DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Ihre Sorgen möchten wir haben“

- mathematische Berechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Verfasser:	Mario Paul Wallner
Matrikelnummer:	9873157
Studienrichtung:	UF Mathematik, UF Chemie (A 190 406 423)
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Wien, im September 2008

Inhaltsverzeichnis

Abstract

In der vorliegenden Arbeit werden die wesentlichen Berechnungsgrundlagen zur Lebensversicherungsmathematik behandelt. Die Arbeit ist didaktisch so gestaltet, dass sie auch von Leuten, die sich vorher noch nie mit dieser Materie beschäftigt haben, verstanden werden kann. Eine gewisse mathematische Allgemeinbildung sollte jedoch schon vorhanden sein um die Arbeit zu verstehen.

In der heutigen Zeit, wo beinahe jede Person in irgendeiner Art und Weise versichert ist und die meisten Leute auch eine Lebensversicherung, sei es als Altersabsicherung oder als Kapitalanlage, abgeschlossen haben, sind Begriffe wie Prämien, Versicherungssumme oder Versicherungslaufzeit allgegenwärtig. Auf diversen Websites von Versicherungsgesellschaften kann man mittels eines so genannten „Prämienkalkulators“ unter Eingabe der erforderlichen Daten berechnen lassen, wie hoch die monatlichen, vierteljährlichen bzw. jährlichen Prämien für eine bestimmte Versicherung ausfallen werden.
Diese Arbeit soll interessierten Lesern und Leserinnen einen Einblick darin gewähren, wie die Prämienkalkulation grundsätzlich funktioniert. Auch der wesentliche Aspekt des Einbeziehens der Kosten, die beim Abschluss einer Versicherung entstehen, in die Prämienkalkulation wird aufgezeigt.

Die praktische Anwendung der angeführten und hergeleiteten Formeln wird in zahlreichen Beispielen numerisch illustriert. Dies soll wesentlich zum besseren Verständnis der Thematik beitragen.

Der inhaltliche Aufbau ist so gestaltet, dass nach einer allgemeinen Begriffserläuterung und einem geschichtlichen Abriss zuerst auf die mathematischen Hintergründe wie Finanzmathematik, Rentenrechnung und Wahrscheinlichkeitstheorie, die für das Verständnis dieses Themengebiets erforderlich sind, eingegangen wird. Nach einem kurzen Überblick über die

Berechnung von verschiedenen (Versicherungs-)Leistungsbarwerten werden die Prämienbarwerte von Nettoprämien und Nettodeckungskapitalien behandelt. Dann wird auf eine häufig abgeschlossene Versicherungsart, nämlich der Versicherung auf mehrere Leben, eingegangen. Abschließend soll das Kapitel über den Einbezug der Kosten den Themenkomplex abrunden.

1. Einleitung

In der heutigen Gesellschaft gibt es nur sehr wenige Menschen, die nicht in irgendeiner Art und Weise versichert sind. Um den Sicherheitsbedürfnissen der Bevölkerung nachzukommen, gibt es nahezu keine Bereiche des täglichen Lebens, für die man keine Versicherung abschließen kann. Die Liste reicht von KFZ-Pflichtversicherungen über Haushaltsversicherungen, Versicherungen für Unwetterschäden und vielen mehr hin zu Lebensversicherungen. Eben diesen verschiedenen Lebensversicherungstypen und hier speziell den mathematischen Berechnungsgrundlagen widmet sich diese Arbeit.

Gerade im Bereich der Lebensversicherungen gibt es die verschiedensten Angebote unterschiedlicher Versicherungsunternehmen. Für gewöhnlich wird dem Interessenten an einer derartigen Versicherung ein Angebot vorgelegt, das bereits die genauen Ergebnisse für Prämien, Laufzeit usw. enthält. Auf die Wünsche des Versicherungsnehmers kann in den meisten Fällen punktgenau eingegangen werden (Art und Häufigkeit der Prämienzahlungen, Versicherungssumme, usw.). In der Praxis werden diese Angebote von Experten erstellt und die Prämienhöhe usw. von Computerprogrammen berechnet. Vielleicht haben auch Sie sich schon einmal gefragt, nach welchen Gesichtspunkten eigentlich die Prämienhöhe zustande kommt. Wie hat beispielsweise eine bestimmte Versicherungsgesellschaft für eine gemischte Versicherung (also eine Versicherungsform, bei der sowohl im Er-, als auch im Ablebensfall am Ende bzw. während der Laufzeit eine bestimmte Versicherungssumme ausbezahlt wird) mit einer zehnjährigen Laufzeit und einer Versicherungssumme von 20000 € gerade eine monatliche Prämie von 176,95 € errechnet?
Diese Arbeit soll nun einen Einblick darin geben, welche mathematischen Anforderungen diesen Berechnungen zu Grunde liegen und wie Lebensversicherungsunternehmen die von den versicherten Personen zu zahlenden Prämien kalkulieren müssen, um ein weiteres Bestehen des Unternehmens garantieren zu können. Es ist schließlich im Interesse beider Seiten (also

des Versicherers und des Versicherten), dass ein Fortbestehen der Versicherungsgesellschaft gewährleistet ist.

Die Lebensversicherungsmathematik an sich gibt es schon seit dem 19. Jahrhundert. Die anfänglichen Berechnungsgrundlagen und ihre mathematischen Hintergründe, wie zum Beispiel die Berechnungen der Prämien und Deckungskapitalien mittels Kommutationszahlen, werden hier nicht behandelt, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Ebenso wird aus dem selben Grund auf die unterjährige Prämienkalkulation in dieser Diplomarbeit keine Rücksicht genommen.

Diese Arbeit ist bewusst so verfasst, dass sie für Leser, die ein mathematisches Grundwissen besitzen, auch als Laien auf dem Gebiet der Lebensversicherungsmathematik verständlich sein sollte. Dieser Anspruch hat zur Folge, dass zahlreiche Beispiele vollständig mit Lösungsansätzen und Lösungen durchgerechnet sind und alle notwendigen Beweise und Herleitungen für diverse Formeln durchgeführt sind.
Das erklärte Ziel dieser Arbeit ist es also, dass der Leser eine solide Grundvorstellung davon hat, wie in der Lebensversicherungsmathematik Prämien, Deckungskapitalien etc. berechnet werden, und wie die Kosten, die dem Versicherungsunternehmen beim Abschluss einer Versicherung entstehen, in die Prämien eingerechnet werden können, nachdem er sich mit dieser Arbeit auseinandergesetzt hat. Außerdem wird auf Versicherungsformen eingegangen, bei denen mehrere Personen versichert sind (Versicherungen auf mehrere Leben).

Ich hoffe mit dieser Arbeit Laien auf dem Gebiet der Versicherungsmathematik einen Einblick in die mathematischen Berechnungsgrundlagen gegeben zu haben und ein gewisses Interesse für eine weitere Auseinandersetzung mit dem Thema geweckt zu haben. Für auf diesem Gebiet schon bewanderte Leser soll diese Arbeit eine übersichtliche Zusammenschau der wesentlichen Inhalte bieten.

In dieser Arbeit wird bewusst auf die weibliche Form, wie sie im Sinne der gendergerechten Sprache üblich ist, verzichtet. Dies soll jedoch keine Geringschätzung des weiblichen Geschlechts zum Ausdruck bringen, es soll dadurch lediglich eine bessere Lesbarkeit des Textes erreicht werden.

2. Definition und allgemeine Begriffserläuterung

Zuerst möchte ich erläutern, was man allgemein unter einer Versicherung versteht. Aus Sicht eines Juristen liegt jeder Versicherung ein mehrseitiger Vertrag zugrunde, indem sich sowohl der Versicherer, als auch der Versicherte gegenseitig verpflichten.
MÜNZ definiert den Begriff Versicherung als eine *„auf Gegenseitigkeit beruhende wirtschaftliche Veranstaltung zwecks Deckung zufälligen schätzbaren Vermögensbedarfes“* (MÜNZ, 1932, S.2).
Wie aus dieser Definition hervorgeht, ist einer der wesentlichsten Begriffe im Versicherungswesen der Begriff der Gegenseitigkeit (bzw. Solidarität). Darunter versteht man, dass eine große Anzahl von Personen bereit ist über einen längeren Zeitraum ein gewisses Kapital anzusparen um in augenblicklich notwendigen Situationen den Vermögensbedarf einer oder mehrerer versicherten Personen decken zu können.

Ein Versicherungsnehmer wird einen Versicherungsvertrag nur dann abschließen, wenn die von ihm zu zahlende Prämie im Verhältnis zur Höhe der versicherten Schäden niedrig ausfällt. Im Gegensatz dazu liegt das Interesse des Versicherungsunternehmers an einer hohen Prämie und geringen Auszahlungen. Der Ausgleich dieser Interessen ist über den Begriff der Solidarität möglich, auch wenn im Zusammenhang mit dem Versicherungswesen im allgemeinen selten von Solidarität gesprochen wird. Die schon erwähnte Gegenseitigkeit ist Voraussetzung dafür, dass die Prämien einerseits ausreichend sind, andererseits aber gering gehalten werden können.

Ein nicht minder wichtiger Begriff in dieser Definition (besonders auch im Hinblick auf die stochastischen Rechnungsmodelle im Versicherungswesen) ist jener des Zufalls.

> *„Er ist insoferne begriffsnotwendig, als in jeder Versicherung, sei sie Lebensversicherung oder welcher Art immer, ein Zufallsfaktor vorhanden sein muss, das heißt, ein Umstand, dessen Eintritt oder Nichteintritt vom Willen des Versicherers sowohl als auch des Versicherten völlig unabhängig ist.“* (Münz, 1932, S.3)

Wenn die Versicherung durch das Eintreten dieses zufälligen Ereignisses auszahlen muss, nennt man das in der Versicherung den *Schadensfall* bzw. den *Versicherungsfall.*
Aufgrund dieses Zufalls ist es in der Versicherungswirtschaft äußerst schwierig den Preis für ein Produkt festzusetzen.

> *„Das Problem der Bestimmung einer ausreichenden Prämie entsteht dadurch, dass einerseits bei Abschluss eines Versicherungsvertrages die Prämie festgelegt werden muss und es andererseits ungewiss ist, ob und in welcher Höhe Versicherungsleistungen fällig werden und in welchem Umfang Prämienzahlungen erfolgen.“* (Schmidt, 2005, S.1)

So ist zum Beispiel bei einer Unfallversicherung von vornherein nicht klar, wie viele Schadensfälle eintreten werden und in welchem Ausmaß die Versicherungsleistungen im einzelnen ausfallen werden. Bei anderen Versicherungsarten variieren ebenfalls die bekannten und unbekannten Größen für die Berechnung der Prämie. Auf die unterschiedlichen Typen in der Lebensversicherung wird später noch genauer Bezug genommen.

Da es sich beim Versicherungsmarkt auch um einen Markt im wirschaftlichen Sinn handelt, kann natürlich auch über die Prämien verhandelt werden. Es wäre jedoch äußerst problematisch, wenn man die Bestimmung der Prämien nur dem freien Spiel von Angebot und Nachfrage überlassen würde, da sowohl Versicherungsnehmer, als auch Versicherungsunternehmer Gefahr laufen könnten nicht die entsprechenden Leistungen zu erhalten. Das wäre im Falle des Versicherungsnehmers ein nicht ausreichender Schutz im Schadensfall und im Falle des Versicherungsunternehmers eine zu niedrige Prämie, die den gewünschten Gewinn unmöglich macht, was im schlimmsten Fall sogar in einem Insolvenzverfahren enden kann.

An diesem Punkt wird die Bedeutung der Versicherungsmathematik offensichtlich. Um eine ausreichende Prämie zu bestimmen ist es unabdingbar die Risiken richtig zu bewerten. Eben

dies ist Gegenstand der Versicherungsmathematik, die mathematische Modelle und Methoden zur Bewertung dieser Risiken einsetzt. *„Da bei Abschluss eines Versicherungsvertrages ungewiss ist, ob und in welcher Höhe Versicherungsleistungen zu erbringen sind, müssen versicherungsmathematische Modelle und Methoden den Zufall berücksichtigen.“* (Schmidt, 2005, S.2f). Die Versicherungsmathematik ist daher der mathematischen Stochastik zuzuschreiben. Krengel (1998, S.1) nennt diese auch „Mathematik des Zufalls“.
Im Bereich der Lebensversicherung besteht das mathematische Modell zum Beispiel darin, dass man aufgrund von Sterbetafeln versucht die Lebensdauer der versicherten Person abzuschätzen.

2.1. Der Begriff des Risikos

Disch (2002) unterscheidet in seinem Buch *„Kalkulation und Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung“* (S.5) zwei Kategorien des menschlichen Handelns und Entscheidens.

1. *Deterministische Vorgänge und Entscheidungen*
   Anhand bestimmter Voraussetzungen kann der Ausgang eines Vorgangs, der aus bestimmten Entscheidungen hervorgegangen ist, genau definiert und abgegrenzt werden. Der Endzustand kann also ohne jeden Zweifel vorausgesagt werden.
   Beispiel: Rechnet man 7 - 4 in unserem gebräuchlichen Zahlensystem, so ergibt sich das deterministische Ergebnis 3.

2. *Stochastische Vorgänge und Entscheidungen*
   Der Endzustand ist im Gegensatz zu den deterministischen Vorgängen nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit voraussagbar.
   Beispiel: Gehen wir vom Wurf einer Münze aus, so sind die möglichen Ergebnisse dieses Vorgangs stochastischer Natur.

Im alltäglichen Leben sind die meisten Vorgänge, Handlungen und Entscheidungen eine Mischform aus deterministischen und stochastischen Vorgängen.
In diesem Sinne versteht man unter Risiko die Möglichkeit, dass es zu einer negativen Abweichung des Zieles eines handelnden Menschen kommen kann. In deterministischen Vorgängen

ist daher das Risiko immer gleich Null. Erst in stochastischen Vorgängen gewinnt es an Bedeutung.

2.2. Die Lebensversicherung

Auch hier soll am Beginn eine Definition des Begriffs nach Münz angeführt werden.

> *„Die Lebensversicherung ist eine wirtschaftliche Einrichtung, welche dazu dient, mittels Abschlusses und Erfüllung eines bestimmten Vertrages schädliche ökonomische Wirkungen des Ablebens einer Person von gewissen Hinterbliebenen derselben möglichst abzuwehren und welche weiters dazu dienen kann, den einen Vertragsteil bei Erreichung eines im Voraus bestimmten Lebensalters oder Zeitpunktes in den Besitz eines bestimmten Kapitals oder den Genuss einer Rente bis zum Lebensende zu setzen.“* (Münz, 1932, S.7f)

Eine andere „Definition“ von Lebensversicherung gibt Koller:

> *„Man kann eine Lebensversicherung immer als Wette auffassen; je nach dem Ausgang dieser Wette bekommt man eine Leistung, oder man bezahlt die Versicherungsprämie ohne Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft. Aus diesem Sichtwinkel heraus kann man die Lebensversicherung als einen Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachten.“* (Koller, 2000, S.1)

Das versicherbare Risiko in der Lebensversicherung

In der Versicherungsbranche lassen sich folgende vier Gruppen unterscheiden, um ein Risiko zu beschreiben:

1. die Gefahr
   z. B. des Todes, der Berufsunfähigkeit usw.

2. der Versicherungsnehmer
   z. B. die Person, die beispielsweise eine Erlebensversicherung abschließt.

3. der Schaden

   Damit ist der tatsächlich eingetretene Versicherungs- oder Schadensfall für die Versicherungsgesellschaft gemeint.

4. die Entschädigung

   z. B. die Versicherungssumme bzw. die zu zahlende Rente.

Je nachdem, welches dieser Risiken von der Versicherung abgedeckt wird, unterscheidet man bei der Lebensversicherung verschiedene Typen. Diese sind laut Koller (2000, S.2):

- Versicherungen auf Leben und Tod
- Erwerbsunfähigkeitsversicherungen
- Krankenversicherungen

Versicherungen auf Leben und Tod

In diesem Fall hängt die Versicherungsleistung von der Lebensdauer des Versicherten ab. Die Versicherung wird also darauf abgeschlossen, ob die versicherte Person zu einem bestimmten Zeitpunkt noch lebt oder schon verstorben ist. Auch was Versicherung auf Leben und Tod betrifft, können wieder verschiedene Versicherungsarten unterschieden werden:

Die Erlebensfallversicherung

Wird ein bestimmtes festgesetztes Alter von dem Versicherten erreicht, wird ihm von der Versicherungsgesellschaft bis zu einem vertraglich festgesetzten Zeitpunkt oder bis zu seinem Tod in periodischen Abständen (monatlich, vierteljährlich oder jährlich) eine Rente in festgesetzter Höhe ausbezahlt. Diese Auszahlung kann entweder vorschüssig oder nachschüssig passieren. Es ist auch möglich, dass die Auszahlung der Versicherungssumme einmalig bei Erleben eines festgesetzten Termins erfolgt.

Die Todesfallversicherung

Falls der Versicherte ein bestimmtes festgesetztes Alter nicht erreicht, erhalten die Hinterbliebenen das für diesen Fall vereinbarte Kapital. Sollte das festgesetzte Alter überschritten werden, wird nicht ausgezahlt.

Ein Spezialfall dieses Versicherungstyps ist die lebenslängliche Todesfallversicherung. In diesem Fall wird kein bestimmtes Ablebensalter festgesetzt. Die Hinterbliebenen erhalten eine

Versicherungssumme nach dem Tod des Versicherten in jedem Fall ausbezahlt, unabhängig davon, wie alt dieser geworden ist.

Die gemischte Versicherung

Diese ist in der Realität die üblichste Form der Lebensversicherung. Sie stellt eine Mischung aus Erlebens- und Todesfallversicherung dar. Der Versicherte bekommt also eine festgesetzte Summe im Erlebensfall ausbezahlt, während im vorzeitigen Ablebensfall während der Vertragsdauer die Hinterbliebenen die für diesen Fall festgelegte Versicherungsleistung bekommen.

Die Witwen-/Witwerrente

Hier wird zwischen Versicherungsnehmer (z. B. Ehemann) und dem Versicherten (z. B. Ehefrau) unterschieden. Stirbt der Versicherungsnehmer wird der versicherten Person je nach Versicherungsvertrag entweder bis zu ihrem Ableben oder bis zu einem vertraglich festgelegten Zeitpunkt die Versicherungsleistung entweder in Form einer Rente oder einer Einmalzahlung ausbezahlt.

Die Waisenrente

Beim Ableben eines Elternteils (bzw. beider Eltern) erhält das Kind je nach Vertragstext entweder bis zu einem vertraglich festgelegten Zeitpunkt oder bis zu seinem Tod eine Rente.

Die Versicherung auf zwei Leben

Die Versicherungsleistung fällt je nach Zustand des Paares unterschiedlich aus. Mögliche Zustände sind: beide Personen leben (ll); eine Person lebt, die andere ist tot (lt); der umgekehrte Fall tritt ein (tl); beide Personen sind tot (tt). Es wird unterschieden, ob die Versicherungsnehmereigenschaft bei *einer* oder bei den versicherten Personen *gemeinsam* liegt. Wir werden in Kapitel 6 auf diese Versicherungsform noch genauer eingehen.

Erwerbsunfähigkeits- bzw. Krankenversicherungen

Die Berufsunfähigkeitsversicherung (Invalidenrente)

Im Falle des Eintretens einer Berufsunfähigkeit wird bis zu einem bestimmten vertraglich festgelegten Alter bzw. bis zum Wiedererlangen der Berufsfähigkeit eine Rente ausbezahlt.

Die Invalidenkinderrente

Im Unterschied zur Waisenrente ist die Invalidität des Versicherungsnehmers (Vater oder Mutter) Auslöser für die Auszahlung der Rente.

Dread Disease

In dieser Versicherung wird die vereinbarte Versicherungssumme dann fällig, falls ein vorher vereinbarter Krankheitsfall eintritt.

Die Pflegerentenversicherung

Die Rente wird in dem Fall ausbezahlt, dass der Versicherte zum Pflegefall geworden ist und ein gewisses Alter erreicht oder überschritten hat.

Diese Aufzählung der verschiedenen Versicherungstypen erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. So werden zum Beispiel in jüngster Zeit auch sehr häufig fondsgebundene Lebensversicherungen abgeschlossen. Außerdem werden von den verschiedenen Versicherungsgesellschaften auch mannigfache Variationen der verschiedenen Grundtypen angeboten (Koller, 2000, S.2ff und Disch, 2002, S.8).

Finanzierungsarten

Nachdem wir unterschiedliche Typen von Lebensversicherungen genannt haben, stellt sich die Frage, wie sich eine Versicherung finanziert. Grundlage für diese Finanzierung ist das sogenannte *Äquivalenzprinzip*. Es besagt, dass der erwartete Barwert der Leistungen des Versicherungsunternehmens und der erwartete Barwert der Leistung des Versicherungsnehmers jeweils dem Erwartungswert beim Abschluss der Versicherung entsprechen müssen. Dieses Prinzip wird später noch genauer erläutert werden. Grundsätzlich können zwei Arten von Finanzierungsmöglichkeiten unterschieden werden:

- die Finanzierung durch Prämien

  Der Versicherungsnehmer zahlt bis zu einem bestimmten Zeitpunkt (bzw. bei einer lebenslänglichen Todesfallversicherung bis zu seinem Tod) in regelmäßigen Zeitabständen einen festgesetzten Geldbetrag ein. Für gewöhnlich enden diese Zahlungen entweder zu einem vorher festgelegten Schlussalter oder mit dem Tod des Versicherten.

- die Finanzierung durch Einmaleinlagen.

  Es erfolgt eine einmalige Zahlung (Einmalprämie).

Auch Mischformen dieser beiden Finanzierungsarten sind möglich und durchaus üblich.

2.3. Das Versicherungsmodell

Wie andere Modelle auch versucht das Versicherungsmodell eine reale Situation in ein passendes Modell abzubilden. Das Prinzip bei diesem Modell ist, dass wir uns vorstellen, dass die versicherte Person zu jedem Zeitpunkt t in einem gewissen Zustand $1, 2, ..., w$ ist. Zustand 1 kann z. B. bedeuten, dass die Person am Leben ist. Durch den stochastischen Prozess X sei nun dieser Zustand der versicherten Person gegeben. In dem der jeweiligen Versicherung zugrundeliegenden Versicherungsvertrag ist festgehalten, in welchem Zustand welche Zahlungen fällig werden. Durch das Bleiben in einem Zustand bzw. das Wechseln in einen anderen Zustand können sich diese zum Zeitpunkt t berechneten Zahlungen entsprechend ändern.

Beispiel für Zustände:

- Bei einer Todesfallversicherung, einer Erlebensversicherung oder einer gemischten Versicherung auf Todes- und Erlebensfall sind die möglichen Zustände der versicherten Person „lebt“ oder „tot“.
- Etwas mehr Zustände muss man etwa bei der Erwerbsunfähigkeitsversicherung unterscheiden. Hier kann die versicherte Person mindestens in den Zuständen „lebt (aktiv)“, „lebt (invalid)“, oder „tot“ sein. In der Praxis werden oft noch mehr Zustände betrachtet (etwa zu welchem Zeitpunkt die Person invalid wurde und welche Auswirkungen dies auf den Zustand der Familie der versicherten Person hat), um die Versicherung besser modellieren zu können.

Wir können nun auch die Leistungsversprechen der Versicherung mathematisch modellieren. Dazu ist es notwendig die Zeitachsen genauer zu beschreiben. Hier kann man einerseits in *diskreter Zeit* rechnen, was für die Praxis wichtig ist, und andererseits in *stetiger Zeit* rechnen, was durchaus interessante Resultate liefern kann und vom mathematischen Aspekt betrachtet wichtige Aussagen für die Theorie ergibt (Koller, 2000, S.7).

Beispiel 2.1:

Wir gehen aus von einer gemischten Versicherung, bei der im Todesfall 20000 Euro und im Erlebensfall 10000 Euro fällig werden. Finanziert soll diese Versicherung durch eine Prämie von 200 Euro pro Jahr werden, die jeweils am Jahresende eingezahlt wird.

Bemerkung: Auf die Art der Ermittlung der Prämie, auf das Deckungskapital, den Zins und die Kosten, die der Versicherung zusätzlich entstehen, soll an dieser Stelle noch nicht eingegangen werden. Damit werden wir uns in den folgenden Kapiteln auseinandersetzen.

Hier sollen *„lebt“* bzw. *„stirbt“* den Zustand der versicherten Person zum Zeitpunkt x beschreiben, wobei x das Alter der versicherten Person ist, und z für das Eintrittsalter (in ganzen Jahren) in die Versicherung stehen. Bei einem im Erlebensfall vereinbarten Vertragsende von beispielsweise 60 Jahren (wobei mit 60 das Lebensalter des Versicherten gemeint ist) ergeben sich in diesem Beispiel folgende Eintrittsszenarien:

1. *Lebt* der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt x, unterscheiden wir die folgenden Fälle:

   a) Hat er zu diesem Zeitpunkt das Eintrittsalter z in die Versicherung noch nicht erreicht, so ist noch gar nichts passiert. Dieser Fall ist theoretischer Natur und wird nur der Vollständigkeit halber angeführt.

   b) Liegt x im Zeitintervall $[z; 60]$, so hat der Versicherungsnehmer $([x] - z)$–mal, wobei $[x]$ ganze erlebte Jahre sind, die Prämie von 200 € eingezahlt.

   c) Hat er zu diesem Zeitpunkt x das Schlussalter schon überschritten, so bekommt er insgesamt betrachtet die Auszahlung in der Höhe der vereinbarten Vertragssumme vermindert um den Betrag der eingezahlten Prämien.

   Mathematisch betrachtet lässt sich der Sachverhalt durch eine sogenannte Auszahlungsfunktion a (negative Werte bedeuten Einzahlungen des Versicherungsnehmers) der Versicherung darstellen:

$$a_{lebt}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < z \\ -200 \cdot ([x] - z), & \text{falls } x \in [z; 60] \\ -200 \cdot (60 - z) + 10000, & \text{falls } x > 60 \end{cases}$$

2. *Stirbt* der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt x, dann unterscheiden wir folgende Fälle:

    a) Stirbt er vor dem Eintrittsalter in die Versicherung, passiert gar nichts (theoretischer Fall).

    b) Wechselt er innerhalb der Vertragsdauer vom Zustand *„lebt“* in den Zustand *„stirbt“*, so werden seinen Hinterbliebenen zum Zeitpunkt x 20000 € ausbezahlt. Es tritt ein vorzeitiges Vertragsende ein.

    c) Stirbt er erst nach dem vereinbarten Vertragsende (er ist dann älter als 60 Jahre), hat die Versicherung ihre Leistung bereits erbracht, und es passiert nichts.

    Mathematisch betrachtet heißt das:

$$a_{stirbt}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < z \\ 20000, & \text{falls } x \in [z; 60] \\ 0 & \text{falls } x > 60 \end{cases}$$

◇

Bemerkungen:

- Die Differenz zwischen dem Schlussalter von 60 Lebensjahren und dem Eintrittsalter z (in ganzen Jahren) muss natürlich positiv sein. $(60 - z)$ wird in der Praxis auch keine Zahlenwerte ≤ 3 annehmen, da Lebensversicherungen in der Regel über eine längere Zeitspanne abgeschlossen werden.

- Obwohl in der Praxis kaum angewendet, sei hier angeführt, dass man im stetigen Zeitmodell den Fall $a_{lebt}(x) = -200 \cdot ([x] - z)$ als bestimmtes Integral

  $a_{lebt}(x) = -\int_z^x 200\ dt$ auffasst. Es wird hier quasi so getan, als würde man den Wert der eingezahlten Prämien im Zeitintervall $[z; 60]$ kontinuierlich berechnen und nicht nur nach ganzen erlebten Jahren $[x]$.

3. Die Geschichte des Versicherungswesens

Das Versicherungswesen entstand ungefähr Mitte des 17. Jahrhunderts. Grund dafür war die Angst vieler Menschen vor der Existenzvernichtung und der Wunsch nach einer gewissen Sicherheit vor den Folgen von Schicksalsschlägen bzw. Katastrophen etc. So entstanden im 17. Jahrhundert in Deutschland Versicherungsunternehmen, wie zum Beispiel die Hamburger Feuerkasse bzw. die Berliner Feuersozietät, in Folge der vermehrt auftretenden Feuerschäden in diesen Regionen gegen Ende des 16. Jahrhunderts. In weiterer Folge schlossen sich auch Seefahrer, Bauern (zu Genossenschaften), Brauereien, etc. zu Interessensgemeinschaften zusammen, die dem einzelnen im Schadensfall finanzielle Unterstützung gewähren sollte. Also ganz nach dem Motto „Einer für alle, alle für einen.“
Versicherungsähnliche Bestimmungen fand man bereits im 17. Jahrhundert vor Christus bei den Babyloniern. Allerdings wurde damals nicht, wie wir es heute kennen, in einen gemeinsamen Fonds eingezahlt; vielmehr stand damals der Versicherungsschutz für wohlhabende Einzelpersonen und reiche Familien im Vordergrund ([20], [22] und [23]).

Während die ersten Lebensversicherungen gegen Ende des 17. Jahrhunderts entstanden, entwickelten sich die anderen Versicherungszweige, sowie die ersten Versicherungsunternehmen erst ab dem 19. Jahrhundert. Ein starker Aufschwung dieser Branche war Mitte des 19. Jahrhunderts zu verzeichnen. Ursache dafür war die Tatsache, dass hauptberuftliche Vermittler im Außendienst die bis dato nebenberuflichen Vermittler ablösten, was einen Wechsel von laufenden Provisionen zu einmaligen Provisionszahlungen zur Folge hatte. Die dadurch entstandenen finanziellen Probleme, die durch die stark wachsende Anzahl von Beiträgen entstanden waren, wurden durch das sog. *Zillmerverfahren* von 1863 (benannt nach dem deutschen Versicherungsmathematiker August ZILLMER) bilanztechnisch gelöst. Seine Idee war es, auf die laufend eingehenden Prämienzahlungen einen gewissen Betrag aufzuschlagen, um so die entstehenden bzw. entstandenen Kosten tilgen zu können. Die Kosten werden meist in drei Kategorien unterteilt (Gerber, 1986, S.100 und [24]):

i. *Abschlusskosten* sind Kosten, welche mit dem Neuabschluss einer Versicherung zusammenhängen, z. B. Entschädigungen der Verkaufsorgane, Spesen, ärztliche Untersuchungen, Polizzenausfertigungen, Werbung.

ii. *Inkassokosten* sind Kosten, die für den Beginn eines jeden Jahres budgetiert werden, in dem eine Prämie zu bezahlen ist.

iii. Unter *Verwaltungskosten* fasst man alle übrigen Kosten zusammen, z. B. Steuern, Abgaben sowie den Anteil an den Personal-, Gebäude-, Anlage- und Datenverarbeitungskosten der Versicherungsgesellschaft.

Dieser Aufschlag wird auch Deckungsrückstellung genannt.

In Österreich ist heute durch die gesetzliche *Krankenversicherung* annähernd die gesamte Bevölkerung krankenversichert. Auch die Krankenversicherung ist auf das Ende des 19. Jahrhunderts zurückzuführen. Das entsprechende Gesetz, das die Bestimmung zur ärztlichen Hilfe und zum Krankengeld beinhaltet, wurde am 1. August 1889 verabschiedet. Damals lag die Höhe des Krankengeldes bei ca. 60 Prozent des ortsüblichen Taglohnes. Veränderungen in den Bestimmungen über die Höhe des Krankengeldes fanden dann gegen Ende des 1. Weltkrieges statt. Seit 1947 (Sozialversicherungs-Überleitungsgesetz) ist die Krankenversicherung eine gesetzliche Pflichtversicherung.

Unfallversicherungen entstanden durch die sich ändernden Arbeitsbedingungen gegen Ende des 18. Jahrhunderts. Wegunfälle wurden erst gegen Ende des 1. Weltkrieges in Versicherungsschutz gestellt. Durch eine Novellierung des Arbeiterunfallversicherungsgesetzes im Jahre 1928 wurden Berufskrankheiten dem Arbeitsunfall gleichgestellt. Berufskrankheit entsteht durch einen länger dauernden Einfluss von Schadstoffen oder ähnlichem auf den menschlichen Organismus. Abgesehen von der gesetzlichen Unfallversicherung gibt es bei Unfallversicherungen, wie schon bei der Aufzählung der verschiedenen Lebensversicherungstypen erwähnt wurde, mannigfache Variationen. Es kann zum Beispiel unter anderem zwischen Dienstunfällen, Freizeitunfällen und Sportunfällen unterschieden werden. Die daraus resultierenden Schäden (Berufsunfähigkeit, vorübergehende Berufsunfähigkeit, ...) sind sowohl für den Versicherten, als auch für die Versicherungsgesellschaft von wesentlicher Bedeutung.

Die *Pensionsversicherung* für Arbeitnehmer ist, ebenso wie die Krankenversicherung und die Unfallversicherung Teil der Allgemeinen Sozialversicherung. Vorläufer dieser Versicherung war die im Jahre 1868 gegründete „Allgemeine Arbeiter-, Kranken- und Invalidenkasse". Nach zahlreichen Novelierungen wurde im Jahr 2004 die so genannte Pensionsharmonisierung durch das Allgemeine Pensionsgesetz beschlossen. Der Sinn der gesetzlichen Pensionsversicherung besteht, ähnlich wie bei anderen Versicherungen, in einer Lohn- bzw. Gehaltsersatzfunktion für den Versicherten. Diese wird in der Regel aus Altersgründen oder infolge von dauerhaften Invalidität ausbezahlt, wenn kein eigenständiges Erwerbseinkommen mehr erzielt werden kann. Im Unterschied zur Lebensversicherung ist in der gesetzlichen Pensionsversicherung keine Risikoprüfung vorgesehen. In der Praxis ist es sehr oft üblich, dass man zusätzlich zur gesetzlichen Pensionsversicherung eine private Lebensversicherung auf den Erlebensfall oder eine gemischte Lebensversicherung laufen hat. Die Summe aus diesen Renten soll in erster Linie dazu dienen, dass der individuelle Lebensstandard, der im Arbeitsleben erreicht wurde, auch im Ruhestand erhalten werden kann.

Die *Lebensversicherung* ist im Gegensatz zu Krankenversicherung, Unfallversicherung und Pensionsversicherung eine Individualversicherung. Als Erfinder der Lebensversicherungsmathematik gilt der englische Astronom Edmond HALLEY (1656–1742). Die vorhandenen Sterbetafeln, die er durch Auswertung von Geburten- und Sterberegistern zur Verfügung hatte, wurden von ihm in einer brauchbaren Form eingesetzt. Für die damaligen Lebensversicherungen waren die HAYLEY'schen Tafeln (1693) eine bahnbrechende Tat. Im Vergleich dazu sei erwähnt, dass heutzutage Sterbetafeln für Rechnungsgrundlagen zur Prämienkalkulation häufig aus den Ergebnissen von Volkszählungen in Verbindung mit der laufenden Feststellung der Sterbefälle aufgestellt werden ([15]).

Die erste mit versicherungsmathmatisch bestimmten altersabhängigen Beiträgen arbeitende Society for Equitable Assurances on Lives and Survivorships entstand 1762 in London.

Als Vater des deutschen Versicherungswesens gilt der aus Gotha (Thüringen) stammende Kaufmann Ernst-Wilhelm Arnoldi (1778–1841). Von der Gothaer Lebensversicherungsbank wurden ab 1827 Lebensversicherungen verkauft. Als Begründer der in der Praxis oftmals üblichen Todes- und Erlebensfallversicherung (gemischte Versicherung) wird Gustav Hopf (1808–1872) gesehen, der selbst langjähriger Leiter der Gothaer Lebensversicherungsbank war. In den USA begann der Verkauf von Lebensversicherungen gegen Ende des 18. Jahrhunderts.

Gemeinsam ist den verschiedenen Entwicklungen, dass das sogenannte Kapitalsdeckungsverfahren gilt. Darunter versteht man die Tatsache, dass die Prämien vom jeweiligen Versicherungsunternehmen angespart und angelegt werden müssen. Allerdings soll geregelt werden, dass die Versicherungsgesellschaft nicht beliebig mit dem vorhandenen Kapital arbeiten kann. Durch die Kapitalanlagepolitik wird erreicht, dass ein Lebensversicherungsunternehmen eine Spar- und Sicherungsfunktion für den Versicherungsnehmer erfüllt ([20]).

4. Mathematische Rechnungsgrundlagen

Bevor wir uns den Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung zuwenden, wollen wir uns noch kurz den Tätigkeitsbereich eines Versicherungsmathematikers vor Auge führen. Die folgende Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Aufgaben eines Versicherungsmathematikers:

- mathematische Beschreibung des Risikos
- Ableitung der Berechnungen aus den stochastischen Grundlagen
- Kalkulation der Prämien (welches Risiko kann mit welcher Prämienzahlung gedeckt werden?)
- Risikosteuerung und Kapitalanlagen
- Bilanzierung
- Rückversicherung

Wie aus dieser Liste schon hervorgeht, ist das Tätigkeitsfeld eines Versicherungsmathmatikers sehr weit gestreut. Mit welchen mathematischen Grundlagen er seinen Arbeitsalltag bewältigt, soll nun Thema dieses Kapitels sein (Disch, 2002, S.10).

Im Zuge der Aufklärung erlebte die Mathematik einen großen Aufschwung. Mit ihm gewannen auch jene Teilgebiete der Mathematik an Bedeutung, die für die Versicherungsmathematik wesentlich waren. So wurde zum Beispiel der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* von Jakob Bernoulli (1655–1705) formuliert. Die tatsächliche mathematische Definition

in ihrer endgültigen Form folgte dann im 20. Jahrhundert. Auch die für Berechnungen in der Versicherungsmathematik so essenziellen Sterbetafeln wurden von Hayley erst im 17. Jahrhundert in einer brauchbaren Form erzeugt.
Im 17. Jahrhundert wurde der Grundstein für die zweite wesentliche Säule der Versicherungsmathematik gelegt. Stevens führte erstmals die systematische Zinseszinsrechnung durch, veröffentlichte die ersten Zinseszinstabellen und fasste die notwendigen Formeln zur Berechnung zusammen.

Die zwei zentralen Begriffe in der Lebensversicherungsmathematik sind die *Prämie* und das *Deckungskapital* (bzw. die *Deckungsrückstellung*) (Erklärung siehe weiter unten im Text). Diese beiden Begriffe werden daher auch in gesetzlichen Grundlagen geregelt. So ist zum Beispiel festgesetzt, dass es bei der Berechnung der voraussichtlichen Auszahlung angemessene Sicherheitszuschläge geben muss. Diese sollen sicherstellen, dass entstehende Verwaltungskosten der Versicherung einberechnet werden. Auch eine maximale Höhe des jährlichen effektiven Zinssatzes ist vorgegeben. Ebenfalls gesetzlich festgelegt ist, dass die zu zahlenden Versicherungsleistungen auf Dauer durch die einlangenden Prämienzahlungen gedeckt sein müssen.

Als weitere Voraussetzung für Berechnungen in der Lebensversicherung muss der *Gleichbehandlungsgrundsatz* bei *gleichen Voraussetzungen* angenommen werden. Dieser besagt im Wesentlichen, dass Versicherte, die in gleicher Höhe Prämien einzahlen, auch die gleichen Leistungen erhalten müssen. Bevorzugungen eines Versicherten irgendwelcher Art sind sowohl was die Höhe der Prämien als auch die Höhe der Leistungen betrifft nicht erlaubt.
In diesem Zusammenhang werden unter *gleichen Voraussetzungen* folgende Bereiche verstanden:

1. Die Versicherten müssen dem gleichen Risiko unterliegen.
2. Es muss gleiche objektiv erkennbare Unterscheidungsmerkmale der Individuen, wie zum Beispiel Alter, Geschlecht, Raucher/Nichtraucher usw. geben.
3. Eine objektive Kollektivzugehörigkeit muss feststellbar sein. Wurde eine Einzelversicherung oder Kollektivversicherung abgeschlossen?
4. Bei der Abschätzung des Risikos müssen dieselben Methoden angewendet werden.

5. Es muss die gleiche Art der Kapitalanlage vorliegen.

6. Der Zeitpunkt des Vertragsbeginns muss ident sein.

Der Begriff der *Deckungsrückstellung* soll nun anhand eines Beispiels erklärt werden.
Versetzen wir uns in die Lage eines Mannes der Regenschirme verkauft. Dieser ahnt am Beginn seines Arbeitstages, dass er nicht alle Schirme verkaufen wird. An regnerischen Tagen wird er weiters wahrscheinlich mehr Schirme verkaufen als an Tagen mit strahlend schönem Wetter. Seine Verkaufszahlen werden also von Tag zu Tag schwanken. Aus seiner Sicht ist es daher durchaus einsichtig und legitim, einen Zuschlag auf den Verkaufspreis zu erheben. Mit dem so erwirtschafteten Gewinn kann er dann seine etwaigen Verkaufseinbußen an Schönwettertagen ausgleichen oder in neue Schirme investieren.

Eben diesen Aufschlag nennt man in der Lebensversicherung die *Deckungsrückstellung*. Es wird also auf die Prämien ein gewisser Preis aufgeschlagen, um möglicherweise entstehende Gewinnausfälle kompensieren zu können. Dieser Aufschlg muss in der Lebensversicherung natürlich höher ausfallen als jener unseres Schirmverkäufers, da das Hauptgeschäft eines Lebensversicherungsunternehmen ja in Leistungszusagen in meist ferner Zukunft besteht (Disch, 2002, S.21 „Bäckerprinzip“).

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, liegen der Lebensversicherungsmathematik zwei fundamentale Kalküle zu Grunde: Die *Zinsrechnung* und die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.
Zunächst möchten wir auf die Grundlagen der Zins- und der Rentenrechnung eingehen. In dem zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden wir uns dann einigen einfachen stochastischen Modellen zuwenden. Es wird jedoch vorausgesetzt, dass der Leser mit den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vertraut ist.

4.1. Finanzmathematische Grundlagen

4.1.1. Die Zinsrechnung

Die einfache Zins- und Zinseszinsrechnung werden grundsätzlich als bekannt vorausgesetzt, die wichtigsten Formeln sollen hier jedoch kurz angeführt werden.
Bei der Verzinsung wird im allgemeinen zwischen *dekursiver* und *antizipativer* Verzinsung unterschieden.
Bei der *dekursiven* Verzinsung werden die Zinsen vom Wert des Kapitals am Anfang der Zinsperiode berechnet und sind am Ende der Zinsperiode fällig.
Im Gegensatz dazu bedeutet *antizipative* Verzinsung, dass die Zinsen vom Wert des Kapitals am Ende der Zinsperiode berechnet und am Anfang derselben fällig sind.

Weiters wird unterschieden zwischen *nominellen* und *effektiven* Zinsen.
Falls die Verzinsungsperiode nicht identisch ist mit der Zeiteinheit, sprechen wir von einer *nominellen Zinsrate* (oder *einem nominellen Zinssatz*), andernfalls von einer *effektiven Zinsrate* (oder einem *effektiven Zinssatz*) (Schneider 2002, S.50ff).

Beispiel 4.1
Ein jährlicher nomineller *dekursiver* Zinssatz von 6% mit einer Verzinsungsperiode von drei Monaten (vierteljährige Verzinsung) bedeutet, dass alle drei Monate ein Zins in der Höhe von $\frac{6\%}{4} = 1,5\%$ des Werts des Kapitals zu Beginn der drei Monate gutgeschrieben wird.
Der Kapitalstand eines Anfangskapitals K_0 beträgt also nach einem Jahr nicht $K_0 \cdot 1,06$, sondern $K_0 \cdot (1,015)^4 \approx K_0 \cdot 1,06136$.

◇

Allgemein gilt für die Umrechnung zwischen *nominellen* und *effektiven* unterjährigen **dekursiven** Zinssätzen die Formel: $i_m = \frac{j_m}{m}$,
wobei man m erhält, indem man zwölf dividiert durch die unterjährige Verzinsungsperiode (in ganzen Monaten) rechnet [im Beispiel oben: $m = 12 : 3 = 4$], j_m der jährliche *nominelle Zinssatz* mit einer Verzinsungsperiode von $\frac{12}{m}$ Monate ist, und i_m der *effektive Zinssatz* mit der Verzinsungsperiode von $\frac{12}{m}$ Monate ist.

In unserem Beispiel ist $j_4 = 6\%$, $i_4 = \frac{0{,}06}{4} = 0,015$.
Daraus errechnet sich der *vierteljährige Aufzinsungsfaktor* $r_4 = 1 + i_4 = 1 + 0,015 = 1,015$, mit dem man auf den *jährlichen Aufzinsungsfaktor* $r = {r_4}^4 = (1,015)^4 = 1,06136$ schließen kann.

Allgemein gilt für die Umrechnung zwischen *jährlichen* und *unterjährigen* Aufzinsungsfaktoren folgender Zusammenhang:

$$\boxed{r = {r_m}^m = {r_2}^2 = {r_4}^4 = {r_{12}}^{12}.} \tag{4.1}$$

Wird mit einem jährlichen *nominellen* Zinssatz von $j_4 = 6\%$ alle drei Monate (also vierteljährig) verzinst, entspricht dies einem jährlichen *effektiven* Zinssatz von $i = 6,136\%$.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor r ist demnach $r = 1 + i = 1 + 0,06136 = 1,06136$.

Der Leser wird darauf hingewiesen, dass in dieser Arbeit i in Verbindung mit Zinssätzen in weiterer Folge stets für den jährlichen, effektiven, dekursiven Zinssatz steht.

Analog gilt für die Umrechnung zwischen *nominellen* und *effektiven* unterjährigen **antizipativen** Zinssätzen die Formel: $\quad d_m = \frac{f_m}{m}$,
wobei man m erhält, indem man zwölf dividiert durch die unterjährige Verzinsungsperiode (in ganzen Monaten) rechnet, f_m der jährliche *nominelle Zinssatz* mit einer Verzinsungsperiode von $\frac{12}{m}$ Monate ist, und d_m der *effektive Zinssatz* mit der Verzinsungsperiode von $\frac{12}{m}$ Monate ist.

Der jährliche effektive antizipative Zinssatz wird in dieser Arbeit im Zusammenhang mit Zinssätzen in weiterer Folge mit d bezeichnet.

Ist i der zu d äquivalente *jährliche effektive dekursive Zinssatz*, so besteht die Beziehung:

$$\frac{1}{1-d} = 1 + i = r \tag{4.2}$$

Beweis:

- $K_0 + K_0 \cdot i = K_1 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 \cdot (1+i) = K_1 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 \cdot r = K_1$
- $K_0 + K_1 \cdot d = K_1 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 = K_1 - K_1 \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad K_0 = K_1 \cdot (1-d) \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{K_0}{1-d} = K_1 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 \cdot r = K_1$

□

Der unterjährige Aufzinsungsfaktor berechnet sich bei der *antizipativen* Verzinsung dementsprechend durch $r_m = \frac{1}{1-d_m}$ aus dem bei der dekursiven.

Ebenso häufig wie der *Aufzinsungsfaktor* r wird in der Rentenrechnung (Zinsrechnung) der so genannte *Abzinsungsfaktor* v gebraucht. Er errechnet sich aus

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = 1 - d. \tag{4.3}$$

Arten der Verzinsung

Wir unterscheiden grundsätzlich drei verschiedene Arten der Verzinsung. Sie sollen jeweils zuerst allgemein beschrieben und dann anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht werden:

Beispiel 4.2

Ein Kapital $K_0 = 30000$ € wird zu einem jährlichen, effektiven, dekursiven Zinssatz von $i = 2,5\%$ angelegt. Gesucht ist der Endwert des Kapitals bei einer Laufzeit von $3,75$ Jahren bei einfacher/ theoretischer/ gemischter Verzinsung!

- **Die einfache oder lineare Verzinsung**

  Das Kapital zur Berechnung der Zinsen bleibt während der gesamten Verzinsdauer unverändert. Die Zinsen werden also während der Verzinsungsdauer nicht zum Kapital dazugerechnet (also nicht kapitalisiert). Die Grundformel für die *einfache Zinsrechnung* bei *dekursiver* Verzinsung lautet:

$$K_t = K_0 \cdot (1 + i \cdot t), \tag{4.4}$$

  wobei K_t das Kapital zum Zeitpunkt t und K_0 das Anfangskapital ist.

  Im Beispiel

  $K_{3,75} = 30000 \cdot (1 + 0,025 \cdot 3,75) = 32812,50$

  Analog dazu lautet die Formel für den *antizipativen* Fall:

$$K_0 = K_t \cdot (1 - d \cdot t) \tag{4.5}$$

  (K_t und K_0 wie oben).

- **Die theoretische oder exponentielle Verzinsung**

  Hier werden die am Ende einer jeden Verzinsungsperiode fälligen Zinsen jeweils zum Kapital addiert (die Zinsen werden also kapitalisiert). Für die Berechnung des Endwerts erhält man bei einer *dekursive* Verzinsung:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t = K_0 \cdot r^t. \tag{4.6}$$

  Der Name *„theoretische Verzinsung“* resultiert daraus, dass wir für t auch nicht ganzzahlige Werte (= Teile eines Jahres) zulassen.

  Im Beispiel:

  $K_{3,75} = 30000 \cdot (1 + 0,025)^{3,75} \approx 32910,60$

  Für eine *antizipative* Verzinsung lautet die Formel:

$$K_0 = K_t \cdot (1-d)^t = K_t \cdot v^t. \tag{4.7}$$

- **Die gemischte oder zusammengesetzte Verzinsung**

  Sie ist die von den Geldinstituten in der Regel verwendete Verzinsungsmethode. Mathematisch gesehen bedeutet die gemischte Verzinsung, dass das Kapital zwischen aufeinander folgenden ganzen Jahren exponentiell und innerhalb der Jahre linear wächst.

