# Über regulär-singuläre Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln



vorgelegt von
Ekkehard Wagenführer
aus Apolda

Köln 1971

**1. Berichterstatter: Prof. Dr. Schäfke**

**2. Berichterstatter: Prof. Dr. Nießen**

**Tag der mündlichen Prüfung: 17.12.1971**

# Gliederung

## Einleitung

Thema der vorliegenden Arbeit ist die komplexe Matrix-Differentialgleichung

$$(1)\qquad x^{s+1}Y'(x) - B(x)Y(x) = 0 \quad ,$$

mit s positiv, ganzzahlig, B holomorphe Abbildung der Kreisscheibe

$$\mathcal{K}_R = \{x \in \mathbb{C} \mid 0 \leq |x| < R\}$$

in $M_n(\mathbb{C})$, den Raum der komplexen $(n,n)$-Matrizen, und

$$B(0) \neq 0 \;.$$

Wir suchen in $\hat{\mathcal{K}}_R$, der Riemannschen Fläche von arg x über $\mathcal{K}_R \setminus \{0\}$, analytische Lösungen Y von (1) der Form

$$(2)\qquad Y(x) = H(x)x^J = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I+J} \qquad (I = \text{Einheitsmatrix})$$

mit konstantem $J \in M_n(\mathbb{C})$ und

$$(3)\qquad H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu H_\nu \qquad \text{konvergent für } x \in \mathcal{K}_R \;.$$

Die Spalten der Matrix $Y(x)$ sind dann Lösungen des Systems

$$(4)\qquad x^{s+1}y'(x) - B(x)y(x) = 0 \quad (y(x) = (\eta_i(x))_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n) \;,$$

deren Komponenten $\eta_i(x)$ sich bei Annäherung an $x = 0$ "bestimmt verhalten", solche Lösungen heißen auch "regulär - singulär". Unter (4) läßt sich die komplexe Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(5)\qquad x^{s+n}\eta^{(n)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} x^i q_i(x)\eta^{(i)}(x) = 0$$

$$(q_i : \mathcal{K}_R \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{holomorph})$$

eingliedern.

Wegen $s > 0$ können wir keine Fundamentallösung der Form (2) erwarten, statt dessen suchen wir Lösungen mit größtmöglichem Rang, d.h. möglichst viele linear unabhängige regulär-singuläre Lösungen von (4).

Das Problem im Fall der Differentialgleichung n-ter Ordnung (5) wurde 1911 von O. Perron [3] gelöst. Vorangegangen waren Arbeiten von Thomé [1] , der keine Konvergenz-aussagen über die gefundenen formalen Reihen macht, und von H. v. Koch [2] , der das Problem mit Hilfe unendlicher Determinanten löst, wobei als Konvergenzbedingung für die Determinanten zusätzlich $q_{n-1} = 0$ vorausgesetzt werden muß. Perron verzichtet auf letztgenannte Einschränkung und umgeht unendliche Determinanten, indem er die für die Potenzreihenkoeffizienten einer Lösung auftretenden Rekursionen samt Konvergenzbedingung in ein endliches Gleichungssystem umformt; sein recht umständliches Vorgehen wird von E. Hilb [4] durch Formulierung eines Gleichungssystems im $l^2$ entscheidend vereinfacht; ansonsten bringt Hilb keine neuen Ergebnisse.

Der bisher einzige Beitrag in der Literatur, wann für ein System (4) einzelne regulär-singuläre Lösungen vorliegen, ist der Satz von F. Lettenmeyer [5] , der auch in der neueren Arbeit von Harris, Sibuya und Weinberg [6] bewiesen ist. Dieser Satz enthält eine hinreichende Bedingung für die Existenz einzelner in $\mathfrak{K}_R$ holomorpher Lösungen von (4), was dem Spezialfall $J = 0$ in (2) entspricht.

In unserem Problembereich liegt auch die Frage nach einfachen Bedingungen, wann eine Fundamentallösung von (1) der Form (2) vorliegt. Anders als bei der Differentialgleichung n-ter Ordnung ist im allgemeinen Fall die Bedingung $s = 0$ dazu nicht notwendig. Erst in neuerer Zeit wurden von D.A. Lutz [7] und [8] Kriterien gefunden, die nur von den ersten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $B(x)$ abhängen. Die von Lutz verwendeten Methoden sind andere als in vorliegender Arbeit, da bei ihm von vornherein nur Fundamentallösungen (2) angesetzt werden.

Die allgemeine Frage auch nach nicht-invertierbaren Lösungsmatrizen $Y(x)$ der Form (2) wird in der bisherigen Literatur nicht bearbeitet. Im ersten Kapitel der Dissertation suchen wir formale Lösungen von (1), nicht notwendig konvergente Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I+J}$ , deren Koeffizienten die für eine Lösung (2) geltenden Rekursionen erfüllen; der maximale Rang einer formalen Lösung wird den Rang jeder Lösung (2) nach oben abschätzen. Mit der Potenzreihenentwicklung von B ,

$$(6) \qquad B(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} B_{\nu}$$

lauten die Rekursionen :

$$(7) \qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_{\nu} = 0 & (\mu = 0,\dots,s-1) \\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_{\nu} - H_{\mu-s}(J + (\mu-s)I) = 0 & (\mu = s, s+1, \dots) \end{cases}$$

