m die Anzahl der Reihen von d. u sei die Anzahl der Kolonnen von a, v die Anzahl der Kolonnen von d. e sei diejenige Anordnung, die aus a und d erzeugt weden kann, wie folgt:
Zu jedem Paar, bestehend aus einer Kolonne von a und einer Kolonne von d wird eine Kolonne einer neuen Ao mit (n+m) Reihen und (u·v) Kolonnen hergestellt, und zwar so, daß der AoT, der die ersten n Balken der Kolonne der neuen Ao umfaßt, anordnungsidentisch ist mit der Kolonne von a und der AoT, der die restlichen Balken der Kolonne der neuen Ao umfaßt, anordnungsidentisch ist mit der Kolonne von d.

Für alle x(x≤u) und alle y(y≤v) gilt: zu demjenigen Paar, das aus der x-ten Kolonne von a und der y-ten Kolonne von d besteht, wird die (((x-1)·v)+y)-te Kolonne der neuen Ao hergestellt.
Dann nennen wir e das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation der senkrechten Verknüpfung auf a und d und schreiben für e auch 'S(*a*, *d*)'.
Wir werden beweisen, daß gilt: a, d seien wAon. Dann ist auch S(a, d) eine wAo.

Beispiel:
a sei die wAo in Abb. 3, d die wAo in Abb. 4. Dann zeigt Abb. 7 S(a, d).
Ein konkreter Ausrdruck für diese wAo ist z. B.: 'S(S(W(blau, grün), D(rot)), W(gelb, S(grün, rot)))'.

a sei eine wAo und d eine Ao. Wir nennen d gebunden an a, genau dann, wenn zugleich gilt:

1) Jede homogene Reihe von a hat mit jeder homogenen Reihenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.
2) Jede homogene Kolonne von a hat mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

Kürzung (K)

a sei eine wAo. $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ seien AoTe von a, sodaß jeder dieser AoTe entweder eine Reihe oder eine Kolonne von a ist. Mindestens eine Reihe und mindestens eine Kolonne von a sollen nicht zu $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ gehören. e sei diejenige Ao, die aus a entsteht, wenn aus a genau die AoTe $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ fortgenommen werden. e soll an a gebunden sein. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

1) Jede homogene Reihe aus $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$, hat mit jeder homogenen Reihenauswahl von e mindestens einen Balkentyp gemeinsam.
2) Jede homogene Kolonne aus $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ hat mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von e mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

Dann nennen wir e das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation der Kürzung auf a und $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ und schreiben für e auch 'K(a, d_1, ..., d_n)'.
Wir werden beweisen, daß gilt: a sei eine wAo. $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ seien AoTe von a. Es soll eine Ao K(a, d_1, ..., d_n) geben. Dann ist auch K(a, d_1, ...d_n) eine wAo.

Beispiele:

a sei die wAo in Abb. 8. Dann zeigt Abb. 9 K(a, r1, r2, r4, c1).

a sei die wAo in Abb. 8. Dann zeigt Abb. 10 K(a, r2, r3).

a sei die wAo in Abb. 10. Dann zeigt Abb. 9 K(a, r2, c1).

Es gilt:

(2)
a sei eine punktförmige wAo, die keine Ausgangsanordnung ist. d sei die Ausgangsanordnung in der Farbe von a. Dann ist a D(d).

(3)
D und W reichen zusammen aus, um jede waagrecht lineare wAo schrittweise aus Ausgangsanordnungen herzustellen.
Beweis:

i 1) a sei eine waagrecht lineare wAo mit n Kolonnen.

i 2) $d_1, ..., d_n$ sei die Reihe der anordnungsidentischen Aon zu b1:1, ..., b1:n, den Balken der einzigen Reihe von a.

i 3) Jede Ao aus $d_1, ..., d_n$ ist entweder eine Ausgangsanordnung oder kann mithilfe von D aus einer solchen hergestellt werden.

i 4) Und a ist das Ergebnis der schrittweisen Verknüpfung von $d_1, ..., d_n$ durch W. a ist also die wAo $W(...W(d_1, d_2), ..., d_n)$.

i 5) Also reichen D und W zusammen aus, um a schrittweise aus Ausgangsanordnungen herzustellen.

(4)
D und S reichen zusammen aus, um jede senkrecht lineare wAo schrittweise aus Ausgangsanordnungen herzustellen.
Beweis:

i 1) a sei eine senkrecht lineare wAo mit n Reihen.

i 2) $d_1, ..., d_n$ sei die Reihe der anordnungsidenischen Aon zu b1:1, ..., bn:1, den Balken der einzigen Kolonne von a.

i 3) Jede Ao aus $d_1, ..., d_n$ ist entweder eine Ausgangsanordnung oder kann mithilfe von D aus einer solchen hergestellt werden.

i 4) Und a ist das Ergebnis der schrittweisen Verknüpfung von $d_1, ..., d_n$ durch S. a ist also die wAo $S(...S(d_1, d_2), ..., d_n)$.

i 5) Also reichen D und S zusammen aus, um a schrittweise aus Ausgangsanordnungen herzustellen.

(5)

a sei eine Ao, d(a) eine Reihe oder eine Kolonne von a und f die anordnungsidentische Ao zu d(a). Dann ist f eine wAo, und wenn f keine Ausgangsanordnung ist, so reichen D, W und S zusammen aus, um f schrittweise aus Ausgangsanordnungen herzustellen.

Erweiterung (E)

a sei eine wAo und d eine Ao. Wenn a punktförmig ist, sei d flächig. $e_1(d), ..., e_n(d)$ seien AoTe von d, sodaß jeder dieser AoTe entweder eine Reihe oder eine Kolonne von d ist. (Die Reihen sind vor den Kolonnen angeführt, Reihen und Kolonnen jeweils nach steigenden Indizes geordnet.) Die Reihen aus $e_1(d), ..., e_n(d)$ sollen eine zusammenhängende Abfolge am unteren Rand von d darstellen, die Kolonnen eine zusammenhängende Abfolge am rechten Rand von d. $f_1, ..., f_n$, sei die Reihe der anordnungsidentischen wAon zu $e_1(d), ..., e_n(d)$. Wenn aus d genau die AoTe $e_1(d), ..., e_n(d)$ fortgenommen werden, soll die wAo a entstehen. d soll an a gebunden sein.
Dann nennen wir d das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation der Erweiterung auf a und $f_1, ..., f_n$ und schreiben für d auch '$E(a, f_1, ..., f_n)$'.
Wir werden beweisen, daß gilt: a, $f_1, ..., f_n$ seien wAon. Es soll eine Ao $E(a, f_1, ..., f_n)$ geben. Dann ist auch $E(a, f_1, ..., f_n)$ eine wAo.

Beispiel:
a sei die wAo in Abb. 10, f die wAo W(gelb, gelb).Dann zeigt Abb. 11 E(a, f).

Typentausch (T)

a sei eine wAo, und $d_1(a), ..., d_n(a)$ seien Balken von a. $e_1, ..., e_n$ seien punktförmige wAon. f sei diejenige Ao, die aus a entsteht, wenn die Typen der Balken $d_1(a), ..., d_n(a)$ durch die Typen der Balken in $e_1, ..., e_n$ ausgetauscht werden. f sei an a gebunden. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt:

1) Jede homogene Reihe von a, die mindestens einen der Balken aus $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ enthält, hat mit jeder homogenen Reihenauswahl von f mindestens einen Balkentyp gemeinsam.
2) Jede homogene Kolonne von a, die mindestens einen der Balken aus $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ enthält, hat mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von f mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

Dann nennen wir f das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation des Typentausches auf a, $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$, e_1, ..., e_n und schreiben für f auch 'T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)'.
Wir werden beweisen, daß gilt: a sei eine wAo. $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ seien Balken von a. e_1, ..., e_n seien punktförmige wAon. Es soll eine Ao T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n) geben. Dann ist auch T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n) eine wAo.

Beispiel:
a sei die wAo in Abb. 10, e die wAo :gelb. Dann zeigt Abb. 12 T(a, b1:1/e, b2:2/e).

Diagonale Verknüpfung (G)

a, d seien wAon. n sei die Anzahl der Reihen von a, m die Anzahl der Reihen von d. u sei die Anzahl der Kolonnen von a, v die Anzahl der Kolonnen von d. e sei diejenige Ao, die aus W(a, d) und W(D(a), D(d)) erzeugt werden kann wie folgt:
Wir gehen vor wie bei der senkrechten Verknüpfung von W(a, d) und W(D(a), D(d)), nur mit dem folgenden Unterschied: Wir verzichten darauf, die ersten u Kolonnen von W(a, d) (das sind die auf a zurückgehenden) mit den ersten n Kolonnen von W(D(a), D(d)) (das sind die auf D(a) zurückgehenden) zu verbinden, und wir verzichten darauf, die letzten v Kolonnen von W(a, d) (das sind die auf d zurückgehenden) mit den letzen m Kolonnen von W(D(a), D(d)) (das sind die auf D(d) zurückgehenden) zu verbinden.
Dann nennen wir e das Ergebnis eines Anwendungsschrittes der Operation der diagonalen Verknüpfung auf a und d und schreiben für e auch 'G(a, d)'
Wir werden zeigen, daß e mithilfe von K aus S(W(a, d), W(D(a), D(d)) erzeugt werden kann.
Also gilt: a, d seien wAon. Dann ist auch G(a, d) eine wAo.

Beispiel:
a sei die wAo in Abb. 3, d die wAo in Abb. 9. Dann zeigt Abb. 13 G(a, d).

Nichts sonst nennen wir das Ergebnis eines Anwendungsschrittes von D, W, S, K, E, T, G. Nicht anders generieren wir Ausdrücke der eingeführten Notation, und nicht anders wenden wir solche Ausdrücke an.

Wir vereinbaren allerdings folgende Ausdrucksweise:

a sei eine wAo und d eine Ao. Wir sagen, d könne aus a durch einen Anwendungsschritt von K auf a erzeugt werden, genau dann, wenn es mindestens eine Reihe $e_1(a)$, ..., $e_n(a)$ von AoTn von a gibt, sodaß es eine Ao K(a, e_1, ..., e_n) gibt, und d die Ao K(a, e_1, ..., e_n) ist.

a sei eine wAo und d eine Ao. Wir sagen, d könne aus a durch einen Anwendungsschritt von E auf a erzeugt werden, genau dann, wenn es eine Reihe e_1, ..., e_n von wAon gibt, sodaß es eine Ao E(a, e_1, ..., e_n) gibt, und d die Ao E(a, e_1, ..., e_n) ist.

a sei eine wAo und d eine Ao. Wir sagen, d könne aus a durch einen Anwendungsschritt von T auf a erzeugt werden, genau dann, wenn es mindestens eine Reihe $e_1(a)$, ..., $e_n(a)$ von Balken von a und dazu eine Reihe $f_1(a)$, ..., $f_n(a)$ von punktförmigen wAon gibt, sodaß es eine Ao T(a, e_1/f_1, ..., e_n/f_n) gibt, und d die Ao T(a, e_1/f_1, ..., e_n/f_n) ist.

1.2.2.2 Anwendbarkeit von K, E, T

Aus den Bestimmungen für K, E, T ergibt sich unter Berücksichtigung der Erblichkeit der Wohlgeformtheit in Bezug auf K, E, T das folgende:

(<u>6</u>)
a sei eine wAo mit mindestens zwei Reihen und d(a) eine Reihe von a. Dann gilt: Es gibt eine wAo K(a, d), genau dann, wenn d(a) inhomogen ist oder mit jeder homogenen Balkentypenauswahl für die Menge der übrigen Reihen von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat.

(<u>7</u>)
a sei eine wAo mit mindestens zwei Kolonnen und d(a) eine Kolonne von a. Dann gilt: Es gibt eine wAo K(a, d), genau dann, wenn d(a) inhomogen ist oder mit jeder homogenen Balkentypenauswahl für die Menge der übrigen Kolonnen von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat.

(8)

a sei eine wAo, die nicht punktförmig ist, und d eine Ao. e(d) sei die unterste Reihe von d. Wenn e(d) aus d fortgenommen wird, soll die wAo a entstehen. f sei die anordnungidentische wAo zu e(d). Dann gilt: d ist die wAo E(a, f), bzw. es gibt eine solche wAo, genau dann, wenn jede homogene Kolonne von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat.

(9)

a sei eine wAo, die nicht punktförmig ist, und d eine Ao. e(d) sei die Kolonne von d rechts außen. Wenn e(d) aus d fortgenommen wird, soll die wAo a entstehen. f sei die anordnungidentische wAo zu e(d). Dann gilt: d ist die wAo E(a, f), bzw. es gibt eine solche wAo, genau dann, wenn jede homogene Reihe von a mit jeder homogenen Reihenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat.

(10)

a sei eine wAo und d(a) ein Balken von a. e sei eine punktförmige wAo. f sei diejenige Ao, die aus a entsteht, wenn der Balkentyp von d(a) durch den Typ von e ausgetauscht wird. Dann gilt: f ist die wAo T(a, d/e), bzw. es gibt eine solche wAo, genau dann, wenn die folgenden Bedingungen zugleich erfüllt sind.

a) Die Reihe von a, auf der d(a) liegt, ist inhomogen oder hat mit jeder homogenen Reihenauswahl von f mindestens einen Balkentyp gemeinsam.
b) Die Kolonne von a, auf der d(a) liegt, ist inhomogen oder hat mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von f mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

a, d seien Aon. e(a) sei eine homogene Reihe oder Kolonne von a. α sei eine (nichtleere) Menge von Reihen von d oder eine (nichtleere) Menge von Kolonnen von d. Anhand des folgenden Verfahrens kann geprüft werden, ob e(a) mit jeder homogenen Balkentypenauswahl für α mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat.

1) Es wird der Reihe nach jedes Element von α daraufhin geprüft, ob es die Bedingung a) oder mindestens eine der Bedingungen b), c) oder d) erfüllt.
    a) In der Reihe bzw. Kolonne kommen nur Balkentypen vor, die auch in e(a) vorkommen.
    b) Die Reihe bzw. Kolonne ist inhomogen.
    c) In der Reihe bzw. Kolonne kommt mindestens ein Balkentyp vor, dessen inverser Typ in e(a) vorkommt.

d) In der Reihe bzw. Kolonne kommt mindestens ein Balkentyp vor, der nicht in e(a) vorkommt, und dessen inverser Typ in keinem Element von α vorkommt.

Erfüllt mindestens ein Element von α die Bedingung a), dann wurde der Test bestanden.

Jedes Element von α, das mindestens eine der Bedingungen b), c) oder d) erfüllt, wird gestrichen. Sind alle Elemente von α zu streichen, dann wurde der Test nicht bestanden.

(Es ist unmöglich, daß ein Element von α die Bedingung a) zugleich mit einer der Bedingungen b), c) oder d) erfüllt.)

Ist der Test nicht entschieden, ist fortzufahren wie folgt:

2) β sei die Menge der verbliebenen Elemente von α. Es wird geprüft, ob sich aus den Balkentypen der Elemente von β, die nicht in e(a) vorkommen, eine homogene Balkentypenauswahl für β herstellen läßt.

Ist dies der Fall, dann wurde der Test nicht bestanden. Im anderen Fall wurde der Test bestanden.

Erläuterung:

f(d) sei ein Element von α, das mindestens eine der in Punkt 1 genannten Bedingungen b), c) oder d) erfüllt. Dann gilt:

1) Es gibt in f(d) mindestens einen Balkentyp, der in mindestens einem Element von α, nicht aber in e(a) vorkommt.
2) γ sei eine homogene Menge von Balkentypen, sodaß jedes der Elemente von γ in mindestens einem Element von α, nicht aber in e(a) vorkommt. Dann enthält γ mindestens ein Element, das in f(d) vorkommt, oder es gibt mindestens einen Balkentyp in f(d), sodaß bei einer Erweiterung von γ durch diesen Typ die genannten Eigenschaften erhalten bleiben.

Daraus ergibt sich das folgende:

Wenn jedes der Elemente von α mindestens eine der in Punkt 1 genannten Bedingungen b), c) oder d) erfüllt, dann läßt sich eine homogene Balkentypenauswahl für α konstruieren, mit der e(a) keinen Balkentyp gemeinsam hat.

Wenn mindestens ein Element von α keine der in Punkt 1 genannten Bedingungen b), c) oder d) erfüllt, es aber für die Menge aller Elemente von α, die keine der in Punkt 1 genannten Bedingunten b), c) oder d) erfüllen, mindestens eine homogene Balkentypenauswahl gibt, mit der e(a) keinen Balkentyp gemeinsam hat, so läßt sich eine solche, sofern sie nicht zugleich eine Auswahl für α ist, so zu einer Auswahl für α erweitern, daß die relevanten Eigenschaften erhalten bleiben.

Wir werden nun einige Standardfälle für die Anwendbarkeit von K, E und T anführen.

(<u>11</u>)
a sei eine wAo und d(a) eine inhomogene Reihe von a.
Dann gibt es eine wAo K(a, d). (SF1 für K, bezogen auf Reihen)

(<u>12</u>)
a sei eine wAo und d(a) eine inhomogene Kolonne von a.
Dann gibt es eine wAo K(a, d). (SF1 für K, bezogen auf Kolonnen)

(<u>13</u>)
a sei eine wAo und d(a) eine Reihe von a. Es soll mindestens eine Reihe e(a) von a geben, sodaß zugleich gilt:

1) d(a)≠e(a).
2) Jeder Balkentyp, der in e(a) vorkommt, kommt auch in d(a) vor.

Dann gibt es eine wAo K(a, d). (SF2 für K, bezogen auf Reihen)

(<u>14</u>)
a sei eine wAo und d(a) eine Kolonne von a. Es soll mindestens eine Kolonne e(a) von a geben, sodaß zugleich gilt:

1) d(a)≠e(a).
2) Jeder Balkentyp, der in e(a) vorkommt, kommt auch in d(a) vor.

Dann gibt es eine wAo K(a, d). (SF2 für K, bezogen auf Kolonnen)

(<u>15</u>)
a sei eine wAo und d(a) eine Reihe von a. Es soll mindestens ein Paar (e(a), f(a)) von Reihen von a geben, und mindestens ein Paar (T_1, T_2) von Balkentypen, sodaß zugleich gilt:

1) T_1 kommt in e(a), und T_2 in f(a) vor.
2) Weder T_1 noch T_2 kommt in d(a) vor.
3) T_1 und T_2 sind zueinander invers.
4) Jeder Balkentyp, der in e(a) vorkommt, außer T_1, und jeder Balkentyp, der in f(a) vorkommt, außer T_2, kommt auch in d(a) vor.

Dann gibt es eine wAo K(a, d). (SF3 für K, bezogen auf Reihen)

(16)

a sei eine wAo und d(a) eine Kolonne von a. Es soll mindestens ein Paar (e(a), f(a)) von Kolonnen von a geben, und mindestens ein Paar (T_1, T_2) von Balkentypen, sodaß zugleich gilt:

1) T_1 kommt in e(a), und T_2 in f(a) vor.
2) Weder T_1 noch T_2 kommt in d(a) vor.
3) T_1 und T_2 sind gegengleich.
4) Jeder Balkentyp, der in e(a) vorkommt, außer T_1, und jeder Balkentyp, der in f(a) vorkommt, außer T_2, kommt auch in d(a) vor.

Dann gibt es eine wAo K(a, d). (SF3 für K, bezogen auf Kolonnen)

(17)

a sei eine wAo, die nicht punktförmig ist. Die Ao d soll aus a dadurch zu erzeugen sein, daß am unteren Rand jeder Kolonne von a ein Balken eines Typs hinzugefügt wird, der in der betreffenden Kolonne bereits vorkommt. e sei die wAo, die mit der neuen Reihe anordnungsidentisch ist. Dann ist d die wAo E(a, e). (SF1 für E, bezogen auf Reihen)
Wir setzen den Fall, daß es in a mindestens eine Reihe gibt, die mit der hinzugefügten anordnungsidentisch ist. Eine solche sei f(a). Dann nennen wir den Übergang von a zu d das Kopieren von f(a) und schreiben für d auch 'C(*a*, *f*)'.
Für eine wAo C(...C(a, f_1) ..., f_n) schreiben wir, wenn der Reihenindex keiner Reihe aus f_1, ..., f_n höher ist als die Anzahl der Reihen von a, auch 'C(a, f_1, ..., f_n)'.

(18)

a sei eine wAo, die nicht punktförmig ist. Die Ao d soll aus a dadurch zu erzeugen sein, daß am rechten Rand jeder Reihe von a ein Balken eines Typs hinzugefügt wird, der in der betreffenden Reihe bereits vorkommt. e sei die wAo, die mit der neuen Kolonne anordnungsidentisch ist. Dann ist d die wAo E(a, e). (SF1 für E, bezogen auf Kolonnen)
Wir setzen den Fall, daß es in a mindestens eine Kolonne gibt, die mit der hinzugefügten anordnungsidentisch ist. Eine solche sei f(a). Dann nennen wir den Übergang von a zu d das Kopieren von f(a) und schreiben für d auch 'C(*a*, *f*)'.
Für eine wAo C(...C(a, f_1) ..., f_n) schreiben wir, wenn der Kolonnenindex keiner Kolonne aus f_1, ..., f_n höher ist als die Anzahl der Kolonnen von a, auch 'C(a, f_1, ..., f_n)'.

(19)

a sei eine flächige wAo und d(a) ein Balken von a. T_1 sei ein Balkentyp, der sowohl in der Reihe, der d(a) angehört, als auch in der Kolonne, der d(a) angehört, vorkommt. e sei die

punktförmige wAo, deren Balken den Typ T_1 hat.
Dann gibt es eine wAo T(a, d/e). (SF1 für T)

(20)
a sei eine wAo. d(a) und e(a) seien zwei nichtidentische Reihen von a. f sei die Ao, die aus a entsteht, wenn in jeder Kolonne von a bei den Balken, die d(a) bzw e(a) angehören, die Typen wechselweise vertauscht werden. Dann ist f das Ergebnis eines Anwendungsschrittes von T auf a.
Den Übergang von a zu f nennen wir die Umstellung von d(a) und e(a) und wir schreiben für f auch 'U(*a*, *d*, *e*)'.

(21)
a sei eine wAo. d(a) und e(a) seien zwei nichtidentische Kolonnen von a. f sei die Ao, die aus a entsteht, wenn in jeder Reihe von a bei den Balken, die d(a) bzw e(a) angehören, die Typen wechselweise vertauscht werden. Dann ist f das Ergebnis eines Anwendungsschrittes von T auf a.
Den Übergang von a zu f nennen wir die Umstellung von d(a) und e(a) und wir schreiben für f auch 'U(*a*, *d*, *e*)'.

(22)
a sei eine wAo. d(a) und e(a) seien Reihen von a. α sei eine (nichtleere) Menge von Balkentypen. (T_1, T_2) sei ein Paar inverser Balkentypen, deren keiner in α enthalten ist. Der RC-Typ von d(a) sei α, erweitert um T_1, der RC-Typ von e(a) α, erweitert um T_2.
Es soll keine Kolonne in a geben, in der zugleich der Balken von d(a) den Typ T_1 und der Balken von e(a) den Typ T_2 enthält. Dann kann mithilfe von T in d(a) der Typ T_1 bei allen Balken dieses Typs durch einen Typ ersetzt werden, der ein Element von α ist.
Anschließend kann mithilfe von K die Reihe, die e(a) entspricht, fortgenommen werden. (SF1 für T und K, bezogen auf Reihen)

(23)
a sei eine wAo. d(a) und e(a) seien Kolonnen von a. α sei eine (nichtleere) Menge von Balkentypen. (T_1, T_2) sei ein Paar inverser Balkentypen, deren keiner in α enthalten ist. Der RC-Typ von d(a) sei α, erweitert um T_1, der RC-Typ von e(a) α, erweitert um T_2.
Es soll keine Reihe in a geben, in der zugleich der Balken von d(a) den Typ T_1 und der Balken von e(a) den Typ T_2 enthält. Dann kann mithilfe von T in d(a) der Typ T_1 bei allen Balken dieses Typs durch einen Typ ersetzt werden, der ein Element von α ist.

Anschließend kann mithilfe von K die Kolonne, die e(a) entspricht, fortgenommen werden. (SF1 für T und K, bezogen auf Kolonnen)

Für Ausdrücke für wAon soll folgende alternative Schreibweise möglich sein:

D(a)	Da
W(a, d)	Wad
S(a, d)	Sad
K(a, d_1, ..., d_n)	Ka(d_1, ..., d_n)
E(a, d_1, ..., d_n)	Ea(d_1, ..., d_n)
T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)	Ta(d_1/e_1, ..., d_n/e_n)
G(a, d)	Gad
C(a, d_1, ..., d_n)	Ca(d_1, ..., d_n)
U(a, d_1, d_2)	Ua(d_1, d_2)

Die Ausdrücke 'blau', 'grün', 'rot', 'gelb' werden durch die Ausdrücke 'b', 'g_1', 'r', 'g_2' ersetzt. Beim Zitieren von Balken wird der Buchstabe 'b' weggelassen.

Beispiele:

K(W(S(D(blau), grün), blau), r1)	KWSDbg_1(r1)
E(blau, W(blau, grün), S(blau, grün))	Eb(Wbg_1, Sbg_1)
T(S(blau, gelb), b1:1/gelb, b2:1/blau)	TSbg_2(1:1/g_2, 2:1/b)
U(C(G(blau, grün), r2), c1, c2)	UCGbg_1(r2)(c1, c2)

1.2.2.3 Die Erblichkeit der Wohlgeformtheit in Bezug auf D, W, S, K, E, T

Wir werden nun, wie angekündigt, die Erblichkeit der Eigenschaft der syntaktisch orthogonalen Gebundenheit in Bezug auf D, W, S, K, E, T beweisen.

(<u>24</u>)
a sei eine wAo. Dann ist auch D(a) eine wAo.
Beweis:
i 1) a sei eine wAo.

ii 2) (A_1, A_2) sei ein Paar, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl und einer homogenen Kolonnenauswahl von D(a).

ii 3) Da es zu jeder Kolonne von a in D(a) mindestens eine Reihe mit dem inversen RC-Typ gibt, gibt es mindestens eine Kolonnenauswahl von a, deren inverse Menge eine Teilmenge von A_1 ist. A_3 sei eine solche Auswahl.

ii 4) Da es zu jeder Reihe von a in D(a) mindestens eine Kolonne mit dem inversen RC-Typ gibt, gibt es mindestens eine Reihenauswahl von a, deren inverse Menge eine Teilmenge von A_2 ist. A_4 sei eine solche Auswahl.

ii 5) Da A_1 und A_2 homogen sind, sind es auch A_3 und A_4.

ii 6) Da a eine wAo ist, haben A_4 und A_3 mindestens ein Element gemeinsam.

ii 7) Also haben auch A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

i 8) Also hat jede homogene Reihenauswahl von D(a) mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von D(a) mindestens ein Element gemeinsam.

i 9) Also ist D(a) eine wAo.

(<u>25</u>)

a, d seien wAon. Dann ist auch W(a, d) eine wAo.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

ii 2) (A_1, A_2) sei ein Paar bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl und einer homogenen Kolonnenauswahl von W(a, d).

ii 3) Zu jeder Kolonne von a gibt es in W(a, d) mindestens eine Kolonne mit demselben RC-Typ, und zu jeder Kolonne von d gibt es in W(a, d) mindestens eine Kolonne mit demselben RC-Typ.

ii 4) Also ist in A_2 mindestens eine Kolonnenauswahl von a und mindestens eine Kolonnenauswahl von d als Teilmenge enthalten. A_3 sei eine solche Auswahl von a, A_4 eine solche Auswahl von d.

5) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iii 6) A_1 hat mit jeder Reihe von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

iii 7) Dann enthält A_1 mindestens eine Reihenauswahl von a als Teilmenge. A_5 sei eine solche Auswahl.

iii 8) Da A_2 homogen ist, ist es auch A_3. Da A_1 homogen ist, ist es auch A_5.

iii 9) Da a eine wAo ist, haben A_5 und A_3 mindestens ein Element gemeinsam.

iii 10) Also haben auch A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

~ Fall B:

iii 11) Es gibt mindestens eine Reihe in a, sodaß A_1 mit dieser Reihe keinen Balkentyp gemeinsam hat. e(a) sei eine solche Reihe von a.

iv 12) f(d) sei eine Reihe von d.

iv 13) Es gibt in W(a, d) mindestens eine Reihe, in der nur Balkentypen aus e(a) oder f(d) vorkommen. g(W(a, d)) sei eine solche Reihe.

iv 14) Da A_1 keinen Balkentyp von e(a) enthält, enthält A_1 mindestens einen Balkentyp von g(W(a, d)), der in f(d) vorkommt.

iii 15) Also enthält A_1 aus jeder Reihe von d mindestens einen Balkentyp.

iii 16) Also enthält A_1 mindestens eine Reihenauswahl von d. A_6 sei eine solche Auswahl.

iii 17) Da A_1 homogen ist, ist es auch A_6. Da A_2 homogen ist, ist es auch A_4.

iii 18) Da d eine wAo ist, haben A_6 und A_4 mindestens ein Element gemeinsam.

iii 19) Also haben auch A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

ii 20) Also haben A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

i 21) Also hat jede homogene Reihenauswahl von W(a, d) mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von W(a, d) mindestens ein Element gemeinsam.

i 22) Also ist W(a, d) eine wAo.

(<u>26</u>)

a, d seien wAon. Dann ist auch S(a, d) eine wAo.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

ii 2) (A_1, A_2) sei ein Paar bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl und einer homogenen Kolonnenauswahl von S(a, d).

ii 3) Zu jeder Reihe von a gibt es in S(a, d) mindestens eine Reihe mit demselben RC-Typ, und zu jeder Reihe von d gibt es in S(a, d) mindestens eine Reihe mit demselben RC-Typ.

ii 4) Also ist in A_1 mindestens eine Reihenauswahl von a und mindestens eine Reihenauswahl von d als Teilmenge enthalten. A_3 sei eine solche Auswahl von a, A_4 eine solche Auswahl von d.

5) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.
Fall A:

iii 6) A_2 hat mit jeder Kolonne von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

iii 7) Dann enthält A_2 mindestens eine Kolonnenauswahl von a als Teilmenge. A_5 sei eine solche Auswahl.

iii 8) Da A_1 homogen ist, ist es auch A_3. Da A_2 homogen ist, ist es auch A_5.

iii 9) Da a eine wAo ist, haben A_3 und A_5 mindestens ein Element gemeinsam.

iii 10) Also haben auch A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

~ Fall B:

iii 11) Es gibt mindestens eine Kolonne in a, sodaß A_2 mit dieser Kolonne keinen Balkentyp gemeinsam hat. e(a) sei eine solche Kolonne von a.

iv 12) f(d) sei eine Kolonne von d.

iv 13) Es gibt in S(a, d) mindestens eine Kolonne, in der nur Balkentypen aus e(a) oder f(d) vorkommen. g(S(a, d)) sei eine solche Kolonne.

iv 14) Da A_2 keinen Balkentyp von e(a) enthält, enthält A_2 mindestens einen Balkentyp von g(W(a, d)), der in f(d) vorkommt.

iii 15) Also enthält A_2 aus jeder Kolonne von d mindestens einen Balkentyp.

iii 16) Also enthält A_2 mindestens eine Kolonnenauswahl von d. A_6 sei eine solche Auswahl.

iii 17) Da A_1 homogen ist, ist es auch A_4. Da A_2 homogen ist, ist es auch A_6.

iii 18) Da d eine wAo ist, haben A_4 und A_6 mindestens ein Element gemeinsam.

iii 19) Also haben auch A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

ii 20) Also haben A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

i 21) Also hat jede homogene Reihenauswahl von S(a, d) mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von S(a, d) mindestens ein Element gemeinsam.

i 22) Also ist S(a, d) eine wAo.

(27)

a sei eine wAo und d eine Ao. d sei an a gebunden. Dann ist auch d eine wAo.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo und d eine Ao. d sei an a gebunden.

ii 2) (A_1, A_2) sei ein Paar, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl und einer homogenen Kolonnenauswahl von d.

iii 3) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, A_1 und A_2 hätten kein Element gemeinsam.

iii 4) Wir konstruieren eine Reihenauswahl von a, die wir A_3 nennen. A_3 soll homogen sein und mit A_2 kein Element gemeinsam haben. [*e*.] Wir gehen vor, wie folgt:

a) Besitzt a sowohl homogene als auch inhomogene Reihen, so wählen wir zuerst für alle homogenen Reihen.

b) Da d an a gebunden und A_1 homogen ist, hat jede homogene Reihe von a mit A_1 mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

Für jede homogene Reihe von a wählen wir einen Typ, der in A_1 enthalten ist.

c) Für inhomogene Reihen von a wählen wir wie folgt:
e(a) sei eine inhomogene Reihe von a.
Wir wählen eine Farbe, von der in e(a) beide Balkentypen vorhanden sind. Diese sei die Farbe F_1. Da A_2 homogen ist, ist mindestens ein Typ der Farbe F_1 nicht in A_2 enthalten.
Es liegt einer der folgenden Fälle vor:
Fall 1:
Wir stehen am Beginn der Prozedur. Dann wählen wir einen Typ der Farbe F_1, der nicht in A_2 enthalten ist.
Fall 2:
Die Wahl für e(a) ist nicht der erste Schritt der Prozedur und die bisherige Auswahl enthält bereits einen Typ der Farbe F_1. Dann fügen wir derselben kein Element hinzu.
Fall 3:
Die Wahl für e(a) ist nicht der erste Schritt der Prozedur, aber die bisherige Auswahl enthält noch keinen Typ der Farbe F_1. Dann wählen wir einen Typ der Farbe F_1, der nicht in A_2 enthalten ist.
Es ergibt sich das folgende:
Ist die Wahl für e(a) der erste Schritt der Prozedur, so hat die Auswahl nach diesem die gewünschten Eigenschaften. Ist die Wahl für e(a) nicht der erste Schritt der Prozedur, so hat die Auswahl, sofern sie die gewünschten Eigenschaften vorher hatte, diese auch nachher noch.

iii 5) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.
Fall A:
iv 6) a hat nur homogene Reihen.
iv 7) Dann ist A_3 eine Teilmenge von A_1.
iv 8) Also hat A_3 die gewünschten Eigenschaften.
~ Fall B:
iv 9) a hat sowohl homogene als auch inhomogene Reihen.
iv 10) Dann war die Auswahl nach der Wahl für alle homogenen Reihen von a eine Teilmenge von A_1.
iv 11) Also hatte die Auswahl nach der Wahl für alle homogenen Reihen von a die gewünschten Eigenschaften.

iv 12) Also hatte die Auswahl vor der ersten Wahl für eine inhomogene Reihe die gewünschten Eigenschaften und hat sie bei jedem weiteren Schritt behalten.

iv 13) Also hat A_3 die gewünschten Eigenschaften.

~ Fall C:

iv 14) a hat nur inhomogene Reihen. Dann hatte die Auswahl nach dem ersten Schritt die gewünschten Eigenschaften und hat sie bei jedem weiteren Schritt behalten.

iv 15) Also hat A_3 die gewünschten Eigenschaften.

iii 16) Also hat A_3 die gewünschten Eigenschaften.

iii 17) Wir konstruieren eine Kolonnenauswahl von a, die wir A_4 nennen. A_4 soll homogen sein und mit A_3 kein Element gemeinsam haben. [*e*.] Wir gehen vor, wie folgt:

a) Besitzt a sowohl homogene als auch inhomogene Kolonnen, so wählen wir zuerst für alle homogenen Kolonnen.

b) Da d an a gebunden und A_2 homogen ist, hat jede homogene Kolonne von a mit A_2 mindestens einen Balkentyp gemeinsam.
Für jede homogene Kolonne von a wählen wir einen Typ, der in A_2 enthalten ist.

c) Für inhomogene Kolonnen von a wählen wir wie folgt:
f(a) sei eine inhomogene Kolonne von a.
Wir wählen eine Farbe, von der in f(a) beide Balkentypen vorhanden sind. Diese sei die Farbe F_2. Da A_3 homogen ist, ist mindestens ein Typ der Farbe F_2 nicht in A_3 enthalten.
Es liegt einer der folgenden Fälle vor:
Fall 1:
Wir stehen am Beginn der Prozedur. Dann wählen wir einen Typ der Farbe F_2, der nicht in A_3 enthalten ist.
Fall 2:
Die Wahl für f(a) ist nicht der erste Schritt der Prozedur und die bisherige Auswahl enthält bereits einen Typ der Farbe F_2. Dann fügen wir derselben kein Element hinzu.
Fall 3:
Die Wahl für f(a) ist nicht der erste Schritt der Prozedur, aber die bisherige Auswahl enthält noch keinen Typ der Farbe F_2. Dann wählen wir einen Typ der Farbe F_2, der nicht in A_3 enthalten ist.
Es ergibt sich das folgende:

Ist die Wahl für f(a) der erste Schritt der Prozedur, so hat die Auswahl nach diesem die gewünschten Eigenschaften. Ist die Wahl für f(a) nicht der erste Schritt der Prozedur, so hat die Auswahl, sofern sie die gewünschten Eigenschaften vorher hatte, diese auch nachher noch.

iii 18) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iv 19) a hat nur homogene Kolonnen.

iv 20) Dann ist A_4 eine Teilmenge von A_2.

iv 21) Also hat A_4 die gewünschten Eigenschaften.

~ Fall B:

iv 22) a hat sowohl homogene als auch inhomogene Kolonnen.

iv 23) Dann war die Auswahl nach der Wahl für alle homogenen Kolonnen von a eine Teilmenge von A_2.

iv 24) Also hatte die Auswahl nach der Wahl für alle homogenen Kolonnen von a die gewünschten Eigenschaften.

iv 25) Also hatte die Auswahl vor der ersten Wahl für eine inhomogene Kolonne die gewünschten Eigenschaften und hat sie bei jedem weiteren Schritt behalten.

iv 26) Also hat A_4 die gewünschten Eigenschaften.

~ Fall C:

iv 27) a hat nur inhomogene Kolonnen. Dann hatte die Auswahl nach dem ersten Schritt die gewünschten Eigenschaften und hat sie bei jedem weiteren Schritt behalten.

iv 28) Also hat A_4 die gewünschten Eigenschaften.

iii 29) Also hat A_4 die gewünschten Eigenschaften.

iii 30) Mit (A_3, A_4) haben wir ein Paar konstruiert, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl von a und einer homogenen Kolonnenauswahl von a, das kein Element gemeinsam hat.

iii 31) Dies steht im Widerspruch zur Annahme, daß a eine wAo ist.

ii 32) Also haben A_1 und A_2 mindestens ein Element gemeinsam.

i 33) Also hat jede homogene Reihenauswahl von d mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von d mindestens ein Element gemeinsam.

i 34) Also ist d eine wAo.

(<u>28</u>)

a sei eine wAo. d_1(a), ..., d_n(a) seien AoTe von a. Es soll eine Ao K(a, d_1, ..., d_n) geben.

Dann ist auch $K(a, d_1, ..., d_n)$ eine wAo.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo. $d_1(a), ..., d_n(a)$ seien AoTe von a. Es soll eine Ao $K(a, d_1, ..., d_n)$ geben.

i 2) Dann ist $K(a, d_1, ..., d_n)$ an a gebunden.

i 3) Also ist $K(a, d_1, ..., d_n)$ eine wAo.

(<u>29</u>)

$a, f_1, ..., f_n$ seien wAon. Es soll eine Ao $E(a, f_1, ..., f_n)$ geben. Dann ist auch $E(a, f_1, ..., f_n)$ eine wAo.

Beweis:

i 1) $a, f_1, ..., f_n$ seien wAon. Es soll eine Ao $E(a, f_1, ..., f_n)$ geben.

i 2) Dann ist $E(a, f_1, ..., f_n)$ an a gebunden.

i 3) Also ist $E(a, f_1, ..., f_n)$ eine wAo.

(<u>30</u>)

a sei eine wAo. $d_1(a), ..., d_n(a)$ seien Balken von a. $e_1, ..., e_n$ seien punktförmige wAon. Es soll eine Ao $T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)$ geben. Dann ist auch $T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)$ eine wAo.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo. $d_1(a), ..., d_n(a)$ seien Balken von a. $e_1, ..., e_n$ seien punktförmige wAon. Es soll eine Ao $T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)$ geben.

i 2) Dann ist $T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)$ an a gebunden.

i 3) Also ist $T(a, d_1/e_1, ..., d_n/e_n)$ eine wAo.

Soweit die Erblichkeitsbeweise für D, W, S, K, E, T.

1.2.2.4 Ersetzbarkeit von G durch {D, W, S, K}

$\Rightarrow$ *Satz 32*

(<u>31</u>) >

a sei eine wAo. Dann ist der RC-Typ jeder Kolonne von a mit dem RC-Typ jeder Kolonne von D(a) invers verschränkt.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

ii 2) (d(a), e(D(a))) sei ein Paar bestehend aus einer Kolonne von a und einer Kolonne von D(a).

ii 3) Dann gibt zu d(a) in D(a) mindestens eine Reihe mit dem inversen RC-Typ. Eine solche sei f(D(a)).

ii 4) e(a) hat mit f(D(a)) mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

ii 5) Also ist der RC-Typ von d(a) mit dem RC-Typ von e(D(a)) invers verschränkt.

i 6) Also ist der RC-Typ jeder Kolonne von a mit dem RC-Typ jeder Kolonne von D(a) invers verschränkt.

(32)

a, d seien wAon. Dann kann G(a, d) mithilfe von K aus S(W(a, d), W(D(a), D(d))) erzeugt werden.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

i 2) n sei die Anzahl der Reihen von a, m die Anzahl der Reihen von d.

i 3) u sei die Anzahl der Kolonnen von a, v die Anzahl der Kolonnen von d.

ii 4) (e(W(a, d)), f(W(D(a), D(d))) sei ein Paar bestehend aus einer der ersten u Kolonnen von W(a, d) und einer der ersten n Kolonnen von W(D(a), D(d)).

ii 5) Dann gibt es in a mindestens eine Kolonne mit dem RC-Typ von e(W(a, d)) und in D(a) mindestens eine Kolonne mit dem RC-Typ von f(W(D(a), D(d))).

ii 6) Also sind die RC-Typen von e(W(a, d)) und f(W(D(a), D(d))) invers verschränkt.

ii 7) Also werden e(W(a, d)) und f(W(D(a), D(d))) in S(W(a, d), W(D(a), D(d))) zu einer inhomogenen Kolonne verbunden.

i 8) Also ergibt jede Verbindung einer der ersten u Kolonnen von W(a, d) mit einer der ersten n Kolonnen von W(D(a), D(d)) in S(W(a, d), W(D(a), D(d))) eine inhomogene Kolonne.

ii 9) (g(W(a, d)), h(W(D(a), D(d)))) sei ein Paar bestehend aus einer der letzten v Kolonnen von W(a, d) und einer der letzten m Kolonnen von W(D(a), D(d)).

ii 10) Dann gibt es in d mindestens eine Kolonne mit dem RC-Typ von g(W(a, d)) und in D(d) mindestens eine Kolonne mit dem RC-Typ von h(W(D(a), D(d))).

ii 11) Also sind die RC-Typen von g(W(a, d) und h(W(D(a), D(d))) invers verschränkt.

ii 12) Also werden g(W(a, d)) und h(W(D(a), D(d))) in S(W(a, d), W(D(a), D(d))) zu einer inhomogenen Kolonne verbunden.

i 13) Also ergibt jede Verbindung einer der letzen v Kolonnen von W(a, d) mit einer der letzten m Kolonnen von W(D(a), D(d)) in S(W(a, d), W(D(a), D(d))) eine inhomogene Kolonne.

i 14) Also kann G(a, d) mithilfe von K aus S(W(a, d), W(D(a), D(d))) erzeugt werden.

1.2.2.5 Vollständigkeit der Menge {D, W, S, K} in Bezug auf die allgemeine Formregel von N.

⇒ *Satz 34*

Wie wir gezeigt haben, reichen D, W und S zusammen aus, um jede nicht flächige wAo, die keine Ausgangsanordnung ist, schrittweise aus Ausgangsanordnungen zu erzeugen. (vgl. die Sätze 2, 3, 4)

(<u>33</u>)
a sei eine flächige wAo. Dann reichen D, W, S, K zusammen aus, um a schrittweise aus Ausgangsanordnungen zu erzeugen.
Beweis:

i 1) a sei eine flächige wAo.

i 2) n sei die Anzahl der Reihen von a, m die Anzahl der Kolonnen von a.

i 3) d_1, ..., d_n sei die Reihe der anordnungsidentischen wAon zu r1(a), ..., rn(a), den Reihen von a.

i 4) D und W reichen zusammen aus, um jede wAo aus d_1, ..., d_n schrittweise aus Ausgangsanordnungen herzustellen.

i 5) e sei das Ergebnis der schrittweisen Verknüpfung von d_1, ..., d_n durch S. e sei also S(...S(d_1, d_2), ..., d_n).

i 6) Die Anzahl der Reihen von e ist n, die Anzahl der Kolonnen m^n.

ii 7) f(a) sei die u-te Kolonne von a.

ii 8) g(e) soll eine bestimmte Kolonne von e sein. Der Kolonnenindex von g(e) ist dadurch zu errechnen, daß in den Ausdruck (((x-1) m)+u) in die Variable x zuerst u, und dann (n-2)-mal das Ergebnis des letzten Durchgangs eingesetzt wird.

ii 9) g(e) ist anordnungsidentisch mit f(a).

i 10) Zu jeder Kolonne von a gibt es eine Kolonne in e, die ihr, wie beschrieben, zugeordnet ist.

i 11) $g_1, ..., g_{((m \text{ hoch } n)-m)}$ seien die Kolonnen von e, die keiner Kolonne von a, wie beschrieben, zuordenbar sind.

i 12) Werden aus e die Kolonnen $g_1, ..., g_{((m \text{ hoch } n)-m)}$ fortgenommen, entsteht die wAo a.

i 13) Der RC-Typ jeder Kolonne von e ist auch eine Reihenauswahl von e.

i 14) Da jede Reihe von e denselben RC-Typ hat wie die gleichgereihte Reihe von a, ist jede Reihenauswahl von e auch eine Reihenauswahl von a.

i 15) Also ist der RC-Typ jeder homogenen Kolonne von e auch eine homogene Reihenauswahl von a.

i 16) Da a eine wAo ist, hat jede homogene Reihenauswahl von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens ein Element gemeinsam.

i 17) Also hat jede homogene Kolonne von e mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

i 18) Also gibt es eine wAo K(e, $g_1, ..., g_{((m \text{ hoch } n)-m)}$), bzw. a ist diese wAo.

i 19) Also reichen D, W, S, K zusammen aus, um a schrittweise aus Ausgangsanordnungen zu erzeugen.

Also gilt:

(<u>34</u>)

D, W, S, K reichen zusammen aus, um jede wAo, die keine Ausgangsanordnung ist, schrittweise aus Ausgangsanordnungen zu erzeugen.

Mit anderen Worten: {D, W, S, K} ist vollständig in Bezug auf die allgemeine Formregel von N.

KAPITEL 2

DIE AUSSAGENLOGISCHE SPRACHE AL

Die aussagenlogische Sprache AL ist eine künstliche Sprache. Unsere Metasprache für AL, also jene Sprache, mit der wir auf AL Bezug nehmen, basiert auf der natürlichen Sprache.

Die Sprache AL ist eine lineare logische Notation. Die syntaktisch vollwertigen Zeichen einer solchen Notation sind Kombinationen bestimmter Zeichen, der sogenannten Grundzeichen der Notation. Die Gesamtheit der Grundzeichen heißt der Zeichenvorrat.

Der Zeichenvorrat von AL enthält drei verschiedene Sorten von Grundzeichen: Satzbuchstaben, Konnektive und Klammern.