  Die Berechnung erfolgt nach folgender Formel:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^{[t]} \cdot (1 + i \cdot (t - [t])). \tag{4.8}$$

  Im Beispiel:

  $K_{3,75} = 30000 \cdot (1 + 0,025)^3 \cdot (1 + 0,025 \cdot (3,75 - 3)) \approx 32912,47$

$\diamond$

Die folgende Grafik soll den Unterschied zwischen *theoretischer* und *gemischter* Verzinsung aufzeigen:

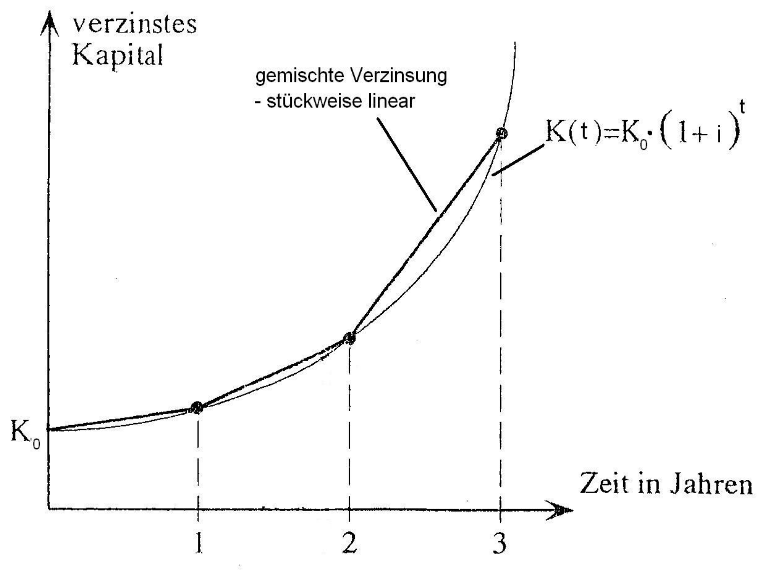

Abbildung 4.1.: Unterschied zwischen *theoretischer* und *gemischter* Verzinsung (Koth/Baumgartner, 1996, S.6)

Die gemischte Verzinsung approximiert die Kurve unter dem Jahr linear. Bei dieser Grafik wurde ein unrealistisch hoher Zinssatz angenommen, damit man den Sachverhalt besser erkennen kann. Es zeigt sich deutlich, dass die Werte $K_0, K_1, K_2, ..., K_n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$, also ganze Jahre) bei der theoretischen und der gemischten Verzinsung gleich sind. Für unterjährige Zeiteinheiten t (wobei $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$) sind die K_t-Werte der gemischen Verzinsung größer als die der theoretischen Verzinsung. Die gemischte Verzinsung ist also für den Anleger günstiger als die theoretische.

4.1.2. Rentenrechnung

Unter einer Rente versteht man eine periodisch wiederkehrende Zahlung R gleicher Höhe. Bei einer *vorschüssigen* Rente findet die erste Zahlung zu *Beginn* der Rentenperiode, also zum Zeitpunkt 0, statt. Im Gegensatz dazu wird eine *nachschüssige* Rente jeweils am *Ende* der Rentenperiode bezahlt.

Für den Kapitalstand K_t zum Zeitpunkt t gilt im *vorschüssigen* Fall:

$$K_t = R \cdot r \cdot \frac{r^t - 1}{r - 1} = R \cdot r \cdot \frac{r^t - 1}{i}, \tag{4.9}$$

wobei R die Rente und $r = 1 + i$ der Aufzinsungsfaktor ist.
Für den *nachschüssigen* Fall gilt die Formel:

$$K_t = R \cdot \frac{r^t - 1}{r - 1} = R \cdot \frac{r^t - 1}{i} \tag{4.10}$$

(Schneider, 2002, S.71).

Zur Herleitung dieser Formeln benötigt man unter anderem die Summenformel für die endliche geometrische Reihe.

Beispiel 4.3

Ein Anfangskapital $K_0 = 10000$ € wird mit einem Zinssatz von $i = 4\%$ für fünf Jahre bei theoretischer Verzinsung angelegt. Zusätzlich wird am Anfang des k-ten Jahres, wobei $k = 1, ..., 4$, jeweils 1000 € eingezahlt. Berechnen Sie den Endwert dieses Fonds nach fünf Jahren! Welchen Wert hat der Fonds zum Zeitpunkt 0 *(Barwert)*?

Lösung:

$$K_5 = K_0 \cdot (1+i)^5 + \sum_{k=1}^{4} (1+i)^{5-k} \cdot 1000 \cdot 1,04 =$$

$$= 10000 \cdot 1,04^5 + 1000 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^4 - 1}{0,04} \cdot 1,04 \approx 16759,50 \text{ €}$$

Für die Berechnung des Endwerts K_5 ist es notwendig die Rentenzahlungen ein weiteres Jahr *aufzuzinsen*, da die Rente nur viermal eingezahlt wurde. Das wird durch das Multiplizieren mit 1,04 am Ende des Ausdrucks erreicht.
Für die Berechnung des Barwerts ist es notwendig die Rente für vier Jahre *abzuzinsen*, also durch $1,04^4$ zu dividieren. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{10000 \cdot 1,04^5}{1,04^5} + 1000 \cdot 1,04 \cdot \tfrac{1,04^4 - 1}{0,04} \cdot \tfrac{1}{1,04^4} \cdot \tfrac{1,04}{1,04} = \\ &= 10000 + 1000 \cdot 1,04 \cdot \tfrac{1,04^4 - 1}{0,04} \cdot \tfrac{1}{1,04^4} \approx 13775,09 \text{ €}. \end{aligned}$$

◇

Da es versicherungstechnisch oft notwendig ist, die Ein- und Auszahlungen der Prämien, Kapitaleinlagen etc. vergleichen zu können, ist es wichtig, diese auf ein und denselben Zeitpunkt zu beziehen. In vielen Fällen eignet sich der Barwert hierfür besonders gut.

Wir unterscheiden folgende Barwerte und verwenden für sie die angeführten Symbole:

- $\ddot{B}_\infty$ Barwert bei einer jährlichen, ewigen, vorschüssigen Rente der Höhe R

$$\begin{aligned}\ddot{B}_\infty &= R + Rv + Rv^2 + ... = R \cdot (1 + v + v^2 + ...) = \\ &= R \cdot \frac{1}{1-v} = R \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{r}} = R \cdot \frac{r}{r-1} = R \cdot \frac{1}{d}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Beispiel 4.4

Wird mit einem Zinssatz von $i = 3\%$ gerechnet und ist $R = 100$ €, ergibt sich:

$$\ddot{B}_\infty = R \cdot \frac{1,03}{0,03} = 100 \cdot 34,\dot{3} = 3433,33 \text{ €}.$$

$\diamond$

- B_∞ Barwert bei einer jährlichen, ewigen, nachschüssigen Rente der Höhe R

$$\begin{aligned}B_\infty &= Rv + Rv^2 + Rv^3 + ... = Rv \cdot (1 + v + v^2 + ...) = \\ &= Rv \cdot \frac{1}{1-v} = R \cdot \frac{v}{1-v} = R \cdot \frac{1}{r-1} = R \cdot \frac{1}{i}\end{aligned} \tag{4.12}$$

Beispiel 4.5

Wird mit einem Zinssatz von $i = 3\%$ gerechnet und ist $R = 100$ €, ergibt sich:

$$B_\infty = R \cdot \frac{1}{0,03} = 100 \cdot 33,\dot{3} = 3333,33 \text{ €}.$$

$\diamond$

- $\ddot{B}_\infty^{(2)}$ Barwert bei einer halbjährlichen, ewigen, vorschüssigen Rente der Höhe R

$$\begin{aligned}\ddot{B}_\infty^{(2)} &= R + Rv^{\frac{1}{2}} + Rv + Rv^{\frac{3}{2}} + ... = R \cdot (1 + v^{\frac{1}{2}} + v + v^{\frac{3}{2}} + ...) = \\ &= R \cdot \frac{1}{1-v^{\frac{1}{2}}} = R \cdot \frac{r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}-1} = R \cdot \frac{1}{d_2}\end{aligned} \tag{4.13}$$

Beispiel 4.6

Wird mit einem Zinssatz von $i = 3\%$ gerechnet und ist $R = 50$ €, ergibt sich:

$$\ddot{B}_{\infty}^{(2)} = R \cdot \frac{\sqrt{1,03}}{\sqrt{1,03}-1} = 50 \cdot 68,16 = 3408,15 \text{ €}.$$

$\diamond$

Allgemein gilt für den Barwert einer unterjährigen ewigen, vorschüssigen Rente der Höhe R:

$$\ddot{B}_{\infty}^{(m)} = R \cdot \frac{1}{1-v^{\frac{1}{m}}} = R \cdot \frac{r^{\frac{1}{m}}}{r^{\frac{1}{m}}-1} = R \cdot \frac{1}{d_m} \tag{4.14}$$

- $B_{\infty}^{(2)}$ Barwert bei einer halbjährlichen, ewigen, nachschüssigen Rente der Höhe R

$$B_{\infty}^{(2)} = Rv^{\frac{1}{2}} + Rv + Rv^{\frac{3}{2}} + ... = Rv^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + v^{\frac{1}{2}} + v + v^{\frac{3}{2}} + ...) =$$

$$= Rv^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-v^{\frac{1}{2}}} = R \cdot \frac{v^{\frac{1}{2}}}{1-v^{\frac{1}{2}}} = R \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}-1} = R \cdot \frac{1}{i_2} \tag{4.15}$$

Beispiel 4.7

Wird mit einem Zinssatz von $i = 3\%$ gerechnet und ist $R = 50$ €, ergibt sich:

$$B_{\infty}^{(2)} = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1,03}-1} = 50 \cdot 67,16 = 3358,15 \text{ €}.$$

$\diamond$

Allgemein gilt für den Barwert einer unterjährigen ewigen, nachschüssigen Rente der Höhe R:

$$B_{\infty}^{(m)} = R \cdot \frac{v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}} = R \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{m}}-1} = R \cdot \frac{1}{i_m}. \tag{4.16}$$

Falls $R = 1$, liegt ein Spezialfall vor. Man verwendet dann die Symbole $\ddot{a}_{\infty}, a_{\infty}, \ddot{a}_{\infty}^{(m)}, a_{\infty}^{(m)}$.

(Es handelt sich hierbei um die international übliche Notation, wie man sie unter anderem auch bei HARTMANN, 2007, GERBER, 1986 oder KROLL, 2002 findet.)

In der Praxis sind zeitlich befristete Renten gebräuchlicher als ewige.
Wir berechnen den Barwert einer jährlichen, vorschüssigen Zeitrente der Höhe R und der Dauer n Jahre mit

$$\ddot{B}_n = R \cdot (1 + v + v^2 + ... + v^{n-1}) = \boxed{R \cdot \tfrac{1-v^n}{1-v}} = R \cdot \frac{1-v^n}{d}. \tag{4.17}$$

Durch analoge Überlegungen erhält man für eine nachschüssige Rente der Höhe R und der Dauer n Jahre:

$$B_n = R \cdot (v + v^2 + ... + v^{n-1} + v^n) = Rv \cdot (1 + v + ... + v^{n-1}) = \boxed{R \cdot \tfrac{v \cdot (1-v^n)}{1-v}} = R \cdot \frac{1-v^n}{i} \tag{4.18}$$

Weiters:

$$\ddot{B}_n^{(m)} = R \cdot (1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + ... + v^{\frac{n \cdot m - 1}{m}}) = R \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}} = R \cdot \frac{1-v^n}{1-v_m} = R \cdot \frac{1-v^n}{d_m} \tag{4.19}$$

$$B_n^{(m)} = R \cdot (v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + ... + v^{\frac{n \cdot m}{m}}) = Rv^{\frac{1}{m}} \cdot (1 + v^{\frac{1}{m}} + ... + v^{\frac{n \cdot m - 1}{m}}) = Rv^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}} = R \cdot \frac{1-v^n}{i_m} \tag{4.20}$$

Auch hier verwenden wir für $R = 1$ eigene Symbole: $\ddot{a}_n, a_n, \ddot{a}_n^{(m)}, a_n^{(m)}$. (Es handelt sich hierbei wieder um die international übliche Notation, wie man sie unter anderem auch bei HARTMANN, 2007, GERBER, 1986 oder KROLL, 2002 findet.)

Den *Endwert* (= Wert der Zahlungen am Ende der Vertragsdauer n) erhält man, indem man die entsprechenden Barwertformeln mit dem Aufzinsungsfaktor r^n multipliziert.
Wir erhalten:

$$\ddot{E}_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{d} \tag{4.21}$$

$$E_n = R \cdot \frac{r^n - 1}{i} \tag{4.22}$$

$$\ddot{E}_n^{(m)} = R \cdot \frac{r^n - 1}{d_m} \tag{4.23}$$

$$E_n^{(m)} = R \cdot \frac{r^n - 1}{i_m} \tag{4.24}$$

Für $R = 1$ heißen die entsprechenden Bezeichnungen $\ddot{s}_n, s_n, \ddot{s}_n^{(m)}, s_n^{(m)}$ (GERBER, 1986, S.10).

Wir wollen die angeführten Formeln bei zwei Beispielen anwenden:

Beispiel 4.8

Ein Kapital von 250000 € wird mit einem Zinssatz von $i = 6,5\%$ verzinst. Es soll damit eine ewige Rente finanziert werden.

a) Wie groß ist die Auszahlung dieser ewigen Rente?

b) Wie lange läuft eine Zeitrente, wenn der doppelte Betrag jährlich ausbezahlt wird?

Lösung:

$\boxed{\textit{vorschüssig:}}$

a)

$$250000 = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot \frac{1}{r^n} \quad \Longleftrightarrow \quad 250000 \cdot \frac{r-1}{r} = R \cdot (1 - \frac{1}{r^n})$$

ewige Rente: $\quad n \to \infty : \quad 250000 \cdot \frac{0{,}065}{1{,}065} = R \cdot (1 - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^n}}_{=0}) \quad \Leftrightarrow \quad R = 15258,22$ €

oder:

$$250000 = \ddot{B}_\infty = R \cdot \frac{r}{r-1} = R \cdot \frac{1,065}{0,065} \quad \Longleftrightarrow \quad R = 250000 \cdot \frac{0,065}{1,065} = 15258,22 \text{ €}$$

b)

$$250000 = 2R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot \frac{1}{r^n} \quad \Leftrightarrow \quad ... \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{250000 \cdot \frac{0,065}{1,065}}_{=R=15258{,}22} = 2R - \frac{2R}{r^n}$$

$$r^n = \frac{2R}{2R - R} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln r} \approx 11 \text{ Jahre}$$

oder:

$$250000 = \ddot{B}_n = \frac{1 - v^n}{d} \cdot 2R = \frac{1 - v^n}{1 - v} \cdot 2R \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{250000}{2R} = \frac{1 - v^n}{1 - v}, \text{ wobei } v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1,065}$$

Für n erhalten wir wieder 11 Jahre.

$\boxed{\textit{nachschüssig:}}$

a)

$$250000 = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot \frac{1}{r^n}$$

Die Rechnung erfolgt analog zum vorschüssigen Fall: $\quad R = 16250$ €

oder: $\quad 250000 = B_\infty = R \cdot \frac{1}{r-1} \quad \Longleftrightarrow \quad R = B_\infty \cdot (r - 1) = 250000 \cdot 0,065 = 16250$ €

b)

$$250000 = 2R \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} \cdot \frac{1}{r^n} \quad \Leftrightarrow \quad ... \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{250000 \cdot \frac{0,065}{1}}_{=R=16250} = 2R - \frac{2R}{r^n}$$

$$r^n = \frac{2R}{2R-R} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln r} \approx 11 \text{ Jahre}$$

oder: analog wie im vorschüssigen Fall mit der Formel: $B_n = \frac{1-v^n}{i} \cdot 2R$

◇

Beispiel 4.9

Jemand gewinnt im Lotto 91000 €. Er legt diesen Betrag auf ein Bankkonto um vom Beginn des dritten Jahres an durch acht Jahre eine nachschüssige Monatsrente beziehen zu können. Wie groß ist diese Rente, wenn mit einem dekursiven jährlichen nominellen Zinssatz $j_4 = 4\%$ (also vierteljährliche Verzinsung) verzinst wird?

Lösung:

Als Bezugspunkt wählen wir den Zeitpunkt 0 (auch das Ende des zweiten Jahres oder das Ende des zehnten Jahres wären dafür möglich).

Zunächst ist es nötig, den Auf- bzw. Abzinsungsfaktor r_{12} zu berechnen. Dazu:

$$i_4 = \frac{j_4}{4} \rightarrow r_4 = 1 + i_4 \rightarrow {r_{12}}^{12} = {r_4}^4 = r \rightarrow r_{12} \approx 1,0033$$

Nun berechnen wir die Monatsrente durch:

$$K_0 = R \cdot \frac{{r_{12}}^{96} - 1}{i_{12}} \cdot \frac{1}{{r_{12}}^{120}} \rightarrow R \approx 1200,52 \text{ €}$$

oder:

$$B_n^{(m)} = R \cdot \frac{1-v^n}{i_m}$$

$$91000 = R \cdot \frac{1-v^8}{i_{12}} \cdot \frac{1}{r^2} \qquad \text{(die Rente wird noch zwei Jahre abgezinst),}$$

wobei $r = {r_4}^4 = {r_{12}}^{12} = 1,0406$; $v = \frac{1}{r} = 0,961$; $i_{12} = r_{12} - 1 = 0,0033$.

Daher folgt:

$$98540 = R \cdot \frac{1-0,961^8}{0,0033} \Longleftrightarrow R = 1200,52 \text{ €}.$$

◇

4.2. Stochastische Grundlagen

Neben den finanzmathematischen Aspekten spielen in der Versicherungs- und speziell in der Lebensversicherungsmathematik, wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt wurde, stochastische Modelle eine wesentliche Rolle. Sowohl der Leistungsumfang der Versicherungen als auch die Zahlungsleistungen der Versicherungsnehmer hängen bei Lebensversicherungen (vor allem Kapitallebens- oder Todesfallversicherungen) vom *zufälligen* Zeitpunkt des Todes des Versicherungsnehmers ab. Es ist daher von Bedeutung, abschätzen bzw. in etwa „vorhersagen" zu können, wie viele Repräsentanten einer zu Beginn lebenden Personengruppe das Versicherungsende erleben werden und wie viele von ihnen verstorben sein werden.

Beispiel 4.10

Ein 50-jähriger Mann schließt eine Lebensversicherung auf den Todesfall mit zweijähriger Laufzeit und einer Versicherungssumme über 40000 € ab. Der Betrag wird jährlich vorschüssig bezahlt. Wird die Versicherungssumme fällig, erfolgt die Zahlung nachschüssig, das heißt am Ende des Versicherungsjahres.
Es ergeben sich daraus drei Fälle für das Zufallsgeschehen.

- Der Mann stirbt im ersten Jahr.

  Ein Jahresbeitrag wurde bezahlt und die Versicherung zahlt nach einem Jahr 40000 €.

- Der Mann stirbt im zweiten Jahr.

  Zwei Jahresbeiträge wurden bezahlt und die Versicherung zahlt nach zwei Jahren 40000 €.

- Der Mann stirbt innerhalb der Laufzeit der Versicherung nicht.

  Zwei Jahresbeiträge wurden bezahlt und die Versicherung zahlt nichts.

Sowohl die *erwartete* Höhe der zu zahlenden Versicherungsleistungen als auch die der eingenommenen Prämien kann man mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen über die zufällige Lebensdauer der Menschen angeben. Dazu bedient man sich so genannter *Sterbetafeln*, die auf statistischen Beobachtungen beruhen. Da die zufällige Lebensdauer vom Geschlecht abhängig ist, werden beim Berechnen von Sterbetafeln unterschiedliche Tabellen für Frauen

und Männer erstellt. Andere Einflussfaktoren, wie zum Beispiel der Lebensmittelpunkt oder der Gesundheitszustand der Menschen, bleiben in diesen Tabellen meist unberücksichtigt.
Es gibt aber auch Sterbetafeln, die für bestimmte Personengruppen konstruiert werden, welche gemäß Merkmalen wie Geschlecht, Herkunft, Generation, Art der Versicherung usw. definiert sind. Bei solchen Tabellen spielt auch das Anfangsalter des Versicherten zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses eine wesentliche Rolle. Unter Umständen kann der zu Versichernde auch einer ärztlichen Kontrolle unterzogen werden (Hanika/Trimmel, 2005, S.121ff).

4.2.1. Sterbetafeln

In Österreich werden die Daten zur Erstellung von Sterbetafeln durch die Statistik Austria ermittelt bzw. errechnet.

> *„Sterbetafeln werden jeweils für Jahre rund um eine Volkszählung durch den Bezug der nach Alter und Geschlecht differenzierten Sterbefälle auf die entsprechend gegliederten Bevölkerungsstände berechnet. Um zufallsbedingte Schwankungen der so ermittelten Sterbewahrscheinlichkeiten im Altersverlauf auszugleichen, werden diese einem Glättungsverfahren unterzogen. Aus den geglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten werden die einzelnen Sterbetafelfunktionen berechnet. Die Sterbetafeln 1868/71 bis 1909/12 beziehen sich auf die in der Monarchie als österreichische Alpenländer bezeichneten Gebiete. Gegenüber den heutigen Grenzen fehlt hier das bis 1921 ungarische Burgenland, während andererseits die nach dem 1. Weltkrieg abgetrennten Gebiete (vor allem Südtirol und das Trentino sowie die Untersteiermark) inkludiert sind. Ab 1930/33 beziehen sich die Tafeln auf das heutige Staatsgebiet."* (Statistik Austria, [19])

Mit Hilfe von Sterbetafeln (jene für Österreich vom Jahr 2000/02 siehe Anhang) kann die t-jährige *Überlebenswahrscheinlichkeit* ${}_tp_x$ (, dass ein x-jähriger die nächsten t Jahre überleben wird,) bzw. die t-jährige *Sterbewahrscheinlichkeit* ${}_tq_x$ (, dass ein x-jähriger innerhalb von t Jahren sterben wird,) berechnet werden.
Eine Sterbetafel gibt zu jedem Alter x die *ein*jährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x an. q_x ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine x-jährige Person das Alter $x+1$ nicht erreicht.

Sterbetafeln sind, wie schon erwähnt, nach Geschlechtern getrennt. Daher steht in manchen Sterbetafeln x für Männer und y für Frauen. Man beachte, dass bei diesen Tafeln x bzw. y sowohl das Alter als auch das Geschlecht angeben.

In der Tabelle wird meist für $x = 0$ mit 100000 Neugeborenen begonnen und dann bis $x = 100$ tabelliert.

Folgende Einträge findet man für gewöhnlich in einer Sterbetafel:

x	...	Alter (in Jahren)
q_x oder $q(x)$	...	*ein*jährige Sterbewahrscheinlichkeit
l_x oder $l(x)$	...	Anzahl der Überlebenden im Alter x
d_x oder $d(x)$	...	Anzahl der zwischen x und $x + 1$ Gestorbenen

Es gilt: $d_x = q_x \cdot l_x$ und $l_{x+1} = l_x - d_x$. Weiters ist $p_x = 1 - q_x$ die *ein*jährige Überlebenswahrscheinlichkeit (= Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger das $(x + 1)$-te Jahr erlebt).

L_x oder $L(x)$	...	von den Überlebenden im Alter x bis $x + 1$ noch zu durchlebende Jahre
T_x oder $T(x)$	...	von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre
e_x oder $e(x)$	...	*fernere* Lebenserwartung im Alter x (in Jahren).

Während die Einträge in den ersten vier Spalten de facto selbsterklärend sind, haben wir bei den hinteren drei Einträgen noch Erklärungsbedarf.

Die $L(x)$-Spalte wird auch als *stationäre Bevölkerung* oder *Sterbetafelbevölkerung* bezeichnet. Man kommt auf die Werte dieser Spalte, indem man das arithmetische Mittel der Überlebenden im Alter x und $x + 1$ aus der $l(x)$-Spalte berechnet (es wird stets auf ganze Zahlen gerundet). Beispielsweise kann man die 18-jährige männliche Sterbetafelbevölkerung wie folgt berechnen:

$$L(18) = \frac{l(18) + l(19)}{2} = \frac{99072 + 98978}{2} = 99025$$

Die Berechnung erfolgt unter der Annahme, dass sich die Sterbefälle im jeweiligen Altersintervall konstant verteilen.

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass die Formel $L(x) = \frac{l(x)+l(x+1)}{2}$ nur für alle x zwischen eins und 99 gilt!

Für die Nulljährigen wird die stationäre Bevölkerung aus einer eigens berechneten *Säuglingssterbetafel* entnommen, weil die Sterbefälle des ersten Lebensjahres nicht gleichmäßig verteilt sind. Da die Säuglingssterbetafel für meine Arbeit im weiteren nicht wirklich relevant ist, habe ich sie nicht im Anhang angeführt. Der interessierte Leser kann sich aber bei Bedarf an die Statistik Austria wenden und eben diese Säuglingssterbetafel dort anfordern.

Interessanter erscheint uns die Frage, wozu man diese Werte überhaupt berechnet bzw. was diese Zahlenwerte eigentlich aussagen.

> *„Die stationäre Bevölkerung wird in der Demographie oft für Zwecke der Altersstandardisierung herangezogen, aber auch für die Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeiten von ganzen Altersgruppen (z. B. für 45- bis unter 50jährige bis zum Alter von 50 bis unter 55 Jahren). Auf diese Weise werden auch Überlebenswahrscheinlichkeiten für Bevölkerungsprognosen abgeleitet. In der Sterbetafel wird ihre vom höchsten Alter ausgehende Kumulierung [Spalte $T(x)$] zur Berechnung der Lebenserwartung benötigt.“* (Hanika/Trimmel, 2005, S.124)

Die $T(x)$-Spalte ist die *Aufsummierung* der Werte aus der $L(x)$-Spalte nach der Formel

$$T(x) = \sum_{k=x}^{100} L(k)$$

Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} T(96) = \textstyle\sum_{k=96}^{100} L(k) &= L(96) + L(97) + L(98) + L(99) + L(100) = \\ &= 1660 + 1076 + 670 + 400 + 477 = 4283. \end{aligned}$$

Dass in der Sterbetafel für $T(96)$ aber der Wert 4284 steht, ist darauf zurückzuführen, dass bei der Berechnung der $T(x)$-Werte mit den *genauen* $L(x)$-Werten gerechnet wird und nicht mit den gerundeten!

Beispielsweise ist $L(95) = \frac{l(95)+l(96)}{2} = \frac{2927+2002}{2} = 2464,5$.

In der Sterbetafel finden wir für $L(95)$ aber den Wert 2464. Für die Berechnung von $T(95)$ wird bei der Aufsummierung mit 2464,5 gerechnet.

Eine rekursive Formel für die Berechnung von $T(x)$ ist gegeben durch

$T(x) = T(x+1) + L(x)$.

Z. B.: $T(95) = T(96) + L(95) = 4284 + 2464 = 6748$.

Die Werte aus der $T(x)$-Spalte werden zur Berechnung der ferneren Lebenserwartung $e(x)$ benötigt.

Die $e(x)$-Spalte gibt die *fernere Lebenserwartung* im Alter x an. Sie kann mathematisch durch die folgende Formel berechnet werden:

$e(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$, z. B.: $e(18) = \frac{T(18)}{l(18)} = \frac{5763179}{99072} \approx 58,17$.

Interpretation:

Die durchschnittliche fernere Lebenserwartung eines 18-jährigen Mannes beträgt also in weiterer Folge noch 58,17 Jahre.

Umgangsprachlich wird zumeist die Lebenserwartung bei der Geburt als durchschnittliche Lebenserwartung verstanden. Laut Sterbetafel 2000/2002 beträgt diese für Männer 75,51 Jahre und für Frauen 81,48 Jahre.

Man darf dieses Ergebnis aber nicht so interpretieren, dass diese Werte die *tatsächliche* mittlere Lebenserwartung eines Kindes, das in den Jahren 2000 bis 2002 geboren wurde, angeben. Diese kann erst nach ca. 100 Jahren retrospektiv festgestellt werden.

Die Differenz zwischen der ferneren Lebenserwartung bei Männern und Frauen beträgt bei der Geburt ca. sechs Jahre. Wie aus der Sterbetafel ersichtlich ist, verringert sich diese Differenz in den ersten 20 Lebensjahren kaum. Beispielsweise beträgt die Differenz der ferneren Lebenserwartungen eines 20-jährigen Mannes und einer 20-jährigen Frau 5,73 Jahre $(62,01 - 56,28)$. Erst danach reduziert sich der Vorsprung der Frauen gegenüber den Männern zunehmend. Im Alter von 30 Jahren hat sich die Differenz auf 5,4 Jahre, im Alter von 60 Jahren bereits auf 4 Jahre reduziert (Hanika/Trimmel, 2005, S.126).

Man darf die fernere Lebenserwartung nicht mit der *mittleren Lebensdauer* verwechseln. Unter der mittleren Lebensdauer versteht man jenes Alter, bei dem vom Ausgangswert von 100 000 Männer bzw. Frauen noch genau die Hälfte (also 50 000) übrig ist. Die mittlere Lebensdauer für Männer beträgt demnach zwischen 78 und 79 Jahre und für Frauen zwischen 84 und 85 Jahre. Unter Anwendung einer linearen Interpolation erhält man eine mittlere Lebensdauer von 78,8 Jahren für Männer und für Frauen eine von 84,4 Jahren.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch noch die *normale Lebensdauer* als statistische Kenngröße angeführt. Auch sie ist ein Maß für die zukünftige Lebenszeit eines Neugeborenen. Unter der normalen Lebensdauer versteht man jenes Alter, in dem die meisten Sterbefälle erreicht werden. Gemeint ist also jenes Alter x, das den größten $d(x)$-Wert besitzt. Dieser Wert liegt bei Männern bei 83 Jahren ($d(83) = 3709$) und bei Frauen bei 87 Jahren ($d(87) = 4632$).

Die verschiedenen Daten aus einer Sterbetafel können auch grafisch dargestellt werden. Ein Beispiel für die Darstellung der Sterbewahrscheinlichkeit aus den Daten der Sterbetafel von Österreich aus dem Zeitraum 2000/02 gibt die folgende Grafik. Die Skalierung ist logarithmisch ausgelegt um eine bessere Lesbarkeit zu gewährleisten.

Wie aus der Grafik klar ersichtlich ist, ist die Sterbewahrscheinlichkeit für Neugeborene relativ hoch. Sie fällt jedoch bis zum fünften Lebensjahr rapid und bleibt bis etwa zum 15. Lebensjahr relativ konstant. Ab 30 Jahren steigt die Sterblichkeitswahrscheinlichkeit wieder bis ins hohe Alter an.

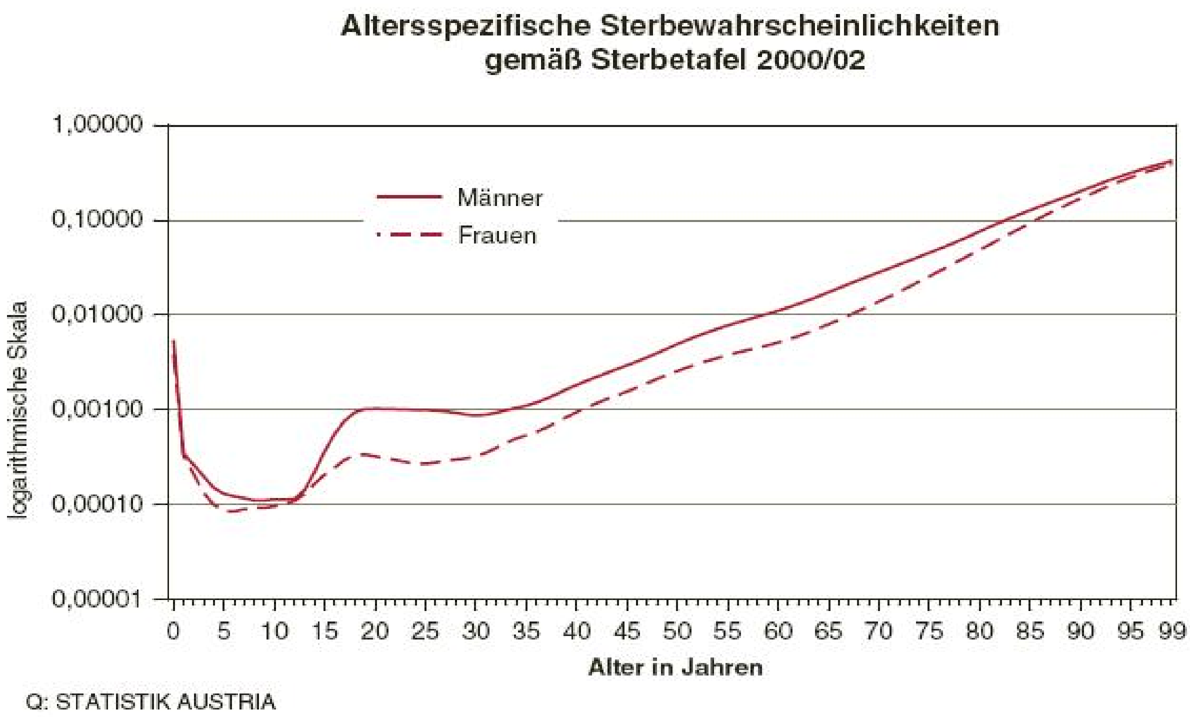

Abbildung 4.2.: Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten
(Hanika/Trimmel, 2005, S.126)

4.2.2. Modellbildung

Es sei nun T_x jene Zufallsvariable, die die zufällige restliche Lebensdauer ab dem Alter x angibt. T_x ist also die Zeit, die der x-jährige noch lebt, wobei x immer in ganzen Jahren angegeben wird.
Es wird hiermit explizit darauf hingewiesen, dass die Zufallsvariabel T_x nicht mit dem Eintrag $T(x)$ in der Sterbetafel verwechselt werden soll!

Für die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x gilt somit: $\quad q_x = P(T_x < 1)$
Für die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit p_x erhalten wir:
$p_x = 1 - q_x = 1 - P(T_x < 1) = P(T_x \geq 1)$
(Gerber, 1986, S.18).

Die Zufallsvarible T_x ist eine *stetige* Zufallsvariable (schließlich kann der Tod zu jedem Zeitpunkt eintreffen; die Ereignismenge Ω_T ist also überabzählbar) mit der Verteilungsfunktion $G_x(t) = P(T_x \leq t), \quad t \geq 0$.
$G_x(t)$ gibt für ein festes t also die Wahrscheinlichkeit an, dass ein x-jähriger innerhalb von t Jahren sterben wird. Wir benutzen die international übliche Schreibweise:

$$G_x(t) = P(T_x \leq t) = {}_tq_x \tag{4.25}$$

Analog dazu ist: ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - G_x(t)$ die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit des x-jährigen.
Mit Hilfe der Sterbetafeln können wir nun über die dort aufgelisteten einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_x$ eines x-jährigen wie folgt berechnen:

$${}_tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.26}$$

(Gerber, 1986, S.22).

Beispiel 4.11
(Goldammer, 2007/08a, UE 3, Bsp 21)
Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind durch die Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten ${}_tp_x$ und ${}_tq_x$ auszudrücken und mittels der Sterbetafel für Österreich von 2000/02 zu berechnen.

Ein 45-jähriger Mann stirbt

a) nach Vollendung des 60. Lebensjahres.

b) im Laufe des 78. Lebensjahres.

c) nach Vollendung des 65., aber vor Vollendung des 69. Lebensjahres.

Lösung:

a) $x = 45, \quad t = 15$

${}_{15}p_{45}$ ... 15-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit des 45-jährigen.

$${}_{15}p_{45} = p_{45} \cdot p_{46} \cdot ... \cdot p_{59} =$$
$$= (1 - 0,0029503) \cdot (1 - 0,0032555) \cdot ... \cdot (1 - 0,0103254) = 0,9105 \approx 91\%$$

Mit der entsprechenden Tabelle lässt sich die Lösung auch wie folgt ermitteln:

$${}_{15}p_{45} = \frac{l_{60}}{l_{45}} = \frac{87141}{95705} = 0,9105 \approx 91\%$$

◇

Wir erhalten somit den allgemein gültigen Zusammenhang:

$$\boxed{l_{x+t} = l_x \cdot {}_tp_x} \tag{4.27}$$

Beweis:

$$p_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$
$$p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}},\ p_{x+2} = \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}},\ ...,\ p_{x+t-2} = \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t-2}},\ p_{x+t-1} = \frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}}$$
$${}_tp_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+t-2} \cdot p_{x+t-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot ... \cdot \frac{l_{x+t-1}}{l_{x+t-2}} \cdot \frac{l_{x+t}}{l_{x+t-1}} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

□

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-jähriger die nächsten s Jahre überlebt und dann innerhalb von t Jahren sterben wird, bezeichnen wir mit: ${}_{s|t}q_x$

$${}_{s|t}q_x = P(s < T_x < s + t) = G_x(s + t) - G_x(s) = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x$$

Im Beispiel: ${}_{32|1}q_{45} = {}_{33}q_{45} - {}_{32}q_{45} = G_{45}(33) - G_{45}(32)$

Nebenrechnung:

$${}_{33}q_{45} = 1 - {}_{33}p_{45} = 1 - \frac{l_{45+33}}{l_{45}} = 1 - \frac{l_{78}}{l_{45}} = 1 - \frac{52586}{95705} \approx 1 - 0,5495 \approx 0,4505$$
$${}_{32}q_{45} = 1 - {}_{32}p_{45} = ... = 1 - \frac{55672}{95705} \approx 1 - 0,5817 \approx 0,4183$$

somit: ${}_{32|1}q_{45} = 0,4505 - 0,4183 \approx 0,0322 \approx 3\%$

c) ${}_{s|t}q_x = {}_{20|4}q_{45} = {}_{24}q_{45} - {}_{20}q_{45} = G_{45}(24) - G_{45}(20)$

Berechnung:

${}_{24}q_{45} = 1 - {}_{24}p_{45} = 1 - \frac{l_{69}}{l_{45}} = 1 - \frac{75076}{95705} \approx 0,2155$

${}_{20}q_{45} = 1 - {}_{20}p_{45} = 1 - \frac{l_{65}}{l_{45}} = 1 - \frac{81502}{95705} \approx 0,1484$

somit: ${}_{20|4}q_{45} = 0,2155 - 0,1484 \approx 0,0671 \approx 6,7\%$

Man kann bei der Berechnung von ${}_{s|t}q_x$ auch folgendermaßen vorgehen:

${}_{20|4}q_{45} = {}_{24}q_{45} - {}_{20}q_{45} = (1 - {}_{24}p_{45}) - (1 - {}_{20}p_{45}) = 1 - {}_{24}p_{45} - 1 + {}_{20}p_{45} =$

$= {}_{20}p_{45} - {}_{24}p_{45} = \frac{l_{65}}{l_{45}} - \frac{l_{69}}{l_{45}} = \frac{l_{65} - l_{69}}{l_{45}} = \frac{81502 - 75076}{95705} \approx 0,0671$

Allgemein gilt somit: $\boxed{{}_{s|t}q_x = \frac{l_{x+s} - l_{x+s+t}}{l_x}}$

Beispiel 4.12

(Goldammer, 2007/08a, UE 3, Bsp 23)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein 25-jähriger Mann, der eine 22-jährige Frau heiratet, **a)** seinen 75. Geburtstag erlebt? **b)** mit seiner Frau zusammen die Goldene Hochzeit feiert?

Man benutze zur Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeiten die Sterbetafel 2000/02 und nehme an, dass die Lebensdauer der beiden unabhängig ist und es zu keiner Scheidung kommt.

Lösung:

a) Mann ${}_{50}p_{25} = \frac{l_{75}}{l_{25}} = \frac{61396}{98377} \approx 62,4\%$

b) Frau ${}_{50}p_{22} = \frac{l_{72}}{l_{22}} = \frac{83651}{99238} \approx 84,3\%$

gemeinsam Goldene Hochzeit: ${}_{50}p_{25} \cdot {}_{50}p_{22} \approx 52,6\%$

◇

Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein x-jähriger nach Erreichen des Alters $x+s$ noch weitere t Jahre leben wird, unter der Bedingung, dass er das Alter $x+s$ erreicht, bezeichnen wir mit ${}_tp_{x+s}$.

$$ {}_tp_{x+s} = P(T_x > s+t \mid T_x > s) = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x} = \frac{1 - G_x(s+t)}{1 - G_x(s)} \tag{4.28}$$

Die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit unter der Bedingung, dass der x-jährige das Alter $x+s$ erreicht, ist:

$$ {}_tq_{x+s} = P(T_x \leq s+t \mid T_x > s) = \frac{{}_{s+t}q_x - {}_sq_x}{{}_sp_x} = \frac{G_x(s+t) - G_x(s)}{1 - G_x(s)} \tag{4.29} $$

Es gilt:

$$ \text{i)} \quad \boxed{{}_{s+t}p_x = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s}} \tag{4.30} $$

$$ \text{ii)} \quad \boxed{{}_{s|t}q_x = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s}} \tag{4.31} $$

Beweis: i) ${}_{s+t}p_x = 1 - G_x(s+t) = \frac{1-G_x(s)}{1-G_x(s)} \cdot (1 - G_x(s+t)) =$

$= (1 - G_x(s)) \cdot \frac{1-G_x(s+t)}{1-G_x(s)} = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} =$

$= p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots \cdot p_{x+s-1} \cdot p_{x+s} \cdot p_{x+s+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+s+t-1}$

ii) ${}_{s|t}q_x = P(s < T_x < s+t) = G_x(s+t) - G_x(s) = \frac{1-G_x(s)}{1-G_x(s)} \cdot (G_x(s+t) - G_x(s)) =$

$= (1 - G_x(s)) \cdot \frac{G_x(s+t)-G_x(s)}{1-G_x(s)} = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s}$

□

Somit haben wir eine weitere Formel zur Berechnung von ${}_{s|t}q_x$ kennengelernt.
Wir können nun beispielsweise ${}_{2|3}q_{60}$ sowohl über ${}_{2|3}q_{60} = \frac{l_{62}-l_{65}}{l_{60}} = \frac{85135-81602}{87141} \approx 0,04054$, als auch über ${}_{2|3}q_{60} = {}_2p_{60} \cdot {}_3q_{62} = p_{60} \cdot p_{61} \cdot (1 - {}_3p_{62}) = p_{60} \cdot p_{61} \cdot (1 - p_{62} \cdot p_{63} \cdot p_{64}) \approx 0,04169$ berechnen, wenn wir mit den Werten der österreichischen Sterbetafel 2000/02 arbeiten, und von einer männlichen Person ausgehen. Der Unterschied beim Resultat ab der dritten Nachkommastelle ist darauf zurückzuführen, dass mit gerundeten Werten gerechnet wird.

Als einen Eintrag in vielen Sterbetafeln findet man, wie schon erwähnt, die *fernere Lebenserwartung* im Alter x, die man über die Formel $e(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$ aus den Werten der jeweiligen Sterbetafel berechnen kann. (*Anmerkung:* Hier ist mit $T(x)$ der Eintrag in der Sterbetafel und *nicht* die Zufallsvariable gemeint.)

An und für sich versteht man in der Mathematik unter dem *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen X aber Folgendes:

Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f und existiert das (uneigentliche) Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mid x \mid \cdot f(x)\, dx$, so heißt das Integral $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$ *Erwartungswert* von X.

Den Erwartungswert der Zufallsvariable T_x wollen wir mit dem Symbol $\dot{e}_x$ bezeichnen und nennen $E(T_x) = \dot{e}_x$ schlichtweg die *Lebenserwartung des x-jährigen.*

Wir erhalten:
$\dot{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty \ t \cdot g_x(t)\ dt$, wobei g_x die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von T_x ist.
Es ist also $G'_x(t) = g_x(t)$.

$$\begin{aligned}
\dot{e}_x \quad &= \lim_{s\to\infty} \int_0^s \ t \cdot G'_x(t)\ dt = \lim_{s\to\infty} \{[G_x(t) \cdot t]_0^s - \int_0^s \ G_x(t)\ dt\} = \\
&= \lim_{s\to\infty} [G_x(s) \cdot s - \int_0^s \ G_x(t)\ dt] = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \ [G_x(s) - G_x(t)]\ dt = \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_0^s \ [1 - G_x(t) + G_x(s) - 1]\ dt = \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_0^s \ {}_tp_x\ dt + \lim_{s\to\infty} \int_0^s \ [G_x(s) - 1]\ dt = \\
&= \lim_{s\to\infty} \int_0^s \ {}_tp_x\ dt + \underbrace{\lim_{s\to\infty} [G_x(s) - 1] \cdot s}_{\to 0} = \int_0^\infty \ {}_tp_x\ dt
\end{aligned}$$

Als gute Näherung für $\dot{e}_x = \int_0^\infty \ {}_tp_x\ dt$ gilt:

$$\dot{e}_x \approx \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x + \frac{1}{2} \approx \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k} + \frac{1}{2}, \tag{4.32}$$

wobei ω das letzte Alter der Sterbetafel bezeichnet. Es wird also ein oberstes Alter für das menschliche Leben angenommen. Die Sterbewahrscheinlichkeit q_ω ist also 1. Bei der Sterbetafel für Österreich von 2000/02 ist ω mit 100 festgelegt.
Wir werden diese Nährung später noch genauer erläutern.

4.2.3. Sterblichkeitsintensität

Unter *Sterblichkeitsintensität* versteht man die momentane Sterberate im Alter $x + t$.
Sie stellt also quasi das stetige Pendant zu ${}_tq_x$ dar.

> *„Der Sterblichkeitsintensität kommt sachlich die Bedeutung einer fiktiven Sterbewahrscheinlichkeit zu. [Man kann davon ausgehen], dass in [...] Lebensperioden, in denen sich die Sterbenswahrscheinlichkeit nahezu gleichförmig (d. h. nahezu linear) ändert, zwischen Sterbenswahrscheinlichkeit und Sterbeintensität nur ein geringer Unterschied bestehen werde.“* (Czuber, 1928, S.83f)

Die Sterbeintensität eines x-jährigen im Alter $x + t$ ist definiert durch:

$$\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(1 - G_x(t)) = -\frac{d}{dt}\ln {}_tp_x \tag{4.33}$$

Da $g_x(t) = \mu_{x+t} \cdot (1 - G_x(t)) = \mu_{x+t} \cdot {}_tp_x$ kann die Lebenserwartung des x-jährigen als $\dot{e}_x = \int_0^\infty t \cdot \underbrace{{}_tp_x \cdot \mu_{x+t}}_{=g_x(t)} dt$ geschrieben werden.

4.2.4. Mathematische Verteilung der zufälligen restlichen Lebensdauer

Falls $G_x(t)$ durch eine „einfache“ Formel beschrieben werden kann, sprechen wir von einer *analytischen* oder *mathematischen* Verteilung.

Ähnlich wie wir es von der Normalverteilung und deren Dichtefunktion (Anmerkung: der GAUSS'schen Glockenkurve) in der Statistik kennen, hätten wir auch hier den Vorteil, dass man $G_x(t)$ relativ einfach durch Vorgabe der Parameter der Verteilung beschreiben kann. Analytische Verteilungen haben außerdem vorteilhafte theoretische Eigenschaften.

Wir wollen nun die vier wichtigsten analytischen Verteilungen von T_x vorstellen:

DE MOIVRE (1724) nahm an, dass T_x zwischen 0 und $\omega - x$ gleichverteilt ist. Für die Dichtefunktion $g_x(t)$ erhielt er die Termdarstellung:

$$g_x(t) = \frac{1}{\omega - x}, \qquad \text{für } 0 < t < (\omega - x). \tag{4.34}$$

Für die Sterblichkeitsintensität μ_{x+t} ergibt sich somit: $\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}$.

Beweis:

$$\mu_{x+t} = \frac{g_x(t)}{1 - G_x(t)} = \frac{\frac{1}{\omega-x}}{1 - \frac{t}{\omega-x}} = \frac{\frac{1}{\omega-x}}{\frac{\omega-x-t}{\omega-x}} = \frac{1}{\omega - x - t}$$

□

GOMPERTZ (1824) gab eine bessere Näherung des menschlichen Alters an, indem er ein exponentielles Wachstum der Sterblichkeitsintensität annahm. Er gab für μ_{x+t} folgende Formel an: $\mu_{x+t} = B \cdot c^{x+t}$, wobei $t > 0$ und für die Parameter $B > 0$ und $c > 1$ gilt.

Makeham (1860) verallgemeinerte diese Formel zu: $\mu_{x+t} = A + B \cdot c^{x+t}$, wobei $t > 0$. A ist hier eine zusätzlich altersunabhängige Komponente > 0.

Weibull (1939) beschrieb die Sterblichkeitsintensität nicht exponentiell, sondern nahm an, dass $x + t$ mit der n-ten Potenz wachse: $\mu_{x+t} = k \cdot (x + t)^n$ mit den Parametern $k, n > 0$ (Gerber, 1986, S.18f).

4.2.5. Die gestutzte Lebensdauer des x-jährigen

Es wurde vorher schon gezeigt, dass man die Lebenserwartung $\dot{e}_x$ im Alter x mittels
$\dot{e}_x = \int_0^\infty \ {}_tp_x \ dt$ berechnen kann.
Näherungsweise gilt wie wir schon im Kapitel 4.2.2 bei der Formel (4.32), Seite 41, angeführt haben:

$$\dot{e}_x \approx \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_kp_x + \frac{1}{2} \approx \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{k=1}^{\omega-x} l_{x+k} + \frac{1}{2},$$

wobei ω jenes Alter bezeichnet, das als oberstes Alter für das menschliche Leben angenommen wird.
Wir werden nun zeigen, warum diese Näherung ihre Berechtigung hat.
Es sei nun $K_x = [T_x]$ die ganzzahlige gestutzte zukünftige Lebensdauer des x-jährigen. Es werden also nur ganze Jahre gezählt.
Aus der Verteilung von T_x erhalten wir die Verteilung von K_x wie folgt:

$$P(K_x = k) = P(k < T_x < k + 1) = {}_{k|1}q_x = {}_kp_x \cdot {}_1q_{x+k} \tag{4.35}$$

Der Erwartungswert der diskreten Zufallsvariable K_x heißt *gestutzte Lebenserwartung* des x-jährigen und wird mit e_x bezeichnet. Es gilt:

$$e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot P(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\omega-x} k \cdot {}_kp_x \cdot {}_1q_{x+k} \tag{4.36}$$

Es handelt sich hierbei um eine allgemein gültige Formel wie sie unter anderem bei Gerber (1986) oder Kroll (2002) nachzulesen sind.
(Es wird hier explizit darauf hingewiesen, dass die *gestutzte Lebenserwartung* e_x nicht mit der *ferneren Lebenserwartung* $e(x)$, die in diversen Sterbetafeln über $e(x) = \frac{T(x)}{l(x)}$ berechnet

wird, verwechselt werden soll!)