Da ein solches System von Matrizengleichungen in der Literatur bisher nicht behandelt wird, werden wir Lösbarkeitskriterien und Lösungsverfahren dazu neu entwickeln. Eine erste Reduktion des Problems führt auf lineare Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrizen, die von einem komplexen $\lambda$ abhängen, in Blockschreibweise :

$$(8) \qquad A_{\varrho}(\lambda) = \begin{pmatrix} B_0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & O & \\ B_{s-1} & & \ddots & & & \\ B_s - \lambda I & & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots \\ B_{\varrho} & \dots & & B_s - (\lambda+\varrho-s)I & \dots & B_0 \end{pmatrix} \qquad (\varrho \in \mathbb{N}_0).$$

Da der in $\lambda$ lineare Teil dieser Matrizen nicht invertierbar ist, können wir die klassische Eigenwerttheorie hier nicht anwenden; statt dessen stellen wir allgemeinere Sätze über Polynommatrizen zusammen, wozu die Smithsche Normalform als wesentliches Hilfsmittel dient.

Kernpunkt unserer Überlegungen im Abschnitt 1.3 ist ein Defektvergleich der Matrizen $A_{\varrho}$ - über dem Körper $\mathbb{C}(\lambda)$; als Ergebnis von Hilfssatz 1.23 notieren wir :

(9) Ab einer Nummer q mit $q \leq ns-1$ haben alle Matrizen $A_{\varrho}$ $(\varrho \geq q)$ den gleichen Defekt d.

Aus der Matrix $A_{q+1}(\lambda)$ gewinnen wir eine Art "charakteristisches Polynom", aus dem wir mit Hilfe endlich vieler der folgenden $A_\varrho$ mögliche Werte für $J$ und den maximalen Rang einer formalen Lösung genau bestimmen können, gekoppelt mit einem algebraischen Verfahren, die formalen Lösungen zu berechnen. Abschnitt 1.4 bringt theoretische Abschätzungen für den maximalen Rang $r_{max}$ einer formalen Lösung, durch die eine im allgemeinen komplizierte Rechnung im Sinne des vorangehenden Abschnitts vermieden wird. Für die Frage nach der Existenz von regulär-singulären Fundamentallösungen besonders wichtig ist die aus Satz 1.38 fließende Folgerung

(10) $$r_{max} = n \Longleftrightarrow d = n \cdot s \text{ .}$$

Im 2. Kapitel überführen wir die Rekursionen (7) in ein unendliches Gleichungssystem, das nur Lösungen mit konvergenter Potenzreihe besitzt, und schließlich auf ein endliches homogenes System, bestehend aus den Rekursionen (7) bis zu einer endlichen Nummer neben weiteren $s$ linearen Matrizengleichungen, deren Koeffizienten man durch Grenzprozesse ermitteln müßte (Satz 2.16). An dieser Stelle gehen wir kurz auf den Fall $s=0$ ein, für den wir einen neuen Beweis für die Konvergenz jeder formalen Lösung (2) gewonnen haben, gültig in jeder komplexen Banach-Algebra.

Im Abschnitt 2.2 suchen wir, wieder für den Fall $s > 0$, hinreichende Kriterien für die Lösbarkeit des in Satz 2.16 aufgestellten Gleichungssystems, ohne die letzten $s$ Gleichungen zu kennen. Wir gewinnen gleichzeitig Aussagen über den mindestens erreichbaren Rang einer regulär-singulären Lösung.

Die Grundgedanken des in diesem Kapitel angewandten Verfahrens finden sich schon in den Arbeiten von Perron [3], Hilb [4], Lettenmeyer [5] und Harris, Sibuya und Weinberg [6], benutzt für die jeweiligen Spezialfälle. Zur Anwendbarkeit auf das allgemeine Problem bedurfte das Verfahren folgender Erweiterungen, die bisher nicht vorlagen:

1. Verallgemeinerung auf unendliche lineare Gleichungssysteme in einer Banach-Algebra statt in $\mathbb{C}$,

2. Konsequente Formulierung des äquivalenten endlichen Gleichungssystems und
3. Lösung des Systems mit den im 1. Kapitel gewonnenen algebraischen Methoden .

Die Güte der hier gewonnenen Rangabschätzung für eine regulär-singuläre Lösung erweist sich in der Folgerung:

Falls $d = n \cdot s$ , ist jede formale Lösung konvergent, woraus sich mit (10) zusammen ergibt:

(11) (1) besitzt ein regulär-singuläres Fundamentalsystem genau dann, wenn $d = n \cdot s$ .

Vor dem von Lutz [8] gefundenen Kriterium zeichnet sich (11) vor allem dadurch aus, daß wirklich höchstens die $n \cdot s$ ersten $B_\nu$ benutzt werden, während Lutz die Anzahl der Rechenschritte, die man zur Anwendung seines Satzes benötigt, nicht allgemein nach oben abschätzt. Auch fehlt bei Lutz ein Verfahren, eine Fundamentallösung (2) zu berechnen.