<u>Zeichenvorrat von AL</u>

1) <u>Satzbuchstaben</u>
   Satzbuchstaben sind die Buchstaben 'p', 'q', 'r', 's', gegebenenfalls weitere Zeichen, die mithilfe von numerischen Indizes aus den genannten Buchstaben gebildet werden.
   Die Satzbuchstaben sind in die folgende Reihe geordnet:
   'p', 'q', 'r', 's', 'p_1', 'q_1', 'r_1', 's_1', 'p_2' ..., letzter Satzbuchstabe.
   (Die Anzahl der Satzbuchstaben entspricht der Anzahl der Balkenfarben.)
2) <u>Konnektive</u> (Verknüpfungszeichen)
   '$\neg$' (Negationszeichen; lies: 'nicht')
   '$\wedge$' (Konjunktionszeichen; lies: 'und')
   '$\vee$' (Disjunktionszeichen; lies: 'oder')
   '$\rightarrow$' (Zeichen der materialen Implikation, Pfeil; lies: 'Pfeil')
   '$\equiv$' (Zeichen der materialen Äquivalenz; lies: 'ist äquivalent')
3) <u>Klammern</u>
   '(', ')'

n sei eine ganze Zahl ≥ 1. Dann ist jede n-stellige Kombination von Grundzeichen ein Ausdruck von AL. Nichts sonst ist ein Ausdruck von AL.

Beispiel:
Es ist z. B. 'pq∧¬rrrp' ein Ausdruck von AL.

Wenn an der soundsovielten Stelle eines Ausdrucks A_1 ein bestimmtes Grundzeichen auftritt, so nennen wir diese Stelle von A_1 ein Vorkommnis dieses Grundzeichens in A_1.
Wenn ein Teil eines Ausdrucks A_1 von n aufeinanderfolgenden Stellen (n≥1) in isolierter Position der Ausdruck A_2 wäre, so nennen wir diesen Teil von A_1 ein Vorkommnis von A_2 in A_1. Ein Ausdruck A_1 enthält jedenfalls ein Vorkommnis des Ausdrucks A_1.
Einem bestimmten Vorkommnis eines Ausdrucks A_2 in einem Ausdruck A_1 ist die Position in A_1, an der A_2 auftritt wesentlich.

Ausdrücke von AL, die bestimmte zusätzliche Bedingungen erfüllen, heißen wohlgeformte Formeln (well formed formulas, kurz: wffs) von AL. Diese sind die eigentlichen Zeichen von AL.

Als metasprachliche Variablen für wffs verwenden wir die Zeichen: 'φ', 'ψ', 'χ', 'φ_1', 'ψ_1', 'χ_1', φ_2, usw.
(In eine metasprachliche Variable für wffs kann eine beliebige wff von AL eingesetzt werden.)

Wir werden nun einen besonderen Typ metasprachlicher Ausdrücke einführen. Metasprachliche Ausdrücke vom Typ I sind Zeichenkombinationen, die mindestens eine metasprachliche Variable für wffs enthalten und bei Einsetzung von wffs in alle metasprachlichen Variablen für wffs eine wff ergeben. Die Art der Bedeutung solcher Ausdrücke erklärt sich aus ihrer Handhabung.

Wir bestimmen nun durch einen Satz von Formregeln, welche Ausdrücke von AL wffs sind.

<u>Formregeln von AL</u>

<u>AL-FR1</u>:
Ein einstelliger Ausdruck, der in einem Vorkommnis eines Satzbuchstabens besteht, ist eine wff.

<u>AL-FR2</u>:

φ sei eine wff. Dann ist auch $\neg\varphi$ eine wff.

<u>AL-FR3</u>:

φ, ψ seien wffs. Dann ist auch $(\varphi\wedge\psi)$ eine wff.

<u>AL-FR4</u>:

φ, ψ seien wffs. Dann ist auch $(\varphi\vee\psi)$ eine wff.

<u>AL-FR5</u>:

φ, ψ seien wffs. Dann ist auch $(\varphi\rightarrow\psi)$ eine wff.

<u>AL-FR6</u>:

φ, ψ seien wffs. Dann ist auch $(\varphi\equiv\psi)$ eine wff.

<u>AL-FR7</u>:

Nichts sonst ist eine wff.

Beispiel:

Es ist z. B. '$((p\rightarrow p)\vee\neg r)$' eine wff.

Erläuterung:

Aufgrund von AL-FR1 ist 'p' eine wff. Setzen wir in FR5 in φ 'p' und in 'ψ' ebenfalls 'p' ein, dann erhalten wir '$(p\rightarrow p)$' als eine wff. Aufgrund von AL-FR1 ist 'r' eine wff. Setzen wir in AL-FR2 in φ 'r' ein, so erhalten wir '$\neg r$' als eine wff. Setzen wir in FR4 in φ '$(p\rightarrow p)$' und in ψ '$\neg r$' ein, so erhalten wir '$((p\rightarrow p)\vee\neg r)$' als eine wff.

Bei jedem Ausdruck von AL läßt sich mechanisch in einer endlichen Anzahl von Schritten entscheiden, ob er eine wff ist.

Bei der Niederschrift von wffs soll es folgende Möglichkeiten der Klammerneinsparung geben:

1) A_1 sei ein Ausdruck, der eine wff oder eine Abkürzung für eine wff ist. Die erste und die letzte Stelle von A_1 soll ein zusammengehöriges Klammernpaar enthalten. A_2 sei derjenige Ausdruck, dessen Vorkommnis die zweite bis vorletzte Stelle von A_1 umfaßt. Dann ist A_2 eine Abkürzung für A_1 bei jenem Vorkommnis von A_2, das nicht Teil eines längeren Ausdrucks ist.
2) $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$ $(n\geq 2)$ seien wffs. A_1 sei ein Ausdruck, der eine Abkürzung für eine wff ist. A_1 soll mindestens ein Vorkommnis des Ausdrucks $(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\wedge\varphi_{n+1})$ enthalten. Dann ist $(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\wedge\varphi_{n+1})$ in A_1 eine Abkürzung für den Ausdruck $((\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)\wedge\varphi_{n+1})$.

3) $\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi_{n+1}$ ($n\geq2$) seien wffs. A_1 sei ein Ausdruck, der eine Abkürzung für eine wff ist. A_1 soll mindestens ein Vorkommnis des Ausdrucks $(\varphi_1\vee...\vee\varphi_n\vee\varphi_{n+1})$ enthalten. Dann ist $(\varphi_1\vee...\vee\varphi_n\vee\varphi_{n+1})$ in A_1 eine Abkürzung für den Ausdruck $((\varphi_1\vee...\vee\varphi_n)\vee\varphi_{n+1})$.
4) Ein Ausdruck ist eine Abkürzung für eine wff, genau dann, wenn er sich auf der Basis der Annahme, er sei eine Abkürzung für eine wff, aufgrund der oben genannten Vereinbarungen schrittweise in eine wff überführen läßt.

Beisspiel:
Es ist z. B. der Ausdruck '$(p\wedge q\wedge(q\rightarrow r)\wedge s)\equiv r$' eine Abkürzung für die wff '$((((p\wedge q)\wedge(q\rightarrow r))\wedge s)\equiv r)$'.
Gegeben seien die Ausdrücke (1)-(8).

(1) $(p\wedge q\wedge(q\rightarrow r)\wedge s)\equiv r$

(2) $((p\wedge q\wedge(q\rightarrow r)\wedge s)\equiv r)$

(3) $(p\wedge q\wedge(q\rightarrow r)\wedge s)$

(4) $((p\wedge q\wedge(q\rightarrow r))\wedge s)$

(5) $(((p\wedge q\wedge(q\rightarrow r))\wedge s)\equiv r)$

(6) $(p\wedge q\wedge(q\rightarrow r))$

(7) $((p\wedge q)\wedge(q\rightarrow r))$

(8) $((((p\wedge q)\wedge(q\rightarrow r))\wedge s)\equiv r)$

Wir gehen von der Annahme aus, (1) sei eine Abkürzung für eine wff. Aufgrund von Punkt 1 ist (1) eine Abkürzung für (2) bei jenem Vorkommnis von (1), das nicht Teil eines längeren Ausdrucks ist. Aufgrund von Punkt 2 ist in (2) (3) eine Abkürzung für (4). Also ist (2) eine Abkürzung für (5). Aufgrund von Punkt 2 ist in (5) (6) eine Abkürzung für (7). Also ist (5) eine Abkürzung für (8). Also ist (1) eine Abkürzung für (8). (8) ist eine wff. Also ist (1) eine Abkürzung für eine wff. Also ist (1) eine Abkürzung für (8).

Eine einstellige wff (die also in dem Vorkommnis eines Satzbuchstabens besteht) heißt eine Atomformel.

Unter einer Negation verstehen wir im allgemeinen eine wff der Form $\neg\varphi$. Eine Konjunktion ist eine wff der Form $\varphi\wedge\psi$, eine Disjunktion eine wff der Form $\varphi\vee\psi$, eine materiale Implikation eine wff der Form $\varphi\rightarrow\psi$, eine materiale Äquivalenz eine wff der Form $\varphi\equiv\psi$.
φ sei eine wff. Dann heißt φ das Negatum von $\neg\varphi$.

φ, ψ seien wffs. Dann heißen φ und ψ die Konjunkte von $\varphi\wedge\psi$, die Disjunkte von $\varphi\vee\psi$, die Äquivalente von $\varphi\equiv\psi$. Und es heißt φ das Antezedens von $\varphi\rightarrow\psi$ und ψ das Konsequens von $\varphi\rightarrow\psi$.

Daneben gelten folgende Konventionen:

n-fache Negation:

1) φ sei eine wff. Dann heißt φ die 0-fache Negation von φ.
2) φ, ψ seien wffs. ψ sei die n-fache Negation von φ ($n\geq0$). Dann heißt $\neg\psi$ die n+1-fache Negation von φ.

$\varphi_1, ..., \varphi_n$ ($n\geq1$) seien wffs. Dann nennen wir $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ eine n-gliedrige Konjunktion und die wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ die Konjunkte von $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ (als n-gliedrige Konjunktion). (Jede wff φ kann als eingliedrige Konjunktion aufgefaßt werden.)

$\varphi_1, ..., \varphi_n$ ($n\geq1$) seien wffs. Dann nennen wir $\varphi_1\vee...\vee\varphi_n$ eine n-gliedrige Disjunktion und die wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ die Disjunkte von $\varphi_1\vee...\vee\varphi_n$ (als n-gliedrige Disjunktion). (Jede wff φ kann als eingliedrige Disjunktion aufgefaßt werden.)

Die Anzahl der Vorkommnisse von Konnektiven in einer wff heißt der Grad der wff.

Hauptkonnektiv:

1) φ sei eine wff. Dann nennen wir die erste Stelle von $\neg\varphi$ das Hauptkonnektiv von $\neg\varphi$.
2) φ, ψ seien wffs, n sei die Anzahl der Stellen von φ. Dann nennen wir bei $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ und $\varphi\equiv\psi$ die (n+2)-te Stelle das Hauptkonnektiv der wff.

Teilformel:

1) Jede wff ist eine Teilformel von sich selbst.
2) φ sei eine wff. Dann ist jede Teilformel von φ eine Teilformel von $\neg\varphi$.
3) φ, ψ seien wffs. Dann ist jede Teilformel von φ und jede Teilformel von ψ eine Teilformel von $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$ und $\varphi\equiv\psi$.
4) Nichts sonst ist eine Teilformel einer wff.

φ, ψ seien wffs, die keine Atomformeln sind, ψ sei eine Teilformel von φ. Das Hauptkonnektiv von ψ sei die n-te Stelle von ψ. Mit der m-ten Stelle von φ beginne ein

Vorkommnis von ψ. Dann ist die (m+n-1)-te Stelle von φ das Hauptkonnektiv des betreffenden Vorkommnisses von ψ in φ.

Eine basale wff ist eine wff, die entweder eine Atomformel oder die einfache Negation einer Atomformel ist.
Gegeben sei ein Satzbuchstabe SB. φ sei die Atomformel, die in einem Vorkommnis von SB besteht. Dann heißt φ die positive basale wff zu SB, und $\neg\varphi$ die negative basale wff zu SB. Auch nennen wir φ die Umkehrung von $\neg\varphi$, und $\neg\varphi$ die Umkehrung von φ.

Eine wff hat konjunktive Normalform (KNF) genau dann, wenn sie eine ein- oder mehrgliedrige Konjunktion ist, sodaß jedes der Konjunkte eine ein-oder mehrgliedrige Disjunktion ist, sodaß jedes der Disjunkte eine basale wff ist.

Eine wff hat disjunktive Normalform (DNF) genau dann, wenn sie eine ein- oder mehrgliedrige Disjunktion ist, sodaß jedes der Disjunkte eine ein- oder mehrgliedrige Konjunktion ist, sodaß jedes der Konjunkte eine basale wff ist.

KAPITEL 3

ÜBERTRAGUNG

Unter Übertragung verstehen wir die Zuordnung von wAon von N zu wffs von AL.

Zunächst setzen wir fest: n sei eine ganze Zahl, die ≥ 1 und ≤ der Anzahl der Satzbuchstaben von AL bzw. der Balkenfarben von N ist. Dann sollen der n-te Satzbuchstabe aus der Reihe der Satzbuchstaben von AL und die n-te Balkenfarbe aus der Reihe der Balkenfarben von N einander zugeordnet sein.

3.1 DAS ÜBERTRAGUNGSVERFAHREN Ü1

Das Übertragungsverfahren Ü1 ordnet jeder wff von AL unendlich viele wAon von N zu.

Eine wAo a, die einer wff φ durch Ü1 zugeordnet wird, heißt ein Ü1-Resultat von φ.

Für die Zuordnung von wAon zu wffs gelten die folgenden Regeln:

Ü1-R1:

φ sei eine Atomformel. a sei die Ausgangsanordnung in jener Farbe, die dem Satzbuchstaben zugeordnet ist, in dessen Vorkommnis φ besteht. Dann ist a ein Ü1-Resultat von φ.

:blau ist ein Ü1-Resultat von 'p', :grün ein Ü1-Resultat von 'q', :rot ein Ü1-Resultat von 'r', :gelb ein Ü1-Resultat von 's' usw.

Ü1-R2:

φ sei eine wff und a ein Ü1-Resultat von φ. Dann ist D(a) ein Ü1-Resultat von ¬φ.

Ü1-R3:

φ, ψ seien wffs. a sei ein Ü1-Resultat von φ und d ein Ü1-Resultat von ψ. Dann ist W(a, d) ein Ü1-Resultat von φ∧ψ.

Ü1-R4:

φ, ψ seien wffs. a sei ein Ü1-Resultat von φ und d ein Ü1-Resultat von ψ. Dann ist S(a, d) ein Ü1-Resultat von $\varphi\vee\psi$.

Ü1-R5:

φ, ψ seien wffs. a sei ein Ü1-Resultat von $\neg\varphi\vee\psi$. Dann ist a ein Ü1-Resultat von $\varphi\rightarrow\psi$.

Ü1-R6:

φ, ψ seien wffs. a sei ein Ü1-Resultat von $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$. Dann ist a ein Ü1-Resultat von $\varphi\equiv\psi$.

Ü1-R7:

φ sei eine wff und a ein Ü1-Resultat von φ. Die wAo d soll aus a durch einen Anwendungsschritt von K auf a erzeugt werden können. Dann ist d ein Ü1-Resultat von φ.

Ü1-R8:

φ sei eine wff und a ein Ü1-Resultat von φ. Die wAo d soll aus a durch einen Anwendungsschritt von E auf a erzeugt werden können. Dann ist d ein Ü1-Resultat von φ.

Ü1-R9:

φ sei eine wff und a ein Ü1-Resultat von φ. Die wAo d soll aus a durch einen Anwendungsschritt von T auf a erzeugt werden können. Dann ist d ein Ü1-Resultat von φ.

Ü1-R10:

Nichts sonst ist ein Ü1-Resultat einer wff.

Aus den Bestimmungen für Ü1 und Satz 32 ergibt sich das folgende:

(35)

φ, ψ seien wffs. a sei ein Ü1-Resultat von φ und d ein Ü1-Resultat von ψ. Dann ist G(a, d) ein Ü1-Resultat von $\varphi\equiv\psi$.

KAPITEL 4

LESEN VON ANORDNUNGEN

Unter dem Lesen von Anordnungen verstehen wir die Zuordnung von wffs von AL zu wAon von N bzw. zu AoTn von Aon von N.

4.1 DAS LESEVERFAHREN L'

Das Leseverfahren L' ordnet jedem Balken jeder Ao von N genau eine wff von AL zu. Keinem AoT sonst einer Ao ordnet L' wffs zu.

Die wff, die L' einem Balken d(a) einer Ao a zuordnet, heißt das L'-Resultat von d(a).

Für die Zuordnung von wffs zu Balken von Aon gelten die folgenden Regeln:
<u>L'-R1</u>:
d(a) sei ein Balken einer Ao a. d(a) sei waagrecht ausgerichtet. φ sei die Atomformel, die in dem Vorkommnis jenes Satzbuchstabens besteht, dem die Farbe von d(a) zugeordnet ist. Dann ist φ das L'-Resultat von d(a).
Wenn d(a) den Balkentyp (Blau, Waagrecht) hat, so ist 'p' das L'-Resultat von d(a). Beim Typ (Grün, Waagrecht) ist 'q', beim Typ (Rot, Waagrecht) 'r', beim Typ (Gelb, Waagrecht) 's' das L'-Resultat von d(a), usw.
<u>L'-R2</u>:
d(a) sei ein Balken einer Ao a. d(a) sei senkrecht ausgerichtet. φ sei die Atomformel, die in dem Vorkommnis jenes Satzbuchstabens besteht, dem die Farbe von d(a) zugeordnet ist. Dann ist ¬φ das L'-Resultat von d(a).
Wenn d(a) den Balkentyp (Blau, Senkrecht) hat, so ist '¬p' das L'-Resultat von d(a). Beim Typ (Grün, Senkrecht) ist '¬q', beim Typ (Rot, Senkrecht) '¬r', beim Typ (Gelb,

Senkrecht) '¬s' das L'-Resultat von d(a), usw.

4.2 DAS LESEVERFAHREN L1

Das Leseverfahren L1 ordnet jedem Balken jeder wAo, jeder Kolonne jeder wAo und jeder wAo selbst genau eine wff zu.
Keiner Ao sonst und keinem AoT einer Ao sonst ordnet L1 wffs zu.

Die wff, die L1 einem geeigneten AoT d(a) einer wAo a zuordnet, heißt das L1-Resultat von d(a).
Wenn d(a) mit a identisch ist, so schreiben wir für das L1-Resultat von d(a) auch 'L1(*a*)'.

Für die Zuordnung von wffs zu AoTn von wAon gelten die folgenden Regeln:
<u>L1-R1</u>:
d(a) sei ein Balken einer wAo a und φ das L'-Resultat von d(a). Dann ist φ das L1-Resultat von d(a).
<u>L1-R2</u>:
d(a) sei eine Kolonne einer wAo a. $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei die Reihe der L1-Resultate der Balken von d(a) nach Streichung aller Wiederholungen. Dann ist $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ das L1-Resultat von d(a).
<u>L1-R3</u>:
a sei eine wAo. $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei die Reihe der L1-Resultate der Kolonnen von a nach Streichung aller Wiederholungen bei selber Menge von Disjunkten. Dann ist $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ das L1-Resultat von a.

(Jede wff, die das L1-Resultat einer wAo ist, hat konjunktive Normalform.)

Beispiel:
Das L1-Resultat von $SWbSDg_1rg_2$ (Abb. 14) ist: '(p∨s)∧(¬q∨r∨s)'.

4.3 DAS LESEVERFAHREN L2

Das Leseverfahren L2 ordnet jedem Balken jeder wAo, jeder Reihe jeder wAo und jeder wAo selbst genau eine wff zu.
Keiner Ao sonst und keinem AoT einer Ao sonst ordnet L2 wffs zu.

Die wff, die L2 einem geeigneten AoT d(a) einer wAo a zuordnet, heißt das L2-Resultat von d(a).
Wenn d(a) mit a identisch ist, so schreiben wir für das L2-Resultat von d(a) auch 'L2(*a*)'.

Für die Zuordnung von wffs zu AoTn von wAon gelten die folgenden Regeln:
<u>L2-R1</u>:
d(a) sei ein Balken einer wAo a und φ das L'-Resultat von d(a). Dann ist φ das L2-Resultat von d(a).
<u>L2-R2</u>:
d(a) sei eine Reihe einer wAo a. $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei die Reihe der L2-Resultate der Balken von d(a) nach Streichung aller Wiederholungen. Dann ist $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$ das L2-Resultat von d(a).
<u>L1-R3</u>:
a sei eine wAo. $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei die Reihe der L2-Resultate der Reihen von a nach Streichung aller Wiederholungen bei selber Menge von Konjunkten. Dann ist $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ das L2-Resultat von a.

(Jede wff, die das L2-Resultat einer wAo ist, hat disjunktive Normalform.)

Beispiel:
Das L2-Resultat von $SWbSDg_1rg_2$ (Abb. 14) ist: '$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \vee s$'.

4.4 DAS LESEVERFAHREN L3

Das Leseverfahren L3 ordnet jedem AoT jeder wAo, und also auch jeder wAo selbst, unendlich viele wffs zu.
L3 ordnet ausschließlich wAon und AoTn von wAon wffs zu.

L3 weist zwei Besonderheiten auf. Es bietet erstens die Möglichkeit einer flexiblen Aufteilung einer wAo in Anordnungsteile, und zweitens die Möglichkeit, das Leseblatt während des Lesens in 90°-Schritten im Uhrzeigersinn zu drehen bzw. in 90°-Schritten gegen den Uhrzeigersinn zurückzudrehen.

Aufteilung und Drehung beschreiben wir mengentheoretisch mithilfe des Konzepts sogenannter Segmentierungs- und Drehvarianten.

4.4.1 *Segmentierungsvarianten*

a sei eine wAo, d(a) ein AoT von a und α eine Menge von AoTn von a. α heißt eine waagrechte Segmentierung für d(a), genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Jedes Element von α ist in d(a) als kleinerer AoT enthalten.
2) Jede Reihe von a, die durch d(a) geht, geht durch jedes Element von α.
3) Zu jeder Kolonne von a, die durch d(a) geht, gibt es genau ein Element von α, sodaß die Kolonne durch das Element von α geht.

a sei eine wAo, d(a) ein AoT von a und α eine Menge von AoTn von a. α heißt eine senkrechte Segmentierung für d(a), genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Jedes Element von α ist in d(a) als kleinerer AoT enthalten.
2) Jede Kolonne von a, die durch d(a) geht, geht durch jedes Element von α.
3) Zu jeder Reihe von a, die durch d(a) geht, gibt es genau ein Element von α, sodaß die Reihe durch das Element von α geht.

a sei eine wAo und α eine Menge von AoTn von a. d(a) und e(a) seien Elemente von α. d(a) heißt in e(a) direkt enthalten in Bezug auf α, genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) d(a) ist als kleinerer AoT in e(a) enthalten.
2) Es gibt kein Element f(a) von α, sodaß d(a) als keinerer AoT in f(a) und f(a) als kleinerer AoT in e(a) enthalten ist.

a sei eine wAo und α eine Menge von AoTn von a. α heißt eine Segmentierungsvariante (SV) für a, genau dann, wenn die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) α enthält als Element denjenigen AoT von a, der identisch ist mit a.
2) Für jedes Element d(a) von α gilt: Wenn d(a) ein flächiger AoT ist, und mindestens zwei verschiedene Balkentypen in d(a) vorkommen, dann ist mindestens ein Element von α in d(a) als kleinerer AoT enthalten.
3) Für jedes Element d(a) von α gilt: Wenn mindestens ein Element von α in d(a) als kleinerer AoT enhalten ist, dann ist die Menge aller Elemente von α, die in d(a) direkt enthalten sind in Bezug auf α, entweder eine waagrechte Segmentierung für d(a) oder eine senkrechte Segmentierung für d(a).
4) Für jeden Balken d(a) von a gilt: Es gibt genau ein Element e(a) von α, sodaß kein Element von α in e(a) als kleinerer AoT enthalten ist, und e(a) d(a) enthält.
5) Für jedes Element d(a) von α gilt: Wenn d(a) nicht identisch ist mit a, dann gibt es genau ein Element e(a) von α, sodaß d(a) in e(a) direkt enthalten ist in Bezug auf α.
   (Es läßt sich zeigen, daß die Bedingungen 4 und 5 aus den Bedingungen 1 und 3 folgen.)

(<u>36</u>)

a sei eine wAo. α sei diejenige Menge von AoTn von a, die genau den mit a identischen AoT von a und alle Kolonnen von a als Elemente enthält. Dann ist α eine SV für a.

(<u>37</u>)

a sei eine wAo. α sei diejenige Menge von AoTn von a, die genau den mit a identischen AoT von a und alle Reihen von a als Elemente enthält. Dann ist α eine SV für a.

Für das folgende sei a eine wAo und SV(a) eine Menge von AoTn von a, die eine SV für a ist.

Jeder AoT von a, der ein Element von SV(a) ist, heißt ein Segment bei SV(a).

d(a) und e(a) seien Segmente bei SV(a). d(a) sei in e(a) direkt enthalten in Bezug auf SV(a). Dann heißt d(a) ein direktes Segment von e(a) bei SV(a).

d(a) sei ein Segment bei SV(a), sodaß kein Element von SV(a) als kleinerer AoT in d(a) enthalten ist. Dann heißt d(a) ein Basissegment bei SV(a).

d(a) sei ein Segment bei SV(a), sodaß mindestens ein Element von SV(a) als kleinerer AoT in d(a) enthalten ist, und die Menge der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) eine waagrechte Segmentierung ist. Dann heißt d(a) eine waagrechte Segmentfolge bei SV(a).

d(a) sei ein Segment bei SV(a), sodaß mindestens ein Element von SV(a) als kleinerer AoT in d(a) enthalten ist, und die Menge der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) eine senkrechte Segmentierung ist. Dann heißt d(a) eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a).

Nichts sonst ist ein Segment, ein direktes Segment eines Segments, ein Basissegment, eine waagrechte Segmentfolge, oder eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a).

Gemäß der Definitionen gilt das folgende:

1) Jedes Segment bei SV(a) ist entweder eine waagrechte Segmentfolge oder eine senkrechte Segmentfolge oder ein Basissegment bei SV(a).
2) Jeder Balken von a ist in genau einem Basissegment bei SV(a) enthalten.
3) Jedes Segment bei SV(a), das nicht identisch ist mit a, ist ein direktes Segment bei SV(a) genau eines Segments bei SV(a).

Wir wollen festlegen:
Der mit a identische AoT von a hat die Segmentierungsstufe 0 bei SV(a).
d(a) sei eine waagrechte oder senkrechte Segmentfolge bei SV(a). d(a) soll die Segmentierungsstufe n haben bei SV(a). Dann hat jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) die Segmentierungstufe n+1 bei SV(a).

Wir zeigen nun, daß sich nach diesen Regeln für jedes Element von SV(a) höchstens eine Segmentierungsstufe (SF) bei SV(a) ableiten läßt:
Angenommen, für mindestens ein Element von SV(a) ist mehr als eine SF bei SV(a) ableitbar. Dann gibt es mindestens ein maximal großes Element mit dieser Eigenschaft. Ein solches sei d(a). d(a) kann nicht identisch sein mit a, da der mit a identische AoT von a nur die SF 0 hat. Also ist d(a) ein direktes Segment bei SV(a) genau eines Elements e(a) von SV(a). e(a) ist größer als d(a), und es muß für e(a) ebenfalls mehr als eine SF bei SV(a) ableitbar sein. Dies ergibt einen Widerspruch.

Und wir zeigen, daß sich für jedes Element von SV(a) eine SF bei SV(a) ableiten läßt: Angenommen, für mindestens ein Element von SV(a) ist keine SF bei SV(a) ableitbar. Dann gibt es mindestens ein maximal großes Element mit dieser Eigenschaft. Ein solches sei d(a). d(a) kann nicht identisch sein mit a, da der mit a identische AoT von a die SF 0 hat. Also ist d(a) ein direktes Segment bei SV(a) genau eines Elements e(a) von SV(a). e(a) ist größer als d(a) und es kann für e(a) ebenfalls keine SF bei SV(a) ableitbar sein. Dies ergibt einen Widerspruch.

SV(a) sei die Menge {d_1(a), ..., d_n(a)}. Dann schreiben wir für SV(a) auch: '{a: d_1, ..., d_n}'.

Die graphische Darstellung einer SV für eine wAo basiert auf einem Zeichen, welches die wAo bildlich repräsentiert. Die direkten Segmente einer waagrechten Segmentfolge werden durch senkrechte, die direkten Segmente einer senkrechten Segmentfolge durch waagrechte Trennungsstriche (Segmentierungslinien) voneinander abgegrenzt. Wenn nötig, wird neben Segmentierungslinien die Segmentierungsstufe der abgeteilten Segmente in kleinen römischen Ziffern ausgewiesen.

Beispiel, s. Abb. 15.

4.4.2 *Drehen des Leseblatts*

Beim Leseverfahren L3 kann das Leseblatt in 90°-Schritten gedreht werden.

Unter einem positiven Drehschritt verstehen wir im folgenden eine 90°-Drehung des Leseblatts im Uhrzeigersinn, unter einem negativen Drehschritt eine 90° Drehung desselben gegen den Uhrzeigersinn.

(Der intuitiveren Variante der Bewegung des Lesers um das Leseblatt herum wird die Drehung des Leseblatts aus Gründen der Bequemlichkeit vorgezogen.)

Die vier Positionen des Leseblatts nennen wir: P1, P2, P3, P4.
P1 ist die Standardposition, ausgewiesen durch ein indexikalisches Zeichen, z. B. die Ausrichtung der Beschriftung. P2 ist von P1 aus, P3 von P2 aus, und P4 von P3 aus, durch

einen positiven Drehschritt erreichbar.
P1 und P3 heißen auch die Längspositionen, P2 und P4 die Querpositionen des Leseblatts.

a sei eine wAo und Z(a) ein physisches Zeichen auf einem Leseblatt, welches bei P1 die wAo a repräsentiert. Px sei eine der Positionen des Leseblatts und d diejenige wAo, die von Z(a) bei Px repräsentiert wird. Dann nennen wir d die wAo, die a bei Px korrespondiert, und schreiben für d auch 'corr (*a*, P*x*)'.

a sei eine wAo und d(a) ein AoT von a. Z(a) sei ein physisches Zeichen auf einem Leseblatt, welches bei P1 die wAo a repräsentiert, und Z(d(a)) derjenige Teil von Z(a), der bei P1 d(a) repräsentiert. Px sei eine der Positionen des Leseblatts. e(corr(a, Px)) sei derjenige AoT von corr(a, Px), der bei Px von Z(d(a)) repräsentiert wird. Dann nennen wir e(corr(a, Px)) den AoT von corr(a, Px), der d(a) bei Px korrespondiert, und schreiben für e(corr(a, Px) auch 'corr(*d(a)*, P*x*)'.

a sei eine wAo und SV(a) eine SV für a. SV(a) sei die Menge $\{d_1(a), ..., d_n(a)\}$. Px sei eine der Positionen des Leseblatts und α die Menge $\{corr(d_1(a), Px), ..., corr(d_n(a), Px)\}$. Dann nennen wir α die SV für corr(a, Px), welche SV(a) bei Px korrespondiert, und schreiben für α auch 'corr(*SV(a)*, P*x*)'.

4.4.3 *Drehvarianten*

Eine Zuordnung von Elementen einer Menge β zu Elementen einer Menge α ist eine Menge geordneter Paare, deren jedes als erstes Glied ein Element aus α, und als zweites Glied ein Element aus β enthält.
Wenn eine Zuordnung Z das Paar (a, b) enthält, dann sagen wir, Z ordne dem a das b zu.

a sei eine wAo und SV(a) eine SV für a. Eine Drehvariante (DV) für SV(a) ist eine Zuordnung von Elementen der Menge der ganzen Zahlen ≥ 0 zu Elementen von SV(a), die jedem Element von SV(a) genau ein Element der Menge der ganzen Zahlen ≥ 0 zuordnet.

Für das folgende sei a eine wAo, SV(a) eine SV für a und DV(SV(a)) eine DV für SV(a).

d(a) sei ein Element von SV(a) und n die Zahl, die DV(SV(a)) d(a) zuordnet. Dann nennen wir n die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

d(a) sei der mit a identische AoT von a und n die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)). Dann nennen wir jene Position des Leseblatts, die von P1 aus durch n positive Drehschritte zu erreichen ist, die Position (des Leseblatts) für d(a) bei DV(SV(a)).
d(a) sei eine waagrechte oder senkrechte Segmentfolge bei SV(a) und Px die Position (des Leseblatts) für d(a) bei SV(a). e(a) sei ein direktes Segment von d(a) bei SV(a) und n die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)). Dann heißt jene Position des Leseblatts, die von Px aus durch n positive Drehschritte zu erreichen ist, die Position (des Leseblatts) für e(a) bei DV(SV(a)).

SV(a) sei die Menge {d_1(a), ..., d_m(a)} und DV(SV(a)) die Menge {(d_1(a), n_1), ..., (d_m(a), n_m)}. Dann schreiben wir für DV(SV(a)) auch: '{*a*: *(d_1, n_1), ..., (d_m, n_m)*}'.

Die graphische Darstellung einer DV DV(SV(a)) für eine SV SV(a) für eine wAo a basiert auf einer bildlichen Darstellung von SV(a). Sofern die Drehlänge bei DV(SV(a)) eines Segments bei SV(a) ungleich 0 ist, wird sie in arabischen Ziffern neben einer zugehörigen Segmentierungslinie ausgewiesen.

Beispiel, s. Abb. 16.

4.4.4 *Zuordnung wohlgeformter Formeln zu wohlgeformten Anordnungen*

Bei L3 erfolgt die Zuordnung einer wff φ zu einer wAo a bzw. einem AoT von a stets auf der Grundlage einer SV SV(a) für a und einer DV DV(SV(a)) für SV(a).

Für das folgende sei a eine wAo, SV(a) eine SV für a und DV(SV(a)) eine DV für SV(a).

1) L3 ordnet auf der Grundlage von SV(a) und DV(SV(a)) zunächst jedem Balken d(a) von a unmittelbar genau eine wff zu. Diese heißt das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).
2) Außerdem ordnet L3 auf der Grundlage von SV(a) und DV(SV(a)) jedem Basissegment d(a) bei SV(a) unter Bezugnahme auf die L3B-Resultate der in

d(a) enthaltenen Balken von a mindestens eine wff zu. Eine solche wff heißt ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

3) Schließlich ordnet L3 auf der Grundlage von SV(a) und DV(SV(a)) jeder waagrechten oder senkrechten Segmentfolge d(a) bei SV(a) unter Bezugnahme auf die L3S-Resultate bei DV(SV(a)) der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) unendlich viele wffs zu. Eine solche wff heißt ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).
4) Nicht anders und keinem AoT sonst von a ordnet L3 auf der Grundlage von SV(a) und DV(SV(a)) wffs zu.
5) Ein L3-Resultat von a bei DV(SV(a)) ist ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) des mit a identischen AoTs von a.

Für die Zuordnung von wffs zu AoTn von a auf der Grundlage von SV(a) und DV(SV(a)) gelten die folgenden Regeln:

<u>L3-R1</u>:

d(a) sei ein Balken von a und Px die Position bei DV(SV(a)) für dasjenige Basissegment bei SV(a), welches d(a) enthält. φ sei das L'-Resultat von corr(d(a), Px). Dann ist φ das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R2</u>:

d(a) sei ein Balken von a und zugleich ein Basissegment bei SV(a). n sei die Drehlänge, und φ das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)). Dann ist die n-fache Negation von φ ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R3</u>:

d(a) sei ein Basissegment bei SV(a) und ein ein waagrecht linearer oder ein senkrecht linearer AoT von a. Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)). corr(d(a), Px) sei ein waagrecht linerarer AoT von corr(a, Px). n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)). Gegeben sei eine wff φ, die die n-fache Negation einer Konjunktion $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ ist, sodaß gilt: Zu jedem in d(a) enthaltenen Balken von a gibt es mindestens ein Konjunkt von $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$, sodaß dieses Konjunkt das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Balkens ist, und zu jedem Konjunkt von $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ gibt es mindestens einen in d(a) enthaltenen Balken von a, sodaß das Konjunkt das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Balkens ist. Dann ist φ ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R4</u>:

d(a) sei ein Basissegment bei SV(a) und ein ein waagrecht linearer oder ein senkrecht linearer AoT von a. Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)). corr(d(a), Px) sei ein senkrecht linerarer AoT von corr(a, Px). n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)). Gegeben sei eine wff φ, die die n-fache Negation einer Disjunktion $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ist, sodaß gilt: Zu jedem in d(a) enthaltenen Balken von a gibt es mindestens ein Disjunkt von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$, sodaß dieses Disjunkt das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Balkens ist, und zu jedem Disjunkt von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ gibt es mindestens einen in d(a) enthaltenen Balken von a, sodaß das Disjunkt das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Balkens ist. Dann ist φ ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R5</u>:

d(a) sei ein Basissegment bei SV(a) und ein flächiger AoT von a. Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)). n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)). Da in d(a) nur ein Balkentyp vorkommt, kommt auch in corr(d(a), Px) nur ein Balkentyp vor. Also haben alle Balken von a, die in d(a) enthalten sind, dasselbe L3B-Resultat bei DV(SV(a)). Dieses sei φ. Dann ist die n-fache Negation von φ ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R6</u>:

d(a) sei eine waagrechte oder eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a). Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)). corr(d(a), Px) sei eine waagrechte Segmentfolge bei corr(SV(a), Px). n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)). Gegeben sei eine wff φ, die die n-fache Negation einer Konjunktion $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ ist, sodaß gilt: Zu jedem direkten Segement von d(a) bei SV(a), gibt es mindestens ein Konjunkt von $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$, sodaß dieses Konjunkt ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Segments ist, und zu jedem Konjunkt von $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ gibt es mindestens ein direktes Segment von d(a) bei SV(a), sodaß dieses Konjunkt ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Segments ist. Dann ist φ ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R7</u>:

d(a) sei eine waagrechte oder eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a). Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)). corr(d(a), Px) sei eine senkrechte Segmentfolge bei corr(SV(a), Px). n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)). Gegeben sei eine wff φ, die die n-fache Negation einer Disjunktion $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ist, sodaß gilt: Zu jedem direkten Segement von d(a) bei SV(a), gibt es mindestens ein Disjunkt von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$, sodaß dieses Disjunkt ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Segments ist, und zu jedem Disjunkt von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ gibt es mindestens ein direktes Segment von d(a) bei SV(a), sodaß dieses Disjunkt ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Segments ist. Dann ist φ ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

<u>L3-R8</u>:
Nichts sonst ist ein L3B-Resultat bei DV(SV(a)) eines Balkens von a oder ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) eines Segments bei SV(a).

Eine wff φ ist ein L3-Resultat einer wAo a, genau dann, wenn es mindestens eine SV SV(a) für a, und mindestens eine DV DV(SV(a)) für SV(a) gibt, sodaß φ ein L3-Resultat von a bei DV(SV(a)) ist.

Die L3-Resultate einer wAo nennen wir auch ihre Leseresultate. (Es ist leicht zu sehen, daß das L1-Resultat und das L2-Resultat einer wAo auch L3-Resultate dieser wAo sind.)

Beispiel:
Es ist z. B. '$(((p\lor q)\land r)\land s)\lor(\neg((p\lor q)\land r)\land\neg s)$' ein L3-Resultat von $GWSbg_1rg_2$ bei der in Abb. 16 dargestellten DV für diese wAo.

KAPITEL 5

INTERPRETATION VON AL

5.1 SÄTZE UND WAHRHEITSWERTE

Wahrheit und Falschheit werden Sätzen zugesprochen, genauer, Aussagesätzen. Den Umstand der Wahrheit eines Satzes, allgemein betrachtet, nennen wir den Wahrheitswert 'wahr' (W), den Umstand der Falschheit eines Satzes, den Wahrheitswert 'falsch' (F), und wir sagen von einem wahren bzw. falschen Satz, er habe den Wahrheitswert 'wahr' bzw. 'falsch'. Darüberhinaus soll es keine weiteren Wahrheitswerte geben. Ein Satz kann höchstens einen Wahrheitswert haben.

Unter einem 'Satz' verstehen wir im weiteren einen Satz der deutschen Umgangssprache (im Sinne einer syntaktisch-semantischen Einheit), der den folgenden Anforderungen gerecht wird:

1) Er ist der Form nach ein Aussagesatz.
2) Er ist sowohl in syntaktischer als auch in semantischer Hinsicht vollständig und korrekt. (Es ist allerdings zulässig, daß der Satz keinen Gehalt hat, in dem Sinn, daß er unverbindlich nichtssagend oder selbstwidersprüchlich ist.)
3) Wir können uns Bedingungen vorstellen, bei deren Erfüllung der Satz einen Wahrheitswert hat.

Wir fassen Sätze so auf, daß die Vorstellung eines Wahrheitswerts, die mit ihnen verbunden ist, die Vorstellung eines unveränderlichen und endgültigen Wahrheitswerts ist. Sätze, die Teile beinhalten, die ihre Bedeutung erst durch den sprachlichen Kontext oder durch die Umstände der Äußerung des Satzes erhalten, sind entsprechend konkretisiert zu denken.

Ein Satz soll anwendbar heißen, genau dann, wenn gewährleistet ist, daß er einen Wahrheitswert hat.

Die Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, damit ein Satz einen Wahrheitswert hat, nennen wir die Anwendbarkeitsvoraussetzungen des Satzes.

Wir gehen im weiteren stets von dem Fall aus, daß ein Satz anwendbar ist und einen Wahrheitswert hat.

Eine Wahrheitswertzuordnung (WZo) für eine Menge α von Sätzen ist eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Elementen von α, die jedem Element von α genau einen Wahrheitswert zuordnet.
Für eine endliche Menge von n Sätzen gibt es 2^n verschiedene WZon.

Beispiel:
Gegeben sei eine Menge von Sätzen mit zwei Elementen, S_1 und S_2. Dann sind dieses die vier WZon für $\{S_1, S_2\}$: $\{(S_1, W), (S_2, W)\}$, $\{(S_1, W), (S_2, F)\}$, $\{(S_1, F), (S_2, W)\}$, $\{(S_1, F), (S_2, F)\}$.

Wenn bei einer bestimmten WZo für eine Menge α von Sätzen einem Satz der Wahrheitswert W bzw. F zugeordnet ist, dann sagen wir auch, der Satz habe bei dieser WZo für α den Wert W bzw. F, oder der Satz sei bei dieser WZo wahr bzw. falsch.

Relativ zur Voraussetzung, daß Sätze genau eines von beidem, wahr oder falsch sind, entsprechen die WZon für eine Menge α von Sätzen den kombinatorischen Möglichkeiten der Wahrheit und Falschheit der Elemente von α, den kombinatorischen Wahrheitsmöglichkeiten für α.

Die Definition der WZo berücksichtigt aber nicht die Möglichkeit der grundsätzlichen Unverfügbarkeit bzw. Inkompatibilität von Wahrheitswerten für Sätze. Zu diesem Zweck definieren wir für WZon das Prädikat der Stimmigkeit.

Wir nennen eine WZo für eine Menge α von Sätzen stimmig, genau dann, wenn die Wahrheitswerte, die den Elementen von α in dieser WZo zugeordnet sind, unter Berücksichtigung des Gehalts dieser Sätze, grundsätzlich, das heißt auf der Ebene der Vorstellung, für die Sätze verfügbar bzw. kompatibel sind.

Unter einer 'Wahrheitsmöglichkeit für eine Menge α von Sätzen' verstehen wir von nun an eine kombinatorische Wahrheitsmöglichkeit für α, der eine stimmige WZo entspricht. Eine kombinatorische Wahrheitsmöglichkeit für α, der eine WZo entspricht, die nicht stimmig ist, nennen wir eine 'bloß kombinatorisch gegebene Wahrheitsmöglicheit für α'.

Gemäß der Vereinbarung, daß jeder Satz einen Wahrheitswert hat, postulieren wir:

P1:

Zu jeder Menge α von Sätzen gibt es mindestens eine stimmige WZo.

Außerdem wir halten fest:

P2:

α sei eine Menge von Sätzen und β eine Teilmenge von α. WZo_1 sei eine stimmige WZo für α und WZo_2 die in WZo_1 enthaltene WZo für β. Dann ist auch WZo_2 stimmig.

Darüberhinaus wollen wir für alles weitere den Fall ausschließen, daß die Aktualität einer bestimmten Wahrheitsmöglichkeit für eine Menge von Sätzen eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß ein anderer Satz keinen Wahrheitswert hat.

Dementsprechend soll gelten:

P3

α sei eine Menge von Sätzen und WZo_1 eine stimmige WZo für α. β sei eine Menge von Sätzen, die α als echte Teilmenge enthält. Dann gibt es mindestens eine stimmige WZo für β die WZo_1 enthält.

Aus der Möglichkeit der Reduktion der stimmigen WZon für Mengen von Sätzen ergeben sich die über Sätze prädizierbaren logischen Eigenschaften und logischen Beziehungen. Jeder dieser Eigenschaften und Beziehungen entspicht ein bestimmter Typ der Reduktion der stimmigen WZon für Mengen von Sätzen. Uns werden im folgenden die Eigenschaften eines Satzes, eine Tautologie oder eine Kontradiktion zu sein, die Eigenschaft der Kontingenz, die Beziehung der Äquivalenz und die Beziehung der logischen Abhängigkeit interessieren.

Ein Satz S heißt eine Tautologie, genau dann, wenn diejenige WZo für die Menge {S}, bei der S den Wert F hat, nicht stimmig ist.

Ein Satz S heißt eine Kontradiktion, genau dann, diejenigeWZo für die Menge {S}, bei der S den Wert W hat, nicht stimmig ist.

Ein Satz S heißt kontingent, genau dann, wenn beide WZon für {S} stimmig sind.

S_1, S_2 seien zwei nichtidentische Sätze. S_1 und S_2 heißen (miteinander) äquivalent, genau dann, wenn diejenigen WZon für die Menge $\{S_1, S_2\}$, bei denen S_1 und S_2 unterschiedliche Werte haben, nicht stimmig sind.

Außerdem ist jeder Satz ist mit sich selbst äquivalent.

S_1, S_2 seien zwei nichtidentische Sätze. S_1 und S_2 heißen (voneinander) logisch abhängig, genau dann, wenn mindestens eine WZo für die Menge $\{S_1, S_2\}$ nicht stimmig ist. Andernfalls heißen S_1 und S_2 voneinander logisch unabhängig.
Außerdem ist jeder Satz von sich selbst logisch abhängig.

Eine Menge α von Sätzen heißt eine Menge von logisch unabhängigen Sätzen, bzw. frei von logischen Abhängigkeiten, genau dann, wenn jede WZo für α stimmig ist.

Die Menge der stimmigen WZon für eine Menge α von Sätzen beschreibt den logischen Status von α.

Die Logik ist die Lehre von der grundsätzlichen Verfügbarkeit bzw. Kompatibilität von Wahrheitswerten für Sätze. Die Bestimmung dieser Grundsätzlichkeit ist verhandelbar. Die Abgrenzung einer grundsätzlichen Verfügbarkeit bzw. Kompatibilität von Wahrheitswerten gebenüber Wahrheitserwägungen anderer Art aber ist für die Logik grundlegend.
Die Logik ist von jeher die Lehre vom korrekten Schließen. Ein Schluß besteht aus mehreren Sätzen, den Prämissen, und einem weiteren Satz, der Konklusion. Der gültige (korrekte) Schluß ist dadurch charakterisiert, daß der Wahrheitswert W für alle Prämissen zugleich mit dem Wahrheitswert F für den Schlußsatz inkompatibel ist. Also ergibt sich aus der Wahrheit aller Prämissen zwingend die Wahrheit der Konklusion.