In Analogie zum kontinuierlichen Fall $\dot{e}_x = \int_0^\infty \ _tp_x \ dt$ erhalten wir für die Berechnung der gestutzten Lebenserwartung:

$$e_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} \ _kp_x \tag{4.37}$$

Wir wollen nun zuerst durch ein Beispiel und dann allgemein zeigen, dass die beiden Formeln (4.36) und (4.37) zur Berechnung von e_x zum selben Ergebnis führen.
Rechnen wir mit der Sterbetafel für Österreich 2000/02, so ist $\omega = 100$. Die gestutzte Lebenserwartung eines 97-jährigen Mannes ist dann einerseits

$$\begin{aligned}
e_{97} \ &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \ k \cdot {}_kp_{97} \cdot {}_1q_{97+k} = \\
&= 1 \cdot p_{97} \cdot q_{98} + 2 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot q_{99} + 3 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} \cdot \underbrace{q_{100}}_{=1} = \\
&= p_{97} \cdot (1 - p_{98}) + 2 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot (1 - p_{99}) + 3 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} = \\
&= p_{97} - p_{97} \cdot p_{98} + 2 \cdot p_{97} \cdot p_{98} - 2 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} + 3 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} = \\
&= p_{97} + p_{97} \cdot p_{98} + p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99}, \text{ und andererseits} \\
e_{97} \ &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} \ {}_kp_{97} = p_{97} + p_{97} \cdot p_{98} + p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99},
\end{aligned}$$

somit Gleichheit.
Gerechnet mit den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten der Sterbetafel für Österreich von 2000/02 erhalten wir für den 97-jährigen Mann eine *gestutzte Lebenserwartung* von $\approx 1,24$ Jahren. (Die *fernere Lebenserwartung* beträgt im Vergleich dazu $e(97) = \frac{T(97)}{l(97)} = \frac{2624}{1318} \approx 1,99$ Jahre.)

Den allgemeinen *Beweis* kann man nun für ein beliebiges x analog zur obigen Vorgehensweise durchführen oder auf folgende Weise zeigen:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=1}^{\omega-x} \ k \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} - \sum_{k=1}^{\omega-x} \ {}_kp_x \quad = \quad \sum_{k=1}^{\omega-x} \ k \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} - {}_kp_x = \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\omega-x} \ {}_kp_x \cdot (k \cdot q_{x+k} - 1) \quad = \quad \sum_{k=1}^{\omega-x} \ [(1 - G_x(k)) \cdot (k \cdot \frac{G_x(k+1) - G_x(k)}{1 - G_x(k)} - 1)] = \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{\omega-x} \ (k \cdot [G_x(k+1) - G_x(k)] - 1 + G_x(k)) = \\
&= 1 \cdot (G_x(2) - G_x(1)) - 1 + G_x(1) + 2 \cdot (G_x(3) - G_x(2)) - 1 + G_x(2) + \\
&\quad +3 \cdot (G_x(4) - G_x(3)) - 1 + G_x(3) + ... + (\omega - x) \cdot (G_x(\omega - x + 1) - G_x(\omega - x)) - \\
&\quad -1 + G_x(\omega - x) =
\end{aligned}$$

$$= G_x(2) - G_x(1) - 1 + G_x(1) + 2 \cdot G_x(3) - 2 \cdot G_x(2) - 1 + G_x(2) + 3 \cdot G_x(4) - 3 \cdot G_x(3) -$$
$$-1 + G_x(3) + ... + (\omega - x) \cdot G_x(\omega - x + 1) - (\omega - x) \cdot G_x(\omega - x) - 1 + G_x(\omega - x) =$$
$$= -1 \cdot (\omega - x) + (\omega - x) \cdot G_x(\omega - x + 1) \quad = \quad (\omega - x) \cdot [G_x(\omega - x + 1) - 1] =$$
$$= (\omega - x) \cdot [{}_{\omega-x+1}q_x - 1] \quad = \quad (\omega - x) \cdot (1 - {}_{\omega-x+1}p_x - 1) =$$
$$= -(\omega - x) \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot \underbrace{p_\omega}_{=0} = 0$$

□

Es sei nun S_x der Bruchteil eines Jahres, den der x-jährige im Todesjahr noch erlebt. Es ist also $T_x = K_x + S_x$.

S_x ist eine stetige Zufallsvariable und hat eine stetige Verteilung mit Werten zwischen 0 und 1. Wenn wir mit $\frac{1}{2}$ approximieren und mit diesem Wert den Erwartungswert bilden, erhalten wir die Näherung $\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}$.

Dieser Näherung wird in der Praxis sehr oft verwendet um die Lebenserwartung e_x des x-jährigen auszurechnen.

Exakterweise wollen wir hier vermerken, dass eine Sterbetafel eigentlich eine Tabelle von einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten ist, durch die dann die Verteilung von K_x definiert ist. Durch Interpolation kann man dann daraus eine Verteilung für T_x konstruieren (Gerber, 1986, S.20).

5. Versicherungsleistungen

Ziel dieses Kapitels ist es die folgende zentrale Frage zu beantworten:
Wie hoch sollen die im *Voraus* zu zahlenden *Prämien* der versicherten Person sein, damit diese den *Gegenleistungen* des Versicherungsunternehmens, die in *Zukunft* fällig sein werden, mit hoher Wahrscheinlichkeit entsprechen?

Man stellt also die „Summe der Prämien aller Versicherten eines Lebensversicherungsunternehmens" der „Summe der Zahlungen des Lebensversicherungsunternehmens an die betroffenen Versicherten" gegenüber. Zunächst vernachlässigen wir die Gewinne und Kosten des Versicherungsunternehmens.
Die Leistung, die das Versicherungsunternehmen erbringt, kann, je nach Versicherungsart, entweder aus der Bezahlung einer einzelnen Summe (des *Kapitals*) oder in Form einer Reihe von Zahlungen, die über eine bestimmte Zeit gemacht werden (den *Renten*), erfolgen.
Ein Spezialfall der Rente ist die sogenannte *Leibrente*, bei der die Zahlungen solange erfolgen, wie eine bestimmte Person, die beim Eintritt in die Versicherung das Alter x hat, lebt. Eine Leibrente ist also eine Zeitrente, wobei die Dauer von der Zufallsvariable T_x abhängt.
Umgekehrt kann auch die Leistung, die der Versicherte erbringt, je nach Versicherungsart, aus der Bezahlung einer einzelnen Summe (der sogenannten *Einmalprämie*) oder in Form von einer Reihe von Zahlungen (*den Prämien*) erfolgen. In zweiterem Fall können wir noch unterscheiden, ob die Finanzierung durch periodische Prämien von *konstanter* Höhe oder durch periodische Prämien von *variabler* Höhe erfolgt.

Es sei hier erwähnt, dass Leibrenten im Versicherungswesen im Allgemeinen sowohl als Zahlung des Versicherungsunternehmens (also als Leistung des Versicherungsunternehmens), als auch als periodische Zahlungen der versicherten Person (also als Prämien des Versicherten) verstanden werden. Zweiteres natürlich mit umgekehrten Vorzeichen.

Wir werden in weiterer Folge den Begriff Leibrente für die Leistung des Versicherungsunternehmens verwenden.

Um die diversen Zahlungen vergleichen zu können, werden sie auf einen bestimmten Tag bezogen; sie werden also *diskontiert*. Es ist oft üblich die Zahlungen auf den *Barwert* zu beziehen. Diesen kann man aufgrund eines bestimmten angegebenen Zinssatzes i (wobei mit i wieder der jährliche effektive dekursive Zinssatz gemeint ist) berechnen (Kapitel 4.1.2, S.24ff).
Den Barwert einer Leibrente bezeichnen wir mit Y. Da die Dauer einer Leibrente von der Zufallsvariable T_x abhängt, ist der Barwert der Leibrente Y demnach selbst eine Zufallsvariable.
Auch im Fall, dass die Leistung des Versicherungsunternehmens aus der Bezahlung einer einzelnen Summe (des Kapitals) besteht, können sowohl die Höhe dieses Kapitals, als auch der Zeitpunkt seiner Auszahlung im Allgemeinen von der Zufallsvariable T_x abhängig sein. Den Barwert des Kapitals wollen wir mit Z bezeichnen. Da er, wie auch die zuvor erwähnte Dauer der Leibrente, von der Zufallsvariable T_x abhängt, ist der Barwert des Kapitals Z selbst eine Zufallsvariable.

Den *erwarteten Barwert des Kapitals* $E(Z)$ wollen wir mit *Nettoeinmalprämie* (kurz: *NEP*) bezeichnen.
Analog dazu definieren wir den *erwarteten Barwert einer Leibrente* durch $E(Y)$. Die NEP einer Leibrente ist also ihr *erwarteter Barwert* $E(Y)$.
Da die NEPs das vom Versicherungsunternehmen getragene Risiko nicht widerspiegeln, interessiert man sich im Allgemeinen für die Verteilung von Z bzw. Y.

Neben den Leistungen, die das Versicherungsunternehmen erbringt, wollen wir nun auch die Leistungen, zu denen sich der Versicherte verpflichtet (Prämien) auf den Barwert beziehen. Bei periodischen Prämien von konstanter oder variabler Höhe müssen wir bei der Berechnung des Barwerts auf die *Dauer* und auf die *Art* (jährlich oder unterjährig) der Prämie achten. Prämien werden für gewöhnlich vorschüssig bezahlt. Den Barwert der Prämie bezeichnen wir mit P.

Sowohl die Höhe der Prämie als auch die Anzahl der Prämienzahlungen können im allgemeinen von T_x abhängig sein.

Beispielsweise wird eine Person, die als 60-jährige eine Versicherung abschließt, höhere Prämien zahlen, als eine 40-jährige Person, die die gleiche Versicherung abschließt. Der Grund dafür ist offensichtlich: Alleine die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_{60} der 60-jährigen männlichen Person ist etwa sechsmal so hoch wie die der 40-jährigen.

Da der Zeitpunkt des Todes ungewiss ist, ist auch die Anzahl der Prämienzahlungen von T_x abhängig.

Somit ist der Barwert der Prämie P von T_x abhängig und ist selbst eine Zufallsvariable. Um die Zahlungen des Versicherungsunternehmens und die des Versicherten vergleichen zu können, berechnet man den *erwarteten Barwert der Prämie* $E(P)$ (erwartete Prämienleistung).

Es sei nun L die Differenz zwischen dem Barwert der Versicherungsleistung (Z bei Einmalzahlung bzw. Y bei Leibrenten) und dem Barwert der Prämienleistung P. Bei einer vernünftigen Wahl der Prämien muss die Zufallsvariable L einen Wertebereich haben, der positive und negative Werte umfasst.

Wir sprechen von einer *Nettoprämie* N, wenn $E(L) = 0$ ist, das heißt, wenn $E(Z)$ bzw. $E(Y) = E(P)$ ist.

Falls die Prämie durch eine Einmalzahlung (Einmalprämie) finanziert wird, gelangen wir durch die Beziehung $E(L) = 0$ auf die bereits angesprochene NEP.

Im Falle, dass die Prämie durch konstante, periodische Prämien finanziert wird, können wir uns die Nettoprämie N durch die Beziehung $E(L) = 0$ relativ einfach berechnen, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

Im Falle von variablen Prämien dient die Beziehung $E(L) = 0$ als Randbedingung. Die Nettoprämie ist in diesem Fall nicht eindeutig bestimmbar (GERBER, 1986, S.48).

Beispiel 5.1

Ein 50-jähriger Mann schließt eine Lebensversicherung auf den Todesfall über 40000 € mit einer Laufzeit von zwei Jahren ab. Wie hoch sollte die Prämie fairerweise sein, wenn mit $i = 3,25\%$ gerechnet wird, die Prämie jeweils zu Beginn des ersten und zu Beginn des zweiten Jahres gezahlt wird (also vorschüssig) und die Versicherungssumme im Schadensfall nachschüssig erfolgt?

Lösung:

restliche Lebensdauer T_x	$0 - 1$ Jahre	$1 - 2$ Jahre	≥ 2 Jahre
restliche Lebensdauer in ganzen Jahren	0	1	≥ 2
Prämienzahlungen (bezogen auf den Zeitpunkt 0, also auf Vertragsbeginn)	N	$N + N \cdot v$	$N + N \cdot v + 0$
Leistung der Versicherung (bezogen auf Vertragsbeginn)	$40000 \cdot v$	$40000 \cdot v^2$	0
Wahrscheinlichkeiten (berechnet mit österreichischen Sterbetafel 2000/02)	$q_{50} = 0,0049170$	${}_{1\|1}q_{50} = p_{50} \cdot q_{51}$ $= 0,0054293$	${}_2p_{50} = p_{50} \cdot p_{51}$ $= 0,989654$

(Natürlich muss die Summe der hier angegebenen Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben:
$q_{50}+p_{50}\cdot q_{51}+p_{50}\cdot p_{51} = (1-p_{50})+p_{50}\cdot(1-p_{51})+p_{50}\cdot p_{51} = 1-p_{50}+p_{50}-p_{50}\cdot p_{51}+p_{50}\cdot p_{51} = 1.$)

$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}0325} \approx 0,96852$

Den Barwert der Prämienzahlung bezeichnen wir mit P. Für den erwarteten Barwert der Prämienleistung $E(P)$ gilt:

$$\begin{aligned}
E(P) &= N \cdot q_{50} + (N + Nv) \cdot p_{50} \cdot q_{51} + (N + Nv) \cdot {}_2p_{50} = \\
&= N \cdot q_{50} + N \cdot (1 + v) \cdot p_{50} \cdot q_{51} + N \cdot (1 + v) \cdot p_{50} \cdot p_{51} = \\
&= N \cdot (q_{50} + (1 + v) \cdot p_{50} \cdot q_{51} + (1 + v) \cdot p_{50} \cdot p_{51}) = \\
&= N \cdot 1,963760775.
\end{aligned}$$

Den Barwert der Versicherungsleistung bezeichnen wir mit Z (Bezahlung einer einzelnen Summe). Für den erwareten Barwert der Versicherungsleistung $E(Z)$ gilt:

$$\begin{aligned}
E(Z) &= 40000 \cdot v \cdot q_{50} + 40000 \cdot v^2 \cdot p_{50} \cdot q_{51} + 0 \cdot {}_2p_{50} = \\
&= 40000 \cdot v \cdot (q_{50} + v \cdot p_{50} \cdot q_{51}) = 394,20.
\end{aligned}$$

Die Differenz L berechnet sich aus $L = Z - P$.

Wenn wir nun die beiden erhaltenen Werte gemäß $E(L) = 0$ gleichsetzen, erhalten wir für N:

$$E(P) = E(Z) \Longleftrightarrow N \cdot 1,964 = 394,20 \Longleftrightarrow N \approx 200,74 \text{ €}.$$

Die Prämie, die der 50-jährige Mann jeweils zu Beginn des ersten und zweiten Jahres bezahlen muss, beträgt also 200,74 €.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass Gewinne bzw. Kosten des Versicherungsunternehmens in diese Rechnung nicht einbezogen wurden. Wir haben mit der Bedingung $E(L) = 0$ gerechnet und können unser Resultat $N \approx 200,74$ € somit als *Nettoprämie* bezeichnen. Man kann das Ergebnis so interpretieren, dass der erwartete Verlust (wobei *erwartet* im mathematischen Sinn zu verstehen ist) des Versicherungsunternehmens (und des Versicherungsnehmers) verschwindet, wenn $N = 200,74$ € ist.

◇

Beim vorigen Beispiel haben wir so gerechnet, als würde das Versicherungsunternehmen seine Leistungen gegen Nettoprämien erbringen. In der Praxis wird sich das Versicherungsunternehmen aber einen angemessenen *Sicherheitszuschlag* für das Risiko, das es trägt, zu der Prämie hinzurechnen. Wir werden später Möglichkeiten aufzeigen, wie man Prämien bestimmen kann, die die Risiken, die das Versicherungsunternehmen trägt, berücksichtigen. Zunächst wollen wir uns aber auf die Berechnung von Nettoprämien beschränken.

Betrachten wir nun eine Berechnung der Lebensversicherung auf den Erlebensfall.

Beispiel 5.2

Ein 50-jähriger Mann schließt eine Lebensversicherung auf den Erlebensfall über 40000 € mit einer Laufzeit von zwei Jahren ab. Die Prämien werden wieder jährlich vorschüssig bezahlt. Die Versicherungsleistung wird ausbezahlt, nachdem er die zwei Jahre (Laufzeit) überlebt hat. Es wurde ein Zinssatz von $i = 3,25\%$ vereinbart.
Wie hoch fallen die Prämien aus?

Lösung:

restliche Lebensdauer T_x	$0 - 1$ Jahre	$1 - 2$ Jahre	≥ 2 Jahre
restliche Lebensdauer in ganzen Jahren	0	1	≥ 2
Prämienzahlungen (bezogen auf den Zeitpunkt 0, also auf Vertragsbeginn)	N	$N + N \cdot v$	$N + N \cdot v$
Leistung der Versicherung (bezogen auf Vertragsbeginn)	0	0	$40000 \cdot v^2$
Wahrscheinlichkeiten	q_{50}	${}_{1\|1}q_{50} = p_{50} \cdot q_{51}$	${}_2p_{50} = p_{50} \cdot p_{51}$

Wir berechnen wieder die erwartete Prämienzahlung bzw. die erwartete Versicherungsleistung (beides bezogen auf den Barwert) und erhalten:
$E(P) = N \cdot q_{50} + (N + Nv) \cdot p_{50} \cdot q_{51} + (N + Nv) \cdot {}_2p_{50} = N \cdot 1,96376$
$E(Z) = 0 \cdot q_{50} + 0 \cdot p_{50} \cdot q_{51} + 40000 \cdot v^2 \cdot {}_2p_{50} = 37133,265.$
Zur Berechnung der Nettoprämie setzen wir $E(P) = E(Z)$ und erhalten:

$$N \cdot 1,963 = 37133,265 \Longleftrightarrow N \approx 18909,25 \text{ €}.$$

$\diamond$

Wir möchten nun, nachdem die Nettoprämie anhand von zwei konkreten Beispielen berechnet wurde, dazu übergehen, allgemeine Formeln einerseits für die Ermittlung der erwarteten Leistungszahlungen (Kapitel 5), andererseits für die Ermittlung der erwarteten Prämienzahlungen (Kapitel 6) der versicherten Person zu entwickeln.

5.1. Versicherungsleistungen durch Einmalzahlungen

5.1.1. Die t-jährige Lebensversicherung auf den Todesfall

Bei Todesfallversicherungen unterscheiden wir zunächst zwischen einer Todesfallversicherung mit *lebenslänglicher Deckung* ($t = \omega - x$, wobei ω das letzte Alter ist, für das in der jeweiligen Sterbetafel noch Lebende angegeben sind (angenommenes oberstes Alter für das menschliche Leben)) und einer *temporären* Todesfallversicherung ($t = n$, wobei n die Laufzeit der Versicherung ist).
Da die Leistung des Versicherungsunternehmens in diesem Kapitel durch eine Einmalzahlung erfolgt, gilt für den Barwert Z dieses Kapitals κ:

(i) für die Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Deckung

$Z = \kappa \cdot v^{K+1}$, wobei K die in Kapitel 4.2.5, Seite 43ff, eingeführte ganzzahlige gestutzte zukünftige Lebensdauer des x-jährigen ist.

(Aufgrund der besseren Lesbarkeit verzichten wir in weiterer Folge auf den Index x und schreiben für die ganzzahlige gestutzte zukünftige Lebensdauer K_x des x-jährigen einfach K.)

Das Kapital κ wird also am Ende jenes Jahres fällig, in dem der Tod der versicherten Person eintreten wird. Man bedenke, dass die Höhe des Kapitals hier nicht vom Zufall abhängt, der Zeitpunkt seiner Auszahlung, welcher $K+1$ ist, hingegen schon.

Die möglichen Werte, die Z annehmen kann, sind $\kappa v, \kappa v^2, \kappa v^3, ..., \kappa v^{\omega-x+1}$.
Wir können nun aus der Verteilung von K auf die Verteilung von Z schließen:
$P(Z=\kappa \cdot v^{k+1}) = P(K=k) = {}_{k|1}q_x = {}_kp_x \cdot {}_1q_{x+k}, \quad$ für $k=0,1,...,\omega-x$.

Den erwarteten Barwert des Kapitals $E(Z)$, also die NEP, berechnet man demnach wie folgt:

$$\begin{aligned}
\boxed{NEP_x} &= E(Z) = \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\omega-x} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot P(Z=\kappa \cdot v^{k+1}) = \\
&= \boxed{\textstyle\sum_{k=0}^{\omega-x} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}} = \\
&= \kappa \cdot v \cdot q_x + \kappa \cdot v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} + \kappa \cdot v^3 \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + ... + \kappa \cdot v^{\omega-x+1} \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega = \\
&= \kappa v \cdot (q_x + v \cdot p_x \cdot q_{x+1} + v^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... \\
&\quad ... + v^{\omega-x} \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot \underbrace{q_\omega}_{=1}).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Falls $\kappa = 1$ liegt ein Spezialfall vor.
In diesem Fall wollen wir $E(Z) = NEP_x$ mit A_x bezeichnen.
Diese Bezeichnung stimmt mit der international üblichen Symbolik überein.

A_x lässt sich laut Gerber (1986, S.32) auch durch folgende Rekursionsformel berechnen:

$$\begin{aligned}
A_x &= E(Z) = \\
&= v \cdot (q_x + \underbrace{\sum_{k=0}^{\omega-(x+1)} v^{k+1} \cdot {}_kp_{x+1} \cdot q_{x+1+k}}_{A_{x+1}} \cdot p_x) = \\
&= v \cdot (q_x + A_{x+1} \cdot p_x) = v \cdot q_x + v \cdot A_{x+1} \cdot p_x.
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
A_{x+1} &= v \cdot q_{x+1} + v^2 \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v^3 \cdot {}_2p_{x+1} \cdot q_{x+3} + ... + v^{\omega-x} \cdot {}_{\omega-x-1}p_{x+1} \cdot q_\omega = \\
&= v \cdot q_{x+1} + v^2 \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v^3 \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot q_{x+3} + ... + v^{\omega-x} \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot q_\omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{x+1} \cdot p_x &= v \cdot p_x \cdot q_{x+1} + v^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v^3 \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot q_{x+3} + ... \\
&\quad ... + v^{\omega-x} \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot q_\omega
\end{aligned}$$

Also ist $v \cdot (q_x + A_{x+1} \cdot p_x) = v \cdot q_x + v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} + v^3 \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + ...$
$... + v^{\omega-x+1} \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega = A_x.$

□

Allgemein (also auch für $\kappa \neq 1$) gilt für die Berechnung der NEP_x die Rekursionsformel:

$$NEP_x = E(Z) = \kappa \cdot (v \cdot q_x + v \cdot A_{x+1} \cdot p_x). \tag{5.1}$$

Beispiel 5.3

(Goldammer, 2007/08a, UE 4, Bsp 33)

Berechnen Sie die erwarteten Barwerte des Kapitals κ einer lebenslänglichen Todesfallversicherung für die Alter $x = 36, 37, 38$, wenn mit $i = 3\%$ verzinst und mit der folgenden Tabelle gerechnet wird:

x	30	31	32	33	34	35	36	37	38	$\omega = 39$	40
l_x	10000	9800	9400	8800	8000	7000	5800	4400	2800	1000	0
d_x	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	1000	

Lösung: $\boxed{NEP_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}}$

i) $x = 36$:

$$NEP_{36} = E(Z) = \sum_{k=0}^{3} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{36} \cdot q_{36+k} =$$
$$= \kappa \cdot (v \cdot q_{36} + v^2 \cdot p_{36} \cdot q_{37} + v^3 \cdot \underbrace{{}_2p_{36}}_{=p_{36}\cdot p_{37}} \cdot q_{38} + v^4 \cdot \underbrace{{}_3p_{36}}_{=p_{36}\cdot p_{37}\cdot p_{38}} \cdot q_{39})$$

Nebenrechnung:

$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i} \approx 0,9709$

Mittels $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ berechnen wir die für die Rechnung benötigten einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten:

$q_{36} \approx 0,2414 \implies p_{36} \approx 0,7586$

$q_{37} \approx 0,3636 \implies p_{37} \approx 0,6364$

$q_{38} \approx 0,6429 \implies p_{38} \approx 0,357$

$q_{39} = 1$

$$\Rightarrow NEP_{36} = E(Z) = \kappa \cdot 0,931572205$$

ii) $x = 37$:

entweder analog zu oben: $\sum_{k=0}^{2} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{37} \cdot q_{37+k}$ oder mittels Rekursionsformel (5.1):

$NEP_x = \kappa \cdot (v \cdot q_x + v \cdot A_{x+1} \cdot p_x)$

$\underbrace{NEP_{36}}_{\kappa \cdot 0{,}931572205} = \kappa \cdot (v \cdot q_{36} + v \cdot A_{37} \cdot p_{36}) \quad \Longleftrightarrow \quad A_{37} = \frac{0{,}931572205 - v \cdot q_{36}}{v \cdot p_{36}}$

$$\Rightarrow NEP_{37} = \kappa \cdot A_{37} = \kappa \cdot 0,946639171$$

iii) $x = 38$:

entweder analog zu oben: $\sum_{k=0}^{1} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{38} \cdot q_{38+k} = \kappa \cdot v \cdot q_{38} + \kappa \cdot v^2 \cdot p_{38} \cdot q_{39} =$

$= \kappa \cdot 0,960774545$

oder mittels Rekursionsformel:

$A_{38} = \frac{0{,}9466392 - v \cdot q_{37}}{v \cdot p_{37}} \approx 0,960774544$

$$\Rightarrow NEP_{38} = \kappa \cdot 0,960774544$$

◇

(ii) für die temporäre Todesfallversicherung

$$Z = \begin{cases} \kappa \cdot v^{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ 0 & \text{für} \quad K = n, n+1, ... \end{cases}$$

wobei K wieder die ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer und n die Laufzeit der Versicherung ist.
Das Kapital κ wird also nur dann ausbezahlt, falls die versicherte Person innerhalb der ersten n Jahre stirbt. Die Auszahlung erfolgt gegebenenfalls am Ende des Jahres, in dem der Tod eintritt.
In Beispiel 5.1 (S.48) mit der Todesfallversicherung für den 50-jährigen Mann war $n = 2$ (zweijährige Laufzeit).

Die möglichen Werte, die Z annehmen kann, sind 0 (falls die Person *nicht* innerhalb der ersten n Jahre sterben sollte), $\kappa v, \kappa v^2, ..., \kappa v^n$.

Für die Verteilung von Z erhalten wir:

$P(Z = \kappa \cdot v^{k+1}) = {}_{k|1}q_x = {}_kp_x \cdot q_{x+k}$ für $k = 0, 1, 2, ..., n-1.$

Den erwarteten Barwert des Kapitals $E(Z)$ erhalten wir so:

$\boxed{NEP^1_{x,n}} = E(Z) =$

$= \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}} =$

$= \kappa \cdot v \cdot q_x + \kappa \cdot v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1} + \kappa \cdot v^3 \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... + \kappa \cdot v^n \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+n-2} \cdot q_{x+n-1} =$

$= \kappa v \cdot (q_x + v \cdot p_x \cdot q_{x+1} + ... + v^{n-1} \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+n-2} \cdot q_{x+n-1}).$

Auch hier gibt es für den Fall, dass $\kappa = 1$ ist, in der international üblichen Schreibweise ein eigenes Symbol für die NEP. In Analogie zu vorher bezeichnet man sie mit $A^1_{x,n}$.
Wegen der Bezeichnung $l_{x+n} = l_x \cdot {}_np_x$ (siehe Formel (4.27) aus Kapitel 4.2.2, Seite 38) lässt sich die $NEP^1_{x,n}$ auch wie folgt anschreiben:

$$NEP^1_{x,n} = E(Z) = \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot (l_{x+k} - l_{x+k+1}). \tag{5.2}$$

Beweis:

z.z. ${}_kp_x \cdot q_{x+k} = (l_{x+k} - l_{x+k+1}) \cdot \frac{1}{l_x}$

$$\begin{aligned} l_{x+k} - l_{x+k+1} &= l_x \cdot {}_kp_x - l_x \cdot {}_{k+1}p_x = l_x \cdot ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) = \\ &= l_x \cdot (p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1} - p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1} \cdot p_{x+k}) = \\ &= l_x \cdot (\underbrace{(p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1})}_{{}_kp_x} \cdot (1 - p_{x+k})) = \\ &= l_x \cdot ({}_kp_x \cdot (1 - (1 - q_{x+k})) = l_x \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.1 lässt sich mit der soeben kennengelernten Schreibweise wie folgt anschreiben:
$E(Z) = \sum_{k=0}^{1} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{50} \cdot q_{50+k} = \kappa \cdot v \cdot q_{50} + \kappa \cdot v^2 \cdot p_{50} \cdot q_{51} = \underbrace{\kappa}_{=40000} \cdot 0,009855085 \approx 394,20$

oder:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{l_{50}} \sum_{k=0}^{1} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot (l_{50+k} - l_{50+k+1}) = \\ &= \frac{1}{l_{50}} \cdot \kappa \cdot (v \cdot (l_{50} - l_{51}) + v^2 \cdot (l_{51} - l_{52})) = \\ &= \frac{1}{93975} \cdot \kappa \cdot (v \cdot (93975 - 93513) + v^2 \cdot (93513 - 93003)) = \\ &= \frac{1}{93975} \cdot \kappa \cdot (462v + 510v^2) = \kappa \cdot 0,009852156 \approx 394,07. \end{aligned}$$

◇

Bemerkung:

Dass sich die beiden Endergebnisse bei der sechsten Nachkommastelle unterscheiden, ist auf den „Rundungsfehler“ bei der Sterbetafel zurückzuführen. Beispielsweise ist für $x = 50$:

$q_{50} \cdot l_{50} = d_{50} \qquad 0,0049170 \cdot 93975 = 462,075075.$

In der Tabelle findet man für $d_{50} = 462$, da auf „ganze Menschen“ gerundet wurde.

5.1.2. Die t-jährige Lebensversicherung auf den Erlebensfall

Erlebensfallversicherungen werden auf eine Dauer von n Jahren abgeschlossen. Falls die versicherte Person das Ende der Laufzeit erleben sollte, wird das Kapital κ ausbezahlt, ansonsten nicht.

Den Barwert des Kapitals Z berechnet man demnach wie folgt:

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ \kappa \cdot v^n & \text{für} \quad K = n, n+1, ... \end{cases},$$

wobei K wieder die ganzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer und n die Laufzeit der Versicherung ist.

Bei unserem Einstiegsbeispiel mit der Lebensversicherung auf den Erlebensfall (Beispiel 5.2, S.50) für den 50-jährigen Mann war $n = 2$.

Die möglichen Werte, die Z annehmen kann, sind 0 (falls die Person innerhalb der ersten n Jahre sterben sollte) und $\kappa \cdot v^n$ (falls die Person das Ende der Laufzeit erleben sollte).

Der erwartete Barwert des Kapials beträgt:

$$\boxed{NEP^I_{x,n} = E(Z) \quad = \quad \kappa \cdot v^n \cdot \underbrace{{}_n p_x}_{p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1}} \quad = \quad \kappa \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}}. \tag{5.3}$$

Beispiel 5.2 lässt sich somit wie folgt anschreiben:

$E(Z) = 40000 \cdot v^2 \cdot \underbrace{{}_2 p_{50}}_{p_{50} \cdot p_{51}} \approx 37133,25$

Für den Spezialfall $\kappa = 1$ wird das Symbol $A^I_{x,n}$ verwendet.

Mittels dieser Rekursionsformeln lassen sich die NEPs berechnen:

i) $A^I_{x,n} = v \cdot p_x \cdot A^I_{x+1,n-1}$

ii) $NEP^I_{x,n} = \kappa \cdot v \cdot p_x \cdot A^I_{x+1,n-1}$.

Beweis:

i) $A^I_{x+1,n-1} = v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_{x+1} = v^{n-1} \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{x+n-1}$

Also ist $v \cdot p_x \cdot A^I_{x+1,n-1} = v \cdot p_x \cdot v^{n-1} \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{x+n-1} =$

$$= v^n \cdot \underbrace{p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{x+n-1}}_{{}_np_x} = v^n \cdot {}_np_x = A^I_{x,n}.$$

ii) $NEP^I_{x,n} = \kappa \cdot A^I_{x,n} = \kappa \cdot v^n \cdot {}_np_x = \kappa \cdot v \cdot p_x \cdot A^I_{x+1,n-1}$

□

Die erwarteten Barwerte des Kapitals κ für die Alter $x = 32, 34, 38$ mit $i = 3\%$ und der Sterbetafel von Beispiel 5.3 für eine fünfjährige Erlebensversicherung können mittels Formel (5.3), Seite 56, berechnet werden:

- $NEP^I_{32,5} = \kappa \cdot (\frac{1}{1{,}03})^5 \cdot \frac{l_{37}}{l_{32}} \approx \kappa \cdot 0{,}97^5 \cdot \frac{4400}{9400} \approx \kappa \cdot 0{,}40377$
- $NEP^I_{34,5} \approx \kappa \cdot 0{,}107826$
- $NEP^I_{38,5} = 0$

5.1.3. Die t-jährige gemischte Kapitallebensversicherung

Es sei nun κ_1 die Versicherungssumme im Todesfall, κ_2 die Versicherungssumme im Erlebensfall und n die Laufzeit der Versicherung.
Dann gilt für den Barwert des Kapitals Z:

$$Z = \begin{cases} \kappa_1 \cdot v^{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ \kappa_2 \cdot v^n & \text{für} \quad K = n, n+1, ... \end{cases}$$

Der erwartete Barwert des Kapitals beträgt:
$NEP_{x,n} = NEP^1_{x,n} + NEP^I_{x,n}$.

Falls $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, gilt

$$\boxed{A_{x,n} = A^1_{x,n} + A^I_{x,n}} \tag{5.4}$$

(Gerber, 1986, S.26).

Die erwartete Leistungszahlung beträgt somit:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_1 \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \kappa_2 \cdot v^n \cdot {}_np_x = \\ &= \frac{1}{l_x} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_1 \cdot v^{k+1} \cdot (l_{x+k} - l_{x+k+1}) + \kappa_2 \cdot v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}. \end{aligned}$$

Es ist anzunehmen, dass κ_1 im Vergleich zu κ bei einer temporären Todesfallversicherung kleiner sein wird (ebenso κ_2 im Vergleich zu κ bei einer Lebensversicherung auf den Erlebensfall). Schließlich muss das Versicherungsunternehmen bei einer gemischten Kapitallebensversicherung sowohl im Todes- als auch im Erlebensfall auszahlen.

Wir wollen nun auch für den erwarteten Barwert des Kapitals einer gemischten Lebensversicherung eine Rekursionsformel angeben und diese beweisen:

$$NEP_{x,n} = \kappa_1 \cdot v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot NEP_{x+1,n-1}. \tag{5.5}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} NEP_{x,n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_1 \cdot \underbrace{v^{k+1}}_{v^k \cdot v} \cdot \underbrace{{}_kp_x}_{{}_{k-1}p_{x+1} \cdot p_x} \cdot q_{x+k} + \kappa_2 \cdot v^n \cdot {}_kp_x = \\ &= \kappa_1 \cdot v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \kappa_1 \cdot v^k \cdot {}_{k-1}p_{x+1} \cdot q_{x+k} + \kappa_2 \cdot \underbrace{v^n}_{v^{n-1} \cdot v} \cdot \underbrace{{}_np_x}_{{}_{n-1}p_{x+1} \cdot p_x} = \\ &= \kappa_1 \cdot v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot \left(\sum_{k=1}^{n-1} \kappa_1 \cdot v^k \cdot {}_{k-1}p_{x+1} \cdot q_{x+k} + \kappa_2 \cdot v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_{x+1}\right) = \\ &= \kappa_1 \cdot v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot (\kappa_1 \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2} v^{l+1} \cdot {}_lp_{x+1} \cdot q_{x+1+l}}_{A^1_{x+1,n-1}} + \kappa_2 \cdot \underbrace{v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_{x+1}}_{A^I_{x+1,n-1}}). \end{aligned}$$

Ist nun $NEP^1_{x+1,n-1} = \kappa_1 \cdot A^1_{x+1,n-1}$ und $NEP^I_{x+1,n-1} = \kappa_2 \cdot A^I_{x+1,n-1}$, erhalten wir wegen $NEP_{x+1,n-1} = NEP^1_{x+1,n-1} + NEP^I_{x+1,n-1}$:

$$NEP_{x,n} = \kappa_1 \cdot v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot NEP_{x+1,n-1}.$$

□

Beispiel 5.4

Für eine fünfjährige gemischte Kapitallebensversicherung ist der erwartete Barwert des Kapitals $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$ für das Alter $x = 38$ mit $i = 3\%$ und der Sterbetafel von Beispiel 5.3 (S.53) anzugeben.

Lösung:

$NEP_{38,5} = NEP^1_{38,5} + NEP^I_{38,5} = \sum_{k=0}^{4} \ \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{38} \cdot q_{38+k} + 0$

Da ${}_kp_{38} = \frac{l_{38+k}}{l_{38}} = 0$ für $k \geq 2$, ist $NEP_{38,5} = \kappa \cdot v \cdot q_{38} + \kappa \cdot v^2 \cdot p_{38} \cdot q_{39} = \kappa \cdot 0,960774545$

◇

5.1.4. Einige Standardtypen

Die Annahme, dass das Kapital κ jeweils am Ende des Todesjahres ausbezahlt wird, ist zwar nicht ganz realistisch, hat aber den Vorteil, dass man die entsprechenden erwarteten Barwerte anhand von Sterbetafeln mit den in den vorigen Kapiteln angegebenen Formel berechnen kann.

i) Für den Fall, dass das *Kapital* κ tatsächlich *zum Todeszeitpunkt* (also zur Zeit T) *ausbezahlt* werden soll (auch hier verzichten wir wegen der besseren Lesbarkeit auf den Index x), erhalten wir für eine Todesfallversicherung mit unbegrenzter Dauer für den Barwert Z:

   $Z = \kappa \cdot v^T$ (Gerber, 1986, S.27).

   Die NEP berechnet man dann in Analogie zum diskreten Fall (siehe 5.1.1 (i), S.51) wie folgt:

   $\overline{NEP_x} = \int_0^\infty \ \kappa \cdot v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \ dt.$

   In dieser Formel finden wir die in Kapitel 4.2.3 auf Seite 41 eingeführte *Sterblichkeitsintensität* μ_{x+t} wieder. Da sie das kontinuierliche Analogon zur Sterbenswahrscheinlichkeit q_{x+t} darstellt, steht sie in der Formel auch an deren Stelle.

   Die obere Integralgrenze ist hier mit ∞ angegeben. Dies ist natürlich nur theoretischer Natur, weil ein unendliches Lebensalter nicht möglich ist.

ii) Betrachten wir nun den Fall, dass das *Kapital* κ *am Ende des Monats ausbezahlt* wird, in dem der Tod eintritt.

   In Kapitel 4.2.5 auf Seite 43 haben wir S_x als den Bruchteil des Jahres, den der x-jährige im Todesjahr noch erlebt, definiert (auch hier wollen wir in weiterer Folge wieder auf den Index x verzichten). Mit $S^{(12)}$ bezeichnen wir nun S plus die Tage, die noch auf den vollen Monat, in dem die versicherte Person stirbt, fehlen.

Bei einer Todesfallversicherung mit unbegrenzter Dauer ist dann $Z = \kappa \cdot v^{K+S^{(12)}}$. Allgemein erhalten wir schließlich $Z = \kappa \cdot v^{K+S^{(m)}}$, wenn das Kapital κ am Ende des m-tel Jahres ausbezahlt wird, in dem der Tod eintritt.

iii) Als nächstes wollen wir eine Deckung betrachten, bei der das versicherte *Kapital* von Jahr zu Jahr *variieren* kann und *am Ende des Todesjahres* ausbezahlt wird.

Dann erhalten wir für den Barwert Z:

$Z = \kappa_{K+1} \cdot v^{K+1}$, wobei κ_j mit $j = 1, 2, ..., \omega - x + 1$ das im j-ten Versicherungsjahr versicherte Kapital sein soll.

Für die NEP gilt:

$$\overline{\overline{NEP_x}} = E(Z) = \sum_{k=0}^{\omega-x} \kappa_{k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}. \tag{5.6}$$

Ist die Deckung *auf n Jahre beschränkt*, so ist $\kappa_{n+1} = \kappa_{n+2} = ... = 0$ und für die Berechnung der $\overline{\overline{NEP^1_{x,n}}}$ erhalten wir: $E(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_{k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$.

Falls das versicherte Kapital eine *Funktion* $\kappa(t)$ mit $t \geq 0$ ist, berechnen wir den Barwert Z unter der Voraussetzung, dass die Versicherungsleistung $\kappa(t)$ unmittelbar nach dem Todeszeitpunkt t (für ein festes t) ausbezahlt wird, mittels $Z = \kappa(t) \cdot v^T$.

Die NEP erhalten wir durch Ermittlung des Integrals $E(Z) = \int_0^\infty \kappa(t) \cdot v^t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt$.

5.1.5. Ein Rechenbeispiel

Ein 35-jähriger Mann nimmt für den Bau seines Hauses ein Darlehen in der Höhe von κ_0 auf. Dieses Darlehen muss, verzinst mit dem Zinssatz i, in zehn Jahren durch eine Einmalzahlung zurückgezahlt werden. Damit im Fall seines Ablebens seine Gattin nicht durch die Schulden belastet wird, schließt er eine reine zehnjährige Ablebensversicherung ab, welche, falls er innerhalb dieser zehn Jahre stirbt, am Ende seines Todesjahres die zu diesem Zeitpunkt fällige Restschuld begleicht. Bei der Ablebensversicherung wird mit dem selben Zinssatz i wie im Darlehen verzinst (Goldammer, 2007/08a, UE 5, Bsp 45).

a) Geben Sie eine Formel für die Höhe der Nettoeinmalprämie dieser Versicherung in allgemeiner Form an!

b) Berechnen Sie die Höhe dieser NEP mit Hilfe der Sterbetafel von 2000/02 für Österreich, wenn $i = 2,5\%$ ist!

c) Bestimmen Sie eine Formel für die Höhe der NEP bei Benutzung des De Moivre'schen Ansatzes (gleichverteilter Todeszeitpunkt mit Höchstalter $\omega = 100$ und $q_x = \frac{1}{100-x}$) und berechnen Sie die NEP!

Lösung:

a)

Sterbealter	35	36	...	45	$35 + (K+1)$
Rückzahlung der Restschuld	$\kappa_0 \cdot r$	$\kappa_0 \cdot r^2$	...	$\kappa_0 \cdot r^{10}$	$\kappa_0 \cdot r^{K+1}$

wobei $r = 1 + i$ der Aufzinsungsfaktor ist und K die Werte $0, 1, ..., 9$ annehmen kann. Somit:

$$Z = \begin{cases} \kappa_0 \cdot r^{K+1} \cdot v^{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., 9 \\ 0 & \text{für} \quad K \geq 10 \end{cases}$$

$NEP^1_{35,10} = \sum_{k=0}^{9} \kappa_0 \cdot r^{k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{35} \cdot q_{35+k}$ und weil $v = \frac{1}{r}$ ist, erhalten wir:
$NEP^1_{35,10} = \kappa_0 \cdot \sum_{k=0}^{9} {}_kp_{35} \cdot q_{35+k}$.

b)

Wir könnten nun die einzelnen Wahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel ablesen und addieren, jedoch gelangt man schneller zum Ergebnis, wenn man die obige Formel durch Indexverschiebung $j = 35 + k$ auf folgende Weise umformt:

$$\begin{aligned} NEP^1_{35,10} &= \kappa_0 \cdot \sum_{k=0}^{9} {}_kp_{35} \cdot q_{35+k} = \kappa_0 \cdot \sum_{j=35}^{44} {}_{j-35}p_{35} \cdot q_j = [{}_np_x = \tfrac{l_{x+n}}{l_x}] = \\ &= \kappa_0 \cdot \sum_{j=35}^{44} \tfrac{l_j}{l_{35}} \cdot q_j = \tfrac{\kappa_0}{l_{35}} \cdot \sum_{j=35}^{44} l_j \cdot q_j \approx \tfrac{\kappa_0}{97444} \cdot 1739,33 \approx \\ &\approx \kappa_0 \cdot 0,017841521. \end{aligned}$$

Würde das Darlehen beispielsweise $\kappa_0 = 400000$ € ausmachen, würden wir für die NEP 7139,81 € erhalten.

c)

$\omega = 100, \quad q_x = \frac{1}{100-x}$.

Erinnere: Ansatz von De Moivre: $g(t) = \frac{1}{\omega - x}$ für $0 < t < (\omega - x)$ (Kapitel 4.2.4 Formel (4.34), S.42)

Setzen wir für $q_j = \frac{1}{100-j}$ in den Ausdruck von **b)** ein, erhalten wir:

$NEP^1_{35,10} = \frac{\kappa_0}{l_{35}} \cdot \sum_{j=35}^{44} \frac{l_j}{100-j} = \frac{\kappa_0}{l_{35}} \cdot (\frac{l_{35}}{65} + \frac{l_{36}}{64} + \frac{l_{37}}{63} + ... + \frac{l_{44}}{56})$.

Rechnen wir mit den Werten aus der österreichischen Sterbetafel von 2000/02, erhalten wir:

$NEP^1_{35,10} = \kappa_0 \cdot 0,16452$, was bei einem Darlehen von $\kappa_0 = 400000$ € eine NEP von 65812 € ausmacht.

Exakter Weise müssten wir aber so vorgehen:

$\mu_{x+t} = \frac{1}{100-x-t}$ (Sterblichkeitsintensität bei De Moivre (Kapitel 4.2.4, S.42)).

Aus dem Zusammenhang $\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \cdot \ln {}_tp_x$ erhalten wir durch Umformen:

$\ln {}_tp_x = -\int_0^t \mu_{x+\tau}\, d\tau \Longleftrightarrow {}_tp_x = e^{\int_0^t -\frac{1}{100-x-\tau}\, d\tau}$.

Das Integral lässt sich mittels Substitutionsmethode relativ einfach berechnen und führt uns schließlich zu folgendem Ausdruck: ${}_tp_x = e^{\ln \frac{100-x-t}{100-x}} = \frac{100-x-t}{100-x}$.

Übergang zum Diskreten:

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{100-x-t} \quad \longrightarrow \quad q_{x+k} = \frac{1}{100-x-k} = \frac{1}{100-(k+x)}$$

$$ {}_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x} \quad \longrightarrow \quad {}_kp_x = \frac{100-x-k}{100-x}$$

somit:

$$\begin{aligned} NEP^1_{35,10} &= \kappa_0 \cdot \sum_{k=0}^{9} {}_kp_{35} \cdot q_{35+k} = \kappa_0 \cdot \sum_{k=0}^{9} \frac{100-35-k}{100-35} \cdot \frac{1}{100-35-k} = \\ &= \kappa_0 \cdot \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{65} = \kappa_0 \cdot \frac{10}{65} = \kappa_0 \cdot 0,15385. \end{aligned}$$

Für ein Darlehen von $\kappa_0 = 400000$ € wäre $NEP^1_{35,10} = 61538,46$ €.

Man erkennt: Die Ergebnisse weichen erwartungsgemäß voneinander ab, wobei man mit dem exakten Moivre'schen Ansatz eine niedrigere NEP erhält.

◇

Überblick:

Die wichtigsten Formeln von Kapitel 5.1 sind hier nun nochmal zur Wiederholung aufgelistet.

- Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Deckung: $A_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$
- Temporäre Todesfallversicherung: $A^1_{x,n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$
- Lebensversicherung auf Erlebensfall: $A^I_{x,n} = v^n \cdot {}_np_x$
- Gemischte Lebensversicherung: $A_{x,n} = A^1_{x,n} + A^I_{x,n}$

5.2. Versicherungsleistungen durch Leibrenten

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, kann die Leistung des Versicherungsunternehmens auch in Form einer Reihe von Zahlungen, die über eine bestimmte Zeit gemacht werden (den Renten), erfolgen. Bei einer Leibrente erfolgen die Zahlungen solange, bis die versicherte Person stirbt. Den Barwert einer Leibrente bezeichnen wir mit Y. Den *erwarteten Barwert* einer Leibrente nennen wir wieder NEP und bezeichenen ihn mit $E(Y)$.

5.2.1. Vorschüssige lebenslängliche Leibrenten

Gehen wir zunächst von einer *vorschüssigen lebenslänglichen Leibrente* aus, die aus gleichbleibenden jährlichen Zahlungen der Höhe R besteht. Die Zeitpunkte, an denen die Rente ausbezahlt wird, sind $0, 1, ..., K$ (wobei K wieder die ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer des x-jährigen ist).

Der Barwert dieser Rente ist:
$Y = R + Rv + Rv^2 + ... + Rv^K = \sum_{k=0}^{K} R \cdot v^k = R \cdot \frac{1-v^{K+1}}{1-v} = \ddot{B}_{K+1}$.

Wir können aus der Verteilung von K auf die Verteilung der Zufallsvariable Y schließen:
$P(Y = \ddot{B}_{k+1}) = P(K = k) = {}_kp_x \cdot q_{x+k}$ für $k = 0, 1, ..., \omega - x$.
Der Erwartungswert von Y ist die NEP. Für den Fall, dass $R = 1$ ist, schreiben wir für den Barwert der Rente: $Y = \ddot{a}_{K+1}$.
In der international üblichen Schreibweise wird der Erwartungswert von $Y = \ddot{a}_{K+1}$ mit $\ddot{a}_x$ bezeichnet. In Analogie dazu wollen wir den Erwartungswert von $Y = \ddot{B}_{K+1}$ (also für $R > 0$ beliebig) mit $\ddot{B}_x$ bezeichnen:

$$\ddot{B}_x = E(Y = \ddot{B}_{K+1}) = \sum_{k=0}^{\omega-x} R \cdot \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \ddot{B}_{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Wegen $\ddot{a}_n = \frac{1-v^n}{1-v}$ und $\ddot{B}_n = R \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$ (Kapitel 4.1.2 Formel (4.17), S.28) können wir nun einen Zusammenhang zwischen dem Barwert (des Kapitals) Z vom Kapitel 5.1.1 (S.51ff) und dem Barwert (der Leibrente) Y herstellen:

Es sei dazu zunächst:	$Y = \ddot{a}_{K+1} = \frac{1-v^{K+1}}{1-v}$	der Barwert der Rente für $R = 1$
und	$Z = v^{K+1}$	der Barwert des Kapitals für $\kappa = 1$.
Dann gilt:	$Y = \ddot{a}_{K+1} = \frac{1-v^{K+1}}{1-v} = \frac{1-Z}{d}$.	