Das 3. Kapitel der vorliegenden Arbeit ist Beispielen und Anwendungen gewidmet, beginnend mit dem Satz von Lettenmeyer. Der enge Anwendungsbereich dieses Satzes wird im anschließenden Rechenbeispiel verlassen, das die hier neu entwickelten Verfahren zur Gewinnung formaler bzw. konvergenter Lösungen (2) erläutert. Das abschließende Beispiel, wieder allgemeinerer Natur, behandelt die Differentialgleichung n-ter Ordnung. Durch die einfache Struktur der Matrizen $B_\nu$ in diesem Spezialfall sind die Größen d und $r_{max}$ sehr leicht zu bestimmen. Die Tatsache, daß hier stets $r_{max} < n$ , liefert einen neuen Beweis für den Satz, daß die Differentialgleichung n-ter Ordnung (5) mit $s > 0$ keine regulär-singuläre Fundamentallösung haben kann.

Schließlich sind wir in der Lage, die Sätze von Perron aus unseren allgemeinen Überlegungen herzuleiten, wobei in der Frage nach logarithmenbehafteten Lösungen ein bei Perron aufgetretener Fehler zu verbessern ist.

## 1. Formale Lösungen

Es sei

(1.1) $B(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} B_{\nu}$ mit $0 < \operatorname{rg} B_0 < n$

die für $x \in \mathcal{K}_R$ konvergente Potenzreihendarstellung von B. Das Einsetzen einer Lösung (2) in die Differentialgleichung (1) liefert nach Multiplikation der Potenzreihen und Koeffizientenvergleich für die $H_{\nu}$ die Rekursionen

$$(1.2)\quad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_{\nu} = 0 & (\mu = 0,1,..,s-1) \\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_{\nu} - H_{\mu-s}(J + (\mu-s)I) = 0 & (\mu = s,s+1,\dots ) . \end{cases}$$

Wenn eine Folge von Matrizen $(H_{\nu})_{\nu=0}^{\infty}$ den Gleichungen (1.2) mit einem gewissen $J \in M_n(\mathbb{C})$ genügt, nennen wir die formale Reihe

(1.3) $Y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_{\nu} x^{\nu I + J}$

"formale Lösung" von (1). Falls dabei $\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} H_{\nu}$ für $|x| < R$ konvergiert, ist die durch (1.3) dargestellte analytische Funktion natürlich Lösung von (1) .

Zur Lösbarkeit von (1.2) mit maximalem Rang von $Y(x)$ muß die Matrix J vorweg bestimmt werden. Offenbar ist die Nicht-Invertierbarkeit von $B_0$ notwendig für die nichttriviale Lösbarkeit von (1.2); andererseits gestattet es diese Voraussetzung nicht, die $\mu$-te Gleichung eindeutig nach $H_{\mu}$ aufzulösen. Da über Matrizengleichungen der Form (1.2) keine Literatur vorliegt, wird (1.2) im folgenden auf Gleichungssysteme für die Spalten der $H_{\nu}$ zurückgeführt.

### 1.1. Reduktion der Rekursionsformeln

Für jedes invertierbare $T \in M_n(\mathbb{C})$ ist mit $Y(x)$ auch

$$Y(x)T = \sum_{\nu=0}^{\infty} (H_{\nu}T)x^{\hat{J}+\nu I} \quad , \quad \hat{J} = T^{-1}JT \ ,$$

formale Lösung von (1). Daher genügt es, (1.2) mit J in Jordanscher Normalform zu lösen. Sei also

$$(1.4)\quad J = \left(\begin{array}{ccccc|c} J_1^1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathcal{O} & \\ & & J_1^{t_1} & & & \\ & & & J_2^1 & & \\ & \mathcal{O} & & & \ddots & \\ & & & & J_m^{t_m} & \\ \hline & & & & & \mathcal{O} \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\, r \\ \\ \}\, n-r \end{array} \qquad J_i^\tau = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathcal{O} & & \lambda_i & 1 \end{pmatrix}_{(k_i^\tau, k_i^\tau)}$$

(column widths under $J$: $\underbrace{\quad}_{r}$ $\underbrace{\quad}_{n-r}$)

$$(i=1,\dots,m;\ \tau=1,\dots,t_i)$$

Zur Erläuterung der $(n-r,n-r)$-Nullmatrix in der rechten unteren Ecke von J sei folgendes vermerkt:

Die $k_i^\tau$ Spalten der $H_\nu$ in der formalen Lösung (1.3), die an der Stelle von $J_i^\tau$ stehen, $(h_{\kappa\nu}^\tau)_{\nu=0}^\infty = (h_{\kappa\nu}^{i\tau})_{\nu=0}^\infty$ $(\kappa=1,\dots,k_i^\tau)$, erfüllen die - nur von $\lambda_i$ und $k_i^\tau$ abhängigen - Gleichungen

$$(1.5)\begin{cases} \text{a)} & \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} h_{\kappa\nu}^\tau = 0 \qquad (\mu=0,\dots,s-1;\ \kappa=1,\dots,k_i^\tau) \\ \text{b)} & \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} h_{1\nu}^\tau - (\lambda_i+\mu-s) h_{1\mu-s}^\tau = 0 \qquad (\mu=s,s+1,\dots) \\ \text{c)} & \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} h_{\kappa\nu}^\tau - (\lambda_i+\mu-s) h_{\kappa\mu-s}^\tau - h_{\kappa-1,\mu-s}^\tau = 0 \qquad (\mu=s,s+1,\dots;\ \kappa=2,\dots,k_i^\tau)\,. \end{cases}$$