5.2 SÄTZE ALS WAHRHEITSFUNKTIONEN

Wir werden nun ein bestimmtes Prinzip der logischen Analyse darstellen, welches durch das folgende Paradigma charakterisiert werden kann:
'Etwas in einem Satz ausdrücken heißt, einen Satz so bilden, daß er unter bestimmten Bedingungen wahr und unter bestimmten Bedingungen falsch wird.'
Wir haben im folgenden Sätze vor Augen, auf die dieses Paradigma paßt.

Den Spielraum, der dem Satz für seine Wahrheit bzw. Falschheit zugemessen ist, nennen wir seinen Wahrheitsspielraum. Einen Satz bilden, heißt einen Wahrheitsspielraum konstruieren.
Den Wahrheitsspielraum eines Satzes begreifen wir als seinen faktischen Gehalt.

α sei eine endliche Menge von Sätzen. Bei Anwendbarkeit aller Elemente von α repräsentieren die Wahrheitsmöglichkeiten für α eine Gesamtheit einander wechselseitig ausschließender Fälle, von denen einer vorliegen muß (eine vollständige, disjunkte Fallunterscheidung).

Gegeben sei ein Satz S und eine endliche Menge α von Sätzen. Wir nennen S eine Wahrheitsfunktion von α, genau dann, wenn wir den Wahrheitsspielraum von S auf der Basis der Wahrheitsmöglichkeiten für α definieren können, und zwar dadurch, daß wir uns bei jeder der Wahrheitsmöglichkeiten für α auf genau einen der beiden Wahrheitswerte 'wahr' oder 'falsch' verpflichten.

Beispiele:
S_1:
'Der Jupiter ist weiter von der Erde entfernt als der Mars.'
S_2:
'Das Licht braucht vom Jupiter länger bis zur Erde als vom Mars.'
S_3:
'Der Jupiter ist weiter von der Erde entfernt als der Mars, und das Licht braucht vom Jupiter länger bis zur Erde als vom Mars.'
S_4:
'Der Jupiter ist von der Erde höchstens so weit entfernt wie der Mars, oder das Licht braucht vom Jupiter länger bis zur Erde als vom Mars.'
Wir setzen nun fest: Ein bestimmter Satz soll in dem Fall, daß S_1 und S_2 wahr sind, wahr sein, in allen anderen Fällen der Wahrheit oder Falschheit von S_1 und S_2 soll der Satz falsch sein.
Damit definieren wir den Wahrheitsspielraum von S_3.
Oder: Ein bestimmter Satz soll in dem Fall, daß S_1 wahr und S_2 falsch ist, falsch sein, in allen anderen Fällen der Wahrheit oder Falschheit von S_1 und S_2 soll der Satz wahr sein.
Damit definieren wir den Wahrheitsspielraum von S_4.
S_3 und S_4 sind also Wahrheitsfunktionen der Menge $\{S_1, S_2\}$.

Ein Satz S sei eine Wahrheitsfunktion einer endlichen Menge α von Sätzen. Ist S bei allen Wahrheitsmöglichkeiten für α wahr oder bei allen Wahrheitsmöglichkeiten für α falsch, dann hat S keinen faktischen Gehalt. Im ersten Fall ist S in der Aussage unverbindlich, im zweiten selbstwiderspüchlich. Gibt es mindestens eine Wahrheitsmöglichkeit, bei der S wahr, und auch mindestens eine Wahrheitsmöglichkeit, bei der S falsch ist, dann ist S gehaltvoll.

Jeder Satz läßt sich als eine Wahrheitsfunktion einer Menge von Sätzen auffassen, die als einziges Element ihn selbst enthält.

Ein Satz S sei eine Wahrheitsfunktion einer endlichen Menge α von Sätzen. β sei eine endliche Menge von Sätzen, die α als echte Teilmenge enthält. Dann ist S auch eine Wahrheitsfunktion von β.
(Die durch die Wahrheitsmöglichkeiten von α bzw. β repräsentierten Fallunterscheidungen stehen zueinander in dem Verhältnis, daß die zweite entweder der ersten gleichgesetzt werden kann, oder eine differenziertere, vollständige, disjunkte Fallunterscheidung auf der Basis der ersten darstellt. (vgl. P3) Da die erste für die Definition des Wahrheitsspielraums von S hinreichend differenziert ist, ist es die zweite ebenfalls.

Ein Satz S sei eine Wahrheitsfunktion einer endlichen Menge α von Sätzen. β sei eine weitere endliche Menge von Sätzen und jedes Element von α eine Wahrheitsfunktion von β. Dann ist S auch eine Wahrheitsfunktion von β.
(Gegeben sei eine Wahrheitsmöglichkeit W_1 für β. Der Wahrheitsspielraum jedes Elements von α ist bei W_1 auf einen Wahrheitswert festgelegt. Damit kommt für α bei W_1 nur eine einzige Wahrheitsmöglichkeit W_2 für α in Frage. Der Wahrheitsspielraum von S ist bei W_2 auf einen Wahrheitswert festgelegt. Also ist er auch bei W_1 auf einen Wahrheitswert festgelegt.)

Daraus folgt:
Ein Satz S sei eine Wahrheitsfunktion einer endlichen Menge $\{S_1, ..., S_n\}$ von Sätzen. S_1, ..., S_n seien Wahrheitsfunktionen endlicher Mengen α_1, ..., α_n von Sätzen. Dann ist S auch eine Wahrheitsfunktion der Menge $\alpha_1 \cup ... \cup \alpha_n$.

5.3 MENGENTHEORETISCHE WAHRHEITSFUNKTIONEN

Das Konzept der Wahrheitsfunktionen kann für endliche Mengen von Sätzen mengentheoretisch formuliert werden wie folgt:

Eine mengentheoretische Wahrheitsfunktion F(α) einer endlichen Menge α von Sätzen ist eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den WZon für α, die jeder WZo für α genau einen Wahrheitswert zuordnet. ('mengentheoretische Wahrheitsfunktion' wird abgekürzt: 'mWF')

Unter einer 'mWF' werden wir im folgenden immer eine mWF einer endlichen Menge von Sätzen verstehen.

Zu einer endlichen Menge α von Sätzen mit n Elementen gibt es 2 hoch (2 hoch n) verschiedene mWFn von α.

Beispiel:
S_1:
'Der Jupiter ist weiter von der Erde entfernt als der Mars.'
S_2:
'Das Licht braucht vom Jupiter länger bis zur Erde als vom Mars.'
Es gibt 16 verschiedene mWFn der Menge $\{S_1, S_2\}$.
Eine davon ist die folgende Zuordnung:
$\{(\{(S_1,W), (S_2,W)\}, W), (\{(S_1, W), (S_2, F)\}, F), (\{(S_1, F), (S_2,W)\}, F), (\{(S_1, F), (S_2, F)\}, W)\}$.

F(α) sei eine mWF einer Menge α von Sätzen. Wenn einer bestimmten WZo für α bei F(α) der Wahrheitswert W bzw. F zugeordnet ist, dann sagen wir auch, F(α) habe bei dieser WZo für α den Wert W bzw. F.
Jede WZo für α heißt eine WZo von F(α).
Eine WZo für F(α), bei der F(α) den Wert W hat, heißt eine verifizierende WZo von F(α), eine WZo für F(α), bei der F(α) den Wert F hat, eine falsifizierende WZo von F(α).

Jede mWF F(α) einer Menge α von Sätzen kann als die Definition eines Wahrheitsspielraums aufgefaßt werden. Es entspricht dann eine stimmige WZo für α einer bestimmten Wahrheitsmöglichkeit für α, und der Wert der Funktion bei dieser WZo, dem Wahrheitswert, auf den der Wahrheitsspielraum bei dieser Wahrheitsmöglichkeit festgelegt wird. Ein Paar, bestehend aus einer WZo für α, die nicht stimmig ist, und einem Wahrheitswert, ist bedeutungslos.

Es wird sich zeigen, daß zu jeder mWF F(α) einer Menge α von Sätzen mindestens ein Satz mit dem durch F(α) definierten Wahrheitsspielraum gebildet werden kann.

Da eine mWF einen Wahrheitsspielraum definiert, kann sie selbst als eine Art Satz aufgefaßt werden.

Bei der Anführung einer mWF in Mengenschreibweise ist weder die Reihenfolge der Sätze noch der WZon von Bedeutung. Es soll nun das folgende Ordnungsschema vereinbart werden:
Gegeben sei eine endliche Menge α von Sätzen mit n Elementen. Nach Festlegung einer verbindlichen Reihenfolge $S_1, ..., S_n$ für die Elemente von α wird jede mWF $F(\alpha)$ von α angegeben als eine mWF $F(S_1, ..., S_n)$. Hierfür gilt:
Die Abfolge der Sätze innerhalb einer WZo für α ist $S_1, ..., S_n$.
Die Abfolge der in $F(S_1, ..., S_n)$ aufscheinenden WZon für α gehorcht diesen Regeln:

1) Jede WZo, bei der S_1 den Wert W hat, ist vorgereiht allen WZon, bei denen S_1 den Wert F hat.
2) Es sei S_u ein beliebiges Element aus α, das S_1 nachgereiht ist in $S_1, ..., S_n$ und WZo_1 eine WZo für die Menge aller Elemente aus α, die S_u vorgereiht sind in $S_1, ..., S_n$. Dann gilt: Jede WZo für α, die WZo_1 enthält und für S_u den Wert W hat, ist vorgereiht allen WZon für α, die WZo_1 enthalten und für S_u den Wert F haben.

Die aus dieser Ordnung resultierende Abfolge der Funktionswerte ergibt eine Reihe von Wahrheitswerten, welche der Wertverlauf von $F(S_1, ..., S_n)$ heißt und $F(S_1, ..., S_n)$ als eine bestimmte mWF von α eindeutig identifiziert.

Eine mWF kann in Tabellenform, in einer sogenannten Wahrheitstafel, dargestellt werden. Die Wahrheitstafel für eine Funktion $F(S_1, ..., S_n)$ wird erstellt wie folgt:
Es wird eine Tabelle angelegt, bestehend aus einer Kopfzeile und 2^n weiteren Zeilen, einem linken Teil mit n Spalten und einem rechten Teil mit einer weiteren Spalte. Die Spalten im linken Teil sind den Sätzen $S_1, ..., S_n$ zugewiesen, die Zeilen den WZon. Ein Satz wird in der Kopfzeile seiner Spalte zitiert. Der Wert eines Satzes bei einer WZo wird in der entsprechenden Zeile in die entsprechende Spalte eingetragen, der Wert der Funktion bei einer bestimmten WZo findet sich in der zugeordneten Zeile in der einzigen Spalte im rechten Teil der Tabelle. Diese Spalte nimmt den Wertverlauf auf.

Beispiel, s. Abb. 17.

Gegeben sei eine mWF $F(\alpha)$ einer Menge α von Sätzen.
$F(\alpha)$ heißt mengentheoretisch (mth.) konstant, genau dann, wenn im Wertverlauf von $F(\alpha)$

entweder nur der Wert W oder nur der Wert F aufscheint.
F(α) heißt mth. konstant wahr, genau dann, wenn im Wertverlauf von F(α) nur der Wert W aufscheint.
F(α) heißt mth. konstant falsch, genau dann, wenn im Wertverlauf von F(α) nur der Wert F aufscheint.

F_1(α) und F_2(β) seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen. F_1(α) und F_2(β) heißen mth. äquivalent, genau dann, wenn für jede WZo für die Vereinigungsmenge von α und β das folgende gilt: F_2(β) hat bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β denselben Wert wie F_1(α) bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für α.

F(α) sei eine mWF einer Menge α von Sätzen. Ein Element S aus α heißt mth. redundant in F(α), genau dann, wenn für jedes Paar WZon (WZo_1 WZo_2) für α gilt: Wenn WZo_1 und WZo_2 bei S, und nur bei S, voneinander abweichen, dann hat F(α) bei WZo_1 und WZo_2 denselben Wert.

Gegeben sei eine mWF F(α) einer Menge α von Sätzen.
F(α) heißt schwach konstant, genau dann, wenn F(α) bei allen stimmigen WZon für α denselben Wert hat.
F(α) heißt schwach konstant wahr, genau dann, wenn F(α) bei jeder stimmigen WZo für α den Wert W hat.
F(α) heißt schwach konstant falsch, genau dann, wenn F(α) bei jeder stimmigen WZo für α den Wert F hat.

F_1(α) und F_2(β) seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen. F_1(α) und F_2(β) heißen schwach äquivalent, genau dann, wenn für jede stimmige WZo für die Vereinigungsmenge von α und β das folgende gilt: Die Funktion F_2(β) hat bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β denselben Wert wie F_1(α) bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für α.

F(α) sei eine mWF einer Menge α von Sätzen. Ein Element S aus α heißt schwach redundant in F(α), genau dann, wenn für jedes Paar stimmiger WZon (WZo_1 WZo_2) für α gilt: Wenn WZo_1 und WZo_2 bei S, und nur bei S, voneinander abweichen, dann hat F(α) bei WZo_1 und WZo_2 denselben Wert.

Aufgrund der Deutung der mWFn können wir sagen:

F(α) sei eine mWF einer Menge α von Sätzen. β sei eine endliche Menge von Sätzen, die α als echte Teilmenge enthält. Dann ist der Wahrheitsspielraum von F(α) auch bei jeder der Wahrheitsmöglichkeiten für β auf einen Wahrheitswert festgelegt und auf der Grundlage der Wahrheitsmöglichkeiten für β definierbar.

Erläuterung:

i 1) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Sätzen.

i 2) β sei eine endliche Menge von Sätzen, die α als echte Teilmenge enthält.

ii 3) W_1 sei eine Wahrheitsmöglichkeit für β.

ii 4) WZo_1 sei diejenige stimmige WZo für β, die W_1 entspricht.

ii 5) WZo_1 enthält eine stimmige WZo für α. Diese sei WZo_2.

ii 6) W_2 sei die Wahrheitsmöglichkeit für α, der WZo_2 entspricht.

ii 7) W_1 stellt entweder denselben Fall dar wie W_2 oder ist ein Unterfall von W_2.

ii 8) Der Wahrheitsspielraum von F(α) ist bei W_2 auf einen Wahrheitswert festgelegt.

ii 9) Also ist der Wahrheitsspielraum von F(α) auch bei W_1 auf einen Wahrheitswert festgelegt.

i 10) Also ist der Wahrheitsspielraum von F(α) bei jeder Wahrheitsmöglichkeit für β auf einen Wahrheitswert festgelegt.

i 11) Die Wahrheitsmöglickeiten für β stellen eine vollständige, disjunkte Fallunterscheidung dar.

i 12) Also ist der Wahrheitsspielraum von F(α) auf der Grundlage der Wahrheitsmöglichkeiten für β definierbar.

i 13) Also ist der Wahrheitsspielraum von F(α) bei jeder der Wahrheitsmöglichkeiten für β auf einen Wahrheitswert festgelegt und auf der Grundlage der Wahrheitsmöglichkeiten für β definierbar.

Daraus folgt:

F(α) sei eine mWF einer Menge α von Sätzen. β sei eine endliche Menge von Sätzen, die α als Teilmenge enthält. Dann ist der Wahrheitsspielraum von F(α) auch bei jeder der Wahrheitsmöglichkeiten für β auf einen Wahrheitswert festgelegt und auf der Grundlage der Wahrheitsmöglichkeiten für β definierbar.

Wir können auch sagen:

$F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen. $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien schwach äquivalent. Dann definieren $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ denselben Wahrheitsspielraum.

Erläuterung:

i 1) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen.

i 2) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien schwach äquivalent.

i 3) Der Wahrheitsspielraum von $F(\beta)$ ist bei jeder Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$ auf einen Wahrheitswert festgelegt.

i 4) Und es ist der Wahrheitsspielraum von $F(\beta)$ bei jeder Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$ auf einen Wahrheitswert festgelegt.

ii 5) W_1 sei eine Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$.

ii 6) WZo_1 sei diejenige stimmige WZo für $\alpha\cup\beta$, die W_1 entspricht.

ii 7) WZo_1 enthält eine stimmige WZo für α und eine stimmige WZo für β. Diese seien WZo_2 bzw. WZo_3.

ii 8) W_2 sei diejenige Wahrheitsmöglichkeit für α, der WZo_2 entspricht, W_3 diejenige Wahrheitsmöglichkeit für β, der WZo_3 entspricht.

ii 9) Da $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ schwach äquivalent sind, hat $F_2(\beta)$ bei WZo_3 denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei WZo_2. Dieser sei v.

ii 10) Der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ ist bei W_2 auf v festgelegt.

ii 11) W_1 ist entweder mit W_2 identisch, oder W_1 repräsentiert denselben Fall wie W_2, oder W_1 ist ein Unterfall von W_2.

ii 12) Also ist der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ bei W_1 ebenfalls auf v festgelegt.

ii 13) Der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ ist bei W_3 auf v festgelegt.

ii 14) W_1 ist entweder mit W_3 identisch, oder W_1 repräsentiert denselben Fall wie W_3, oder W_1 ist ein Unterfall von W_3.

ii 15) Also ist der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ bei W_1 ebenfalls den Wert v festgelegt.

ii 16) Also sind der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von F2(β) bei W_1 beide auf den Wahrheitswert v festgelegt.

ii 17) Also sind der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ bei W_1 beide auf denselben Wahrheitswert festgelegt.

i 18) Also gilt für jede Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$: Der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ sind bei der betreffenden Wahrheitsmöglichkeit beide auf denselben Wahrheitswert festgelegt.

i 19) Der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ sind beide auf der Grundlage der Wahrheitsmöglichkeiten für $\alpha\cup\beta$ definierbar.

i 20) Also definieren $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ denselben Wahrheitspielraum.

$F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen. $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien nicht schwach äquivalent. Dann definieren $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ verschiedene Wahrheitsspielräume.

Erläuterung:

i 1) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen.

i 2) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien nicht schwach äquivalent.

i 3) Dann gibt es mindestens eine stimmige WZo für $\alpha\cup\beta$, sodaß $F_2(\beta)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β einen anderen Wert hat, als $F_1(\alpha)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für α. WZo_1 sei eine solche WZo für $\alpha\cup\beta$.

i 4) Der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ ist bei jeder Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$ auf einen Wahrheitswert festgelegt.

i 5) Und es ist der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ bei jeder Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$ auf einen Wahrheitswert festgelegt.

i 6) WZo_2 sei die in WZo_1 enthaltene WZo für α, WZo_3 die in WZo_1 enthaltene WZo für β.

i 7) v sei der Wert von $F_1(\alpha)$ bei WZo_2.

i 8) W_1 sei diejenige Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha\cup\beta$, der WZo_1 entspricht, W_2 diejenige Wahrheitsmöglichkeit für α, der WZo_2 entspricht, und W_3 diejenige Wahrheitsmöglichkeit für β, der WZo_3 entspricht.

i 9) Der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ ist bei W_2 auf v festgelegt.

i 10) W_1 ist entweder mit W_2 identisch oder W_1 repräsentiert denselben Fall wie W_2 oder W_1 ist ein Unterfall von W_2.

i 11) Also ist der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ bei W_1 ebenfalls auf v festgelegt.

i 12) Der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ ist bei W_3 auf denjenigen Wahrheitswert festgelegt, der nicht mit v identisch ist.

i 13) W_1 ist entweder mit W_3 identisch oder W_1 repräsentiert denselben Fall wie W_3 oder W_1 ist ein Unterfall von W_3.

i 14) Also ist der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ bei W_3 ebenfalls auf denjenigen Wahrheitswert festgelegt, der nicht mit v identisch ist.

i 15) Also sind der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ bei W_1 jeder auf einen anderen Wahrheitswert festgelegt.

i 16) Also gibt es mindestens eine Wahrheitsmöglichkeit für $\alpha \cup \beta$, sodaß der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ bei derselben jeder auf einen anderen Wahrheitswert festgelegt sind.

i 17) Der Wahrheitsspielraum von $F_1(\alpha)$ und der Wahrheitsspielraum von $F_2(\beta)$ sind beide auf der Grundlage der Wahrheitsmöglichkeiten von $\alpha \cup \beta$ definierbar.

i 18) Also definieren $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ nicht denselben Wahrheitspielraum.

Es ergibt sich das folgende:

$F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien mth. äquivalente mWFn von Mengen α, β von Sätzen. Dann kann gelten: $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ definieren denselben Wahrheitsspielraum.

$F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien mWFn von Mengen α, β von Sätzen. $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien nicht mth. äquivalent. Dann kann gelten: $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ definieren denselben Wahrheitsspielraum, genau dann, wenn sie schwach äquvialent sind.

Im weiteren soll im Zusammenhang mit mWFn: 'konstant', 'konstant wahr', 'konstant falsch', 'äquivalent', 'redundant' stets: 'mth. konstant', 'mth. konstant wahr', 'mth. konstant falsch', 'mth. äquivalent', 'mth. redundant' bedeuten.

Es gilt:

(<u>38</u>)
$F(\alpha)$ sei die konstant wahre oder die konstant falsche mWF einer Menge α von Sätzen. Dann sind alle Elemente von α redundant in $F(\alpha)$.

(<u>39</u>)
$F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen. Dann ist mindestens ein Element von α nicht redundant in $F(\alpha)$.
Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen.

i 2) Dann hat $F(\alpha)$ bei mindestens einer WZo für α den Wert W. WZo_1 sei eine solche.

i 3) Und es hat $F(\alpha)$ bei mindestens einer WZo für α den Wert F. WZo_2 sei eine solche.

i 4) Wir stellen eine Reihe R von WZon für α her wie folgt: [*e*.]

a) Das erste Glied von R ist WZo_1.

b) Wir erzeugen so lang als möglich zum jeweils letzen Glied ein Nachfolgeglied, indem wir bei genau einem Element von α den Wert abändern, und zwar bei einem Element, bei dem WZo_2 von WZo_1 abweicht und dieses letzte Glied, sofern es nicht WZo_1 ist, mit WZo_1 übereinstimmt.
(Da WZo_1 und WZo_2 nicht identisch sind, läßt sich mindestens ein Nachfolgeglied erzeugen.)

c) Die Reihe endet mit WZo_2.

i 5) R enthält mindestens eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$.

i 6) WZo_3 sei diejenige in R vorkommende, falsifizierende WZo von $F(\alpha)$, welche in R am weitesten vorne gereiht ist.

i 7) WZo_3 ist nicht WZo_1.

i 8) Also hat WZo_3 ein Vorgängerglied in R. Dieses sei WZo_4.

i 9) WZo_4 ist eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$.

i 10) WZo_4 und WZo_3 unterscheiden sich bei genau einem Element S von α.

i 11) WZo_4 und WZo_3 unterscheiden sich bei S, und nur bei S, und $F(\alpha)$ hat bei WZo_4 und WZo_3 nicht denselben Wert.

i 12) Also gibt es mindestens ein Paar WZon für α, sodaß sich diese WZon bei S, und nur bei S, voneinander unterscheiden, und $F(\alpha)$ bei diesen WZon nicht denselben Wert hat.

i 13) Also ist S nicht redundant in α.

i 14) Also ist mindestens ein Element von α nicht redundant in $F(\alpha)$.

Aus der Definition der Äquivalenz für mWFn läßt sich das folgende ableiten:

(<u>40</u>)
Jede mWF ist mit sich selbst äquivalent.

(<u>41</u>)
$F_1(\alpha)$ und $F_2(\alpha)$ seien zwei nichtidentische mWFn derselben Menge α von Sätzen. Dann sind $F_1(\alpha)$ und $F_2(\alpha)$ nicht äquivalent.

(<u>42</u>)

$F_1(\alpha)$, $F_2(\beta)$, $F_3(\gamma)$ seien mWFn von Mengen α, β, γ von Sätzen. $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien äquivalent. Ebenso seien $F_2(\beta)$ und $F_3(\gamma)$ äquivalent. Dann sind auch $F_1(\alpha)$ und $F_3(\gamma)$ äquivalent.

Beweis:

i 1) $F_1(\alpha)$, $F_2(\beta)$, $F_3(\gamma)$ seien mWn von Mengen α, β, γ von Sätzen.

i 2) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien äquivalent.

i 3) $F_2(\beta)$ und $F_3(\gamma)$ seien äquivalent.

ii 4) WZo_1 sei eine WZo für $\alpha\cup\gamma$.

ii 5) WZo_2 sei die WZo für α, WZo_3, die WZo für γ, die in $\alpha\cup\gamma$ enhalten ist.

ii 6) WZo_4 sei eine WZo für $\alpha\cup\beta\cup\gamma$, die WZo_1 enthält. [*e.*]

ii 7) WZo_5 sei die WZo für β, WZo_6 die WZo für $\alpha\cup\beta$, und WZo_7 die WZo für $\beta\cup\gamma$, die in WZo_4 enthalten ist.

ii 8) WZo_6 enthält WZo_2 und WZo_5.

ii 9) Und es enthält WZo_7 WZo_5 und WZo_3.

ii 10) Da $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ äquivalent sind, hat $F_2(\beta)$ bei der in WZo_6 enthaltenen WZo für β, also bei WZo_5, denselben Wert, wie $F_1(\alpha)$ bei der in WZo_6 enthaltenen WZo für α, also bei WZo_2.

ii 11) Da $F_2(\beta)$ und $F_3(\gamma)$ äquivalent sind, hat $F_3(\gamma)$ bei der in WZo_7 enthaltenen WZo für γ, also bei WZo_3 denselben Wert, wie $F_2(\beta)$ bei der in WZo_7 enthaltenen WZo für β, also bei WZo_5.

ii 12) Also hat $F_3(\gamma)$ bei WZo_3 denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei WZo_2.

ii 13) Also hat $F_3(\gamma)$ bei der in WZo_1 enthaltenen WZo für γ denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei der in WZo_1 enthaltenen WZo für α.

i 14) Also gilt für jede WZo für $\alpha\cup\gamma$: $F_3(\gamma)$ hat bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für γ denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für α.

i 15) Also sind $F_1(\alpha)$ und $F_3(\gamma)$ äquivalent.

(<u>43</u>)

$F_1(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Sätzen. β sei eine endliche Menge von Sätzen. Dann gibt es höchstens eine mWF von β, die mit $F(\alpha)$ äquivalent ist.

Beweis:

i 1) $F_1(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Sätzen.

i 2) β sei eine endliche Menge von Sätzen.

ii 3) $(F_2(\beta), F_3(\beta))$ sei ein Paar nichtidentischer mWFn von β.

iii 4) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, $F_2(\beta)$ und $F_3(\beta)$ seien beide äquivalent mit $F_1(\alpha)$.

iii 5) Da $F_2(\beta)$ und $F_3(\beta)$ mWFn derselben Menge von Sätzen sind, sind $F_2(\beta)$ und $F_3(\beta)$ nicht äquivalent.

iii 6) Da $F_2(\beta)$ und $F_1(\alpha)$ äquivalent sind und $F_1(\alpha)$ und $F_3(\beta)$ äquivalent sind, sind $F_2(\beta)$ und $F_3(\beta)$ äquivalent.

iii 7) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 8) Also ist mindestens eine der mWFn $F_2(\beta)$ oder $F_3(\beta)$ nicht äquivalent mit $F(\alpha)$.

i 9) Also ist in jedem Paar nichtidentischer mWFn von β mindestens eine mWF nicht äquivalent mit $F(\alpha)$.

i 10) Also gibt es höchstens eine mWF von β, die mit $F_1(\alpha)$ äquivalent ist.

(<u>44</u>)

α, β seien endliche Mengen von Sätzen. Dann sind die konstant wahre mWF von α und die konstant wahre mWF von β äquivalent.

(<u>45</u>)

α, β seien endliche Mengen von Sätzen. Dann sind die konstant falsche mWF von α und die konstant falsche mWF von β äquivalent.

(<u>46</u>)

$F_1(\alpha)$, $F_2(\beta)$ seien äquivalente mWFn. Dann sind $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ entweder zugleich konstant wahr, oder zugleich konstant falsch, oder zugleich nicht konstant.

(<u>47</u>)

$F_1(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen. β sei die Menge aller Elemente von α, die nicht redundant sind in $F(\alpha)$. Dann hat $F_1(\alpha)$ bei allen WZon für α, die dieselbe WZo für β enthalten, denselben Wert.

Beweis:

i 1) $F_1(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen.

i 2) β sei die Menge aller Elemente von α, die nicht redundant sind in $F(\alpha)$.

ii 3) WZo_1 sei eine WZo für β.

iii 4) (WZo_2, WZo_3) sei ein Paar WZon für α, sodaß WZo_2 und WZo_3 WZo_1 enthalten.

iii 5) Wir stellen eine Reihe R von WZon für α her wie folgt: [*e.*]

a) Das erste Glied von R ist WZo_2.

b) Wir erzeugen so lang als möglich zum jeweils letzen Glied ein Nachfolgeglied, indem wir bei genau einem Element von α den Wert abändern, und zwar bei einem Element von α, bei dem WZo_3 von WZo_2 abweicht, und dieses letzte Glied, sofern es nicht WZo_2 ist, mit WZo_2 übereinstimmt.

c) Die Reihe endet mit WZo_3.

iii 6) Da WZo_2 und WZo_3 dieselbe WZo für β enthalten, wird niemals der Wert bei einem Element aus β abgeändert.

iii 7) Alle Elemente aus α, die nicht redundant sind in F(α), sind Elemente von β.

iii 8) Also wird der Wert niemals bei einem Element von α abgeändert, das nicht redundant ist in F(α).

iv 9) (WZo_4, WZo_5) sei ein Paar WZon aus R, sodaß WZo_5 in R unmittelbar auf WZo_4 folgt.

iv 10) WZo_4 und WZo_5 unterscheiden sich bei bei genau einem Element S von α.

iv 11) S ist redundant in F(α).

iv 12) Also hat F(α) bei WZo_4 und WZo_5 denselben Wert.

iii 13) F(α) hat bei jedem Paar aufeinanderfolgender WZon für α in R denselben Wert. (Wenn WZo_2 mit WZo_3 identisch ist, dann hat F(α) bei WZo_2 und WZo_3 ebenfalls denselben Wert.)

iii 14) Also hat F(α) bei WZo_2 und WZo_3 denselben Wert.

ii 15) Für jedes Paar (WZo_2, WZo_3) WZon für α, sodaß WZo_2 und WZo_3 WZo_1 enthalten, gilt: F(α) hat bei WZo_2 und WZo_3 denselben Wert.

ii 16) F(α) hat bei allen WZon für α, die WZo_1 enthalten denselben Wert.

i 17) F(α) hat bei allen WZon für α, die dieselbe WZo für β enthalten, denselben Wert.

(<u>48</u>)

$F_1(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen. β sei die Menge aller Elemente von α, die nicht redundant sind in $F_1(\alpha)$. γ sei eine endliche Menge von Sätzen, die β als Teilmenge enthält. $F_2(\gamma)$ sei diejenige mWF von γ, die bei jeder WZo für γ

denjenigen Wert hat, den $F_1(\alpha)$ bei allen WZon für α hat, die die in dieser WZo für γ enthaltene WZo für β enthalten. So gilt: $F_1(\alpha)$ und $F_2(\gamma)$ sind äquivalent.

Beweis:

i 1) $F_1(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen.

i 2) β sei die Menge aller Elemente von α, die nicht redundant sind in $F(\alpha)$.

i 3) γ sei eine endliche Menge von Sätzen, die β als Teilmenge enthält.

i 4) $F_2(\gamma)$ sei diejenige mWF von γ, die bei jeder WZo für γ denjenigen Wert hat, den $F_1(\alpha)$ bei allen WZon für α hat, die die in dieser WZo für γ enthaltene WZo für β enthalten.

ii 5) WZo_1 sei eine WZo für $\alpha\cup\gamma$.

ii 6) Dann enthält die in WZo_1 enthaltene WZo für γ dieselbe WZo für β wie die in WZo_1 enthaltene WZo für α.

ii 7) Also hat $F_2(\gamma)$ bei der in WZo_1 enthaltenen WZo für γ denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei der in WZo_1 enthaltenen WZo für α.

i 8) Also gilt für jede WZo für $\alpha\cup\gamma$: $F_2(\gamma)$ hat bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für γ denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei der darin enthaltenen WZo für α.

i 9) Also sind $F_1(\alpha)$ und $F_2(\gamma)$ äquivalent.

(49)

$F_1(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen. β sei eine endliche Menge von Sätzen, sodaß mindestens ein Element von α, das nicht redundant ist in $F(\alpha)$, kein Element von β ist. Dann gibt es keine mWF von β, die mit $F_1(\alpha)$ äquivalent ist.

Beweis:

i 1) $F_1(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Sätzen.

i 2) β sei eine endliche Menge von Sätzen, sodaß mindestens ein Element von α, das nicht redundant ist in $F(\alpha)$, kein Element von β ist. S sei ein solches Element von α.

ii 3) $F_2(\beta)$ sei eine mWF von β.

ii 4) Es gibt mindestens ein Paar (WZo_1, WZo_2) von WZon für α, sodaß WZo_1 und WZo_2 bei S, und nur bei S, voneinander abweichen und $F_1(\alpha)$ bei WZo_1 und WZo_2 verschiedene Werte hat. (WZo_1, WZo_2) sei ein solches Paar.

ii 5) WZo_3 sei eine WZo für $\alpha\cup\beta$, die WZo_1 enthält. [*e*.]

ii 6) WZo_4 sei die in WZo_3 enthaltene WZo für β.

ii 7) WZo_5 sei diejenige WZo für $\alpha\cup\beta$, die sich bei S, und nur bei S, von WZo_3 unterscheidet.

ii 8) Da WZo_1 und WZo_2 sich bei S und nur bei S unterscheiden, enthält WZo_5 WZo_2.

ii 9) Da S kein Element von β ist, enthält WZo_5 WZo_4.

ii 10) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iii 11) $F_2(\beta)$ hat bei WZo_4 denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei WZo_1.

iii 12) Dann hat $F_2(\beta)$ bei WZo_4 nicht denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei WZo_2.

iii 13) Also hat $F_2(\beta)$ bei der in WZo_5 enthaltenen WZo für β nicht denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei der in WZo_5 enthaltenen WZo für α.

iii 14) Also gibt es mindestens eine WZo für $\alpha\cup\beta$, sodaß $F_2(\beta)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β nicht denselben Wert hat wie $F_1(\alpha)$ bei der darin enthaltenen WZo für α.

~ Fall B:

iii 15) $F_2(\beta)$ hat bei WZo_4 einen anderen Wert als $F_1(\alpha)$ bei WZo_1.

iii 16) Dann hat $F_2(\beta)$ bei der in WZo_3 enthaltenen WZo für β nicht denselben Wert wie $F_1(\alpha)$ bei der in WZo_3 enthaltenen WZo für α.

iii 17) Also gibt es mindestens eine WZo für $\alpha\cup\beta$, sodaß $F_2(\beta)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β nicht denselben Wert hat wie $F_1(\alpha)$ bei der darin enthaltenen WZo für α.

ii 18) Also gibt es mindestens eine WZo für $\alpha\cup\beta$, sodaß $F_2(\beta)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β nicht denselben Wert hat wie $F_1(\alpha)$ bei der darin enthaltenen WZo für α.

ii 19) Also sind $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ nicht äquivalent.

i 20) Also gibt es keine mWF von β, die mit $F_1(\alpha)$ äquivalent ist.

Gegeben sei ein Satz S und eine mWF $F(\alpha)$ einer Menge α von Sätzen, die den Wahrheitsspielraum von S definiert. Dann kann gelten: Wenn $F(\alpha)$ schwach konstant wahr ist, ist S eine Tautologie. Wenn $F(\alpha)$ schwach konstant falsch ist, ist S eine Kontradiktion. Wenn $F(\alpha)$ nicht schwach konstant ist, ist S kontingent. Im ersten Fall ist S ohne faktischen Gehalt, weil nichtssagend unverbindlich, im zweiten Fall ist S ohne faktischen Gehalt, weil selbstwidersprüchlich. Im dritten Fall ist S gehaltvoll.

Gegeben seien zwei nichtidentische Sätze S_1 und S_2 und mWFn $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ von Mengen α, β von Sätzen, die den Wahrheitsspielraum von S_1 bzw S_2 definieren. Dann kann gelten: S_1 und S_2 sind äquvialent genau dann, wenn $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ schwach äquivalent sind. Genau dann haben S_1 und S_2 auch denselben faktischen Gehalt.

In bestimmten Fällen ist es möglich, bei einer endlichen Menge von Sätzen, die nicht frei ist von logischen Abhängigkeiten, die Reduktion der stimmigen WZon mithilfe der wahrheitsfunktionalen Analyse, wie wir sie dargestellt haben, vollkommen zu erklären. Die Reduktion der stimmigen WZon ist dann vollständig auf sprachliche Festsetzungen zurückzuführen.
Wir nennen den logischen Status einer endlichen Menge α von Sätzen vollständig wahrheitsfunktional analysierbar im engeren Sinne bzw. vollständig aussagenlogisch analysierbar, genau dann, wenn es eine endliche Menge β von logisch unabhängigen Sätzen gibt, sodaß der Wahrheitsspielraum eines jeden Elements von α durch eine mWF von β definiert werden kann.

5.4 INTERPRETATION DER WOHLGEFORMTEN FORMELN VON AL

Wir setzen im weiteren die wffs von AL vollkommen mit Sätzen gleich. Jede Atomformel von AL soll einen bestimmten Satz vertreten. Jeder wff von AL aber wird eine mWF mindestens einer Menge von Atomformeln zugeordnet werden.

Aufgrund technischer Vorteile bedienen wir uns hierzu des Konzepts der aussagenlogischen Bewertungen.

Eine aussagenlogische Bewertung (Bewertung) ist eine WZo für die Menge aller wffs von AL im Rahmen der folgenden Vereinbarungen:
Eine Bewertung kann jede beliebige WZo für die Menge aller Atomformeln enthalten. Die Werte der wffs von AL, die keine Atomformeln sind, ergeben sich aus dieser WZo nach den folgenden Regeln:
B sei eine Bewertung, φ, ψ seien wffs.

1) Wenn φ wahr ist bei B, dann ist $\neg\varphi$ falsch bei B.
   Anderenfalls ist $\neg\varphi$ wahr bei B.

2) Wenn φ und ψ beide wahr sind bei B, dann ist $\varphi \wedge \psi$ ebenfalls wahr bei B. Anderenfalls ist $\varphi \wedge \psi$ falsch bei B.
3) Wenn φ und ψ beide falsch sind bei B, dann ist $\varphi \vee \psi$ ebenfalls falsch bei B. Anderenfalls ist $\varphi \vee \psi$ wahr bei B.
4) Wenn φ wahr ist, und zugleich ψ falsch ist bei B, dann ist $\varphi \rightarrow \psi$ falsch bei B. Anderenfalls ist $\varphi \rightarrow \psi$ wahr bei B.
5) Wenn φ und ψ denselben Wert haben bei B, dann ist $\varphi \equiv \psi$ wahr bei B. Anderenfalls ist $\varphi \equiv \psi$ falsch bei B.

Es gilt:

(50)
Zu jeder WZo für die Menge aller Atomformeln von AL gibt es genau eine Bewertung, die diese WZo enthält. Es ist also jede Bewertung durch die in ihr enthaltene WZo für die Menge aller Atomformeln identifiziert.

(51)
Gegeben sei eine wff φ und eine Bewertung B. Dann kann, ausgehend von den Werten der in φ enthaltenen Atomformeln, der Wert von φ bei B über die Werte aller in φ enthaltenen Teilformeln schrittweise errechnet werden.

(52)
Jede wff φ hat bei allen Bewertungen, die dieselbe WZo für die Menge aller in φ enthaltenen Atomformeln enthalten, denselben Wert.

Ein Beispiel für die Errechnung des Werts einer wff bei allen Bewertungen, die eine bestimmte WZo für die Menge der in dieser wff enthaltenen Atomformeln einschließen: Gegeben sei die wff '$\neg(p \vee q) \equiv r$'. B sei eine Bewertung, bei der 'p' falsch, 'q' falsch und 'r' wahr ist.
Da 'p' falsch ist und auch 'q' falsch ist, ist '$(p \vee q)$' falsch. Also ist '$\neg(p \vee q)$' wahr. Die wff 'r' ist wahr. Da '$\neg(p \vee q)$' wahr ist und auch 'r' wahr ist, ist '$\neg(p \vee q) \equiv r$' wahr.
Also ist '$\neg(p \vee q) \equiv r$' bei allen Bewertungen, bei denen 'p' falsch, 'q' falsch und 'r' wahr ist, wahr.

Aus den Regeln für Bewertungen lassen sich zwei weitere Regeln ableiten:

(<u>53</u>)

B sei eine Bewertung, $\varphi_1, ..., \varphi_n$ seien wffs. Dann gilt: Wenn alle wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ wahr sind bei B, dann ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ wahr bei B. Anderenfalls ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ falsch bei B.

i 1) B sei eine Bewertung.

i 2) $\varphi_1, ..., \varphi_n$ seien wffs.

ii 3) Alle wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ seien wahr bei B.

ii 4) Dann ist φ_1 wahr.

ii 5) Für jedes beliebige u($1\leq u<n$) gilt: Wenn die Teilformel $\varphi_1\wedge ... \wedge\varphi_u$ wahr ist, dann ist auch die Teilformel $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_{u+1}$ wahr.

ii 6) Also ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ wahr bei B.

i 7) Wenn alle wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ wahr sind bei B, dann ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ wahr bei B.

ii 8) Mindestens eine wff aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei falsch bei B.

ii 9) Eine solche sei φ_u.

ii 10) Dann ist die Teilformel $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_u$ falsch.

ii 11) Für jedes beliebige v($1\leq v<n$) gilt: Wenn die Teilformel $\varphi_1\wedge ...\wedge\varphi_v$ falsch ist, dann ist auch die Teilformel $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_{v+1}$ falsch.

ii 12) Also ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ falsch bei B.

i 13) Wenn mindestens eine wff aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ falsch ist bei B, dann ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n$ falsch bei B.

(<u>54</u>)

B sei eine Bewertung, $\varphi_1, ..., \varphi_n$ seien wffs. Dann gilt: Wenn alle wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ falsch sind bei B, dann ist $\varphi_1\vee...\vee\varphi_n$ falsch bei B. Anderenfalls ist $\varphi_1\vee...\vee\varphi_n$ wahr bei B.

i 1) B sei eine Bewertung.

i 2) $\varphi_1, ..., \varphi_n$ seien wffs.

ii 3) Alle wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ seien falsch bei B.

ii 4) Dann ist φ_1 falsch.

ii 5) Für jedes beliebige u($1\leq u<n$) gilt: Wenn die Teilformel $\varphi_1\vee ... \vee\varphi_u$ falsch ist, dann ist auch die Teilformel $\varphi_1\vee...\vee\varphi_{u+1}$ falsch.

ii 6) Also ist $\varphi_1\vee...\vee\varphi_n$ falsch bei B.

i 7) Wenn alle wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ falsch sind bei B, dann ist $\varphi_1\vee...\vee\varphi_n$ falsch bei B.

ii 8) Mindestens eine wff aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei wahr bei B.

ii 9) Eine solche sei φ_u.

ii 10) Dann ist die Teilformel $\varphi_1\vee...\vee\varphi_u$ wahr.

ii 11) Für jedes beliebige $v (1 \leq v < n)$ gilt: Wenn die Teilformel $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_v$ wahr ist, dann ist auch die Teilformel $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_{v+1}$ wahr.

ii 12) Also ist $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ wahr bei B.

i 13) Wenn mindestens eine wff aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ wahr ist bei B, dann ist $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_n$ wahr bei B.

Eine wff φ heißt gültig, genau dann, wenn φ bei allen Bewertungen wahr ist.
Beispiel:
'$p \vee \neg p$'

Eine wff φ heißt erfüllbar, genau dann, wenn φ bei mindestens einer Bewertung wahr ist.
Beispiel:
'p'

Eine wff φ heißt unerfüllbar genau dann, wenn φ bei allen Bewertungen falsch ist.
Beispiel:
'$p \wedge \neg p$'

φ, ψ seien wffs. φ und ψ heißen (miteinander) semantisch äquivalent, genau dann, wenn es keine Bewertung gibt, bei der φ und ψ verschiedene Werte haben.
Beispiel:
'p', '$\neg p \rightarrow p$'
Im Zusammenhang mit wffs von AL soll 'äquivalent' stets 'semantisch äquivalent' bedeuten.

Es gilt:

(<u>55</u>)
Jede wff ist mit sich selbst äquivalent.

(<u>56</u>)
φ, ψ, χ seien wffs. Wenn φ und ψ äquivalent sind, und ψ und χ äquivalent sind, dann sind auch φ und χ äquivalent.

(<u>57</u>)
Alle gültigen wffs sind untereinander äquivalent.

(<u>58</u>)

Alle unerfüllbaren wffs sind untereinander äquivalent.

(<u>59</u>)

φ, ψ seien äquivalente wffs. Dann sind φ und ψ entweder zugleich gültig, oder zugleich unerfüllbar, oder zugleich erfüllbar, aber nicht gültig.

φ sei eine wff und ψ eine Atomformel. ψ heißt neutral in Bezug auf φ, genau dann, wenn jedes Paar von Bewertungen, das nicht bei ψ, wohl aber bei allen anderen Atomformeln übereinstimmt, bei φ übereinstimmt.

(<u>60</u>)

φ sei eine wff und ψ eine Atomformel, die nicht in φ vorkommt. Dann ist ψ neutral in Bezug auf φ.

Beweis:

i	1)	φ sei eine wff.
i	2)	ψ sei eine Atomformel, die nicht in φ vorkommt.
ii	3)	(B_1, B_2) sei ein Paar von Bewertungen, das sich bei ψ unterscheidet, bei allen anderen Atomformeln aber übereinstimmt.
ii	4)	Dann enthalten B_1 und B_2 dieselbe WZo für die Menge aller in φ enthaltenen Atomformeln.
ii	5)	Also stimmen B_1 und B_2 bei φ überein.
i	6)	Also stimmt jedes Paar von Bewertungen, das sich bei ψ unterscheidet, bei allen anderen Atomformeln aber übereinstimmt, bei φ überein.
i	7)	Also ist ψ neutral in Bezug auf φ.

(<u>61</u>)

φ sei eine gültige oder eine unerfüllbare wff. Dann sind alle Atomformeln neutral in Bezug auf φ.

(<u>62</u>)

φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff. Dann enthält φ mindestens eine Atomformel, die nicht neutral ist in Bezug auf φ.

Beweis:

i	1)	φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff.
i	2)	α sei die Menge aller in φ enthaltenen Atomformeln.

i 3) Es gibt mindestens eine Bewertung, bei der φ wahr ist. B_1 sei eine solche.

i 4) Und es gibt mindestens eine Bewertung, bei der φ falsch ist. B_2 sei eine solche.

i 5) Wir konstruieren eine Bewertung B_3. B_3 soll bei allen Elementen von α mit B_2 übereinstimmen, bei allen übrigen Atomformeln mit B_1. [*e*.]

i 6) Wir stellen eine Reihe R von Bewertungen her wie folgt: [*e*.]

   a) Das erste Glied von R ist B_1.

   b) Wir erzeugen so lang als möglich zum jeweils letzen Glied ein Nachfolgeglied, indem wir bei genau einer Atomformel den Wert abändern, und zwar bei einem Element von α, bei dem B_2 von B_1 abweicht und dieses letzte Glied, sofern es nicht B_1 ist, mit B_1 übereinstimmt.