Für R, K beliebig erhalten wir:	$Y = \ddot{B}_{K+1} = R \cdot \frac{1-v^{K+1}}{1-v}$
und	$Z = \kappa \cdot v^{K+1}$
und somit die Beziehung	$\frac{Y}{R} = \frac{1-\frac{Z}{\kappa}}{d}$.

Ein Zusammenhang zwischen A_x von Kapitel 5.1.1 und $\ddot{a}_x$ ergibt sich, indem wir statt Y und Z die jeweiligen Erwartungswerte $E(Z) = A_x$ und $E(Y) = \ddot{a}_x$ verwenden:

$$\boxed{\ddot{a}_x = \frac{1-A_x}{d} \Longleftrightarrow 1 = d \cdot \ddot{a}_x + A_x}. \tag{5.7}$$

Analog dazu ist ein Zusammenhang zwischen NEP_x von Kapitel 5.1.1 und $\ddot{B}_x$ gegeben durch:

$$\frac{\ddot{B}_x}{R} = \frac{1-\frac{NEP_x}{\kappa}}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = d \cdot \frac{\ddot{B}_x}{R} + \frac{NEP_x}{\kappa}.$$

5.2.2. Temporäre Renten

Betrachten wir nun eine *vorschüssige temporäre Rente* der Dauer n Jahre.

Der Barwert Y dieser Rente ist dann:

$$Y = \begin{cases} R \cdot \frac{1-v^{K+1}}{1-v} = \ddot{B}_{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ R \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \ddot{B}_n & \text{für} \quad K \geq n \end{cases}$$

Für die NEP von Y erhalten wir:

$$\ddot{B}_{x,n} = E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{B}_{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \ddot{B}_n \cdot {}_np_x. \tag{5.8}$$

Und falls $R = 1$ ist :

$$\ddot{a}_{x,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} + \ddot{a}_n \cdot {}_n p_x. \tag{5.9}$$

Der Zusammenhang zwischen $Y = \ddot{a}_{K+1}$ und Z ist wieder gegeben durch $Y = \frac{1-Z}{d}$, wobei Z wie im Kapitel 5.1.3 (S.57) definiert ist und zusätzlich $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ gelten soll.

Indem wir für Y und Z die jeweiligen Erwartungswerte nehmen, erhalten wir:

$$\boxed{\ddot{a}_{x,n} = \tfrac{1-A_{x,n}}{d} \Longleftrightarrow 1 = d \cdot \ddot{a}_{x,n} + A_{x,n}}. \tag{5.10}$$

5.2.3. Nachschüssige lebenslängliche Leibrenten

Bei einer *nachschüssigen lebenslangen Leibrente* erfolgen die Zahlungen zu den Zeitpunkten $1, 2, ..., K$. Für den Barwert Y erhalten wir somit:

$$Y = Rv + Rv^2 + ... + Rv^K = \sum_{k=1}^{K} R \cdot v^k = R \cdot \frac{1 - v^K}{i} = Rv \cdot \frac{1 - v^K}{1 - v} = B_K.$$

Die Zufallsvariable Y unterscheidet sich von jener bei vorschüssigen lebenslangen Leibrenten nur um die Konstante R.

Für die NEP erhalten wir: $B_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\omega-x} B_k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$

und falls $R = 1$: $a_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} a_k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$.

Zwischen $\ddot{B}_x$ und B_x gilt folgender Zusammenhang:

$$B_x = \ddot{B}_x - R. \tag{5.11}$$

Beweis:

$\ddot{B}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} R \cdot \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = R \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = R \cdot \ddot{a}_x$

$B_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} R \cdot v \cdot \frac{1-v^k}{1-v} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = R \cdot \sum_{k=0}^{\omega-x} v \cdot \frac{1-v^k}{1-v} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = R \cdot a_x$

somit bleibt zu zeigen: $\boxed{a_x = \ddot{a}_x - 1.}$

$\ddot{a}_x = q_x + \frac{1-v^2}{1-v} \cdot p_x \cdot q_{x+1} + \frac{1-v^3}{1-v} \cdot {}_2 p_x \cdot q_{x+2} + ... + \frac{1-v^{\omega-x+1}}{1-v} \cdot {}_{\omega-x} p_x \cdot q_\omega$

$a_x = 0 \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot q_{x+1} + v \cdot \frac{1-v^2}{1-v} \cdot {}_2 p_x \cdot q_{x+2} + ... + v \cdot \frac{1-v^{\omega-x}}{1-v} \cdot {}_{\omega-x} p_x \cdot q_\omega$

z.z. $\quad a_x = \ddot{a}_x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + a_x = \ddot{a}_x$ und weil $1 = p_x + q_x$ können wir schreiben:

$$p_x + q_x + v \cdot p_x \cdot q_{x+1} + v \cdot (1+v) \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + ... + v \cdot \tfrac{1-v^{\omega-x}}{1-v} \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega =$$

$$= q_x + (1+v) \cdot p_x \cdot q_{x+1} + (1+v+v^2) \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + ... + \tfrac{1-v^{\omega-x+1}}{1-v} \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega$$

$$p_x + v \cdot p_x \cdot q_{x+1} + v \cdot (1+v) \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + ... + v \cdot \tfrac{1-v^{\omega-x}}{1-v} \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega =$$

$$= (1+v) \cdot p_x \cdot q_{x+1} + (1+v+v^2) \cdot {}_2p_x \cdot q_{x+2} + ... + \tfrac{1-v^{\omega-x+1}}{1-v} \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega$$

$$1 + v \cdot q_{x+1} + v \cdot (1+v) \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... + v \cdot \tfrac{1-v^{\omega-x}}{1-v} \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot q_\omega =$$

$$= (1+v) \cdot q_{x+1} + (1+v+v^2) \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... + \tfrac{1-v^{\omega-x+1}}{1-v} \cdot p_{x+1} \cdot \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot q_\omega$$

$$1 + v \cdot q_{x+1} + v \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v^2 \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... =$$

$$= q_{x+1} + v \cdot q_{x+1} + p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + v^2 \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... \quad .$$

Die Ausdrücke, die den Faktor v enthalten, fallen alle weg und es bleibt:

$1 = q_{x+1} + p_{x+1} \cdot q_{x+2} + ... + p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot q_\omega$

$1 = (1 - p_{x+1}) + p_{x+1} \cdot (1 - p_{x+2}) + ... + p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot (1 - p_\omega)$

$1 = 1 - p_{x+1} + p_{x+1} - p_{x+1} \cdot p_{x+2} + ... + p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} - p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot p_\omega.$

Im Endeffekt fallen die einzelnen Summanden weg, bis wir schließlich auf folgenden Ausdruck kommen:

$$0 = -p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \cdot \underbrace{p_\omega}_{=0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = 0.$$

□

5.2.4. Unterschiedliche Renten

In der Praxis wird es bei Leibrenten, die über mehrere Jahre gehen, durchaus vorkommen, dass die *Höhe der Rente variiert.*

Betrachten wir dazu eine Rente, bei der die Zahlungen $R_0, R_1, R_2, ..., R_K$ zu den Zeitpunkten $0, 1, 2, ..., K$ erfolgen.

Der Barwert einer solchen Rente ist:

$$Y = R_0 + R_1 \cdot v + ... + R_K \cdot v^K = \sum_{k=0}^{K} R_k \cdot v^k. \tag{5.12}$$

Ihre NEP ist der Erwartungswert von Y:

$$E(Y) = R_0 \cdot q_x + (R_0 + R_1 \cdot v) \cdot p_x \cdot q_{x+1} + (R_0 + R_1 \cdot v + R_2 \cdot v^2) \cdot p_x \cdot p_{x+1} \cdot q_{x+2} + \ldots + (\sum_{l=0}^{\omega-x} R_l \cdot v^l) \cdot {}_{\omega-x}p_x \cdot q_\omega.$$

Die NEP kann auch durch folgende Formel berechnet werden:

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\omega-x} R_k \cdot v^k \cdot {}_kp_x. \tag{5.13}$$

Auf den ersten Blick wird diese Formel den einen oder anderen Leser wohl „verblüffen“, da der Ausdruck im Vergleich zum vorigen einerseits kürzer erscheint und andererseits keine Sterbewahrscheinlichkeit in dieser Formel vorkommt.
Der nachfolgende Beweis soll die misstrauischen Gemüter beruhigen.
Betrachten wir aber zunächst ein Rechenbeispiel mit folgender Angabe:

$x = 97$ (Mann), $\omega = 100$, Sterbetafel für Österreich 2000/02
$R_0 = 2,\ R_1 = 5,\ R_2 = 9,\ R_3 = 13$ und $i = 3,1\% \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{r} \approx 0,97$.

- $E(Y) = 2 \cdot q_{97} + (2 + 5 \cdot 0,97) \cdot p_{97} \cdot q_{98} + (2 + 5 \cdot 0,97 + 9 \cdot 0,97^2) \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot q_{99} +$
  $+ (2 + 5 \cdot 0,97 + 9 \cdot 0,97^2 + 13 \cdot 0,97^3) \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} \cdot q_{100} \approx 10,9735$
- gerechnet mit Formel (5.13):
  $E(Y) = \sum_{k=0}^{3} R_k v^k \cdot {}_kp_{97} = R_0 \cdot v^0 \cdot {}_0p_{97} + R_1 \cdot v^1 \cdot {}_1p_{97} + R_2 \cdot v^2 \cdot {}_2p_{97} + R_3 \cdot v^3 \cdot {}_3p_{97} =$
  $= 2 + 5 \cdot 0,97 \cdot p_{97} + 9 \cdot 0,97^2 \cdot p_{97} \cdot p_{98} + 13 \cdot 0,97^3 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} \approx 10,9735$

$\diamond$

Beweis:

$\sum_{k=0}^{\omega-x} (\sum_{j=0}^{k} R_j v^j) \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{j=0}^{\omega-x} R_j v^j (\sum_{k=j}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot q_{x+k}) =$

$= \sum_{j=0}^{\omega-x} R_j v^j (\sum_{k=j}^{\omega-x} {}_kp_x \cdot (1 - p_{x+k})) = \sum_{j=0}^{\omega-x} R_j v^j (\sum_{k=j}^{\omega-x} ({}_kp_x - \underbrace{{}_kp_x \cdot p_{x+k}}_{={}_{k+1}p_x})) =$

$= \sum_{j=0}^{\omega-x} R_j v^j ({}_jp_x - {}_{j+1}p_x + {}_{j+1}p_x - {}_{j+2}p_x \pm \ldots + {}_{\omega-x-1}p_x - {}_{\omega-x}p_x + {}_{\omega-x}p_x - \underbrace{{}_{\omega-x+1}p_x}_{p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_\omega}) =$

$= \sum_{j=0}^{\omega-x} R_j v^j ({}_jp_x - p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{p_\omega}_{=0}) = \sum_{j=0}^{\omega-x} R_j v^j {}_jp_x$

$\square$

Durch analoge Vorgehensweise kann man auch zeigen, dass

$$\boxed{\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot {}_kp_x} \tag{5.14}$$

für vorschüssige lebenslange Leibrenten (Gerber, 1986, S.36),

$$\boxed{\ddot{a}_{x,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \ddot{a}_n \cdot {}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x} \tag{5.15}$$

für vorschüssige temporäre Leibrenten der Dauer n Jahre (Gerber, 1986, S.36) und

$$\boxed{a_{x,n} = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_kp_x} \tag{5.16}$$

für nachschüssige temporäre Leibrenten der Dauer n Jahre gilt.

Neben den bisher aufgezählten Typen von Leibrenten gibt es auch noch eine Reihe weiterer Arten von Leibrenten, auf die wir nun nicht mehr eingehen möchten.

5.2.5. Rekursionsformeln

Es gibt auch für die Berechnung des erwarteten Barwerts einer Rente Rekursionsformeln. Wir möchten uns auf die Rekursionsformel der NEP von vorschüssigen lebenslänglichen Leibrenten beschränken.

Es gilt: $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot p_x$ (Gerber, 1986, S.42).

Beweis:

Es ist: $\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \ddot{a}_{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot {}_kp_x$

(siehe Formel (5.14)).

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + \sum_{k=1}^{\omega-x} v^k \cdot {}_kp_x = 1 + \sum_{l=0}^{\omega-x-1} v^{l+1} \cdot {}_{l+1}p_x = 1 + v \cdot \sum_{l=0}^{\omega-(x+1)} v^l \cdot p_x \cdot {}_lp_{x+1} = \\ &= 1 + v \cdot p_x \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{\omega-(x+1)} v^l \cdot {}_lp_{x+1}}_{=\ddot{a}_{x+1}} = 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot p_x. \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.5

$x = 97$ (Mann), $\omega = 100$, $R = 1$, $v = 0,97$

- $\ddot{a}_{97} = \sum_{k=0}^{3} v^k \cdot {}_k p_{97} = 1 + 0,97 \cdot p_{97} + 0,97^2 \cdot p_{97} \cdot p_{98} + 0,97^3 \cdot p_{97} \cdot p_{98} \cdot p_{99} \approx 2,17934$

  oder mittels Rekursionsformel:

- $\ddot{a}_{97} = 1 + v \cdot p_{97} \cdot \ddot{a}_{98} = 1 + 0,97 \cdot p_{97} \cdot (\sum_{l=0}^{2} v^l \cdot {}_l p_{98}) =$
  $= 1 + 0,97 \cdot p_{97} \cdot (1 + 0,97 \cdot p_{98} + 0,97^2 \cdot p_{98} \cdot p_{99}) \approx 2,17934$

◇

Da $\sum_{i=0}^{\omega-(x+1)} {}_i p_{x+1} = 1 + p_{x+1} + {}_2 p_{x+1} + ... + {}_{\omega-(x+1)} p_{x+1} =$
$= 1 + p_{x+1} + p_{x+1} \cdot p_{x+2} + ... + p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot ... \cdot p_{\omega-1}$
muss bei der Berechnung von $\ddot{a}_x$ mittels Rekursionsformeln beim Höchstalter ω begonnen werden.

Schreiben wir nun $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot \underbrace{p_x}_{1-q_x} = 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1} - v \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot q_x$ und verwenden wir statt x das Alter $x + k$, so erhalten wir:

$$\ddot{a}_{x+k} - v \cdot \ddot{a}_{x+k+1} = 1 - v \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \cdot q_{x+k}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit v^k, kommt man auf den folgenden Ausdruck:

$$v^k \cdot \ddot{a}_{x+k} - v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} = v^k - v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \cdot q_{x+k}.$$

Durch Aufsummieren über k erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \ddot{a}_{x+k} - \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k - \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \cdot q_{x+k}.$$

Da $\sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot \ddot{a}_{x+k} = \ddot{a}_x + v \cdot \ddot{a}_{x+1} + v^2 \cdot \ddot{a}_{x+2} + ... + v^{\omega-x} \cdot \underbrace{\ddot{a}_\omega}_{=0}$

und $\sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} = v \cdot \ddot{a}_{x+1} + v^2 \cdot \ddot{a}_{x+2} + ... + v^{\omega-x} \cdot \underbrace{\ddot{a}_\omega}_{=0} + v^{\omega-x+1} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{\omega+1}}_{=0}$

bleibt auf der linken Seite nur $\ddot{a}_x$ übrig und wir kommen auf den Ausdruck:

$$\ddot{a}_x = \underbrace{\frac{1 - v^{\omega-x+1}}{1 - v}}_{=\ddot{a}_{\omega-x+1}} - \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} \cdot \ddot{a}_{x+k+1} \cdot q_{x+k}.$$

Wir können $\ddot{a}_x$ also als den Barwert einer vorschüssigen Zeitrente vermindert um den in der Formel angegebenen Summenausdruck auffassen.

5.2.6. Ein Rechenbeispiel

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns nun wieder mit einem Rechenbeispiel auseinandersetzen (Goldammer, 2007/08a, UE 7, Bsp 58):

Eine 25-jährige Frau gewinnt bei einem Glückspiel 1 000 000 €, die ihr in 360 Monatsraten zu je 2777,78 € ausbezahlt werden sollen. Es wird vereinbart, dass die Raten an die Erben der Frau weiterbezahlt werden, falls sie innerhalb dieser 30 Jahre sterben sollte.

a) Bestimmen Sie den Barwert der Zahlungen, wenn mit $i = 5\%$ verzinst wird!
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Fall, dass die 1 000 000 € auf einmal ausbezahlt werden!

b) Wir nehmen nun an, dass die Frau nach zehn Jahren noch lebt. Sie beschließt die periodischen Monatszahlungen durch eine vorschüssige Leibrente derselben Laufzeit umzuwandeln. (Das heißt also, dass die Rentenzahlungen *frühestens* beim Tod der Frau *spätestens* aber nach 20 Jahren enden.)
Bestimmen Sie die Höhe dieser Leibrente, wenn diese jährlich ausbezahlt werden soll, unter Benutzung der österreichischen Sterbetafel von 2000/02!

Lösung:

a)

$\ddot{B}_{30}^{(12)} = 2777,78 \cdot r_{12} \cdot \frac{{r_{12}}^{360}-1}{r_{12}-1} \cdot \frac{1}{r^{30}} = 526189,92$ €, wobei r_{12} mittels Formel (4.1) (S.21) wie folgt berechnet wird: ${r_{12}}^{12} = r \quad \Leftrightarrow \quad r_{12} = \sqrt[12]{r}$;

oder mittels Formel (4.19) von Kapitel 4.1.2 (S.28): $\ddot{B}_n^{(m)} = R \cdot \frac{1-v^n}{d_m}$:

$\ddot{B}_{30}^{(12)} = R \cdot \frac{1-v^{30}}{d_{12}} = 2777,78 \cdot \frac{1-(\frac{1}{r})^{30}}{1-v_{12}} = 2777,78 \cdot \frac{1-\frac{1}{r^{30}}}{1-\frac{1}{r_{12}}} = 526189,92$ €.

Im Vergleich dazu, dass die Gewinnsumme von 1 000 000 € auf einmal ausbezahlt würde, spart sich das Glücksspielunternehmen fast die Hälfte, exakt:
$\Delta = 10^6 - 526189,92 = 473810,08$ €.

b)

Die Frau ist nun also 35 Jahre alt. Die Dauer der Leibrente ist laut Vereinbarung maximal 20 Jahre. Wir haben es also mit dem Fall „temporäre vorschüssige Rente der Dauer $n = 20$ Jahre“ zu tun.

Für den Barwert Y der Rente gilt:

$$Y = \begin{cases} \ddot{B}_{K+1} = R \cdot \frac{1-v^{K+1}}{1-v} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., 19 \\ \ddot{B}_{20} = R \cdot \frac{1-v^{20}}{1-v} & \text{für} \quad K \geq 20. \end{cases}$$

Die NEP ist dann:

$$\begin{aligned} E(Y) = \ddot{B}_{35,20} \quad &= \textstyle\sum_{k=0}^{19} \ \ddot{B}_{k+1} \cdot {}_kp_{35} \cdot q_{35+k} + \ddot{B}_{20} \cdot {}_{20}p_{35} = \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{19} \ R \cdot \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_{35} \cdot q_{35+k} + R \cdot \frac{1-v^{20}}{1-v} \cdot {}_{20}p_{35} = \\ &= R \cdot (\textstyle\sum_{k=0}^{19} \ \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_{35} \cdot q_{35+k} + \frac{1-v^{20}}{1-v} \cdot {}_{20}p_{35}) = R \cdot \ddot{a}_{35,20} \end{aligned}$$

Die Berechnung über den obigen Ausdruck ist prinzipiell möglich, aber ziemlich langwierig. Etwas schneller ist man über die Beziehung:

$\ddot{a}_{35,20} = \sum_{k=0}^{19} \ v^k \cdot {}_kp_{35} = 1 + v \cdot p_{35} + v^2 \cdot p_{35} \cdot p_{36} + ... + v^{19} \cdot p_{35} \cdot p_{36} \cdot ... \cdot p_{53} \approx 12,9739$

Somit ist $E(Y) \approx R \cdot 12,9739$.

Diesen Wert setzen wir nun mit dem Barwert der 240 Monatsraten zu je 2777,78 € gleich, die die Frau sonst bekommen hätte.

$2777,78 \cdot r_{12} \cdot \frac{{r_{12}}^{240}-1}{r_{12}-1} \cdot \frac{1}{r^{20}} \approx 426574,1$

Aus der Gleichung $426574,1 = R \cdot 12,9739$ erhalten wir für $R \approx 32879,40$ €.

Interpretation:

- Im Vergleich zu den ursprünglich vorgesehenen Monatsraten würde die Frau mit der Leibrente nach einem vollen erlebten Jahr schlechter aussteigen, wenn sie das Geld unverzinst lässt: $12 \cdot 2777,78 = 33333,36 > 32879,40$.

- Falls sie innerhalb der ersten 11 Monate sterben sollte, wäre sie (rein finanziell betrachtet) mit der Leibrente besser dran, weil sie dann innerhalb dieser Zeit mehr Geld zur Verfügung hätte (wieder unter der Voraussetzung, dass sie das Geld nicht weiter anlegt): $m \cdot 2777,78 < 32879,40$ für $m = 1, 2, ..., 11$.

- Für die Erben der Frau wäre es besser, wenn sie nicht auf die Leibrente umsteigen würde, da die Zahlungen der Leibrente mit dem Tod der Frau eingestellt werden würden, während die ursprünglichen Monatsraten weiterbezahlt werden würden.

- Nehmen wir nun an, die Frau muss auf das Geld nicht zugreifen und kann es mit $i = 5\%$ anlegen. Welcher Fall wäre für sie dann nach einem erlebten Jahr finanziell lukrativer?
  $32879,40 \cdot 1,05 = 34523,37$
  $2777,78 \cdot {r_{12}}^{12} + 2777,78 \cdot {r_{12}}^{11} + ... + 2777,78 \cdot r_{12} = 2777,78 \cdot r_{12} \cdot \frac{{r_{12}}^{12}-1}{r_{12}-1} = 34229,41$
  In diesem speziellen Fall sollte die Frau also die Auszahlung durch vorschüssige Leibrenten wählen.
  Dies ist allerdings nicht bei jedem Zinssatz so. Könnte sie das Geld nur zu einer Zinsrate von $i = 3,0453663\%$ anlegen, wäre es egal welche Auszahlungsform sie wählt. Für alle Zinssätze, die niedriger als diese $3,043663\%$ sind, wäre eine Auszahlung der Monatsraten vorteilhafter für sie.
  Es kommt also auf die Rahmenbedingungen und die Lebensgestaltung der Frau an, ob sie mit den Leibrenten oder den ursprünglichen Monatsraten besser dran wäre.

Bemerkung:
Die Berechnung von $\ddot{a}_{35,20}$ durch $\sum_{k=0}^{19} v^k \cdot {}_kp_{35}$ geht zwar etwas schneller als mit der anderen angegebenen Summenformel, ist aber trotzdem noch relativ langwierig, weil man die einzelnen Überlebenswahrscheinlichkeiten aus der Sterbetafel berechnen und diese danach noch entsprechend multiplizieren muss.
Schneller gelangt man auf folgende Weise zum Ziel:

$$\ddot{a}_{35,20} = \ddot{a}_{35} - {}_{20}p_{35} \cdot v^{20} \cdot \ddot{a}_{55} = \ddot{a}_{35} - \frac{l_{55}}{l_{35}} \cdot v^{20} \cdot \ddot{a}_{55}$$

Es gibt nämlich (zum Glück) Tabellen, auf denen die Barwerte einer lebenslangen vorschüssigen Rente vom Betrag 1 nach der österreichischen Sterbetafel 2000/02 sowohl für Männer also auch für Frauen bei verschiedenen Zinssätzen aufgelistet sind (siehe Anhang A).

Betrachten wir nun also die entsprechende Tabelle (weiblich) und lesen wir beim Alter 35 Jahre den Wert in der 5%-Spalte ab, so erhalten wir $\ddot{a}_{35} = 18,534$.
Ebenso ist $\ddot{a}_{55} = 15,266$.
Eingesetzt in die Formel erhalten wir:

$\ddot{a}_{35,20} = 18,534 - \frac{95483}{98810} \cdot (\frac{1}{1,05})^{20} \cdot 15,266 \approx 12,9741$

Dafür, dass uns diese Formel für größere Laufzeiten (wie im Beispiel mit $n = 20$) einen enormen Rechenaufwand erspart, nehmen wir den Rundungsfehler, den wir bei der vierten Nachkommastelle erhalten, gerne in Kauf.

Wir wollen jetzt aber noch beweisen, dass die Formel

$$\boxed{\ddot{a}_{x,n} = \ddot{a}_x - {}_np_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}} \tag{5.17}$$

ihre Berechtigung hat!

Beweis:

Es ist:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x,n} &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x = 1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + ... + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x \\
\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot {}_kp_x = \\
&= 1 + v \cdot p_x + ... + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x + v^n \cdot {}_np_x + v^{n+1} \cdot {}_{n+1}p_x + ... + v^{\omega-x} \cdot {}_{\omega-x}p_x \\
\ddot{a}_{x+n} &= \sum_{k=0}^{\omega-(x+n)} v^k \cdot {}_kp_{x+n} = \\
&= 1 + v \cdot p_{x+n} + v^2 \cdot {}_2p_{x+n} + ... + v^{\omega-x-n} \cdot \underbrace{{}_{\omega-x-n}p_{x+n}}_{p_{x+n} \cdot p_{x+n+1} \cdot ... \cdot p_{\omega-1}}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun $\ddot{a}_{x,n} = \ddot{a}_x - {}_np_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}$ umformen zu $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x,n} = {}_np_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}$ und die oben angeführten Summen einsetzen, erhalten wir:

$v^n \cdot {}_np_x + v^{n+1} \cdot {}_{n+1}p_x + ... + v^{\omega-x} \cdot {}_{\omega-x}p_x = v^n \cdot {}_np_x \cdot (1 + v \cdot p_{x+n} + v^2 \cdot {}_2p_{x+n} + ... + v^{\omega-x-n} \cdot {}_{\omega-x-n}p_{x+n})$.

Wegen

$$\begin{aligned}
{}_{n+1}p_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+n-1} \cdot p_{x+n} \\
{}_{\omega-x}p_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{\omega-1} \\
{}_np_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+n-1} \\
{}_2p_{x+n} &= p_{x+n} \cdot p_{x+n+1} \\
{}_{\omega-x-n}p_{x+n} &= p_{x+n} \cdot p_{x+n+1} \cdot ... \cdot p_{\omega-1}
\end{aligned}$$

gilt Gleichheit.

□

6. Prämien und Deckungskapital

6.1. Prämienzahlungen

Für die Versicherungsgesellschaft sind sowohl die Leistungen, welche sie erbringt (entweder in Form *einer* (Kapitel 5.1) oder *mehrerer* (Kapitel 5.2) Zahlungen), als auch die Leistungen, die vom Versicherten erbracht werden (die sogenannten *Prämien*), relevant.
Bei den Prämienzahlungen unterscheiden wir zwischen:

- der Finanzierung durch Einmalprämien
- der Finanzierung durch periodische Prämien *konstanter* Höhe
- der Finanzierung durch periodische Prämien *variabler* Höhe

Den Barwert einer Prämie wollen wir mit P, die erwartete Prämienleistung mit $E(P)$ bezeichnen.
Interessant für die Kalkulation ist vor allem die Differenz L zwischen dem Barwert der Versicherungsleistung und dem Barwert der Prämienleistung. L ist also der *Verlust* (im mathematischen Sinn), den die Versicherungsgesellschaft erleidet.
Falls $E(L) = 0$ ist, verschwindet der erwartete Verlust der Versicherungsgesellschaft. In diesem Fall ist die erwartete Leistungszahlung der Versicherungsgesellschaft gleich groß wie die erwartete Prämienzahlung der versicherten Person. Es ist also $E(Z)$ bzw. $E(Y) = E(P)$. Die Prämie, die man sich aus dieser Beziehung berechnen kann, heißt *Nettoprämie* N (Gerber, 1986, S.48 und Goldammer, 2007/08b).

Bei unseren Einstiegsbeispielen zu Beginn des Kapitels 5 (Beispiel 5.1 und 5.2) haben wir bereits Nettoprämien berechnet. Wir wollen nun wieder allgemeine Formeln für die Berechnung der Nettoprämien aufstellen.

6.1.1. Prämienzahlungen bei einer Todesfallversicherung

Betrachten wir dazu zunächst noch einmal das Beispiel 5.1 mit dem 50-jährigen Mann, der eine temporäre Todesfallversicherung über $\kappa = 40000$ € mit $n = 2$ Jahren und $i = 3,25\%$ abschließt.

Unter der Voraussetzung, dass die Prämienzahlungen der Höhe N (also Nettoprämie) jährlich vorschüssig erfolgen und κ am *Ende* des allfälligen Todesjahres ausbezahlt wird, erhalten wir, ausgedrückt mit den in den vorangegangenen Kapiteln kennengelernten Symbolen:

$$L = \begin{cases} \kappa \cdot v^{K+1} - N \cdot \ddot{a}_{K+1} & \text{für} \quad K = 0,1 \\ -N \cdot \ddot{a}_2 & \text{für} \quad K \geq 2 \end{cases},$$

wobei K wieder für die gestutzte zukünftige Lebensdauer des 50-jährigen steht.

Die Verteilung von L ist diskret und wir erhalten:

$$\begin{aligned} &P(L = \kappa \cdot v^{k+1} - N \cdot \ddot{a}_{k+1}) = {}_kp_{50} \cdot q_{50+k} && \text{für} \quad k = 0,1 \\ &P(L = -N \cdot \ddot{a}_2) = {}_2p_{50} = p_{50} \cdot p_{51} && \text{für} \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Aus $E(L) = 0$ (oder anders ausgedrückt $E(Z) = E(P)$) erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{2-1} \kappa \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_{50} \cdot q_{50+k} = \sum_{k=0}^{2-1} N \cdot \frac{1 - v^{k+1}}{1 - v} \cdot {}_kp_{50} \cdot q_{50+k} + N \cdot \frac{1 - v^2}{1 - v} \cdot {}_2p_{50},$$

was sich kurz als $\kappa \cdot A^1_{50,2} = N \cdot \ddot{a}_{50,2}$ anschreiben lässt.

Die Nettoprämie ist also $N = \kappa \cdot \frac{A^1_{50,2}}{\ddot{a}_{50,2}} = 40000 \cdot \frac{0{,}009855}{1{,}963760775} \approx 200,74$ €.

Dieses Ergebnis für die Nettoprämie haben wir auch bei unserem Einstiegsbeispiel zu Beginn von Kapitel 5 herausbekommen (S.48f).

Ersetzt man nun allgemein 50 durch x und 2 durch n, erhält man die allgemein gültige Formel:

$$\boxed{N = \kappa \cdot \frac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}} \tag{6.1}$$

für die Berechnung der vorschüssigen Nettoprämie für eine x-jährige Person, die eine Todesfallversicherung mit Laufzeit n Jahre (temporäre Todesfallversicherung) abschließt und deren Erben im Todesfall nachschüssig κ erhalten.

Für eine lebenslängliche Todesfallversicherung (Kapital κ wird am Ende des Todesjahres ausbezahlt, vorschüssige Prämienzahlungen) beträgt der Verlust der Versicherungsgesellschaft

$L = \kappa \cdot v^{K+1} - N \cdot \ddot{a}_{K+1}$ (wobei $K = 0, 1, ..., \omega - x$) und aus $E(L) = 0$ folgt $\boxed{N = \kappa \cdot \frac{A_x}{\ddot{a}_x}}$.

6.1.2. Prämienzahlungen bei einer gemischten Versicherung

Betrachten wir nun eine *gemischte Versicherung* für eine x-jährige Person mit einer Laufzeit von n Jahren und einem fixen Zinssatz i. Die jährlichen Prämien berechnet man demnach wie folgt:

$$Z = \begin{cases} \kappa_1 \cdot v^{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \quad \text{... Todesfallversicherungsteil der gemischten Versicherung} \\ \kappa_2 \cdot v^n & \text{für} \quad K \geq n \quad \text{... Erlebensversicherungsteil der gemischten Versicherung} \end{cases}$$

und $\qquad E(Z) = \kappa_1 \cdot A^1_{x,n} + \kappa_2 \cdot A^I_{x,n} = \kappa_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \kappa_2 \cdot v^n \cdot {}_np_x$

(Kapitel 5.1.3, Formeln (5.4) und (5.5), Seite 58).

$$P = \begin{cases} N \cdot \ddot{a}_{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ N \cdot \ddot{a}_n & \text{für} \quad K \geq n \end{cases}$$

und $\qquad E(P) = N \cdot \ddot{a}_{x,n} = N \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + N \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \cdot {}_np_x$

(Kapitel 5.2.2, Formel (5.8), S.64 bzw. Formel (5.9), S.65 für $N = 1$).

Wegen $E(L) = 0$ erhalten wir:

$$\kappa_1 \cdot A^1_{x,n} + \kappa_2 \cdot A^I_{x,n} = N \cdot \ddot{a}_{x,n} \quad \Longleftrightarrow \quad N = \frac{\kappa_1 \cdot A^1_{x,n} + \kappa_2 \cdot A^I_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}. \tag{6.2}$$

Falls $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, gilt:

$$N = \kappa \cdot \frac{A^1_{x,n} + A^I_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{N = \kappa \cdot \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}}. \tag{6.3}$$

Berechnen wir nun die Höhe der jährlichen Prämien dieser Versicherung für eine 27-jährige Frau mit einer Laufzeit von $n = 23$ Jahren und $i = 4\%$, wenn $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1000$ ist.

Lösung:

$\ddot{a}_{27,23}$ wird man am schnellsten über die in Kapitel 5.2.6 hergeleitete Formel (5.17) (Seite 73) $\ddot{a}_{x,n} = \ddot{a}_x - {}_np_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}$ berechnen, wobei man die Werte $\ddot{a}_{27}$ und $\ddot{a}_{50}$ der Tabelle für

„Barwerte einer lebenslangen vorschüssigen Rente vom Betrag 1“ bei $i = 4\%$ entnimmt.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{27,23} &= \ddot{a}_{27} - {}_{23}p_{27} \cdot v^{23} \cdot \ddot{a}_{50} = 22,668 - \tfrac{l_{50}}{l_{27}} \cdot (\tfrac{1}{r})^{23} \cdot 18,382 = \\ &= 22,668 - \tfrac{96953}{99099} \cdot (\tfrac{1}{1,04})^{23} \cdot 18,382 \approx 15,37 \end{aligned}$$

$A_{27,23}$ können wir nun über den Zusammenhang $1 = d \cdot \ddot{a}_{x,n} + A_{x,n}$ (Kapitel 5.2.2, Formel (5.10), S.65) am leichtesten berechnen:

$A_{27,23} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{27,23} = 1 - (1-v) \cdot \ddot{a}_{27,23} = 1 - (1 - \frac{1}{1,04}) \cdot 15,37 \approx 0,4088.$

somit: $\quad N = \kappa \cdot \frac{A_{27,23}}{\ddot{a}_{27,23}} = 1000 \cdot \frac{0,4088}{15,37} \approx 26,59$ €.

◇

6.1.3. Warum wird mehr als die Nettoprämie bezahlt?

In der Praxis wird die Versicherungsgesellschaft ihre Leistungen nicht gegen Nettoprämien erbringen, sondern einen mehr oder weniger angemessenen Sicherheitszuschlag hinzurechnen. Bei vielen Verträgen kann die Versicherungsgesellschaft auch den Fall nicht ausschließen, dass die Summe der beanspruchten Leistungen größer ist als die Summe der eingenommenen Prämien. Das Versicherungsunternehmen wäre also vom sogenannten versicherungstechnischen Ruin bedroht.

Versicherungsgesellschaften sind gesetzlich verpflichtet sich gegen einen drohenden Ruin zu schützen und daher werden individuelle Risikovorschläge für bestimmte Personen und Personengruppen (z. B. Raucher, Personen mit Vorerkrankungen, Suchtkranke, usw.) in die einzelnen Versicherungsverträge eingearbeitet. Solche Risiken sind in den Sterbetafeln jedoch nicht berücksichtigt.

Weiters sei erwähnt, dass Abschluss- und Verwaltungskosten durch einen Versicherungsvertrag für die Versicherungsgesellschaft entstehen. Diese Kosten werden bei der Berechnung der Höhe der Versicherungsbeiträge ebenso berücksichtigt.

Mathematisch kann man die Höhe der Prämien N_* anhand einer *Nutzenfunktion* u bestimmen. Diese sollte gewisse Eigenschaften haben (streng monoton steigend ($u'(x) > 0$) und rechtsgekrümmt ($u''(x) < 0$)), damit sie die Wirklichkeit im Modellbild möglichst gut widergibt.

In der Versicherungsmathematik wird meist mit exponentiellen Nutzenfunktionen der Form $u(x) = \frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-ax})$ gerechnet, wobei der Parameter $a > 0$ als Maß für die *Risikoaversion*

des Versicherungsunternehmens gedeutet wird.
Unter dem Begriff *Risikoaversion* versteht man im Allgemeinen die bestehende Scheu, ein Risiko einzugehen ([27]). Man möchte das Risiko nur dann eingehen, wenn ein genügend großer Anreiz auf einen möglichen Gewinn gegeben ist. Dieses Phänomen tritt u. a. bei Glücksspielen auf.
Bei einer Versicherung versteht man unter *Risikoaversion* *„die mangelnde Bereitschaft, für die Beseitigung eines Risikos einen Geldbetrag (Prämie) zu zahlen“* ([27]).
Eine mathematische Definition der *Risikoaversion* liefert SCHMIDT (2005, S.261):

> *„Für eine zweimal differenzierbare Nutzenfunktion* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *wird die Funktion* $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *mit*
> $$r(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$
> *als Risikoaversion bezeichnet.“*

Der Parameter $a \in \mathbb{R}^+$ nimmt in der Praxis Werte zwischen 10^{-4} und 10^{-7} an. Je nach Versicherung sind aber auch Abweichungen von diesem Intervall möglich.

Wir haben zu Beginn dieses Kapitels die Zufallsvariable L als Differenz zwischen dem erwarteten Barwert der Versicherungsleistung und dem erwarteten Barwert der Prämienleistung definiert und L als *Verlust* (im mathematischen Sinn) der Versicherungsgesellschaft bezeichnet. Demnach ist $-L$ der *Gewinn* der Versicherungsgesellschaft.
Setzen wir nun $-L$ in die exponentielle Nutzenfunktion u ein, so ergibt sich anstelle der Beziehung $E(L) = 0$ die Bedingung $E(u(-L)) = u(0)$. Die Prämien sollen also bezüglich des Nutzens gerecht sein (GERBER, 1986, S.50 und GOLDAMMER, 2007/08b).

Greifen wir zur numerischen Illustration des Sachverhaltes wieder auf die Daten vom 50-jährigen Mann, der eine Todesfallversicherung mit Laufzeit $n = 2$ Jahre und $\kappa = 40000$ € abschließt, zurück (Beispiel 5.1). In der exponentiellen Nutzenfunktion u setzen wir $a = 10^{-5}$. Dann ist wegen der Beziehung $E(u(-L)) = u(0)$:

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{10^{-5}} \cdot (1 - e^{10^{-5}\cdot(\kappa \cdot v^{k+1})}) \cdot {}_kp_{50} \cdot q_{50+k} - \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{10^{-5}} \cdot (1 - e^{10^{-5}\cdot(N_* \cdot \frac{1-v^{k+1}}{1-v})}) \cdot {}_kp_{50} \cdot q_{50+k} - \\ - \frac{1}{10^{-5}} \cdot (1 - e^{10^{-5}\cdot(N_* \cdot \frac{1-v^2}{1-v})}) \cdot {}_2p_{50} = \quad \ldots \quad =$$

$$= \frac{1}{10^{-5}} \cdot [(e^{10^{-5}\cdot N_*} - e^{10^{-5}\cdot\kappa\cdot v}) \cdot 0,004917 + (e^{10^{-5}\cdot N_*\cdot(1+v)} - e^{10^{-5}\cdot\kappa\cdot v^2}) \cdot 0,0054293+$$
$$+(e^{10^{-5}\cdot N_*\cdot(1+v)} - 1) \cdot 0,989657] = 0.$$

Für $\kappa = 40000$ € und $i = 3,25\%$ erhalten wir schließlich eine jährliche Prämie von $N_* \approx 243,77$ €,was im Vergleich zur Nettoprämie ($N \approx 200,74$ €) ein Plus von $21,4\%$ ist. Die folgende Tabelle gibt die Höhe der jährlichen Prämie und Nettoprämie bei verschiedenen κ-Werten an. In der rechten Spalte ist angegeben wie viel Prozent N_* von der jeweiligen Nettoprämie N beträgt.

versichertes Kapital in €	jährliche Prämie N_* in €	Nettoprämie in € $N = \kappa \cdot \frac{A^1_{50,2}}{\ddot{a}_{50,2}}$	in Prozent der Nettoprämie N
$\kappa = 40000$	$N_* \approx 243,77$	200,74	$121,43\%$
$\kappa = 45000$	$N_* \approx 281,20$	225,83	$124,52\%$
$\kappa = 50000$	$N_* \approx 320,42$	250,92	$127,7\%$
$\kappa = 100000$	$N_* \approx 832,21$	501,84	$165,83\%$
$\kappa = 500000$	$N_* \approx 40231,65$	2509,22	1603%

Wir können nun erkennen, dass die Prämie *nicht* proportional zum versicherten Kapital κ wächst. (*Bemerkung:* Bei der Nettoprämie $N = \kappa \cdot \frac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ ist das sehr wohl der Fall.) Aus der Tabelle erkennt man, dass die Prämie mit steigenden κ-Werten verhältnismäßig schneller (progressiv) wächst.
Versicherungstechnisch betrachtet hat das auch einen Sinn. Ein Kapital von 40000 € stellt für die Versicherungsgesellschaft ein kleineres Risiko dar als eine Polizze, bei der im Schadensfall 500000 € oder noch mehr ausbezahlt werden müssten. Dies erklärt auch, dass in einem Fall der Sicherheitszuschlag von „nur“ 21% eher bescheiden ausfällt, während wir in einem anderen Fall (zumindest theoretisch) einen Sicherheitszuschlag von 1603% errechnet haben (beides unter der Voraussetzung, dass mit $a = 10^{-5}$ gerechnet wird).

Dieses Ergebnis mag dem einen oder anderen Leser vielleicht etwas widersprüchlich zur Praxis erscheinen, da dort die Prämien proportional zum versicherten Kapital berechnet werden. Einige Versicherungsunternehmen bieten dazu das Service sich die Prämien für verschiedene Kapitalien und Laufzeiten individuell ausrechnen zu lassen. So berechnet der Prämienrechner der „Züricher Versicherung“ ([21]) für eine weibliche Person vom Alter $y = 24$ und einer

Laufzeit von $n = 10$ Jahren folgende monatliche Prämien, wenn man eingibt, dass die Frau am 31. 07. 1983 geboren ist und der Versicherungsbeginn für 01.06.2008 terminisiert wird:

Kapital κ	Prämie N_*
10000 €	88,09 €
20000 €	173,49 €
40000 €	345,20 €

Es ist also $88,09 \cdot 2 \approx 175$ € und $173,50 \cdot 2 \approx 345$ €.

Tatsächlich wird es oft so gehandhabt, dass das Versicherungsunternehmen für jedes κ eine Prämie in der Höhe von $p\%$ der Nettoprämie N berechnet. Ist nun beispielsweise $p = 166$, bedeutet das, dass jedem Kapital κ eine Prämie in der Höhe von 1,66 mal der jeweiligen Nettoprämie N zugeordnet wird.

Für die Werte aus unserer Tabelle erhalten wir:

versichertes Kapital κ in €	jährliche Prämie N_{neu} in €
40000	$1,66 \cdot 200,74 \approx 333,23$
45000	$1,66 \cdot 225,83 \approx 374,88$
50000	416,53
100000	833,05
500000	4165,31

Interpretation:

In unserem Beispiel fällt die resultierende Prämie N_{neu} für Versicherungspolizzen mit einem Kapital $\kappa < 100000$ an und für sich zu hoch aus, während sie bei Polizzen mit $\kappa > 100000$ zu niedrig ist und es einer entsprechenden *Rückversicherung* bedarf. Die Versicherungsgesellschaft wird die in einem Fall bekommenden Mehreinnahmen zur Linderung der im anderen Fall entstehenden Unkosten verwenden.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Nettoprämien für die Versicherungsgesellschaft sehr wohl von großem Interesse sind, auch wenn sie in der Praxis ihre Leistungen natürlich nicht gegen diese erbringt (Gerber, 1986, S.50f).

6.1.4. Prämienberechnungen von verschiedenen Versicherungsformen

Im Kapitel 6.1.1 haben wir schon die Formel $N = \kappa \cdot \frac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ bzw. $N = \kappa \cdot \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$ für die Berechnung der Nettoprämie bei *temporären Todesfallversicherungen* bzw. *lebenslangen Todesfallversicherungen* kennengelernt.

Für den Fall, dass $\kappa = 1$ ist, wollen wir wie schon in den vorangegangenen Kapiteln ein eigenes Symbol verwenden.

Es sei $\boxed{P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}}$ die Nettoprämie für eine lebenslange Deckung des versicherten Kapitals der Höhe 1 (ausbezahlt am Ende des Todesjahres) und $\boxed{P^1_{x,n} = \frac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}}$ die Nettoprämie für eine temporäre Todesfallversicherung der Dauer n Jahre, wobei das versicherte Kapital die Höhe 1 hat und am Ende des Todesjahres ausbezahlt wird.

Es gilt wegen $1 = d \cdot \ddot{a}_x + A_x$ (Kapitel 5.2.1, Formel (5.7), S.64), dass man P_x auch über die Formel

$$\boxed{P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d} \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{a}_x = \frac{1}{P_x + d} \tag{6.4}$$

berechnen kann.

Der Vorteil dieser Formel ist, dass man die Barwerte einer lebenslangen vorschüssigen Rente vom Betrag 1 von der jeweiligen Tabelle im Anhang ablesen kann (vorausgesetzt, es wird mit den in dieser Tabelle angeführten Zinssätzen gerechnet) und so relativ rasch zur Lösung kommt.

Eine andere Berechnungsmöglichkeit wäre P_x über die Formel $\boxed{P_x = \frac{d \cdot A_x}{1-A_x}}$ zu ermitteln. Man kommt auf diese Formel, indem man $\ddot{a}_x$ durch $\frac{1-A_x}{d}$ ersetzt und entsprechend umformt.

Durch weitere Umformung gelangt man zu der Formel:

$$P_x = A_x \cdot (d + P_x) \quad \Longleftrightarrow \quad P_x = A_x \cdot d + A_x \cdot P_x.$$

Interpretation:

Wir können eine Deckung der Höhe 1 einerseits durch die jährliche Prämie der Höhe P_x finanzieren, andererseits können wir uns auch vorstellen, dass ein Kredit in der Höhe von A_x

aufgenommen wird und die Deckung von 1 durch diese NEP finanziert wird. Der Betrag A_x wird quasi jeweils zu Jahresbeginn verzinst und am Ende des Todesjahres zurückbezahlt. $P_x \cdot A_x$ können als die jährlichen Prämien für die entsprechende Todesfallversicherung aufgefasst werden (Gerber, 1986, S.52).

Betrachten wir als nächstes eine *Erlebensversicherung* der Dauer n Jahre. Für den Verlust des Versicherungsunternehmens gilt dann:

$$L = \begin{cases} -N \cdot \ddot{a}_{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ \kappa \cdot v^n - N \cdot \ddot{a}_n & \text{für} \quad K \geq n \end{cases}$$

Bei unserem Einstiegsbeispiel 5.2 am Beginn von Kapitel 5 (S.50) mit dem 50-jährigen Mann, der eine Erlebensversicherung über 40000 € mit einer Laufzeit von $n = 2$ Jahren und $i = 3,25\%$ abschließt, erhielten wir für die Nettoprämie einen Betrag von 18909,25 €.
Man kann sich nun selbst davon überzeugen, dass $N \approx 18978,56$ € ist, wenn mit $i = 3\%$ gerechnet wird.
Ausgedrückt mit den im Laufe der letzten beiden Kapiteln kennengelernten Symbolen können wir, da $E(L) = 0$ gelten soll, den Sachverhalt folgendermaßen formelmäßig erfassen:

$$E(L) = \sum_{k=0}^{n-1} -N \cdot \frac{1 - v^{k+1}}{1 - v} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} - N \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} \cdot {}_n p_x + \kappa \cdot v^n \cdot {}_n p_x = 0,$$

was sich kurz und prägnant auf den Ausdruck

$$\kappa \cdot A^I_{x,n} = N \cdot \ddot{a}_{x,n} \quad \Longleftrightarrow \quad N = \kappa \cdot \frac{A^I_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}} \tag{6.5}$$

bringen lässt.

Für $\kappa = 1$ wollen wir die Nettoprämie wieder mit einem eigenen Symbol anschreiben:

$$\boxed{P^I_{x,n} = \frac{A^I_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}}. \tag{6.6}$$

Wenn wir das Rechenbeispiel für $i = 3\%$ mit dieser Formel lösen wollen, setzen wir
$P^I_{50,2} = \frac{A^I_{50,2}}{\ddot{a}_{50,2}}$, berechnen zunächst $\ddot{a}_{50,2}$ mittels Formel (5.17) (S.73)
$\ddot{a}_{50,2} = \ddot{a}_{50} - {}_2p_{50} \cdot v^2 \cdot \ddot{a}_{52} = 18,840 - \frac{93003}{93975} \cdot (\frac{1}{1,03})^2 \cdot 18,088 \approx 1,967$ und
$A^I_{50,2} = v^2 \cdot {}_2p_{50} = (\frac{1}{1,03})^2 \cdot \frac{l_{52}}{l_{50}} \approx 0,9328$ und erhalten für $P^I_{50,2} \approx 0,4743$ und für
$N = \kappa \cdot P^I_{50,2} \approx 18973,09$.