Wenn die Folgen $(h_{\kappa\nu}^\tau)_{\nu=0}^\infty$ alle Null sind, kann man $J_i^\tau$ durch eine beliebige $(k_i^\tau,k_i^\tau)$-Matrix ersetzen. Wir wählen dazu die Nullmatrix und verschieben sie in die rechte untere Ecke von J; entsprechend rücken die Nullspalten in den $H_\nu$ nach rechts. Das rechtfertigt als erste Grundannahme für eine formale Lösung (1.3) :

(A) | J habe Gestalt (1.4) mit $0 \le r \le n$ ;
die letzten $n-r$ Spalten aller $H_\nu$ seien Null ;
falls $r > 0$ , seien
$\lambda_1,\dots,\lambda_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden ,
$t_i$ die Anzahl der Kästchen $J_i^\tau$ zu $\lambda_i$ (ohne Berücksichtigung der $(n-r,n-r)$-Nullmatrix), so daß
$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{t_i} k_i^\tau = r$ .

Die Spalten der formalen Lösung $Y(x)$, die dem Jordankästchen $J_i^\tau$ entsprechen, sind die Reihen

$$(1.6)\quad x^{\lambda_i} \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{(\kappa-j)!} (\log x)^{\kappa-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu h_{j\nu}^{i\tau} \qquad (\kappa = 1,\dots,k_i^\tau)\,,$$

durch die im Fall der Konvergenz Lösungen von (4) dargestellt werden. Auch wenn Reihen der Form (1.6) nicht konvergieren, wollen wir mit ihnen rechnen wie mit konvergenten Reihen, die Rechenoperationen sind bei Coddington & Levinson [10], S. 114-116 eingehend erläutert. -

Bei beliebigem $z \in \mathbb{N}$ sind die Folgen

$$(h^{i\tau}_{\kappa\,\nu-z})_{\nu=0}^{\infty} \quad (\kappa = 1,\dots,k_i^{\tau}) \ - \text{ mit } h^{i\tau}_{\kappa\mu} = 0 \text{ für } \mu \leq -1 \ -$$

Lösungen von (1.5) zu $\lambda_i - z$ ; diesen Übergang von $\lambda_i$ auf $\lambda_i - z$ , der im Fall der Konvergenz die in (1.6) dargestellten Funktionen ungeändert läßt, wollen wir immer dann durchführen, wenn

$$\lambda_i = \lambda_j + z \quad \text{mit} \quad z \in \mathbb{N} \quad , \text{ wobei } \quad i,j \in \{1,\dots,m\} \ .$$

Dadurch wird als zusätzliche Annahme erreicht :

(B) | Für $i \neq j$ sei $\lambda_i - \lambda_j$ nicht ganzzahlig .

Es bezeichne rg Y die Dimension des Raumes, den sämtliche r Reihen in (1.6) aufspannen, zunächst als formale Reihen, bei Konvergenz als analytische Abbildungen. Für den letzteren Fall wird sich zeigen, daß mit beiden Definitionen rg Y den gleichen Wert hat. - Die letzte Voraussetzung für Y(x) sei

(C) | Zu jedem $\lambda_i$ $(i = 1,\dots,m)$ seien die $t_i$ Folgen
$(h^{i1}_{1\nu})_{\nu=0}^{\infty}$ , $(h^{i2}_{1\nu})_{\nu=0}^{\infty}$ , ... , $(h^{it_i}_{1\nu})_{\nu=0}^{\infty}$
linear unabhängig .

Zur Rechtfertigung zeigen wir

<u>Satz 1.7</u>

a) Unter Voraussetzung (A) und (B) ist (C) notwendig und hinreichend dafür, daß rg Y = r .

b) Für eine formale Lösung Y(x) mit (A) und (B) existiert ein invertierbares $T \in M_n(\mathbb{C})$, so daß für Y(x)T zusätzlich Voraussetzung (C) erfüllt ist.

Beweis:
Aus (C) wollen wir zunächst im Fall der Konvergenz die lineare Unabhängigkeit aller r Funktionen (1.6) folgern. Eine Abbildung

$$x^{\lambda}\sum_{j=1}^{\kappa}(\log x)^{\kappa-j}h_j(x) \text{ mit } h_j: \mathcal{R}_R \longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ holomorph, } h_1 \neq 0$$

ist bekanntlich Hauptvektor $\kappa$-ter Stufe zum Eigenwert $e^{2\pi i\lambda}$ des Umlaufoperators U mit

$$[U(y)](x) = y(x\cdot e^{2\pi i}) \quad \text{für } y: \hat{\mathcal{R}}_R \longrightarrow \mathbb{C}^n \text{ analytisch .}$$