   (Da B_1 und B_2 bei φ voneinander abweichen, enthalten sie verschiedene WZon für α. Es läßt sich also mindestens ein Nachfolgeglied erzeugen.)

   c) Die Reihe endet mit B_3.

i 7) Da B_3 dieselbe WZo für α enthält wie B_2, ist φ falsch bei B_3.

i 8) R enthält also mindestens eine Bewertung, bei der φ falsch ist.

i 9) B_4 sei die in R am weitesten vorne gereihte Bewertung von R, bei der φ falsch ist.

i 10) B_4 ist nicht B_1.

i 11) Also hat B_4 ein Vorgängerglied in R. Dieses sei B_5.

i 12) φ ist wahr bei B_5.

i 13) B_5 und B_4 unterscheiden sich in Bezug auf die Menge der Atomformeln bei genau einer wff ψ.

i 14) B_5 und B_4 unterscheiden sich bei ψ, stimmen aber bei allen übrigen Atomformeln überein, und weichen bei φ voneinander ab.

i 15) Es gibt also mindestens ein Paar von Bewertungen, die sich bei ψ unterscheiden, bei allen übrigen Atomformeln aber übereinstimmen und bei φ voneinander abweichen.

i 16) Also ist ψ nicht neutral in Bezug auf φ.

i 17) ψ ist ein Element von α, also in φ enthalten.

i 18) Also gibt es mindestens eine Atomformel, die in φ enthalten, und nicht neutral ist in Bezug auf φ.

(63)
Es gibt mindestens eine erfüllbare, nicht gültige wff φ, sodaß φ mindestens eine Atomformel enthält, die neutral ist in Bezug auf φ.
Beispiel:
'$\neg p \wedge (q \vee \neg q)$'

(64)
φ, ψ seien erfüllbare, nicht gültige wffs, die äquivalent sind. Dann sind in Bezug auf φ und auf ψ dieselben Atomformeln nicht neutral.

Es sollen nun auf der Grundlage der Menge der Bewertungen den wffs von AL mWFn von Mengen von Atomformeln zugeordnet werden.

α sei eine Menge von Atomformeln. φ_1, ..., φ_n sei die Reihe der Elemente von α, geordnet entsprechend der Reihe der Satzbuchstaben. Dann führen wir jede mWFn $F(\alpha)$ von α als eine Funktion $F(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ an.

Wir bestimmen nun das folgende:

Interpretationsregel (IR):
φ sei eine wff von AL, α eine Menge von Atomformeln von AL und $F(\alpha)$ eine mWF von α. Die Funktion $F(\alpha)$ soll der wff φ entsprechen, genau dann, wenn φ bei jeder Bewertung denjenigen Wert hat, den $F(\alpha)$ bei der in dieser Bewertung enthaltenen WZo für α hat.

Aus der Interpretationsregel läßt sich das folgende ableiten:

(65)
φ sei eine wff und α eine Menge von Atomformeln. Dann gibt es höchstens eine mWF von α, die φ entspricht.
Beweis:

i 1) φ sei eine wff und α eine Menge von Atomformeln.

ii 2) $(F_1(\alpha), F_2(\alpha))$ sei ein Paar nichtidentischer mWFn von α.

ii 3) Dann gibt es mindestens eine WZo für α, bei der $F_1(\alpha)$ und $F_2(\alpha)$ verschiedene Werte haben. Eine solche sei WZo_1.

ii 4) B sei eine Bewertung, die WZo_1 enthält. [*e*.]

ii 5) Dann stimmt der Wert von φ bei B mit dem Wert einer der beiden mWFn $F_1(\alpha)$ oder $F_2(\alpha)$ bei WZo_1 nicht überein.

ii 6) Also gibt es mindestens eine Bewertung B, sodaß der Wert von φ bei B mit dem Wert einer der beiden mWFn $F_1(\alpha)$ oder $F_2(\alpha)$ bei der in B enthaltenen WZo für α nicht übereinstimmt.

ii 7) Also entspricht mindestens eine der beiden Funktionen $F_1(\alpha)$ oder $F_2(\alpha)$ nicht φ.

i 8) Bei jedem Paar nichtidentischer mWFn von α entspricht mindestens eine der beiden Funktionen nicht φ.

i 9) Also gibt es höchstens eine mWF von α, die φ entspricht.

(<u>66</u>)

φ sei eine wff und α eine Menge von Atomformeln. φ soll bei allen Bewertungen, die dieselbe WZo für α enthalten, denselben Wert haben. F(α) sei diejenige Funktion von α, die bei jeder WZo für α denjenigen Wert hat, den φ bei allen Bewertungen hat, die diese WZo enthalten. Dann entspricht F(α) φ.

(<u>67</u>)

Zu jeder wff φ gibt es eine mWF der in φ enthaltenen Atomformeln, die φ entspricht. Wir nennen sie 'die' Wahrheitsfunktion von φ.

(<u>68</u>)

φ sei eine wff und α eine Menge von Atomformeln. Es soll mindestens ein Paar von Bewertungen geben, sodaß die beiden Bewertungen dieselbe WZo für α enthalten und bei φ voneinander abweichen. Dann gibt es keine mWF von α, die φ entspricht.

i 1) φ sei eine wff und α eine Menge von Atomformeln.

i 2) Es soll mindestens ein Paar von Bewertungen geben, sodaß die beiden Bewertungen dieselbe WZo für α enthalten und bei φ voneinander abweichen. (B_1, B_2) sei ein solches Paar.

ii 3) F(α) sei eine mWF von α.

ii 4) Dann hat bei einer der Bewertungen B_1 oder B_2 φ nicht den Wert, den F(α) bei der in der Bewertung enthaltenen WZo für α hat.

ii 5) Also gibt es mindestens eine Bewertung, sodaß φ bei dieser Bewertung nicht denselben Wert hat wie F(α) bei der in dieser Bewertung enthaltenen WZo für α.

ii 6) Also entspricht $F(\alpha)$ nicht φ.

i 7) Also entspricht keine mWF von α φ.

(69)

Jeder gültigen wff entspricht die konstant wahre mWF jeder Menge von Atomformeln.

(70)

Jeder unerfüllbaren wff entspricht die konstant falsche mWF jeder Menge von Atomformeln.

(71)

Einer erfüllbaren, nicht gültigen wff entsprechen nur nicht konstante mWFn.

⇒ *Satz 74*

(72) >

φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff und α eine Menge von Atomformeln. Alle in Bezug auf φ nicht neutralen Atomformeln seien in α enthalten. Dann hat φ bei allen Bewertungen, die dieselbe WZo für α enthalten, denselben Wert.

Beweis:

i 1) φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff und α eine Menge von Atomformeln.

i 2) Alle in Bezug auf φ nicht neutralen Atomformeln seien in α enthalten.

i 3) β sei die Menge aller in φ enthaltenen Atomformeln.

ii 4) WZo_1 sei eine WZo für α.

iii 5) (B_1, B_2) sei ein Paar von Bewertungen, sodaß B_1 und B_2 WZo_1 enthalten.

iii 6) Wir konstruieren eine Bewertung B_3. B_3 soll bei allen Elementen von β mit B_2 übereinstimmen, bei allen übrigen Atomformeln mit B_1. [*e*.]

iii 7) Wir stellen eine Reihe R von Bewertungen her wie folgt: [*e*.]

   a) Das erste Glied von R ist B_1.
   b) Wir erzeugen so lang als möglich zum jeweils letzten Glied ein Nachfolgeglied, indem wir bei genau einer Atomformel den Wert abändern, und zwar bei einem Element von β, bei dem B_2 von B_1 abweicht und dieses letzte Glied, sofern es nicht B_1 ist, mit B_1 übereinstimmt.
   c) Die Reihe endet mit B_3.

iii 8) Da B_1 und B_2 bei jedem Element von α übereinstimmen, wird bei der Herstellung von R niemals bei einem Element von α der Wert abgeändert.

iii 9) Alle Atomformeln, die nicht neutral sind in Bezug auf φ, sind Elemente von α.

iii 10) Also wird bei der Herstellung von R niemals eine Atomformel abgeändert, die nicht neutral in Bezug auf φ ist.

iv 11) (B_4, B_5) sei ein Paar Bewertungen aus R, sodaß B_5 in R unmittelbar auf B_4 folgt.

iv 12) B_4 und B_5 unterscheiden sich bei genau einer Atomformel ψ.

iv 13) ψ ist neutral in Bezug auf φ.

iv 14) Also stimmen B_4 und B_5 bei φ überein.

iii 15) Also gilt: Jedes Paar aufeinanderfolgender Bewertungen von R stimmt bei φ überein.

iii 16) Also stimmen B_1 und B_3 bei φ überein.

iii 17) Da B_2 dieselbe WZo für β enthält wie B_3, stimmen B_2 und B_3 bei φ überein.

iii 18) Also stimmen B_1 und B_2 bei φ überein.

ii 19) Also hat φ bei allen Bewertungen, die WZo_1 enthalten, denselben Wert.

i 20) Also hat φ bei allen Bewertungen, die dieselbe WZo für α enthalten, denselben Wert.

(73) >

φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff und α eine Menge von Atomformeln. Es soll mindestens eine Atomformel ψ geben, sodaß ψ nicht neutral in Bezug auf φ ist und nicht in α enthalten ist. Dann gibt es mindestens ein Paar von Bewertungen, sodaß die beiden Bewertungen dieselbe WZo für α enthalten und bei φ voneinander abweichen.

Beweis:

i 1) φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff und α eine Menge von Atomformeln.

i 2) Es soll mindestens eine Atomformel ψ geben, sodaß ψ nicht neutral in Bezug auf φ ist und nicht in α enthalten ist. ψ sei eine solche.

i 3) Dann gibt es mindestens ein Paar von Bewertungen, das nicht bei ψ, wohl aber bei allen anderen Atomformeln übereinstimmt und bei φ voneinander abweicht. (B_1, B_2) sei ein solches.

i 4) B_1 und B_2 enthalten dieselbe WZo für α, weichen aber bei φ voneinander ab.

i 5) Also gibt es mindestens ein Paar von Bewertungen, sodaß die beiden Bewertungen dieselbe WZo für α enthalten und bei φ voneinander abweichen.

Wir fassen zusammen:

(<u>74</u>)

φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff und α eine Menge von Atomformeln. Dann gilt: φ hat bei allen Bewertungen, die dieselbe WZo für α enthalten, denselben Wert, genau dann, wenn alle in Bezug auf φ nicht neutralen Atomformeln in α enthalten sind.

(<u>75</u>)

φ sei eine erfüllbare, nicht gültige wff und α eine Menge von Atomformeln. Dann gilt: Es gibt eine mWF von α, die φ entspricht, genau dann, wenn alle in Bezug auf φ nicht neutralen Atomformeln in α enthalten sind.

(<u>76</u>)

$F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gibt es mindestens eine wff φ, sodaß $F(\alpha)$ φ entspricht.

1) Jede konstant wahre mWF jeder Menge von Atomformeln entspricht jeder gültigen wff, z. B. der wff '$p\vee\neg p$'.
2) Jede konstant falsche mWF jeder Menge von Atomformeln entspricht jeder unerfüllbaren wff, z. B. der wff '$p\wedge\neg p$'.
3) Wir werden später zeigen, daß es zu jeder nicht konstanten mWF $F(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln mindestens eine wff in KNF und mindestens eine wff in DNF gibt, sodaß $F(\alpha)$ diesen wffs entspricht. (s. Kapitel 8.4)

$\Rightarrow$ *Satz 79*

(<u>77</u>) >

φ sei eine wff und $F_1(\alpha)$ eine mWF einer Menge α von Atomformeln. $F_1(\alpha)$ soll φ entsprechen. $F_2(\beta)$ sei eine mWF einer Menge β von Atomformeln. $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien äquivalent. Dann entspricht auch $F_2(\beta)$ φ.

Beweis:

i 1) φ sei eine wff.

i 2) $F_1(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F_1(\alpha)$ soll φ entsprechen.

i 4) $F_2(\beta)$ sei eine mWF einer Menge β von Atomformeln.

i 5) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien äquivalent.

ii 6) B sei eine Bewertung.

ii 7) WZo_1 sei die in B enthaltene WZo für $\alpha \cup \beta$, WZo_2 die in B enthaltene WZo für α, WZo_3 die in B enthaltene WZo für β.

ii 8) v sei der Wert von φ bei B.

ii 9) Da $F_1(\alpha)$ φ entspricht, ist der Wert von $F_1(\alpha)$ bei WZo_2 v.

ii 10) WZo_2 und WZo_3 sind in WZo_1 enthalten.

ii 11) Also gibt es eine WZo für $\alpha \cup \beta$, die sowohl WZo_2 als auch WZo_3 enthält.

ii 12) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ sind äquivalent.

ii 13) Also ist der Wert von $F_2(\beta)$ bei WZo_3 v.

ii 14) Also hat φ bei B denselben Wert wie $F_2(\beta)$ bei der in B enthaltenen WZo für β.

i 15) Also hat φ bei jeder Bewertung denselben Wert wie die darin enthaltene WZo für β.

i 16) Also entspricht $F_2(\beta)$ φ.

(78) >

φ sei eine wff und $F_1(\alpha)$ eine mWF einer Menge α von Atomformeln. $F_1(\alpha)$ soll φ entsprechen. $F_2(\beta)$ sei eine mWF einer Menge β von Atomformeln. $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien nicht äquivalent. Dann entspricht $F_2(\beta)$ nicht φ.

Beweis:

i 1) φ sei eine wff.

i 2) $F_1(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F_1(\alpha)$ soll φ entsprechen.

i 4) $F_2(\beta)$ sei eine mWF einer Menge β von Atomformeln.

i 5) $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ seien nicht äquivalent.

i 6) Dann gibt es mindestens eine WZo für $\alpha \cup \beta$, sodaß $F_2(\beta)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für β nicht denselben Wert hat wie $F_1(\alpha)$ bei der in dieser WZo enthaltenen WZo für α. WZo_1 sei eine solche WZo für $\alpha \cup \beta$.

i 7) WZo_2 sei die in WZo_1 enthaltene WZo für α, WZo_3 die in WZo_1 enthaltene WZo für β.

i 8) B sei eine Bewertung, die WZo_1 enthält. [*e.*]

i 9) Dann enthält B auch WZo_2 und WZo_3

i 10) v sei der Wert von φ bei B.

i 11) Da $F_1(\alpha)$ φ entspricht, hat $F_1(\alpha)$ bei WZo_2 den Wert v.

i 12) Also hat $F_2(\beta)$ bei WZo_3 den Wert, der nicht v ist.

i 13) Also hat φ bei B einen anderen Wert, als $F_2(\beta)$ bei der in B enthaltenen WZo für β.

i 14) Also gibt es mindestens eine Bewertung, sodaß φ bei dieser Bewertung einen anderen Wert hat als $F_2(\beta)$ bei der in dieser Bewertung enthaltenen WZo für β.

i 15) Also entspricht $F_2(\beta)$ nicht φ.

Wir fassen zusammen:

(79)

φ sei eine wff und $F_1(\alpha)$ eine mWF einer Menge α von Atomformeln. $F_1(\alpha)$ soll φ entsprechen. $F_2(\beta)$ sei eine mWF einer Menge β von Atomformeln. Dann gilt: $F_2(\beta)$ entspricht φ, genau dann, wenn $F_1(\alpha)$ und $F_2(\beta)$ äquivalent sind.

⇒ Satz 82

(80) >

$F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln. φ sei eine wff. $F(\alpha)$ soll φ entsprechen. ψ sei eine wff. φ und ψ seien äquivalent. Dann entspricht $F(\alpha)$ auch ψ.

Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 2) φ sei eine wff.

i 3) $F(\alpha)$ soll φ entsprechen.

i 4) ψ sei eine wff.

i 5) φ und ψ seien äquivalent.

ii 6) B sei eine Bewertung.

ii 7) WZo_1 sei die in B enthaltene WZo für α.

ii 8) v sei der Wert von φ bei B.

ii 9) Da $F(\alpha)$ φ entspricht, hat $F(\alpha)$ bei WZo_1 den Wert v.

ii 10) Da φ und ψ äquivalent sind, hat ψ bei B den Wert v.

ii 11) Also hat ψ bei B denjenigen Wert, den $F(\alpha)$ bei der in B enthaltenen WZo für α hat.

i 12) Also hat ψ bei jeder Bewertung denjenigen Wert, den $F(\alpha)$ bei der in dieser Bewertung enthaltenen WZo für α hat.

i 13) Also entspricht $F(\alpha)$ ψ.

(<u>81</u>) >

$F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln. φ sei eine wff. $F(\alpha)$ soll φ entsprechen. ψ sei eine wff. φ und ψ seien nicht äquivalent. Dann entspricht $F(\alpha)$ nicht ψ.

Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 2) φ sei eine wff.

i 3) $F(\alpha)$ soll φ entsprechen.

i 4) ψ sei eine wff.

i 5) φ und ψ seien nicht äquivalent.

i 6) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der φ und ψ nicht denselben Wert haben. B_1 sei eine solche Bewertung.

i 7) WZo_1 sei die in B_1 enthaltene WZo für α.

i 8) v sei der Wert von φ bei B.

i 9) Da $F(\alpha)$ φ entspricht, hat $F(\alpha)$ bei WZo_1 den Wert v.

i 10) ψ hat bei B den Wert, der nicht v ist.

i 11) Also hat ψ bei B nicht denselben Wert wie $F(\alpha)$ bei der in B enthaltenen WZo für α.

i 12) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der ψ nicht denselben Wert hat wie $F(\alpha)$ bei der in dieser Bewertung enthaltenen WZo für α.

i 13) Also entspricht $F(\alpha)$ nicht φ.

Wir fassen zusammen:

(<u>82</u>)

$F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln. φ sei eine wff. $F(\alpha)$ soll φ entsprechen. ψ sei eine wff. Dann gilt: $F(\alpha)$ entspricht ψ, genau dann, wenn φ und ψ äquivalent sind.

Eine gültige wff kommt einem Satz gleich, (1) dessen Wahrheitsspielraum durch die konstant wahre mWF jeder Menge von Sätzen definierbar ist, (2) der eine Tautologie ist, (3) der ohne faktischen Gehalt, weil nichtssagend unverbindlich, ist.

Eine unerfüllbare wff kommt einem Satz gleich, (1) dessen Wahrheitsspielraum durch die konstant falsche mWF jeder Menge von Sätzen definierbar ist, (2) der eine Kontradiktion ist, (3) der ohne faktischen Gehalt, weil selbstwidersprüchlich, ist.

Äquivalente wffs kommen bei einheitlicher Interpretation Sätzen gleich, (1) deren Wahrheitsspielräume durch dieselben mWFn definierbar sind, (2) die denselben faktischen Gehalt haben.

Die Wahrheitsfunktion einer wff kann in einer Tabelle errechnet werden.
φ sei eine wff und $\varphi_1, ..., \varphi_n$ die Reihe der in φ enthaltenen Atomformeln entsprechend der Ordnung der Reihe der Satzbuchstaben.
Die Tabelle zur Errechnung der Wahrheitsfunktion $F(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ von φ wird angelegt wie eine einfache Wahrheitstafel für $F(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, nur daß der rechte Teil der Tabelle auf so viele Spalten erweitert ist, daß φ Stelle für Stelle in die Spalten der Kopfzeile eingetragen werden kann. Jeder Stelle von φ ist die Spalte ihres Eintrags zugeordnet.
Gegeben sei eine Stelle von φ, die entweder das Vorkommnis eines Satzbuchstabens oder das Vorkommnis eines Konnektivs ist. Sie sei die m-te Stelle von φ. Dann gibt es genau eine wff ψ, sodaß gilt: entweder ist ψ eine Atomformel, und die m-te Stelle von φ ist ein Vorkommnis von ψ in φ, oder ψ ist keine Atomformel, und die m-te Stelle von φ ist das Hauptkonnektiv eines Vorkommnisses von ψ in φ. Da alle in ψ enthaltenen Atomformeln Elemente von $\{\varphi_1, ..., \varphi_n,\}$ sind, hat ψ bei allen Bewertungen, die dieselbe WZo für $\{\varphi_1, ..., \varphi_n,\}$ enthalten, denselben Wert. Wir tragen nun in der Spalte der m-ten Stelle von φ in jede Zeile den Wert ein, den ψ bei allen Bewertungen hat, die die der Zeile zugeordnete WZo für $\{\varphi_1, ..., \varphi_n,\}$ enthalten. Die Spalte nimmt dann den Wertverlauf derjenigen mWF von $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ auf, die ψ entspricht.
Wenn φ eine Atomformel ist, dann enthält die Spalte der einzigen Stelle von φ den Wertverlauf der mWF von φ. Andernfalls ist es die Spalte des Hauptkonnektivs von φ.

Beispiel, s. Abb. 18.

Mithilfe der Konnektive der Sprache AL können wir aus einer bzw. zwei wffs eine neue wff bilden, und wir gelangen auf der semantischen Ebene, ausgehend von einer bzw. zwei mWFn einer geeigneten Menge von Atomformeln, wiederum zu einer mWF dieser Menge, wobei der Wertverlauf der erhaltenen Funktion zum Wertverlauf der Ausgangsfunktion bzw. den Wertverläufen der Ausgangsfunktionen in einer bestimmten charakteristischen Beziehung steht.
Wir können den Konnektiven von AL daher bestimmte wahrheitsfunktionenbildende Operatoren zuordnen: dem Negations-, Konjunktions-, Disjunktionszeichen, dem Zeichen

der materialen Implikation, der materialen Äquivalenz: den Operator der Negation, Konjunktion, Disjunktion, materialen Implikation, materialen Äquivalenz.
Der Operator der Negation erzeugt aus einer mWF $F_1(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln diejenige mWF von α, die bei jeder WZo für α, bei der $F_1(\alpha)$ den Wert W hat, den Wert F hat, und bei jeder WZo für α, bei der $F_1(\alpha)$ den Wert F hat, den Wert W hat.
Der Operator der Konjunktion erzeugt aus mWFn $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln diejenige mWF von α, die bei jeder WZo für α, bei der sowohl $F_1(\alpha)$ als auch $F_2(\alpha)$ den Wert W hat, den Wert W hat, und bei allen anderen WZon für α den Wert F hat.
Der Operator der Disjunktion erzeugt aus mWFn $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln diejenige mWF von α, die bei jeder WZo für α, bei der sowohl $F_1(\alpha)$ als auch $F_2(\alpha)$ den Wert F hat, den Wert F hat, und bei allen anderen WZon für α den Wert W hat.
Der Operator der materialen Implikation erzeugt aus mWFn $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln diejenige mWF von α, die bei jeder WZo für α, bei der $F_1(\alpha)$ den Wert W und $F_2(\alpha)$ den Wert F hat, den Wert F hat, und bei allen anderen WZon für α den Wert W hat.
Der Operator der materilalen Äquivalenz erzeugt aus mWFn $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln diejenige mWF von α, die bei allen WZon für α, bei der $F_1(\alpha)$ und $F_2(\alpha)$ denselben Wert haben, den Wert W hat, und bei allen anderen WZon für α den Wert F hat.

Die natürliche Sprache kennt bestimmte Bindewörter und Wendungen, mit deren Hilfe es möglich ist, aus einem oder zwei Sätzen einen neuen Satz zu bilden, der eine Wahrheitsfunktion dieses einen oder dieser zwei Sätze ist, und wir gelangen, mengentheoretisch ausgedrückt, mit ihrer Hilfe auf der semantischen Ebene von einer oder zwei mWFn einer bestimmten Menge von Sätzen wiederum zu einer Wahrheitsfunktion dieser Menge.
Zu jedem Konnektiv von AL gibt es eine alltagssprachliche Wendung oder Satzverbindung, die dem Charakter des dem Konnektiv zugeordneten wahrheitsfunktionenbildenden Operators enspricht. Und so ergeben sich aus den obigen Interpretationsbestimmungen auch für die Konnektive von AL bestimmte Bedeutungen.
Das Negationszeichen hat die Bedeutung der Wendung: 'es ist nicht der Fall, daß'.
Das Zeichen der Konjunktion entspricht dem Bindewort 'und'.
Das Zeichen der Disjunktion entpricht dem Bindewort 'oder', wenn es nicht ausschließend

gemeint ist.
Der Pfeil entspricht der Satzverbindung 'wenn ..., dann', sofern nicht mehr intendiert wird, als den Fall auszuschließen, daß der mit 'wenn' eingeleitete Satz wahr und der mit 'dann' eingeleitete Satz falsch ist.
Das Äquivalenzzeichen enspricht der Satzverbindung 'genau dann, wenn', sofern nichts weiter behauptet wird, als daß die verbundenen Sätze entweder beide wahr oder beide falsch sind.

Wir können mithilfe der Wörter und Wendungen: 'es ist (zugleich) der Fall, daß', 'es ist nicht der Fall daß', 'und', 'oder', 'wenn ..., dann', 'genau dann, wenn' jede interpretierte wff von AL in einen alltagssprachlichen Satz übersetzen, sodaß dieser Satz den Wahrheitsspielraum der wff hat, und ihn auf dieselbe Weise konstruiert wie die wff.
Die Übertragung einer uninterpretierten wff ergibt ein alltagssprachliches aussagenlogisches Schema.

5.5 AUSSAGENLOGISCHE METATHEOREME DER ÄQUIVALENZ

Im Kontext logischer Systeme sind Metatheoreme (aus Festsetzungen abgeleitete) Lehrsätze über diese Systeme.

(83) (Mt1) (55)
Jede wff ist mit sich selbst äquivalent.

(84) (Mt2) (56) (Theorem der Transitivität der Äquivalenz)
φ, ψ, χ seien wffs. Wenn φ und ψ äquivalent sind, und ψ und χ äquivalent sind, dann sind auch φ und χ äquivalent.

(85) (Mt3) (57)
Alle gültigen wffs sind untereinander äquivalent.

(86) (Mt4) (58)
Alle unerfüllbaren wffs sind untereinander äquivalent.

(87) (Mt5) (59)

φ, ψ seien äquivalente wffs. Dann sind φ und ψ entweder zugleich gültig, oder zugleich unerfüllbar, oder zugleich erfüllbar, aber nicht gültig.

⇒ *Satz 89*

(88) >

φ, ψ, φ_1 seien wffs. φ und φ_1 seien äquivalent. Dann sind auch in jedem der folgenden Paare die beiden wffs äquvialent: $(\neg\varphi, \neg\varphi_1)$, $(\varphi\wedge\psi, \varphi_1\wedge\psi)$, $(\psi\wedge\varphi, \psi\wedge\varphi_1)$, $(\varphi\vee\psi, \varphi_1\vee\psi)$, $(\psi\vee\varphi, \psi\vee\varphi_1)$, $(\varphi\rightarrow\psi, \varphi_1\rightarrow\psi)$, $(\psi\rightarrow\varphi, \psi\rightarrow\varphi_1)$, $(\varphi\equiv\psi, \varphi_1\equiv\psi)$, $(\psi\equiv\varphi, \psi\equiv\varphi_1)$.

Beweis:

i 1) φ, ψ, φ_1 seien wffs.

i 2) φ und φ_1 seien äquivalent.

ii 3) B sei eine Bewertung.

ii 4) Dann haben φ und φ_1 denselben Wert bei B.

ii 5) Also haben auch in jedem der folgenden Paare die beiden wffs denselben Wert bei B: $(\neg\varphi, \neg\varphi_1)$, $(\varphi\wedge\psi, \varphi_1\wedge\psi)$, $(\psi\wedge\varphi, \psi\wedge\varphi_1)$, $(\varphi\vee\psi, \varphi_1\vee\psi)$, $(\psi\vee\varphi, \psi\vee\varphi_1)$, $(\varphi\rightarrow\psi, \varphi_1\rightarrow\psi)$, $(\psi\rightarrow\varphi, \psi\rightarrow\varphi_1)$, $(\varphi\equiv\psi, \varphi_1\equiv\psi)$, $(\psi\equiv\varphi, \psi\equiv\varphi_1)$.

i 6) Also stimmen in jedem der oben angeführten Paare die beiden wffs bei jeder Bewertung im Wert überein.

i 7) Also sind in jedem der oben angeführten Paare die beiden wffs äquivalent.

φ, φ_1, ψ_1, ψ seien wffs. Wir sagen, das Quadrupel $(\varphi, \varphi_1, \psi_1, \psi)$ erfülle das Kriterium der einfachen Äquivalenzersetzung bzw., es gelte $AeE(\varphi, \varphi_1, \psi_1, \psi)$, genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1) φ_1 ist eine Teilformel von φ.
2) φ_1 und ψ_1 sind äquivalent.
3) ψ kann aus φ dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 in φ durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

(89) (Mt6) (Ersetzungstheorem)

φ, φ_1, ψ_1, ψ seien wffs. Es soll gelten: $AeE(\varphi, \varphi_1, \psi_1, \psi)$. Dann sind φ und ψ äquivalent.

Beweis:

ii 1) $(\varphi, \varphi_1, \psi_1, \psi)$ sei ein Quadrupel, bestehend aus einer Atomformel φ und wffs φ_1, ψ_1, ψ, sodaß gilt: $AeE(\varphi, \varphi_1, \psi_1, \psi)$.

ii 2) Dann ist φ_1 identisch mit φ, und es ist ψ identisch mit ψ_1.

ii 3) Also sind φ und ψ äquivalent.

i 4) Für jede Atomformel φ (also jede wff vom Grad 0) und alle wffs φ_1, ψ_1, ψ gilt: Wenn gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ), dann sind φ und ψ äquivalent.

ii 5) n sei eine ganze Zahl ≥ 0.

iii 6) Wir nehmen an, es gelte für jede wff φ, deren Grad $\leq$ n ist, und alle wffs φ_1, ψ_1, ψ: Wenn gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ), dann sind φ und ψ äquivalent.

iv 7) (φ, φ_1, ψ_1, ψ) sei ein Quadrupel, bestehend aus einer wff φ vom Grad n+1 und wffs φ_1, ψ_1, ψ, sodaß gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ).

iv 8) Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

v 9) φ_1 ist identisch mit φ.

v 10) Dann ist ψ identisch mit ψ_1.

v 11) Also sind φ und ψ äquivalent.

~ Fall B:

v 12) φ_1 ist nicht identisch mit φ.

v 13) Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A (zu 13):

vi 14) φ ist eine wff $\neg\varphi_2$.

vi 15) Dann ist φ_1 eine Teilformel von φ_2, und ψ kann aus φ dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 innerhalb des Vorkommnisses von φ_2 in φ durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

vi 16) Also ist ψ eine wff $\neg\psi_2$.

vi 17) Und ψ_2 kann aus φ_2 dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 in φ_2 durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

vi 18) Also gilt: AeE(φ_2, φ_1, ψ_1, ψ_2).

vi 19) Da der Grad von φ_2 n ist, sind φ_2 und ψ_2 äquivalent.

vi 20) Also sind φ und ψ äquivalent.

~ Fall B (zu 13):

vi 21) φ ist eine wff $\varphi_2\wedge\varphi_3$.

vi 22) Dann liegt mindestens einer der folgenden Fälle vor.

Fall A (zu 22):

vii 23) φ_1 ist eine Teilformel von φ_2, und ψ kann aus φ dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 in φ vor dem Hauptkonnektiv von φ durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

vii 24) Dann gibt es genau eine wff ψ_2, sodaß ψ die wff $\psi_2 \wedge \varphi_3$ ist.

vii 25) Und ψ_2 kann aus φ_2 dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 in φ_2 durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

vii 26) Also gilt: AeE(φ_2, φ_1, ψ_1, ψ_2).

vii 27) Da der Grad von $\varphi_2 \leq$ n ist, sind φ_2 und ψ_2 äquivalent.

vii 28) Also sind φ und ψ äquivalent.

~ Fall B (zu 22):

vii 29) φ_1 ist eine Teilformel von φ_3, und ψ kann aus φ dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 in φ nach dem Hauptkonnektiv von φ durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

vii 30) Dann gibt es genau eine wff ψ_2, sodaß ψ die wff $\varphi_2 \wedge \psi_2$ ist.

vii 31) Und ψ_2 kann aus φ_3 dadurch erzeugt werden, daß ein Vorkommnis von φ_1 in φ_3 durch ein Vorkommnis von ψ_1 ersetzt wird.

vii 32) Also gilt: AeE(φ_3, φ_1, ψ_1, ψ_2).

vii 33) Da der Grad von $\varphi_3 \leq$ n ist, sind φ_3 und ψ_2 äquivalent.

vii 34) Also sind φ und ψ äquivalent.

vi 35) Also sind φ und ψ äquivalent.

~ Fall C (zu 13):

vi 36) φ ist eine wff $\varphi_2 \vee \varphi_3$. (verläuft wie B)

~ Fall D (zu 13):

vi 37) φ ist eine wff $\varphi_2 \rightarrow \varphi_3$ (verläuft wie B)

~ Fall E (zu 13):

vi 38) φ ist eine wff $\varphi_2 \equiv \varphi_3$. (verläuft wie B)

v 39) Also sind φ und ψ äquivalent.

iv 40) Also sind φ und ψ äquivalent.

iii 41) Also gilt für jede wff φ vom Grad n+1 und alle wffs φ_1, ψ_1, ψ: Wenn gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ), dann sind φ und ψ äquivalent.

ii 42) Wenn für jede wff φ, deren Grad $\leq$ n ist, und für alle wffs φ_1, ψ_1, ψ gilt: Wenn gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ), dann sind φ und ψ äquivalent: – Dann gilt dasselbe für jede wff φ, deren Grad n+1 ist, und alle wffs φ_1, ψ_1, ψ.

i 43) Wir verallgemeinern für jede ganze Zahl n $\geq$ 0: Wenn für jede wff φ, deren Grad $\leq$ n ist, und für alle wffs φ_1, ψ_1, ψ gilt: Wenn gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ), dann sind φ und ψ äquivalent: – Dann gilt dasselbe für jede wff φ, deren Grad n+1 ist, und alle wffs φ_1, ψ_1, ψ.

i 44) Also gilt für alle wffs φ, φ_1, ψ_1, ψ: Wenn gilt: AeE(φ, φ_1, ψ_1, ψ), dann sind φ und ψ äquivalent.

(90) (Mt7)

φ sei eine wff. Dann sind $\neg\neg\varphi$ und φ äquivalent.

Beweis:

i 1) φ sei eine wff.

ii 2) B sei eine Bewertung.

ii 3) Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iii 4) φ ist wahr bei B.

iii 5) Dann ist $\neg\varphi$ falsch.

iii 6) Also ist $\neg\neg\varphi$ wahr.

iii 7) Also haben $\neg\neg\varphi$ und φ denselben Wert bei B.

~ Fall B:

iii 8) φ ist falsch bei B.

iii 9) Dann ist $\neg\varphi$ wahr.

iii 10) Also ist $\neg\neg\varphi$ falsch.

iii 11) Also haben $\neg\neg\varphi$ und φ denselben Wert bei B.

ii 12) Also haben $\neg\neg\varphi$ und φ denselben Wert bei B.

i 13) Also stimmen $\neg\neg\varphi$ und φ bei jeder Bewertung im Wert überein.

i 14) Also sind $\neg\neg\varphi$ und φ äquivalent.

(91) (Mt8)

φ, ψ seien wffs, jede eine ein- oder mehrgliedrige Konjunktion. Es soll zu jedem Konjunkt von φ mindestens ein äquivalentes Konjunkt in ψ, und zu jedem Konjunkt von ψ mindestens ein äquivalentes Konjunkt in φ geben. Dann sind φ und ψ äquivalent.

Beweis:

i 1) φ, ψ seien wffs, jede eine ein- oder mehrgliedrige Konjunktion.

i 2) Es soll zu jedem Konjunkt von φ mindestens ein äquivalentes Konjunkt in ψ, und zu jedem Konjunkt von ψ mindestens ein äquivalentes Konjunkt in φ geben.

ii 3) B sei eine Bewertung, bei der φ wahr ist.

ii 4) Dann sind alle Konjunkte von φ wahr.

ii 5) Da es zu jedem Konjunkt von ψ mindestens ein äquivalentes Konjunkt in φ gibt, sind auch alle Konjunkte von ψ wahr.

ii 6) Also ist ψ wahr bei B.

i 7) Bei jeder Bewertung, bei der φ wahr ist, ist auch ψ wahr.

ii 8) B sei eine Bewertung, bei der φ falsch ist.

ii 9) Dann ist mindestens ein Konjunkt von φ falsch.

ii 10) Da es zu jedem Konjunkt von φ mindestens ein äquivalentes Konjunkt in ψ gibt, ist auch mindestens ein Konjunkt von ψ falsch.

ii 11) Also ist ψ falsch bei B.

i 12) Bei jeder Bewertung, bei der φ falsch ist, ist auch ψ falsch.

i 13) Also sind φ und ψ äquivalent.

(92) (Mt9)

φ, ψ seien wffs, jede eine ein- oder mehrgliedrige Disjunktion. Es soll zu jedem Disjunkt von φ mindestens ein äquivalentes Disjunkt in ψ, und zu jedem Disjunkt von ψ mindestens ein äquivalentes Disjunkt in φ geben. Dann sind φ und ψ äquivalent.

Beweis:

i 1) φ, ψ seien wffs, jede eine ein- oder mehrgliedrige Disjunktion.

i 2) Es soll zu jedem Disjunkt von φ mindestens ein äquivalentes Disjunkt in ψ, und zu jedem Disjunkt von ψ mindestens ein äquivalentes Disjunkt in φ geben.

ii 3) B sei eine Bewertung, bei der φ wahr ist.

ii 4) Dann ist mindestens ein Disjunkt von φ wahr.

ii 5) Da es zu jedem Disjunkt von φ mindestens ein äquivalentes Disjunkt in ψ gibt, ist auch mindestens ein Disjunkt von ψ wahr.

ii 6) Also ist ψ wahr bei B.

i 7) Bei jeder Bewertung, bei der φ wahr ist, ist auch ψ wahr.

ii 8) B sei eine Bewertung, bei der φ falsch ist.

ii 9) Dann sind alle Disjunkte von φ falsch.

ii 10) Da es zu jedem Disjunkt von ψ mindestens ein äquivalentes Disjunkt in φ gibt, sind auch alle Disjunkte von ψ falsch.

ii 11) Also ist ψ falsch bei B.

i 12) Bei jeder Bewertung, bei der φ falsch ist, ist auch ψ falsch.

i 13) Also sind φ und ψ äquivalent.

(93) (Mt10)

φ, ψ seien wffs. Dann sind $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ äquivalent.

Beweis:

i	1)	φ, ψ seien wffs.
ii	2)	B sei eine Bewertung.
ii	3)	Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.
		Fall A:
iii	4)	φ ist wahr, und ψ ist wahr bei B.
iii	5)	Dann ist $\varphi\rightarrow\psi$ wahr und $\neg\varphi\vee\psi$ wahr.
iii	6)	Also haben $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ denselben Wert bei B.
~		Fall B:
iii	7)	φ ist wahr, und ψ ist falsch bei B.
iii	8)	Dann ist $\varphi\rightarrow\psi$ falsch.
iii	9)	Da φ wahr ist, ist $\neg\varphi$ falsch.
iii	10)	Also ist $\neg\varphi\vee\psi$ falsch.
iii	11)	Also haben $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ denselben Wert bei B.
~		Fall C:
iii	12)	φ ist falsch bei B.
iii	13)	Dann ist $\varphi\rightarrow\psi$ wahr.
iii	14)	$\neg\varphi$ ist wahr.
iii	15)	Also ist $\neg\varphi\vee\psi$ wahr.
iii	16)	Also haben $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ denselben Wert bei B.
ii	17)	Also haben $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ denselben Wert bei B.
i	18)	Also stimmen $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ bei jeder Bewertung im Wert überein.
i	19)	Also sind $\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ äquivalent.

(94) (Mt11)

φ, ψ seien wffs. Dann sind $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ äquivalent.

Beweis:

i	1)	φ, ψ seien wffs.
ii	2)	B sei eine Bewertung.
ii	3)	Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.
		Fall A:
iii	4)	φ ist wahr, und ψ ist wahr bei B.

iii 5) Dann ist $\varphi\equiv\psi$ wahr.

iii 6) $\varphi\wedge\psi$ ist wahr.

iii 7) Also ist auch $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ wahr.

iii 8) Also haben $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ denselben Wert bei B.

~ Fall B:

iii 9) φ ist wahr, und ψ ist falsch bei B.

iii 10) Dann ist $\varphi\equiv\psi$ falsch.

iii 11) $\varphi\wedge\psi$ ist falsch.

iii 12) $\neg\varphi$ ist falsch.

iii 13) Also ist $\neg\varphi\wedge\neg\psi$ falsch.

iii 14) Also ist $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ falsch.

iii 15) Also haben $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ denselben Wert bei B.

~ Fall C:

iii 16) φ ist falsch, und ψ ist wahr bei B.

iii 17) Dann ist $\varphi\equiv\psi$ falsch.

iii 18) $\varphi\wedge\psi$ ist falsch.

iii 19) $\neg\psi$ ist falsch.

iii 20) Also ist $\neg\varphi\wedge\neg\psi$ falsch.

iii 21) Also ist $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ falsch.

iii 22) Also haben $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ denselben Wert bei B.

~ Fall D:

iii 23) φ ist falsch, und ψ ist falsch bei B.

iii 24) Dann ist $\varphi\equiv\psi$ wahr.

iii 25) $\neg\varphi$ ist wahr.

iii 26) $\neg\psi$ ist wahr.

iii 27) Also ist $\neg\varphi\wedge\neg\psi$ wahr.

iii 28) Also ist $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ wahr.

iii 29) Also haben $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ denselben Wert bei B.

ii 30) Also haben $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ denselben Wert bei B.

i 31) Also stimmen $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ bei jeder Bewertung im Wert überein.

i 32) Also sind $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ äquivalent.

φ, ψ seien wffs. Mt2, Mt6, Mt10 und Mt11 sollen zusammen ausreichen, um aus φ schrittweise ψ als äquivalente wff abzuleiten. Dann heißt ψ eine basale Äquivalenzumformung von φ.

5.6 KLAUSELN

Unter einer Klausel verstehen wir eine (nichtleere) Menge basaler wffs.

Eine Klausel heißt konsistent, genau dann, wenn es keinen Satzbuchstaben gibt, sodaß die Klausel sowohl die positive als auch die negative basale wff zu diesem Satzbuchstaben enthält. Im anderen Fall heißt sie inkonsistent.

Zwei Klauseln α und β heißen (miteinander) invers verschränkt, genau dann, wenn es mindestens einen Satzbuchstaben gibt, sodaß eine der Klauseln die positive basale wff, und die andere Klausel die negative basale wff zu diesem Satzbuchstaben enthält.

Die Umkehrung einer Klausel α ist diejenige Menge β basaler wffs, die zu jedem Element von α die Umkehrung als Element enthält und keine Elemente sonst.

Es gilt:

(<u>95</u>)
In einem Paar basaler wffs, sodaß jeweils die eine die Umkehrung der anderen ist, ist bei jeder Bewertung eine der wffs wahr und eine der wffs falsch.

(<u>96</u>)
α sei eine konsistente Klausel. Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α wahr sind, und mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α falsch sind.

(<u>97</u>)
α und β seien konsistente Klauseln, die nicht invers verschränkt sind. Dann ist die Klausel $\alpha\cup\beta$ konsistent.
Beweis:

i 1) α und β seien konsistente Klauseln.

i 2) α und β seien nicht invers verschränkt.

ii 3) φ sei ein Element aus α.

ii 4) Dann enthält weder α noch β die Umkehrung von φ.

ii 5) Also enthält $\alpha\cup\beta$ nicht die Umkehrung von φ.

i 6) Also enthält $\alpha\cup\beta$ zu keinem Element aus α die Umkehrung.

ii 7) φ sei ein Element aus β.

ii 8) Dann enthält weder α noch β die Umkehrung von φ.

ii 9) Also enthält $\alpha\cup\beta$ nicht die Umkehrung von φ.

i 10) Also enthält $\alpha\cup\beta$ zu keinem Element aus β die Umkehrung.

i 11) Also enthält $\alpha\cup\beta$ zu keinem seiner Elemente die Umkehrung.

i 12) Also ist $\alpha\cup\beta$ konsistent.

(98)

α und β seien konsistente Klauseln, die nicht invers verschränkt sind. Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α und alle Elemente von β wahr sind, und mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α und alle Elemente von β falsch sind.

(99)

α und β seien zwei konsistente Klauseln, die kein gemeinsames Element haben. Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α wahr und alle Elemente von β falsch sind.

Beweis:

i 1) α und β seien konsistente Klauseln.

i 2) α und β sollen kein gemeinsames Element haben.

i 3) Wir konstruieren eine Bewertung B, sodaß alle Elemente von α wahr und alle Elemente von β falsch sind bei B. [*e*.]

  a) Jede Atomformel ist höchstens in einem Element von α, und höchstens in einem Element von β als Teilformel enthalten.

  b) Für jede Atomformel, die in einem Element von α als Teilformel enthalten ist, wählen wir den Wert so, daß das betreffende Element von α wahr wird.

c) Es wird dann jedes Element von β, das eine Atomformel als Teilformel enthält, die auch in einem Element von α als Teilformel enthalten ist, falsch bei B.

d) Für jede Atomformel, die in einem Element von β, aber in keinem Element von α als Teilformel enthalten ist, wählen wir den Wert so, daß das betreffende Element von β falsch wird.

e) Der Wert einer Atomformel, die in keinem Element von α und in keinem Element von β vorkommt ist beliebig.

i 4) Es gibt also mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α wahr und alle Elemente von β falsch sind.

KAPITEL 6

DIE SEMANTISCHEN GRUNDLAGEN VON N

6.1 DIE WAHRHEITSBEDINGUNGEN VON L1- UND L2-RESULTATEN

a sei eine Ao, d(a) ein Balken von a und B eine Bewertung. Ist das L'-Resultat von d(a) wahr bei B, dann heißt d(a) wahr bei B, andernfalls heißt d(a) falsch bei B.

(100)
a sei eine wAo und B eine Bewertung. Dann gilt: L1(a) ist wahr bei B, genau dann, wenn in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist bei B.
Beweis:

i	1)	a sei eine wAo und B eine Bewertung.
i	2)	Aufgrund der Definition von L1 hat L1(a) konjunktive Normalform.
ii	3)	In jeder Kolonne von a soll mindestens ein Balken wahr sein bei B.
ii	4)	Dann ist in jedem Konjunkt von L1(a) mindestens ein Disjunkt wahr bei B.
ii	5)	Also sind alle Konjunkte von L1(a) wahr bei B.
ii	6)	Also ist L1(a) wahr bei B.
i	7)	Wenn in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist bei B, dann ist L1(a) wahr bei B.
ii	8)	In mindestens einer Kolonne von a seien sämtliche Balken falsch bei B.
ii	9)	Dann sind in mindestens einem Konjunkt von L1(a) sämtliche Disjunkte falsch bei B.
ii	10)	Also ist mindestens ein Konjunkt von L1(a) falsch bei B.
ii	11)	Also ist L1(a) falsch bei B.
i	12)	Wenn in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch sind bei B, dann ist L1(a) falsch bei B.
i	13)	L1(a) ist wahr bei B, genau dann, wenn in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist bei B.

(101)

a sei eine wAo und B eine Bewertung. Dann gilt: L2(a) ist wahr bei B, genau dann, wenn in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr sind bei B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo und B eine Bewertung.

i 2) Aufgrund der Definition von L2 hat L2(a) disjunktive Normalform.

ii 3) In mindestens einer Reihe von a seien sämtliche Balken wahr bei B.

ii 4) Dann sind in mindestens einem Disjunkt von L2(a) sämtliche Konjunkte wahr bei B.

ii 5) Also ist mindestens ein Disjunkt von L2(a) wahr bei B.

ii 6) Also ist L2(a) wahr bei B.

i 7) Wenn in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr sind bei B, dann ist L2(a) wahr bei B.

ii 8) In jeder Reihe von a soll mindestens ein Balken falsch sein bei B.

ii 9) Dann ist in jedem Disjunkt von L2(a) mindestens ein Konjunkt falsch bei B.

ii 10) Also sind alle Disjunkte von L2(a) falsch bei B.

ii 11) Also ist L2(a) falsch bei B.

i 12) Wenn in jeder Reihe von a mindestens ein Balken falsch ist bei B, dann ist L2(a) falsch bei B.

i 13) L2(a) ist wahr bei B, genau dann, wenn in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr sind bei B.