Es fällt nun auf, dass wir nicht exakt das gleiche Resultat für die Nettoprämie erhalten haben (18978,56 bzw. 18973,09). Dies resultiert aus gewissen Rundungsfehlern, die bei der Berechnung auftreten.

Rechnet man beispielsweise ${}_2p_{50} = p_{50} \cdot p_{51}$, erhält man 0,989653728 und über ${}_2p_{50} = \frac{l_{52}}{l_{50}} = \frac{93003}{93975} = 0,989656824$. Schließlich werden auch die Werte 18,840 und 18,088 aus der Tabelle „Barwerte einer lebenslangen vorschüssigen Rente vom Betrag 1“ auf die dritte Nachkommastelle gerundet.

Es ist daher in der Praxis wichtig die erhaltenen Resultate auf eine sinnvolle Stelle zu runden um nicht durch zu viele Nachkommastellen eine Genauigkeit vorzutäuschen, die im Prinzip nicht gegeben ist.

Es sei hier noch erwähnt, dass man die Nettoprämie für kleine n durchaus auf die zu Beginn des Kapitels 5 gezeigte Art rechnen kann. Für größere n ist es aber auf jeden Fall ratsamer, wenn man sich zunächst $P^I_{x,n}$ mittels der Tabelle „Barwerte einer lebenslangen vorschüssigen Rente vom Betrag 1“ berechnet und dann diesen Wert mit dem entsprechendnen κ-Wert multipliziert. Diese Methode ist jedoch nur dann anwendbar, wenn auch tatsächlich mit einem in der Tabelle aufgelisteten Zinssatz i gerechnet wird.

Bei *gemischten Versicherungen* bezeichnen wir die Nettoprämie für $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$ mit $P_{x,n}$. Es gilt analog zu den vorher besprochenen Versicherungstypen $\boxed{P_{x,n} = \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}}$, wobei $P_{x,n}$ auch aus $P_{x,n} = P^1_{x,n} + P^I_{x,n}$ berechnet werden kann.

In Analogie zur angegebenen Formel (6.4) (S.81) zur Prämienberechnung bei Todesfallversicherungen gilt hier die Beziehung (siehe (5.10) in Kapitel 5.2.2 auf Seite 65):

$$1 = d \cdot \ddot{a}_{x,n} + A_{x,n} \iff A_{x,n} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x,n} \iff \boxed{P_{x,n} = \frac{1}{\ddot{a}_{x,n}} - d}. \tag{6.7}$$

Beispiel 6.1

(Goldammer, 2007/08a, UE 8, Bsp 63)

Berechnen Sie die Prämie $1000 \cdot P^1_{30,10}$ aus $a_{30,9} = 5,6$ und $v^{10} \cdot {}_{10}p_{30} = 0,35$, wenn mit $i = 10\%$ verzinst wird!

Lösung:

Da $a_{30,9}$ gegeben ist, erkennen wir, dass es sich um eine nachschüssige temporäre Rente handelt. Eine Formel zur Berechnung der NEP einer *nach*schüssigen temporären Rente lautet:

$a_{x,n} = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_kp_x = v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + ... + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x + v^n \cdot {}_np_x$ (Formel (5.16), S.68).

Dann ist $a_{x,n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x = v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + ... + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x$.

Im Beispiel ist also $a_{30,10} = a_{30,9} + v^{10} \cdot {}_{10}p_{30} = 5,6 + 0,35 = 5,95$ laut Angabe.

Um $P^1_{30,10}$ zu berechnen, wenden wir die Formel $P^1_{30,10} = \frac{A^1_{30,10}}{\ddot{a}_{30,10}}$ an.

Da $\ddot{a}_{x,n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x = 1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + ... + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x$ (Formel (5.15), S.68) ist offensichtlich, dass $\ddot{a}_{x,n} = 1 + a_{x,n-1}$ gilt.

Im Beispiel laut Angabe: $\ddot{a}_{30,10} = 1 + a_{30,9} = 1 + 5,6 = 6,6$.

Aus Formel (5.10) (S.65) $1 = d \cdot \ddot{a}_{x,n} + A_{x,n}$ berechne man sich nun als nächstes $A_{30,10}$ (Lösung: $A_{30,10} = 0,4$) und aus der Beziehung (5.4) (S.58) $A_{x,n} = A^1_{x,n} + A^I_{x,n}$ kommt man durch entsprechende Umformung (wobei $A^I_{x,n} = v^n \cdot {}_np_x$, siehe Kapitel 5.1.2, Formel (5.3), Seite 56 für $\kappa = 1$) schließlich auf $A^1_{30,10} = 0,05$, was man nun bloß noch in $P^1_{x,n} = \frac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ einsetzen muss.

Für $1000 \cdot P^1_{30,10}$ erhalten wir schließlich 7,576 € als Lösung.

◇

Dieses Beispiel soll zeigen, dass eine Angabe, die für den einen oder anderen Laien vielleicht etwas seltsam erscheinen mag, mittels unsere entwickelten Formeln und Zusammenhänge doch relativ einfach bearbeitet werden kann.

Als letztes wollen wir nun noch eine Prämienberechnung bei einer ganz allgemeinen Versicherungsform aufzeigen.

Es sei κ_j mit $j = 1, 2, ..., \omega - x + 1$ das im j-ten Versicherungsjahr ausbezahlte Kapital bei einer lebenslangen Todesfallversicherung, wobei κ_j am Ende des Todesjahres ausbezahlt wird. Die Finanzierung soll durch jährliche Prämien N_i mit $i = 0, 1, ..., \omega - x$ erfolgen, wobei N_l die zu Beginn des l-ten Jahres zu bezahlende Prämie ist.

Der Verlust der Versicherungsgesellschaft ist dann:

$$L = \kappa_{K+1} \cdot v^{K+1} - \sum_{k=0}^{K} N_k \cdot v^k.$$

Die sich möglicherweise veränderlichen Prämien sind unter der Voraussetzung $E(L) = 0$ Nettoprämien und können aus
$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\omega-x} \kappa_{k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}}_{\text{Kap. 5.1.4 Formel (5.6) S. 60}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\omega-x} N_k \cdot v^k \cdot {}_kp_x}_{\text{Kap. 5.2.4 Formel (5.13) S. 67}}$$
berechnet werden.

6.1.5. Prämienrückgewähr und ein Rechenbeispiel

Natürlich gibt es in der Praxis noch eine Vielzahl weiterer Versicherungsformen, die in diversen Variationen auftreten. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen die Nettoprämien für jede dieser Methoden formelmäßig herzuleiten.

Im Prinzip geht man aber bei der Berechnung der Nettoprämie immer nach dem selben Schema vor:

Formulierung des Verlusts L der Versicherungsgesellschaft und $E(L) = 0$.

Manche Versicherungsunternehmen bieten zusätzlich noch eine sogenannte *Prämienrückgewähr* an.

Darunter versteht man, dass das Versicherungsunternehmen die Zusage macht, im Schadensfall einen Teil der zuletzt gezahlten Prämie *zusätzlich* zur Versicherungsleistung auszuzahlen (Gerber, 1986, S.55).

Der Begriff *Prämienrückgewähr* kann aber je nach Versicherungsvertrag auch eine andere Bedeutung haben.

Bei manchen Versicherungen wird unter *Prämienrückgewähr* verstanden, dass man einen Teil der Prämien zurückbezahlt bekommt, falls kein Schadensfall eintritt. In diesem Fall ist der Begriff Prämienrückgewähr eng mit der *Mitversicherung der Prämien* gekoppelt.

> *„Bei manchen Versicherungsarten ist es möglich, dass es zu einer Leistung des Versicherers gar nicht kommt und die eingezahlten Prämien verfallen. So z. B. bei einer temporären Versicherung auf den Todesfall, wenn das Ableben nach Ablauf der vereinbarten Versicherungsdauer eintritt, oder bei einer Erlebensversicherung oder einer aufgeschobenen Versicherung, wenn der vereinbarte Termin nicht erlebt wird. Um diesen gänzlichen Verfall der Prämien zu vermeiden, werden solche Versicherungen mit bedingter Zahlung des Kapitals nicht selten unter Mitversi-*

cherung der Prämien für den Fall, dass es zu einer Versicherungsleistung sonst nicht kommt, abgeschlossen.“ (Berger, 1939, S.77f)

Im folgenden Beispiel handelt es sich um eine *Prämienrückgewähr*, die im Schadensfall einen Teil der Prämien zuzüglich zur Versicherungsleistung auszahlt.

Beispiel 6.2

(Goldammer, 2007/08a, UE 8, Bsp 65)

Betrachten wir eine Todesfallversicherung mit Prämienlaufzeit $n = 20$ Jahre an einen x-jährigen Mann. Die Prämien werden jährlich vorschüssig gezahlt; die Versicherungssumme von $\kappa = 50000$ € wird am *Ende des Todesjahres* ausbezahlt (auch dann, wenn der Mann erst nach der Prämienlaufzeit sterben sollte).

Außerdem besteht eine *Prämienrückgewähr*, welche die Hälfte der letzten Prämienzahlung als zusätzliche Zahlung im Todesfall auszahlt. Die Prämienrückgewähr gilt allerdings nur während der Laufzeit der Versicherung.

Wir wollen nun zeigen, dass die jährliche Nettoprämie N mit der folgenden Formel berechnet werden kann:

$$N = \frac{50000 \cdot A_x}{(1 + 0,5d) \cdot \ddot{a}_{x,20} - (1 - v^{20} \cdot {}_{20}p_x) \cdot 0,5}.$$

Lösung:

$$L = \begin{cases} \kappa \cdot v^{K+1} - N \cdot \ddot{a}_{K+1} + \frac{1}{2} \cdot N \cdot v^{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., 19 \\ \kappa \cdot v^{K+1} - N \cdot \ddot{a}_{20} & \text{für} \quad K \geq 20 \end{cases}$$

Es gelte: $E(L) = 0$:

$\kappa \cdot A_x - N \cdot \ddot{a}_{x,20} + \frac{1}{2} \cdot N \cdot A^1_{x,20} = 0$

$N \cdot (\frac{1}{2} \cdot A^1_{x,20} - \ddot{a}_{x,20}) = -\kappa \cdot A_x$

$$\begin{aligned} N &= \frac{\kappa \cdot A_x}{\ddot{a}_{x,20} - \frac{1}{2} \cdot A^1_{x,20}} = \frac{\kappa \cdot A_x}{\ddot{a}_{x,20} - \frac{1}{2} \cdot (A_{x,20} - A^I_{x,20})} = \\ &= \frac{\kappa \cdot A_x}{\ddot{a}_{x,20} - \frac{1}{2} \cdot (1 - d \cdot \ddot{a}_{x,20} - v^{20} \cdot {}_{20}p_x)} = \frac{\kappa \cdot A_x}{(1 + 0,5 \cdot d) \cdot \ddot{a}_{x,20} - (1 - v^{20} \cdot {}_{20}p_x) \cdot 0,5} \end{aligned}$$

◇

6.1.6. Der stochastische Zinssatz

Der eine oder andere Leser hat sich sicher schon gefragt, warum wir den Zinssatz i immer als festen technischen Zinsfuß annehmen und ihn bei unseren Berechnungen, die oft über mehrere Jahre bzw. sogar Jahrzehnte gehen, nicht ändern. Die Lösung liegt auf der Hand: Der in zukünftigen Jahren erzielte Zins ist klarerweise unbekannt. Nun könnte man auf die Idee kommen die zukünftigen Zinsentwicklungen durch einen stochastischen Prozess zu modellieren.
Es wird aber darauf verzichtet, weil es in der Lebensversicherung, bei der man sich an und für sich für eine *langfristige Zinsentwicklung* interessiert, kein geeignetes stochastisches Modell für eben diese gibt.

Ein anderer Grund ist der, dass wir ja grundsätzlich davon ausgehen, dass die zukünftige Lebensdauer T_x von den verschiedenen Personen, die eine Versicherung abschließen, unabhängig voneinander ist. T_x wird schließlich als unabhängige Zufallsvariable betrachtet.
Wenn wir nun einen stochastischen Zins annehmen würden, ginge diese Unabhängigkeit bei den Berechnungen verloren, da dann alle Versicherungspolizzen vom gleichen jährlichen Zins betroffen wären. Wir werden daher auch in weiterer Folge mit einem festen technischen Zinssatz i rechnen, der individuell festgesetzt werden kann (Gerber, 1986, S.56).

6.2. Das Nettodeckungskapital

Wir sind bei der Berechnung der Nettoprämien bisher so vorgegangen, dass wir $E(L) = 0$ gesetzt haben. Wir haben also de facto eine Äquivalenz zwischen Prämien und Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses geschaffen, so dass der erwartete Verlust des Versicherungsunternehmens (und des Versicherungsnehmers) verschwindet. Eine Äquivalenz zwischen den zukünftigen Prämien und Versicherungsleistungen gibt es allerdings für einen späteren Zeitpunkt im Allgemeinen nicht mehr.
Es ist aber prinzipiell möglich die Differenz zwischen dem Barwert der zukünftigen Leistungen mit dem Barwert der zukünftigen Prämien zu einem beliebigen Zeitpunkt $t < T$ zu vergleichen. Dazu definieren wir die Zufallsvariable ${}_tL$, die diese Differenz zum Zeitpunkt t

angibt. Das *Nettodeckungskapital (NDK)* zum Zeitpunkt t ist definiert als der Erwartungswert von ${}_tL$ und wird mit ${}_tV$ bezeichnet (GERBER, 1986, S.57 und CZUBER, 1928, S.367ff).

Es ist also $E({}_tL) = {}_tV$, wobei ${}_tV$ wegen $t < T$ bedingt ist. Außerdem müssen wir bedenken, dass die Versicherungsgesellschaft im Falle des Ablebens der versicherten Person noch zukünftige Verpflichtungen haben kann (z. B. Zahlungen an Hinterbliebene).
Da sowohl die zu versichernden Personen als auch die Versicherungsgesellschaft selbst im Allgemeinen daran interessiert sein werden, dass eine Fortsetzung der Versicherung gegeben ist (der sogenannte „versicherungstechnische Ruin“ soll vermieden werden), wird bei Versicherungsformen, die in der Praxis auftreten, das Nettodeckungskapital zum Zeitpunkt t positiv oder allenfalls null sein.

Es soll also $E({}_tL) \geq 0$, oder anders geschrieben $E({}_tZ)$ bzw. $E({}_tY) \geq E({}_tP)$, gelten.
Das bedeutet, dass im Erwartungswert zum Zeitpunkt t der Barwert der zukünftigen Leistungen den Barwert der zukünftigen Prämien übertrifft.
Diese Ungleichung scheint im ersten Moment etwas widersprüchlich zu sein, weil es für das Versicherungsunternehmen von Vorteil zu sein scheint, wenn $E({}_tP)$ größer oder gleich dem Barwert der zukünftigen Leistung des Versicherungsunternehmens ist.
Schließlich würde in diesem Fall zum Zeitpunkt t der Barwert der zukünftigen Prämien, die der Versicherte zahlt, den Barwert der zukünftigen Versicherungsleistung übertreffen, sodass das Versicherungsunternehmen dann mehr Einnahmen als Ausgaben hätte.

Warum gilt dann aber dennoch $E({}_tZ)$ bzw. $E({}_tY) \geq E({}_tP)$?
In der obigen Überlegung wurde nicht berücksichtigt, dass der Versicherungsnehmer in der Zeit von $[0;t]$ (wobei $t < T$) schon Prämien gezahlt hat, während das Versicherungsunternehmen in dieser Zeitspanne noch keine Leistungen erbracht hat. Das sogenannte „Äquivalenzprinzip“ (siehe Kapitel 2 auf Seite 9) wäre verletzt.
Wenn man die Sachlage erst zum Zeitpunkt t betrachtet und prospektiv (also vorausblickend) nur die Barwerte der zukünftigen Leistungen und zukünftigen Prämienzahlungen ab dem Zeitpunkt t miteinander vergleicht, ohne die in $[0;t]$ bereits erfolgten Prämienzahlungen in die Überlegung einzubeziehen, würde dies nicht dem Wesen des Äquivalenzprinzips entsprechen.
Andererseits berücksichtigt $E({}_tL) \geq 0$ die schon eingezahlten Prämien, das Äquivalenzprinzip ist also erfüllt.

6.2.1. Deckungskapital bei einer gemischten Versicherung

Betrachten wir zunächst eine gemischte Versicherung für eine x-jährige Person mit einer Laufzeit von n Jahren und einem fixen Zinssatz i. Die jährliche Prämienzahlung soll während der Versicherungsdauer vorschüssig erfolgen; die Versicherungsleistung $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$ nachschüssig.

Die Nettoprämie $P_{x,n}$ können wir uns über die im vorigen Kapitel hergeleitete Formel (6.3) (S.76) berechnen. Da $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$ gelten soll, ist in unserem Beispiel $P_{x,n} = \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$.

Für den erwarteten Barwert der Versicherungsleistung gilt nach Formel (5.4) (S.58):

$A_{x,n} = A^1_{x,n} + A^I_{x,n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + v^n \cdot {}_np_x.$

Berechnen wir nun den erwarteten Barwert der zukünftigen Versicherungsleistung zum Zeitpunkt $k = 1$ (also am Ende des ersten Jahres), erhalten wir:

$A_{x+1,n-1} = A^1_{x+1,n-1} + A^I_{x+1,n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1} \cdot {}_kp_{x+1} \cdot q_{x+1+k} + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_{x+1}.$

Der erwartete Barwert der zukünftigen Versicherungsleistung am Ende des k-ten Jahres, wobei $k = 0, 1, ..., n-1$ ist, ist demnach:

$A_{x+k,n-k} = A^1_{x+k,n-k} + A^I_{x+k,n-k}.$

Rechnen wir zur numerischen Illustration mit $x = 33$, $n = 5$, $i = 3\%$ und verwenden wir die in Beispiel 5.3 (S.53) angeführte Sterbetafel.

$q_x = \frac{d_x}{l_x}$	$p_x = 1 - q_x$
$q_{33} = \frac{1}{11}$	$p_{33} = \frac{10}{11}$
$q_{34} = \frac{1}{8}$	$p_{34} = \frac{7}{8}$
$q_{35} = \frac{6}{35}$	$p_{35} = \frac{29}{35}$
$q_{36} = \frac{7}{29}$	$p_{36} = \frac{22}{29}$
$q_{37} = \frac{4}{11}$	$p_{37} = \frac{7}{11}$
$q_{38} = \frac{9}{14}$	$p_{38} = \frac{5}{14}$

$$v = \frac{1}{1{,}03} \approx 0,97$$

$$A_{33,5} = \sum_{k=0}^{4} v^{k+1} \cdot {}_kp_{33} \cdot q_{33+k} + v^5 \cdot {}_5p_{33} =$$
$$= v \cdot q_{33} + v^2 \cdot p_{33} \cdot q_{34} + v^3 \cdot p_{33} \cdot p_{34} \cdot q_{35} + v^4 \cdot p_{33} \cdot p_{34} \cdot p_{35} \cdot q_{36} + v^5 \cdot p_{33} \cdot p_{34} \cdot p_{35} \cdot p_{36} \cdot q_{37} +$$
$$+ v^5 \cdot p_{33} \cdot p_{34} \cdot p_{35} \cdot p_{36} \cdot p_{37} \approx 0,892821074$$

$A_{34,4} = \sum_{k=0}^{3} v^{k+1} \cdot {}_kp_{34} \cdot q_{34+k} + v^4 \cdot {}_4p_{34} =$

$= v \cdot q_{34} + v^2 \cdot p_{34} \cdot q_{35} + v^3 \cdot p_{34} \cdot p_{35} \cdot q_{36} + v^4 \cdot p_{34} \cdot p_{35} \cdot p_{36} \cdot q_{37} + v^4 \cdot p_{34} \cdot p_{35} \cdot p_{36} \cdot p_{37} \approx 0,911566276$

Die weiteren erwarteten Barwerte lassen sich schneller über die in Kapitel 5.1.3 kennengelernte Rekursionsformel (5.5) (S.58) $A_{x,n} = v \cdot q_x + v \cdot p_x \cdot A_{x+1,n-1}$ durch entsprechende Umformung berechnen.

$$\begin{aligned}
A_{34,4} &= \tfrac{A_{33,5} - v \cdot q_{33}}{v \cdot p_{33}} &&\approx 0,911566276 \\
A_{35,3} &= \tfrac{A_{34,4} - v \cdot q_{34}}{v \cdot p_{34}} &&\approx 0,930186588 \\
A_{36,2} &= \tfrac{A_{35,3} - v \cdot q_{35}}{v \cdot p_{35}} &&\approx 0,949421604 \\
A_{37,1} &= \tfrac{A_{36,2} - v \cdot q_{36}}{v \cdot p_{36}} &&\approx 0,970873786 \quad = v \cdot q_{37} + v \cdot p_{37} = v \cdot (q_{37} + p_{37}) = v \cdot 1 = v
\end{aligned}$$

Für den erwarteten Barwert der Prämienzahlungen gilt:

$E(P) = N \cdot \ddot{a}_{x,n} = N \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + N \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \cdot {}_np_x$ (Kapitel 6.1.2, S.76).

Wegen $\kappa = 1$ ist $N = P_{x,n} = \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$. (Formel (6.3), S.76).

$\ddot{a}_{x,n}$ wird man sich, da $A_{x,n}$ schon bekannt ist, am schnellsten über Formel (5.10) (S.65) $\ddot{a}_{x,n} = \frac{1-A_{x,n}}{d}$ berechnen. In unserem Rechenbeispiel ist $\ddot{a}_{33,5}$ demnach:

$\ddot{a}_{33,5} = \frac{1-A_{33,5}}{1-v} \approx 3,6798.$

Natürlich könnte man $\ddot{a}_{33,5}$ auch über Formel (5.15) (S.68) berechnen:

$\ddot{a}_{33,5} = \sum_{k=0}^{4} v^k \cdot {}_kp_{33} = 1 + v \cdot p_{33} + v^2 \cdot {}_2p_{33} + v^3 \cdot {}_3p_{33} + v^4 \cdot {}_4p_{33} \approx 3,6798.$

Für die Nettoprämie $P_{33,5}$ erhalten wir: $P_{33,5} = \frac{A_{33,5}}{\ddot{a}_{33,5}} \approx 0,242626962.$

Wir wollen nun auch die erwarteten Barwerte der zukünftigen Prämienzahlungen für das Ende des k-ten Jahres ($k = 0, 1, ..., n-1$) berechnen.

Wir rechnen mit der Prämienhöhe $P_{x,n}$, also mit der Nettoprämie.

Für den erwarteten Barwert der zukünftigen Prämienleistung zum Zeitpunkt $k = 1$ (also am Ende des ersten Jahres) gilt:

$$P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+1,n-1} = P_{x,n} \cdot [\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_{x+1} \cdot q_{x+1+k} + \frac{1-v^{n-1}}{1-v} \cdot {}_{n-1}p_{x+1}].$$

Der erwartete Barwert der zukünftigen Prämienleistung am Ende des k-ten Jahres $(k = 0, 1, ..., n-1)$ ist:

$$P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = P_{x,n} \cdot [\sum_{l=0}^{n-k-1} \frac{1-v^{l+1}}{1-v} \cdot {}_lp_{x+k} \cdot q_{x+k+l} + \frac{1-v^{n-k}}{1-v} \cdot {}_{n-k}p_{x+k}].$$

Bei unserem Rechenbeispiel wird man sich die $\ddot{a}_{33+k,5-k}$ - Werte $(k = 0, 1, ..., 4)$ am schnellsten über Formel (5.10) (S.65) berechnen und diese dann jeweils mit $P_{33,5}$ multiplizieren um die gesuchten erwarteten Barwerte zu erhalten.

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{34,4} &\approx 3,036224524 & P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{34,4} &\approx 0,73667\\
\ddot{a}_{35,3} &\approx 2,396927145 & P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{35,3} &\approx 0,58156\\
\ddot{a}_{36,2} &\approx 1,736524929 & P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{36,2} &\approx 0,42133\\
\ddot{a}_{37,1} &= 1 & P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{37,1} &\approx 0,24263
\end{aligned}$$

Das Nettodeckungskapital zum Zeitpunkt t ${}_tV$ haben wir definiert als den Erwartungswert von ${}_tL$.

In unserem Beispiel haben wir eine gemischte Versicherung vorliegen. Wir erhalten das Nettodeckungskapital ${}_kV_{x,n}$ zum Zeitpunkt k $(k = 0, 1, ..., n-1)$, indem wir die Differenz zwischen den erwarteten Barwerten der Versicherungsleistungen und der Prämienleistungen berechnen.

In unserem Rechenbeispiel erhalten wir:

${}_0V_{33,5} = A_{33,5} - P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{33,5} = 0$ (was aufgrund der Definition der Nettoprämie $P_{x,n} = \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ schon vorher klar war)

$$\begin{aligned}
{}_1V_{33,5} &= A_{34,4} - P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{34,4} \approx 0,174896\\
{}_2V_{33,5} &= A_{35,3} - P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{35,3} \approx 0,348627\\
{}_3V_{33,5} &= A_{36,2} - P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{36,2} \approx 0,528094\\
{}_4V_{33,5} &= A_{37,1} - P_{33,5} \cdot \ddot{a}_{37,1} \approx 0,728247
\end{aligned}$$

Allgemein erhalten wir schließlich die Formel:

$$\boxed{{}_kV_{x,n} = A_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}} \qquad (k = 0, 1, ..., n-1) \tag{6.8}$$

Wir wollen nun den Verlauf des Deckungskapitals während der Versicherungsdauer grafisch darstellen:

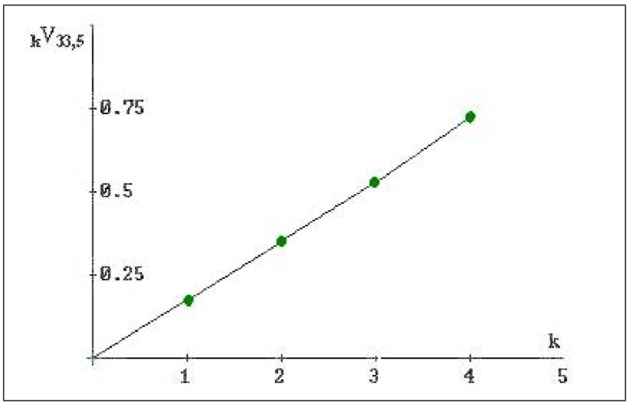

Abbildung 6.1.: Verlauf des Deckungskapitals während der Versicherungsdauer

Wie aus der Grafik ersichtlich ist, ist der Anstieg fast linear.

$_2V_{33,5} \approx 2 \cdot {_1V_{33,5}} \qquad {_3V_{33,5}} \approx 3 \cdot {_1V_{33,5}} \qquad {_4V_{33,5}} \approx 4 \cdot {_1V_{33,5}}.$

Das Deckungskapital wächst stetig und hat zum Schluss die gleiche Größenordnung wie das versicherte Kapital.

Das Deckungskapital von $0,728247$ am Ende des vierten Jahres (allgemein des $(n-1)$-ten Jahres) kann man mit folgender elementaren Überlegung relativ leicht bestätigen:

Zusammen mit der letzten Prämie von 0,242627 (beide für ein Jahr verzinst) ergibt sich daraus der am Ende des fünften Jahres fällige Betrag von $\kappa = 1$.

$0,728246824 \cdot 1,03 + 0,242626962 \cdot 1,03 = (0,728246824 + 0,242626962) \cdot 1,03 = 1$

Wir haben das Deckungskapital nun *prospektiv* (das heißt als Summe aller *noch zu leistenden* Zahlungen minus aller noch zu erwartenden Prämien, auf den entsprechenden Zeitpunkt bezogen) betrachtet und auf diese Weise Formel (6.8) (S.91) hergeleitet.

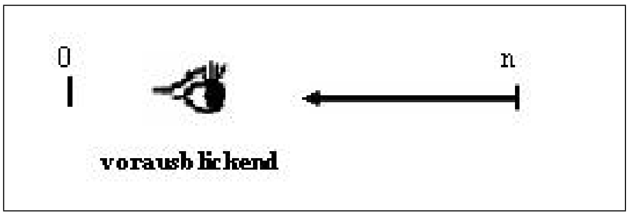

Abbildung 6.2.: *prospektive* Sichtweise

Eine andere Möglichkeit wäre die *retrospektive* Darstellung, bei der man alle *schon erhaltenen*

Prämien abzüglich der geleisteten Zahlungen betrachtet.

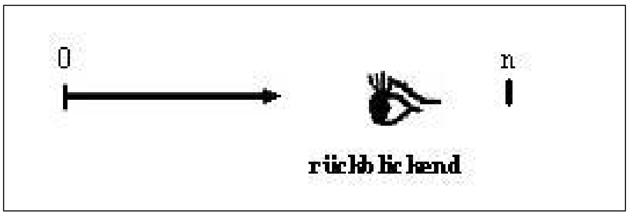

Abbildung 6.3.: *retrospektive* Sichtweise

Während also beim *prospektiven Ansatz* die erweiterte Äquivalenzgleichung

vorhandenes Deckungskapital + Barwert der *zukünftigen* Prämieneinnahmen
= Barwert der *zukünftigen* Versicherungsleistungen

zu jedem Zeitpunkt der Versicherungsdauer gilt, haben wir beim *retrospektiven Ansatz*, der bei manchen Versicherungsformen notwendig ist, eine Äquivalenzgleichung der Form

Deckungskapital + Endwert der rechnungsmäßigen Versicherungsleistungen der *Vergangenheit*
= Endwert der rechnungsmäßigen Prämieneinnahmen der *Vergangenheit*

(Disch, 2002, S.32).

Der retrospektive Ansatz wird vor allem bei Versicherungen verwendet, bei denen das Kapitalanlagerisiko vom Versicherungsnehmer getragen wird, da dort ein „Blick in die Zukunft“ de facto nicht möglich ist.
Beispiele dafür sind unter anderem aktienindexgebundene Lebensversicherungen mit garantierter Mindestverzinsung (AILV), fondsgebundene Lebensversicherungen (FLV) und fondsgebundene Rentenpolizzen Versicherungen (FRV) (Disch, 2002, S.32).

Für unsere Berechnungen wollen wir uns in weiterer Folge auf den prospektiven Ansatz beschränken.

Wir wollen jetzt zeigen, dass das Nettodeckungskapital einer gemischten Versicherung bei jährlichen Prämienzahlungen über die gesamte Versicherungsdauer auch über die Formel

$$\boxed{{}_kV_{x,n} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}}} \tag{6.9}$$

berechnet werden kann (Gerber, 1986, S.62).

Bevor wir den allgemeinen Beweis durchführen, wenden wir diese Formel zunächst auf unser voriges Rechenbeispiel mit $x = 33$, $n = 5$ und $i = 3\%$ für beispielsweise $k = 3$ an:

${}_3V_{33,5} = 1 - \frac{\ddot{a}_{36,2}}{\ddot{a}_{33,5}} = 1 - \frac{1{,}736525}{3{,}67981} \approx 0,528094.$

Da wir dasselbe Ergebnis erhalten haben wie mit Formel (6.8), dürfte Formel (6.9) offensichtlich stimmen.

Beweis:
Zu zeigen: ${}_kV_{x,n} = A_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}}$.

$A_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \overset{(5.10)}{=} 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \overset{(6.7)}{=}$
$= 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - (\frac{1}{\ddot{a}_{x,n}} - d) \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}}$.

$\square$

6.2.2. Deckungskapital bei einer temporären Todesfallversicherung

Analog zu Formel (6.8) (S.91) können wir uns das Deckungskapital am Ende des k-ten Jahres einer entsprechenden n-jährigen (temporären) Todesfallversicherung mittels

$$\boxed{{}_kV^1_{x,n} = A^1_{x+k,n-k} - P^1_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}} \quad (k = 0, 1, ..., n-1) \tag{6.10}$$

berechnen.
Die folgende Tabelle zeigt den Verlauf des Deckungskapitals bei einer temporären Todesfallversicherung der Dauer $n = 5$ Jahre für eine $x = 33$-jährige Person, wenn mit $i = 3\%$ und der in Beispiel 5.3 (S.53) angeführten Sterbetafel gerechnet wird ($\kappa = 1$).

Aus $P^1_{x,n} = \frac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ erhalten wir für die Nettoprämie $P^1_{33,5} = 0,168039838$, dabei ist

$$A^1_{x,n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$$

k	$\ddot{a}_{33+k,5-k}$	$A^1_{33+k,5-k}$	${}_kV^1_{33,5}$
0	3,6798	0,618354643	0
			(klar wegen Definition der Nettoprämie)
1	3,0362	0,600595809	0,090389136
2	2,3969	0,564129924	0,161350677
3	1,7365	0,494375303	0,202569934
4	1	0,353045013	0,185005175

Im Gegensatz zum Verlauf des Deckungskapitals bei der gemischten Versicherung (vgl. 6.2.1, S.89ff) haben wir hier einen äußerst flachen Verlauf. Zu Beginn steigt das Deckungskapital leicht an (in den ersten Jahren liegt die $NEP^1_{33,5}$ nur geringfügig über der NEP für eine einjährige Todesfallversicherung (*beachte*: beispielsweise ist 0,61835 nur geringfügig größer als 0,600596)), am Ende strebt das Deckungskapital gegen null (für die Versicherungsgesellschaft fällt im Erlebensfall keine Zahlung an).

Das Deckungskapital am Ende des vierten Jahres (allgemein des $(n-1)$-ten Jahres) ergibt zusammen mit der letzten Prämie $P^1_{33,5}$ die NEP für eine einjährige Todesfallversicherung eines 37-jährigen:

$$0{,}185005 + 0{,}16804 = 0{,}353045.$$

6.2.3. Deckungskapital bei einer lebenslänglichen Todesfallversicherung

Das Deckungskapital am Ende des k-ten Jahres einer lebenslänglichen Todesfallversicherung bezeichnen wir mit ${}_kV_x$ und kann über die Formel

$$\boxed{{}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k}} \quad (k = 0, 1, ..., \omega - x) \tag{6.11}$$

berechnet werden (vgl. die Formeln (6.8) und (6.10) in 6.2.1 bzw 6.2.2).

Eine andere Formel zur Berechnung von ${}_kV_x$ ist gegeben durch:

$$\boxed{{}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}} \tag{6.12}$$

(Gerber, 1986, S.62).

Der Vorteil der Verwendung dieser Formel ist, dass man die entsprechenden $\ddot{a}_x$-Werte aus der Tabelle „Barwerte einer lebenslänglichen vorschüssigen Rente vom Betrag 1“ für die Werte der Sterbetafel 2000/02 ablesen kann, sofern mit einem dort aufgelisteten Zinsfuß gerechnet wird.

Beweis:

$$\begin{aligned} {}_kV_x &= A_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k} \overset{(5.7)}{=} 1 - d \cdot \ddot{a}_{x+k} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+k} = \\ &= 1 - (P_x + d) \cdot \ddot{a}_{x+k} \overset{(6.4)}{=} 1 - (\tfrac{1}{\ddot{a}_x} - d + d) \cdot \ddot{a}_{x+k} = 1 - \tfrac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \end{aligned}$$

□

Wir können diese Formel nun weiter umformen und erhalten:

$$ {}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \overset{(5.7)}{=} 1 - \frac{\frac{1-A_{x+k}}{d}}{\frac{1-A_x}{d}} = \frac{1 - A_x - 1 + A_{x+k}}{1 - A_x} = \frac{A_{x+k} - A_x}{1 - A_x}. \tag{6.13}$$

Wegen $P_{x+k} = \frac{A_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k}}$ erhalten wir aus Formel (6.11) auch noch die folgenden Beziehungen:

(i) ${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \cdot \frac{A_{x+k}}{P_{x+k}} = (1 - \frac{P_x}{P_{x+k}}) \cdot A_{x+k}$

(ii) ${}_kV_x = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k}} \cdot P_{x+k} \cdot \ddot{a}_{x+k} = (P_{x+k} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+k}$

(iii) ${}_kV_x = (P_{x+k} - P_x) \cdot \ddot{a}_{x+k} \overset{(6.4)}{=} (P_{x+k} - P_x) \cdot \frac{1}{P_{x+k}+d} = \frac{P_{x+k} - P_x}{P_{x+k}+d}$

Je nach Angabe möge man zur Berechnung des ${}_kV_x$ die jeweils am besten geeignete Formel auswählen.

6.2.4. Rechenbeispiele

Die Beispiele in diesem Kapitel stimmen in abgeänderter Form im Wesentlichen mit den Beispielen aus den Übungen zur Lebensversicherungsmathematik an der TU Wien vom Wintersemester 2007/08 von Goldammer überein (UE 11 (Bsp 84, 85 und 87), UE 12 (Bsp 95) und UE 13 (Bsp 99 und 101)).

Beispiel 6.3

Wir betrachten eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit jährlicher Prämienzahlung. Gegeben sind die Deckungskapitalien ${}_{10}V_{25} = 0,1$ und ${}_{10}V_{35} = 0,2$.

Berechnen Sie ${}_{20}V_{25}$!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x &= 1 - \tfrac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} \qquad \text{(Formel (6.12), S.95)}\\
{}_{10}V_{25} &= 1 - \tfrac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}} = 0,1 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}} = 0,9 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{a}_{25} = \tfrac{\ddot{a}_{35}}{0,9}\\
{}_{10}V_{35} &= 1 - \tfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} = 0,2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} = 0,8 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{a}_{45} = 0,8 \cdot \ddot{a}_{35}\\
{}_{20}V_{25} &= 1 - \tfrac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{25}} = 1 - \tfrac{0,8 \cdot \ddot{a}_{35}}{\frac{\ddot{a}_{35}}{0,9}} = 1 - 0,8 \cdot 0,9 = 1 - 0,72 = \underline{\underline{0,28}}
\end{aligned}
$$

◇

Beispiel 6.4

Gesucht ist das Nettodeckungskapital einer gemischten Versicherung ${}_1V_{31,14}$ bei jährlichen Prämienzahlungen, wenn mit $q_{31} = 0,002$, $\ddot{a}_{32,13} = 9$ und $i = 5\%$ gerechnet wird.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
v &= \tfrac{1}{1+0,05} \approx 0,95\\
{}_kV_{x,n} &= 1 - \tfrac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}} \qquad \text{(Formel (6.9), S.94)}\\
{}_1V_{31,14} &= 1 - \tfrac{\ddot{a}_{32,13}}{\ddot{a}_{31,14}}
\end{aligned}
$$

Analog zur Rekursionsformel $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot p_x$ (siehe Kapitel 5.2.5, S.68ff) erhalten wir für die NEP einer temporären Leibrente der Dauer n Jahre:

$$\ddot{a}_{x,n} = 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1,n-1} \cdot p_x \qquad \text{(Herleitung wieder über Indexverschiebung),}$$

im Beispiel:

$\ddot{a}_{31,14} = 1 + v \cdot \ddot{a}_{32,13} \cdot p_{31} = 1 + 0,95 \cdot 9 \cdot (1 - 0,002) = 9,5543,$

somit: $\quad {}_1V_{31,14} = 1 - \frac{9}{9,5543} \approx \underline{\underline{0,0580}}.$

◇

Beispiel 6.5

Wir betrachten eine gemischte Versicherung einer 30-jährigen Frau, die bis zum Alter von 65 Jahren laufen soll. Die Versicherungssumme beträgt $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = 100000$ €. Die jährlich vorschüssigen Prämienzahlungen sollen bis zum Alter von 60 Jahren erfolgen.

Die Frau wird jedoch mit 53 Jahren arbeitslos und entschließt sich, die Versicherung in eine temporäre vorschüssige Rente bis zu ihrem Pensionsantritt im Alter von 62 Jahren umzuwandeln. Die Prämienzahlungen bleiben dazu unverändert. Es wird mit $i = 3\%$ gerechnet.

(a) Wie hoch ist die Jahresprämie N der gemischten Versicherung?

(b) Wie groß ist das Deckungskapital vor der Vertragsänderung?

(c) Wie hoch ist die jährliche Rente im Alter von 53 bis 62 Jahren?

Lösung:

(a)

Grundsätzlich gehen wir von Formel (6.3) (S.76) $N = \kappa \cdot \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ aus. Bei diesem Beispiel ist aber die Dauer der Versicherung (35 Jahre) und die Dauer der Prämienzahlungen (30 Jahre) nicht gleich.

Wir erhalten somit:

$$N = 100000 \cdot \frac{A_{30,35}}{\ddot{a}_{30,30}} = 100000 \cdot \frac{0{,}3665}{19{,}94} \approx \underline{\underline{1838{,}12\ €}}$$

Nebenrechnung:

$\ddot{a}_{30,35}$ über (5.17), S.73:

$$\ddot{a}_{30,35} = \ddot{a}_{30} - {}_{35}p_{30} \cdot v^{35} \cdot \ddot{a}_{65} \overset{(Tabelle)}{=} 26{,}599 - \frac{90645}{99010} \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{35} \cdot 14{,}899 \approx 21{,}75$$

$A_{30,35}$ über (5.10), S.65:

$$A_{30,35} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{30,35} = 1 - \left(1 - \frac{1}{1{,}03}\right) \cdot 21{,}75 \approx 0{,}3665$$

$\ddot{a}_{30,30}$ über (5.17), S.73:

$$\ddot{a}_{30,30} = \ddot{a}_{30} - {}_{30}p_{30} \cdot v^{30} \cdot \ddot{a}_{60} = 26{,}599 - \frac{93456}{99010} \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{30} \cdot 17{,}132 \approx 19{,}94$$

(b)

Die Vertragsänderung findet nach 23 Jahren statt. Das Deckungskapital nach 23 Jahren erhalten wir grundsätzlich über Formel (6.8) (S.91), wobei wieder zu berücksichtigen ist, dass die Dauer der Versicherung und die Dauer der Prämienzahlung unterschiedlich sind.

$$\begin{aligned} {}_{23}V_{30,(35 \text{ bzw. } 30)} &= 100000 \cdot A_{30+23,\mathbf{35}-23} - N \cdot \ddot{a}_{30+23,\mathbf{30}-23} = \\ &= 100000 \cdot A_{53,12} - N \cdot \ddot{a}_{53,7} \approx \underline{\underline{59090{,}39\ €}} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} A_{53,12} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{53,12} = 1 - d \cdot \left(\ddot{a}_{53} - \frac{l_{65}}{l_{53}} \cdot v^{12} \cdot \ddot{a}_{65}\right) = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{1{,}03}\right) \cdot \left(19{,}891 - \frac{90645}{96139} \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{12} \cdot 14{,}899\right) \approx 0{,}7076 \\ \ddot{a}_{53,7} &= \ddot{a}_{53} - \frac{l_{60}}{l_{53}} \cdot v^{7} \cdot \ddot{a}_{60} = 19{,}891 - \frac{93456}{96139} \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{7} \cdot 17{,}132 \approx 6{,}3499 \end{aligned}$$

(c)

Die Rente hat eine Laufzeit von neun Jahren. Bezugspunkt ist der Zeitpunkt der Vertragsänderung. Auf der linken Seite der Gleichung steht der Barwert der Rente, auf der rechten

Seite das zu diesem Zeitpunkt zur Verfügung stehende Deckungskapital plus der erwartete Barwert der noch zu zahlenden Prämienleistung (die Laufzeit beträgt noch sieben Jahre, denn dann ist sie 60 Jahre alt).
Wir erhalten somit:

$$R \cdot \ddot{a}_{53,9} = {}_{23}V_{30,(35 \text{ bzw. } 30)} + N \cdot \ddot{a}_{53,7}$$

$$R = \frac{{}_{23}V_{30,(35 \text{ bzw. } 30)} + N \cdot \ddot{a}_{53,7}}{\ddot{a}_{53,9}} = \frac{59090{,}40 + 1838{,}12 \cdot 6{,}34986}{7{,}9036} \approx \underline{\underline{8953,15 \text{ €}}}.$$

Nebenrechnung:

$$\ddot{a}_{53,9} = \ddot{a}_{53} - \frac{l_{62}}{l_{53}} \cdot v^9 \cdot \ddot{a}_{62} = 19,891 - \frac{92461}{96139} \cdot \left(\frac{1}{1{,}03}\right)^9 \cdot 16,263 \approx 7,9036$$

◇

Beispiel 6.6

Wir betrachten eine Erlebensversicherung einer 30-jährigen Frau, die bis zum Alter von 75 Jahren laufen soll. Die Versicherungssumme beträgt $\kappa = 10000$ €. Die jährlichen vorschüssigen Prämienzahlungen sollen bis zum Alter von 60 Jahren erfolgen.
Im Alter von 50 Jahren beschließt die Frau (da sie feststellt, dass sie doch keine so gute Pensionsvorsorge hatte) die Erlebensversicherung in eine lebenslängliche vorschüssige Rente ab dem Alter von 60 Jahren umwandeln zu lassen. Die Prämienzahlungen bleiben dazu unverändert. Es wird mit $i = 3,5\%$ gerechnet.

(a) Wie hoch ist die Jahresprämie im Erlebensfall?

(b) Wie groß ist das Deckungskapital vor der Vertragsänderung?

(c) Wie hoch ist die jährliche Rente, die die Frau ab 60 erhält?

Lösung:

(a)

Die Dauer der Versicherung (45 Jahre) und jene der Prämienzahlungen (30 Jahre) sind unterschiedlich lang.
Für die Jahresprämie N erhalten wir:

$$N = \frac{A^I_{30,45}}{\ddot{a}_{30,30}} \cdot 10000 = \frac{0{,}1691}{18{,}81} \cdot 10000 \approx \underline{\underline{89,90 \text{ €}}}.$$

Nebenrechnung:

$$A^I_{30,45} = v^{45} \cdot {}_{45}p_{30} = (\tfrac{1}{1{,}035})^{45} \cdot \tfrac{78724}{99010} \approx 0,1691 \qquad \text{Formel (5.3) (S.56) für } \kappa = 1$$

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{30,30} &= \ddot{a}_{30} - \tfrac{l_{60}}{l_{30}} \cdot v^{30} \cdot \ddot{a}_{60} = && \text{Formel (5.17) (S.73)} \\ &= 24,274 - \tfrac{93456}{99010} \cdot (\tfrac{1}{1{,}035})^{30} \cdot 16,252 \approx 18,81 \end{aligned}$$

(b)

Vertragsänderung nach 20 Jahren:

$${}_{20}V^I_{30,(45 \text{ bzw. } 30)} = 10000 \cdot A^I_{30+20,\mathbf{45}-20} - N \cdot \ddot{a}_{30+20,\mathbf{30}-20} = 10000 \cdot A^I_{50,25} - N \cdot \ddot{a}_{50,10} \approx \underline{\underline{2672,34 \text{ €}}}$$

Nebenrechnung:

$$A^I_{50,25} = v^{25} \cdot {}_{25}p_{50} = (\tfrac{1}{1{,}035})^{25} \cdot \tfrac{78724}{96953} \approx 0,3436$$

$$\ddot{a}_{50,10} = \ddot{a}_{50} - \tfrac{l_{60}}{l_{50}} \cdot v^{10} \cdot \ddot{a}_{60} = 19,599 - \tfrac{93456}{96953} \cdot (\tfrac{1}{1{,}035})^{10} \cdot 16,252 \approx 8,493$$

(c)

Bezugspunkt ist der Zeitpunkt der Vertragsänderung (sie ist zu diesem Zeitpunkt 50 Jahre alt). Auf der linken Seite steht der Barwert der Rente (allerdings um zehn Jahre abgezinst, da die Rentenzahlung erst ab 60 Jahren erfolgen), auf der rechten Seite das zum Bezugszeitpunkt zur Verfügung stehende Deckungskapital plus der erwartete Barwert der noch zu zahlenden Prämienleistung (Laufzeit noch zehn Jahre).

$$R \cdot v^{10} \cdot {}_{10}p_{50} \cdot \ddot{a}_{60} = {}_{20}V^I_{30,(45 \text{ bzw. } 30)} + N \cdot \ddot{a}_{50,10}$$

$$R = \frac{2672{,}34 + 89{,}90 \cdot 8{,}493}{(\frac{1}{1{,}035})^{10} \cdot \frac{93456}{96953} \cdot 16{,}252} \approx \underline{\underline{309,38 \text{ €}}}$$

◇

Beispiel 6.7

Eine 60-jährige Frau verkauft ihr Haus und erhält dafür eine konstante, jährliche, vorschüssige Rente der Höhe 12000 € für 20 Jahre. Diese Zahlungen sind nicht an das Leben der Frau gebunden und werden im Falle ihres Todes innerhalb des Versicherungszeitraumes an ihre Hinterbliebenen ausbezahlt. Es wird mit $i = 2,5\%$ gerechnet.

(a) Bestimmen Sie den momentanen Wert dieses Hauses!

(b) Die Frau schließt mit diesen Rentenzahlungen als Prämie eine gemischte Versicherung mit einer Laufzeit von 20 Jahren ab. Bestimmen Sie die Höhe der Versicherungssumme $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, wenn die Prämienzahlungen wie üblich nur bis zum Ende der

Versicherung bzw. bis zum Tod erfolgen und etwaige Zahlungen gegebenenfalls an die Erben der Frau gehen!

(c) Nach fünf Jahren möchte die Frau stattdessen lieber eine jährliche vorschüssige Leibrente bis zu ihrem Tod erhalten. Bestimmen Sie das Nettodeckungskapital vor dieser Änderung!

(d) Bestimmen Sie weiters die Höhe dieser Leibrente nach der Vertragsänderung!

Lösung:

(a)

Der momentane Wert des Hauses entspricht bei Vertragsabschluss dem Barwert der Rentenzahlungen mit Laufzeit $n = 20$ Jahre.