Da es genügt, die lineare Unabhängigkeit der Hauptvektoren zum gleichen Eigenwert zu zeigen, beschränken wir uns wegen (B) auf die Funktionen (1.6), die zu einem festen $\lambda_i$ gehören. Deren lineare Unabhängigkeit ergibt sich wegen (C) durch Ordnen einer Linearkombination nach Potenzen von $\log x$ und damit Zerlegung in Hauptvektoren verschiedener Stufen.- Die zugehörige Rechnung lehrt, daß auch als formale Reihen alle Reihen (1.6) linear unabhängig sind. Wenn umgekehrt (C) für ein $\lambda_i$ nicht erfüllt ist, sind von den unter (1.6) aufgeführten schon die $t_i$ Reihen

$$x^{\lambda_i}\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}h_{1\nu}^{i\tau} \qquad (\tau = 1,\dots,t_i)$$

linear abhängig und damit $\mathrm{rg}\, Y < r$ . Diesem Fall wollen wir zum Beweis von b) weiter nachgehen:

I. Wenn ein $(h_{1\nu}^{i\tau})_{\nu=0}^{\infty}$ die Nullfolge ist, rücken wir $h_{1\nu}^{i\tau}$ in $H_\nu$ ans Ende und verkleinern $J_i^{\tau}$ um eine Zeile und Spalte; damit geht r auf r-1 über.

II. Im allgemeineren Fall läßt sich I. herstellen, indem man eine Linearkombination der restlichen Folgen von einer

Folge $(h_{1\nu}^{i\tau_0})_{\nu=0}^{\infty}$ mit $k_i^{\tau_0}$ minimal

subtrahiert.

Die Verfahren I. und II. lassen sich so lange anwenden, bis

$$r = \mathrm{rg}\, Y$$

erreicht ist.

Im folgenden suchen wir formale Lösungen $Y(x)$ mit Bedingung (A),(B) und (C), so daß $r = \operatorname{rg} Y$ maximal wird.

Die Rekursionen (1.2) haben wir bereits auf (1.5) zurückgeführt; daran anschließend definieren wir für $\rho \in \mathcal{N}_0$ als Spaltenvektoren des $\mathbb{C}^{n(\rho+1)}$

$$(1.8) \quad c_{\kappa\rho}^{\tau} = (h_{\kappa\nu}^{\tau})_{\nu=0}^{\rho} \qquad (\kappa = 1,\dots,k_i^{\tau}\ ;\ \tau = 1,\dots,t_i)$$

sowie für $\lambda \in \mathbb{C}$ die $(\rho+1)n$-zeilige quadratische Matrix $A_\rho(\lambda)$, in Blockschreibweise notiert als

$$(1.9) \quad A_\rho(\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_0 & & & O \\ B_1 & B_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_\rho & B_{\rho-1} & \cdots & B_0 \end{pmatrix} & (\rho = 0,\dots,s-1) \\[2ex] \begin{pmatrix} B_0 & & & & & & O \\ \vdots & B_0 & & & & & \\ B_{s-1} & & \ddots & & & & \\ B_s-\lambda I & & & \ddots & & & \\ B_{s+1} & \ddots & & & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ B_\rho & \cdots & & B_s-(\lambda+\rho-s)I & & \cdots & B_0 \end{pmatrix} & (\rho = s, s+1, \dots) \end{cases}$$

Die $A_\rho(\lambda)$ sind Matrizenpolynome 1.Grades in $\lambda$; (1.5) ist äquivalent den Gleichungen

$$(1.10) \quad \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{(\kappa-j)!} A_\rho^{(\kappa-j)}(\lambda_i)\, c_{j\rho}^{\tau} = 0 \qquad (\kappa = 1,\dots,k_i^{\tau}, \tau = 1,\dots,t_i;\ \rho = 0,1,2,\dots\ ) .$$

Die folgenden Abschnitte sollen sich mit der allgemeinen Theorie von Polynommatrizen, sogenannten $\lambda$-Matrizen, beschäftigen.

## 1.2. Zur Theorie der $\lambda$-Matrizen

Eine $\lambda$-Matrix $A = A(\lambda)$ hat als Koeffizienten komplexe Polynome in $\lambda$, $A$ ist daher Matrix über $\mathbb{C}(\lambda)$, dem Körper der komplexen rationalen Funktionen, andererseits ist bei festem $\lambda \in \mathbb{C}$ $A(\lambda)$ komplexe Matrix. Für die folgenden Abschnitte setzen wir voraus :

$(\Lambda)$ $\left|\begin{array}{l} A = A(\lambda) \quad \text{sei m-zeilige quadratische } \lambda\text{-Matrix ,} \\ \text{rg } A = r \quad \text{- als Matrix über } \mathbb{C}(\lambda) \text{ .} \end{array}\right.$

Dabei sind die Bezeichnungen m und r unabhängig von (A) gemeint.

### 1.2.1. Die Smithsche Normalform

Unter Voraussetzung $(\Lambda)$ gilt

**Satz 1.11**

Es existieren m-zeilige quadratische $\lambda$-Matrizen P und Q mit konstanter, von Null verschiedener Determinante, so daß

$PAQ = S$ (Smithsche Normalform von A) , wobei

$S(\lambda) = \text{diag}(\ \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_r(\lambda), 0, 0, \ldots, 0\ )$ ,

$\varphi_i \neq 0$ normierte Polynome $(i = 1, \ldots, r)$ mit

$\varphi_i$ Teiler von $\varphi_{i+1}$ $(i=1,\ldots,r-1)$ .