6.2 MENGEN VON BALKENTYPEN

Über die L'-Resultate der Balkentypen ist jeder (nichtleeren) Menge von Balkentypen eine Klausel zugeordnet:

α sei eine (nichtleere) Menge von Balkentypen. β sei die Menge aller wffs, die das L'-Resultat der Balken eines Elements von α sind. Dann nennen wir β die Klausel von α.

T sei ein Balkentyp und B eine Bewertung. Ist das L'-Resultat der Balken des Typs T wahr bei B, so heißt T wahr bei B, andernfalls heißt T falsch bei B.

Es gilt:

(vgl. die entsprechenden Gesetze für Klauseln, Kapitel 5.6)

(102)
In einem Paar inverser Balkentypen ist bei jeder Bewertung einer der Typen wahr und einer der Typen falsch.

(103)
α sei eine homogene Menge von Balkentypen. Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α wahr sind, und mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α falsch sind.

(104)
α und β seien homogene Mengen von Balkentypen, die nicht invers verschränkt sind. Dann ist $\alpha \cup \beta$ homogen.

(105)
α und β seien homogene Mengen von Balkentypen, die nicht invers verschränkt sind. Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α und alle Elemente von β wahr sind, und mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α und alle Elemente von β falsch sind.

(106)
α und β seien zwei homogene Mengen von Balkentypen, die kein gemeinsames Element haben. Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von α wahr und alle Elemente von β falsch sind.

6.3 EIN SEMANTISCHES ENTSCHEIDUNGSKRITERIUM FÜR DIE WOHLGEFORMTHEIT VON ANORDNUNGEN

Eine Ao a heißt semantisch orthogonal gebunden, genau dann, wenn für a das folgende gilt: Bei jeder Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist, sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr.

⇒ *Satz 109*

(<u>107</u>) >

Jede wAo ist semantisch orthogonal gebunden.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

ii 2) B sei eine Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist.

ii 3) Dann gibt es mindestens eine Kolonnenauswahl von a, deren sämtliche Balkentypen wahr sind bei B. Eine solche sei A_1.

iii 4) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, in jeder Reihe von a sei mindestens ein Balken falsch bei B.

iii 5) Dann gibt es mindestens eine Reihenauswahl von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B. Eine solche sei A_2.

iii 6) A_1 und A_2 sind homogen.

iii 7) Da alle Balkentypen von A_1 wahr sind bei B, und alle Balkentypen von A_2 falsch sind bei B, können A_1 und A_2 keinen Balkentyp gemeinsam haben.

iii 8) Also gibt es mindestens ein Paar, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl von a und einer homogenen Kolonnenauswahl von a, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben.

iii 9) Dies widerspricht der Vorgabe, daß a eine wAo ist.

ii 10) Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr bei B.

i 11) Bei jeder Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist, sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr.

i 12) Also ist a semantisch orthogonal gebunden.

(<u>108</u>) >

Jede Ao, die keine wAo ist, ist nicht semantisch orthogonal gebunden.

Beweis:

i 1) a sei eine Ao, die keine wAo ist.

i 2) Dann gibt es mindestens ein Paar, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl von a und einer homogenen Kolonnenauswahl von a, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. (A_1, A_2) sei ein solches Paar.

i 3) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Balkentypen aus A_2 wahr und alle Balkentypen aus A_1 falsch sind. B sei eine solche Bewertung.

i 4) Dann ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr bei B und in jeder Reihe von a mindestens ein Balken falsch bei B.

i 5) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist, aber in keiner Reihe von a sämtliche Balken wahr sind.

i 6) Also ist a nicht semantisch orthogonal gebunden.

Wir fassen zusammen:

(109)

Genau jede Ao, die eine wAo ist, ist semantisch orthogonal gebunden.

KAPITEL 7

ÜBERTRAGUNGS- UND LESEÄQUIVALENZ

Eine wff von AL heißt übertragungsäquivalent, genau dann, wenn sie mit jedem Leseresultat jedes ihrer Ü1-Resultate äquivalent ist.

Eine wAo von N heißt leseäquivalent, genau dann, wenn alle ihre Leseresultate untereinander äquivalent sind.

Eine wff von AL heißt Ü1-L1-äquivalent, genau dann, wenn sie mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate äquivalent ist.

Eine wAo von N heißt L1-L3-äquivalent, genau dann, wenn ihr L1-Resultat mit jedem ihrer L3-Resultate äquivalent ist.

In diesem Kapitel soll bewiesen werden, daß jede wff von AL übertragungsäquivalent ist, und daß jede wAo von N leseäquivalent ist. Damit wird gezeigt sein, daß jedes Zeichen von N eindeutig interpretiert ist.
Wir werden in einem ersten Schritt den Nachweis erbringen, daß jede wff von AL Ü1-L1-äquivalent ist, und in einem zweiten Schritt, daß alle wAon von N L1-L3-äquivalent sind. Aus diesen Ergbnissen ergibt sich dann unmittelbar das Beweisziel.

7.1 Ü1-L1-ÄQUIVALENZ

Wir werden nun beweisen, daß jede wff von AL Ü1-L1-äquivalent ist. Zunächst einige Hinweise zur Metasprache.

Metasprachliche Ausdrücke vom Typ II sind die Ausdrücke 'L1(a)', 'L2(a)' und alle Ausdrücke, die sich aus einem der beiden dadurch gewinnen lassen, daß das Zeichen 'a' durch einen passenden Ausdruck ersetzt wird.

Ein metasprachlicher Ausdruck vom Typ III ist eine Zeichenkombination, die die folgenden Bedingungen erfüllt.

1) Sie enthält mindestens einen metasprachlichen Ausdruck vom Typ II.
2) Sie kann, muß aber nicht, metasprachliche Variablen für wffs enthalten.
3) Wenn wir in jede metasprachliche Variable für eine wff eine bestimmte wff und in jede Variable für eine wAo eine bestimmte wAo einsetzen und anschließend jeden metasprachlichen Ausdruck vom Typ II durch die von ihm bezeichnete wff ersetzen, dann erhalten wir eine wff von AL.

Metasprachliche Ausdrücke vom Typ III sind in der oben beschriebenen Weise zu handhaben. Die Art ihrer Bedeutung erklärt sich aus ihrem Gebrauch.

⇒ *Satz 123*

(110)

a sei eine wAo. Dann sind ¬L1(a) und L1(D(a)) äquivalent.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.
ii 2) B sei eine Bewertung, bei der ¬L1(a) wahr ist.
ii 3) Dann ist L1(a) falsch.
ii 4) Also sind in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch.
ii 5) Zu jeder Kolonne von a gibt es in D(a) mindestens eine Reihe mit dem inversen RC-Typ.
ii 6) Also sind in mindestens einer Reihe von D(a) sämtliche Balken wahr.
ii 7) Also ist L1(D(a)) wahr bei B.
i 8) Bei jeder Bewertung, bei der ¬L1(a) wahr ist, ist auch L1(D(a)) wahr.
ii 9) B sei eine Bewertung, bei der ¬L1(a) falsch ist.
ii 10) Dann ist L1(a) wahr.
ii 11) Also ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr.
ii 12) Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr.
ii 13) Zu jeder Reihe von a gibt es in D(a) mindestens eine Kolonne mit dem inversen RC-Typ.
ii 14) Also sind in mindestens einer Kolonne von D(a) sämtliche Balken falsch.
ii 15) Also ist L1(D(a)) falsch bei B.
i 16) Bei jeder Bewertung bei der ¬L1(a) falsch ist, ist auch L1(D(a)) falsch.
i 17) Also sind ¬L1(a) und L1(D(a)) äquivalent.

(<u>111</u>)

a, d seien wAon. Dann sind L1(a)∧L1(d) und L1(W(a, d)) äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

ii 2) B sei eine Bewertung, bei der L1(a)∧L1(d) wahr ist.

ii 3) Dann sind L1(a) und auch L1(d) wahr.

ii 4) Also ist in jeder Kolonne von a und in jeder Kolonne von d mindestens ein Balken wahr.

ii 5) Da es zu jeder Kolonne von W(a, d) unter den Kolonnen von a oder d mindestens eine Kolonne mit demselben RC-Typ gibt, ist in jeder Kolonne von W(a, d) mindestens ein Balken wahr.

ii 6) Also ist W(a, d) wahr bei B.

i 7) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a)∧L1(d) wahr ist, ist auch L1(W(a, d)) wahr.

ii 8) B sei eine Bewertung bei der L1(a)∧L1(d) falsch ist.

ii 9) Dann ist mindestens eine der wffs L1(a) oder L1(d) falsch.

ii 10) Also sind in mindestens einer Kolonne von a oder in mindestens einer Kolonne von d sämtliche Balken falsch.

ii 11) Zu jeder Kolonne von a und zu jeder Kolonne von d gibt es in W(a, d) mindestens eine Kolonne mit demselben RC-Typ.

ii 12) Also sind in mindestens einer Kolonne von W(a, d) sämtliche Balken falsch.

ii 13) Also ist L1(W(a, d)) falsch bei B.

i 14) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a)∧L1(d) falsch ist, ist auch L1(W(a, d)) falsch.

i 15) Also sind L1(a)∧L1(d) und L1(W(a, d)) äquivalent.

(<u>112</u>)

a, d seien wAon. Dann sind L1(a)∨L1(d) und L1(S(a, d)) äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

ii 2) B sei eine Bewertung, bei der L1(a)∨L1(d) wahr ist.

ii 3) Dann ist mindestens eine der wffs L1(a) oder L1(d) wahr.

ii 4) Also ist in mindestens einer der wffs L1(a) oder L1(d) in jeder Kolonne mindestens ein Balken wahr.

ii 5) Da es zu jeder Kolonne von S(a, d) mindestestens eine Kolonne in a und mindestens eine Kolonne in d gibt, sodaß der RC-Typ der Kolonne von S(a, d) den RC-Typ der Kolonne von a und den RC-Typ der Kolonne von d enthält, ist in jeder Kolonne von S(a, d) mindestens ein Balken wahr.

ii 6) Also ist S(a, d) wahr bei B.

i 7) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a)∨L1(d) wahr ist, ist auch L1(S(a, d)) wahr.

ii 8) B sei eine Bewertung, bei der L1(a)∨L1(d) falsch ist.

ii 9) Dann ist L1(a) falsch und L1(d) falsch.

ii 10) Also sind in mindestens einer Kolonne von a und in mindestens einer Kolonne von d sämtliche Balken falsch.

ii 11) Da es zu jedem Paar, bestehend aus einer Kolonne von a und einer Kolonne von d, mindestens eine Kolonne in S(a, d) gibt, sodaß der RC-Typ der Kolonne von S(a, d) nur Balkentypen des RC-Typs der Kolonne von a oder des RC-Typs der Kolonne von d enthält, gibt es in S(a, d) mindestens eine Kolonne, deren sämtliche Balken falsch sind.

ii 12) Also ist S(a, d) falsch bei B.

i 13) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a)∨L1(d) falsch ist, ist auch L1(S(a, d)) falsch.

i 14) Also sind L1(a)∨L1(d) und L1(S(a, d)) äquivalent.

(<u>113</u>)

a, d seien wAon. d sei an a gebunden. Dann sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon. d sei an a gebunden.

ii 2) B sei eine Bewertung, bei der L1(a) wahr ist.

ii 3) Dann ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr.

ii 4) Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr. e(a) sei eine solche Reihe.

ii 5) e(a) ist homogen.

ii 6) Also hat e(a) mit jeder homogenen Reihenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

ii 7) Also ist in jeder homogenen Reihenauswahl von d mindestens ein Balkentyp wahr.

ii 8) In jeder inhomogenen Reihenauswahl von d ist mindestens ein Balkentyp wahr.

ii 9) Also ist in jeder Reihenauswahl von d mindestens ein Balkentyp wahr.

ii 10) Der RC-Typ jeder Kolonne von d ist eine Reihenauswahl von d.

ii 11) Also ist in jeder Kolonne von d mindestens ein Balken wahr bei B.

ii 12) Also ist L1(d) wahr bei B.

i 13) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a) wahr ist, ist auch L1(d) wahr.
ii 14) B sei eine Bewertung, bei der L1(a) falsch ist.
ii 15) Dann sind in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch.
ii 16) f(a) sei eine solche Kolonne.
ii 17) f(a) ist homogen.
ii 18) Also hat f(a) mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.
ii 19) Also ist in jeder homogenen Kolonnenauswahl von d mindestens ein Balkentyp falsch.
ii 20) In jeder inhomogenen Kolonnenauswahl von d ist mindestens ein Balkentyp falsch.
ii 21) Also ist in jeder Kolonnenauswahl von d mindestens ein Balkentyp falsch.
iii 22) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, in jeder Kolonne von d sei mindestens ein Balken wahr.
iii 23) Dann gibt es mindestens eine Kolonnenauswahl, deren sämtliche Balkentypen wahr sind.
iii 24) Dies ergibt einen Widerspruch.
ii 25) Also sind in mindestens einer Kolonne von d sämtliche Balken falsch.
ii 26) Also ist L1(d) falsch bei B.
i 27) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a) falsch ist, ist auch L1(d) falsch.
i 28) Also sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

(114)

a, d seien wAon. d soll aus a durch einen Anwendungschritt von K auf a erzeugt werden können.

Dann sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon. d soll aus a durch einen Anwendungschritt von K auf a erzeugt werden können.
i 2) Dann ist d an a gebunden.
i 3) Also sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

(115)

a, d seien wAon. d soll aus a durch einen Anwendungschritt von E auf a erzeugt werden können.

Dann sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon. d soll aus a durch einen Anwendungschritt von E auf a erzeugt werden können.

i 2) Dann ist d an a gebunden.

i 3) Also sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

(116)

a, d seien wAon. d soll aus a durch einen Anwendungschritt von T auf a erzeugt werden können.

Dann sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon. d soll aus a durch einen Anwendungschritt von T auf a erzeugt werden können.

i 2) Dann ist d an a gebunden.

i 3) Also sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

(117)

φ sei eine Atomformel von AL. Dann ist φ Ü1-L1-äquivalent.

Beweis:

i 1) φ sei eine Atomformel von AL.

i 2) a sei die Ausgangsanordnung in jener Farbe, die dem Satzbuchstaben zugeordnet ist, in dessen Vorkommnis φ besteht.

i 3) Dann ist L1(a) φ.

ii 4) d sei ein Ü1-Resultat von φ.

ii 5) Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iii 6) d ist a.

iii 7) Dann ist L1(d) φ.

iii 8) Also sind φ und L1(d) äquivalent.

~ Fall B:

iii 9) d ist nicht a, aber E, K, T reichen aus, um d schrittweise aus a zu erzeugen.

iii 10) Dann sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

iii 11) L1(a) ist φ.

iii 12) Also sind φ und L1(d) äquivalent.

ii 13) Also sind φ und L1(d) äquivalent.

i 14) Also ist die wff φ äquivalent mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate.

i 15) Also ist φ Ü1-L1-äquivalent.

(118)

φ sei eine wff. Wenn φ Ü1-L1 äquivalent ist, dann ist auch ¬φ Ü1-L1 äquivalent.

Beweis:

i 1) φ sei eine wff.

ii 2) φ sei Ü1-L1-äquivalent.

iii 3) a sei ein Ü1-Resultat von ¬φ.

iii 4) Dann gibt es mindestens eine wAo d, sodaß zugleich gilt:

a) d ist ein Ü1-Resultat von φ.

b) a ist entweder D(d) oder a ist nicht D(d), aber K, E, T reichen aus, um a schrittweise aus D(d) zu erzeugen.

d sei eine solche wAo.

iii 5) φ und L1(d) sind äquivalent.

iii 6) Also sind auch ¬φ und ¬L1(d) äquivalent.

iii 7) ¬L1(d) und L1(D(d)) sind äquivalent.

iii 8) Also sind ¬φ und L1(D(d)) äquivalent.

iii 9) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iv 10) a ist D(d).

iv 11) Dann sind ¬φ und L1(a) äquivalent.

~ Fall B:

iv 12) a ist nicht D(d), aber K, E, T reichen aus, um a schrittweise aus D(d) zu erzeugen.

iv 13) Dann sind L1(D(d)) und L1(a) äquivalent.

iv 14) ¬φ und L1(D(d)) sind äquivalent.

iv 15) Also sind ¬φ und L1(a) äquivalent.

iii 16) Also sind ¬φ und L1(a) äquivalent.

ii 17) Also ist die wff ¬φ äquivalent mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate.

ii 18) Also ist ¬φ Ü1-L1-äquivalent.

i 19) Wenn φ Ü1-L1-äquivalent ist, dann ist auch ¬φ Ü1-L1-äquivalent.

(119)

φ, ψ seien wffs. Wenn φ und ψ beide Ü1-L1-äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\wedge\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

Beweis:

i 1) φ, ψ seien wffs.

ii 2) φ und ψ seien beide Ü1-L1-äquivalent.

iii 3) a sei ein Ü1-Resultat von $\varphi\wedge\psi$.

iii 4) Dann gibt es mindestens ein Paar wAon (d, e), sodaß zugleich gilt:

a) d ist ein Ü1-Resultat von φ.

b) e ist ein Ü1-Resultat von ψ.

c) a ist entweder W(d, e) oder a ist nicht W(d, e), aber K, E, T reichen aus, um a schrittweise aus W(d, e) zu erzeugen.

(d, e) sei ein solches Paar wAon.

iii 5) Dann sind φ und L1(d) äquivalent.

iii 6) Und es sind ψ und L1(e) äquivalent.

iii 7) Also sind auch $\varphi\wedge\psi$ und L1(d)$\wedge$L1(e) äquivalent.

iii 8) L1(d)$\wedge$L1(e) und L1(W(d, e)) sind äquivalent.

iii 9) Also sind $\varphi\wedge\psi$ und L1(W(d, e)) äquivalent.

iii 10) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iv 11) a ist W(d, e).

iv 12) Dann sind $\varphi\wedge\psi$ und L1(a) äquivalent.

~ Fall B:

iv 13) a ist nicht W(d, e), aber K, E, T reichen aus, um a schrittweise aus W(d, e) zu erzeugen.

iv 14) Dann sind L1(W(d, e)) und L1(a) äquivalent.

iv 15) $\varphi\wedge\psi$ und L1(W(d, e)) sind äquivalent.

iv 16) Also sind $\varphi\wedge\psi$ und L1(a) äquivalent.

iii 17) Also sind $\varphi\wedge\psi$ und L1(a) äquivalent.

ii 18) Also ist die wff $\varphi\wedge\psi$ äquivalent mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate.

ii 19) Also ist $\varphi\wedge\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

i 20) Wenn φ und ψ beide Ü1-L1 äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\wedge\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

(120)

φ, ψ seien wffs. Wenn φ und ψ beide Ü1-L1-äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\vee\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

Beweis:

i 1) φ, ψ seien wffs.

ii 2) φ und ψ seien beide Ü1-L1-äquivalent.

iii 3) a sei ein Ü1-Resultat von $\varphi\vee\psi$.

iii 4) Dann gibt es mindestens ein Paar wAon (d, e), sodaß zugleich gilt:

- a) d ist ein Ü1-Resultat von φ.
- b) e ist ein Ü1-Resultat von ψ.
- c) a ist entweder S(d, e) oder a ist nicht S(d, e), aber K, E, T reichen aus, um a schrittweise aus S(d, e) zu erzeugen.

(d, e) sei ein solches Paar wAon.

iii 5) Dann sind φ und L1(d) äquivalent.

iii 6) Und es sind ψ und L1(e) äquivalent.

iii 7) Also sind auch $\varphi\vee\psi$ und L1(d)$\vee$L1(e) äquivalent.

iii 8) L1(d)$\vee$L1(e) und L1(S(d, e)) sind äquivalent.

iii 9) Also sind $\varphi\vee\psi$ und L1(S(d, e)) äquivalent.

iii 10) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iv 11) a ist S(d, e).

iv 12) Dann sind $\varphi\vee\psi$ und L1(a) äquivalent.

~ Fall B:

iv 13) a ist nicht S(d, e), aber K, E, T reichen aus, um a schrittweise aus S(d, e) zu erzeugen.

iv 14) Dann sind L1(S(d, e)) und L1(a) äquivalent.

iv 15) $\varphi\vee\psi$ und L1(S(d, e)) sind äquivalent.

iv 16) Also sind $\varphi\vee\psi$ und L1(a) äquivalent.

iii 17) Also sind $\varphi\vee\psi$ und L1(a) äquivalent.

ii 18) Also ist die wff $\varphi\vee\psi$ äquivalent mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate.

ii 19) Also ist $\varphi\vee\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

i 20) Wenn φ und ψ beide Ü1-L1 äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\vee\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

(<u>121</u>)

φ, ψ seien wffs. Wenn φ und ψ beide Ü1-L1-äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\rightarrow\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

Beweis:

i	1)	φ, ψ seien wffs.
ii	2)	φ und ψ seien beide Ü1-L1-äquivalent.
ii	3)	Da φ Ü1-L1-äquivalent ist, ist auch $\neg\varphi$ Ü1-L1-äquivalent.
ii	4)	Da $\neg\varphi$ Ü1-L1-äquivalent ist und ψ Ü1-L1-äquivalent ist, ist auch $\neg\varphi\vee\psi$ Ü1-L1-äquivalent.
iii	5)	a sei ein Ü1-Resultat von $\varphi\rightarrow\psi$.
iii	6)	Dann ist a ein Ü1-Resultat von $\neg\varphi\vee\psi$.
iii	7)	Also sind $\neg\varphi\vee\psi$ und L1(a) äquivalent.
iii	8)	$\varphi\rightarrow\psi$ und $\neg\varphi\vee\psi$ sind äquivalent.
iii	9)	Also sind $\varphi\rightarrow\psi$ und L1(a) äquivalent.
ii	10)	Also ist die wff $\varphi\rightarrow\psi$ äquivalent mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate.
ii	11)	Also ist $\varphi\rightarrow\psi$ Ü1-L1-äquivalent.
i	12)	Wenn φ und ψ beide Ü1-L1-äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\rightarrow\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

(<u>122</u>)

φ, ψ seien wffs. Wenn φ und ψ beide Ü1-L1-äquvialent sind, dann ist auch $\varphi\equiv\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

Beweis:

i	1)	φ, ψ seien wffs.
ii	2)	φ und ψ seien beide Ü1-L1-äquivalent.
ii	3)	Dann ist auch $\varphi\wedge\psi$ Ü1-L1-äquivalent.
ii	4)	Da φ Ü1-L1-äquivalent ist, ist auch $\neg\varphi$ Ü1-L1-äquivalent.
ii	5)	Da ψ Ü1-L1-äquivalent ist, ist auch $\neg\psi$ Ü1-L1-äquivalent.
ii	6)	Da $\neg\varphi$ Ü1-L1-äquivalent ist und $\neg\psi$ Ü1-L1-äquivalent ist, ist auch $\neg\varphi\wedge\neg\psi$ Ü1-L1-äquivalent.
ii	7)	Da $\varphi\wedge\psi$ Ü1-L1-äquivalent ist und $\neg\varphi\wedge\neg\psi$ Ü1-L1-äquivalent ist, ist auch $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ Ü1-L1-äquivalent.
iii	8)	a sei ein Ü1-Resultat von $\varphi\equiv\psi$.
iii	9)	Dann ist a ein Ü1-Resultat von $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$.

iii 10) Also sind $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ und L1(a) äquivalent.

iii 11) $\varphi\equiv\psi$ und $(\varphi\wedge\psi)\vee(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$ sind äquivalent.

iii 12) Also sind $\varphi\equiv\psi$ und L1(a) äquivalent.

ii 13) Also ist die wff $\varphi\equiv\psi$ äquivalent mit dem L1-Resultat jedes ihrer Ü1-Resultate.

ii 14) Also ist $\varphi\equiv\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

i 15) Wenn φ und ψ beide Ü1-L1-äquivalent sind, dann ist auch $\varphi\equiv\psi$ Ü1-L1-äquivalent.

(123)
Jede wff von AL ist Ü1-L1-äquivalent.
Beweis:
Aufgrund der Formregeln von AL ist jede wff entweder eine Atomformel oder sie kann ausgehend von Atomformeln sukzessive durch Anwendung der Verknüpfungsregeln (AL-FR2 bis AL-FR6) erzeugt werden. Alle Atomformeln sind Ü1-L1-äquivalent. Jede der Verknüpfungsregeln erhält die Eigenschaft der Ü1-L1-Äquivalenz. Also sind alle wffs Ü1-L1-äquivalent.

7.2. L1-L3-ÄQUIVALENZ

Wir werden nun beweisen, daß jede wAo von N L1-L3-äquivalent ist. Zusammen mit Satz 123 ergibt sich daraus unmittelbar, daß jede wff von AL übertragungsäquivalent und jede wAo von N leseäquivalent ist.

⇒ *Satz 134*

Es sei für das folgende a eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein WL0-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Längsposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein WL1-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Längsposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein WQ0-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Querposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein WQ1-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Querposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein FL0-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Längsposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein FL1-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Längsposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein FQ0-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Querposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

Ein Segment d(a) bei SV(a) heißt ein FQ1-Segment bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn gilt:

1) Durch d(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B.
2) Die Position für d(a) bei DV(SV(a)) ist eine Querposition.
3) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

Wir definieren nun zu DV(SV(a)) und B acht Mengen von Segmenten bei SV(a).

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge WL0W bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein WL0-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind wahr bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge WL1F bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein WL1-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind falsch bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge WQ0F bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein WQ0-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind falsch bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge WQ1W bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein WQ1-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind wahr bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge FL0F bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein FL0-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind falsch bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge FL1W bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein FL1-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind wahr bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge FQ0W bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein FQ0-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind wahr bei B.

Ein Segment d(a) bei SV(a) gehört zur Menge FQ1F bei DV(SV(a)) und B, genau dann, wenn d(a) mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1) d(a) ist kein FQ1-Segment bei DV(SV(a)) und B.
2) Alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) sind falsch bei B.

(<u>124</u>)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und d(a) ein Balken von a. Wenn die Position bei DV(SV(a)) für dasjenige Basissegment bei SV(a), das d(a) enthält, eine Längsposition ist, dann ist das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) mit dem L'-Resultat von d(a) identisch.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a und DV(SV(a)) eine DV für SV(a).

i 2) d(a) sei ein Balken von a.

i 3) Px sei die Position für dasjenige Basissegment bei SV(a), das d(a) enthält.

ii 4) Px sei eine Längsposition.

ii 5) Dann haben d(a) und corr(d(a), Px) denselben Balkentyp.

ii 6) Also sind das L'-Resultat von d(a) und das L'-Resultat von corr(d(a), Px) identisch.

ii 7) Das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) ist das L'-Resultat von corr(d(a), Px).

ii 8) Also ist das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) mit dem L'-Resultat von d(a) identisch.

i 9) Wenn Px eine Längsposition ist, dann ist das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) mit dem L'-Resultat von d(a) identisch.

(<u>125</u>)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und d(a) ein Balken von a. Wenn die Position bei DV(SV(a)) für dasjenige Basissegment bei SV(a), das d(a) enthält, eine Querposition ist, dann ist das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) die Umkehrung des L'-Resultats von d(a).

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a und DV(SV(a)) eine DV für SV(a).

i 2) d(a) sei ein Balken von a.

i 3) Px sei die Position für dasjenige Basissegment bei SV(a), das d(a) enthält.

ii 4) Px sei eine Querposition.

ii 5) Dann sind die Balkentypen von d(a) und corr(d(a), Px) zueinander invers.

ii 6) Also ist das L'-Resultat von corr(d(a), Px) die Umkehrung des L'-Resultats von d(a).

ii 7) Das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) ist das L'-Resultat von corr(d(a), Px).

ii 8) Also ist das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) die Umkehrung des L'-Resultats von d(a).

i 9) Wenn Px eine Querposition ist, dann ist das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)) die Umkehrung des L'-Resultats von d(a).

(<u>126</u>)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a)) und B eine Bewertung. d(a) sei ein Balken von a und zugleich ein Basissegment bei SV(a). Dann gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) d(a) sei ein Balken von a und zugleich ein Basissegment bei SV(a).

i 3) Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)).

i 4) n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

ii 5) d(a) sei ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 6) Es gibt nur ein einziges L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)). Dieses sei φ.

iii 7) ψ sei das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iii 8) Sämtliche Balken jener Reihe von a, auf der d(a) liegt, sind wahr bei B.

iii 9) Also ist das L'-Resultat von d(a) wahr bei B.

iii 10) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist ψ identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) von d(a).

iii 11) Also ist ψ wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 12) φ ist die n-fache Negation von ψ.

iii 13) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit ψ ($\neg\psi$/ ψ/ $\neg\psi$).

iii 14) Also ist φ wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 15) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 16) Wenn d(a) ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 17) Also ist d(a) ein Element der Menge WL0W (WL1F/ WQ0F/ WQ1W) bei DV(SV(a)) und B.

ii 18) d(a) sei ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 19) Es gibt nur ein einziges L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)). Dieses sei φ.

iii 20) ψ sei das L3B-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iii 21) Sämtliche Balken jener Kolonne von a, auf der d(a) liegt, sind falsch bei B.

iii 22) Also ist das L'-Resultat von d(a) falsch bei B.

iii 23) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist ψ identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) von d(a).

iii 24) Also ist ψ falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 25) φ ist die n-fache Negation von ψ.

iii 26) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit ψ ($\neg\psi$/ ψ/ $\neg\psi$).

iii 27) Also ist φ falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 28) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 29) Wenn d(a) ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 30) Also ist d(a) ein Element der Menge FL0F (FL1W/ FQ0W/ FQ1F) bei DV(SV(a)) und B.

i 31) Also gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(127)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a)) und B eine Bewertung. d(a) sei ein waagrecht linearer AoT von a und ein Basissegment bei SV(a). Dann gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) d(a) sei ein waagrecht linearer AoT von a und ein Basissegment bei SV(a).

i 3) Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)).

i 4) n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

ii 5) d(a) sei ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 6) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iii 7) Sämtliche Balken derjenigen Reihe von a, die durch d(a) geht, sind wahr bei B.

iii 8) Also ist das L'-Resultat jedes Balkens von d(a) wahr bei B.

iii 9) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) dieses Balkens.

iii 10) Also ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 11) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) ein waagrecht linearer (waagrecht linearer/ senkrecht linearer/ senkrecht linearer) AoT von corr(a, Px).

iii 12) Also ist φ die n-fache Negation einer Konjunktion $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ (Konjunktion $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$), sodaß jedes der Konjunkte (Konjunkte/ Disjunkte/ Disjunkte) von $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ ($\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_m$) das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines Balkens von d(a) ist.

iii 13) Alle Konjunkte (Konjunkte/ Disjunkte/ Disjunkte) von $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) sind wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 14) Also ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 15) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m)$/ $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\vee...\vee\varphi_m)$).

iii 16) Also ist φ wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 17) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 18) Wenn d(a) ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 19) Also ist d(a) ein Element der Menge WL0W (WL1F/ WQ0F/ WQ1W) bei DV(SV(a)) und B.

ii 20) d(a) sei ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 21) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iii 22) Durch d(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B.

iii 23) Also ist das L'-Resultat mindestens eines Balkens von d(a) falsch bei B.

iii 24) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) dieses Balkens.

iii 25) Also ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines Balkens von d(a) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 26) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) ein waagrecht linearer (waagrecht linearer/ senkrecht linearer/ senkrecht linearer) AoT von corr(a, Px).

iii 27) Also ist φ die n-fache Negation einer Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ (Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$), sodaß es zu jedem Balken von d(a) in $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) mindestens ein Konjunkt (Konjunkt/ Disjunkt/ Disjunkt) gibt, welches das L3B-Resultat dieses Balkens bei DV(SV(a)) ist.

iii 28) Mindestens ein Konjunkt (Konjunkt/ Disjunkt/ Disjunkt) von $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) ist falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 29) Also ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 30) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m)$/ $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\vee...\vee\varphi_m)$).

iii 31) Also ist φ falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 32) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 33) Wenn d(a) ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 34) Also ist d(a) ein Element der Menge FL0F (FL1W/ FQ0W/ FQ1F) bei DV(SV(a)) und B.

i 35) Also gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(<u>128</u>)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a)) und B eine Bewertung. d(a) sei ein senkrecht linearer AoT von a und ein Basissegment bei SV(a). Dann gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) d(a) sei ein senkrecht linearer AoT von a und ein Basissegment bei SV(a).

i 3) Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)).

i 4) n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

ii 5) d(a) sei ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 6) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iii 7) Durch d(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B.

iii 8) Also ist das L'-Resultat mindestens eines Balkens von d(a) wahr bei B.

iii 9) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) dieses Balkens.

iii 10) Also ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines Balkens von d(a) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 11) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) ein senkrecht linearer (senkrecht linearer/ waagrecht linearer/ waagrecht linearer) AoT von corr(a, Px).

iii 12) Also ist φ die n-fache Negation einer Disjunktion $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ (Disjunktion $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$), sodaß es zu jedem Balken von d(a) in $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ ($\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$) mindestens ein Disjunkt (Disjunkt/ Konjunkt/ Konjunkt) gibt, welches das L3B-Resultat dieses Balkens bei DV(SV(a)) ist.

iii 13) Mindestens ein Disjunkt (Disjunkt/ Konjunkt/ Konjunkt) von $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ ($\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$) ist wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 14) Also ist $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ ($\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 15) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m)$/ $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m)$).

iii 16) Also ist φ wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 17) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 18) Wenn d(a) ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 19) Also ist d(a) ein Element der Menge WL0W (WL1F/ WQ0F/ WQ1W) bei DV(SV(a)) und B.

ii 20) d(a) sei ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 21) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iii 22) Sämtliche Balken derjenigen Kolonne von a, die durch d(a) geht, sind falsch bei B.

iii 23) Also ist das L'-Resultat jedes Balkens von d(a) falsch bei B.

iii 24) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) dieses Balkens.

iii 25) Also ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 26) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) ein senkrecht linearer (senkrecht linearer/ waagrecht linearer/ waagrecht linearer) AoT von corr(a, Px).

iii 27) Also ist φ die n-fache Negation einer Disjunktion $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ (Disjunktion $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$), sodaß jedes der Disjunkte (Disjunkte/ Konjunkte/ Konjunkte) von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$) das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines Balkens von d(a) ist.

iii 28) Alle Disjunkte (Disjunkte/ Konjunkte/ Konjunkte) von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$) sind falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 29) Also ist $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 30) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\neg(\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m)$/ $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m)$).

iii 31) Also ist φ falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 32) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 33) Wenn d(a) ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 34) Also ist d(a) ein Element der Menge FL0F (FL1W/ FQ0W/ FQ1F) bei DV(SV(a)) und B.

i 35) Also gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(129)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a)) und B eine Bewertung. d(a) sei ein flächiger AoT von a und ein Basissegment bei SV(a). Dann gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) d(a) sei ein flächiger AoT von a und ein Basissegment bei SV(a).

i 3) Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)).

i 4) n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

ii 5) d(a) sei ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 6) Es gibt nur ein einziges L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)). Dieses sei φ.

iii 7) Durch d(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B.

iii 8) Also ist das L'-Resultat mindestens eines Balkens von d(a) wahr bei B.

iii 9) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) von d(a).

iii 10) Also ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines Balkens von d(a) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 11) Alle Balken von d(a) haben dasselbe L3B-Resultat bei DV(SV(a)) dieses sei ψ.

iii 12) ψ ist wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iii 13) φ ist die n-fache Negation von ψ.

iii 14) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit ψ (¬ψ/ ψ/ ¬ψ).

iii 15) Also ist φ wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 16) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 17) Wenn d(a) ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

i 18) Also ist d(a) ein Element der Menge WL0W (WL1F/ WQ0F/ WQ1W) bei DV(SV(a)) und B.

ii 19) d(a) sei ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iii 20) Es gibt nur ein einziges L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)). Dieses sei φ.

iii 21) Durch d(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B.

iii 22) Also ist das L'-Resultat mindestens eines Balkens von d(a) falsch bei B.

iii 23) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) jedes Balkens von d(a) identisch mit dem (identisch mit dem/ die Umkehrung des/ die Umkehrung des) L'-Resultat(s) von d(a).

iii 24) Also ist das L3B-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines Balkens von d(a) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 25) Alle Balken von d(a) haben dasselbe L3B-Resultat bei DV(SV(a)), dieses sei ψ.

iii 26) ψ ist falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iii 27) φ ist die n-fache Negation von ψ.

iii 28) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit ψ ($\neg\psi$/ ψ/ $\neg\psi$).

iii 29) Also ist φ falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 30) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 31) Wenn d(a) ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

i 32) Also ist d(a) ein Element der Menge FL0F (FL1W/ FQ0W/ FQ1F) bei DV(SV(a)) und B.

i 33) Also gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(<u>130</u>)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung. d(a) sei eine waagrechte Segmentfolge bei SV(a). Wenn jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehört bei DV(SV(a)) und B, dann gehört auch d(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) d(a) sei eine waagrechte Segmentfolge bei SV(a).

i 3) Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)).

i 4) n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

ii 5) Jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) soll zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehören bei DV(SV(a)) und B.

iii 6) d(a) sei ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iv 7) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

v 8) e(a) sei ein direktes Segment von d(a) bei SV(a).

v 9) Dann geht mindestens eine Reihe von a durch e(a) deren sämtliche Balken wahr sind bei B.

v 10) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

vi 11) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

vi 12) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) ebenfalls eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition).

vi 13) Also ist e(a) ein WL0-Segment (WL0-Segment/ WQ0-Segment/ WQ0-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

vi 14) Da e(a) zur Menge WL0W (WL0W/ WQ0F/ WQ0F) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

~ Fall B:

vi 15) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

vi 16) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) eine Querposition (Querposition/ Längsposition/ Längsposition).

vi 17) Also ist e(a) ein WQ1-Segment (WQ1-Segment/ WL1-Segment/ WL1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

vi 18) Da e(a) zur Menge WQ1W (WQ1W/ WL1F/ WL1F) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

v 19) Alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) sind wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 20) Alle L3S-Resultate bei DV(SV(a)) aller direkten Segmente von d(a) bei SV(a) sind wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 21) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) eine waagrechte Segmentfolge (waagrechte Segmentfolge/ senkrechte Segmentfolge/ senkrechte Segmentfolge) bei corr(SV(a), Px).

iv 22) Also ist φ die n-fache Negation einer Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ (Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$), sodaß jedes Konjunkt (Konjunkt/ Disjunkt/ Disjunkt) von $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines direkten Segments von d(a) bei SV(a) ist.

iv 23) Alle Konjunkte (Konjunkte/ Disjunkte/ Disjunkte) von $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) sind wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 24) Also ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 25) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m)$/ $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\vee...\vee\varphi_m)$).

iv 26) Also ist φ wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

iii 27) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 28) Wenn d(a) ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 29) Also ist d(a) ein Element der Menge WL0W (WL1F/ WQ0F/ WQ1W) bei DV(SV(a)) und B.

iii 30) d(a) sei ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iv 31) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iv 32) Durch mindestens eines der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) geht mindestens eine Kolonne von a, deren sämtliche Balken falsch sind bei B. e(a) sei ein solches direktes Segment von d(a) bei SV(a).

iv 33) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

v 34) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

v 35) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) ebenfalls eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition).

v 36) Also ist e(a) ein FL0-Segment (FL0-Segment/ FQ0-Segment/ FQ0-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

v 37) Da e(a) zur Menge FL0F (FL0F/ FQ0W/ FQ0W) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

~ Fall B:

v 38) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

v 39) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) eine Querposition (Querposition/ Längsposition/ Längsposition).

v 40) Also ist e(a) ein FQ1-Segment (FQ1-Segment/ FL1-Segment/ FL1-Segment) bei DV(SV(a) und B.

v 41) Da e(a) zur Menge FQ1F (FQ1F/ FL1W/ FL1W) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 42) Alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) sind falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 43) Also gibt es mindestens ein direktes Segment von d(a) bei SV(a), dessen sämtliche L3S-Resultate bei DV(SV(a)) falsch (falsch/ wahr/ wahr) sind bei B.

iv 44) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) eine waagrechte Segmentfolge (waagrechte Segmentfolge/ senkrechte Segmentfolge/ senkrechte Segmentfolge) bei corr(SV(a), Px).

iv 45) Also ist φ die n-fache Negation einer Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ (Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$), sodaß es zu jedem der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) in $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) mindestens ein Konjunkt (Konjunkt/ Disjunkt/ Disjunkt) gibt, das ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Segments ist.

iv 46) Mindestens ein Konjunkt (Konjunkt/ Disjunkt/ Disjunkt) von $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) ist falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 47) Also ist $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 48) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m)$/ $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\vee...\vee\varphi_m)$).

iv 49) Also ist φ falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

iii 50) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 51) Wenn d(a) ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 52) Also ist d(a) ein Element der Menge FL0F (FL1W/ FQ0W/ FQ1F) bei DV(SV(a)) und B.

ii 53) Also gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

i 54) Wenn jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehört bei DV(SV(a)) und B, dann gehört auch d(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(131)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung. d(a) sei eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a). Wenn jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehört bei DV(SV(a)) und B, dann gehört auch d(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) d(a) sei eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a).

i 3) Px sei die Position für d(a) bei DV(SV(a)).

i 4) n sei die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)).

ii 5) Jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) soll zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehören bei DV(SV(a)) und B.

iii 6) d(a) sei ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iv 7) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

iv 8) Durch mindestens eines der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) geht mindestens eine Reihe von a, deren sämtliche Balken wahr sind bei B. e(a) sei ein solches direktes Segment von d(a) bei SV(a).

iv 9) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

v 10) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

v 11) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) ebenfalls eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition).

v 12) Also ist e(a) ein WL0-Segment (WL0-Segment/ WQ0-Segment/ WQ0-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

v 13) Da e(a) zur Menge WL0W (WL0W/ WQ0F/ WQ0F) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

~ Fall B:

v 14) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

v 15) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) eine Querposition (Querposition/ Längsposition/ Längsposition).

v 16) Also ist e(a) ein WQ1-Segment (WQ1-Segment/ WL1-Segment/ WL1-Segment) bei DV(SV(a) und B.

v 17) Da e(a) zur Menge WQ1W (WQ1W/ WL1F/ WL1F) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 18) Alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) sind wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 19) Also gibt es mindestens ein direktes Segment von d(a) bei SV(a), dessen sämtliche L3S-Resultate bei DV(SV(a)) wahr (wahr/ falsch/ falsch) sind bei B.

iv 20) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) eine senkrechte Segmentfolge (senkrechte Segmentfolge/ waagrechte Segmentfolge/ waagrechte Segmentfolge) bei corr(SV(a), Px).

iv 21) Also ist φ die n-fache Negation einer Disjunktion $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ (Disjunktion $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$), sodaß es zu jedem der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) in $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$) mindestens ein Disjunkt (Disjunkt/ Konjunkt/ Konjunkt) gibt, das ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) dieses Segments ist.

iv 22) Mindestens ein Disjunkt (Disjunkt/ Konjunkt/ Konjunkt) von $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$) ist wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 23) Also ist $\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ ($\varphi_1 \vee ... \vee \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ / $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$) wahr (wahr/ falsch/ falsch) bei B.

iv 24) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\vee\ldots\vee\varphi_m)$/ $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m)$).

iv 25) Also ist φ wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

iii 26) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 27) Wenn d(a) ein WL0-Segment (WL1-Segment/ WQ0-Segment/ WQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr (falsch/ falsch/ wahr) bei B.

ii 28) Also ist d(a) ein Element der Menge WL0W (WL1F/ WQ0F/ WQ1W) bei DV(SV(a)) und B.

iii 29) d(a) sei ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

iv 30) φ sei ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).

v 31) e(a) sei ein direktes Segment von d(a) bei SV(a).

v 32) Dann geht mindestens eine Kolonne von a durch e(a) deren sämtliche Balken falsch sind bei B.

v 33) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

vi 34) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

vi 35) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) ebenfalls eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition).

vi 36) Also ist e(a) ein FL0-Segment (FL0-Segment/ FQ0-Segment/ FQ0-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

vi 37) Da e(a) zur Menge FL0F (FL0F/ FQ0W/ FQ0W) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

~ Fall B:

vi 38) Die Drehlänge von e(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.

vi 39) Da die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist die Position für e(a) bei DV(SV(a)) eine Querposition (Querposition/ Längsposition/ Längsposition).

vi 40) Also ist e(a) ein FQ1-Segment (FQ1-Segment/ FL1-Segment/ FL1-Segment) bei DV(SV(a)) und B.

vi 41) Da e(a) zur Menge FQ1F (FQ1F/ FL1W/ FL1W) gehört bei DV(SV(a)) und B, sind alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

v 42) Alle L3S-Resultate von e(a) bei DV(SV(a)) sind falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 43) Alle L3S-Resultate bei DV(SV(a)) aller direkten Segmente von d(a) bei SV(a) sind falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 44) Da Px eine Längsposition (Längsposition/ Querposition/ Querposition) ist, ist corr(d(a), Px) eine senkrechte Segmentfolge (senkrechte Segmentfolge/ waagrechte Segmentfolge/ waagrechte Segmentfolge) bei corr(SV(a), Px).

iv 45) Also ist φ die n-fache Negation einer Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ (Disjunktion $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / Konjunktion $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$), sodaß jedes Disjunkt (Disjunkt/ Konjunkt/ Konjunkt) von $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ ($\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$) ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) mindestens eines direkten Segments von d(a) bei SV(a) ist.

iv 46) Alle Disjunkte (Disjunkte/ Konjunkte/ Konjunkte) von $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ ($\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$) sind falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 47) Also ist $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ ($\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$) falsch (falsch/ wahr/ wahr) bei B.

iv 48) Da n 0 oder gerade (ungerade/ 0 oder gerade/ ungerade) ist, ist φ äquivalent mit $\varphi_1\vee...\vee\varphi_m$ ($\neg(\varphi_1\vee...\vee\varphi_m)$/ $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m$ / $\neg(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_m)$).

iv 49) Also ist φ falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

iii 50) Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 51) Wenn d(a) ein FL0-Segment (FL1-Segment/ FQ0-Segment/ FQ1-Segment) ist bei DV(SV(a)) und B, dann sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch (wahr/ wahr/ falsch) bei B.

ii 52) Also ist d(a) ein Element der Menge FL0F (FL1W/ FQ0W/ FQ1F) bei DV(SV(a)) und B.

ii 53) Also gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

i 54) Wenn jedes der direkten Segmente von d(a) bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehört bei DV(SV(a)) und B, dann gehört auch d(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(132)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung. Dann gehört jedes Segment bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und B eine Bewertung.

i 2) n sei die höchste Segmentierungsstufe bei SV(a).

i 3) Jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe n bei SV(a) ist ein Basissegment bei SV(a).

i 4) Also gehört jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe n bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

i 5) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A (zu 5):

ii 6) n ist gleich 0.

ii 7) Dann haben alle Segmente bei SV(a) die Segmentierungsstufe n bei SV(a).

ii 8) Also gehört jedes Segment bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

~ Fall B (zu 5):

ii 9) n ist größer als 0.

iii 10) u sei eine ganze Zahl ≥ 1 und $\leq$ n.

iv 11) Jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe u bei SV(a) soll zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehören bei DV(SV(a)) und B.

v 12) d(a) sei ein Segment bei SV(a) der Stufe (u-1) bei SV(a).

v 13) Dann liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A (zu 13):

vi 14) d(a) ist ein Basissegment bei SV(a).

vi 15) Dann gehört d(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

~ Fall B (zu 13):

vi 16) d(a) ist eine waagrechte oder eine senkrechte Segmentfolge bei SV(a).

vi 17) Dann haben die direkten Segmente von d(a) bei SV(a) die Segmentierungsstufe u bei SV(a).

vi 18) Also gehört jedes direkte Segment von d(a) bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

vi 19) Also gehört auch d(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

v 20) Also gehört d(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

iv 21) Also gehört jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe (u-1) bei SV(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

iii 22) Wenn jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe u bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehört bei DV(SV(a)) und B, dann gehört auch jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe u-1 bei SV(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

ii 23) Für jede Segmentierungsstufe u($1 \leq u \leq n$) gilt: Wenn jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe u bei SV(a) zu jeder der acht Mengen WL0W bis FQ1F gehört bei DV(SV(a)) und B, dann gehört auch jedes Segment bei SV(a) der Segmentierungsstufe (u-1) bei SV(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

ii 24) Also gehört jedes Segment bei SV(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

i 25) Also gehört jedes Segment bei SV(a) zu jeder der Mengen WL0W bis FQ1F bei DV(SV(a)) und B.