$\ddot{B}_{20} = 12000 \cdot \frac{1-v^{20}}{1-v} = 12000 \cdot \frac{1-(\frac{1}{1,025})^{20}}{1-\frac{1}{1,025}} \approx \underline{\underline{191747\text{ €}}}$ (Formel (4.17), S.28)

(b)

$12000 = \kappa \cdot \frac{A_{60,20}}{\ddot{a}_{60,20}} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = 12000 \cdot \frac{\ddot{a}_{60,20}}{A_{60,20}} \approx \underline{\underline{273980\text{ €}}}$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{60,20} &= \ddot{a}_{60} - \tfrac{l_{80}}{l_{60}} \cdot v^{20} \cdot \ddot{a}_{80} = 18,094 - \tfrac{66317}{93456} \cdot (\tfrac{1}{1,025})^{20} \cdot 7,918 \approx 14,67 \\ A_{60,20} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{60,20} = 1 - (1 - \tfrac{1}{1,025}) \cdot 14,67 \approx 0,6423 \end{aligned}$$

(c)

Vertragsänderung nach fünf Jahren:

${}_5V_{60,20} = \kappa \cdot A_{65,15} - 12000 \cdot \ddot{a}_{65,15} \approx \underline{\underline{57035,47\text{ €}}}$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{65,15} &= \ddot{a}_{65} - \tfrac{l_{80}}{l_{65}} \cdot v^{15} \cdot \ddot{a}_{80} = 15,612 - \tfrac{66317}{90645} \cdot (\tfrac{1}{1,025})^{15} \cdot 7,918 \approx 11,61 \\ A_{65,15} &= 1 - d \cdot \ddot{a}_{65,15} = 1 - (1 - \tfrac{1}{1,025}) \cdot 11,61 \approx 0,717 \end{aligned}$$

(d)

Die Leibrentenzahlung startet mit ihrem 65sten Lebensjahr. Diesen Zeitpunkt wählen wir als Bezugspunkt.

$R \cdot \ddot{a}_{65} = {}_5V_{60,20} + 12000 \cdot \ddot{a}_{65,15}$

$R = \frac{57035,5+12000 \cdot 11,61}{15,612} \approx \underline{\underline{12578,90\text{ €}}}$

◇

Beispiel 6.8

Ein 50-jähriger Mann schließt eine gemischte Versicherung mit 25-jähriger Laufzeit ab. Es wird mit $i = 4\%$ gerechnet. Die Versicherungssumme betrage sowohl im Erlebens- als auch im Ablebensfall 20000 € (es ist also $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = 20000$ €). Die Prämienzahlungen erfolgen jährlich vorschüssig während der gesamten Laufzeit.
Der Vertrag enthält eine Klausel, dass nach zehn Jahren die Höhe der Prämien an den dann aktuellen Rechnungszins adaptiert wird. Das bedeutet, dass die Prämie zwar anfangs mit dem Zinssatz zu Vertragsabschluss kalkuliert wird; nach zehn Jahren wird der Vertrag allerdings automatisch konvertiert in eine Versicherung desselben Typs, allerdings mit neuem Zinssatz. Um dieselben Auszahlungen zu gewährleisten, muss damit die Prämie angepasst werden.

(a) Bestimmen Sie die jährliche Prämie dieser Versicherung ohne die Zinsklausel, sowie das Deckungskapital direkt vor der automatischen Anpassung!
(b) Der aktuelle Zinssatz bei der automatischen Vertragsänderung beträgt $i = 2,5\%$. Bestimmen Sie die neue Höhe der Prämien!

Lösung:

(a) $x = 50$, $n = 25$, $v = \frac{1}{1{,}04}$ und $\kappa = 20000$.

$$N = \kappa \cdot \frac{A_{50,25}}{\ddot{a}_{50,25}} = 20000 \cdot \frac{0{,}4328}{14{,}75} \approx \underline{\underline{587 \text{ €}}}$$

Nebenrechnung:

$$\ddot{a}_{50,25} = \ddot{a}_{50} - \frac{l_{75}}{l_{50}} \cdot v^{25} \cdot \ddot{a}_{75} = 16,733 - \frac{61396}{93975} \cdot (\tfrac{1}{1{,}04})^{25} \cdot 8,105 \approx 14,75 \qquad \text{Formel (5.17), S.73}$$

$$A_{50,25} = 1 - (1 - \tfrac{1}{1{,}04}) \cdot \ddot{a}_{50,25} \approx 0,4328 \qquad \text{Formel (5.10), S.65}$$

$${}_{10}V_{50,25} = \kappa \cdot A_{60,15} - N \cdot \ddot{a}_{60,15} = 20000 \cdot 0,599 - 587 \cdot 10,427 \approx \underline{\underline{5858,27 \text{ €}}}$$

Nebenrechnung:

$$\ddot{a}_{60,15} = \ddot{a}_{60} - \frac{l_{75}}{l_{60}} \cdot v^{15} \cdot \ddot{a}_{75} = 13,598 - \frac{61396}{87141} \cdot (\tfrac{1}{1{,}04})^{15} \cdot 8,105 \approx 10,427 \qquad \text{Formel (5.17), S.73}$$

$$A_{60,15} = 1 - (1 - \tfrac{1}{1{,}04}) \cdot \ddot{a}_{60,15} \approx 0,599 \qquad \text{Formel (5.10), S.65}$$

(b) $i = 2,5\%$.

Bezogen wird nun auf den Zeitpunkt, zu dem der Mann 60 Jahre alt ist. Auf der linken Seite steht der Barwert der Versicherungsleistung für diese Versicherung mit der verbleibenden Laufzeit von 15 Jahren. Auf der rechten Seite steht das zum Bezugspunkt zur Verfügung stehende Deckungskapital plus der erwartete Barwert der noch zu zahlenden Prämienleistungen (die Laufzeit beträgt noch 15 Jahre), wobei die Höhe eben dieser Prämien gesucht ist.

Wir erhalten:

$20000 \cdot A_{60,15} = {}_{10}V_{50,25} + P \cdot \ddot{a}_{60,15}$

(wobei für $A_{60,15}$ und $\ddot{a}_{60,15}$ jetzt $i = 2,5\%$ gilt)

$P = \frac{20000 \cdot A_{60,15} - {}_{10}V_{50,25}}{\ddot{a}_{60,15}} = \frac{20000 \cdot 0{,}7224 - 5858{,}27}{11{,}381} \approx \underline{\underline{754,74\ €}}$

Nebenrechnung:

$\ddot{a}_{60,15}$	$= \ddot{a}_{60} - \frac{l_{75}}{l_{60}} \cdot v^{15} \cdot \ddot{a}_{75} = 15,652 - \frac{61396}{87141} \cdot (\frac{1}{1{,}025})^{15} \cdot 8,779 \approx 11,38$	Formel (5.17), S.73
$A_{60,15}$	$= 1 - (1 - \frac{1}{1{,}025}) \cdot \ddot{a}_{60,15} \approx 0,7224$	Formel (5.10), S.65

◇

7. Versicherungen auf mehrere Leben

In vielen Versicherungsgesellschaften kann man auch Versicherungen auf *mehrere Leben* abschließen. Es können also in einem Vertrag zwei (theoretisch auch drei oder mehr) Personen versichert werden. Meist wird bei solchen Tarifformen die Versicherungssumme beim Eintreten des Todes der zuerst sterbenden versicherten Person fällig.
Je nach Versicherungsvertrag kann die Versicherungsnehmereigenschaft bei *einer* Person oder bei den versicherten Personen *gemeinsam* liegen. Das bedeutet also, dass unterschieden wird, ob die versicherten Personen auch gemeinsame Versicherungsnehmer sind oder nicht (Gerber, 1986, S.80 und Kurzendorfer, 2000, Kap.3.1.3, S.1).

Um die Sachlage zu verdeutlichen sind hier zwei konkrete Beispiele angeführt:

- Eine 65-jährige Frau schließt eine gemischte Lebensversicherung auf zwei Leben ab, bei der vertraglich festgehalten wird, dass im Falle ihres Ablebens ihrem 20-jährigen Enkel die vereinbarte Versicherungssumme ausbezahlt wird. Sollte sie die Laufzeit von $n = 15$ Jahren erleben, würde sie die Versicherungssumme, die für den Erlebensfall vereinbart wurde, erhalten.

  Es liegt hier eine Versicherung vor, bei der die versicherten Personen (die Frau und ihr Enkel) *nicht* gemeinsam Versicherungsnehmer sind. Die Versicherungsnehmereigenschaft liegt bei der Frau. Man spricht in so einem Fall von einer „Versicherung zweier Leben“.

- Ein Ehepaar schließt eine „Risikolebensversicherung auf den ersten Tod eines Ehepartners“ ab, bei der vertraglich festgehalten wird, dass im Falle des Ablebens eines Ehepartners dem anderen Ehepartner die vereinbarte Versicherungssumme ausbezahlt wird. (*Bemerkung:* Falls beide gleichzeitig sterben sollten, wird eine Sonderklausel vereinbart, bei der die Versicherungssumme an eine dritte Person ausbezahlt wird.)

Es liegt hier eine Versicherung vor, bei der die versicherten Personen (die Ehepartner) gemeinsam Versicherungsnehmer sind. Die Versicherungsnehmereigenschaft liegt bei beiden Eheleuten. Man spricht hier von einer „Versicherung auf verbundene Leben".

Anwendungsbereiche von Versicherungen auf verbundene Leben sind neben Versicherungen für Ehepartner, Versicherungen für Partner in einer nicht ehelichen Lebensgemeinschaft, sowie Teilhabeversicherungen auf das Leben von Gesellschaftern einer Personengesellschaft.

Meist wird die Versicherung auf mehrere Leben in Form einer gemischten Versicherung (Todes- und Erlebensfall) angeboten. Es gibt aber auch Versicherungspolizzen, bei denen als Grundform temporäre Todesfallversicherungen, Erlebensversicherungen auf festen Termin oder auch Mischformen zwischen Versicherungen auf Todes- und Erlebensfall (Leistung bei Ableben der ersten versicherten Person) und auf Versicherungen auf festen Termin angeboten werden. Weiters findet man unter anderem auch aufgeschobene Rentenversicherungen in der weitgefächerten Palette von Versicherungsarten.
Es gibt bei Versicherungen auf verbundene Leben teilweise auch die Möglichkeit über eine Zusatzklausel den Vertrag bis zum Ableben der überlebenden Person auf Risikobasis weiter bestehen zu lassen oder der überlebenden Person ein Recht zum Abschluss einer neuen Versicherung einzuräumen (Kurzendorfer, 2000, Kap.3.1.3).

Für die mathematischen Berechnungen wollen wir uns zunächst auf den Fall der Versicherung auf *zwei* Leben beschränken. Der allgemeine Fall auf die Versicherung auf m Leben ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$) lässt sich davon ableiten.
Wir gehen davon aus, dass die Ereignisse „Person $\mathscr{A}$ überlebt t Jahre" und „Person $\mathscr{B}$ überlebt t Jahre" stochastisch unabhängig sind. Eine stochastische Abhängigkeit der Todesereignisse von $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ ist zwar nicht auszuschließen, würde aber die Formeln verkomplizieren. [Für einen solchen Fall (beispielsweise beiderseitiger Unfalltod, der auf das gleiche Unfallereignis zurückzuführen ist und beide Versicherten innerhalb von vierzehn Tagen an den Unfallfolgen sterben) gibt es Sonderklauseln.]
Wegen der angenommenen stochastischen Unabhängigkeit der Todesereignisse von $\mathscr{A}$ (das Eintrittsalter von $\mathscr{A}$ bei Versicherungseintritt sei x) und $\mathscr{B}$ (das Eintrittsalter von $\mathscr{B}$ bei Versicherungseintritt sei y) ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ die nächsten t Jahre überleben, gegeben durch $\quad {}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y \quad$ (Schiller, 2008, S.59).

${}_tp_{xy}$ wird auch als t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit für ein Paar bezeichnet.
Davon lassen sich folgende Wahrscheinlichkeiten ableiten:

- ${}_tq_{xy} \quad = 1 - {}_tp_{xy} = 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \quad \ldots$ t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit für mindestens einen Partner.

${}_tq_{xy}$ bezeichnet also die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von t Jahren mindestens eine Person stirbt.

- ${}_tq_{\overline{xy}} \quad = {}_tq_x \cdot {}_tq_y \quad \ldots$ t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit für ein Paar.

${}_tq_{\overline{xy}}$ bezeichnet also die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von t Jahren beide Personen sterben.
Wieder ist ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x$ bzw. ${}_tq_y = 1 - {}_tp_y$.

- $$\begin{aligned} {}_tp_{\overline{xy}} &= 1 - {}_tq_{\overline{xy}} = 1 - {}_tq_x \cdot {}_tq_y = 1 - (1 - {}_tp_x) \cdot (1 - {}_tp_y) = \\ &= 1 - 1 + {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y = \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} \quad \ldots \end{aligned}$$ t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit für mindestens einen Partner.

${}_tp_{\overline{xy}}$ bezeichnet also die Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren noch mindestens eine Person lebt.

„Mindestens eine Person lebt“ bedeutet also, dass entweder Person $\mathscr{A}$ lebt oder Person $\mathscr{B}$ lebt oder $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ leben. Dieser Sachverhalt lässt sich durch folgendes VENN-Diagramm graphisch darstellen:

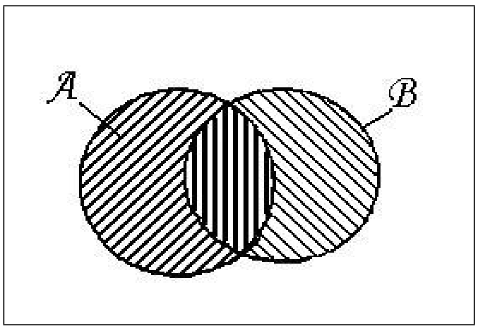

Abbildung 7.1.: VENN-Diagramm: „mindestens eine Person lebt“

Bemerkung: Das Resultat ${}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$ erinnert an die *klassische* „Ein- und Ausschaltformel", wie wir sie von der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

bzw. für drei Ereignisse:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

usw.

- Die Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren noch genau eine Person lebt, bezeichnet man mit ${}_tp^1_{xy}$:

$$\begin{aligned}
{}_tp^1_{xy} &= 1 - {}_tp_{xy} - {}_tq_{\overline{xy}} \quad = \quad 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y - {}_tq_x \cdot {}_tq_y = \\
&= 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y - (1 - {}_tp_x) \cdot (1 - {}_tp_y) = \\
&= 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y - 1 + {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y = \\
&= {}_tp_x + {}_tp_y - 2 \cdot {}_tp_{xy}.
\end{aligned}$$

„Genau eine Person lebt" bedeutet also, dass entweder Person $\mathscr{A}$ lebt oder Person $\mathscr{B}$ lebt. Das dazugehörige VENN-Diagramm hat die folgende Gestalt:

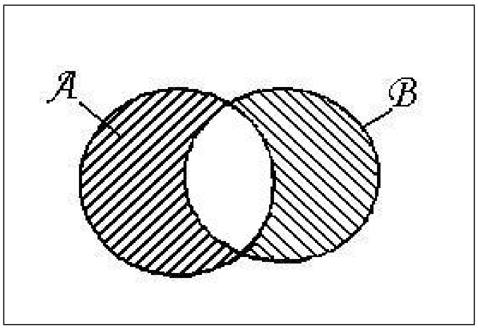

Abbildung 7.2.: VENN-Diagramm: „genau eine Person lebt"

Die Schnittmenge ist hier also nicht enthalten.

Bemerkung: Das Resultat ${}_tp_x + {}_tp_y - 2 \cdot {}_tp_{xy}$ ist eine *spezielle* „Ein- und Ausschaltformel":

$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$

bzw. für drei Ereignisse:

$P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + 2 \cdot P(A \cap B \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - 2 \cdot [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + 3 \cdot P(A \cap B \cap C)$

usw.

Die angeführten Wahrscheinlichkeiten lassen sich auf die Versicherung auf m Leben ($m \in \mathbb{N}, m \geq 2$), wobei $x_1, x_2, ..., x_m$ die Eintrittsalter der Personen $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, ... , $\mathscr{A}_m$ sind, wie folgt verallgemeinern:

${}_tp_{x_1x_2...x_m}$	$= \prod_{k=1}^{m} \ {}_tp_{x_k}$	...	t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit für die m Personen
${}_tq_{x_1x_2...x_m}$	$= 1 - {}_tp_{x_1x_2...x_m}$	...	t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit für mindestens eine Person
${}_tq_{\overline{x_1x_2...x_m}}$	$= \prod_{k=1}^{m} \ {}_tq_{x_k}$	...	t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit für die m Personen
${}_tp_{\overline{x_1x_2...x_m}}$	$= 1 - {}_tq_{\overline{x_1x_2...x_m}}$	...	t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit für mindestens eine Person
${}_tp^1_{x_1x_2...x_m}$		...	Wahrscheinlichkeit, dass in t Jahren noch genau eine Person lebt

Dieser zuletzt angeführte Zustand wird als der *„last-survivor status“* oder als *„der Zustand des letzten Lebens“* bezeichnet und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit kann mit der oben angeführten *speziellen* „Ein- und Ausschaltformel“, bei der die Schnittmengen nicht enthalten sind, für m Leben wie folgt berechnet werden:

$$m = 2: \quad {}_tp^1_{xy} = {}_tp_x + {}_tp_y - 2 \cdot {}_tp_{xy} \text{ (siehe vorher)}$$

$$m = 3: \quad {}_tp^1_{xyz} = {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - 2 \cdot ({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}) + 3 \cdot {}_tp_{xyz}$$

$$m = 4: \quad {}_tp^1_{x_1x_2x_3x_4} = {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + {}_tp_{x_3} + {}_tp_{x_4} - 2 \cdot (\underbrace{{}_tp_{x_1x_2} + ... + {}_tp_{x_3x_4}}_{6 \text{ Summanden}}) + \\ + 3 \cdot (\underbrace{{}_tp_{x_1x_2x_3} + ... + {}_tp_{x_2x_3x_4}}_{4 \text{ Summanden}}) - 4 \cdot {}_tp_{x_1x_2x_3x_4}$$

Verallgemeinernd gilt für $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$:

$$\begin{aligned} {}_tp^1_{x_1x_2...x_m} &= {}_tp_{x_1} + {}_tp_{x_2} + ... + {}_tp_{x_m} - 2 \cdot (\underbrace{{}_tp_{x_1x_2} + ... + {}_tp_{x_{m-1}x_m}}_{\binom{m}{2} \text{ Summanden}}) + \\ &+ 3 \cdot (\underbrace{{}_tp_{x_1x_2x_3} + ... + {}_tp_{x_{m-2}x_{m-1}x_m}}_{\binom{m}{3} \text{ Summanden}}) - ... \pm \\ &\pm (-1)^{k+1} \cdot k \cdot (\underbrace{{}_tp_{x_1x_2...x_k} + ... + {}_tp_{x_{m-k+1}x_{m-k+2}...x_m}}_{\binom{m}{k} \text{ Summanden}}) \pm ... \pm \\ &\pm (-1)^{m+1} \cdot m \cdot {}_tp_{x_1x_2...x_m} \end{aligned}$$

Es erfolgt bei der Berechnung also eine Summation über alle $\binom{m}{k}$ Möglichkeiten innerhalb der einzelnen Teilsummen.

Beweis:

$$m=2: \quad {}_tp^1_{xy} = 1-(ll)-(tt) \quad \text{(S.107)} \quad \text{oder über}$$

$$\begin{aligned}{}_tp^1_{xy} &= (lt)+(tl) = {}_tp_x \cdot {}_tq_y + {}_tq_x \cdot {}_tp_y = {}_tp_x \cdot (1-{}_tp_y) + (1-{}_tp_x)\cdot {}_tp_y = \\ &= {}_tp_x - {}_tp_x \cdot {}_tp_y + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y = {}_tp_x + {}_tp_y - 2\cdot {}_tp_{xy}\end{aligned}$$

$$m=3: \quad (i) \quad \begin{aligned}{}_tp^1_{xyz} &= (ltt)+(tlt)+(ttl) = \\ &= {}_tp_x \cdot {}_tq_y \cdot {}_tq_z + {}_tq_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tq_z + {}_tq_x \cdot {}_tq_y \cdot {}_tp_z = \\ &= {}_tp_x \cdot (1-{}_tp_y)\cdot(1-{}_tp_z) + (1-{}_tp_x)\cdot {}_tp_y \cdot (1-{}_tp_z) + \\ &\quad + (1-{}_tp_x)\cdot(1-{}_tp_y)\cdot {}_tp_z = \\ &= {}_tp_x \cdot (1-{}_tp_y-{}_tp_z+{}_tp_{yz}) + {}_tp_y \cdot (1-{}_tp_x-{}_tp_z+{}_tp_{xz}) + \\ &\quad + {}_tp_z \cdot (1-{}_tp_x-{}_tp_y+{}_tp_{xy}) = \\ &= {}_tp_x - {}_tp_{xy} - {}_tp_{xz} + {}_tp_{xyz} + {}_tp_y - {}_tp_{xy} - {}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} + \\ &\quad + {}_tp_z - {}_tp_{xz} - {}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} = \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - 2\cdot {}_tp_{xy} - 2\cdot {}_tp_{xz} - 2\cdot {}_tp_{yz} + 3\cdot {}_tp_{xyz} = \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - 2\cdot({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}) + 3\cdot {}_tp_{xyz}\end{aligned}$$

(ii) Auch der Ansatz der Rechnung über die Gegenwahrscheinlichkeit führt letztendlich zum eben gezeigten Ergebnis:

$$\begin{aligned}{}_tp^1_{xyz} &= 1-(lll)-(ttt)-(tll)-(ltl)-(llt) = \\ &= 1 - {}_tp_{xyz} - {}_tq_{\overline{xyz}} - {}_tq_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tp_z - {}_tp_x \cdot {}_tq_y \cdot {}_tp_z - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tq_z = \\ &= 1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot {}_tp_z - (1-{}_tp_x)\cdot(1-{}_tp_y)\cdot(1-{}_tp_z) - \\ &\quad -(1-{}_tp_x)\cdot {}_tp_y \cdot {}_tp_z - {}_tp_x \cdot (1-{}_tp_y)\cdot {}_tp_z - {}_tp_x \cdot {}_tp_y \cdot (1-{}_tp_z) = \\ &= 1 - {}_tp_{xyz} - (1-{}_tp_x-{}_tp_y+{}_tp_{xy}-{}_tp_z+{}_tp_{xz}+{}_tp_{yz}-{}_tp_{xyz}) - \\ &\quad -{}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} - {}_tp_{xz} + {}_tp_{xyz} - {}_tp_{xy} + {}_tp_{xyz} = \\ &= 1 - {}_tp_{xyz} - 1 + {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} + {}_tp_z - {}_tp_{xz} - {}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} - \\ &\quad -{}_tp_{yz} + {}_tp_{xyz} - {}_tp_{xz} + {}_tp_{xyz} - {}_tp_{xy} + {}_tp_{xyz} = \\ &= {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - 2\cdot({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}) + 3\cdot {}_tp_{xyz}\end{aligned}$$

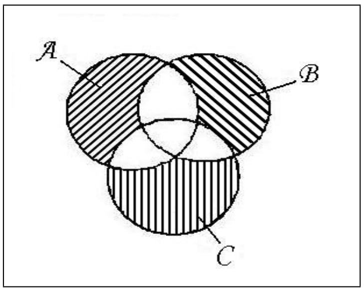

Abbildung 7.3.: zugehörigesVenn-Diagramm

$m = 4$: Dieser Fall kann ebenfalls auf zwei Arten berechnet werden:

(i) $\quad {}_tp^1_{x_1x_2x_3x_4} = (lttt) + (tltt) + (ttlt) + (tttl)$

(ii) über die Gegenwahrscheinlichkeit

Wie man nachrechnen kann, erhält man als Ergebnis den oben angeführten Ausdruck für $m = 4$.

Der allgemeine Ansatz für $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ ist demnach:

m: $\quad {}_tp^1_{x_1x_2...x_m} = (ltt...t) + (tlt...t) + (ttl...t) + ... + (ttt...l),$

was durch entsprechendes Multiplizieren und Zusammenfassen der einzelnen Summanden schließlich auf das obige Ergebnis führt.

Die Überlegung dazu ist für größere m im Prinzip also gleich wie bei den aufgelisteten Fällen $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$.

Man betrachtet die Vereinigungsmenge und subtrahiert jene Schnittmengen, die für das Ergebnis nicht relevant sind, wobei man darauf achten muss, dass man die entsprechenden Schnittmengen nicht doppelt bzw. dreifach bzw n-fach ($n \in \mathbb{N}$) abzieht. Durch entsprechendes Addieren werden die zu oft abgezogenen Schnittmengen quasi „zurückgegeben“.

Beispielsweise gilt für den Fall $m = 3$:

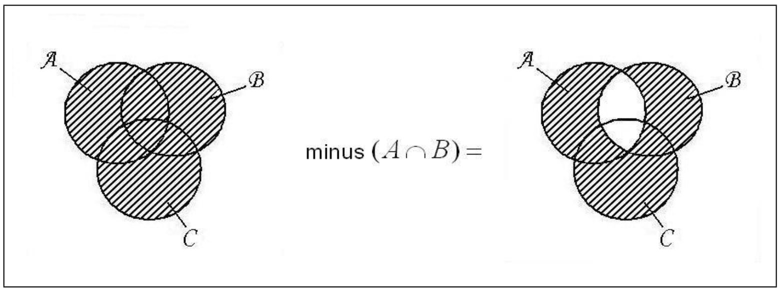

Abbildung 7.4.: entsprechendes Venn-Diagramm

Zieht man nun von Abbildung 7.4 noch $(A \cap C)$ und $(B \cap C)$ ab, so wurde $(A \cap B \cap C)$ zweimal zuviel abgezogen. Durch entsprechende Addition fließt $(A \cap B \cap C)$ wieder in die Gleichung ein. Somit erhalten wir:

$P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + 2 \cdot P(A \cap B \cap C) =$

$= P(A) + P(B) + P(C) - 2 \cdot [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + 3 \cdot P(A \cap B \cap C).$

Bei der Berechnung mittels dieser speziellen Ein- und Ausschaltformel erfolgt auch bei größerem m eine Summation über alle $\binom{m}{k}$ Möglichkeiten innerhalb der einzelnen Teilsummen. Die Koeffizienten $1, -2, 3, -4, ..., (-1)^{m+1} \cdot m$ $(m \in \mathbb{N}, m \geq 2)$ kommen durch das Multiplizieren und korrekte Zusammmenfassen der einzelnen Summanden zustande.

Aber nun wieder zurück zum Fall der Versicherung auf zwei Leben.
Die NEP für Versicherungen auf den ersten Tod erhält man durch analoge Überlegungen wie in den früheren Kapiteln für $\kappa = 1$ über die Formel

$$A_{xy} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^{k+1} {}_kp_{xy} \cdot q_{x+k,y+k},$$

und die NEP für die sogenannten *Verbindungsrenten* ist gegeben durch

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k {}_kp_{xy}.$$

Sinngemäß gilt auch die Formel $1 = d \cdot \ddot{a}_{xy} + A_{xy}$ in Analogie zu der Formel (5.7) (S.64) (bzw. (5.10)) (S.65) aus Kapitel 5.2 (Gerber, 1986, S.81).

Natürlich können auch diese Formeln auf den Fall für die Versicherung auf m Leben $(m \in \mathbb{N}, m \geq 2)$ entsprechend verallgemeinert werden. Darauf wollen wir hier aber nicht mehr eingehen.

8. Der Einbezug der Kosten

Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, ist die Abwicklung einer Versicherung mit gewissen Kosten verbunden. Im Zusammenhang mit Versicherungspolizzen werden die entstehenden Kosten meist möglichst „gerecht“ in das Modell eingebaut.

Wir haben in Kapitel 3 zwischen *Abschlusskosten*, *Inkassokosten* und *Verwaltungskosten* unterschieden (S.14).

i) Für die *Abschlusskosten* wird meist ein einmaliger Betrag, der proportional zur versicherten Summe ist, verrechnet. Abschlusskosten wollen wir im Folgenden als α-Kosten bezeichnen, den entsprechenden Kostensatz nennen wir α. Wie der Name schon sagt, handelt es sich um Kosten, die nur dann anfallen, wenn es zum Abschluss eines Vertrags kommt.

ii) *Inkassokosten* (oder β-Kosten) sind proportional zu der (noch zu definierenden) ausreichenden Prämie (Kapitel 8.1). Den entsprechenden Satz bezeichnen wir mit β.

iii) *Verwaltungskosten* (γ-Kosten) werden für die ganze Versicherungsdauer jeweils zu Jahresbeginn budgetiert. Wir nehmen an, dass die γ-Kosten proportional zur Versicherungssumme sind. Den entsprechenden Satz bezeichnen wir mit γ.

Es sei hier festgehalten, dass die Annahmen über die Proportionalität der Kosten willkürlich getroffen wurden. Natürlich spielen auch Komponenten, welche von der Höhe der Polizze unabhängige Fixkosten sind, eine Rolle. Die Proportionalitätsfaktoren α, β und γ hängen im Allgemeinen von der Art der Versicherung ab (Gerber, 1986, S.100f und [24]).

8.1. Die ausreichende Prämie

Unter der ausreichenden Prämie P^a versteht man die Jahresprämie, welche im Erwartungswert gerade ausreicht um die versicherte Leistung *und* die anfallenden Kosten zu finanzieren.
Bemerkung: In der Literatur wird als Synonym für die *ausreichende Prämie* auch der Begriff *Bruttoprämie* verwendet.
Es ist

$$P^a = P + P^\alpha + P^\beta + P^\gamma, \tag{8.1}$$

wobei P die jährliche Nettoprämie bezeichnet und P^α, P^β und P^γ für die entsprechenden Kostenzuschläge (also für die entsprechenden anteilsmäßigen Prämienzahlungen an den einzelnen Kosten) stehen (Gerber, 1986, S.101 und [25]).

Im Gegensatz zur induktiven Herleitung von Formel (6.8) (Seite 91) [Nettodeckungskapital einer gemischten Versicherung] möchten wir für die Erklärung der folgenden Formel (8.2) den deduktiven Erklärungsansatz wählen.
Es wird also zuerst die Formel angeschrieben und anschließend erläutert.

Zunächst betrachten wir eine gemischte Versicherung ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa = 1$) mit einer Laufzeit von n Jahren. Die versicherte Person hat beim Eintritt in die Versicherung das Alter x. Die Prämienzahlungen erfolgen jährlich vorschüssig. Für die ausreichende Prämie $P^a_{x,n}$ gilt:

$$\boxed{P^a_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,n} = A_{x,n} + \alpha + \beta \cdot P^a_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,n} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n}} \tag{8.2}$$

Durch die ausreichende Prämie müssen also neben der Versicherungssumme auch die einzelnen Kosten (α-, β- und γ-Kosten) anteilsmäßig gedeckt werden.

Erklärung von Formel (8.2):

Linke Seite:
Die ausreichende Prämie P^a kann man quasi als vorschüssige temporäre Rente der Dauer n Jahre auffassen. Schließlich wird sie jährlich vorschüssig eingezahlt. Der Barwert der ausreichenden Prämie $P^a_{x,n}$ ist dann:

$$Y = \begin{cases} P^a_{x,n} \cdot \frac{1-v^{K+1}}{1-v} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ P^a_{x,n} \cdot \frac{1-v^n}{1-v} & \text{für} \quad K \geq n \end{cases}$$

(siehe Kapitel 5.2.2, S.64).

Für die Nettoeinmalprämie von Y erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} P^a_{x,n} \cdot \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + P^a_{x,n} \cdot \frac{1-v^n}{1-v} \cdot {}_np_x = \\ &= P^a_{x,n} \cdot (\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-v^{k+1}}{1-v} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \frac{1-v^n}{1-v} \cdot {}_np_x) \overset{(4.17)}{=} \\ &= P^a_{x,n} \cdot (\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \ddot{a}_n \cdot {}_np_x) \overset{(5.9)}{=} P^a_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,n}. \end{aligned}$$

Rechte Seite:

Bei der Erklärung der rechten Seite der Gleichung wollen wir auf die einzelnen Summanden gesondert eingehen.

- Die Versicherungssumme $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$ wird ebenfalls auf den Barwert bezogen. Der Barwert des Kapitals $\kappa = 1$ ist:

  $$Z = \begin{cases} v^{K+1} & \text{für} \quad K = 0, 1, ..., n-1 \\ v^n & \text{für} \quad K \geq n \end{cases}$$

  (siehe Kapitel 5.1.3, S.57).

  Für die NEP von Z erhalten wir:

  $$E(Z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}}_{A^1_{x,n}\text{(Kapitel 5.1.1 (ii))}} + \underbrace{v^n \cdot {}_np_x}_{A^I_{x,n}\text{(Formel 5.3)}} \overset{(5.4)}{=} A_{x,n}.$$

- Die Abschlusskosten (α-Kosten) sind proportional zur versicherten Summe. Diese ist in unserem Beispiel $\kappa = 1$. Der Proportionalitätsfaktor ist also der entsprechende Kostensatz α. Somit erhalten wir für die α-Kosten: $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

  Da die Abschlusskosten bei Vertragsabschluss bilanziert werden, müssen wir sie weder ab- noch aufzinsen. Der Barwert der Abschlusskosten ist also α.

- Die Inkassokosten (β-Kosten) entstehen *„durch das Einziehen der Prämien“* ([26]) und sind proportional zur ausreichenden Prämie P^a. Der Proportionalitätsfaktor ist der Kostensatz β. Wir erhalten für die Inkassokosten einer gemischten Versicherung:

  $\beta \cdot P^a_{x,n}$, was entsprechend abgezinst (auf den erwarteten Barwert bezogen) mit

  $\beta \cdot P^a_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,n}$ in Formel (8.2) (Seite 113) einfließt.

- Die γ-Kosten umfassen alle inneren Verwaltungskosten, soweit sie *nicht* zum Versicherungsabschluss gehören ([26]). Sie werden auf die gleiche Bezugsgröße wie die α-Kosten bezogen (also in unserem Fall auf die Versicherungssumme), unterscheiden sich von ihnen aber dadurch, dass sie jeweils zu Jahresbeginn budgetiert werden. Wir können sie also wieder als eine vorschüssige temporäre Rente der Dauer n Jahre deuten und müssen daher entsprechend abzinsen um auf den erwarteten Barwert zu kommen. Durch die Proportionalität zur Versicherungssumme $\kappa = 1$ (Proportionalitätsfaktor ist der Kostensatz γ) erhalten wir in unserem Beispiel für die γ-Kosten einer gemischten Versicherung: $\gamma \cdot 1 = \gamma$, was entsprechend abgezinst mit $\gamma \cdot \ddot{a}_{x,n}$ in Formel (8.2) (Seite 113) einfließt.

Beispiel 8.1:

Berechnen Sie mit Hilfe der Leibrenten- und Sterbetafel 2000/02 für Österreich die ausreichende Prämie P^a (jährlich vorschüssig) für eine gemischte Versicherung mit einer Laufzeit von $n = 10$ Jahren für einen 40-jährigen Mann, wenn mit einem Zinssatz von $i = 3\%$ gerechnet wird! Die Versicherungssumme sei $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$, die Abschlusskosten machen 5% der Versicherungssumme aus, die Inkassokosten betragen 1% der ausreichenden Prämie und die Verwaltungskosten 1% der Versicherungssumme.

Lösung:

Abschlusskosten:	$\alpha = 0,05$	somit:	$0,05 \cdot 1 = 0,05$	
Inkassokosten:	$\beta = 0,01$	somit:	$0,01 \cdot P^a_{40,10}$	
			auf den Barwert bezogen:	$0,01 \cdot P^a_{40,10} \cdot \ddot{a}_{40,10}$
Verwaltungskosten:	$\gamma = 0,01$	somit:	$0,01 \cdot 1 = 0,01$	
			auf den Barwert bezogen:	$0,01 \cdot \ddot{a}_{40,10}$

Wir setzen in Formel (8.2) (Seite 113) ein:

$$P^a_{40,10} \cdot \ddot{a}_{40,10} = A_{40,10} + 0,05 + 0,01 \cdot P^a_{40,10} \cdot \ddot{a}_{40,10} + 0,01 \cdot \ddot{a}_{40,10}.$$

Nebenrechnung:

$$\ddot{a}_{40,10} = \ddot{a}_{40} - {}_{10}p_{40} \cdot v^{10} \cdot \ddot{a}_{50} = \ddot{a}_{40} - \frac{l_{50}}{l_{40}} \cdot v^{10} \cdot \ddot{a}_{50} \qquad \text{(Formel (5.17), S.73)}$$

$$\ddot{a}_{40,10} = 22,308 - \frac{93975}{96789} \cdot \left(\frac{1}{1,03}\right)^{10} \cdot 18,840 \approx 8,6968$$

$$A_{40,10} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{40,10} = 1 - (1 - v) \cdot \ddot{a}_{40,10} \qquad \text{(Formel (5.10), S.65)}$$

$$A_{40,10} = 1 - \left(1 - \frac{1}{1,03}\right) \cdot 8,6968 \approx 0,7467$$

Nach entsprechender Umformung von Formel (8.2) (Seite 113) zu

$$P^a_{x,n} = \frac{A_{x,n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x,n}} \tag{8.3}$$

ergibt sich für die ausreichende Prämie $P^a_{40,10}$:

$$P^a_{40,10} = \frac{0,7467 + 0,05 + 0,01 \cdot 8,6968}{(1-0,01) \cdot 8,6968} \approx 0,1026.$$

Bemerkung:

Die Nettoprämie $P_{40,10}$ wäre im Vergleich dazu $\quad P_{40,10} = \frac{A_{40,10}}{\ddot{a}_{40,10}} = \frac{0,7467}{8,6968} \approx 0,08586.$
(Formel (6.3) auf S.76)

Die ausreichende Prämie beträgt hier also ca. 120% der Nettoprämie, exakt:
$0,08586 \cdot 1,1954 \approx 0,1026.$

◇

Wegen $1 = A_{x,n} + d \cdot \ddot{a}_{x,n}$ (Formel (5.10), S.65) können wir nun Formel (8.3) auch wie folgt umformen:

$$P^a_{x,n} = \frac{A_{x,n} + \alpha \cdot (A_{x,n} + d \cdot \ddot{a}_{x,n}) + \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x,n}} = \frac{A_{x,n} + \alpha \cdot A_{x,n} + \alpha \cdot d \cdot \ddot{a}_{x,n} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x,n}} =$$

$$= \frac{(1+\alpha) \cdot A_{x,n}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x,n}} + \frac{(\alpha \cdot d + \gamma) \cdot \ddot{a}_{x,n}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x,n}} \overset{(6.3)}{=} \frac{1+\alpha}{1-\beta} \cdot P_{x,n} + \frac{\alpha \cdot d + \gamma}{1-\beta},$$

und wir kommen so auf einen relativ einfachen Zusammenhang zwischen ausreichender Prämie und jährlicher Nettoprämie.

Indem wir Formel (8.2) (Seite 113) durch $\ddot{a}_{x,n}$ dividieren, erhalten wir die Aufteilung der ausreichenden Prämie in Nettoprämie und Kostenzuschläge (anteilsmäßige Prämienzahlungen der einzelnen Kosten) gemäß Formel (8.1) (Seite 113):

$$P^a_{x,n} = P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \beta \cdot P^a_{x,n} + \gamma. \tag{8.4}$$

Betrachten wir von Formel (8.4) jenen Summanden, der den Abschlusskostenanteil P^α der ausreichenden Prämie angibt, näher, so stellen wir fest, dass die Abschlusskosten vom Versicherungsnehmer quasi durch eine Rente gezahlt werden. Er zahlt also bei Vertragsabschluss ($k = 0$) nicht die gesamten Abschlusskosten der Höhe α mal der Versicherungssumme (in

Beispiel 8.1 (S.115) mit $\kappa = 1$ hatten wir $\alpha \cdot \kappa = 0,05 \cdot 1 = 0,05$) auf einmal ein. Stattdessen werden ihm die Abschlusskosten anteilsmäßig in die Prämie einberechnet.
Der Versicherungsnehmer zahlt mit seiner Prämie P^a zwar in Summe (im Erwartungswert) die gesamten Abschlusskosten (für $\kappa = 1$ betragen diese α), zum Zeitpunkt $k = 0$ hat er mit seiner ersten Prämienzahlung jedoch erst $P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$ davon gezahlt.
Anders ausgedrückt: Es ist $P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$ jener Anteil an den Abschlusskosten, die der Versicherungsnehmer mit jeder Prämienzahlung der Höhe P^a zahlt. In Summe zahlt er wegen $P^\alpha \cdot \mathbf{\ddot{a}_{x,n}} = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \mathbf{\ddot{a}_{x,n}} = \alpha$ im Erwartungswert (auf den Barwert bezogen) [aber ohnehin] die gesamten Abschlusskosten.

Für das Versicherungsunternehmen ist diese Tatsache allerdings mit einem Liquiditätsengpass verbunden ([24], S.27 und [25], S.24). Das bedeutet, dass das Deckungskapital so wie wir es bisher berechnet haben, bei Einbezug der Kosten die tatsächliche wirtschaftliche Situation des Versicherungsunternehmens nicht korrekt darstellt.

Während der Versicherungsgesellschaft bei Vertragsabschluss rechnungsmäßig Kosten in der Höhe von α mal der Versicherungssumme (in Beispiel 8.1 (S.115) mit $\kappa = 1$ hatten wir $\alpha \cdot \kappa = 0,05 \cdot 1 = 0,05$) entstehen, zahlt der Versicherungsnehmer bei Vertragsabschluss ($k = 0$) durch das Einzahlen seiner ersten Prämie P^a nur eine Zahlung der Höhe $P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$ für die Abschlusskosten.
Somit bleibt eine Forderung gegenüber dem Versicherungsnehmer auf Tilgung der verbleibenden Abschlusskosten bestehen. Die Folge ist nun, dass das Nettodeckungskapital um eben diese ausstehende Forderung vermindert wird.

Wir erinnern uns: In Kapitel 6.2.1 haben wir das Nettodeckungskapital zum Zeitpunkt $k = 0$ aufgrund der Definition der Nettoprämie gleich null gesetzt. Es war ${}_0V_{x,n} = 0$. Durch das Einfließenlassen der Kosten wollen wir nun das Nettodeckungskapital um die ausstehende Forderung der Abschlusskosten vermindern und erhalten

$$ {}_0V^Z_{x,n} = -\alpha. \tag{8.5} $$

Die Idee, die Abschlusskosten durch das Deckungskapital zu finanzieren geht auf den Versicherungsmathematiker August ZILLMER (1831–1893) zurück. In Kapitel 3 (Geschichte des

Versicherungswesens) (S.13f) haben wir seinen Namen schon kennengelernt (*Zillmerverfahren*, 1863); jetzt wissen wir genauer, was es mit dem Zillmerverfahren auf sich hat. Das um die Abschlusskosten verminderte Nettodeckungskapital ${}_0V^Z_{x,n}$ ist nach August Zillmer benannt und heißt auch *Zillmerreserve* oder *gezillmertes Deckungskapital* ([24], S.28 und [25], S.24).

Wir können das negative Deckungskapital folgendermaßen interpretieren:
Der Versicherte beginnt mit einem negativen Deckungskapital, das dann im Laufe der Jahre positiv wird und sich dem Nettodeckungskapital nähert. Das negative Deckungskapital ist also quasi ein Darlehen der Versicherungsgesellschaft, das in den ersten Jahren zurückgezahlt wird.

Den Abschlusskostenanteil P^α der ausreichenden Prämie haben wir mit $P^\alpha = \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$ berechnet. Der Quotient $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$ wird in der Literatur auch als *Zillmerquote* bezeichnet, die Prämie $P^Z_{x,n} = P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$, also die Nettoprämie vermehrt um den jährlichen Abschlusskostenzuschlag, heißt auch *Zillmerprämie* ([24], S.27 und [25], S.25).
Formel (8.3) (Seite 116) lässt sich, indem wir den Bruch mit $\frac{1}{\ddot{a}_{x,n}}$ erweitern, auch wie folgt anschreiben:

$$P^a_{x,n} = \frac{\frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \gamma}{1-\beta} = \frac{P^Z_{x,n} + \gamma}{1-\beta}. \tag{8.6}$$

Die in diesem Kapitel bisher kennengelernten Formeln für die gemischte Versicherung lassen sich im Allgemeinen sehr gut auf andere Versicherungstypen übertragen.
Beispielsweise gilt für die ausreichende Prämie einer lebenslänglichen Todesfallversicherung ($\kappa = 1$) mit lebenslänglicher Beitragszahlung in Analogie zu Formel (8.2), (8.4), (8.3) und (8.6)

$$\begin{aligned}
P^a_x \cdot \ddot{a}_x &= A_x + \alpha + \beta \cdot P^a_x \cdot \ddot{a}_x + \gamma \cdot \ddot{a}_x \\
P^a_x &= P_x + \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_x} + \beta \cdot P^a_x + \gamma \\
P^a_x &= \tfrac{A_x + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_x}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_x} = \tfrac{P^Z_x + \gamma}{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Die Abschlusskosten betragen hier meist zwischen 3 und 3,5% der Versicherungssumme.

Die Inkassokosten können zwischen 0 und 1% (vor allem bei Einmalprämien) und zwischen 1 und 3% (bei laufenden Prämienzahlungen) der ausreichenden Prämie liegen.
Die Verwaltungskosten liegen bei $0,3$ bis $0,5\%$ der Versicherungssumme.
Häufig wird noch zwischen den Verwaltungskosten während der Prämienzahlungsdauer und jenen während der Versicherungsdauer unterschieden ([24], S.26 und [25], S.24).

Die angegebenen Prozentwerte sind nur als ungefähre Richtwerte aufzufassen; sie werden in der Praxis neben der Art der Versicherung auch von den genauen Versicherungsmodalitäten abhängen.

Beispiel 8.2:
Berechnen Sie mit Hilfe der Leibrenten- und der Sterbetafel 2000/02 für Österreich die Nettoprämie und die ausreichende Prämie P^a (jährlich vorschüssig) für eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Beitragszahlung für einen 31-jährigen Mann, wenn mit einem Zinssatz von $i = 3\%$ gerechnet wird!
Die Versicherungssumme sei $\kappa = 1$ und die Kosten betragen $\alpha = 0,035$, $\beta = 0,02$, $\gamma = 0,003$.

Lösung:

- $\ddot{a}_{31} = 24,905$ (Tabelle)

  $A_{31} = 1 - (1 - \frac{1}{1,03}) \cdot \ddot{a}_{31} \approx 0,2746$ (Formel (5.7), S.64)

  $P_{31} = \frac{A_{31}}{\ddot{a}_{31}} \approx 0,0110$

- $P^a_{31} = \frac{A_{31}+\alpha+\gamma\cdot\ddot{a}_{31}}{(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{31}} = \frac{0,2746+0,035+0,003\cdot 24,905}{(1-0,02)\cdot 24,905} \approx 0,0157$

Die ausreichende Prämie beträgt hier also ca. 143% der Nettoprämie, exakt:
$0,0110 \cdot 1,42809 \approx 0,0157$.

◇

Betrachten wir nun noch die ausreichende Prämie einer lebenslänglichen Todesfallversicherung ($\kappa = 1$) mit abgekürzter Beitragszahlungsdauer. Die versicherte Person ist bei dieser Versicherungsform zwar bis zu ihrem Ableben versichert, muss aber nur für die Dauer von n Jahren die Prämie einzahlen. Da die Prämie nur n Jahre gezahlt wird, entfallen auch die Inkassokosten nach diesen n Jahren. An den Verwaltungskosten (γ-Kosten) bleibt der Versicherte freilich lebenslänglich beteiligt. Es gilt:

$$P_x^a \cdot \ddot{a}_{x,n} = A_x + \alpha + \beta \cdot P_x^a \cdot \ddot{a}_{x,n} + \gamma \cdot \ddot{a}_x$$

$$P_x^a = \tfrac{A_x}{\ddot{a}_{x,n}} + \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \beta \cdot P_x^a + \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}} = \overline{P_x} + \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \beta \cdot P_x^a + \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}},$$

wobei $\overline{P_x} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x,n}}$.

$$P_x^a = \frac{A_x+\alpha+\gamma\cdot\ddot{a}_x}{(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{x,n}} = \frac{\overline{P_x}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}+\gamma\cdot\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}}}{1-\beta} = \frac{\overline{P_x^Z}+\gamma\cdot\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}}}{1-\beta}, \qquad \text{wobei } \overline{P_x^Z} = \overline{P_x} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}$$

8.2. Das ausreichende Deckungskapital

8.2.1. Das ausreichende Deckungskapital bei einer gemischten Versicherung

Wir haben in Kapitel 6.2 das Nettodeckungskapital am Ende des k-ten Jahres für eine gemischte Versicherung mit einer Laufzeit von n Jahren mit ${}_kV_{x,n}$ bezeichnet und nach Formel (6.8) (Seite 91) wie folgt berechnet:

${}_kV_{x,n} = A_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$,

wobei $A_{x+k,n-k}$ der erwartete Barwert der zukünftigen Versicherungsleistung, $P_{x,n}$ die Nettoprämie und $P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ der erwartete Barwert der zukünftigen Prämien war.

Unter dem *ausreichenden Deckungskapital* am Ende des k-ten Jahres ${}_kV^a$ versteht man allgemein die Differenz zwischen dem erwarteten Barwert der zukünftigen Versicherungsleistungen und Kosten und dem erwarteten Barwert der zukünftigen ausreichenden Prämien ([24], S.28f und [25], S.25f sowie Gerber, 1986, S.102f).

Die Definition des Deckungskapitals von Kapitel 6.2 wird hier also insofern umgeändert, dass einerseits zuzüglich zum Barwert der zukünftigen Versicherungsleistungen auch der Barwert der zukünftigen Kosten miteinbezogen wird und dass andererseits vom Barwert der zukünftigen *ausreichenden* Prämie ausgegangen wird.

Für das ausreichende Deckungskapital am Ende des k-ten Jahres für eine gemischte Versicherung mit einer Laufzeit von n Jahren erhalten wir:

$$ {}_kV_{x,n}^a = A_{x+k,n-k} + \beta \cdot P_{x,n}^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - P_{x,n}^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}, \tag{8.7} $$

wobei $A_{x+k,n-k} + \beta \cdot P_{x,n}^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ den erwarteten Barwert der zukünftigen Versicherungsleistung und den erwarteten Barwert der zukünftigen Kosten bezeichnet und $P_{x,n}^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ für den erwarteten Barwert der zukünftigen ausreichenden Prämie steht.
Setzen wir nun in Formel (8.7) (S.121) für $P_{x,n}^a$ gemäß Formel (8.4) (S.116) ein, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&{}_kV_{x,n}^a = \\
&= A_{x+k,n-k} + \beta \cdot P_{x,n}^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - \underbrace{(P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \beta \cdot P_{x,n}^a + \gamma)}_{P_{x,n}^a} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = \\
&= A_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - \underbrace{\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}}_{\text{Zillmerquote}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = \\
&= A_{x+k,n-k} - \underbrace{(P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}})}_{\text{Zillmerprämie}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = A_{x+k,n-k} - P_{x,n}^Z \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}.
\end{aligned}
$$

Die Begriffe „Zillmerquote“ und „Zillmerprämie“ von Kapitel 8.1 spielen also bei der Berechnung des ausreichenden Deckungskapitals eine wesentliche Rolle.
Das ausreichende Deckungskapital der Form

$$ {}_kV_{x,n}^a = A_{x+k,n-k} - P_{x,n}^Z \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \tag{8.8} $$

findet man in der Literatur auch als „Zillmer-Deckungskapital“, „gezillmertes Deckungskapital“, „Zillmerrückstellung“ oder „gezillmerte Rückstellung“ und wird mit dem Symbol ${}_kV_{x,n}^Z$ bezeichnet ([24], S.28).
Es gilt also:

$$ {}_kV_{x,n}^Z = A_{x+k,n-k} - P_{x,n}^Z \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \tag{8.9} $$

oder anders geschrieben

$$ {}_kV_{x,n}^Z = {}_kV_{x,n} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}, \tag{8.10} $$

wobei ${}_kV_{x,n}$ das Nettodeckungskapital ist.