Jedes Polynom

$$\psi_j(\lambda) = \prod_{i=1}^{j} \varphi_i(\lambda)$$

ist der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten von A mit der Zeilenzahl j $(j = 1, \ldots, r)$; folglich ist S durch A eindeutig bestimmt.

Einen Beweis dazu findet man z.B. bei Gantmacher [9] , S.130. P und Q sind Einheiten im Ring der $\lambda$-Matrizen, insbesondere sind $P(\lambda)$ und $Q(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ invertierbar. Wir notieren

**Korollar 1.12**

a) $r = \max\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \text{rg } A(\lambda)$ ,

b) $\text{rg } A(\lambda_0) < r \iff \psi_r(\lambda_0) = 0$ .

### 1.2.2. Der ausgeartete Nullraum von $A(\lambda)$

Neben $(\Lambda)$ sei angenommen :

$\left|\ r = \text{rg } A < m \ , \ S = PAQ \right.$ Smithsche Normalform von A .

Für festes $\lambda \in \mathbb{C}$ bezeichne den Nullraum von $A(\lambda)$

$$\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{N}_A(\lambda) := \{ c \in \mathbb{C}^m : A(\lambda)c = 0 \} \quad .$$

Offenbar sind für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die kanonischen Einheitsvektoren

$$e_{r+1}, \ldots, e_m \in \mathcal{N}_S(\lambda) \; .$$

Für die m-r Vektorpolynome des $\mathbb{C}^m$

$$f_i(\lambda) = Q(\lambda) e_i \qquad ( i = r+1, \ldots, m )$$

gilt

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad f_{r+1}(\lambda), \ldots, f_m(\lambda) \in \mathcal{N}_A(\lambda), \text{ lin.unabhängig.}$$

Bei festem $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir als "ausgearteten Nullraum" zu $A(\lambda)$ :

$$(1.13) \qquad \hat{\mathcal{N}}(\lambda) = \hat{\mathcal{N}}_A(\lambda) := \operatorname{span}(f_{r+1}(\lambda), \ldots, f_m(\lambda)) \; .$$

$\hat{\mathcal{N}}_A(\lambda)$ ist stets (m-r)-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{N}_A(\lambda)$, die Unabhängigkeit von $Q$ folgern wir aus

<u>Hilfssatz 1.14</u>

Es seien $\tilde{f}_{r+1}(\lambda), \ldots, \tilde{f}_m(\lambda)$ Vektorpolynome im $\mathbb{C}^m$ , und

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \tilde{f}_{r+1}(\lambda), \ldots, \tilde{f}_m(\lambda) \in \mathcal{N}_A(\lambda) \text{ , linear unabhängig.}$$

Dann gilt

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \hat{\mathcal{N}}_A(\lambda) = \operatorname{span}(\tilde{f}_{r+1}(\lambda), \ldots, \tilde{f}_m(\lambda))$$

Zum <u>Beweis</u> benutzen wir die Vektorpolynome

$$\tilde{e}_i(\lambda) = Q(\lambda)^{-1} \tilde{f}_i(\lambda) \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

mit der Eigenschaft

$$S(\lambda) \tilde{e}_i(\lambda) = 0 \qquad (i = r+1, \ldots, m) \; .$$

Wegen der Diagonalgestalt von S gilt mit gewissen komplexen Polynomen $q_{ij}$ :

$$\tilde{e}_i(\lambda) = \sum_{j=r+1}^{m} q_{ij}(\lambda) \, e_j \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

und folglich

$$\tilde{f}_i(\lambda) = \sum_{j=r+1}^{m} q_{ij}(\lambda) \, f_j(\lambda) \quad .$$

Es ergibt sich unmittelbar

Folgerung 1.15

Falls B Einheit im Ring der $\lambda$-Matrizen, so ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\hat{\mathcal{N}}_{BA}(\lambda) = \hat{\mathcal{N}}_{A}(\lambda) = B(\lambda)\,\hat{\mathcal{N}}_{AB}(\lambda) \quad ,$$

außerdem

Folgerung 1.16

$$\forall \lambda_0 \in \mathbb{C}: \mathcal{N}(\lambda_0)/\hat{\mathcal{N}}(\lambda_0) \neq \{0\} \Leftrightarrow \psi_r(\lambda_0) = 0 \quad .$$

### 1.2.3. Die Matrizen $A^{[k]}(\lambda)$

Wir untersuchen jetzt Gleichungssysteme der Form (1.10), also mit Ableitungen von $A(\lambda)$ in der Koeffizientenmatrix. Es sei vorausgesetzt

$$\left|\begin{array}{l} (\Lambda) \quad \text{mit} \quad r < m \, , \\ S = PAQ \quad \text{gemäß Satz 1.11} \end{array}\right.$$

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die $k\cdot m$-zeilige quadratische $\lambda$-Matrix $A^{[k]}(\lambda)$ durch

Def.(1.17)
$$A^{[k]}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ A'(\lambda) & A(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(k-1)!}A^{(k-1)}(\lambda) & \cdots & A'(\lambda) & A(\lambda) \end{pmatrix}$$

Element der $\kappa$-ten Blockzeile, i-ten Blockspalte $(i \leq \kappa)$ ist also

$$\frac{1}{(\kappa-i)!}\,\frac{d^{\kappa-i}}{d\lambda^{\kappa-i}}\,A(\lambda) \quad .$$