(<u>133</u>)

a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a, DV(SV(a)) eine DV für SV(a) und φ ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) des mit a identischen AoTs von a. Dann sind L1(a) und φ äquivalent.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, SV(a) eine SV für a und DV(SV(a)) eine DV für SV(a).

i 2) d(a) sei der mit a identische AoT von a.

i 3) φ sei ein L3S-Resultat von d(a).

ii 4) B sei eine Bewertung, bei der L1(a) wahr ist.

ii 5) Dann ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr bei B.

ii 6) Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr bei B.

ii 7) Es liegt einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iii 8) Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.

iii 9) Dann ist die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition.

iii 10) Also ist d(a) ein WL0-Segment bei DV(SV(a)) und B.

iii	11)	d(a) gehört zur Menge WL0W bei DV(SV(a)) und B.
iii	12)	Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr bei B.
~		Fall B:
iii	13)	Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.
iii	14)	Dann ist die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Querposition.
iii	15)	Also ist d(a) ein WQ1-Segment bei DV(SV(a)) und B.
iii	16)	d(a) gehört zur Menge WQ1W bei DV(SV(a)) und B.
iii	17)	Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr bei B.
ii	18)	Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) wahr bei B.
ii	19)	φ ist ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).
ii	20)	Also ist φ wahr bei B.
i	21)	Bei jeder Bewertung, bei der L1 wahr ist, ist auch φ wahr.
ii	22)	B sei eine Bewertung, bei der L1(a) falsch ist.
ii	23)	Dann sind in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch bei B.
ii	24)	Es liegt einer der folgenden Fälle vor.
		Fall A:
iii	25)	Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist 0 oder gerade.
iii	26)	Dann ist die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Längsposition.
iii	27)	Also ist d(a) ein FL0-Segment bei DV(SV(a)) und B.
iii	28)	d(a) gehört zur Menge FL0F bei DV(SV(a)) und B.
iii	29)	Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch bei B.
~		Fall B:
iii	30)	Die Drehlänge von d(a) bei DV(SV(a)) ist ungerade.
iii	31)	Dann ist die Position für d(a) bei DV(SV(a)) eine Querposition.
iii	32)	Also ist d(a) ein FQ1-Segment bei DV(SV(a)) und B.
iii	33)	d(a) gehört zur Menge FQ1F bei DV(SV(a)) und B.
iii	34)	Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch bei B.
ii	35)	Also sind alle L3S-Resultate von d(a) bei DV(SV(a)) falsch bei B.
ii	36)	φ ist ein L3S-Resultat von d(a) bei DV(SV(a)).
ii	37)	Also ist φ falsch bei B.
i	38)	Bei jeder Bewertung, bei der L1(a) falsch ist, ist auch φ falsch.
i	39)	Also sind L1(a) und φ äquivalent.

(<u>134</u>)

Jede wAo von N ist L1-L3-äquivalent.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) φ sei ein L3-Resultat von a.

i 3) Dann gibt es mindestens eine SV SV(a) für a, und mindestens eine DV DV(SV(a)) für SV(a), sodaß φ ein L3S-Resultat bei DV(SV(a)) des mit a identischen AoTs von a ist.

i 4) Also sind L1(a) und φ äquivalent.

(<u>135</u>)

Jede wff von AL ist übertragungsäquivalent.

Beweis:

i 1) φ sei eine wff.

i 2) a sei ein Ü1-Resultat von φ.

i 3) ψ sei ein Leseresultat von a.

i 4) φ und L1(a) sind äquivalent.

i 5) L1(a) und ψ sind äquivalent.

i 6) Also sind φ und ψ äquivalent.

(<u>136</u>)

Jede wAo von N ist leseäquivalent.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) (φ, ψ) sei ein Paar von wffs, welche Leseresultate von a sind.

i 3) L1(a) und φ sind äquivalent.

i 4) L1(a) und ψ sind äquivalent.

i 5) Also sind φ und ψ äquivalent.

KAPITEL 8

WEITERE ASPEKTE

8.1 L1-L2-ÄQUIVALENZ

Jede wff von AL ist übertragungsäquivalent, jede wAo von N leseäquivalent. Mit dem L1-Resultat hat jede wAo ein unmittelbar gegebenes Leseresultat in konjunktiver Normalform, mit dem L2-Resultat ein ebensolches in disjunktiver Normalform. Wir können das Zeichensystem N daher eine zweifache aussagenlogische Normalnotation nennen.

Die Eigenschaft einer wAo, daß ihr L1-Resultat und ihr L2-Resultat äquivalent sind, bezeichnen wir als L1-L2-Äquivalenz.

8.1.1 *Vollständigkeit von N in Bezug auf die Eigenschaft der L1-L2-Äquivalenz*

(137)
Die Menge der wAon ist vollständig in Hinblick auf die Eigenschaft der L1-L2-Äquivalenz.
Beweis:
ii 1) Angenommen, wir erweitern die Menge der wAon durch eine Ao a.
ii 2) a ist nicht syntaktisch orthogonal gebunden, und in der Folge auch nicht semantisch orthogonal gebunden.
ii 3) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr, und in jeder Reihe von a mindestens ein Balken falsch ist.
ii 4) Bei einer solchen Bewertung ist L1(a) wahr und L2(a) falsch.
ii 5) Also sind L1(a) und L2(a) nicht äquivalent.

i 6) Also ist die Menge der wAon vollständig in Hinblick auf die Eigenschaft der L1-L2-Äquivalenz.

Wir können daher sagen:

(<u>138</u>)

Eine Ao a ist eine wAo, genau dann, wenn das hypothetische L1-Resultat und das hypothetische L2-Resultat von a äquivalent sind.

8.2 GÜLTIGKEIT, ERFÜLLBARKEIT UND UNERFÜLLBARKEIT WOHLGEFORMTER ANORDNUNGEN

Eine wAo heißt gültig/ erfüllbar/ unerfüllbar, genau dann, wenn ihr L1-Resultat gültig/ erfüllbar/ unerfüllbar ist.

Wie leicht zu sehen ist, gilt das folgende.

(<u>139</u>)

Eine wAo ist gültig, genau dann, wenn sie senkrecht inhomogen ist.

(<u>140</u>)

Eine wAo ist erfüllbar, genau dann, wenn sie nicht waagrecht inhomogen ist.

(<u>141</u>)

Eine wAo ist unerfüllbar, genau dann, wenn sie waagrecht inhomogen ist.

Daraus ergibt sich weiters:

(<u>142</u>)

Gegeben sei eine wff von AL und ein Ü1-Resultat dieser wff. Die wff ist gültig, genau dann, wenn das Ü1-Resultat senkrecht inhomogen ist.

(<u>143</u>)

Gegeben sei eine wff von AL und ein Ü1-Resultat dieser wff. Die wff ist erfüllbar, genau dann, wenn das Ü1-Resultat nicht waagrecht inhomogen ist.

(<u>144</u>)
Gegeben sei eine wff von AL und ein Ü1-Resultat dieser wff. Die wff ist unerfüllbar, genau dann, wenn das Ü1-Resultat waagrecht inhomogen ist.

Es ist möglich, ein Verfahren anzugeben, mit dem in einer endlichen Anzahl vorhersehbarer Schritte zu einer beliebigen wff ein Ü1-Resultat hergestellt, und berechnet werden kann, ob diese wff gültig ist oder nicht. Damit stellt Ü1 die Basis für ein aussagenlogisches Entscheidungsverfahren dar.

8.3 ÄQUIVALENZ WOHLGEFORMTER ANORDNUNGEN

a, d seien wAon. a und d heißen (miteinander) äquivalent, genau dann, wenn ihre L1-Resultate äquivalent sind.

⇒ *Satz 148*

(<u>145</u>) >
a, d seien wAon. Jede homogene Reihe von a soll mit jeder homogenen Kolonne von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam haben, und jede homogene Kolonne von a soll mit jeder homogenen Reihe von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam haben. Dann sind a und d äquivalent.
Beweis:

i	1)	a, d seien wAon.
i	2)	Jede homogene Reihe von a soll mit jeder homogenen Kolonne von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam haben.
i	3)	Jede homogene Kolonne von a soll mit jeder homogenen Reihe von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam haben.
ii	4)	B sei eine Bewertung, bei der L1(a) wahr ist.
ii	5)	Dann ist auch L2(a) wahr bei B.
ii	6)	Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr. Eine solche Reihe sei e(a).
ii	7)	e(a) muß homogen sein.

ii 8) Da e(a) mit jeder homogenen Kolonne von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat, ist in jeder homogenen Kolonne von d mindestens ein Balken wahr bei B.

ii 9) Bei jeder Bewertung ist in jeder inhomogenen Kolonne von d mindestens ein Balken wahr.

ii 10) Also ist in jeder Kolonne von d mindestens ein Balken wahr bei B.

ii 11) Also ist L1(d) wahr bei B.

i 12) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a) wahr ist, ist auch L1(d) wahr.

ii 13) B sei eine Bewertung, bei der L1(a) falsch ist.

ii 14) Dann sind in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch. Eine solche Kolonne sei f(a).

ii 15) f(a) muß homogen sein.

ii 16) Da f(a) mit jeder homogenen Reihe von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam hat, ist in jeder homogenen Reihe von d mindestens ein Balken falsch bei B.

ii 17) Bei jeder Bewertung ist in jeder inhomogenen Reihe von d mindestens ein Balken falsch.

ii 18) Also ist in jeder Reihe von d mindestens ein Balken falsch bei B.

ii 19) Also ist L2(d) falsch bei B.

ii 20) Also ist auch L1(d) falsch bei B.

i 21) Bei jeder Bewertung, bei der L1(a) falsch ist, ist auch L1(d) falsch.

i 22) Also sind L1(a) und L1(d) äquivalent.

i 23) Also sind a und d äquivalent.

(146) >

a, d seien wAon. Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Reihe von a und einer homogenen Kolonne von d, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. Dann sind a und d nicht äquivalent.

Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

i 2) Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Reihe von a und einer homogenen Kolonne von d, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. (e(a), f(d)) sei ein solches Paar.

i 3) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Balken von e(a) wahr, und alle Balken von f(d) falsch sind. B sei eine solche Bewertung.

i 4) Dann sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr bei B.

i 5) Also ist L2(a), und daher auch L1(a) wahr bei B.

i 6) Und es sind in mindestens einer Kolonne von d sämtliche Balken falsch bei B.

i 7) Also ist L1(d) falsch bei B.

i 8) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der L1(a) und L1(d) verschiedene Werte haben.

i 9) Also sind L1(a) und L1(d) nicht äquivalent.

i 10) Also sind a und d nicht äquivalent.

(147) >
a, d seien wAon. Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Kolonne von a und einer homogenen Reihe von d, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. Dann sind a und d nicht äquivalent.
Beweis:

i 1) a, d seien wAon.

i 2) Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Kolonne von a und einer homogenen Reihe von d, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. (e(a), f(d)) sei ein solches Paar.

i 3) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Balken von e(a) falsch, und alle Balken von f(d) wahr sind. B sei eine solche Bewertung.

i 4) Dann sind in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch bei B.

i 5) Also ist L1(a) falsch bei B.

i 6) Und es sind in mindestens einer Reihe von d alle Balken wahr bei B.

i 7) Also ist L2(d), und daher auch L1(d) wahr bei B.

i 8) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der L1(a) und L1(d) nicht denselben Wert haben.

i 9) Also sind L1(a) und L1(d) nicht äquivalent.

i 10) Also sind a und d nicht äquivalent.

Wir fassen zusammen:
(148)
a, d seien wAon. a und d sind äquivalent, genau dann, wenn gilt: Jede homogene Reihe von a hat mit jeder homogenen Kolonne von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam, und jede homogene Kolonne von a hat mit jeder homogenen Reihe von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

⇒ *Satz 150*

(149) >

a sei eine wAo, d eine Ao. d sei nicht gebunden an a. Dann ist d entweder keine wAo, oder d ist eine wAo, aber nicht äquivalent mit a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo, d eine Ao.

i 2) d sei nicht gebunden an a.

ii 3) d sei eine wAo.

ii 4) Dann liegt mindestens einer der folgenden Fälle vor.

Fall A:

iii 5) Es gibt mindestens ein Paar, bestehend aus einer homogenen Reihe von a und einer homogenen Reihenauswahl von d, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. (d(a), A_1) sei ein solches Paar.

iii 6) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Balken von d(a) wahr, und alle Elemente von A_1 falsch sind. B sei eine solche Bewertung.

iii 7) Dann sind in mindestens einer Reihe von a alle Balken wahr bei B.

iii 8) Also ist L2(a), und daher auch L1(a) wahr bei B.

iii 9) In jeder Reihe von d ist mindestens ein Balken falsch bei B.

iii 10) Also ist L2(d), und daher auch L1(d) falsch bei B.

iii 11) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der L1(a) und L1(d) nicht denselben Wert haben.

~ Fall B:

iii 12) Es gibt mindestens ein Paar, bestehend aus einer homogenen Kolonne von a und einer homogenen Kolonnenauswahl von d, sodaß die beiden keinen Balkentyp gemeinsam haben. (d(a), A_1) sei ein solches Paar.

iii 13) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente von A_1 wahr, und alle Balken von d(a) falsch sind. B sei eine solche Bewertung.

iii 14) Dann sind in mindestens einer Kolonne von a alle Balken falsch bei B.

iii 15) Also ist L1(a) falsch bei B.

iii 16) In jeder Kolonne von d ist mindestens ein Balken wahr bei B.

iii 17) Also ist L1(d) wahr bei B.

iii 18) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der L1(a) und L1(d) nicht denselben Wert haben.

ii 19) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der L1(a) und L1(d) nicht denselben Wert haben.

ii 20) Also sind L1(a) und L1(d) nicht äquivalent.

ii 21) Also sind a und d nicht äquivalent.

i 22) Wenn d eine wAo ist, dann sind a und d nicht äquivalent.

i 23) Also ist d entweder keine wAo oder d ist eine wAo, aber nicht äquivalent mit a.

Aus den Sätzen 27, 113 und 149 ergibt sich schließlich:

(150)

a sei eine wAo, d eine Ao. Dann gilt: d ist eine wAo und äquivalent mit a, genau dann, wenn d an a gebunden ist.

Wir halten auch fest:

(151)

a und d seien äquivalente wAon. Dann ist d an a gebunden.

Beweis:

i 1) a und d seien äquivalente wAon.

i 2) Dann ist zunächst die Bedingung erfüllt, daß a eine wAo, und d eine Ao ist.

i 3) Außerdem ist d eine wAo und äquivalent mit a.

i 4) Also ist d an a gebunden.

Für K, E, T ergibt sich das folgende:

(152)

a sei eine wAo. $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ seien AoTe von a, jeder entweder eine Reihe oder eine Kolonne von a. e sei eine Ao. e soll aus a dadurch zu erzeugen sein, daß $d_1(a)$, ..., $d_n(a)$ aus a entfernt werden. Dann gilt: e ist eine wAo, und a und e sind äquivalent, genau dann, wenn es eine wAo K(a, d_1, ..., d_n) gibt, und also e die wAo K(a, d_1, ..., d_n) ist.

(153)

a sei eine wAo und d eine Ao. Wenn a punktförmig ist, sei d flächig. $e_1(d)$, ..., $e_n(d)$ seien AoTe von d, jeder entweder eine Reihe oder eine Kolonne von d. (Die Reihen sind vor den Kolonnen angeführt, Reihen und Kolonnen jeweils nach steigenden Indizes geordnet.) Die Reihen aus $e_1(d)$, ..., $e_n(d)$ sollen eine zusammenhängende Abfolge am unteren Rand von d darstellen, die Kolonnen eine zusammenhängende Abfolge am rechten Rand von d. f_1, ..., f_n, sei die Reihe der anordnungsidentischen wAon zu $e_1(d)$, ..., $e_n(d)$. Wenn aus d genau die AoTe $e_1(d)$, ..., $e_n(d)$ fortgenommen werden, soll die wAo a entstehen. Dann gilt: d ist eine wAo, und a und d sind äquivalent, genau dann, wenn es eine wAo $E(a, f_1, ..., f_n)$ gibt, und also d die wAo $E(a, f_1, ..., f_n)$ ist.

(154)
a sei eine wAo, und $d_1(a), ..., d_n(a)$ seien Balken von a. $e_1, ..., e_n$ seien punktförmige wAon. f sei diejenige Ao, die aus a entsteht, wenn die Typen der Balken $d_1(a), ..., d_n(a)$ durch die Typen der Balken in $e_1, ..., e_n$ ausgetauscht werden. Dann gilt: f ist eine wAo, und a und f sind äquivalent, genau dann, wenn es eine wAo $T(a, d_1/e_1, ... d_n/e_n)$ gibt, und also f die wAo $T(a, d_1/e_1, ... d_n/e_n)$ ist.

⇒ *Satz 160*

(155)
a sei eine punktförmige wAo. Dann gibt es eine wAo K(E(a, W(a, a), S(a, a)), r2). Diese ist eine waagrecht lineare wAo mit zwei Balken, und zwar des Typs des Balkens von a.

(156)
a sei eine punktförmige wAo. Dann gibt es eine wAo K(E(a, W(a, a), S(a, a)), c2). Diese ist eine senkrecht lineare wAo mit zwei Balken, und zwar des Typs des Balkens von a.

(157)
a sei eine wAo, die nicht punktförmig ist. Dann kann durch Kopieren von Reihen, also mithilfe von E, die Anzahl der Reihen von a schrittweise beliebig erhöht werden.

(158)
a sei eine wAo, die nicht punktförmig ist. Dann kann durch Kopieren von Kolonnen, also mithilfe von E, die Anzahl der Kolonnen von a schrittweise beliebig erhöht werden.

Also gilt:
(159)
a sei eine wAo mit n Reihen und m Kolonnen. Dann reichen K und E zusammen aus, um zu jeder vorgegebenen Größe von mindestens n Reihen, mindestens m Kolonnen, und mehr als $n \cdot m$ Balken aus a schrittweise eine wAo der verlangten Größe herzustellen, die einen mit a anordnungsidentischen AoT besitzt.

(160)
a, d seien zwei nichtidentische, äquivalente wAon. Dann reichen K, E, T zusammen aus,

um d schrittweise aus a herzustellen.

Beweis:

i 1) a, d seien zwei nichtidentische, äquivalente wAon.

i 2) Dann gibt es mindestens ein Paar (e, f) von wAon, sodaß zugleich gilt:

- a) e und f stimmen bezüglich der Anzahl der Reihen und der Anzahl der Kolonnen überein.
- b) e besitzt einen AoT, der anordnungsidentisch ist mit a.
- c) Wenn e nicht identisch ist mit a, dann reichen K und E zusammen aus, um e schrittweise aus a herzustellen.
- d) f besitzt einen AoT, der anordnungsidentisch ist mit d.
- e) Wenn f nicht identisch ist mit d, dann reichen K und E zusammen aus, um f schrittweise aus d herzustellen.

(e, f) sei ein solches Paar.

i 3) e und a sind äquivalent.

i 4) a und d sind äquivalent.

i 5) d und f sind äquivalent.

i 6) Also sind e und f äquivalent.

ii 7) e und f seien nicht identisch.

ii 8) Da e und f bezüglich der Anzahl der Reihen und Kolonnen übereinstimmen, kann aus e die Ao f hergestellt werden, indem bei bestimmten Balken von e der Typ ausgetauscht wird.

ii 9) Da f eine wAo ist, und äquivalent mit e, ist f an e gebunden.

ii 10) Also kann f aus e durch einen Anwendungsschritt von T auf e hergestellt werden.

i 11) Wenn e und f nicht identisch sind, dann reicht T aus, um f aus e herzustellen.

ii 12) d und f seien nicht identisch.

ii 13) Dann kann durch Fortnehmen von Reihen bzw. Kolonnen aus f die Ao d erzeugt werden.

ii 14) Da d eine wAo ist, und äquivalent mit f, ist d an f gebunden.

ii 15) Also kann d aus f durch einen Anwendungsschritt von K auf f hergestellt werden.

i 16) Wenn d und f nicht identisch sind, dann reicht K aus, um d aus f herzustellen.

i 17) Es gibt also mindestens ein Paar (e, f) von wAon, sodaß zugleich gilt:

- a) Wenn e nicht identisch ist mit a, dann reichen K und E zusammen aus, um e schrittweise aus a herzustellen.

b) Wenn f nicht identisch ist mit e, dann reicht T aus, um f aus e herzustellen.

c) Wenn d nicht identisch ist mit f, dann reicht K aus, um d aus f herzustellen.

i 18) Also reichen K, E, T zusammen aus, um d schrittweise aus a herzustellen.

Eine Reihenauswahl A_1 einer Ao a heißt eine basale Reihenauswahl von a, genau dann, wenn es keine Menge von Balkentypen gibt, die eine echte Teilmenge von A_1, und zugleich eine Reihenauswahl von a ist.
Eine Kolonnenauswahl A_1 einer Ao a heißt eine basale Kolonnenauswahl von a, genau dann, wenn es keine Menge von Balkentypen gibt, die eine echte Teilmenge von A_1, und zugleich eine Kolonnenauswahl von a ist.

⇒ *Satz 170*

(<u>161</u>)
a sei eine Ao. Dann enthält jede Reihenauswahl von a mindestens eine basale Reihenauswahl von a als Teilmenge.
Beweis.

i 1) a sei eine Ao.

ii 2) A_1 sei eine Reihenauswahl von a.

ii 3) Dann ist mindestens eine Teilmenge von A_1 eine Reihenauswahl von a.

ii 4) Und es gibt mindestens eine optimal kleine Menge, die eine Teilmenge von A_1 und eine Reihenauswahl von a ist. Eine solche sei A_2.

ii 5) Da jede echte Teilmenge von A_2 auch eine Teilmenge von A_1, und kleiner als A_2 ist, kann es keine Menge von Balkentypen geben, die eine echte Teilmenge von A_2, und zugleich eine Reihenauswahl von a ist.

ii 6) Also ist A_2 eine basale Reihenauswahl von a.

ii 7) Also enthält A_1 mindestens eine basale Reihenauswahl von a als Teilmenge.

i 8) Also enthält jede Reihenauswahl von a mindestens eine basale Reihenauswahl von a als Teilmenge.

(<u>162</u>)
a sei eine Ao. Dann enthält jede Kolonnenauswahl von a mindestens eine basale Kolonnenauswahl von a als Teilmenge.

Beweis.

i 1) a sei eine Ao.

ii 2) A_1 sei eine Kolonnenauswahl von a.

ii 3) Dann ist mindestens eine Teilmenge von A_1 eine Kolonnenauswahl von a.

ii 4) Und es gibt mindestens eine optimal kleine Menge, die eine Teilmenge von A_1 und eine Kolonnenauswahl von a ist. Eine solche sei A_2.

ii 5) Da jede echte Teilmenge von A_2 auch eine Teilmenge von A_1, und kleiner als A_2 ist, kann es keine Menge von Balkentypen geben, die eine echte Teilmenge von A_2, und zugleich eine Kolonnenauswahl von a ist.

ii 6) Also ist A_2 eine basale Kolonnenauswahl von a.

ii 7) Also enthält A_1 mindestens eine basale Kolonnenauswahl von a als Teilmenge.

i 8) Also enthält jede Kolonnenauswahl von a mindestens eine basale Kolonnenauswahl von a als Teilmenge.

(163) >

a sei eine wAo, d eine Ao. a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Außerdem sollen a und d dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen basalen Kolonnenauswahlen haben. Dann ist d eine wAo und äquivalent mit a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) d sei eine Ao.

i 3) a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.

i 4) a und d sollen dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen basalen Kolonnenauswahlen haben.

ii 5) A_1 sei eine homogene Reihenauswahl von d.

ii 6) Dann enthält A_1 mindestens eine basale Reihenauswahl von d als Teilmenge. Eine solche sei A_2.

ii 7) A_2 ist homogen.

ii 8) Also ist A_2 auch eine Reihenauswahl von a.

ii 9) Also enthält A_1 mindestens eine Reihenauswahl von a als Teilmenge.

ii 10) Also hat jede Reihe von a mit A_1 mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

i 11) Also hat jede Reihe von a mit jeder homogenen Reihenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

ii 12) A_1 sei eine homogene Kolonnenauswahl von d.

ii 13) Dann enthält A_1 mindestens eine basale Kolonnenauswahl von d als Teilmenge. Eine solche sei A_2.

ii 14) A_2 ist homogen.

ii 15) Also ist A_2 auch eine Kolonnenauswahl von a.

16) Also enthält A_1 mindestens eine Kolonnenauswahl von a als Teilmenge.

ii 17) Also hat jede Kolonne von a mit A_1 mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

i 18) Also hat jede Kolonne von a mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von d mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

i 19) Also ist d an a gebunden.

i 20) Also ist d eine wAo und äquivalent mit a.

(164) >

a und d seien äquivalente wAon und frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Dann enthält jede homogene Reihenauswahl von a mindestens eine Reihenauwahl von d als Teilmenge.

Beweis.

i 1) a und d seien äquivalente wAon.

i 2) a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.

i 3) Da d und a äquvialent sind, ist a an d gebunden.

i 4) So hat jede homogene Reihe von d, also jede Reihe von d, mit jeder homogenen Reihenauswahl von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

i 5) Also enthält jede homogene Reihenauswahl von a mindestens eine Reihenauswahl von d als Teilmenge.

(165) >

a und d seien äquivalente wAon und frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Dann enthält jede homogene Kolonnenauswahl von a mindestens eine Kolonnenauswahl von d als Teilmenge.

Beweis.

i 1) a und d seien äquivalente wAon.

i 2) a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.

i 3) Da d und a äquvialent sind, ist a an d gebunden.

i 4) So hat jede homogene Kolonne von d, also jede Kolonne von d, mit jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens einen Balkentyp gemeinsam.

i 5) Also enthält jede homogene Kolonnenauswahl von a mindestens eine Kolonnenauswahl von d als Teilmenge.

(166) >

a und d seien äquivalente wAon und frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Dann ist jede homogene basale Reihenauswahl von a auch eine basale Reihenauswahl von d.

Beweis.

i 1) a und d seien äquivalente wAon.
i 2) a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.
ii 3) A_1 sei eine homogene basale Reihenauswahl von a.
ii 4) Dann enthält A_1 mindestens eine Reihenauswahl von d. Da jede Reihenauswahl von d eine basale Reihenauswahl von d enthält, enthält A_1 mindestens eine basale Reihenauswahl von d. Eine solche sei A_2.
ii 5) Da A_2 eine Teilmenge von A_1 ist, ist A_2 homogen.
ii 6) Also enthält A_2 mindestens eine Reihenauswahl von a. Eine solche sei A_3.
iii 7) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, A_2 sei eine echte Teilmenge von A_1.
iii 8) Dann ist auch A_3 eine echte Teilmenge von A_1.
iii 9) A_3 ist eine Reihenauswahl von a.
iii 10) Also enthält A_1 mindestens eine Reihenauswahl von a als echte Teilmenge.
iii 11) Also ist A_1 keine basale Reihenauswahl von a.
iii 12) Dies ergibt einen Widerspruch.
ii 13) Also ist A_2 keine echte Teilmenge von A_1.
ii 14) Also ist A_2 identisch mit A_1.
ii 15) Also ist A_1 eine basale Reihenauswahl von d.
i 16) Jede homogene basale Reihenauswahl von a ist auch eine basale Reihenauswahl von d.

(<u>167</u>) >

a und d seien äquivalente wAon und frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Dann ist jede homogene basale Kolonnenauswahl von a auch eine basale Kolonnenauswahl von d.

Beweis.

i 1) a und d seien äquivalente wAon.
i 2) a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.
ii 3) A_1 sei eine homogene basale Kolonnenauswahl von a.
ii 4) Dann enthält A_1 mindestens eine Kolonnenauswahl von d. Da jede Kolonnenauswahl von d eine basale Kolonnenauswahl von d enthält, enthält A_1 mindestens eine basale Kolonnenauswahl von d. Eine solche sei A_2.
ii 5) Da A_2 eine Teilmenge von A_1 ist, ist A_2 homogen.
ii 6) Also enthält A_2 mindestens eine Kolonnenauswahl von a. Eine solche sei A_3.

iii 7) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, A_2 sei eine echte Teilmenge von A_1.

iii 8) Dann ist auch A_3 eine echte Teilmenge von A_1.

iii 9) A_3 ist eine Kolonnenauswahl von a.

iii 10) Also enthält A_1 mindestens eine Kolonnenauswahl von a als echte Teilmenge.

iii 11) Also ist A_1 keine basale Kolonnenauswahl von a.

iii 12) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 13) Also ist A_2 keine echte Teilmenge von A_1.

ii 14) Also ist A_2 identisch mit A_1.

ii 15) Also ist A_1 eine basale Kolonnenauswahl von d.

i 16) Jede homogene basale Kolonnenauswahl von a ist auch eine basale Kolonnenauswahl von d.

Also gilt:

(168) °
a und d seien seien äquivalente wAon und frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Dann haben a und d dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen basalen Kolonnenauswahlen.

(169) >
a sei eine wAo, d eine Ao. a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Es soll nicht der Fall sein, daß a und d dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen basalen Kolonnenauswahlen haben. Dann ist d keine wAo, oder d ist eine wAo, aber nicht äquivalent mit a.
Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) d sei eine Ao.

i 3) a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.

i 4) Es soll nicht der Fall sein, daß a und d dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen basalen Kolonnenauswahlen haben.

ii 5) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, d sei eine wAo und äquivalent mit a.

ii 6) Dann sind a und d äquivalente wAon und frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen.

ii 7) Also haben a und d dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen Kolonnenauswahlen.

ii 8) Dies ergibt einen Widerspruch.

i 9) Also ist d entweder keine wAo, oder d ist eine wAo, aber nicht äquivalent mit a.

Wir fassen die Sätze 163 und 169 zusammen:

(170)

a sei eine wAo, d eine Ao. a und d seien frei von inhomogenen Reihen und Kolonnen. Dann gilt: d ist eine wAo und äquivalent mit a, genau dann, wenn a und d dieselben homogenen basalen Reihenauswahlen und dieselben homogenen basalen Kolonnenauswahlen haben.

a sei eine homogene Ao. a heißt typenoptimiert, genau dann, wenn die RC-Typen aller Reihen von a homogene basale Kolonnenauswahlen von a, und die RC-Typen aller Kolonnen von a homogene basale Reihenauswahlen von a sind.

Es kann, wie leicht zu sehen ist, ein mechanisches Verfahren definiert werden, welches auf der Anwendung von K, gemäß SF1 für K, und der Anwendung von T, gemäß SF1 für T, basiert, und mit dessen Hilfe es möglich ist, in einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer beliebigen homogenen, nicht typenoptimierten wAo, eine äquivalente homogene, typenoptimierte wAo herzustellen.

Daher gilt:

(171)

a sei eine homogene, nicht typenoptimierte wAo. Dann gibt es mindestens eine homogene, typenoptimierte wAo, die äquivalent ist mit a.

Es gibt allerdings mindestens eine homogene, typenoptimierte wAo a, sodaß zugleich gilt:

1) K ist nicht anwendbar auf a.
2) Es gibt mindestens eine wAo, die weniger Reihen und höchstens so viele Kolonnen, oder weniger Kolonnen und höchstens so viele Reihen hat wie a und äquivalent ist mit a.

Beispiel:

Auf $KWGbg_1Gg_1r(r2, r3)$ (Abb. 19) ist K nicht anwendbar. Es gibt aber eine wAo

$KEKWGbg_1Gg_1r(r2, r3)(SrDb)(c2, c4)$ (Abb. 34). Diese ist mit jener äquivalent und hat gleich viele Reihen und weniger Kolonnen als jene.

Wir müssen das Optimierungsproblem in dieser Form belassen.

Beispiele für wAon und Leseresultate von wAon, s. Abb. 20-53.

8.4 MENGENTHEORETISCHE WAHRHEITSFUNKTIONEN UND AUSSAGENLOGISCHE NORMALFORMEN

α sei eine Menge von Atomformeln und WZo_1 eine WZo für α. Unter der Klausel von WZo_1 verstehen wir diejenige Menge β basaler wffs, für die gilt:

1) β enthält jede Atomformel aus α, für die WZo_1 den Wert W hat, als Element.
2) β enthält zu jeder Atomformel aus α, für die WZo_1 den Wert F hat, die Negation dieser Atomformel als Element.
3) β enthält keine weiteren Elemente.

Wie leicht zu sehen ist, gilt:
(<u>172</u>)
α sei eine Menge von Atomformeln, WZo_1 eine WZo für α, und β die Klausel von WZo_1. Dann gilt: Bei jeder Bewertung, die WZo_1 enthält, sind alle Elemente von β wahr. Bei jeder Bewertung, die WZo_1 nicht enthält, ist mindestens ein Element von β falsch.

Gegeben sei eine Konjunktion $(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)$, sodaß sämtliche wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ basale wffs sind. Dann nennen wir die Menge der wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ die Klausel von $(\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n)$.

Gegeben sei eine Disjunktion $(\varphi_1\vee...\vee\varphi_n)$, sodaß sämtliche wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ basale wffs sind. Dann nennen wir die Menge der wffs aus $\varphi_1, ..., \varphi_n$ die Klausel von $(\varphi_1\vee...\vee\varphi_n)$.

Wir werden nun, wie in Kapitel 5.4, Satz 76, angekündigt, zeigen, daß es zu jeder nicht konstanten mWF $F(\alpha)$ einer Menge α von Atomformeln mindestens eine wff in KNF und mindestens eine wff in DNF gibt, sodaß $F(\alpha)$ diesen wffs entspricht.

⇒ *Satz 174, Satz 175*

(173)

F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann ist die Klausel jeder WZo von F(α) mit der Klausel jeder anderen WZo von F(α) invers verschränkt.

(174)

F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gibt es mindestens eine wff φ in KNF, sodaß die Menge der Klauseln der Konjunkte von φ identisch ist mit der Menge der Umkehrungen der Klauseln der falsifizierenden WZon von F(α). F(α) entspricht jeder solchen wff.

Beweis:

i	1)	F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.
i	2)	φ sei eine wff in KNF, sodaß die Menge der Klauseln der Konjunkte von φ identisch ist mit der Menge der Umkehrungen der Klauseln der falsifizierenden WZon von F(α).
ii	3)	B sei eine Bewertung, die eine verifizierende WZo von F(α) enthält. WZo_1 sei diese WZo von F(α).
ii	4)	Alle Elemente der Klausel von WZo_1 sind wahr bei B.
ii	5)	Die Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) ist mit der Klausel von WZo_1 invers verschränkt.
ii	6)	Also hat die Umkehrung jeder falsifizierenden WZo von F(α) mit der Klausel von WZo_1 mindestens ein Element gemeinsam.
ii	7)	Also ist in der Umkehrung jeder falsifizierenden Klausel von F(α) mindestens ein Element wahr bei B.
ii	8)	Also ist in jedem Konjunkt von φ mindestens ein Disjunkt wahr bei B.
ii	9)	Also sind alle Konjunkte von φ wahr bei B.
ii	10)	Also ist φ wahr bei B.
i	11)	Bei jeder Bewertung, die eine verifizierende WZo von F(α) enthält, ist φ wahr.
ii	12)	B sei eine Bewertung, die eine falsifizierende WZo von F(α) enthält. WZo_1 sei diese WZo von F(α).
ii	13)	Alle Elemente der Klausel von WZo_1 sind wahr bei B.
ii	14)	Also sind alle Elemente der Umkehrung der Klausel von WZo_1 falsch bei B.
ii	15)	Also sind in mindestens einem Konjunkt von φ sämtliche Disjunkte falsch bei B.

ii 16) Also ist mindestens ein Konjunkt von φ falsch bei B.

ii 17) Also ist φ falsch bei B.

i 18) Bei jeder Bewertung, die eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$ enthält, ist φ falsch.

i 19) Also entspricht $F(\alpha)$ φ.

(<u>175</u>)

$F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gibt es mindestens eine wff φ in DNF, sodaß die Menge der Klauseln der Disjunkte von φ identisch ist mit der Menge der Klauseln der verifizierenden WZon von $F(\alpha)$. $F(\alpha)$ entspricht jeder solchen wff.

Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 2) φ sei eine wff in DNF, sodaß die Menge der Klauseln der Disjunkte von φ identisch ist mit der Menge der Klauseln der verifizierenden WZon von $F(\alpha)$.

ii 3) B sei eine Bewertung, die eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$ enthält. WZo_1 sei diese WZo von $F(\alpha)$.

ii 4) Alle Elemente der Klausel von WZo_1 sind wahr bei B.

ii 5) Also sind in mindestens einem Disjunkt von φ sämtliche Konjunkte wahr bei B.

ii 6) Also ist mindestens ein Disjunkt von φ wahr bei B.

ii 7) Also ist φ wahr bei B.

i 8) Bei jeder Bewertung, die eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$ enthält, ist φ wahr.

ii 9) B sei eine Bewertung, die eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$ enthält. WZo_1 sei diese WZo von $F(\alpha)$.

ii 10) Alle Elemente der Klausel von WZo_1 sind wahr bei B.

ii 11) Die Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ ist mit der Klausel von WZo_1 invers verschränkt.

ii 12) Also ist in der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element falsch bei B.

ii 13) Also ist in jedem Disjunkt von φ mindestens ein Konjunkt falsch bei B.

ii 14) Also sind alle Disjunkte von φ falsch bei B.

ii 15) Also ist φ falsch bei B.

i 16) Bei jeder Bewertung, die eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$ enthält, ist φ falsch.

i 17) Also entspricht $F(\alpha)$ φ.

8.5 MENGENTHEORETISCHE WAHRHEITSFUNKTIONEN UND ANORDNUNGEN

a sei eine wAo und $F(\alpha)$ eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Wir sagen, $F(\alpha)$ entspreche a, genau dann, wenn $F(\alpha)$ dem L1-Resultat von a entspricht.

a sei eine Ao und d(a) eine Reihe oder Kolonne von a. Dann nennen wir die Klausel des RC-Typs von d(a) auch die Klausel von d(a).

⇒ Satz 179

(176) >
a sei eine wAo und $F(\alpha)$ eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Die Klausel jeder homogenen Reihe von a soll mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ invers verschränkt sein, und die Klausel jeder homogenen Kolonne von a soll mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element gemeinsam haben. Dann entspricht $F(\alpha)$ a.
Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) Die Klausel jeder homogenen Reihe von a soll mit der der Klausel jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ invers verschränkt sein.

i 4) Die Klausel jeder homogenen Kolonne von a soll mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element gemeinsam haben.

ii 5) B sei eine Bewertung, die eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$ enthält.

ii 6) Dann gibt es eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$, sodaß alle Elemente ihrer Klausel wahr sind bei B.

ii 7) Also ist in der Klausel jeder homogenen Kolonne von a mindestens ein Element wahr.

ii 8) Also ist in jeder homogenen Kolonne von a mindestens ein Balken wahr.

ii 9) Also ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr.

ii 10) Also ist L1(a) wahr bei B.

i 11) Bei jeder Bewertung, die eine verifizierende WZo von F(α) enthält, ist L1(a) wahr.

ii 12) B sei eine Bewertung, die eine falsifizierende WZo von F(α) enthält.

ii 13) Dann gibt es eine falsifizierende WZo von F(α), sodaß alle Elemente ihrer Klausel wahr sind bei B.

ii 14) Also ist in der Klausel jeder homogenen Reihe von a mindestens ein Element falsch.

ii 15) Also ist in jeder homogenen Reihe von a mindestens ein Balken falsch.

ii 16) Also ist in jeder Reihe von a mindestens ein Balken falsch.

ii 17) Also ist L2(a) falsch bei B.

ii 18) Also ist L1(a) falsch bei B.

i 19) Bei jeder Bewertung, die eine falsifizierende WZo von F(α) enthält, ist L1(a) falsch.

i 20) Also entspricht F(α) L1(a).

i 21) Also entspricht F(α) a.

(<u>177</u>) >

a sei eine wAo und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Reihe von a und einer falsifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klausel der Reihe mit der Klausel der WZo nicht invers verschränkt ist. Dann entspricht F(α) nicht a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Reihe von a und einer falsifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klausel der Reihe mit der der Klausel der WZo nicht invers verschränkt ist. (d(a), WZo_1) sei ein solches Paar.

i 4) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente der Klausel von d(a) wahr sind, und auch alle Elemente der Klausel von WZo_1 wahr sind. B sei eine solche Bewertung.

i 5) Dann enthält B WZo_1

i 6) Alle Balken von d(a) sind wahr bei B.

i 7) Also sind in mindestens einer Reihe von a alle Balken wahr bei B.

i 8) Also ist L2(a), und daher auch L1(a) wahr bei B.

i 9) B enthält also eine falsifizierende WZo, und L1(a) ist wahr bei B.

i 10) Also gibt es mindestens eine Bewertung B, sodaß der Wert von L1(a) bei B mit dem Wert von F(α) bei der in B enthaltenen WZo für α nicht übereinstimmt.

i 11) Also entspricht F(α) nicht L1(a).

i 12) Also entspricht F(α) nicht a.

(178) >

a sei eine wAo und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Kolonne von a und einer verfizierenden WZo von F(α), sodaß die Klausel der Kolonne mit der Klausel der WZo kein Element gemeinsam hat. Dann entspricht F(α) nicht a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Kolonne von a und einer verifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klausel der Kolonne mit der der Klausel der WZo kein Element gemeinsam hat. (d(a), WZo_1) sei ein solches Paar.

i 4) Dann gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente der Klausel von WZo_1 wahr und alle Elemente der Klausel von d(a) falsch sind. B sei eine solche Bewertung.

i 5) Dann enthält B WZo_1.

i 6) Alle Balken von d(a) sind falsch bei B.

i 7) Also sind in mindesten einer Kolonne von a alle Balken falsch bei B.

i 8) Also ist L1(a) falsch bei B.

i 9) B enthält also eine verifizierende WZo, und L1(a) ist falsch bei B.

i 10) Also gibt es mindestens eine Bewertung B, sodaß der Wert von L1(a) bei B mit dem Wert von F(α) bei in B enthaltenen WZo für α nicht übereinstimmt.

i 11) Also entspricht F(α) nicht L1(a).

i 12) Also entspricht F(α) nicht a.

Wir fassen zusammen:

(179)

a sei eine wAo und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. F(α) entspricht a genau dann, wenn gilt: Die Klausel jeder homogenen Reihe von a ist mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt, und die Klausel jeder homogenen Kolonne von a hat mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam.

⇒ *Satz 183*

(180) >
a sei eine Ao und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a soll mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam haben, und die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a soll mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt sein. Dann ist a eine wAo und F(α) entspricht a.
Beweis:

i 1) a sei eine Ao.
i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.
i 3) Die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a soll mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam haben.
i 4) Die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a soll mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt sein.
ii 5) B sei eine Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist.
ii 6) Dann gibt es mindestens eine homogene Kolonnenauswahl von a, sodaß alle Elemente der Klausel dieser Auswahl wahr sind bei B. A_1 sei eine solche Auswahl.
ii 7) Die Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) ist mit der Klausel von A_1 invers verschränkt.
ii 8) Also ist in der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element falsch bei B.
ii 9) Also enthält B keine falsifizierende WZo von F(α).
ii 10) Also enthält B eine verifizierende WZo von F(α). Diese sei WZo_1.
ii 11) Die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a hat mit WZo_1 mindestens ein Element gemeinsam.
ii 12) Also ist in jeder homogenen Reihenauswahl von a mindestens ein Balkentyp wahr bei B.

iii 13) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, in jeder Reihe von a sei mindestens ein Balken falsch bei B.

iii 14) Dann gibt es mindestens eine homogene Reihenauswahl von a, deren sämtliche Balkentypen falsch sind bei B.

iii 15) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 16) Also sind in mindestens einer Reihe von a alle Balken wahr bei B.

i 17) Bei jeder Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist, sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr.

i 18) Somit ist a semantisch orthogonal gebunden, syntaktisch orthogonal gebunden, eine wAo.

i 19) Die Klausel jeder Reihe von a ist die Klausel einer Kolonnenauswahl von a, die Klausel jeder Kolonne von a die Klausel einer Reihenauswahl von a.

i 20) Also gilt: Die Klausel jeder homogenen Reihe von a ist mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt, und die Klausel jeder homogenen Kolonne von a hat mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam.

i 21) Also entspricht F(α) a.

i 22) Also ist a eine wAo und F(α) entspricht a.

(181) >

a sei eine Ao und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl von a und einer verifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klauseln der beiden kein gemeinsames Element haben. Dann gilt: a ist entweder keine wAo, oder a ist eine wAo, aber F(α) entspricht nicht a.

Beweis:

i 1) a sei eine Ao.

i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Reihenauswahl von a und einer verifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klauseln der beiden kein gemeinsames Element haben. (A_1, WZo_1) sei ein solches Paar.

ii 4) a sei eine wAo.

ii 5) Es gibt mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente der Klausel von WZo_1 wahr, und alle Elemente der Klausel von A_1 falsch sind. B sei eine solche Bewertung.

ii 6) Dann enthält B WZo_1.

ii 7) Alle Balkentypen von A_1 sind falsch bei B.

ii 8) Also ist in jeder Reihe von a mindestens ein Balken falsch bei B.

ii 9) Also ist L2(a) falsch bei B.

ii 10) Also ist L1(a) falsch bei B.

ii 11) B enthält eine verifizierende WZo von F(α), und L1(a) ist falsch bei B.

ii 12) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der das L1-Resultat von a einen anderen Wert hat, als F(α) bei der darin enthaltenen WZo für α.

ii 13) Also entspricht F(α) nicht L1(a).

ii 14) Also entspricht F(α) nicht a.

i 15) Wenn a eine wAo ist, dann entspricht F(α) nicht a.

i 16) Also ist a keine wAo, oder a ist eine wAo, aber F(α) entspricht nicht a.

(182) >

a sei eine Ao und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Kolonnenauswahl von a und einer falsifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klauseln der beiden nicht invers verschränkt sind. Dann gilt: a ist entweder keine wAo, oder a ist eine wAo, aber F(α) entspricht nicht a.