Beweis von Formel (8.10):

$$\begin{aligned} {}_kV^Z_{x,n} &= A_{x+k,n-k} - P^Z_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = A_{x+k,n-k} - (P_{x,n} + \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}) \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = \\ &= \underbrace{A_{x+k,n-k} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}}_{= {}_kV_{x,n} \text{ Formel (6.8), S.91}} - \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = {}_kV_{x,n} - \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \end{aligned}$$

□

Eine andere Möglichkeit das ausreichende Deckungskapital auszurechnen ist durch die folgende Formel gegeben:

$$ {}_kV^a_{x,n} = A_{x+k,n-k} - ((1-\beta) \cdot P^a_{x,n} - \gamma) \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \tag{8.11}$$

([24], S.28).

Beweis:

${}_kV^a_{x,n} = A_{x+k,n-k} - (P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}}) \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ (Formel (8.8) auf S.121).
Somit bleibt zu zeigen $P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} = (1-\beta) \cdot P^a_{x,n} - \gamma$.
Wegen $P_{x,n} = \frac{A_{x,n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ ist das äquivalent mit $\frac{A_{x,n}+\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \gamma = (1-\beta) \cdot P^a_{x,n}$.
Multiplizieren wir diese Gleichung nun mit $\ddot{a}_{x,n}$: $A_{x,n} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n} = (1-\beta) \cdot P^a_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,n}$.
Entsprechend umgeformt erhalten wir $P^a_{x,n} = \frac{A_{x,n}+\alpha+\gamma\cdot\ddot{a}_{x,n}}{(1-\beta)\cdot\ddot{a}_{x,n}}$. Diese Formel ist von Kapitel 8.1 (Formel (8.3), S.116) schon bekannt. Wir haben den Ausdruck somit auf eine wahre Aussage geführt.

□

Es gibt also mehrere Möglichkeiten sich das ausreichende Deckungskapital zu berechnen. Je nach Angabe möge man die am besten geeignete Formel zur Berechnung auswählen.

Wir berechnen nun das ausreichende Deckungskapital zum Zeitpunkt $k = 0$ (also für den Zeitpunkt am *Beginn* der Laufzeit) mittels Formel (8.10) (S.121) und erhalten das wenig überraschende Ergebnis

$$ {}_0V^a_{x,n} = {}_0V_{x,n} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x,n} = 0 - \alpha = -\alpha, $$

das wir aufgrund von Formel (8.5) (Seite 117) erwartet haben und somit auch auf diese Weise rechnerisch gezeigt haben.

Für $k = n$ (also für den Zeitpunkt am *Ende* der Laufzeit) beträgt das ausreichende Deckungskapital

$${}_nV^a_{x,n} = {}_nV_{x,n} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \underbrace{\ddot{a}_{x+n,0}}_{=0} = {}_nV_{x,n} = 1.$$

Nebenrechnung:

- $\ddot{a}_{x+n,0} \overset{(5.17)}{=} \ddot{a}_{x+n} - {}_0p_x \cdot v^0 \cdot \ddot{a}_{x+n+0} = \ddot{a}_{x+n} - \frac{l_x}{l_x} \cdot v^0 \cdot \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_{x+n} - \ddot{a}_{x+n} = 0$
- ${}_nV_{x,n} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+n,n-n}}{\ddot{a}_{x,n}}$ (Formel (6.9) Seite 94)
  ${}_nV_{x,n} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+n,0}}{\ddot{a}_{x,n}} = 1 - \frac{0}{\ddot{a}_{x,n}} = 1 - 0 = 1$

Das ausreichende Deckungskapital wird während der Vertragsdauer also Werte im Intervall $[-\alpha; 1]$ annehmen.
Sollte die Versicherung vor dem Zeitpunkt τ (wobei $0 < \tau < n$), an dem ${}_\tau V^a_{x,n} = 0$ gilt, beendet werden (beispielsweise durch das Ableben der versicherten Person oder durch Stornierung des Versicherungsvertrages), müssen der Versicherungsgesellschaft entsprechende Rücklagen zur Verfügung stehen, weil die Finanzierung der Abschlusskosten dieses Versicherungsvertrages nicht mehr durch weitere Prämieneinnahmen erfolgen kann ([24], S.29).
Für große Werte von α kann das ausreichende Deckungskapital in den ersten Versicherungsjahren negativ sein. Es ist aber natürlich erstrebenswert, dass das Zeitintervall $[0; \tau]$ (mit $0 < \tau < n$) nicht allzu groß ist. Aus diesem Grund wurden Höchstwerte für α postuliert. Beispielsweise wurde vereinbart, dass der Kostensatz α der Abschlusskosten höchstens so groß ist wie jener Satz, bei dem das ausreichende Deckungskapital am Ende des ersten Jahres ($k = 1$) verschwindet (Gerber, 1986, S.103). Es soll also höchstens $\tau = 1$ sein.

Bei einer gemischten Versicherung ($\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$) ergibt sich somit durch die Bedingung ${}_1V^a_{x,n} = 0$ folgender Höchstsatz für α:

$$\alpha = \frac{{}_1V_{x,n}}{1 - {}_1V_{x,n}} \tag{8.12}$$

Beweis:
Setzen wir in Formel (8.10) (S.121) $k = 1$, erhalten wir:
${}_1V^a_{x,n} = {}_1V^Z_{x,n} = {}_1V_{x,n} - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+1,n-1}}{\ddot{a}_{x,n}}$.

Wegen ${}_kV_{x,n} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}}$ (Formel (6.9), S.94) können wir nun den Ausdruck $\frac{\ddot{a}_{x+1,n-1}}{\ddot{a}_{x,n}}$ durch $1 - {}_1V_{x,n}$ ersetzen und kommen aufgrund der Bedingung ${}_1V^a_{x,n} = 0$ schließlich zur Gleichung $0 = {}_1V_{x,n} - \alpha \cdot (1 - {}_1V_{x,n})$, die entsprechend umgeformt Formel (8.12) liefert.

□

Dieser Höchstsatz für α kann auch durch die folgende Formel berechnet werden:

$$\alpha = (P_{x+1,n-1} - P_{x,n}) \cdot \ddot{a}_{x,n} \tag{8.13}$$

(Gerber, 1986, S.103).

Beweis:

Wir gehen von $\alpha \overset{(8.12)}{=} \frac{{}_1V_{x,n}}{1-{}_1V_{x,n}}$ aus.

Zähler: ${}_1V_{x,n}$ $\overset{(6.8)}{=} A_{x+1,n-1} - P_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+1,n-1} \overset{(6.3)\text{ für }\kappa=1}{=} A_{x+1,n-1} - P_{x,n} \cdot \frac{A_{x+1,n-1}}{P_{x+1,n-1}} =$

$= A_{x+1,n-1} \cdot (1 - \frac{P_{x,n}}{P_{x+1,n-1}}) \overset{(6.3)}{=} P_{x+1,n-1} \cdot \ddot{a}_{x+1,n-1} \cdot \frac{P_{x+1,n-1} - P_{x,n}}{P_{x+1,n-1}} =$

$= (P_{x+1,n-1} - P_{x,n}) \cdot \ddot{a}_{x+1,n-1};$

Nenner: $1 - {}_1V_{x,n}$ $= \frac{\ddot{a}_{x+1,n-1}}{\ddot{a}_{x,n}}$ (Formel (6.9), S.94 umgeformt);

somit: $\alpha = \frac{{}_1V_{x,n}}{1-{}_1V_{x,n}} = \frac{(P_{x+1,n-1} - P_{x,n}) \cdot \ddot{a}_{x+1,n-1}}{\frac{\ddot{a}_{x+1,n-1}}{\ddot{a}_{x,n}}} = (P_{x+1,n-1} - P_{x,n}) \cdot \ddot{a}_{x,n}.$

□

Wir können nun Formel (8.13) folgendermaßen umformen:

$$P_{x+1,n-1} = P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} \tag{8.14}$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit Formel (8.4) (S.116), so können wir erkennen, dass $P_{x,n} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} = P^Z_{x,n}$ gerade $P + P^\alpha$ gemäß Formel (8.1) (S.113) ist. Das heißt $P_{x+1,n-1} = P + P^\alpha$. Diesen Zusammenhang können wir, weil ${}_1V^a_{x,n} = 0$ gelten soll, so interpretieren:
Jener Prämienanteil von je $P + P^\alpha$, der ab dem Alter $x + 1$ erbracht wird, reicht gerade zur Finanzierung der zukünftigen Deckung aus.

Wir haben in unseren Überlegungen $\tau = 1$ gesetzt und so die Formeln (8.12), (8.13) und (8.14) aufgestellt.

In der Praxis werden die für α zulässigen Höchstwerte meist prozentuell angegeben. Meist wird ein Wert von $\alpha = 3,5\%$ nicht überschritten (Gerber, 1986, S.103).

Ebenso wie die ausreichende Prämie P^a kann auch das ausreichende Deckungskapital ${}_kV^a$ am Ende des k-ten Jahres nach Komponenten zerlegt werden.
Es ist

$$ {}_kV^a = {}_kV + {}_kV^\alpha + {}_kV^\beta + {}_kV^\gamma, \tag{8.15} $$

wobei ${}_kV$ das Nettodeckungskapital bezeichnet und ${}_kV^\alpha$, ${}_kV^\beta$ und ${}_kV^\gamma$ für die entsprechenden Kostenkomponenten stehen.
Betrachten wir Formel (8.10), so ergibt sich für die Kostenkomponenten einer gemischten Versicherung gemäß (8.15):

- $$ {}_kV^\alpha_{x,n} = -\alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}} \stackrel{(6.9)}{=} -\alpha \cdot (1 - {}_kV_{x,n}) = \alpha \cdot ({}_kV_{x,n} - 1). \tag{8.16} $$

  Da $\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} = P^\alpha$ (Zillmerquote, S.118) können wir Formel (8.16) auch schreiben als ${}_kV^\alpha_{x,n} = -P^\alpha \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$, und interpretieren ${}_kV^\alpha$ als „minus der erwartete Barwert der zukünftigen P^α Kostenzuschläge" (Gerber, 1986, S.102).

- ${}_kV^\beta_{x,n} = 0$

- ${}_kV^\gamma_{x,n} = 0$,

  wobei ${}_kV^\gamma$ allgemein als Differenz aus dem erwarteten Barwert der zukünftigen Verwaltungskosten und dem erwarteten Barwert der zukünftigen P^γ berechnet wird. Die sogenannte *„Verwaltungskostenreserve"* ${}_kV^\gamma$ einer gemischten Versicherung ist also ${}_kV^\gamma_{x,n} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$, und wegen ${}_kV^\gamma_{x,n} = 0$, gilt $\gamma = P^\gamma$.

Somit lässt sich das ausreichende Deckungskapital einer gemischten Versicherung am Ende des k-ten Jahres auch wie folgt angeben:

$$ {}_kV^a_{x,n} = \underbrace{{}_kV_{x,n} + {}_kV^\alpha_{x,n}}_{={}_kV^Z_{x,n} \text{ gezillmertes Deckungskapital}} \stackrel{(8.16)}{=} {}_kV_{x,n} - \alpha \cdot (1 - {}_kV_{x,n}) = $$
$$ = {}_kV_{x,n} - \alpha + \alpha \cdot {}_kV_{x,n} = (1+\alpha) \cdot {}_kV_{x,n} - \alpha \tag{8.17} $$

Beispiel 8.3

([28], Bsp. 26)

Ein 20-jähriger Mann schließt eine gemischte Versicherung mit einer Laufzeit von $n = 45$ Jahren ab, wobei $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = 1$ und $i = 3\%$ gelten soll. Die jährlichen Prämienzahlungen erfolgen vorschüssig über die gesamte Versicherungsdauer.

Der Versicherung werden die folgenden Kostenzuschläge zu Grunde gelegt:

- $\alpha = 1‰$ der Versicherungssumme. Der Kostenzuschlag P^α ist jährlich vorschüssig zahlbar für jedes Jahr der Versicherungsdauer.
- $\beta = 3\%$ der ausreichenden Jahresprämie. Der Kostenzuschlag P^β ist jährlich vorschüssig zahlbar für jedes Jahr der Versicherungsdauer.
- $\gamma = 1‰$ der Versicherungssumme. Der Kostenzuschlag P^γ ist jährlich vorschüssig zahlbar für jedes Jahr der Versicherungsdauer.

Die Abschlusskosten werden einmalig zu Versicherungsbeginn gezillmert.

Bearbeiten Sie mit Hilfe der Sterbetafel und der Leibrententafel für Österreich 2000/02 folgende Punkte:

a) Bestimmen Sie das Nettodeckungskapital ${}_2V_{20,45}$!

b) Wie hoch ist die ausreichende Prämie $P^a_{20,45}$ für den zu Grunde liegenden Versicherungsvertrag?

c) Geben Sie eine Gleichung für das gezillmerte Deckungskapital ${}_2V^Z_{20,45}$ an und berechnen Sie es!

d) Wie hoch darf der Abschlusskostensatz α höchstens sein, damit das ausreichende Deckungskapital nach zwei Jahren bereits positiv ist?

Lösung:

Es ist $x = 20$ und $n = 45$.

a)

$$
\begin{aligned}
{}_2V_{20,45} &= A_{22,43} - P_{20,45} \cdot \ddot{a}_{22,43} && \text{Formel (6.8), S.91}\\
{}_2V_{20,45} &= A_{22,43} - \tfrac{A_{20,45}}{\ddot{a}_{20,45}} \cdot \ddot{a}_{22,43} && \text{Formel (6.3), S.76 für } \kappa = 1\\
{}_2V_{20,45} &= (1 - d \cdot \ddot{a}_{22,43}) - (1 - d \cdot \ddot{a}_{20,45}) \cdot \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}} && \text{Formel (5.10), S.65}
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{22,43} &= \ddot{a}_{22} - {}_{43}p_{22} \cdot v^{43} \cdot \ddot{a}_{22+43} && \text{Formel (5.17), S.73}\\
\ddot{a}_{22,43} &= \ddot{a}_{22} - \tfrac{l_{65}}{l_{22}} \cdot (\tfrac{1}{1+i})^{43} \cdot \ddot{a}_{65} && \text{Formel (4.27), S.38 und Formel (4.3), S.22}\\
\ddot{a}_{22,43} &= 26,912 - \tfrac{81502}{98675} \cdot (\tfrac{1}{1,03})^{43} \cdot 12,771 && \text{Sterbetafel und Leibrententafel}\\
\ddot{a}_{22,43} &\approx 23,953
\end{aligned}
$$

Analog:

$$\ddot{a}_{20,45} = \ddot{a}_{20} - \tfrac{l_{65}}{l_{20}} \cdot (\tfrac{1}{1+i})^{45} \cdot \ddot{a}_{65} = 27,285 - \tfrac{81502}{98877} \cdot (\tfrac{1}{1,03})^{45} \cdot 12,771 \approx 24,501$$

Somit:

$${}_2V_{20,45} = (1 - (1 - \tfrac{1}{1,03}) \cdot 23,953) - (1 - (1 - \tfrac{1}{1,03}) \cdot 24,501) \cdot \tfrac{23,953}{24,501} \approx 0,022390.$$

b)

$$
\begin{aligned}
P^a_{20,45} &= \tfrac{A_{20,45} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{20,45}}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{20,45}} && \text{Formel (8.3), S.116}\\
P^a_{20,45} &= \frac{(1-(1-\frac{1}{1,03}) \cdot 24,501) + 0,001 + 0,001 \cdot 24,501}{(1-0,03) \cdot 24,501} \approx 0,013122 && \text{Formel (5.10), S.65}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
{}_2V^Z_{20,45} &= A_{22,43} - P^Z_{20,45} \cdot \ddot{a}_{22,43} && \text{Formel (8.9), S.121}\\
{}_2V^Z_{20,45} &= (1 - d \cdot \ddot{a}_{22,43}) - \underbrace{(P_{20,45} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{20,45}})}_{\text{Zillmerprämie}} \cdot \ddot{a}_{22,43} && \text{Formel (5.10), S.65}\\
{}_2V^Z_{20,45} &= (1 - (1 - \tfrac{1}{1,03}) \cdot \ddot{a}_{22,43}) - (\tfrac{A_{20,45}}{\ddot{a}_{20,45}} + \alpha \cdot \tfrac{1}{\ddot{a}_{20,45}}) \cdot \ddot{a}_{22,43} && \text{Formel (6.3), S.76 für } \kappa = 1\\
{}_2V^Z_{20,45} &= 1 - \ddot{a}_{22,43} + \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{1,03} - \underbrace{(1 - (1 - \tfrac{1}{1,03}) \cdot \ddot{a}_{20,45})}_{A_{20,45}} \cdot \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}} - \alpha \cdot \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}}\\
{}_2V^Z_{20,45} &\approx 0,021412.
\end{aligned}
$$

Eine andere Möglichkeit ${}_2V^Z_{20,45}$ zu berechnen ist durch Formel (8.10), S.121 gegeben:

$$
\begin{aligned}
{}_2V^Z_{20,45} &= {}_2V_{20,45} - \alpha \cdot \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}} \overset{(6.9)}{=} (1 - \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}}) - \alpha \cdot \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}} =\\
&= 1 - (1 + \alpha) \cdot \tfrac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}} \approx 0,021412.
\end{aligned}
$$

d)

Das ausreichende Deckungskapital am Ende des zweiten Jahres soll positiv sein. Es gilt somit die Bedingung ${}_2V^Z_{20,45} \geq 0$.

Eingesetzt in die unter **c)** angeführte Formel erhalten wir

${}_2V^Z_{20,45} = 1 - (1+\alpha) \cdot \frac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}} \geq 0$.

Diese Ungleichung lösen wir nach α auf:

$\alpha \leq \frac{\ddot{a}_{20,45}}{\ddot{a}_{22,43}} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \leq \frac{24{,}501}{23{,}953} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \leq 0,02290.$

Der Abschlusskostensatz α darf maximal $22,9‰$ sein.

Bemerkung: Auch über Formel (8.12), S.123, kommt man letztendlich zum selben Resultat:

$\alpha \leq \frac{{}_2V_{20,45}}{1-{}_2V_{20,45}} \overset{(6.9)}{=} \frac{1-\frac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}}}{1-(1-\frac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}})} = \frac{\frac{\ddot{a}_{20,45}-\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}}}{\frac{\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{20,45}}} = \frac{\ddot{a}_{20,45}-\ddot{a}_{22,43}}{\ddot{a}_{22,43}}$

$\alpha \leq \frac{24{,}501-23{,}953}{23{,}953} \approx 0,02290.$

$\diamond$

Betrachten wir nun als nächstes das ausreichende Deckungskapital bei lebenslänglichen Todesfallversicherungen. Hierbei müssen wir unterscheiden, ob die Betragszahlungsdauer (i) *lebenslänglich* oder (ii) *abgekürzt* erfolgen.

8.2.2. Das ausreichende Deckungskapital bei einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Beitragszahlungsdauer

Im Wesentlichen lassen sich die Formeln, die wir bei der gemischten Versicherung hergeleitet haben, hier in Analogie übernehmen.

Es gilt:

- ${}_kV^a_x = A_{x+k} + \beta \cdot P^a_x \cdot \ddot{a}_{x+k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} - P^a_x \cdot \ddot{a}_{x+k}$ analog zu (8.7)
- ${}_kV^a_x = {}_kV^Z_x = A_{x+k} - P^Z_x \cdot \ddot{a}_{x+k} = {}_kV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+k}$ analog zu (8.8), (8.9), (8.10), wobei $P^Z_x = P_x + \frac{\alpha}{\ddot{a}_x}$ die Zillmerprämie (S.118) ist.
- ${}_kV^a_x = A_{x+k} - ((1-\beta) \cdot P^a_x - \gamma) \cdot \ddot{a}_{x+k}$ analog zu (8.11)
- ${}_kV^a_x = {}_kV_x - \frac{\alpha}{\ddot{a}_x} \cdot \ddot{a}_{x+k} \overset{(6.12)}{=} {}_kV_x - \alpha \cdot (1 - {}_kV_x)$ analog zu (8.10), (8.17).

Betrachten wir den Ausdruck ${}_kV_x^a = {}_kV_x - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$ gemäß Komponentenzerlegung (8.15), so fällt auf, dass auch in diesem Fall ${}_kV^\gamma = 0$ gilt. Da, wie zuvor bei den Überlegungen zur gemischten Versicherung, auch hier die Laufzeit der Versicherung mit der Dauer der Beitragszahlungen ident ist, werden die Verwaltungskosten, die für die Dauer der Versicherung anfallen, ebensolang gezahlt.
Das bedeutet, dass wegen $\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} - P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} = 0$ kein Beitrag zum Deckungskapital erfolgt.

8.2.3. Das ausreichende Deckungskapital bei einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit abgekürzter Beitragszahlungsdauer

Im Gegensatz zu 8.2.2 erfolgt hier die Prämienzahlung nur n Jahre lang. Die Inkassokosten (β-Kosten) und die ausreichende Prämie P^a müssen also bei der Berechnung des Deckungskapitals am Ende des k-ten Jahres (wobei $k < n$) nur $(n-k)$ Jahre abgezinst werden.
Da der Versicherte aber lebenslänglich an den Verwaltungskosten beteiligt bleibt, müssen die erwarteten Kosten der Höhe $\gamma \cdot 1 \cdot \ddot{a}_x$ (auf den Barwert bezogen) mit nur n Prämienzahlungen erbracht werden. Diese Prämienzahlungen der Höhe P^γ (= Kostenzuschlag für die γ-Kosten) sind also auf diese n Jahre betrachtet „zu hoch“.
Es wird eben ein gewisser Teil der Prämie P^γ benötigt, um die in Zukunft erwarteten γ-Kosten in den prämienfreien Jahren (also die vollen Jahre, die vom Ende der Beitragszahlungen bis zum Ableben der versicherten Person verbleiben) zu decken. Dieser Teil wird also quasi im Deckungskapital „angespart“ ([25], S.26).

Es gelten folgende Zusammenhänge:

- ${}_kV_x^a = A_{x+k} + \beta \cdot P_x^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} - P_x^a \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ analog zu (8.7)

- ${}_kV_x^a = A_{x+k} - ((1-\beta) \cdot P_x^a - \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k,n-k}}) \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ analog zu (8.11).

Wegen $P_x^a = \frac{A_x + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_x}{(1-\beta) \cdot \ddot{a}_{x,n}} = \frac{\overline{P_x} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,n}} + \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}}}{1-\beta} = \frac{\overline{P_x^Z} + \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}}}{1-\beta}$ (S.120) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
{}_kV_x^a \quad &= A_{x+k} - (\overline{P_x^Z} + \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}} - \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k,n-k}}) \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = \\
&= \underbrace{A_{x+k} - \overline{P_x^Z} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}}_{\overline{{}_kV_x^Z}} + \underbrace{\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} - \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}}_{{}_kU_x},
\end{aligned}
$$

wobei ${}_kU_x$ die Verwaltungskostenreserve bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit abgekürzten Beitragszahlungen ist.

Es ist hier also ${}_kV_x^a = \overline{{}_kV_x^Z} + {}_kU_x$ für $k < n$ ([24], S.28f).

Wir haben die Verwaltungskostenreserve ${}_kV^\gamma$ allgemein als Differenz zwischen dem erwarteten Barwert der zukünftigen Verwaltungskosten (hier: $\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k}$) und dem erwarteten Barwert der zukünftigen P^γ berechnet.

Für die lebenslängliche Todesfallversicherung mit abgekürzter Beitragszahlungsdauer ist dann

${}_kV^\gamma = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} - P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \neq 0.$

Wegen ${}_kU_x = {}_kV^\gamma$ ist $P^\gamma = \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}} \iff P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x,n} = \gamma \cdot \ddot{a}_x$.

Somit lässt sich die Verwaltungskostenreserve wie folgt umformen:

$$
\begin{aligned}
{}_kV^\gamma \quad &= \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k} - P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} = \gamma \cdot (\ddot{a}_{x+k} - \tfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}) = \\
&= \gamma \cdot \ddot{a}_x \cdot (\tfrac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x} - \tfrac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}}) \overset{(6.12) \text{ und } (6.9)}{=} \gamma \cdot \ddot{a}_x \cdot [(1 - {}_kV_x) - (1 - {}_kV_{x,n})] = \\
&= \gamma \cdot \ddot{a}_x \cdot (1 - {}_kV_x - 1 + {}_kV_{x,n}) = \gamma \cdot \ddot{a}_x \cdot ({}_kV_{x,n} - {}_kV_x).
\end{aligned}
$$

Für die Berechnung des Deckungskapitals in der Zeit nach Ende der Beitragszahlungsdauer ($k \geq n$) fallen die Summanden, in denen $\ddot{a}_{x+k,n-k}$ vorkommt, weg, und es bleibt für die Berechnung des Deckungskapitals am Ende des k-ten Jahres (wobei $k \geq n$):

$${}_kV_x^a = A_{x+k} + \underbrace{\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k}}_{= {}_kV^\gamma}.$$

Auch hier haben wir wieder den Vorteil, dass sich die eben hergeleiteten Formeln in einer gewissen Analogie für andere Versicherungsformen, bei denen eine abgekürzte Beitragszahlungsdauer vorliegt, übertragen lassen.

Beispielsweise gilt für eine gemischte Versicherung der Dauer n Jahre und einer abgekürzten Prämienzahlungsdauer von m Jahren ($m < n$) für die Verwaltungskostenreserve ${}_kV^\gamma$ für $k = 1, 2, ..., m - 1$:

$$
\begin{aligned}
{}_kV^\gamma &= \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - P^\gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} = \ddot{a}_{x,n} \cdot (\gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}} - \underbrace{\gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}}}_{P^\gamma} \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x+k,m-k}}{\ddot{a}_{x,n}}) = \\
&= \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n} \cdot (\tfrac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x,n}} - \tfrac{\ddot{a}_{x+k,m-k}}{\ddot{a}_{x,m}}) \overset{(6.9)}{=} \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n} \cdot ({}_kV_{x,m} - {}_kV_{x,n})
\end{aligned}
$$

und für $k = m, m+1, ...$:

${}_kV^\gamma = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}$ (Gerber, 1986, S.103).

Betrachten wir abschließend noch folgendes Beispiel, bei dem Analogieschlüsse eingehen:

Beispiel 8.4

Berechnen Sie das ausreichende Deckungskapital am Ende des k-ten Jahres von einer temporären Todesfallversicherung mit einer Laufzeit von n Jahren und einer Beitragszahlungsdauer von m Jahren ($m < n$)! Geben Sie weiters das „gezillmerte Deckungskapital“ und die Verwaltungskostenreserve an!

Lösung:

$$
\begin{aligned}
{}_kV^{1a}_{x,n} &= A^1_{x+k,n-k} + \beta \cdot P^{1a}_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - P^{1a}_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} = \\
&= A^1_{x+k,n-k} - ((1-\beta) \cdot P^{1a}_{x,n} - \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x+k,m-k}}) \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Wegen} \quad P^{1a}_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,m} &= A^1_{x,n} + \alpha + \beta \cdot P^{1a}_{x,n} \cdot \ddot{a}_{x,m} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x,n} \\
\text{ist} \quad P^{1a}_{x,n} &= \tfrac{A^1_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}} + \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,m}} + \beta \cdot P^{1a}_{x,n} + \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}} = \overline{P^1_{x,n}} + \tfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x,m}} + \beta \cdot P^{1a}_{x,n} + \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}}, \\
\text{woraus} \quad P^{1a}_{x,n} &= \frac{\overline{P^1_{x,n}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,m}} + \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}}}{1-\beta} = \frac{\overline{P^{1Z}_{x,n}} + \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}}}{1-\beta} \text{ folgt.}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten, indem wir für $P^{1a}_{x,n}$ einsetzen:

$$
\begin{aligned}
{}_kV^{1a}_{x,n} &= A^1_{x+k,n-k} - ((1-\beta) \cdot \frac{\overline{P^{1Z}_{x,n}} + \gamma \cdot \frac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}}}{1-\beta} - \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x+k,n-k}}{\ddot{a}_{x+k,m-k}}) \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} = \\
&= \underbrace{A^1_{x+k,n-k} - \overline{P^{1Z}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k}}_{\overline{{}_kV^{1Z}_{x,n}}} \underbrace{- \gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}} \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k}}_{{}_kV^\gamma_{x,n}}.
\end{aligned}
$$

Insgesamt erkennen wir also:

i) Ausreichendes Deckungskapital:

$$
\begin{aligned}
{}_kV^{1a}_{x,n} &= \overline{{}_kV^{1Z}_{x,n}} + {}_kV^\gamma_{x,n} && \text{für } k < m \\
{}_kV^{1a}_{x,n} &= A^1_{x+k,n-k} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} && \text{für } k \geq m
\end{aligned}
$$

ii) Gezillmertes Deckungskapital:

$$\overline{{}_kV^{1Z}_{x,n}} = A^1_{x+k,n-k} - \overline{P^{1Z}_{x,n}} \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} \qquad \text{für } k < m$$

iii) Verwaltungskostenreserve:

$${}_kV^{\gamma}_{x,n} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} - \underbrace{\gamma \cdot \tfrac{\ddot{a}_{x,n}}{\ddot{a}_{x,m}}}_{P^{\gamma}} \cdot \ddot{a}_{x+k,m-k} \qquad \text{für } k < m$$

$${}_kV^{\gamma}_{x,n} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x+k,n-k} \qquad \text{für } k \geq m$$

◇

A. Sterbetafeln und Barwerte von Leibrenten

A.1. Sterbetafeln

Sterbetafel 2000/2002 männlich

Genaues Alter (am x-ten Geburtstag) in Jahren	Sterbewahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Altersintervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x noch zu durchlebende Jahre: bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x noch zu durchlebende Jahre: insgesamt	Fernere Lebenserwartung im Alter x in Jahren
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)
0	0,0053430	100000	534	99153	7550591	75,51
1	0,0003452	99466	34	99449	7451438	74,91
2	0,0002639	99431	26	99418	7351989	73,94
3	0,0001984	99405	20	99395	7252571	72,96
4	0,0001512	99385	15	99378	7153176	71,97
5	0,0001295	99370	13	99364	7053798	70,98
6	0,0001226	99358	12	99351	6954434	69,99
7	0,0001170	99345	12	99340	6855083	69,00
8	0,0001106	99334	11	99328	6755743	68,01
9	0,0001114	99323	11	99317	6656415	67,02
10	0,0001138	99312	11	99306	6557098	66,03
11	0,0001130	99300	11	99295	6457792	65,03
12	0,0001150	99289	11	99283	6358497	64,04
13	0,0001428	99278	14	99271	6259213	63,05
14	0,0002217	99264	22	99253	6159943	62,06
15	0,0003679	99242	37	99223	6060690	61,07
16	0,0005631	99205	56	99177	5961467	60,09
17	0,0007744	99149	77	99111	5862290	59,13
18	0,0009476	99072	94	99025	5763179	58,17
19	0,0010207	98978	101	98928	5664154	57,23
20	0,0010268	98877	102	98827	5565226	56,28
21	0,0010239	98776	101	98725	5466399	55,34
22	0,0010166	98675	100	98625	5367674	54,40
23	0,0010061	98574	99	98525	5269049	53,45
24	0,0009997	98475	98	98426	5170524	52,51
25	0,0009973	98377	98	98328	5072098	51,56
26	0,0009856	98279	97	98230	4973770	50,61
27	0,0009627	98182	95	98135	4875540	49,66
28	0,0009286	98087	91	98042	4777405	48,71
29	0,0008961	97996	88	97952	4679364	47,75
30	0,0008793	97908	86	97865	4581411	46,79
31	0,0008905	97822	87	97779	4483546	45,83
32	0,0009343	97735	91	97690	4385767	44,87
33	0,0009913	97644	97	97596	4288077	43,92
34	0,0010528	97547	103	97496	4190482	42,96
35	0,0011164	97444	109	97390	4092986	42,00
36	0,0011973	97336	117	97277	3995596	41,05
37	0,0013159	97219	128	97155	3898318	40,10
38	0,0014696	97091	143	97020	3801163	39,15
39	0,0016474	96949	160	96869	3704143	38,21
40	0,0018400	96789	178	96700	3607275	37,27
41	0,0020376	96611	197	96512	3510575	36,34
42	0,0022378	96414	216	96306	3414063	35,41
43	0,0024482	96198	236	96080	3317757	34,49
44	0,0026829	95963	257	95834	3221676	33,57
45	0,0029503	95705	282	95564	3125842	32,66
46	0,0032555	95423	311	95267	3030278	31,76
47	0,0035965	95112	342	94941	2935011	30,86
48	0,0039826	94770	377	94581	2840070	29,97
49	0,0044224	94393	417	94184	2745489	29,09
50	0,0049170	93975	462	93744	2651305	28,21
51	0,0054561	93513	510	93258	2557561	27,35
52	0,0060208	93003	560	92723	2464303	26,50
53	0,0065971	92443	610	92138	2371580	25,65
54	0,0071772	91833	659	91504	2279442	24,82
55	0,0077607	91174	708	90820	2187938	24,00
56	0,0083568	90466	756	90088	2097118	23,18
57	0,0089745	89710	805	89308	2007029	22,37
58	0,0096238	88905	856	88477	1917722	21,57
59	0,0103254	88050	909	87595	1829244	20,78
60	0,0111153	87141	969	86656	1741649	19,99
61	0,0120316	86172	1037	85654	1654993	19,21
62	0,0131064	85135	1116	84577	1569339	18,43
63	0,0143678	84019	1207	83416	1484762	17,67
64	0,0158211	82812	1310	82157	1401346	16,92
65	0,0174507	81502	1422	80791	1319189	16,19
66	0,0192473	80080	1541	79309	1238398	15,46
67	0,0212140	78538	1666	77705	1159089	14,76
68	0,0233625	76872	1796	75974	1081384	14,07
69	0,0257042	75076	1930	74111	1005410	13,39
70	0,0282537	73147	2067	72113	931298	12,73
71	0,0310362	71080	2206	69977	859185	12,09
72	0,0340867	68874	2348	67700	789208	11,46
73	0,0374562	66526	2492	65280	721508	10,85
74	0,0412038	64034	2638	62715	656228	10,25
75	0,0453985	61396	2787	60002	593512	9,67
76	0,0501132	58609	2937	57140	533510	9,10
77	0,0554263	55672	3086	54129	476370	8,56
78	0,0614277	52586	3230	50971	422241	8,03
79	0,0682233	49356	3367	47672	371271	7,52
80	0,0759351	45988	3492	44242	323599	7,04
81	0,0846979	42496	3599	40697	279356	6,57
82	0,0946637	38897	3682	37056	238659	6,14
83	0,1053137	35215	3709	33361	201604	5,72
84	0,1161986	31506	3661	29676	168243	5,34
85	0,1276845	27845	3555	26068	138567	4,98
86	0,1399040	24290	3398	22591	112500	4,63
87	0,1531484	20892	3200	19292	89909	4,30
88	0,1676838	17692	2967	16209	70617	3,99
89	0,1839279	14725	2708	13371	54408	3,69
90	0,2020555	12017	2428	10803	41037	3,41
91	0,2221826	9589	2130	8524	30234	3,15
92	0,2440479	7458	1820	6548	21711	2,91
93	0,2672621	5638	1507	4885	15162	2,69
94	0,2914275	4131	1204	3529	10278	2,49
95	0,3162331	2927	926	2464	6748	2,31
96	0,3414812	2002	684	1660	4284	2,14
97	0,3670574	1318	484	1076	2624	1,99
98	0,3928725	834	328	670	1548	1,86
99	0,4188563	507	212	400	877	1,73
100	1,0000000	294	294	477	477	1,62

Quelle: STATISTIK AUSTRIA

Sterbetafel 2000/2002 weiblich

Genaues Alter (am x-ten Geburts-tag) in Jahren	Sterbe-wahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Altersintervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x bis x+1 noch zu durch-lebende Jahre	Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durch-lebende Jahre	Fernere Lebens-erwartung im Alter x in Jahren
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)
0	0,0037607	100000	376	99624	8147513	81,48
1	0,0003266	99624	33	99608	8047889	80,78
2	0,0002108	99591	21	99581	7948282	79,81
3	0,0001318	99570	13	99564	7848701	78,83
4	0,0000997	99557	10	99552	7749137	77,84
5	0,0000858	99547	9	99543	7649585	76,84
6	0,0000851	99539	8	99535	7550042	75,85
7	0,0000900	99530	9	99526	7450507	74,86
8	0,0000926	99521	9	99517	7350981	73,86
9	0,0000934	99512	9	99508	7251464	72,87
10	0,0000962	99503	10	99498	7151957	71,88
11	0,0001015	99493	10	99488	7052459	70,88
12	0,0001097	99483	11	99478	6952971	69,89
13	0,0001293	99472	13	99466	6853493	68,90
14	0,0001669	99459	17	99451	6754027	67,91
15	0,0002082	99443	21	99432	6654576	66,92
16	0,0002483	99422	25	99410	6555143	65,93
17	0,0002988	99397	30	99383	6455734	64,95
18	0,0003345	99368	33	99351	6356351	63,97
19	0,0003380	99334	34	99318	6257000	62,99
20	0,0003234	99301	32	99285	6157682	62,01
21	0,0003082	99269	31	99254	6058397	61,03
22	0,0002973	99238	30	99223	5959144	60,05
23	0,0002831	99209	28	99195	5859920	59,07
24	0,0002698	99181	27	99167	5760726	58,08
25	0,0002695	99154	27	99141	5661559	57,10
26	0,0002799	99127	28	99113	5562418	56,11
27	0,0002906	99099	29	99085	5463305	55,13
28	0,0003004	99071	30	99056	5364220	54,15
29	0,0003092	99041	31	99026	5265164	53,16
30	0,0003225	99010	32	98994	5166139	52,18
31	0,0003531	98978	35	98961	5067144	51,19
32	0,0003966	98943	39	98924	4968183	50,21
33	0,0004510	98904	45	98882	4869260	49,23
34	0,0005000	98859	49	98835	4770378	48,25
35	0,0005394	98810	53	98783	4671543	47,28
36	0,0005850	98757	58	98728	4572760	46,30
37	0,0006533	98699	64	98667	4474032	45,33
38	0,0007412	98635	73	98598	4375365	44,36
39	0,0008412	98561	83	98520	4276767	43,39
40	0,0009502	98478	94	98432	4178247	42,43
41	0,0010633	98385	105	98333	4079816	41,47
42	0,0011789	98280	116	98222	3981483	40,51
43	0,0012999	98164	128	98101	3883261	39,56
44	0,0014259	98037	140	97967	3785160	38,61
45	0,0015650	97897	153	97820	3687193	37,66
46	0,0017304	97744	169	97659	3589373	36,72
47	0,0019207	97575	187	97481	3491713	35,79
48	0,0021238	97387	207	97284	3394232	34,85
49	0,0023362	97180	227	97067	3296948	33,93
50	0,0025657	96953	249	96829	3199882	33,00

Genaues Alter (am x-ten Geburts-tag) in Jahren	Sterbe-wahrscheinlichkeit im Altersintervall x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Altersintervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x bis x+1 noch zu durch-lebende Jahre	Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durch-lebende Jahre	Fernere Lebens-erwartung im Alter x in Jahren
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)
51	0,0028073	96705	271	96569	3103052	32,09
52	0,0030534	96433	294	96286	3006484	31,18
53	0,0032958	96139	317	95980	2910198	30,27
54	0,0035351	95822	339	95653	2814217	29,37
55	0,0037768	95483	361	95303	2718565	28,47
56	0,0040245	95123	383	94931	2623262	27,58
57	0,0042739	94740	405	94537	2528331	26,69
58	0,0045302	94335	427	94121	2433794	25,80
59	0,0048119	93907	452	93682	2339672	24,91
60	0,0051423	93456	481	93215	2245991	24,03
61	0,0055330	92975	514	92718	2152776	23,15
62	0,0059968	92461	554	92183	2060058	22,28
63	0,0065535	91906	602	91605	1967875	21,41
64	0,0072130	91304	659	90975	1876270	20,55
65	0,0079820	90645	724	90283	1785295	19,70
66	0,0088790	89922	798	89522	1695012	18,85
67	0,0099125	89123	883	88682	1605489	18,01
68	0,0110837	88240	978	87751	1516808	17,19
69	0,0124070	87262	1083	86720	1429057	16,38
70	0,0139145	86179	1199	85580	1342336	15,58
71	0,0156392	84980	1329	84316	1256757	14,79
72	0,0176233	83651	1474	82914	1172441	14,02
73	0,0199112	82177	1636	81359	1089527	13,26
74	0,0225557	80541	1817	79632	1008169	12,52
75	0,0256061	78724	2016	77716	928536	11,79
76	0,0291105	76708	2233	75592	850820	11,09
77	0,0331236	74475	2467	73242	775229	10,41
78	0,0377085	72008	2715	70651	701987	9,75
79	0,0429438	69293	2976	67805	631337	9,11
80	0,0489131	66317	3244	64695	563532	8,50
81	0,0557097	63073	3514	61316	498836	7,91
82	0,0634426	59560	3779	57670	437520	7,35
83	0,0722388	55781	4030	53766	379850	6,81
84	0,0822385	51751	4256	49623	326083	6,30
85	0,0936000	47495	4446	45273	276460	5,82
86	0,1065040	43050	4585	40757	231187	5,37
87	0,1204218	38465	4632	36149	190430	4,95
88	0,1353127	33833	4578	31544	154281	4,56
89	0,1517418	29255	4439	27035	122737	4,20
90	0,1698118	24816	4214	22709	95702	3,86
91	0,1895022	20602	3904	18650	72993	3,54
92	0,2108727	16698	3521	14937	54343	3,25
93	0,2338888	13177	3082	11636	39406	2,99
94	0,2583034	10095	2607	8791	27771	2,75
95	0,2836835	7487	2124	6425	18980	2,53
96	0,3095368	5363	1660	4533	12555	2,34
97	0,3357864	3703	1243	3081	8021	2,17
98	0,3624251	2460	891	2014	4940	2,01
99	0,3893823	1568	611	1263	2926	1,87
100	1,0000000	958	958	1663	1663	1,74

Quelle: STATISTIK AUSTRIA

A.2. Barwerte von Leibrenten

Barwerte einer lebenslang vorschüssigen Rente vom Betrag 1 nach der Sterbetafel 2000/2002

Genaues Alter in Jahren	Zinsfuß																								Genaues Alter in Jahren
	0,0%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%	6,5%	7,0%	7,5%	8,0%	8,5%	9,0%	9,5%	10,0%	10,5%	11,0%	11,5%	12,0%	
	a) männlich - Teil 1																									
0	76,012	62,998	52,981	45,178	39,027	34,121	30,162	26,931	24,266	22,045	20,174	18,585	17,222	16,044	15,017	14,116	13,320	12,613	11,981	11,412	10,899	10,433	10,008	9,620	9,263	0
1	75,415	62,643	52,783	45,082	38,996	34,131	30,198	26,983	24,327	22,110	20,241	18,652	17,288	16,108	15,079	14,176	13,378	12,668	12,033	11,462	10,947	10,479	10,053	9,663	9,305	1
2	74,440	61,972	52,319	44,759	38,769	33,971	30,085	26,902	24,268	22,067	20,210	18,629	17,271	16,095	15,070	14,169	13,372	12,664	12,030	11,460	10,945	10,478	10,052	9,662	9,304	2
3	73,460	61,293	51,846	44,427	38,535	33,805	29,965	26,816	24,206	22,021	20,176	18,603	17,252	16,081	15,059	14,160	13,366	12,659	12,026	11,457	10,943	10,476	10,050	9,661	9,303	3
4	72,474	60,607	51,364	44,087	38,293	33,631	29,840	26,724	24,139	21,972	20,139	18,575	17,230	16,064	15,046	14,150	13,358	12,652	12,021	11,453	10,939	10,473	10,048	9,659	9,302	4
5	71,485	59,914	50,876	43,740	38,045	33,452	29,710	26,629	24,068	21,919	20,099	18,545	17,207	16,046	15,031	14,139	13,348	12,645	12,015	11,447	10,935	10,469	10,045	9,656	9,299	5
6	70,494	59,216	50,381	43,386	37,791	33,268	29,575	26,529	23,994	21,863	20,056	18,512	17,181	16,026	15,015	14,126	13,338	12,636	12,007	11,441	10,930	10,465	10,041	9,653	9,296	6
7	69,503	58,515	49,881	43,027	37,531	33,079	29,436	26,426	23,916	21,804	20,012	18,478	17,154	16,004	14,998	14,112	13,327	12,627	12,000	11,435	10,924	10,460	10,037	9,649	9,293	7
8	68,511	57,809	49,376	42,663	37,266	32,884	29,292	26,319	23,836	21,743	19,965	18,441	17,126	15,981	14,980	14,097	13,314	12,616	11,991	11,427	10,918	10,454	10,032	9,645	9,289	8
9	67,518	57,099	48,865	42,293	36,996	32,685	29,144	26,208	23,752	21,679	19,915	18,402	17,095	15,957	14,960	14,081	13,301	12,605	11,981	11,419	10,911	10,448	10,026	9,640	9,285	9
10	66,525	56,386	48,349	41,917	36,720	32,481	28,992	26,093	23,664	21,612	19,863	18,361	17,063	15,931	14,939	14,063	13,286	12,593	11,971	11,410	10,903	10,442	10,020	9,635	9,280	10
11	65,533	55,669	47,828	41,535	36,438	32,272	28,835	25,974	23,574	21,542	19,808	18,318	17,028	15,903	14,916	14,045	13,271	12,580	11,960	11,401	10,894	10,434	10,014	9,629	9,275	11
12	64,540	54,949	47,301	41,148	36,151	32,057	28,673	25,851	23,479	21,469	19,751	18,273	16,992	15,874	14,892	14,025	13,254	12,566	11,948	11,390	10,885	10,426	10,006	9,622	9,269	12
13	63,548	54,225	46,770	40,755	35,858	31,837	28,506	25,724	23,381	21,392	19,691	18,225	16,953	15,842	14,866	14,003	13,236	12,550	11,934	11,378	10,875	10,417	9,998	9,615	9,262	13
14	62,556	53,499	46,234	40,357	35,560	31,612	28,336	25,593	23,280	21,313	19,628	18,175	16,913	15,810	14,839	13,980	13,217	12,534	11,920	11,366	10,864	10,407	9,990	9,607	9,255	14
15	61,570	52,773	45,697	39,956	35,259	31,385	28,162	25,460	23,176	21,232	19,564	18,124	16,871	15,776	14,811	13,957	13,197	12,517	11,905	11,353	10,853	10,397	9,981	9,599	9,247	15
16	60,592	52,051	45,160	39,555	34,957	31,156	27,987	25,325	23,072	21,150	19,499	18,072	16,830	15,742	14,783	13,934	13,177	12,500	11,891	11,341	10,842	10,388	9,972	9,591	9,241	16
17	59,626	51,335	44,627	39,155	34,656	30,927	27,812	25,191	22,967	21,068	19,435	18,021	16,789	15,709	14,756	13,912	13,159	12,485	11,878	11,330	10,832	10,379	9,965	9,584	9,235	17
18	58,671	50,626	44,097	38,758	34,356	30,699	27,638	25,057	22,864	20,988	19,372	17,971	16,749	15,677	14,731	13,891	13,142	12,471	11,866	11,320	10,824	10,372	9,958	9,579	9,230	18
19	57,726	49,921	43,569	38,360	34,055	30,470	27,463	24,922	22,760	20,907	19,309	17,922	16,710	15,646	14,706	13,871	13,126	12,457	11,856	11,311	10,817	10,366	9,953	9,575	9,226	19
20	56,784	49,216	43,039	37,959	33,751	30,238	27,285	24,785	22,653	20,824	19,244	17,871	16,670	15,614	14,680	13,850	13,109	12,444	11,845	11,302	10,809	10,360	9,948	9,571	9,223	20
21	55,841	48,507	42,503	37,552	33,440	30,000	27,101	24,643	22,543	20,738	19,176	17,817	16,627	15,580	14,653	13,828	13,091	12,430	11,833	11,292	10,801	10,353	9,943	9,566	9,219	21
22	54,898	47,793	41,961	37,139	33,123	29,755	26,912	24,495	22,427	20,647	19,104	17,760	16,582	15,543	14,624	13,805	13,072	12,414	11,820	11,282	10,792	10,346	9,937	9,561	9,215	22
23	53,952	47,075	41,413	36,718	32,799	29,504	26,717	24,342	22,307	20,552	19,029	17,700	16,533	15,504	14,592	13,779	13,051	12,397	11,806	11,270	10,783	10,338	9,930	9,555	9,210	23
24	53,006	46,352	40,858	36,290	32,467	29,246	26,515	24,184	22,182	20,452	18,949	17,636	16,482	15,463	14,558	13,751	13,028	12,378	11,790	11,257	10,772	10,328	9,922	9,549	9,204	24
25	52,058	45,625	40,297	35,856	32,129	28,981	26,306	24,019	22,051	20,348	18,866	17,569	16,427	15,418	14,522	13,721	13,003	12,357	11,773	11,243	10,760	10,318	9,914	9,541	9,198	25
26	51,109	44,893	39,730	35,414	31,783	28,709	26,092	23,848	21,915	20,239	18,778	17,497	16,369	15,371	14,483	13,689	12,977	12,335	11,754	11,227	10,746	10,307	9,904	9,533	9,191	26
27	50,158	44,156	39,155	34,964	31,430	28,430	25,870	23,671	21,773	20,124	18,685	17,422	16,308	15,320	14,441	13,654	12,948	12,310	11,734	11,209	10,732	10,294	9,893	9,524	9,183	27
28	49,206	43,413	38,574	34,507	31,068	28,143	25,641	23,488	21,625	20,004	18,587	17,342	16,242	15,266	14,395	13,616	12,916	12,284	11,711	11,190	10,715	10,280	9,881	9,513	9,174	28
29	48,250	42,665	37,985	34,041	30,698	27,848	25,403	23,296	21,470	19,878	18,484	17,257	16,171	15,207	14,346	13,575	12,881	12,254	11,686	11,169	10,696	10,264	9,867	9,501	9,163	29
30	47,293	41,911	37,389	33,567	30,319	27,543	25,158	23,097	21,308	19,745	18,374	17,166	16,096	15,144	14,293	13,530	12,843	12,222	11,658	11,145	10,676	10,246	9,851	9,487	9,151	30
31	46,334	41,151	36,785	33,085	29,932	27,231	24,905	22,891	21,138	19,606	18,259	17,070	16,016	15,077	14,236	13,482	12,802	12,186	11,627	11,118	10,653	10,226	9,833	9,471	9,137	31
32	45,374	40,388	36,175	32,595	29,537	26,911	24,644	22,677	20,963	19,460	18,138	16,969	15,931	15,005	14,176	13,430	12,757	12,148	11,594	11,089	10,627	10,204	9,814	9,454	9,121	32
33	44,415	39,622	35,560	32,099	29,135	26,583	24,376	22,457	20,781	19,309	18,012	16,863	15,842	14,929	14,111	13,375	12,710	12,107	11,558	11,058	10,600	10,179	9,792	9,435	9,104	33
34	43,459	38,854	34,940	31,597	28,726	26,249	24,101	22,230	20,592	19,152	17,880	16,752	15,748	14,849	14,043	13,316	12,659	12,063	11,520	11,024	10,570	10,153	9,769	9,414	9,086	34
35	42,503	38,083	34,316	31,088	28,310	25,907	23,819	21,996	20,397	18,989	17,743	16,636	15,649	14,765	13,970	13,254	12,605	12,016	11,479	10,988	10,539	10,125	9,744	9,392	9,066	35
36	41,550	37,310	33,686	30,574	27,888	25,559	23,530	21,755	20,196	18,819	17,600	16,515	15,545	14,676	13,894	13,188	12,547	11,966	11,435	10,949	10,504	10,095	9,717	9,368	9,044	36
37	40,598	36,535	33,053	30,053	27,458	25,203	23,234	21,508	19,988	18,644	17,451	16,388	15,436	14,583	13,813	13,117	12,486	11,912	11,388	10,908	10,467	10,062	9,687	9,341	9,020	37
38	39,650	35,760	32,416	29,528	27,023	24,840	22,931	21,253	19,773	18,462	17,296	16,255	15,323	14,484	13,728	13,043	12,421	11,855	11,337	10,863	10,428	10,026	9,656	9,312	8,994	38
39	38,707	34,985	31,777	28,998	26,582	24,472	22,622	20,993	19,553	18,275	17,136	16,118	15,205	14,382	13,639	12,966	12,353	11,795	11,284	10,816	10,386	9,989	9,622	9,282	8,967	39
40	37,770	34,212	31,136	28,465	26,137	24,099	22,308	20,727	19,327	18,082	16,971	15,976	15,082	14,275	13,546	12,884	12,282	11,732	11,228	10,766	10,341	9,949	9,586	9,250	8,937	40
41	36,837	33,439	30,493	27,929	25,687	23,720	21,987	20,455	19,095	17,883	16,800	15,829	14,954	14,164	13,449	12,799	12,207	11,666	11,170	10,714	10,294	9,907	9,548	9,215	8,906	41
42	35,910	32,668	29,849	27,388	25,232	23,336	21,661	20,177	18,857	17,679	16,624	15,676	14,822	14,049	13,348	12,710	12,128	11,596	11,108	10,658	10,245	9,862	9,508	9,179	8,873	42
43	34,989	31,898	29,203	26,844	24,772	22,945	21,329	19,893	18,613	17,469	16,442	15,518	14,684	13,928	13,242	12,616	12,045	11,522	11,042	10,600	10,192	9,814	9,465	9,140	8,838	43
44	34,072	31,128	28,555	26,296	24,307	22,549	20,990	19,602	18,363	17,252	16,254	15,354	14,540	13,802	13,131	12,518	11,958	11,445	10,973	10,538	10,136	9,764	9,419	9,098	8,800	44
45	33,161	30,361	27,905	25,745	23,837	22,147	20,645	19,305	18,106	17,029	16,060	15,184	14,391	13,671	13,015	12,415	11,867	11,363	10,899	10,472	10,076	9,710	9,370	9,054	8,759	45
46	32,256	29,595	27,255	25,190	23,363	21,740	20,294	19,002	17,842	16,800	15,860	15,009	14,237	13,534	12,894	12,308	11,771	11,277	10,822	10,402	10,014	9,653	9,318	9,007	8,716	46
47	31,358	28,832	26,604	24,633	22,885	21,328	19,938	18,692	17,573	16,565	15,654	14,827	14,077	13,393	12,768	12,196	11,670	11,187	10,741	10,329	9,947	9,593	9,264	8,957	8,670	47
48	30,468	28,072	25,953	24,075	22,403	20,912	19,576	18,378	17,299	16,324	15,442	14,641	13,911	13,246	12,637	12,079	11,566	11,093	10,656	10,252	9,878	9,530	9,206	8,904	8,621	48
49	29,586	27,316	25,304	23,514	21,918	20,491	19,210	18,058	17,018	16,078	15,224	14,448	13,741	13,094	12,502	11,957	11,456	10,994	10,567	10,172	9,804	9,463	9,145	8,848	8,570	49
50	28,713	26,565	24,656	22,953	21,432	20,067	18,840	17,733	16,733	15,826	15,002	14,251	13,565	12,937	12,361	11,832	11,343	10,892	10,475	10,088	9,728	9,393	9,081	8,789	8,516	50