Wir bezeichnen für festes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{N}^{[k]}(\lambda) = \mathcal{N}_A^{[k]}(\lambda) \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{N}}^{[k]}(\lambda) = \hat{\mathcal{N}}_A^{[k]}(\lambda) \quad \text{den} \\ \text{Nullraum bzw. ausgearteten Nullraum von } A^{[k]}(\lambda) \, . \end{array}\right.$$

Ein Element $c^{[k]} \in \mathcal{N}^{[k]}(\lambda)$ – der Index $[k]$ in $c^{[k]}$ bedeutet nur, daß $c^{[k]} \in \mathbb{C}^{mk}$ – zerlegen wir in Vektoren des $\mathbb{C}^m$, so daß

$$C^{[k]} = (C_\kappa)_{\kappa=1}^{k} = (C_1,\dots,C_k) ,$$

letzteres aus schreibtechnischen Gründen an Stelle der Spaltenschreibweise. Die Komponenten von $C^{[k]}$ erfüllen die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{(\kappa-j)!} A^{(\kappa-j)}(\lambda)\; C_j = 0 \qquad (\kappa = 1,2,\dots,k) .$$

Einige Vorbemerkungen zählen wir auf in

<u>Hilfssatz 1.18</u>

α) $(C_1,C_2,\dots,C_k) \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda) \curvearrowright (0,C_1,\dots,C_{k-1}) \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda)$;

$(C_1,C_2,\dots,C_k) \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda) \curvearrowleft\!\curvearrowright (0,C_1,\dots,C_k) \in \mathfrak{N}^{[k+1]}(\lambda)$.

β) $P^{[k]}(\lambda)\; A^{[k]}(\lambda)\; Q^{[k]}(\lambda) = S^{[k]}(\lambda)$ ,

$P^{[k]}$ und $Q^{[k]}$ sind Einheiten im Ring der km-zeiligen $\lambda$-Matrizen.

γ) $\mathfrak{N}_A^{[k]}(\lambda) = Q^{[k]}(\lambda)\,\mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda)$ ; $\hat{\mathfrak{N}}_A^{[k]}(\lambda) = Q^{[k]}(\lambda)\,\hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda)$.

δ) Die $k\cdot(m-r)$ Einheitsvektoren

$$E_{\kappa,i}^{[k]} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \kappa}}{e_i},0,\dots,0) \qquad (i=r+1,\dots,m;\ \kappa=1,\dots,k)$$

sind für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Basis von $\hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda)$; folglich

$$\dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda) = k\cdot(m-r) = k\cdot \dim \hat{\mathfrak{N}}(\lambda) .$$

ε) $\psi_r(\lambda_0) \neq 0 \curvearrowright \forall\ k \in \mathbb{N} \quad \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda_0)$ .

ζ) Falls $D^{[k]} = (D_1,D_2,\dots,D_k) \in \mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda)$ ,

$Q^{[k]}(\lambda)D^{[k]} = (C_1,C_2,\dots,C_k)$ , so

$C_1 = Q(\lambda)D_1$ .

Die Beweise zu α) und ζ) erübrigen sich; zu β) rechnet man unter Benutzung der Produktregel für höhere Ableitungen nach, daß z.B.

$$(P\cdot A)^{[k]} = P^{[k]}A^{[k]} .$$

Ferner ist

$$\det P^{[k]}(\lambda) = (\det P(\lambda))^k \neq 0 \text{ , konstant,}$$

also sind $P^{[k]}$ und $Q^{[k]}$ im Ring der $\lambda$-Matrizen invertierbar, was mit (1.15) sofort γ) liefert. δ) lesen wir an der

Gestalt von $S^{[k]}(\lambda)$ ab; man sieht, daß für $\psi_r(\lambda_o) \neq 0$ $\mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda_o) = \hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda_o)$, wegen $\gamma$) also $\mathfrak{N}_A^{[k]}(\lambda_o) = \hat{\mathfrak{N}}_A^{[k]}(\lambda_o)$ .

Wir benutzen diese Vorbemerkungen in dem wichtigen

<u>Satz 1.19</u>

Es sei $\lambda_o$ Nullstelle von $\psi_r$ der Vielfachheit $v > 0$ ; nach Satz 1.11 sei t ($1 \leq t \leq r$) dadurch festgelegt, daß für

$\tau = t+1,\ldots,r$ $\lambda_o$ nicht Nullstelle von $\varphi_{r-\tau+1}$ ,

$\tau = 1,\ldots,t$ $\lambda_o$ $k_\tau$-fache Nullstelle von $\varphi_{r-\tau+1}$ ,

so daß

$$0 < k_t \leq k_{t-1} \leq \ldots \leq k_1 , \quad \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau = v .$$

Dann gilt

1.) Für $\tau = 1,\ldots,t$; $\kappa = 1,\ldots,k_\tau$ existieren $C_\kappa^\tau \in \mathbb{C}^m$ mit

$$(*) \quad \begin{cases} (C_\kappa^\tau)_{\kappa=1}^{k_\tau} \in \mathfrak{N}^{[k_\tau]}(\lambda_o) & (\tau = 1,\ldots,t) \\ C_1^1, C_1^2, \ldots, C_1^t \text{ lin. unabhängig bezüglich } \hat{\mathfrak{N}}(\lambda_o) . \end{cases}$$

2.) Bezüglich (*) ist $\sum_{\tau=1}^{t} k_\tau$ maximal : falls Aussage 1.) mit anderen Zahlen $t' \in \mathbb{N}$ , $k'_\tau \in \mathbb{N}$ ($\tau = 1,\ldots,t'$) erfüllbar ist, so

$$\sum_{\tau=1}^{t'} k'_\tau \leq \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau = v .$$

3.) Für $k \geq k_1$ ist $\dim \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda_o) / \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda_o) = v$ .