Beweis:

i 1) a sei eine Ao.

i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) Es soll mindestens ein Paar geben, bestehend aus einer homogenen Kolonnenauswahl von a und einer falsifizierenden WZo von F(α), sodaß die Klauseln der beiden nicht invers verschränkt sind. (A_1, WZo_1) sei ein solches Paar.

ii 4) a sei eine wAo.

ii 5) Es gibt es mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente der Klauseln von A_1 und WZo_1 wahr sind. B sei eine solche Bewertung.

ii 6) B enthält WZo_1.

ii 7) Alle Balkentypen von A_1 sind wahr bei B.

ii 8) Also ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr bei B.

ii 9) Also ist L1(a) wahr bei B.

ii 10) B enthält eine falsifizierende WZo von F(α), und L1(a) ist wahr bei B.

ii 11) Also gibt es mindestens eine Bewertung, bei der das L1-Resultat von a einen anderen Wert hat, als F(α) bei der darin enthaltenen WZo für α.

ii 12) Also entspricht F(α) nicht L1(a).

ii 13) Also entspricht F(α) nicht a.

i 14) Wenn a eine wAo ist, dann entspricht F(α) nicht a.

i 15) Also ist a keine wAo, oder a ist eine wAo, aber F(α) entspricht nicht a.

Wir fassen zusammen:
(<u>183</u>)
a sei eine Ao und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gilt: a ist eine wAo, und F(α) entspricht a, genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a hat mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam, und die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a ist mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

Wir halten auch fest:
(<u>184</u>)
a sei eine wAo und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. F(α) soll a entsprechen. Dann gilt: Die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a hat mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam, und die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a ist mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.
Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) F(α) soll a entsprechen.

i 4) Dann sind zunächst die Bedingungen erfüllt, daß a eine Ao, und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln ist.

i 5) Außerdem ist a eine wAo, und F(α) entspricht a.

i 6) Also hat die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam, und es ist die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

Daraus ergibt sich weiters:

(185)

a sei eine wAo und F(α) eine mWF einer Menge α von Atomformeln. F(α) soll a entsprechen. Weiters soll jede Balkenfarbe, die in a vorkommt, einem Satzbuchstaben zugeordnet sein, sodaß dieser in einem Element von α vorkommt. Dann gibt es zu jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens eine Reihe in a, sodaß die Klausel der Reihe eine Teilmenge der Klausel dieser WZo ist.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) F(α) soll a entsprechen.

i 4) Jede Balkenfarbe, die in a vorkommt, soll einem Satzbuchstaben zugeordnet sein, sodaß dieser in einem Element von α vorkommt.

ii 5) WZo_1 sei eine verifizierende WZo von F(α).

ii 6) Dann hat die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a mit der Klausel von WZo_1 mindestens ein Element gemeinsam.

ii 7) Die Klausel jeder inhomogenen Reihenauswahl von a hat mit der Klausel von WZo_1 ebenfalls mindestens ein Element gemeinsam.

ii 8) Also hat die Klausel jeder Reihenauswahl von a mit der Klausel von WZo_1 mindestens ein Element gemeinsam.

iii 9) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, die Klausel jeder Reihe von a enthalte mindestens ein Element, das kein Element der Klausel von WZo_1 ist.

iii 10) Dann gibt es mindestens eine Reihenauswahl von a, deren Klausel mit der Klausel von WZo_1 kein Element gemeinsam hat.

iii 11) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 12) Also gibt es mindestens eine Reihe in a, sodaß alle Elemente der Klausel dieser Reihe auch Elemente der Klausel von WZo_1 sind.

ii 13) Also ist die Klausel mindestens einer Reihe von a eine Teilmenge der Klausel von WZo_1.

i 14) Also gibt es zu jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens eine Reihe in a, sodaß die Klausel der Reihe eine Teilmenge der Klausel dieser WZo ist.

(186)

a sei eine wAo und $F(\alpha)$ eine mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Weiters soll jede Balkenfarbe, die in a vorkommt, einem Satzbuchstaben zugeordnet sein, sodaß dieser in einem Element von α vorkommt. Dann gibt es zu jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens eine Kolonne in a, sodaß die Klausel der Kolonne eine Teilmenge der Umkehrung der Klausel dieser WZo ist.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F(\alpha)$ soll a entsprechen.

i 4) Jede Balkenfarbe, die in a vorkommt, soll einem Satzbuchstaben zugeordnet sein, sodaß dieser in einem Element von α vorkommt.

ii 5) WZo_1 sei eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 6) Dann ist die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mit der Klausel von WZo_1 invers verschränkt.

ii 7) Die Klausel jeder inhomogenen Kolonnenauswahl von a ist mit der Klausel von WZo_1 ebenfalls invers verschränkt.

ii 8) Also ist die Klausel jeder Kolonnenauswahl von a mit der Klausel von WZo_1 invers verschränkt.

iii 9) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, die Klausel jeder Kolonne von a enthalte mindestens ein Element, das kein Element der Umkehrung der Klausel von WZo_1 ist.

iii 10) Dann gibt es mindestens eine Kolonnenauswahl von a, deren Klausel mit der Umkehrung der Klausel von WZo_1 kein Element gemeinsam hat.

iii 11) Die Klausel einer solchen Kolonnenauswahl ist mit der Klausel von WZo_1 nicht invers verschränkt.

iii 12) Also gibt es mindestens eine Kolonnenauswahl von a, die mit der Klausel von WZo_1 nicht invers verschränkt ist.

iii 13) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 14) Also gibt es mindestens eine Kolonne in a, sodaß alle Elemente der Klausel dieser Kolonne auch Elemente der Umkehrung der Klausel von WZo_1 sind.

ii 15) Also ist die Klausel mindestens einer Kolonne von a eine Teilmenge der Umkehrung der Klausel von WZo_1.

i 16) Also gibt es zu jeder falsifizierenden WZo von F(α) mindestens eine Kolonne in a, sodaß die Klausel der Kolonne eine Teilmenge der Umkehrung der Klausel dieser WZo ist.

F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. β sei eine Klausel. β heißt eine A-Klausel von F(α), genau dann, wenn zugleich gilt:

1) Es gibt mindestens eine verifizierende WZo von F(α), sodaß β eine Teilmenge der Klausel dieser WZo ist.
2) β ist mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo invers verschränkt.

F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. β sei eine Klausel. β heißt eine B-Klausel von F(α), genau dann, wenn zugleich gilt:

1) Es gibt mindestens eine falsifizierende WZo von F(α), sodaß β eine Teilmenge der Klausel dieser WZo ist.
2) β ist mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

Eine A-Klausel β einer nicht konstanten mWF F(α) einer Menge α von Atomformeln heißt eine basale A-Klausel von F(α), genau dann, wenn es keine Klausel gibt, die eine echte Teilmenge von β, und zugleich eine A-Klausel von F(α) ist.
Eine B-Klausel β einer nicht konstanten mWF F(α) einer Menge α von Atomformeln heißt eine basale B-Klausel von F(α), genau dann, wenn es keine Klausel gibt, die eine echte Teilmenge von β, und zugleich eine B-Klausel von F(α) ist.

⇒ *Satz 202*

(<u>187</u>)
F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann ist die Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) eine A-Klausel von F(α) und die Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) eine B-Klausel von F(α).

(<u>188</u>)
F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann ist jede A-Klausel von F(α) mit jeder B-Klausel von F(α) invers verschränkt.
Beweis:

i 1) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

ii 2) (β, γ) sei ein Paar, bestehend aus einer A-Klausel von $F(\alpha)$ und einer B-Klausel von $F(\alpha)$.

iii 3) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, β und γ seien nicht invers verschränkt.

iii 4) Dann ist, da β und γ konsistent sind, auch die Menge $\beta\cup\gamma$ konsistent.

iii 5) Da $\beta\cup\gamma$ konsistent ist, und jedes Element von $\beta\cup\gamma$ eine basale wff ist zu einem Satzbuchstaben, der in einem Element von α vorkommt, gibt es mindestens eine WZo von $F(\alpha)$, sodaß $\beta\cup\gamma$ eine Teilmenge der Klausel dieser WZo ist.

iii 6) Also gibt es mindestens eine WZo von $F(\alpha)$, sodaß sowohl β als auch γ eine Teilmenge der Klausel dieser WZo ist. WZo_1 sei eine solche WZo.

iii 7) Da β mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ invers verschränkt ist, ist WZo_1 eine falsifizierende WZo.

iii 8) Da γ mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ invers verschränkt ist, ist WZo_1 eine verifizierende WZo.

iii 9) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 10) Also sind β und γ invers verschränkt.

i 11) Also ist jede A-Klausel von $F(\alpha)$ mit jeder B-Klausel von $F(\alpha)$ invers verschränkt.

(<u>189</u>)

$F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann enthält die Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$ als Teilmenge.

Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

ii 2) WZo_1 sei eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 3) Dann gibt es mindestens eine Klausel, die eine Teilmenge der Klausel von WZo_1 und eine A-Klausel von $F(\alpha)$ ist.

ii 4) Und es gibt mindestens eine optimal kleine Klausel, die eine Teilmenge der Klausel von WZo_1 und eine A-Klausel von $F(\alpha)$ ist. Eine solche sei β.

ii 5) Da jede echte Teilmenge von β auch eine Teilmenge der Klausel von WZo_1, und kleiner als diese ist, kann es keine Klausel geben, die eine echte Teilmenge von β, und zugleich eine A-Klausel von $F(\alpha)$ ist.

ii 6) Also ist β eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 7) Also enthält die Klausel von WZo_1 mindestens eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$ als Teilmenge.

i 8) Also enthält die Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$ als Teilmenge.

(190)

$F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann enthält die Klausel jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens eine basale B-Klausel von $F(\alpha)$ als Teilmenge.

Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

ii 2) WZo_1 sei eine fasifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 3) Dann gibt es mindestens eine Klausel, die eine Teilmenge der Klausel von WZo_1 und eine B-Klausel von $F(\alpha)$ ist.

ii 4) Und es gibt mindestens eine optimal kleine Klausel, die eine Teilmenge der Klausel von WZo_1 und eine B-Klausel von $F(\alpha)$ ist. Eine solche sei β.

ii 5) Da jede echte Teilmenge von β auch eine Teilmenge der Klausel von WZo_1, und kleiner als diese ist, kann es keine Klausel geben, die eine echte Teilmenge von β, und zugleich eine B-Klausel von $F(\alpha)$ ist.

ii 6) Also ist β eine basale B-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 7) Also enthält die Klausel von WZo_1 mindestens eine basale B-Klausel von $F(\alpha)$ als Teilmenge.

i 8) Also enthält die Klausel jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens eine basale B-Klausel von $F(\alpha)$ als Teilmenge.

(191) >

a sei eine Ao ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a sei identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von $F(\alpha)$ und die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a sei identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von $F(\alpha)$. Dann ist a eine wAo, und $F(\alpha)$ entspricht a.

Beweis:

i 1) a sei eine Ao ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a sei identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von F(α).

i 4) Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a sei identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von F(α).

ii 5) A_1 sei eine homogene Reihenauswahl von a.

ii 6) Dann enthält A_1 mindestens eine basale Reihenauswahl von a als Teilmenge. Eine solche sei A_2.

ii 7) A_2 ist homogen.

ii 8) Also ist die Klausel von A_2 auch die Umkehrung einer basalen B-Klausel von F(α).

ii 9) Die Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) ist eine A-Klausel von F(α).

ii 10) Da jede B-Klausel von F(α) mit jeder A-Klausel von F(α) invers verschränkt ist, hat die Umkehrung jeder B-Klausel von F(α) mit jeder A-Klausel von F(α) mindestens ein Element gemeinsam.

ii 11) Also hat die Klausel von A_2, und so auch die Klausel von A_1, mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam.

i 12) Also hat die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von F(α) mindestens ein Element gemeinsam.

ii 13) A_1 sei eine homogene Kolonnenauswahl von a.

ii 14) Dann enthält A_1 mindestens eine basale Kolonnenauswahl von a als Teilmenge. Eine solche sei A_2.

ii 15) A_2 ist homogen.

ii 16) Also ist die Klausel von A_2 auch eine basale A-Klausel von F(α).

ii 17) Die Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) ist eine B-Klausel von F(α).

ii 18) Jede A-Klausel von F(α) ist mit jeder B-Klausel von F(α) invers verschränkt.

ii 19) Also ist die Klausel von A_2, und so auch die Klausel von A_1, mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

i 20) Also ist die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

i 21) Also ist a eine wAo, und F(α) entspricht a.

(192) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. F(α) soll a entsprechen. Dann enthält die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a die Umkehrung mindestens einer B-Klausel von

$F(\alpha)$.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F(\alpha)$ soll a entsprechen.

ii 4) A_1 sei eine homogene Reihenauswahl von a.

ii 5) Da $F(\alpha)$ a entspricht, hat die Klausel von A_1 mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element gemeinsam.

ii 6) $F(\alpha)$ hat mindestens eine verifizierende WZo.

ii 7) Also enthält die Klausel von A_1 mindestens ein Element, das eine basale wff ist zu einem Satzbuchstaben, der in einem Element von α vorkommt.

ii 8) β sei die Menge aller Elemente der Klausel von A_1, die basale wffs sind zu Satzbuchstaben, die jeweils in einem Element von α vorkommen.

ii 9) β hat mindestens ein Element.

ii 10) γ sei diejenige Klausel, deren Umkehrung β ist.

ii 11) Da A_1 homogen ist, ist β konsistent. Ebenso γ.

ii 12) Also gibt es mindestens eine WZo von $F(\alpha)$, deren Klausel γ enthält.

ii 13) Da die Klausel von A_1 mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element gemeinsam hat, und jedes solche gemeinsame Element auch in β enthalten ist, hat β mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element gemeinsam.

ii 14) Also ist γ mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ invers verschränkt.

ii 15) Also ist γ in der Klausel keiner verifizierenden WZo enthalten.

ii 16) Also gibt es mindestens eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$, die γ enthält.

ii 17) Also ist γ eine B-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 18) Also enthält die Klausel von A_1 die Umkehrung mindestens einer B-Klausel von $F(\alpha)$.

i 19) Also enthält die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a die Umkehrung mindestens einer B-Klausel von $F(\alpha)$.

(<u>193</u>) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Dann enthält die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mindestens eine A-Klausel von F(α).

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) F(α) soll a entsprechen.

ii 4) A_1 sei eine homogene Kolonnenauswahl von a.

ii 5) Da F(α) a entspricht, ist A_1 mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

ii 6) F(α) hat mindestens eine falsifizierende WZo.

ii 7) Also enthält die Klausel von A_1 mindestens ein Element, das eine basale wff ist zu einem Satzbuchstaben, der in einem Element von α vorkommt.

ii 8) β sei die Menge aller Elemente der Klausel von A_1, die basale wffs sind zu Satzbuchstaben, die jeweils in einem Element von α vorkommen.

ii 9) β hat mindestens ein Element.

ii 10) Da A_1 homogen ist, ist β konsistent.

ii 11) Also gibt es mindestens eine WZo von F(α), deren Klausel β enthält.

ii 12) Da die Klausel von A_1 mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt ist, und jedes Element von A_1, dessen Umkehrung in der Klausel einer WZo von F(α) enthalten ist, auch ein Element von β ist, ist β mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von F(α) invers verschränkt.

ii 13) Also ist β in der Klausel keiner falsifizierenden WZo enthalten.

ii 14) Also gibt es mindestens eine verifizierende WZo von F(α), die β enthält.

ii 15) Also ist β eine A-Klausel von F(α).

ii 16) Also enthält die Klausel von A_1 mindestens eine A-Klausel von F(α).

i 17) Also enthält die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl a von mindestens eine A-Klausel von F(α).

(<u>194</u>) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. F(α) soll a entsprechen. Dann enthält jede A-Klausel von F(α) die Klausel mindestens einer Kolonnenauswahl von a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) F(α) soll a entsprechen.

ii 4) β sei eine A-Klausel von F(α).

iii 5) d(a) sei eine Kolonne von a, γ die Klausel von d(a).

iii 6) Da der RC-Typ von d(a) auch eine Reihenauswahl von a ist, und homogen ist, ist γ zugleich die Klausel einer homogenen Reihenauswahl von a.

iii 7) Die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a enthält die Umkehrung mindestens einer B-Klausel von F(α).

iii 8) Also enthält γ die Umkehrung mindestens einer B-Klausel von F(α). Eine solche B-Klausel von F(α) sei δ.

iii 9) Da jede A-Klausel von F(α) mit jeder B-Klausel von F(α) invers verschränkt ist, sind β und δ invers verschränkt.

iii 10) Also haben β und die Umkehrung von δ mindestens ein gemeinsames Element.

iii 11) Also haben auch β und γ mindestens ein gemeinsames Element.

iii 12) Also hat β mit der Klausel von d(a) mindestens ein Element gemeinsam.

ii 13) Also hat β mit der Klausel jeder Kolonne von a mindestens ein Element gemeinsam.

ii 14) Also enthält β die Klausel mindestens einer Kolonnenauswahl von a.

i 15) Also enthält jede A-Klausel von F(α) die Klausel mindestens einer Kolonnenauswahl von a.

(195) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. F(α) soll a entsprechen. Dann enthält die Umkehrung jeder B-Klausel von F(α) die Klausel mindestens einer Reihenauswahl von a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) F(α) soll a entsprechen.

ii 4) β sei eine B-Klausel von F(α).

iii 5) d(a) sei eine Reihe von a, γ die Klausel von d(a).

iii 6) Da der RC-Typ von d(a) auch eine Kolonnenauswahl von a ist, und homogen ist, ist γ zugleich die Klausel einer homogenen Kolonnenauswahl von a.

iii 7) Die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a enthält mindestens eine A-Klausel von F(α).

iii 8) Also enthält γ mindestens eine A-Klausel von $F(\alpha)$. Eine solche sei δ.

iii 9) Da jede A-Klausel von $F(\alpha)$ mit jeder B-Klausel von $F(\alpha)$ invers verschränkt ist, sind δ und β invers verschränkt.

iii 10) Also hat die Umkehrung von β mit δ mindestens ein Element gemeinsam.

iii 11) Also hat die Umkehrung von β auch mit γ mindestens ein Element gemeinsam.

iii 12) Also hat die Umkehrung von β mit der Klausel von d(a) mindestens ein Element gemeinsam.

ii 13) Also hat die Umkehrung von β mit der Klausel jeder Reihe von a mindestens ein Element gemeinsam.

ii 14) Also enthält die Umkehrung von β die Klausel mindestens einer Reihenauswahl von a.

i 15) Also enthält die Umkehrung jeder B-Klausel von $F(\alpha)$ die Klausel mindestens einer Reihenauswahl von a.

(196) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Dann ist die Klausel jeder homogenen basalen Reihenauswahl von a auch die Umkehrung einer basalen B-Klausel von $F(\alpha)$.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F(\alpha)$ soll a entsprechen.

ii 4) A_1 sei eine homogene basale Reihenauswahl von a.

ii 5) Dann enthält die Klausel von A_1 die Umkehrung mindestens einer B-Klausel von $F(\alpha)$. Da jede B-Klausel von $F(\alpha)$ mindestens eine basale B-Klausel von $F(\alpha)$ enthält, enthält die Klausel von A_1 die Umkehrung mindestens einer basalen B-Klausel von $F(\alpha)$. Eine solche basale B-Klausel von $F(\alpha)$ sei β.

ii 6) Die Umkehrung von β enthält die Klausel mindestens einer Reihenauswahl von a. Eine solche Reihenauswahl sei A_2.

iii 7) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, die Umkehrung von β sei eine echte Teilmenge der Klausel von A_1.

iii 8) Dann ist auch die Klausel von A_2 eine echte Teilmenge der Klausel von A_1.

iii 9) Also ist A_2 eine echte Teilmenge von A_1.

iii 10) A_2 ist eine Reihenauswahl von a.

iii 11) Also enthält A_1 mindestens eine Reihenauswahl von a als echte Teilmenge.

iii 12) Also ist A_1 keine basale Reihenauswahl von a.

iii 13) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 14) Also ist die Umkehrung von β keine echte Teilmenge der Klausel von A_1.

ii 15) Also ist die Umkehrung von β identisch mit der Klausel von A_1.

ii 16) Also ist die Klausel von A_1 die Umkehrung einer basalen B-Klausel von $F(\alpha)$.

i 17) Also ist die Klausel jeder homogenen basalen Reihenauswahl von a die Umkehrung einer basalen B-Klausel von $F(\alpha)$.

(197) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Dann ist die Klausel jeder homogenen basalen Kolonnenauswahl von a auch eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F(\alpha)$ soll a entsprechen.

ii 4) A_1 sei eine homogene basale Kolonnenauswahl von a.

ii 5) Dann enthält die Klausel von A_1 mindestens eine A-Klausel von $F(\alpha)$. Da jede A-Klausel von $F(\alpha)$ mindestens eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$ enthält, enthält die Klausel von A_1 mindestens eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$. Eine solche basale A-Klausel von $F(\alpha)$ sei β.

ii 6) β enthält die Klausel mindestens einer Kolonnenauswahl von a. Eine solche Kolonnenauswahl sei A_2.

iii 7) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, β sei eine echte Teilmenge der Klausel von A_1.

iii 8) Dann ist auch die Klausel von A_2 eine echte Teilmenge der Klausel von A_1.

iii 9) Also ist A_2 eine echte Teilmenge von A_1.

iii 10) A_2 ist eine Kolonnenauswahl von a.

iii 11) Also enthält A_1 mindestens eine Kolonnenauswahl von a als echte Teilmenge.

iii 12) Also ist A_1 keine basale Kolonnenauswahl von a.

iii 13) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 14) Also ist β keine echte Teilmenge der Klausel von A_1.

ii 15) Also ist β identisch mit der Klausel von A_1.

ii 16) Also ist die Klausel von A_1 eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$.

i 17) Also ist die Klausel jeder homogenen basalen Kolonnenauswahl von a eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$.

(198) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Dann ist jede basale A-Klausel von $F(\alpha)$ auch die Klausel einer homogenen basalen Kolonnenauswahl von a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F(\alpha)$ soll a entsprechen.

ii 4) β sei eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 5) Dann enthält β die Klausel mindestens einer Kolonnenauswahl von a. Da jede Kolonnenauswahl von a mindestens eine basale Kolonnenauswahl von a enthält, enthält β die Klausel mindestens einer basalen Kolonnenauswahl von a. Eine solche basale Kolonnenauswahl von a sei A_1.

ii 6) Da die Klausel von A_1 eine Teilmenge von β ist, ist A_1 homogen.

ii 7) Also ist die Klausel von A_1 eine basale A-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 8) Da keine A-Klausel von $F(\alpha)$ eine echte Teilmenge von β ist, ist die Klausel von A_1 mit β identisch.

ii 9) Also ist β die Klausel einer homogenen basalen Kolonnenauswahl von a.

i 10) Also ist jede basale A-Klausel von $F(\alpha)$ die Klausel einer homogenen basalen Kolonnenauswahl von a.

(199) >

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Dann ist die Umkehrung jeder basalen B-Klausel von $F(\alpha)$ auch die Klausel einer homogenen basalen Reihenauswahl von a.

Beweis:

i 1) a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.

i 2) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 3) $F(\alpha)$ soll a entsprechen.

ii 4) β sei eine basale B-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 5) Dann enthält die Umkehrung von β die Klausel mindestens einer Reihenauswahl von a. Da jede Reihenauswahl von a mindestens eine basale Reihenauswahl von a enthält, enthält die Umkehrung von β die Klausel mindestens einer basalen Reihenauswahl von a. Eine solche basale Reihenauswahl von a sei A_1.

ii 6) Da die Klausel von A_1 eine Teilmenge der Umkehrung von β ist, ist A_1 homogen.

ii 7) Also ist die Klausel von A_1 die Umkehrung einer basalen B-Klausel von $F(\alpha)$.

ii 8) Keine B-Klausel von $F(\alpha)$ ist eine echte Teilmenge von β.

ii 9) Also ist die Umkehrung keiner B-Klausel von $F(\alpha)$ eine echte Teilmenge der Umkehrung von β.

ii 10) Also ist die Klausel von A_1 keine echte Teilmenge der Umkehrung von β.

ii 11) Also ist die Klausel von A_1 identisch mit der Umkehrung von β.

ii 12) Also ist die Umkehrung von β die Klausel einer homogenen basalen Reihenauswahl von a.

i 13) Also ist die Umkehrung jeder basalen B-Klausel von $F(\alpha)$ die Klausel einer homogenen basalen Reihenauswahl von a.

Also gilt:

(200) °

a sei eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. $F(\alpha)$ soll a entsprechen. Dann gilt: Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von $F(\alpha)$, und die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von $F(\alpha)$.

(201) >

a sei eine Ao ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Es soll nicht gelten: Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von $F(\alpha)$, und die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von $F(\alpha)$. Dann ist a keine wAo, oder a ist eine wAo, aber $F(\alpha)$ entspricht nicht a.

Beweis:

1) a sei eine Ao ohne inhomogene Reihen und Kolonnen.
2) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.
3) Es soll nicht gelten: Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von F(α), und die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von F(α).
4) Wir nehmen an das Gegenteil des zu Beweisenden, a sei eine wAo und F(α) entspeche a.
5) Dann ist a eine wAo ohne inhomogene Reihen und Kolonnen, F(α) eine nicht konstante mWF, und F(α) entspricht a.
6) Also ist die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von F(α), und es ist die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von F(α).
7) Dies ergibt einen Widerspruch.
8) Also ist a entweder keine wAo, oder a ist eine wAo, aber F(α) entspricht nicht a.

Wir fassen die Sätze 191 und 201 zusammen:

(<u>202</u>)

a sei eine Ao ohne inhomogene Reihen und Kolonnen. F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gilt: a ist eine wAo und F(α) entspricht a, genau dann, wenn gilt: Die Menge der Klauseln der homogenen basalen Reihenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der Umkehrungen der basalen B-Klauseln von F(α), und die Menge der Klauseln der homogenen basalen Kolonnenauswahlen von a ist identisch mit der Menge der basalen A-Klauseln von F(α).

8.6 TABELLARISCHE ÜBERGÄNGE

8.6.1 *Das Verfahren V1*

Wir definieren ein Verfahren V1, das jeder nicht konstanten mWF einer Menge von Atomformeln mindestens eine Ao zuordnet. F(α) sei eine mWF einer Menge α von Atomformeln, a sei eine Ao, und V1 soll F(α) a zuordnen. Dann ist a eine wAo und F(α) entspricht a.

Das Verfahren V1:

Gegeben sei eine nicht konstante mWF F(α) einer Menge α von Atomformeln.

1) Es wird eine Tabelle angelegt, mit so vielen Zeilen, wie F(α) verifizierende WZon hat, und so vielen Spalten, wie F(α) falsifizierende WZon hat.
2) Jeder verifizierenden WZo von F(α) wird eine Zeile und jeder falsifizierenden WZo von F(α) eine Spalte der Tabelle zugeordnet.
3) In jedes Feld der Tabelle wird eine basale wff eingetragen. Diese muß sowohl ein Element der Klausel derjenigen verifizierenden WZo von F(α) sein, der die Zeile des Feldes zugeordnet ist, als auch ein Element der Umkehrung der Klausel derjenigen falsifizierenden WZo von F(α), der die Spalte des Feldes zugeordnet ist. (Ein Eintrag ist immer möglich; vgl. Satz 173)
4) Zuletzt wird in jedem Feld die eingetragene wff durch einen Balken von N ersetzt, wobei der Typ so zu wählen ist, daß der Balken die betreffende wff als L'-Resultat hat.

(203)

F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. a sei eine Ao, die F(α) durch V1 zugeordnet wird. Dann ist a eine wAo und F(α) entspricht a.

Beweis:

i 1) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

i 2) a sei eine Ao, die F(α) durch V1 zugeordnet wird.

i 3) Da jeder verifizierenden WZo von F(α) eine Zeile der Tabelle für a zugeordnet ist, und diese Zeile nur wffs enthält, die Elemente der Klausel dieser WZo sind, hat die Klausel jeder homogenen Reihenauswahl von a mit der Klausel jeder verifizierenden WZo von $F(\alpha)$ mindestens ein Element gemeinsam.

i 4) Da jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ eine Spalte der Tabelle für a zugeordnet ist, und diese Spalte nur wffs enthält, die Elemente der Umkehrung der Klausel dieser WZo sind, ist die Klausel jeder homogenen Kolonnenauswahl von a mit der Klausel jeder falsifizierenden WZo von $F(\alpha)$ invers verschränkt.

i 5) Also ist a eine wAo, und $F(\alpha)$ entspricht a.

Wir werden nun das Verfahren V1 erweitern:

$F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Es werde für $F(\alpha)$ eine Tabelle angelegt, wie beschrieben, nur mit dem Unterschied, daß in jedes Feld der Tabelle alle für das Feld vorhandenen Optionen eingetragen werden. Diese Tabelle heißt die allgemeine V1-Tabelle von $F(\alpha)$.

Eine wff, die in mindestens einem Feld der Tabelle als einzige Option für dieses Feld aufscheint, nennen wir essentiell in der Tabelle.

Scheint eine wff in mindestens einem Feld einer bestimmten Zeile bzw. Spalte der Tabelle als einzige Option auf, dann heißt sie essentiell in dieser Zeile bzw. Spalte.

Eine Zeile bzw. Spalte, die vollständig mit wffs ausgefüllt werden kann, die in dieser Zeile bzw. Spalte essentiell sind, heißt essentiell.

(204)

$F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gibt es in jedem Feld der allgemeinen V1-Tabelle von $F(\alpha)$ mindestens eine wff, die in der Tabelle essentiell ist.

Beweis:

i 1) $F(\alpha)$ sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

ii 2) Fd_1 sei ein Feld der allgemeinen V1-Tabelle von $F(\alpha)$.

ii 3) WZo_1 sei die WZo, der die Zeile von Fd_1 zugeordnet ist.

ii 4) WZo_2 sei die WZo, der die Spalte von Fd_1 zugeordnet ist.

ii 5) Wir stellen eine Reihe R von WZon für α her wie folgt: [*e.*]

a) Das erste Glied von R ist WZo_1.

b) Wir erzeugen so lang als möglich zum jeweils letzen Glied ein Nachfolgeglied, indem wir bei genau einem Element von α den Wert abändern, und zwar bei einem Element, bei dem WZo_2 von WZo_1 abweicht, und dieses letzte Glied, sofern es nicht WZo_1 ist, mit WZo_1 übereinstimmt.
(Da WZo_1 und WZo_2 nicht identisch sind, läßt sich mindestens ein Nachfolgeglied erzeugen.)

c) Die Reihe endet mit WZo_2.

ii 6) WZo_2 ist eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 7) Also enthält R mindestens eine falsifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 8) WZo_3 sei diejenige in R vorkommende, falsifizierende WZo von $F(\alpha)$, welche in R am weitesten vorne gereiht ist.

ii 9) WZo_1 ist eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 10) Also ist WZo_3 nicht WZo_1.

ii 11) Also hat WZo_3 ein Vorgängerglied in R. Dieses sei WZo_4.

ii 12) WZo_4 ist eine verifizierende WZo von $F(\alpha)$.

ii 13) WZo_4 ist eine Zeile der allgemeinen V1-Tabelle von $F(\alpha)$ zugeordnet, WZo_3 eine Spalte. Fd_2 sei das Kreuzungsfeld dieser beiden. [*e*.]

ii 14) WZo_4 und WZo_3 unterscheiden sich bei genau einem Element φ von α.

ii 15) Und es stimmt bei φ WZo_4 mit WZo_1 überein, und weicht von WZo_2 ab.

ii 16) ψ sei diejenige basale wff mit der Teilformel φ, die ein Element der Klausel von WZo_4 ist.

ii 17) Es ist die Umkehrung von ψ ein Element der Klausel von WZo_3.

ii 18) Also ist ψ in Fd_2 enthalten.

ii 19) Da WZo_4 und WZo_3 sich nur bei φ unterscheiden, ist ψ die einzige Option für Fd_2.

ii 20) Also ist ψ essentiell in der Tabelle.

ii 21) ψ ist ein Element der Klausel von WZo_1.

ii 22) Und es ist die Umkehrung von ψ ein Element der Klausel von WZo_2.

ii 23) Also ist ψ in Fd_1 enthalten.

ii 24) Also gibt es in Fd_1 mindestens eine wff, die in der Tabelle essentiell ist.

i 25) Also gibt es in jedem Feld der allgemeinen V1-Tabelle von $F(\alpha)$ mindestens eine wff, die in der Tabelle essentiell ist.

(205)

F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln. Dann gibt es in jedem Feld der allgemeinen V1-Tabelle von F(α), das ein Kreuzungsfeld einer essentiellen Zeile und einer essentiellen Spalte ist, mindestens eine wff, die sowohl in der Zeile des Feldes als auch in der Spalte des Feldes essentiell ist.

Beweis:

i 1) F(α) sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

ii 2) Fd_1 sei ein Feld der allgemeinen V1-Tabelle von F(α), das ein Kreuzungsfeld einer essentiellen Zeile und einer essentiellen Spalte ist.

ii 3) WZo_1 sei die WZo, der die Zeile von Fd_1 zugeordnet ist.

ii 4) WZo_2 sei die WZo, der die Spalte von Fd_1 zugeordnet ist.

ii 5) β sei die Menge der wffs, die essentiell sind in der Zeile von Fd_1

ii 6) γ sei die Menge der wffs, die essentiell sind in der Spalte von Fd_1.

ii 7) β ist eine A-Klausel von F(α), und γ ist die Umkehrung einer B-Klausel von F(α).

ii 8) Also haben β und γ mindestens ein gemeinsames Element. Ein soches sei φ.

ii 9) φ ist in der Klausel von von WZo_1 und in der Umkehrung der Klausel von WZo_2 enthalten.

ii 10) Also ist φ in Fd_1 enthalten.

ii 11) φ ist sowohl in der Zeile von Fd_1 als auch in der Spalte von Fd_1 essentiell.

ii 12) Also enthält Fd_1 mindestens eine wff, die sowohl in der Zeile von Fd_1 als auch in der Spalte von Fd_1 essentiell ist.

i 13) Also gibt es in jedem Feld der allgemeinen V1-Tabelle von F(α), das ein Kreuzungsfeld einer essentiellen Zeile und einer essentiellen Spalte ist, mindestens eine wff, die sowohl in der Zeile des Feldes als auch in der Spalte des Feldes essentiell ist.

Das erweiterte Verfahren V1:

Gegeben sei eine nicht konstante mWF einer Menge α von Atomformeln.

1) Wir stellen die allgemeine V1-Tabelle von F(α) her.
2) Unter Umständen können oder müssen Zeilen, Spalten, oder einzelne wffs in bestimmten Feldern gestrichen werden. Die gestrichenen Zeilen, Spalten, wffs sind im weiteren Verlauf der Prozedur zu ignorieren.

Die in Bezug auf die allgemeine V1-Tabelle eingeführten Definitionen sind auch auf ihre Reduktionsstufen anzuwenden.

3) In einem ersten Schritt werden in jedem Feld alle wffs gestrichen, die in der allgemeinen V1-Tabelle nicht essentiell sind. (Dies ist immer möglich; vgl. Satz 204)
4) Grundsätzlich werden in jedem Feld einer essentiellen Zeile alle wffs gestrichen, die in der Zeile nicht essentiell sind.
5) Ebenso werden grundsätzlich in jedem Feld einer essentiellen Spalte alle wffs gestrichen, die in der Spalte nicht essentiell sind.
6) Zwei Zeilen, die in jeder Spalte in den Feldern dieser Spalte mindestens eine wff gemeinsam haben, können zusammengelegt werden wie folgt: Eine Zeile wird gestrichen, in der anderen Zeile werden in jedem Feld alle wffs gestrichen, die im wegfallenden Feld derselben Spalte nicht enthalten sind.
7) Ebenso können zwei Spalten, die in jeder Zeile in den Feldern dieser Zeile mindestens eine wff gemeinsam haben, zusammengelegt werden wie folgt: Eine Spalte wird gestrichen, in der anderen Spalte werden in jedem Feld alle wffs gestrichen, die im wegfallenden Feld derselben Zeile nicht enthalten sind.
8) Es wird immer zuerst versucht, essentielle Zeilen untereinander zusammenzulegen, dann nicht essentielle Zeilen mit einer essentiellen Zeile, dann nicht essentielle Zeilen untereinander.
9) Dasselbe gilt für die Spalten.
10) Die Tabelle wird verkleinert, solang dies möglich ist. Dann wird in jedem Feld eine wff ausgewählt und der Vorschrift entsprechend durch einen Balken von N ersetzt.

α sei eine (nichtleere) Menge von Atomformeln mit n Elementen. Die allgemeine V1-Tabelle einer nicht konstanten mWF von α hat genau dann ein Maximum an Feldern, wenn die Anzahl der verifizierenden und der falsifizierenden WZon von $F(\alpha)$ gleich groß ist.

Dies zeigt folgende Überlegung:

u sei 2^n, die Anzahl der WZon einer mWF von $F(\alpha)$.

Wir legen zunächst eine Tabelle für die gleiche Anzahl verifizierender und falsifizierender WZon an, also eine quadratische Tabelle mit u/2 Zeilen und u/2 Spalten. Die Felder der Tabelle sollen quadratisch sein.

Nun werde die Anzahl der verfizierenden WZon um eine beliebige Zahl $x(1 \leq x < u/2)$ gesenkt.
Dann erhöht sich, da die Summe aus verifizierenden und falsifizierenden WZon gleich u bleibt, die Anzahl der falsifizierenden WZon um x.
Damit vermindert sich die Zahl der Zeilen der Tabelle um x und es erhöht sich die Zahl der Spalten der Tabelle um x.
Um aus der quadratischen Tabelle eine querrechteckige Tabelle mit (u/2)-x Zeilen und (u/2)+x Spalten zu erzeugen, schneiden wir am unteren Rand einen Block von x Zeilen ab, drehen ihn um 90°, und hängen ihn am rechten Rand der Tabelle an.
Da die neueTabelle nun x Zeilen weniger hat, als die quadratische Spalten, bleiben x^2 Felder übrig.
Die Anzahl der Felder der Tabelle ist also geringer als vorher.
Nun erhöhen wir, wiederum ausgehend von der gleichen Anzahl verifizierender und falsifizierender WZon, die Anzahl der verfizierenden WZon um eine beliebige Zahl $x(1 \leq x < u/2)$.
Dann vermindert sich, da die Summe aus verifizierenden und falsifizierenden WZon gleich u bleibt, die Anzahl der falsifizierenden WZon um x.
Damit erhöht sich die Zahl der Zeilen der Tabelle um x, und es vermindert sich die Zahl der Spalten der Tabelle um x.
Um aus der quadratischen Tabelle eine hochrechteckige Tabelle mit (u/2)+x Zeilen und (u/2)-x Spalten zu erzeugen, schneiden wir am rechten Rand einen Block von x Spalten ab, drehen ihn um 90°, und hängen ihn am unteren Rand der Tabelle an.
Da die neueTabelle nun x Spalten weniger hat, als die quadratische Zeilen, bleiben x^2 Felder übrig.
Die Anzahl der Felder der Tabelle ist also wiederum geringer als vorher.

(206)

α sei eine (nichtleere) Menge von Atomformeln mit n Elementen. Dann gibt es zu jeder nicht konstanten mWF $F(\alpha)$ von α mindestens eine wAo a mit höchstens 2^{2n-2} Balken, sodaß $F(\alpha)$ a entspricht.

8.6.2 *Das Verfahren V2*

Wir definieren ein Verfahren V2. φ sei eine wff in KNF ohne gültige Konjunkte, ψ eine wff in DNF ohne unerfüllbare Disjunkte. φ und ψ seien äquivalent. Dann ordnet V2 dem Paar (φ, ψ) mindestens eine Ao zu, und für jede Ao a, die V2 dem Paar (φ, ψ) zuordnet, gilt: a ist eine wAo, und L1(a) ist äquivalent mit φ und ψ.

(207)
Ein Konjunkt einer wff in KNF ist gültig, genau dann, wenn die Klausel dieses Konjunkts nicht konsistent ist.

(208)
Ein Disjunkt einer wff in DNF ist unerfüllbar, genau dann, wenn die Klausel dieses Disjunkts nicht konsistent ist.

(209)
φ sei eine wff in KNF ohne gültige Konjunkte, ψ eine wff in DNF ohne unerfüllbare Disjunkte. φ und ψ seien äquivalent. Dann hat die Klausel eines jeden Konjunkts von φ mit der Klausel eines jeden Disjunkts von ψ mindestens ein Element gemeinsam.
Beweis:

i 1) φ sei eine wff in KNF ohne gültige Konjukte.
i 2) ψ sei eine wff in DNF ohne unerfüllbare Disjunkte.
i 3) φ und ψ seien äquivalent.
ii 4) (φ_1, ψ_1) sei ein Paar, bestehend aus einem Konjunkt von φ und einem Disjunkt von ψ.
iii 5) Angenommen, das Gegenteil des zu Beweisenden, die Klausel von φ_1 und die Klausel von ψ_1 haben kein gemeinsames Element.
iii 6) Dann gibt es, da die Klauseln von φ und ψ konsistent sind, mindestens eine Bewertung, bei der alle Elemente der Klausel von ψ_1 wahr und alle Elemente der Klausel von φ_1 falsch sind. B sei eine solche Bewertung.
iii 7) Also ist jedes Konjunkt von ψ_1 wahr und jedes Disjunkt von φ_1 falsch.
iii 8) Also ist ψ_1 und auch ψ wahr bei B.
iii 9) Und es ist φ_1 und auch φ falsch bei B.
iii 10) Es gibt also mindestens eine Bewertung, bei der φ und ψ im Wert differieren.
iii 11) Also sind φ und ψ nicht äquivalent.

iii 12) Dies ergibt einen Widerspruch.

ii 13) Also hat die Klausel von φ_1 mit der Klausel von ψ_1 mindestens ein Element gemeinsam.

i 14) Also hat die Klausel eines jeden Konjunkts von φ mit der Klausel eines jeden Disjunkts von ψ mindestens ein Element gemeinsam.

Das Verfahren V2:

Gegeben sei eine wff φ in KNF ohne gültige Konjunkte und eine wff ψ in DNF ohne unerfüllbare Disjunkte. φ und ψ seien äquivalent.

1) Es wird eine Tabelle angelegt mit so vielen Zeilen, wie ψ Disjunkte hat und so vielen Spalten wie φ Konjunkte hat.
2) Jedem Disjunkt von ψ wird eine Zeile der Tabelle und jedem Konjunkt von φ eine Spalte der Tabelle zugeordnet.
3) In jedes Feld der Tabelle wird eine basale wff eingetragen. Diese muß sowohl ein Element der Klausel desjenigen Disjunkts von ψ sein, dem die Zeile des Feldes zugeordnet ist, als auch ein Element der Klausel desjenigen Konjunkts von φ, dem die Spalte des Feldes zugeordnet ist. (Ein Eintrag ist immer möglich; vgl. Satz 209)
4) Zuletzt wird in jedem Feld die eingetragene wff durch einen Balken von N ersetzt, wobei der Typ so zu wählen ist, daß der Balken die betreffende wff als L'-Resultat hat.

(210)

φ sei eine wff in KNF ohne gültige Konjunkte, ψ eine wff in DNF ohne unerfüllbare Disjunkte. φ und ψ seien äquivalent. a sei eine Ao, die dem Paar (φ, ψ) durch V2 zugeordnet wird. Dann ist a eine wAo, und L1(a) ist äquivalent mit φ und ψ.

Beweis:

i 1) φ sei eine wff in KNF ohne gültige Konjunkte.

i 2) ψ sei eine wff in DNF ohne unerfüllbare Disjunkte.

i 3) φ und ψ seien äquivalent.

i 4) a sei eine Ao, die dem Paar (φ, ψ) durch V2 zugeordnet wird.

ii 5) B sei eine Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist.

ii 6) Dann ist in jeder Spalte der Tabelle für a mindestens eine wff wahr.

ii 7) Da jedem Konjunkt von φ eine Spalte der Tabelle zugeordnet ist, und diese Spalte nur wffs enthält, die Elemente der Klausel dieses Konjunkts sind, ist in der Klausel jedes Konjunkts von φ mindestens ein Element wahr.

ii 8) Also ist in jedem Konjunkt von φ mindestens ein Disjunkt wahr.

ii 9) Also ist jedes Konjunkt von φ, und so auch φ wahr.

ii 10) Also ist auch ψ wahr.

ii 11) Also ist mindestens ein Disjunkt von ψ wahr.

ii 12) Also sind in mindestens einem Disjunkt von ψ alle Konjunkte, bzw. in der Klausel mindestens eines Disjunkts von ψ alle Elemente wahr.

ii 13) Da jedem Disjunkt von ψ eine Zeile der Tabelle für a zugeordnet ist, und diese Zeile nur wffs enthält, die Elemente der Klausel dieses Disjunkts sind, sind in mindestens einer Zeile der Tabelle sämtliche wffs wahr.

ii 14) Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr bei B.

i 15) Bei jeder Bewertung, bei der in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr ist, sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr.

i 16) Somit ist a semantisch orthogonal gebunden, syntaktisch orthogonal gebunden, eine wAo.

ii 17) B sei eine Bewertung, bei der φ wahr ist.

ii 18) Dann ist auch ψ wahr bei B.

ii 19) Also ist mindestens ein Disjunkt von ψ wahr.

ii 20) Also sind in mindestens einem Disjunkt von ψ alle Konjunkte, bzw. in der Klausel mindestens eines Disjunkts von ψ alle Elemente wahr.

ii 21) Da jedem Disjunkt von ψ eine Zeile der Tabelle für a zugeordnet ist, und diese Zeile nur wffs enthält, die Elemente der Klausel dieses Disjunkts sind, sind in mindestens einer Zeile der Tabelle sämtliche wffs wahr.

ii 22) Also sind in mindestens einer Reihe von a sämtliche Balken wahr.

ii 23) Also ist in jeder Kolonne von a mindestens ein Balken wahr.

ii 24) Also ist L1(a) wahr bei B.

i 25) Bei jeder Bewertung, bei der φ wahr ist, ist auch L1(a) wahr.

ii 26) B sei eine Bewertung, bei der φ falsch ist.

ii 27) Dann ist mindestens ein Konjunkt von φ falsch.

ii 28) Also sind in mindestens einem Konjunkt von φ alle Disjunkte, bzw. in der Klausel mindestens eines Konjunkts von φ alle Elemente falsch.

ii 29) Da jedem Konjunkt von φ eine Spalte der Tabelle für a zugeordnet ist, und diese Spalte nur wffs enthält, die Elemente der Klausel dieses Konjunkts sind, sind in mindestens einer Spalte der Tabelle sämtliche wffs falsch.

ii 30) Also sind in mindestens einer Kolonne von a sämtliche Balken falsch.

ii 31) Also ist L1(a) falsch bei B.

i 32) Bei jeder Bewertung, bei der φ falsch ist, ist auch L1(a) falsch.

i 33) Also sind φ und L1(a) äquivalent.

i 34) Also sind auch ψ und L1(a) äquivalent.

i 35) Also ist a eine wAo, und L1(a) ist äquivalent mit φ und ψ.

NACHWORT

Wir hätten das Zeichensystem N auch wie folgt interpretieren können:

1) Dem waagrechten Balkentyp jeder Balkenfarbe wird ein Satz zugewiesen.
2) Ist ein Satz wahr, so erhalten in jeder wAo alle Balken des korrelierenden Typs den Wert W und alle Balken des inversen Typs den Wert F.
3) Ist ein Satz falsch, so erhalten in jeder wAo alle Balken des korrelierenden Typs den Wert F und alle Balken des inversen Typs den Wert W.
4) Eine wAo stellt einen Satz dar, der wahr ist, wenn in mindestens einer Reihe alle Balken den Wert W haben, und falsch, wenn in mindestens einer Kolonne alle Balken den Wert F haben. (Der Fall, daß in jeder Reihe mindestens ein Balken den Wert F, und zugleich in jeder Kolonne mindestens ein Balken den Wert W hat, ist aufgrund der Struktur der wAon ausgeschlossen.)