Genaues Alter	Zinsfuß																								Genaues Alter
in Jahren	0,0%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%	6,5%	7,0%	7,5%	8,0%	8,5%	9,0%	9,5%	10,0%	10,5%	11,0%	11,5%	12,0%	in Jahren
												a) männlich - Teil 2														
51	27,850	25,820	24,010	22,393	20,943	19,640	18,466	17,405	16,443	15,570	14,775	14,049	13,385	12,776	12,217	11,701	11,226	10,786	10,378	10,000	9,648	9,320	9,014	8,728	8,460	51
52	26,997	25,081	23,368	21,833	20,454	19,211	18,088	17,072	16,149	15,309	14,543	13,842	13,200	12,610	12,068	11,567	11,104	10,676	10,279	9,909	9,565	9,244	8,944	8,664	8,401	52
53	26,155	24,348	22,728	21,273	19,963	18,779	17,708	16,735	15,850	15,044	14,306	13,631	13,011	12,440	11,914	11,428	10,979	10,562	10,175	9,815	9,479	9,165	8,872	8,597	8,339	53
54	25,322	23,620	22,091	20,714	19,471	18,345	17,323	16,394	15,547	14,773	14,064	13,414	12,816	12,265	11,756	11,285	10,849	10,444	10,067	9,716	9,388	9,082	8,795	8,527	8,274	54
55	24,497	22,898	21,456	20,155	18,976	17,907	16,934	16,048	15,238	14,497	13,817	13,191	12,615	12,084	11,592	11,136	10,714	10,321	9,955	9,613	9,294	8,995	8,716	8,453	8,206	55
56	23,681	22,179	20,822	19,594	18,479	17,465	16,541	15,697	14,924	14,214	13,563	12,962	12,408	11,896	11,422	10,982	10,573	10,192	9,837	9,505	9,195	8,904	8,631	8,375	8,134	56
57	22,872	21,464	20,189	19,032	17,979	17,019	16,142	15,339	14,603	13,925	13,302	12,727	12,195	11,702	11,245	10,821	10,426	10,057	9,713	9,391	9,090	8,808	8,542	8,292	8,057	57
58	22,070	20,753	19,557	18,468	17,475	16,568	15,738	14,975	14,275	13,629	13,034	12,484	11,974	11,501	11,062	10,653	10,272	9,916	9,583	9,272	8,980	8,705	8,447	8,205	7,976	58
59	21,275	20,045	18,924	17,902	16,968	16,112	15,327	14,605	13,940	13,326	12,759	12,233	11,745	11,292	10,871	10,478	10,111	9,768	9,447	9,146	8,863	8,597	8,347	8,111	7,889	59
60	20,487	19,340	18,293	17,335	16,458	15,652	14,911	14,228	13,598	13,015	12,475	11,974	11,509	11,076	10,672	10,295	9,943	9,613	9,303	9,013	8,740	8,483	8,240	8,012	7,796	60
61	19,706	18,638	17,662	16,766	15,944	15,187	14,489	13,845	13,249	12,697	12,184	11,708	11,265	10,851	10,465	10,104	9,766	9,450	9,152	8,872	8,609	8,361	8,127	7,906	7,697	61
62	18,934	17,943	17,033	16,198	15,428	14,719	14,063	13,456	12,894	12,372	11,887	11,435	11,013	10,619	10,251	9,906	9,583	9,280	8,994	8,725	8,472	8,233	8,007	7,794	7,592	62
63	18,172	17,253	16,409	15,631	14,912	14,249	13,634	13,064	12,534	12,042	11,583	11,155	10,755	10,381	10,030	9,702	9,393	9,103	8,829	8,572	8,328	8,099	7,881	7,676	7,481	63
64	17,422	16,573	15,790	15,067	14,398	13,778	13,202	12,668	12,170	11,707	11,274	10,869	10,491	10,136	9,803	9,491	9,196	8,919	8,658	8,412	8,179	7,958	7,750	7,552	7,364	64
65	16,686	15,902	15,178	14,507	13,885	13,308	12,771	12,270	11,804	11,368	10,961	10,580	10,222	9,886	9,571	9,274	8,994	8,731	8,482	8,246	8,024	7,813	7,613	7,423	7,243	65
66	15,965	15,243	14,574	13,953	13,376	12,839	12,339	11,872	11,436	11,027	10,645	10,286	9,949	9,632	9,334	9,053	8,787	8,537	8,300	8,076	7,863	7,662	7,470	7,289	7,116	66
67	15,258	14,595	13,979	13,405	12,872	12,374	11,908	11,473	11,066	10,684	10,326	9,989	9,672	9,374	9,092	8,826	8,575	8,338	8,113	7,900	7,698	7,506	7,323	7,150	6,984	67
68	14,567	13,959	13,393	12,864	12,371	11,911	11,479	11,075	10,696	10,339	10,004	9,689	9,392	9,111	8,846	8,596	8,359	8,134	7,921	7,719	7,527	7,345	7,171	7,005	6,848	68
69	13,892	13,335	12,816	12,331	11,876	11,451	11,052	10,677	10,325	9,993	9,681	9,386	9,108	8,845	8,596	8,361	8,138	7,926	7,725	7,533	7,352	7,178	7,013	6,856	6,706	69
70	13,232	12,724	12,249	11,804	11,387	10,995	10,626	10,280	9,954	9,646	9,355	9,081	8,821	8,575	8,343	8,122	7,912	7,713	7,523	7,343	7,171	7,007	6,851	6,702	6,559	70
71	12,588	12,125	11,692	11,285	10,902	10,542	10,204	9,884	9,582	9,298	9,028	8,773	8,532	8,302	8,085	7,878	7,682	7,495	7,317	7,147	6,986	6,831	6,684	6,542	6,407	71
72	11,959	11,539	11,145	10,773	10,424	10,094	9,783	9,489	9,212	8,949	8,700	8,463	8,239	8,026	7,824	7,631	7,448	7,273	7,106	6,947	6,795	6,650	6,511	6,378	6,250	72
73	11,345	10,965	10,608	10,270	9,952	9,651	9,366	9,097	8,841	8,599	8,370	8,152	7,944	7,747	7,559	7,380	7,209	7,046	6,891	6,742	6,599	6,463	6,333	6,208	6,088	73
74	10,748	10,405	10,081	9,775	9,486	9,212	8,952	8,706	8,472	8,250	8,039	7,839	7,647	7,465	7,291	7,125	6,967	6,815	6,671	6,532	6,399	6,272	6,150	6,033	5,920	74
75	10,167	9,858	9,566	9,290	9,028	8,779	8,543	8,319	8,105	7,902	7,709	7,525	7,349	7,181	7,021	6,868	6,721	6,581	6,447	6,318	6,194	6,076	5,962	5,853	5,747	75
76	9,603	9,326	9,063	8,814	8,578	8,353	8,139	7,935	7,741	7,556	7,380	7,211	7,050	6,896	6,749	6,608	6,473	6,343	6,219	6,100	5,985	5,875	5,770	5,668	5,570	76
77	9,057	8,809	8,574	8,350	8,137	7,934	7,741	7,556	7,380	7,212	7,052	6,898	6,751	6,611	6,476	6,346	6,222	6,103	5,989	5,879	5,773	5,672	5,574	5,479	5,388	77
78	8,530	8,309	8,098	7,898	7,707	7,524	7,350	7,184	7,025	6,873	6,727	6,588	6,454	6,326	6,203	6,085	5,971	5,862	5,757	5,656	5,559	5,465	5,375	5,287	5,203	78
79	8,022	7,826	7,638	7,460	7,289	7,125	6,969	6,819	6,676	6,539	6,407	6,281	6,160	6,043	5,931	5,824	5,720	5,620	5,524	5,432	5,343	5,257	5,174	5,093	5,016	79
80	7,537	7,362	7,196	7,036	6,884	6,738	6,598	6,464	6,335	6,212	6,093	5,979	5,870	5,764	5,663	5,565	5,471	5,380	5,293	5,208	5,127	5,048	4,972	4,898	4,827	80
81	7,074	6,920	6,772	6,630	6,495	6,365	6,240	6,120	6,005	5,894	5,787	5,685	5,586	5,491	5,399	5,311	5,226	5,143	5,064	4,987	4,912	4,841	4,771	4,704	4,639	81
82	6,636	6,500	6,369	6,244	6,123	6,008	5,897	5,790	5,687	5,588	5,492	5,400	5,311	5,226	5,143	5,063	4,986	4,911	4,839	4,769	4,702	4,637	4,573	4,512	4,452	82
83	6,225	6,105	5,990	5,879	5,772	5,670	5,571	5,476	5,384	5,295	5,210	5,127	5,048	4,971	4,896	4,824	4,755	4,687	4,622	4,559	4,498	4,439	4,381	4,325	4,271	83
84	5,840	5,734	5,633	5,535	5,441	5,350	5,262	5,178	5,096	5,017	4,941	4,867	4,796	4,727	4,660	4,595	4,533	4,472	4,413	4,356	4,301	4,247	4,195	4,144	4,095	84
85	5,476	5,384	5,294	5,208	5,125	5,045	4,967	4,892	4,820	4,750	4,682	4,616	4,552	4,491	4,431	4,373	4,317	4,262	4,209	4,158	4,108	4,060	4,012	3,967	3,922	85
86	5,132	5,051	4,972	4,897	4,823	4,753	4,684	4,618	4,554	4,492	4,432	4,373	4,317	4,262	4,208	4,157	4,106	4,058	4,010	3,964	3,919	3,876	3,833	3,792	3,752	86
87	4,804	4,733	4,665	4,598	4,534	4,472	4,412	4,354	4,297	4,242	4,189	4,138	4,087	4,039	3,991	3,945	3,901	3,857	3,815	3,774	3,733	3,694	3,656	3,619	3,583	87
88	4,491	4,430	4,371	4,313	4,257	4,203	4,150	4,099	4,049	4,001	3,954	3,909	3,865	3,822	3,780	3,739	3,699	3,661	3,623	3,586	3,551	3,516	3,482	3,449	3,416	88
89	4,195	4,142	4,090	4,040	3,991	3,944	3,898	3,854	3,810	3,768	3,727	3,687	3,648	3,610	3,573	3,537	3,502	3,468	3,435	3,403	3,371	3,340	3,310	3,280	3,252	89
90	3,915	3,869	3,824	3,781	3,739	3,698	3,658	3,619	3,581	3,545	3,509	3,474	3,440	3,407	3,374	3,343	3,312	3,282	3,252	3,224	3,196	3,168	3,142	3,116	3,090	90
91	3,653	3,614	3,575	3,538	3,501	3,466	3,431	3,397	3,364	3,332	3,301	3,271	3,241	3,212	3,184	3,156	3,129	3,103	3,077	3,052	3,027	3,003	2,979	2,956	2,934	91
92	3,411	3,377	3,344	3,311	3,280	3,249	3,219	3,190	3,161	3,134	3,106	3,080	3,054	3,029	3,004	2,980	2,956	2,933	2,910	2,888	2,867	2,845	2,825	2,804	2,785	92
93	3,189	3,160	3,131	3,103	3,076	3,050	3,024	2,998	2,974	2,949	2,926	2,903	2,880	2,858	2,836	2,815	2,795	2,774	2,755	2,735	2,716	2,698	2,679	2,661	2,644	93
94	2,988	2,962	2,938	2,914	2,890	2,867	2,845	2,823	2,801	2,780	2,760	2,739	2,720	2,700	2,682	2,663	2,645	2,627	2,610	2,593	2,576	2,560	2,544	2,528	2,513	94
95	2,805	2,783	2,762	2,741	2,721	2,701	2,681	2,662	2,644	2,625	2,607	2,590	2,573	2,556	2,539	2,523	2,507	2,492	2,477	2,462	2,447	2,433	2,419	2,405	2,391	95
96	2,640	2,621	2,603	2,585	2,567	2,550	2,533	2,516	2,500	2,484	2,468	2,453	2,438	2,423	2,409	2,395	2,381	2,367	2,354	2,341	2,328	2,315	2,303	2,291	2,279	96
97	2,491	2,474	2,458	2,443	2,427	2,412	2,397	2,383	2,369	2,355	2,341	2,328	2,315	2,302	2,289	2,277	2,265	2,253	2,241	2,229	2,218	2,207	2,196	2,185	2,175	97
98	2,355	2,341	2,327	2,313	2,300	2,287	2,274	2,261	2,249	2,237	2,225	2,213	2,202	2,190	2,179	2,169	2,158	2,147	2,137	2,127	2,117	2,107	2,097	2,088	2,079	98
99	2,232	2,220	2,208	2,196	2,184	2,173	2,161	2,150	2,140	2,129	2,119	2,108	2,098	2,088	2,079	2,069	2,060	2,050	2,041	2,032	2,024	2,015	2,006	1,998	1,990	99
100	2,120	2,109	2,099	2,088	2,078	2,068	2,058	2,049	2,039	2,030	2,021	2,012	2,003	1,994	1,986	1,977	1,969	1,961	1,953	1,945	1,937	1,930	1,922	1,915	1,908	100

Q: STATISTIK AUSTRIA.

Barwerte einer lebenslang vorschüssigen Rente vom Betrag 1 nach der Sterbetafel 2000/2002

b) weiblich - Teil 1

Genaues Alter	Zinsfuß																									Genaues Alter
in Jahren	0,0%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%	6,5%	7,0%	7,5%	8,0%	8,5%	9,0%	9,5%	10,0%	10,5%	11,0%	11,5%	12,0%	in Jahren
0	81,977	67,140	55,880	47,226	40,487	35,172	30,927	27,495	24,687	22,362	20,418	18,774	17,371	16,163	15,114	14,196	13,387	12,670	12,029	11,454	10,935	10,465	10,037	9,646	9,287	0
1	81,283	66,721	55,638	47,096	40,429	35,159	30,942	27,526	24,727	22,408	20,466	18,822	17,419	16,210	15,159	14,239	13,429	12,709	12,067	11,490	10,970	10,499	10,069	9,677	9,317	1
2	80,309	66,071	55,203	46,803	40,230	35,024	30,850	27,463	24,684	22,379	20,446	18,809	17,410	16,203	15,155	14,237	13,427	12,709	12,067	11,491	10,971	10,500	10,070	9,678	9,318	2
3	79,326	65,410	54,756	46,500	40,023	34,882	30,752	27,395	24,637	22,345	20,422	18,792	17,398	16,195	15,149	14,233	13,424	12,707	12,066	11,490	10,970	10,499	10,070	9,678	9,318	3
4	78,336	64,741	54,301	46,188	39,809	34,734	30,648	27,323	24,586	22,309	20,396	18,773	17,384	16,185	15,142	14,227	13,420	12,703	12,063	11,488	10,969	10,498	10,069	9,677	9,317	4
5	77,344	64,066	53,839	45,871	39,589	34,580	30,541	27,247	24,532	22,270	20,368	18,753	17,369	16,174	15,133	14,221	13,415	12,699	12,060	11,485	10,967	10,496	10,068	9,676	9,316	5
6	76,350	63,387	53,372	45,548	39,364	34,423	30,430	27,168	24,475	22,229	20,338	18,730	17,352	16,161	15,124	14,213	13,409	12,695	12,056	11,482	10,964	10,494	10,066	9,675	9,315	6
7	75,357	62,704	52,901	45,220	39,135	34,261	30,315	27,086	24,416	22,186	20,306	18,707	17,335	16,148	15,114	14,206	13,403	12,690	12,052	11,479	10,962	10,492	10,064	9,673	9,314	7
8	74,363	62,018	52,424	44,887	38,901	34,096	30,197	27,001	24,355	22,142	20,274	18,683	17,317	16,134	15,103	14,197	13,397	12,685	12,048	11,476	10,959	10,490	10,062	9,671	9,312	8
9	73,370	61,329	51,943	44,549	38,663	33,927	30,076	26,914	24,291	22,095	20,239	18,657	17,297	16,119	15,091	14,188	13,390	12,679	12,044	11,472	10,956	10,487	10,060	9,669	9,311	9
10	72,377	60,636	51,458	44,207	38,420	33,753	29,951	26,823	24,225	22,046	20,203	18,630	17,277	16,104	15,079	14,179	13,382	12,673	12,039	11,468	10,952	10,484	10,058	9,667	9,309	10
11	71,384	59,940	50,967	43,859	38,172	33,575	29,823	26,730	24,156	21,996	20,165	18,601	17,255	16,087	15,066	14,169	13,374	12,667	12,033	11,464	10,949	10,481	10,055	9,665	9,307	11
12	70,391	59,241	50,472	43,506	37,919	33,393	29,690	26,633	24,085	21,943	20,125	18,571	17,232	16,069	15,052	14,158	13,365	12,659	12,028	11,459	10,945	10,478	10,052	9,662	9,305	12
13	69,399	58,539	49,972	43,149	37,661	33,206	29,554	26,533	24,011	21,887	20,084	18,540	17,208	16,050	15,038	14,146	13,356	12,652	12,021	11,454	10,940	10,474	10,049	9,660	9,302	13
14	68,407	57,834	49,468	42,787	37,400	33,016	29,415	26,430	23,935	21,830	20,041	18,507	17,183	16,031	15,022	14,134	13,346	12,644	12,015	11,448	10,936	10,470	10,046	9,657	9,300	14
15	67,419	57,128	48,961	42,420	37,134	32,821	29,272	26,325	23,856	21,771	19,996	18,473	17,156	16,011	15,006	14,121	13,336	12,636	12,008	11,443	10,931	10,466	10,042	9,654	9,297	15
16	66,432	56,420	48,451	42,050	36,864	32,624	29,126	26,217	23,775	21,710	19,950	18,438	17,129	15,990	14,990	14,108	13,326	12,627	12,001	11,437	10,927	10,462	10,039	9,651	9,295	16
17	65,449	55,711	47,937	41,677	36,590	32,422	28,977	26,106	23,692	21,648	19,902	18,401	17,101	15,968	14,973	14,095	13,315	12,619	11,994	11,432	10,922	10,459	10,036	9,648	9,292	17
18	64,468	55,001	47,421	41,299	36,313	32,218	28,825	25,992	23,607	21,583	19,853	18,364	17,073	15,945	14,956	14,081	13,304	12,610	11,988	11,426	10,917	10,455	10,033	9,646	9,290	18
19	63,489	54,289	46,901	40,917	36,031	32,009	28,670	25,875	23,519	21,517	19,803	18,325	17,043	15,922	14,938	14,067	13,293	12,601	11,980	11,420	10,913	10,451	10,030	9,643	9,288	19
20	62,510	53,574	46,375	40,530	35,744	31,795	28,509	25,755	23,428	21,447	19,750	18,284	17,011	15,898	14,918	14,052	13,281	12,592	11,973	11,414	10,908	10,447	10,026	9,641	9,286	20
21	61,530	52,854	45,844	40,136	35,450	31,575	28,344	25,630	23,332	21,374	19,693	18,241	16,977	15,871	14,897	14,035	13,268	12,581	11,964	11,407	10,902	10,442	10,022	9,637	9,283	21
22	60,549	52,129	45,306	39,735	35,150	31,349	28,173	25,499	23,233	21,298	19,634	18,195	16,941	15,843	14,875	14,017	13,253	12,569	11,955	11,399	10,896	10,437	10,018	9,634	9,280	22
23	59,567	51,400	44,763	39,328	34,844	31,117	27,996	25,364	23,129	21,217	19,572	18,146	16,902	15,812	14,850	13,998	13,237	12,557	11,944	11,391	10,888	10,431	10,013	9,629	9,277	23
24	58,583	50,666	44,213	38,914	34,530	30,878	27,814	25,224	23,021	21,133	19,506	18,094	16,861	15,779	14,824	13,976	13,220	12,542	11,932	11,381	10,880	10,424	10,007	9,625	9,272	24
25	57,599	49,928	43,657	38,493	34,210	30,634	27,626	25,079	22,908	21,045	19,436	18,039	16,818	15,744	14,796	13,953	13,201	12,527	11,920	11,370	10,871	10,417	10,001	9,619	9,268	25
26	56,614	49,186	43,095	38,065	33,884	30,383	27,432	24,928	22,790	20,953	19,363	17,981	16,771	15,707	14,765	13,929	13,181	12,510	11,906	11,358	10,861	10,408	9,993	9,613	9,262	26
27	55,630	48,440	42,528	37,632	33,551	30,126	27,233	24,773	22,668	20,856	19,287	17,920	16,722	15,667	14,733	13,902	13,159	12,492	11,890	11,346	10,851	10,399	9,985	9,606	9,256	27
28	54,645	47,691	41,955	37,192	33,211	29,863	27,027	24,612	22,542	20,756	19,207	17,856	16,670	15,625	14,699	13,874	13,136	12,472	11,874	11,332	10,839	10,389	9,977	9,598	9,250	28
29	53,662	46,939	41,377	36,746	32,865	29,593	26,816	24,446	22,410	20,651	19,123	17,788	16,615	15,580	14,662	13,843	13,110	12,451	11,856	11,317	10,826	10,378	9,967	9,590	9,242	29
30	52,678	46,183	40,793	36,293	32,513	29,317	26,599	24,274	22,273	20,542	19,035	17,717	16,557	15,533	14,623	13,811	13,083	12,429	11,837	11,300	10,812	10,366	9,957	9,581	9,234	30
31	51,695	45,423	40,204	35,834	32,153	29,034	26,376	24,096	22,131	20,428	18,943	17,642	16,496	15,482	14,581	13,776	13,054	12,404	11,816	11,282	10,796	10,352	9,945	9,571	9,225	31
32	50,712	44,661	39,610	35,369	31,788	28,745	26,146	23,913	21,984	20,309	18,847	17,563	16,432	15,429	14,537	13,739	13,023	12,378	11,794	11,263	10,780	10,338	9,933	9,560	9,216	32
33	49,732	43,897	39,012	34,899	31,416	28,450	25,911	23,724	21,832	20,186	18,746	17,481	16,364	15,373	14,490	13,700	12,990	12,350	11,770	11,243	10,762	10,323	9,919	9,548	9,205	33
34	48,754	43,131	38,409	34,423	31,038	28,149	25,670	23,530	21,675	20,058	18,642	17,396	16,293	15,314	14,441	13,659	12,955	12,320	11,744	11,221	10,743	10,306	9,905	9,535	9,194	34
35	47,778	42,363	37,802	33,941	30,654	27,842	25,422	23,331	21,513	19,926	18,534	17,306	16,219	15,253	14,389	13,615	12,918	12,288	11,717	11,197	10,723	10,288	9,889	9,521	9,182	35
36	46,803	41,592	37,190	33,453	30,264	27,528	25,169	23,125	21,345	19,788	18,420	17,212	16,141	15,187	14,334	13,568	12,878	12,254	11,688	11,172	10,701	10,269	9,872	9,507	9,169	36
37	45,830	40,819	36,574	32,959	29,866	27,207	24,908	22,912	21,171	19,645	18,302	17,114	16,059	15,118	14,276	13,519	12,836	12,218	11,657	11,145	10,677	10,248	9,854	9,490	9,154	37
38	44,859	40,044	35,953	32,460	29,463	26,879	24,642	22,694	20,992	19,497	18,179	17,011	15,973	15,046	14,215	13,467	12,792	12,180	11,623	11,116	10,652	10,226	9,834	9,473	9,139	38
39	43,892	39,269	35,329	31,955	29,054	26,546	24,369	22,470	20,807	19,344	18,051	16,904	15,883	14,970	14,150	13,412	12,744	12,139	11,588	11,085	10,625	10,202	9,813	9,454	9,122	39
40	42,928	38,492	34,701	31,446	28,639	26,207	24,090	22,240	20,617	19,185	17,919	16,793	15,789	14,890	14,082	13,354	12,694	12,096	11,551	11,053	10,596	10,177	9,791	9,434	9,104	40
41	41,968	37,716	34,071	30,932	28,219	25,861	23,806	22,005	20,421	19,022	17,782	16,678	15,692	14,807	14,011	13,293	12,642	12,051	11,511	11,018	10,566	10,151	9,767	9,413	9,085	41
42	41,012	36,938	33,437	30,414	27,792	25,510	23,515	21,763	20,219	18,853	17,639	16,558	15,590	14,720	13,937	13,229	12,587	12,003	11,469	10,982	10,534	10,122	9,742	9,391	9,065	42
43	40,059	36,161	32,800	29,890	27,361	25,153	23,218	21,515	20,011	18,678	17,492	16,433	15,483	14,629	13,859	13,162	12,529	11,952	11,425	10,943	10,500	10,092	9,715	9,367	9,044	43
44	39,110	35,383	32,160	29,362	26,923	24,789	22,914	21,261	19,798	18,498	17,339	16,303	15,372	14,534	13,777	13,091	12,467	11,898	11,378	10,902	10,463	10,060	9,687	9,341	9,021	44
45	38,164	34,604	31,516	28,828	26,479	24,418	22,603	21,000	19,577	18,311	17,181	16,167	15,256	14,434	13,691	13,016	12,402	11,841	11,328	10,858	10,425	10,025	9,656	9,314	8,996	45
46	37,222	33,825	30,870	28,290	26,029	24,041	22,286	20,732	19,351	18,119	17,016	16,027	15,135	14,330	13,601	12,938	12,334	11,781	11,276	10,811	10,383	9,988	9,623	9,284	8,970	46
47	36,285	33,046	30,221	27,747	25,574	23,658	21,963	20,458	19,118	17,920	16,846	15,881	15,009	14,221	13,506	12,855	12,261	11,718	11,220	10,762	10,339	9,949	9,588	9,253	8,941	47
48	35,353	32,268	29,570	27,201	25,114	23,269	21,633	20,178	18,879	17,716	16,671	15,729	14,879	14,108	13,407	12,769	12,186	11,652	11,161	10,710	10,293	9,908	9,551	9,220	8,912	48
49	34,426	31,491	28,917	26,650	24,648	22,875	21,298	19,892	18,634	17,505	16,489	15,572	14,743	13,989	13,304	12,678	12,106	11,582	11,099	10,655	10,244	9,864	9,512	9,185	8,880	49
50	33,504	30,716	28,262	26,096	24,178	22,474	20,956	19,599	18,382	17,288	16,302	15,410	14,601	13,866	13,196	12,584	12,023	11,508	11,034	10,597	10,192	9,818	9,471	9,147	8,846	50

Genaues Alter in Jahren	Zinsfuß																									Genaues Alter in Jahren
	0,0%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%	6,5%	7,0%	7,5%	8,0%	8,5%	9,0%	9,5%	10,0%	10,5%	11,0%	11,5%	12,0%	
													b) weiblich - Teil 2													
51	32,588	29,941	27,605	25,538	23,702	22,067	20,607	19,299	18,124	17,065	16,108	15,242	14,454	13,738	13,083	12,485	11,935	11,430	10,965	10,535	10,138	9,769	9,426	9,108	8,810	51
52	31,677	29,168	26,947	24,976	23,222	21,655	20,252	18,993	17,859	16,835	15,908	15,067	14,302	13,604	12,966	12,381	11,843	11,349	10,893	10,471	10,080	9,717	9,380	9,065	8,772	52
53	30,771	28,395	26,287	24,410	22,735	21,236	19,891	18,680	17,587	16,598	15,702	14,886	14,143	13,464	12,842	12,272	11,747	11,263	10,816	10,402	10,018	9,662	9,330	9,020	8,731	53
54	29,869	27,623	25,624	23,840	22,243	20,811	19,522	18,359	17,307	16,354	15,488	14,698	13,978	13,318	12,713	12,157	11,645	11,172	10,735	10,329	9,953	9,603	9,277	8,972	8,688	54
55	28,972	26,851	24,959	23,265	21,745	20,378	19,145	18,030	17,020	16,102	15,266	14,503	13,805	13,165	12,578	12,036	11,537	11,076	10,648	10,252	9,883	9,540	9,220	8,921	8,641	55
56	28,078	26,079	24,290	22,685	21,240	19,938	18,760	17,693	16,724	15,841	15,036	14,300	13,625	13,005	12,435	11,909	11,423	10,974	10,557	10,169	9,809	9,473	9,159	8,865	8,590	56
57	27,187	25,306	23,618	22,099	20,728	19,490	18,367	17,347	16,419	15,572	14,797	14,088	13,437	12,837	12,285	11,775	11,303	10,865	10,459	10,081	9,729	9,400	9,093	8,805	8,535	57
58	26,300	24,533	22,942	21,507	20,209	19,033	17,965	16,992	16,104	15,293	14,550	13,867	13,239	12,661	12,127	11,633	11,175	10,750	10,354	9,986	9,643	9,322	9,021	8,740	8,476	58
59	25,415	23,758	22,262	20,909	19,683	18,568	17,553	16,627	15,780	15,004	14,292	13,637	13,033	12,475	11,960	11,482	11,039	10,627	10,243	9,885	9,550	9,237	8,944	8,669	8,411	59
60	24,533	22,982	21,579	20,306	19,149	18,094	17,132	16,252	15,446	14,705	14,024	13,396	12,816	12,280	11,784	11,323	10,894	10,495	10,123	9,776	9,451	9,146	8,861	8,593	8,340	60
61	23,654	22,206	20,892	19,697	18,607	17,612	16,702	15,867	15,101	14,396	13,746	13,145	12,590	12,076	11,598	11,154	10,741	10,356	9,996	9,659	9,344	9,048	8,771	8,510	8,264	61
62	22,780	21,431	20,203	19,083	18,059	17,122	16,263	15,473	14,747	14,076	13,457	12,885	12,354	11,861	11,403	10,977	10,579	10,207	9,860	9,535	9,229	8,943	8,673	8,420	8,181	62
63	21,912	20,657	19,512	18,465	17,505	16,625	15,816	15,070	14,383	13,747	13,159	12,614	12,108	11,637	11,198	10,790	10,408	10,050	9,716	9,402	9,107	8,830	8,569	8,323	8,091	63
64	21,050	19,886	18,820	17,844	16,947	16,121	15,361	14,659	14,010	13,409	12,851	12,334	11,852	11,403	10,984	10,593	10,227	9,884	9,563	9,261	8,976	8,709	8,457	8,219	7,994	64
65	20,195	19,118	18,129	17,220	16,384	15,612	14,899	14,240	13,629	13,061	12,534	12,044	11,587	11,160	10,761	10,388	10,038	9,709	9,401	9,111	8,838	8,580	8,337	8,108	7,890	65
66	19,350	18,355	17,440	16,596	15,818	15,098	14,431	13,813	13,239	12,706	12,209	11,745	11,312	10,907	10,528	10,173	9,839	9,526	9,231	8,953	8,691	8,444	8,210	7,989	7,779	66
67	18,514	17,598	16,753	15,972	15,249	14,580	13,958	13,381	12,843	12,342	11,874	11,437	11,029	10,646	10,287	9,949	9,632	9,333	9,052	8,787	8,536	8,299	8,075	7,862	7,661	67
68	17,690	16,848	16,070	15,349	14,680	14,059	13,481	12,942	12,440	11,971	11,532	11,122	10,737	10,376	10,036	9,717	9,416	9,132	8,865	8,612	8,373	8,146	7,931	7,728	7,535	68
69	16,877	16,106	15,391	14,727	14,110	13,535	12,999	12,499	12,031	11,593	11,183	10,798	10,437	10,097	9,777	9,475	9,191	8,922	8,668	8,428	8,201	7,985	7,780	7,586	7,401	69
70	16,076	15,372	14,718	14,108	13,540	13,010	12,514	12,051	11,616	11,209	10,826	10,467	10,129	9,810	9,509	9,226	8,957	8,704	8,464	8,236	8,020	7,815	7,621	7,435	7,259	70
71	15,289	14,648	14,050	13,493	12,971	12,484	12,027	11,599	11,197	10,819	10,463	10,129	9,813	9,515	9,233	8,967	8,715	8,477	8,250	8,035	7,831	7,637	7,452	7,277	7,109	71
72	14,516	13,934	13,390	12,881	12,405	11,958	11,538	11,144	10,773	10,424	10,094	9,784	9,490	9,212	8,950	8,701	8,465	8,241	8,028	7,826	7,634	7,451	7,276	7,110	6,951	72
73	13,758	13,232	12,739	12,276	11,842	11,433	11,049	10,687	10,346	10,025	9,720	9,433	9,161	8,903	8,659	8,427	8,207	7,997	7,798	7,609	7,428	7,256	7,091	6,934	6,784	73
74	13,018	12,543	12,097	11,678	11,283	10,911	10,561	10,230	9,918	9,622	9,343	9,078	8,826	8,588	8,361	8,146	7,941	7,746	7,561	7,383	7,214	7,053	6,899	6,751	6,610	74
75	12,295	11,868	11,466	11,088	10,731	10,394	10,075	9,774	9,488	9,218	8,962	8,718	8,487	8,268	8,058	7,859	7,670	7,489	7,316	7,151	6,994	6,843	6,699	6,561	6,428	75
76	11,592	11,209	10,849	10,508	10,186	9,882	9,593	9,319	9,060	8,814	8,580	8,357	8,145	7,943	7,751	7,568	7,393	7,225	7,065	6,913	6,766	6,626	6,492	6,363	6,239	76
77	10,909	10,568	10,246	9,940	9,651	9,377	9,116	8,869	8,634	8,410	8,197	7,994	7,801	7,616	7,440	7,272	7,111	6,957	6,810	6,668	6,533	6,403	6,279	6,159	6,044	77
78	10,249	9,945	9,658	9,385	9,126	8,880	8,646	8,423	8,211	8,009	7,816	7,632	7,456	7,288	7,127	6,973	6,826	6,685	6,549	6,420	6,295	6,175	6,060	5,949	5,843	78
79	9,611	9,342	9,087	8,844	8,614	8,394	8,184	7,984	7,793	7,611	7,437	7,271	7,111	6,959	6,813	6,673	6,539	6,410	6,286	6,167	6,053	5,943	5,837	5,735	5,637	79
80	8,998	8,760	8,535	8,319	8,114	7,918	7,732	7,553	7,382	7,219	7,062	6,912	6,769	6,631	6,499	6,372	6,250	6,133	6,020	5,912	5,807	5,707	5,610	5,516	5,426	80
81	8,409	8,200	8,001	7,811	7,630	7,456	7,290	7,131	6,979	6,833	6,693	6,558	6,429	6,305	6,186	6,072	5,962	5,856	5,753	5,655	5,560	5,468	5,380	5,295	5,212	81
82	7,846	7,663	7,488	7,321	7,161	7,008	6,861	6,720	6,585	6,455	6,330	6,210	6,095	5,984	5,877	5,774	5,675	5,579	5,487	5,398	5,312	5,229	5,149	5,071	4,996	82
83	7,310	7,150	6,997	6,851	6,710	6,575	6,446	6,321	6,202	6,086	5,976	5,869	5,766	5,667	5,572	5,480	5,391	5,305	5,222	5,142	5,064	4,989	4,917	4,847	4,779	83
84	6,801	6,662	6,529	6,401	6,278	6,160	6,046	5,936	5,831	5,729	5,631	5,537	5,446	5,358	5,273	5,191	5,111	5,034	4,960	4,888	4,819	4,751	4,686	4,623	4,562	84
85	6,321	6,200	6,085	5,973	5,866	5,763	5,663	5,567	5,474	5,385	5,299	5,215	5,135	5,057	4,981	4,908	4,838	4,770	4,703	4,639	4,577	4,517	4,458	4,402	4,347	85
86	5,870	5,766	5,666	5,569	5,476	5,386	5,299	5,215	5,134	5,055	4,980	4,906	4,835	4,767	4,700	4,635	4,573	4,512	4,454	4,397	4,341	4,287	4,235	4,184	4,135	86
87	5,451	5,361	5,274	5,190	5,109	5,031	4,956	4,882	4,812	4,743	4,677	4,612	4,550	4,489	4,431	4,374	4,319	4,265	4,213	4,163	4,113	4,066	4,019	3,974	3,930	87
88	5,060	4,983	4,908	4,836	4,765	4,698	4,632	4,568	4,507	4,447	4,389	4,333	4,278	4,225	4,174	4,124	4,075	4,028	3,982	3,937	3,894	3,851	3,810	3,770	3,731	88
89	4,695	4,629	4,565	4,502	4,442	4,383	4,326	4,271	4,218	4,166	4,115	4,066	4,019	3,972	3,927	3,883	3,841	3,799	3,759	3,719	3,681	3,644	3,607	3,572	3,537	89
90	4,357	4,300	4,244	4,191	4,139	4,088	4,039	3,991	3,945	3,900	3,856	3,814	3,772	3,732	3,692	3,654	3,617	3,580	3,545	3,510	3,477	3,444	3,412	3,380	3,350	90
91	4,043	3,994	3,947	3,901	3,856	3,813	3,771	3,729	3,689	3,650	3,612	3,575	3,539	3,504	3,470	3,437	3,404	3,372	3,341	3,311	3,282	3,253	3,225	3,197	3,170	91
92	3,755	3,713	3,672	3,633	3,595	3,557	3,521	3,485	3,451	3,417	3,384	3,352	3,321	3,291	3,261	3,232	3,204	3,176	3,149	3,122	3,097	3,071	3,047	3,023	2,999	92
93	3,491	3,455	3,420	3,387	3,354	3,322	3,290	3,260	3,230	3,201	3,173	3,145	3,118	3,091	3,066	3,040	3,016	2,992	2,968	2,945	2,923	2,900	2,879	2,858	2,837	93
94	3,251	3,221	3,191	3,162	3,134	3,106	3,079	3,053	3,027	3,002	2,978	2,954	2,930	2,907	2,885	2,863	2,842	2,821	2,800	2,780	2,760	2,741	2,722	2,704	2,686	94
95	3,035	3,009	2,983	2,959	2,934	2,911	2,887	2,865	2,843	2,821	2,800	2,779	2,759	2,739	2,719	2,700	2,682	2,663	2,646	2,628	2,611	2,594	2,578	2,561	2,546	95
96	2,841	2,818	2,797	2,775	2,754	2,734	2,714	2,694	2,675	2,656	2,638	2,620	2,602	2,585	2,568	2,552	2,535	2,520	2,504	2,489	2,474	2,459	2,445	2,430	2,416	96
97	2,666	2,647	2,628	2,610	2,592	2,574	2,557	2,540	2,523	2,507	2,491	2,475	2,460	2,445	2,430	2,416	2,402	2,388	2,374	2,361	2,348	2,335	2,322	2,310	2,298	97
98	2,508	2,492	2,476	2,460	2,444	2,429	2,414	2,399	2,385	2,371	2,357	2,343	2,330	2,317	2,304	2,292	2,279	2,267	2,255	2,244	2,232	2,221	2,210	2,199	2,188	98
99	2,366	2,352	2,338	2,324	2,310	2,297	2,284	2,271	2,259	2,247	2,235	2,223	2,211	2,200	2,189	2,178	2,167	2,156	2,146	2,136	2,126	2,116	2,106	2,097	2,087	99
100	2,237	2,224	2,212	2,200	2,189	2,177	2,166	2,155	2,144	2,134	2,123	2,113	2,103	2,093	2,083	2,073	2,064	2,055	2,046	2,037	2,028	2,019	2,011	2,002	1,994	100

Q: STATISTIK AUSTRIA.

B. Bibliographie

1. BERGER, Alfred (1939): *Mathematik der Lebensversicherung*, Wien

2. CZUBER, Emanuel (1928): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherungen*, Wien

3. GERBER, Hans U. (1986): *Lebensversicherungsmathematik*, Berlin

4. GOLDAMMER, Verena (WS 2007/08**a**): *Übungen zur Lebensversicherungsmathematik* an der Technischen Universität Wien, Übungsmaterialien, Wien

5. GOLDAMMER, Verena (WS 2007/08**b**): *Vorlesung Lebensversicherungsmathematik* an der Technischen Universität Wien, Vorlesungsunterlagen, Wien

6. HANIKA, Alexander/TRIMMEL, Harald (2005): *Sterbetafel 2000/02 für Österreich*, in: Statistische Nachrichten 2/2005, S. 121 – 131, Wien

7. HARTMANN, Petra (2007): *Mathematische Modelle im Asset-Liability-Management von Versicherungen*, Diplomarbeit an der Universität Wien, Wien

8. KOLLER, Michael (2000): *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung*, Berlin

9. KOTH, Maria/BAUMGARTNER, Roland (1996): *Unterrichtsvorschläge zum Themenbereich Spar- und Kreditwesen. Skriptum für MathematiklehrerInnen an der AHS*, Wien

10. KRENGEL, Ulrich (1998): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Braunschweig – Wiesbaden

11. MÜNZ, Hans (1932): *Einführung in die Lebensversicherung*, Wien

12. SCHMIDT, Klaus D. (2005): *Versicherungsmathematik*, Dresden

13. SCHNEIDER, Gerold u. a. (2002): *Mathematik II HAK/ LW Erklärungen; Beispiele, Aufgaben, Formeln*, Linz

Quellen aus dem Internet:

14. DISCH, Burkhard (2002): *Kalkulation und Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung*; auf: *http : //www.diplomarbeiten24.de/vorschau/39133.html*; 19. 07. 2008

15. FRAKTION SOZIALDEMOKRATISCHER GEWERKSCHAFTERINNEN IM ÖGB (Hrsg.) (2005): *Geschichte der Krankenversicherung, Unfallversicherung und Pensionsversicherung in Österreich*, Wien; auf: *http : //www.fsg.or.at/servlet/BlobServer?blobcol = urldokument&blobheadername1 = content − type&blobheadername2 = content − disposition&blobheadervalue1 = application%2Fpdf&blobheadervalue2 = inline%3B + filename%3D%22Hintergrund − information_zu_FSG_direkt _Ausgabe_04%252F2005.pdf%22&blobkey = id&blobnocache = false&blobtable = Dokument&blobwhere = 1115918538822*; 19. 05. 2008

16. KROLL, Karsten (2002): *Mathematik der Lebensversicherung*; auf: *http : //www.ruhr− uni − bochum.de/universalis/bigev/MathematikderLV.pdf*; 19. 07. 2008

17. KURZENDORFER, Volker (2000): *Einführung in die Lebensversicherung*; auf: *http : //books.google.at/books?id = 8hoUtNXE574C&pg = PA102&lpg = PA102&dq = Versicherungen + auf + mehrere + Leben&source = web&ots = bs − 9MxPsQF&sig = lbNXITFdMIASXoYvuQ6FNyMQ0CI&hl = de&sa = X&oi = book_result&resnum = 2&ct = result*; 05. 07. 2008

18. SCHILLER, Frank: *Versicherung auf mehrere Leben*; auf: *http : //www.frankschiller.de/mathe/LV2005Kapitel5.pdf*; 05. 07. 2008

19. STATISTIK AUSTRIA, auf: *http : //www.statistik.at/web_de/static/read_me_fuer _sterbetafeln_022542.pdf*; 22. 04. 2008

20. *http : //de.wikipedia.org/wiki/Lebensversicherung*; 22. 04. 2008

21. $http://www.zuritel.at/versicherungen/pensionsvorsorge/klassisch?partner=zurich$; 18. 05. 2008

22. $http://212.227.99.96/cc4you/index.php?id=164$; 30. 03. 2008

23. $http://www.finanz-lexikon.de/geschichte\%20versicherungswesen\_602.html$; 30. 03. 2008

24. $http://www.caj-seminare.de/downloads/versmathe\_mitschrift\_behne.pdf$; 20. 07. 2008

25. $http://www.xtremes.math.uni-siegen.de/may/lebensversicherungsmathematik/Skript\_LVM.ps.gz.$; 20. 07. 2008

26. $http://www.wiwi.uni-rostock.de/r/Dateien/Versicherungsmathematik/kapitel2.doc.$; 20. 07. 2008

27. $http://www.ad-hoc-news.de/Boersenlexikon/de/16332527/Risikoaversion\%20(risk\%20aversion)$; 09. 08. 2008

28. $http://www.wiso.uni-dortmund.de/orwi/de/textonly/content/download/studi/files/vt\_uebungsskript.pdf$; 25.08.2008

Abbildungsverzeichnis

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Mario Wallner
geboren am:	4. September 1981 in Oberpullendorf

Ausbildung:

1988–1992	Volksschule in Großpetersdorf
1992–2000	BG/BRG Oberschützen mit Abschluss Matura
2000–2001	Präsenzdienst Turbakaserne Pinkafeld
2001–2008	Lehramtsstudium Mathematik und Chemie an der Universität Wien

Studienbegleitende Tätigkeit:

2004–2008	Konservatorium für Kirchenmusik der Erzdiözese Wien

Berufstätigkeit:

ab 2005	Lehrtätigkeit an verschiedenen Volkshochschulen im zweiten Bildungsweg
ab 2008	Lehrtätigkeit an der HLW 10

Wien, September 2008