Wir hätten dann mithilfe einer allgemeinen Regel allen wAon eine Bedeutung gegeben, und in der Folge auch den Verknüpfungsoperationen D, W, S usw. Diese Möglichkeit weist auf bestimmte ikonische Züge von N, die linearen aussagenlogischen Notationen fehlen. (Ein Ikon ist nach Charles S. Peirce ein Zeichen, das seinem Objekt nicht allein durch Konvention zugeordnet ist, sondern auch durch bestimmte, ihm innewohnende Merkmale.)
Dabei wird deutlich, daß die logischen Partikel 'es ist nicht der Fall, daß', 'und' und 'oder' einerseits als wahrheitsfunktionenbildende Operatoren fungieren, andererseits aber innerhalb des Konzepts der Wahrheitsspielräume auch auf strukturierende Grundkategorien zu beziehen sind.

ANHANG

BIPOLARITÄT

Das Konzept einer bipolaren aussagenlogischen Notation (Tractatus, 6.1203)[2] kann folgendermaßen abgeändert werden:

Als metasprachliche Variablen für Formeln der bipolaren Notation (BN) verwenden wir die Buchstaben 'i' und 'j'.
Dasjenige Gebilde, welches entsteht, wenn eine Formel von BN, eine solche besteht aus Buchstaben und Strichen, um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird und die Buchstaben wiederum ausgerichtet werden, heißt die Rotationsform der Formel.
Metasprachliche Varibalen für Rotationsformen, diese sind keine Formeln von BN, sind die Zeichen i° und j°. Wird in 'i' eine bestimmte Formel von BN eingesetzt, so ist in 'i°' ihre Rotationsform einzusetzen. Dasselbe gilt für 'j' und 'j°'.

Jeder wff von AL entspricht genau eine Formel von BN. φ sei eine wff von AL. Dann ist BN(φ) jene Formel von BN, die φ entspricht, und BN(φ)° die Rotationsform jener Formel.

<u>Übertragungsregeln</u>:

φ sei eine Atomformel von AL. Dann ist BN(φ) dieses Gebilde:

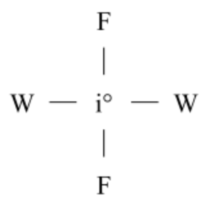
$$\begin{array}{ccc} & F & \\ W & \varphi & W \\ & F & \end{array}$$

Jede Formel von BN besitzt genau zwei Vorkommnisse des Buchstabens 'W', sodaß diese an drei Seiten frei sind, eine am linken, und eine am rechten Rand. Ebenso besitzt jede Formel genau zwei Vorkommnisse des Buchstabens 'F', sodaß diese an drei Seiten frei

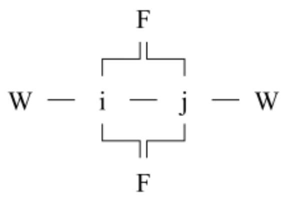
[2] S. auch: L. Wittgenstein, Briefe an B. Russell, November/Dezember 1913, in: Wittgenstein 1980, Briefe Nr. 28-30 und 32, S. 37-46 bzw. S. 242-245; L. Wittgenstein, Aufzeichnungen über Logik, 1913, in: Wittgenstein 1984, Bd. 1, S. 188-208; L. Wittgenstein, Aufzeichnungen, die G. E. Moore in Norwegen nach Diktat niedergeschrieben hat, April 1914, ebenda, S. 209-223.

sind, eine am oberen, und eine am unteren Rand. An diesen Punkten werden Formeln weiterverknüpft. Entsprechendes gilt für Rotationsformen.

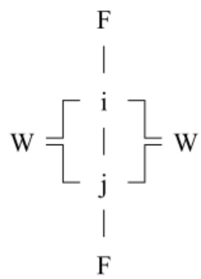
φ sei eine wff von AL. i sei BN(φ). Dann ist BN(¬φ) dieses Gebilde:



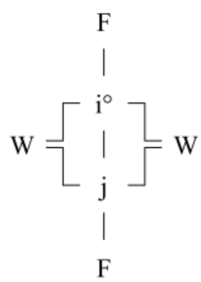
φ, ψ seien wffs von AL. i sei BN(φ), und j sei BN(ψ). Dann ist BN(φ∧ψ) dieses Gebilde:



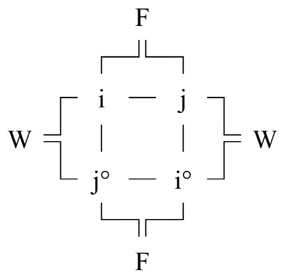
BN(φ∨ψ) ist dieses Gebilde:



BN(φ→ψ) ist dieses Gebilde:



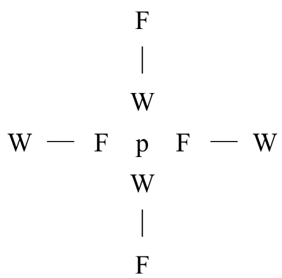
Und BN(φ≡ψ) ist dieses Gebilde:



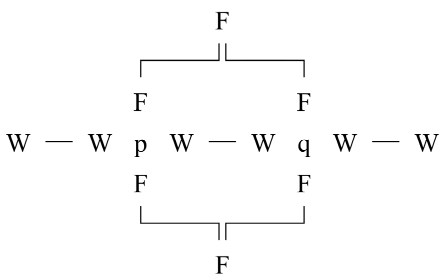
Beispiele:

BN(p)

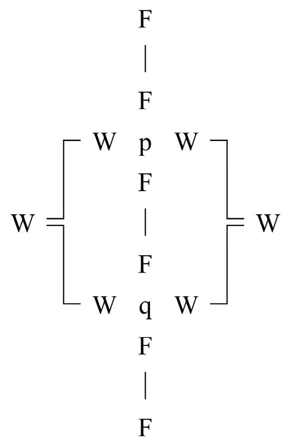
BN(¬p)



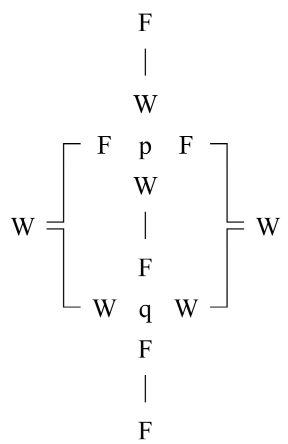
BN(p∧q)



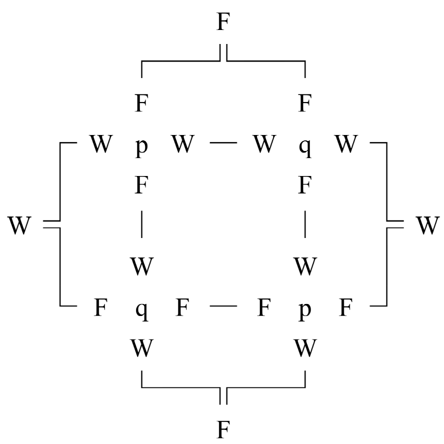
BN(p∨q)



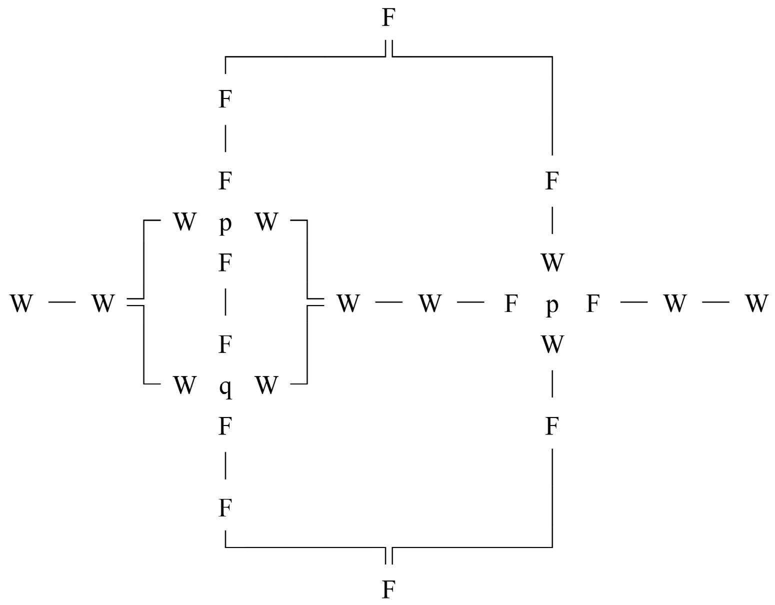
BN(p→q)



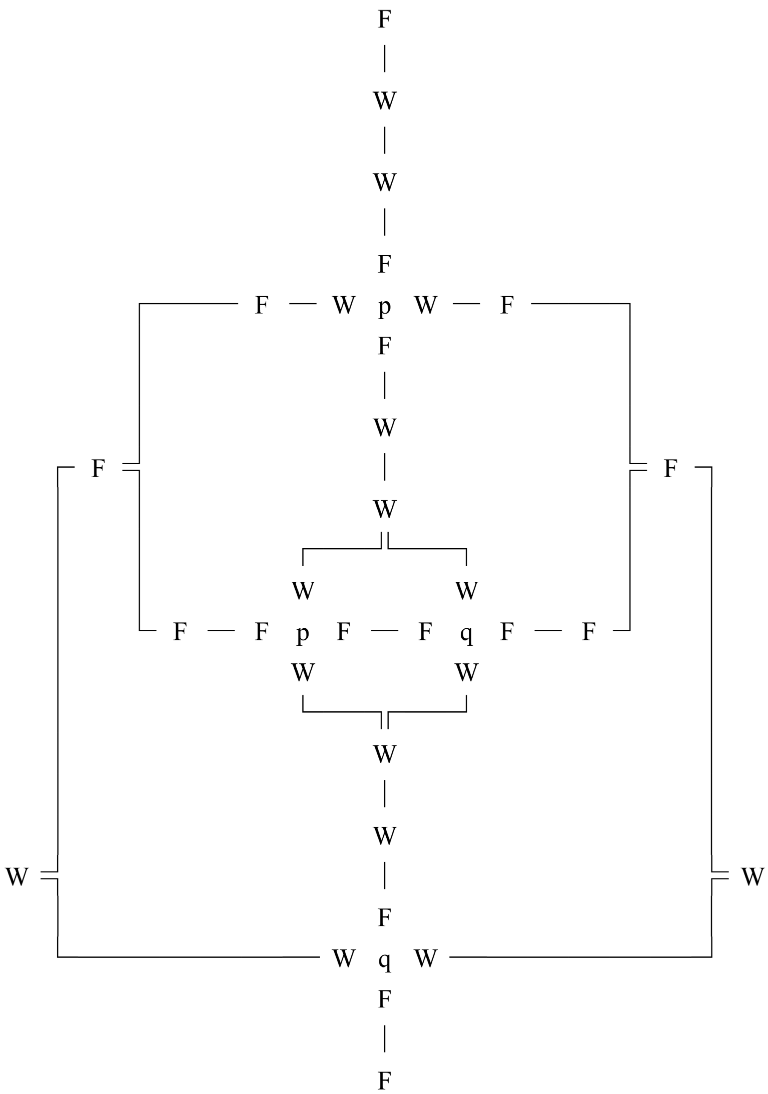
BN(p≡q)



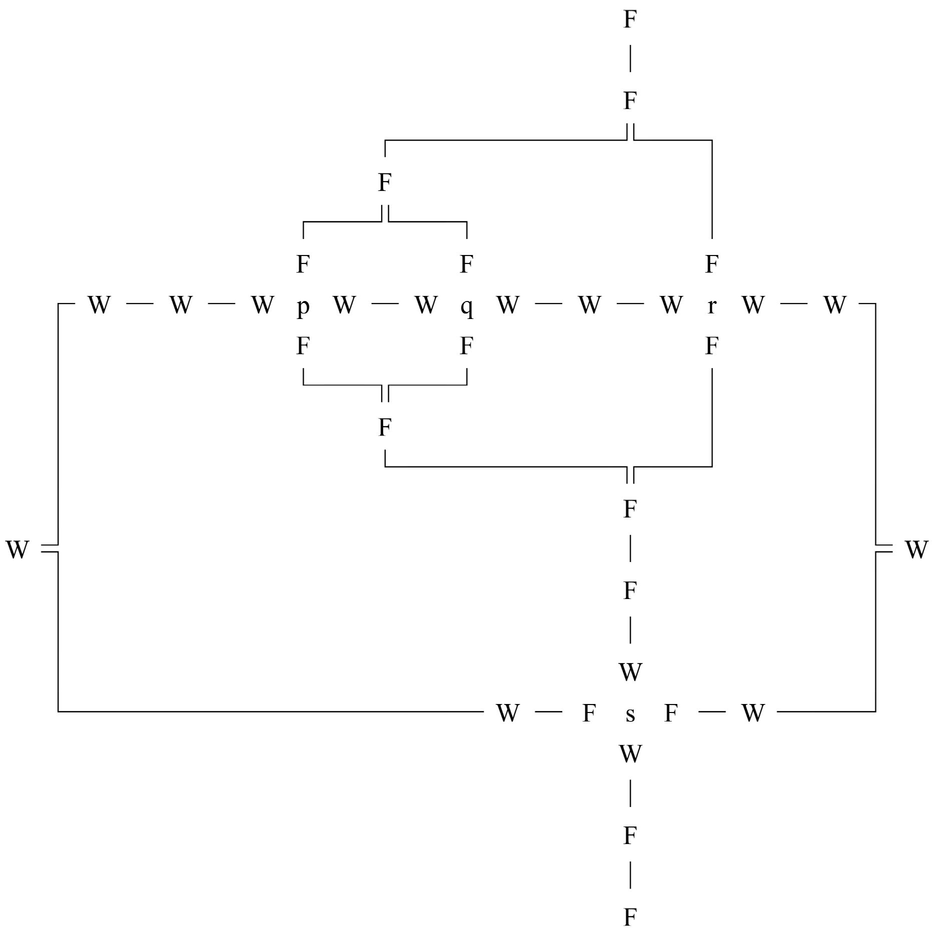
BN((p∨q)∧¬p)



$BN(((p \lor q) \land \neg p) \to q)$



BN((p∧q∧r)∨¬s)



Ein Vorkommnis des Buchstabens 'W' in einer Formel von BN heißt ein Wahr-Pol (W-Pol), ein Vorkommnis des Buchstabens 'F' ein Falsch-Pol (F-Pol) der Formel.

Ebenso heißt ein Vorkommnis des Buchstabens 'W' in der Rotationsform einer Formel von BN ein W-Pol, ein Vorkommnis des Buchstabens 'F' ein F-Pol der Rotationsform.

Diejenigen zwei W-Pole einer Formel, die an drei Seiten frei sind, heißen ihre äußeren W-Pole, die entsprechenden zwei F-Pole ihre äußeren F-Pole.

Ebenso heißen diejenigen zwei W-Pole der Rotationsform einer Formel, die an drei Seiten frei sind, die äußeren W-Pole, die entsprechenden zwei F-Pole die äußeren F-Pole der Rotationsform.

Gegeben sei ein Satzbuchstabe SB von AL. φ sei diejenige Atomformel von AL, die in einem Vorkommnis von SB besteht. Dann heißt dieses Gebilde die waagrechte Grundfigur von SB:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ W & \varphi & W \\ & F & \end{array}$$

und dieses Gebilde die senkrechte Grundfigur von SB:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ F & \varphi & F \\ & W & \end{array}$$

Unter einem waagrechten Weg zwischen zwei nichtidentischen Polen P_1 und P_2 einer Formel i von BN verstehen wir eine nicht gerichtete Route von Polen zwischen P_1 und P_2, die P_1 und P_2 einschließt, und die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) Für jedes Paar (P_3, P_4) von Polen der Route gilt: Wenn P_3 und P_4 benachbarte Stationen der Route sind, dann ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt:
    a) Zwischen der rechten Seite eines der Pole P_3 oder P_4 und der linken Seite des anderen Pols aus P_3 und P_4 verläuft eine durchgehende Verbindungslinie.
    b) Es gibt ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens, sodaß P_3 und P_4 die beiden Pole der waagrechten Achse dieses Vorkommnisses sind.
2) Für jedes Tripel (P_3, P_4, P_5) von Polen der Route gilt: Wenn P_3 und P_4 benachbarte Stationen der Route sind, und P_4 und P_5 benachbarte Stationen der Route sind, außerdem zwischen P_3 und P_4 eine Verbindungslinie verläuft, und auch zwischen P_4 und P_5 eine Verbindungslinie verläuft, dann ist die folgende Bedingung erfüllt: Eine der beiden Verbindungslinien zwischen P_3 und P_4 oder zwischen P_4 und P_5 endet an der linken Seite von P_4, die andere Verbindunglinie endet an der rechten Seite von P_4.

Unter einem senkrechten Weg zwischen zwei nichtidentischen Polen P_1 und P_2 einer Formel i von BN verstehen wir eine nicht gerichtete Route von Polen zwischen P_1 und P_2, die P_1 und P_2 einschließt, und die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) Für jedes Paar (P_3, P_4) von Polen der Route gilt: Wenn P_3 und P_4 benachbarte Stationen der Route sind, dann ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt:
   a) Zwischen der unteren Seite eines der Pole P_3 oder P_4 und der oberen Seite des anderen Pols aus P_3 und P_4 verläuft eine durchgehende Verbindungslinie.
   b) Es gibt ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens, sodaß P_3 und P_4 die beiden Pole der senkrechten Achse dieses Vorkommnisses sind.
2) Für jedes Tripel (P_3, P_4, P_5) von Polen der Route gilt: Wenn P_3 und P_4 benachbarte Stationen der Route sind, und P_4 und P_5 benachbarte Stationen der Route sind, außerdem zwischen P_3 und P_4 eine Verbindungslinie verläuft, und auch zwischen P_4 und P_5 eine Verbindungslinie verläuft, dann ist die folgende Bedingung erfüllt: Eine der beiden Verbindungslinien zwischen P_3 und P_4 oder zwischen P_4 und P_5 endet an der oberen Seite von P_4, die andere Verbindunglinie endet an der unteren Seite von P_4.

Ein Weg zwischen zwei nichtidentischen Polen P_1 und P_2 einer Formel i von BN ist ein waagrechter oder ein senkrechter Weg zwischen P_1 und P_2.

Daraus ergibt sich das folgende:

(<u>A1</u>)
i sei eine Formel von BN. Gegeben sei ein Weg zwischen den äußeren W-Polen von i und ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens in i, welches mit zweien seiner Pole auf diesem Weg liegt. Dann liegt das Vorkommnis mit den beiden Polen seiner waagrechten Achse auf diesem Weg.

(<u>A2</u>)
i sei eine Formel von BN. Gegeben sei ein Weg zwischen den äußeren F-Polen von i und ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens in i, welches mit zweien seiner Pole auf diesem Weg liegt. Dann liegt das Vorkommnis mit den beiden Polen seiner senkrechten Achse auf diesem Weg.

Ein Weg zwischen den äußeren W-Polen bzw. den äußeren F-Polen einer Formel i von BN heißt homogen, genau dann, wenn es keinen Satzbuchstaben von AL gibt, sodaß mindestens ein Vorkommnis der waagrechten Grundfigur dieses Satzbuchstabens und auch mindestens ein Vorkommnis der senkrechten Grundfigur dieses Satzbuchstabens mit

zweien seiner Pole auf diesem Weg liegt.
Im anderen Fall heißt der Weg inhomogen.

Gegeben seien eine Formel i von BN und ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens in i. Wir wollen nun bei bestimmten Bewertungen zwischen den W-Polen dieses Vorkommnisses eine Verbindung einrichten, und bei anderen nicht. Dasselbe gilt für die F-Pole.

i sei eine Formel von BN und B eine Bewertung. Wir setzen fest:

1) Gegeben sei ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens SB in i. φ sei die Atomformel zu SB. Dann besteht, wenn φ wahr ist bei B, zwischen den beiden W-Polen dieses Vorkommnisses eine Verbindung bei B.
2) Gegeben sei ein Vorkommnis der waagrechten oder senkrechten Grundfigur eines Satzbuchstabens SB in i. φ sei die Atomformel zu SB. Dann besteht, wenn φ falsch ist bei B, zwischen den beiden F-Polen dieses Vorkommnisses eine Verbindung bei B.
3) P_1 und P_2 seien zwei nichtidentische Pole von i. Es soll zwischen P_1 und P_2 mindestens einen Weg geben, sodaß bei jedem Vorkommnis einer Grundfigur eines Satzbuchstabens, das mit zweien seiner Pole auf diesem Weg liegt, zwischen den Polen, die Teil des Weges sind, eine Verbindung besteht bei B. Dann besteht auch zwischen P_1 und P_2 eine Verbindung bei B.
4) Sonst bestehen innerhalb von i keine Verbindungen zwischen Polen bei B.

Daraus ergibt sich das folgende:

(<u>A3</u>)
φ sei eine wff und B Bewertung, bei der φ wahr ist. Dann besteht zwischen den äußeren W-Polen von BN(φ) eine Verbindung bei B, und zwischen den äußeren F-Polen von BN(φ) keine Verbindung bei B.

(<u>A4</u>)
Eine wff φ ist gültig, genau dann, wenn alle Wege zwischen den äußeren F-Polen von BN(φ) inhomogen sind.

(A5)

Eine wff φ ist erfüllbar, genau dann, wenn es mindestens einen homogenen Weg zwischen den äußeren W-Polen von BN(φ) gibt.

(A6)

Eine wff φ ist unerfüllbar, genau dann, wenn alle Wege zwischen den äußeren W-Polen von BN(φ) inhomogen sind.

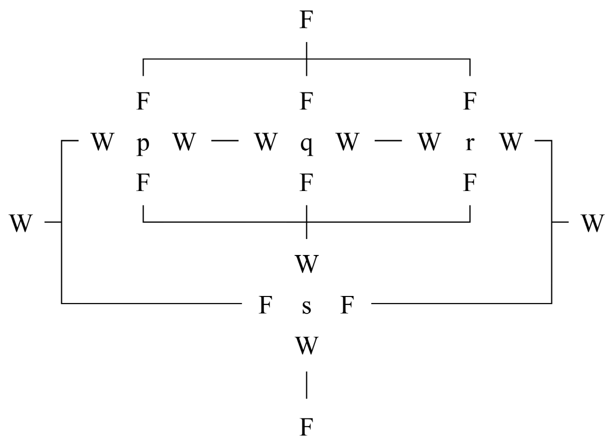
(A7)

φ, ψ seien wffs. φ und ψ sind äquivalent, genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

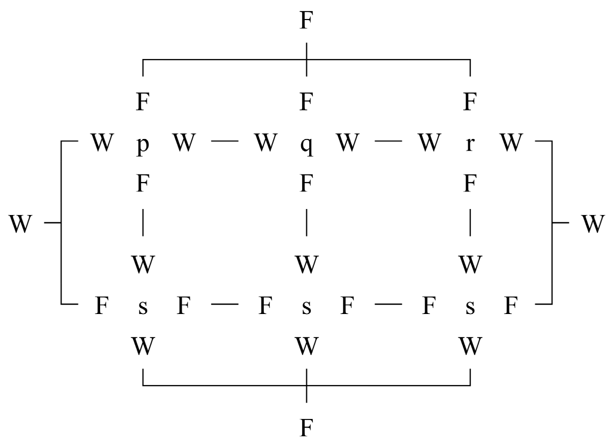
1) Jeder homogene Weg zwischen den äußeren W-Polen von BN(φ) hat mit jedem homogenen Weg zwischen den äußeren F-Polen von BN(ψ) die waagrechte oder die senkrechte Grundfigur mindestens eines Satzbuchstabens von AL gemeinsam.
2) Jeder homogene Weg zwischen den äußeren F-Polen von BN(φ) hat mit jedem homogenen Weg zwischen den äußeren W-Polen von BN(ψ) die waagrechte oder die senkrechte Grundfigur mindestens eines Satzbuchstabens von AL gemeinsam.

Für den Ausdruck des Gehalts einer Formel von BN ist nur von Bedeutung, welche Wege es zwischen den äußeren W-Polen und zwischen den äußeren F-Polen gibt. Und bei einem Weg ist entscheidend, zu welchen Satzbuchstaben Vorkommnisse von Grundfiguren auf dem Weg vorkommen bwz., ob diese mit den W-Polen oder den F-Polen auf dem Weg liegen.

So kann z. B. der Gehalt von BN(((p∧q∧r)∨¬s)) auch mithilfe dieser Figur ausgedrückt werden:



oder mithilfe diese Figur:



Es ist leicht zu sehen, daß das Zeichensystem N als bipolare Notation aufgefaßt werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

Carnap, Rudolf: Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, 2., neubearb. u. erw. Aufl., Wien 1960.

Kutschera, Franz von: Elementare Logik, Wien-New York 1967.

Mates, Benson: Elementare Logik, (Prädikatenlogik der ersten Stufe), 2., verb. Aufl., (Moderne Mathematik in elementarer Darstellung, 9), Göttingen 1978.

Ramsey, Frank P.: Review of 'Tractatus', in: Essays on Wittgenstein's Tractatus, Ed. by I. M. Copi, R. W. Beard, 1st Pr., New York 1966, S. 9-23.

Waismann, Friedrich: Was ist logische Analyse?, in: Was ist logische Analyse, Gesammelte Aufsätze, Hrsg. von G. H. Reitzig, (Wissenschaftliche Paperbacks Grundlagenforschung, Materialien, 2), Frankfurt/M. 1973, S. 42-66.

Wittgenstein, Ludwig: Werkausgabe, [in 8 Bänden], 1. Aufl., (Suhrkamp-Taschenbuch Wissenschaft, 501-508), Frankfurt/M. 1984.

Wittgenstein, Ludwig: Briefwechsel mit B. Russell, G. E. Moore, J. M. Keynes, F. P. Ramsey, W. Eccles, P. Engelmann und L. von Ficker, Hrsg. von B. F. McGuinness, G. H. von Wright, 1. Aufl., Frankfurt/M. 1980.

Wittgenstein, Ludwig: Prototractatus, An early version of Tractatus logico-philosophicus, Ed. by B. F. McGuinness, T. Nyberg, G. H. von Wright, Repr., London-New York 1996.

Wittgenstein, Ludwig: Some remarks on logical form, in: Essays on Wittgenstein's Tractatus, Ed. by I. M. Copi, R. W. Beard, 1st Pr., New York 1966, S. 31-37.

ABBILDUNGEN

Abkürzungen:

K	Konstruktionsformeln
LR	Leseresultate
U	basale Äquivalenzumformungen von Leseresultaten

Abb. 1
Beispiel für eine Ao.

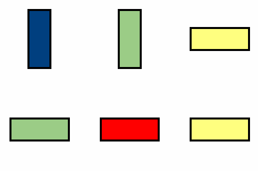


Abb. 2
Beispiel für eine Ao, die keine wAo ist.

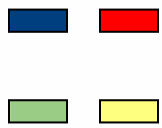


Abb. 3
Beispiel für eine wAo.

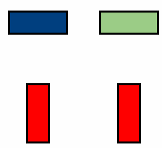


Abb. 4
Beispiel für eine wAo.

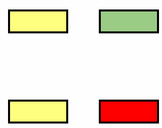


Abb. 5
Beispiel für eine wAo.

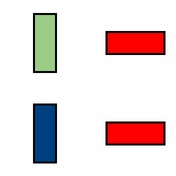


Abb. 6
Beispiel für eine wAo.

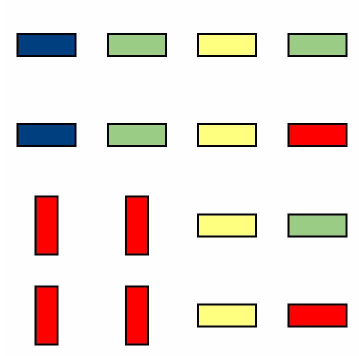


Abb. 7
Beispiel für eine wAo.

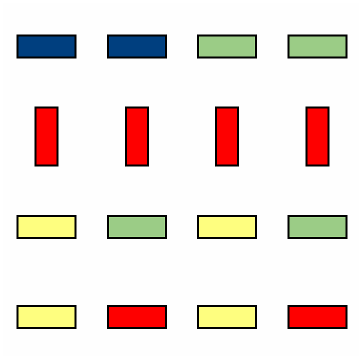


Abb. 8
Beispiel für eine wAo.

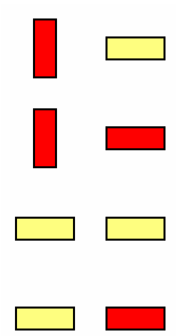


Abb. 9
Beispiel für eine wAo.

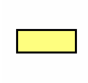


Abb. 10
Beispiel für eine wAo.

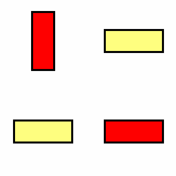


Abb. 11
Beispiel für eine wAo.

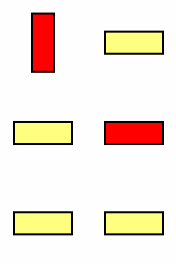


Abb. 12
Beispiel für eine wAo.

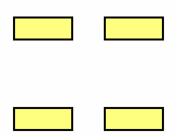


Abb. 13
Beispiel für eine wAo.

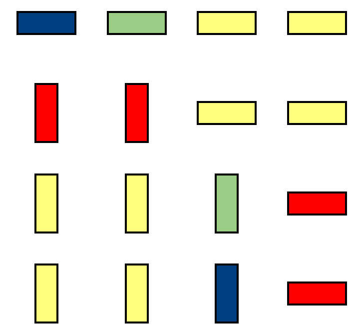


Abb. 14
K: (1) $SWbSDg_1rg_2$

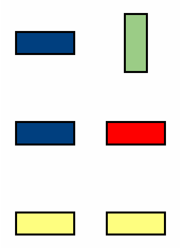
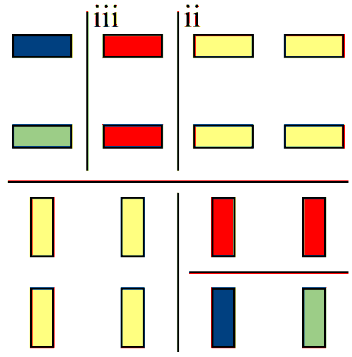
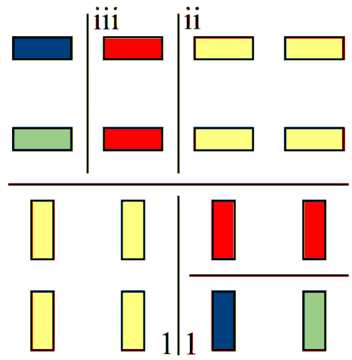


Abb. 15
Graphische Darstellung der im folgenden in Mengenschreibweise angegebenen SV für $GWSbg_1rg_2$.



{$GWSbg_1rg_2$: AoT1-4:1-4, AoT1-2:1-4, AoT3-4:1-4, AoT1-2:1-2, AoT1-2:3-4, AoT3-4:1-2, AoT3-4:3-4, AoT1-2:1, AoT1-2:2, AoT3:3-4, AoT4:3-4}

Abb. 16
Graphische Darstellung der unten in Mengenschreibweise angegebenen DV für {$GWSbg_1rg_2$: AoT1-4:1-4, AoT1-2:1-4, AoT3-4:1-4, AoT1-2:1-2, AoT1-2:3-4, AoT3-4:1-2, AoT3-4:3-4, AoT1-2:1, AoT1-2:2, AoT3:3-4, AoT4:3-4}.



{$GWSbg_1rg_2$: (AoT1-4:1-4, 0), (AoT1-2:1-4, 0), (AoT3-4:1-4, 0), (AoT1-2:1-2, 0), (AoT1-2:3-4, 0), (AoT3-4:1-2, 1), (AoT3-4:3-4, 1), (AoT1-2:1, 0), (AoT1-2:2, 0), (AoT3:3-4, 0), (AoT4:3-4, 0)}

Abb. 17

S_1:

'Der Jupiter ist weiter von der Erde entfernt als der Mars.'

S_2:

'Das Licht braucht vom Jupiter länger bis zur Erde als vom Mars.'

S_1	S_2	
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Darstellung der im folgenden in Mengenschreibweise (als eine mWF F(S_1, S_2)) angegebenen mWF von {S_1, S_2} als Wahrheitstafel.

{({(S_1, W), (S_2, W)}, W), ({(S_1, W), (S_2, F)}, F), ({(S_1, F), (S_2, W)}, F), ({(S_1, F), (S_2, F)}, W)}

Abb. 18

p	q	r	¬	(	p	∨	q	)	≡	r
W	W	W	F		W	W	W		F	W
W	W	F	F		W	W	W		W	F
W	F	W	F		W	W	F		F	W
W	F	F	F		W	W	F		W	F
F	W	W	F		F	W	W		F	W
F	W	F	F		F	W	W		W	F
F	F	W	W		F	F	F		W	W
F	F	F	W		F	F	F		F	F

Tabelle zur Errechnung des Wertverlaufs der Wahrheitsfunktion von '¬(p∨q)≡r'.

Abb. 19

K: (1) KWGbg_1Gg_1r(r2, r3)

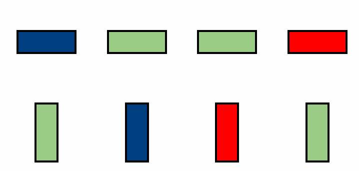


Abb. 20

K: (1) :blau

LR: (1) p

(2) $\neg\neg p$

Abb. 21

K: (1) Db

LR: (1) $\neg p$

Abb. 22

K: (1) Wbg_1

LR: (1) $p\wedge q$

(2) $q\wedge p$

(3) $\neg(\neg p\vee\neg q)$

U: (1) $\neg(p\rightarrow\neg q)$ [zu LR, (3)]

Abb. 23

K: (1) Sbg_1

LR: (1) $p\vee q$

(2) $q\vee p$

(3) $\neg(\neg p\wedge\neg q)$

(4) $\neg\neg p\vee q$

U: (1) $\neg p\rightarrow q$ [zu LR, (4)]

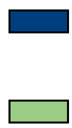


Abb. 24

K: (1) Gbg_1

LR: (1) $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

(2) $(q\wedge p)\vee(\neg q\wedge\neg p)$

(3) $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$

(4) $\neg((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg\neg q))$

U: (1) $p\equiv q$ [zu LR, (1)]

(2) $q\equiv p$ [zu LR, (2)]

(3) $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$ [zu LR, (3)]

(4) $\neg(p\equiv\neg q)$ [zu LR, (4)]

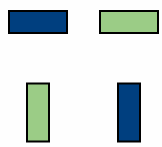


Abb. 25
K: (1) $WWbg_1r$
LR: (1) $(p\wedge q)\wedge r$
(2) $p\wedge(q\wedge r)$

Abb. 26
K: (1) $SSbg_1r$
LR: (1) $(p\vee q)\vee r$
(2) $p\vee(q\vee r)$

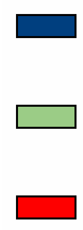


Abb. 27
K: (1) $GGbg_1r$
LR: (1) $(((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge r)\vee(\neg((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge\neg r)$
U: (1) $(p\equiv q)\equiv r$ [zu LR, (1)]

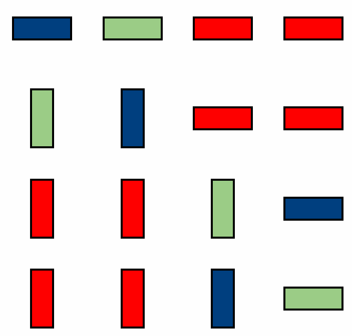


Abb. 28
K: (1) $WbSg_1r$
LR: (1) $p\wedge(q\vee r)$
(2) $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

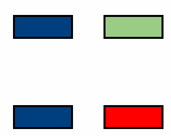


Abb. 29
K: (1) $SbWg_1r$
LR: (1) $p\vee(q\wedge r)$
(2) $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

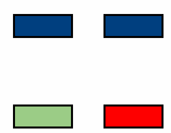


Abb. 30

K: (1) $WbGg_1r$

LR: (1) $p\wedge((q\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r))$

U: (1) $p\wedge(q\equiv r)$ [zu LR, (1)]

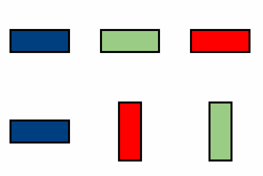


Abb. 31

K: (1) $SbGg_1r$

LR: (1) $p\vee((q\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r))$

U: (1) $p\vee(q\equiv r)$ [zu LR, (1)]

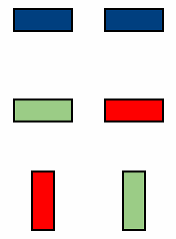


Abb. 32

K: (1) $GbWg_1r$

LR: (1) $(p\wedge(q\wedge r))\vee(\neg p\wedge\neg(q\wedge r))$

U: (1) $p\equiv(q\wedge r)$ [zu LR, (1)]

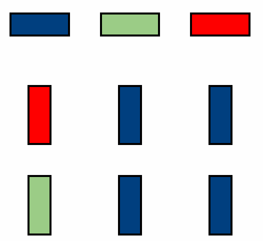


Abb. 33

K: (1) $GbSg_1r$

LR: (1) $(p\wedge(q\vee r))\vee(\neg p\wedge\neg(q\vee r))$

U: (1) $p\equiv(q\vee r)$ [zu LR, (1)]

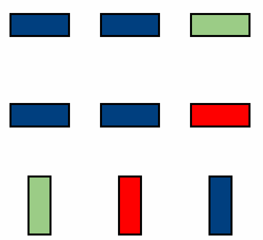


Abb. 34

K: (1) KSWWbg$_1$rWWDbDg$_1$Dr(c1, c3, c4, c5, c8, c9)

(2) KEKWGbg$_1$Gg$_1$r(r2, r3)(SrDb)(c2, c4)

LR: (1) (p∧q∧r)∨(¬p∧¬q∧¬r)

(2) (¬r∨q)∧(¬q∨p)∧(¬p∨r)

U: (1) (r→q)∧(q→p)∧(p→r) [zu LR, (2)]

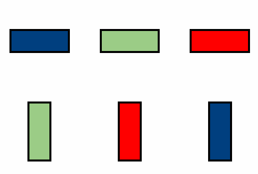


Abb. 35

K: (1) KWSSbg$_1$rSSDbDg$_1$Dr(r1, r3, r4, r5, r8, r9)

LR: (1) (p∨q∨r)∧(¬p∨¬q∨¬r)

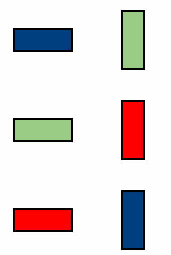


Abb. 36

K: (1) SDbg$_1$

LR: (1) ¬p∨q

(2) ¬(p∧¬q)

(3) ¬¬q∨¬p

U: (1) (p→q) [zu LR, (1)]

(2) ¬q→¬p [zu LR, (3)]

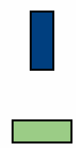


Abb. 37

K: (1) KWSDbg$_1$SDg$_1$r(r2, r3)

LR: (1) (¬p∨q)∧(¬q∨r)

U: (1) (p→q)∧(q→r) [zu LR, (1)]

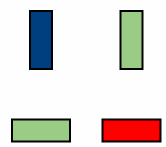


Abb. 38

K: (1) SDWbg$_1$r

LR: (1) ¬(p∧q)∨r

(2) ¬q∨(¬p∨r)

U: (1) (p∧q)→r [zu LR, (1)]

(2) q→(p→r) [zu LR, (2)]

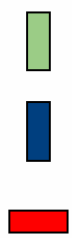


Abb. 39

K: (1) $SDSbg_1r$

LR: (1) $\neg(p\lor q)\lor r$

(2) $(\neg p\lor r)\land(\neg q\lor r)$

U: (1) $(p\lor q)\rightarrow r$ [zu LR, (1)]

(2) $(p\rightarrow r)\land(q\rightarrow r)$ [zu LR, (2)]

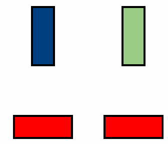


Abb. 40

K: (1) $WSbg_1Srg_2$

LR: (1) $(p\lor q)\land(r\lor s)$

(2) $(p\land r)\lor(p\land s)\lor(q\land r)\lor(q\land s)$

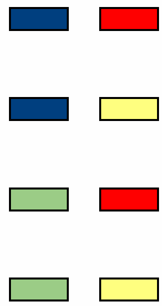


Abb. 41

K: (1) $SWbg_1Wrg_2$

LR: (1) $(p\land q)\lor(r\land s)$

(2) $(p\lor r)\land(p\lor s)\land(q\lor r)\land(q\lor s)$

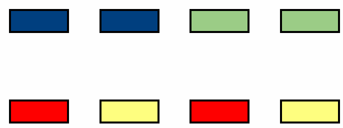
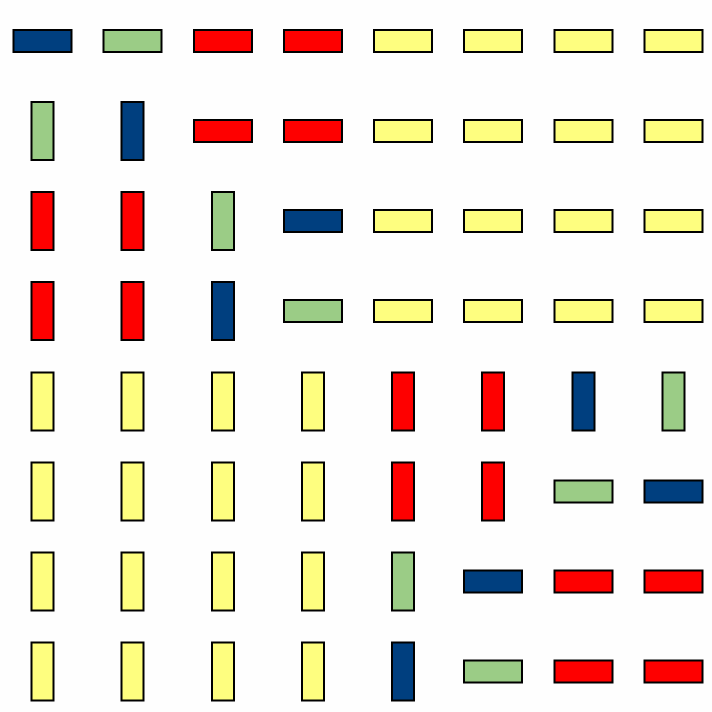


Abb. 42



K: (1) $GGGbg_1rg_2$

LR: (1) $((((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge r)\vee(\neg((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge\neg r)\wedge s)\vee(\neg(((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge r)\vee(\neg((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge\neg r)\wedge\neg s)$

U: (1) $((p\equiv q)\equiv r)\equiv s$ [zu LR, (1)]

Abb. 43

K: (1) $KWKWSDbg_1SDg_1r(r2, r3)SDrg_2(r3)$

LR: (1) $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee s)$

U: (1) $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\wedge(r\rightarrow s)$

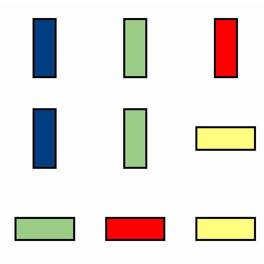


Abb. 44

K: (1) WbDb

LR: (1) $p\wedge\neg p$

Abb. 45

K: (1) SbDb

LR: (1) $p\vee\neg p$

(2) $\neg p\vee p$

U: (1) $p\rightarrow p$ [zu LR, (2)]

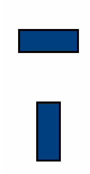


Abb. 46

K: (1) WbSbg_1

LR: (1) $p\wedge(p\vee q)$

(2) $p\vee(p\wedge q)$

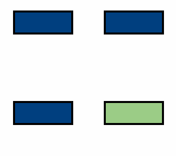


Abb. 47

K: (1) $\mathrm{WbSg}_1\mathrm{Dg}_1$

LR: (1) $p\wedge(q\vee\neg q)$

(2) $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

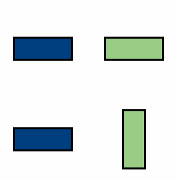


Abb. 48

K: (1) $\mathrm{SbWg}_1\mathrm{Dg}_1$

LR: (1) $p\vee(q\wedge\neg q)$

(2) $(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$

(3) $(\neg q\vee p)\wedge(\neg\neg q\vee p)$

U: (1) $(q\rightarrow p)\wedge(\neg q\rightarrow p)$ [zu LR, (3)]

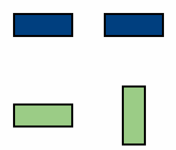


Abb. 49

K: (1) $\mathrm{WSbg}_1\mathrm{Db}$

LR: (1) $(p\vee q)\wedge\neg p$

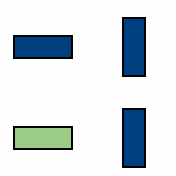


Abb. 50
K: (1) WDWbg$_1$b
LR: (1) $\neg(p\wedge q)\wedge p$

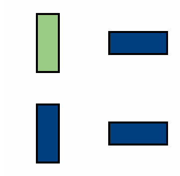


Abb. 51
K: (1) WSDbg$_1$b
LR: (1) $(\neg p\vee q)\wedge p$
U: (1) $(p\rightarrow q)\wedge p$ [zu LR, (1)]

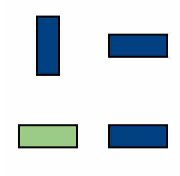


Abb. 52
K: (1) WDbg$_1$Dg$_1$
LR: (1) $(\neg p\vee q)\wedge\neg q$
U: (1) $(p\rightarrow q)\wedge\neg q$ [zu LR, (1)]

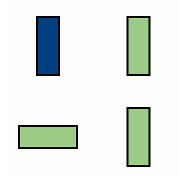
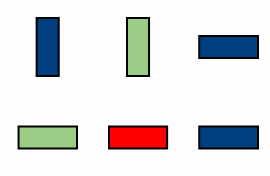


Abb. 53
K: (1) WKWSDbg$_1$SDg$_1$r(r2, r3)b
LR: (1) $(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge p$
U: (1) $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\wedge p$ [zu LR, (1)]



ABSTRACT

Das Zeichensystem N, der Gegenstand der vorliegenden Arbeit, wurde entwickelt ausgehend von zentralen semiotischen Fragestellungen des Tractatus logico-philosophicus. N ist eine aussagenlogische Notation mit den folgenden Besonderheiten:

1) Sie ist eine zweidimensionale Notation.
2) Sie hat keine Verknüpfungszeichen und und keine Klammern.
3) Dasselbe Satzzeichen kann auf mehr als eine Art aufgefaßt werden, wobei die unterschiedlichen Lesarten äquivalent sind.
4) Die Satzzeichen sind transparent bezüglich der fundamentalen logischen Eigenschaften von Sätzen und logischen Beziehungen zwischen Sätzen, soweit diese im Rahmen der Aussagenlogik aufweisbar sind.

Es besteht die Möglichkeit, die Zeichen von N mithilfe einer allgemeinen Regel zu interpretieren, aus der sich dann auch die Bedeutung aller eventuell einzuführenden Verknüpfungsoperationen ergibt (wenngleich wir bei der Interpretation von N aus technichen Gründen anders vorgehen). Sie weist auf bestimmte ikonische Züge von N, die herkömmlichen linearen, aussagenlogischen Notationen fehlen. (Ein Ikon ist nach Charles S. Peirce ein Zeichen, das seinem Objekt nicht allein durch Konvention zugeordnet ist, sondern auch durch bestimmte, ihm innewohnende Merkmale.)

Die Lektüre der Arbeit erfordert keine speziellen Vorkenntnisse auf dem Gebiet der formalen Logik.

Biographische Daten:

geboren am 20.10.1963 in Linz a. D.
WS 1982: Immatrikulation an der Universität Wien, Inskription der Studienrichtung Kunstgeschichte als Einfachstudium.
WS 1993: Änderung der Studienrichtung in Hauptfach Philosophie/ Nebenfach Kunstgeschichte.