Zum <u>Beweis</u> ersetzen wir A durch seine Smithsche Normalform S . Bei der entsprechenden Transformation geht (*) in eine äquivalente Aussage für S über, die erste Zeile wegen (1.18)$\gamma$), die zweite Zeile auf Grund von (1.18)$\xi$) und (1.15). Für S wird Aussage 1.) erfüllt durch die $k_\tau$-tupel

$$(D_\kappa^\tau)_{\kappa=1}^{k_\tau} = (e_{r-\tau+1}, 0, \ldots, 0) \qquad (\tau = 1,\ldots,t) ,$$

da nach Voraussetzung

$$\varphi_{r-\tau+1}(\lambda_o) = \varphi'_{r-\tau+1}(\lambda_o) = \ldots = \varphi_{r-\tau+1}^{(k_\tau-1)}(\lambda_o) = 0 ;$$

und die Einheitsvektoren $e_{r-\tau+1}$ ($\tau = 1,\ldots,t$) sind bezüglich $\hat{\mathfrak{N}}_S(\lambda_o)$ linear unabhängig.

Zum Beweis der 3. Aussage bilden wir zu den $(D_\kappa^\tau)_{\kappa=1}^{k_\tau}$ die folgenden v Vektoren des $\mathbb{C}^{m\cdot k}$

(**) $\quad D^{[k]}_{\tau\kappa} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k-\kappa+1}}{D_{\tau 1}},\dots,D_{\tau\kappa}) = (0,\dots,0,e_{r-\tau+1},0,\dots,0)$

$(\kappa = 1,\dots,k_\tau\ ;\ \tau = 1,\dots,t)$ .

Mit (1.18) $\alpha$) und $\delta$) folgt, daß sämtliche

$$D^{[k]}_{\tau\kappa} \in \mathfrak{N}^{[k]}_S(\lambda_o)\ ,\ \text{lin.unabh. bzgl. } \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_S(\lambda_o) \text{ sind.}$$

Wie man aus der Form von $S^{[k]}(\lambda_o)$ abliest, gibt es keine weiteren bzgl. $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_S(\lambda_o)$ linear unabhängige Vektoren in $\mathfrak{N}^{[k]}_S(\lambda_o)$ , damit ist Behauptung 3.) bewiesen.

Schließlich seien $t' \in \mathbb{N}$ , $k'_\tau$ $(\tau = 1,\dots,t')$ angenommen, so daß Aussage (*) für S mit Systemen

$$(D'^{\tau}_{\kappa})^{k'_\tau}_{\tau=1} \qquad (\tau = 1,\dots,t')$$

erfüllt ist. Für $k \geq \max k'_\tau$ konstruieren wir wie in (**) dann $\sum\limits_{\tau=1}^{t'} k'_\tau$ Vektoren aus $\mathfrak{N}^{[k]}_S(\lambda_o)$ , die bezüglich $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_S(\lambda_o)$ linear unabhängig sind. Aussage 3.) liefert uns, daß

$$\sum_{\tau=1}^{t'} k'_\tau \leq v\ .$$

## 1.3. Konstruktion der formalen Lösungen

An die Definitionen (1.8) und (1.9) anschließend, betrachten wir (1.10) bei festem $\tau$, es sei $k := k^{\tau}_{i}$ . Läßt man den Index $\tau$ weg und definiert man

$$C^{[k]}_{\rho} = (C_{\kappa\rho})^{k}_{\kappa=1} \quad ,$$

läßt sich (1.10) bei festem $\tau$ schreiben als

(1.20) $\quad A^{[k]}_{\rho}(\lambda_i)C^{[k]}_{\rho} = 0 \qquad (\rho = 0,1,2,\ \dots\ )$ ,

so daß wir die Theorie der letzten Abschnitte anwenden können. Da im folgenden das Verhalten bei wachsendem $\rho \in \mathbb{N}_o$ interessiert, wollen wir $A^{[k]}_{\rho}(\lambda)$ und $C^{[k]}_{\rho}$ anders anordnen.

Es sei für $v,\rho \in \mathbb{N}_o$ definiert

(1.21) $\quad h^{[k]}_{v} = (h_{\kappa v})^{k}_{\kappa=1} \in \mathbb{C}^{n\cdot k}$ ,

$$\tilde{C}^{[k]}_{\rho} = (h^{[k]}_{v})^{\rho}_{v=o} = (h^{[k]}_{o},\dots,h^{[k]}_{\rho}) \quad ,$$

letzteres an Stelle der Spaltenschreibweise.

Mit Matrizen $\widetilde{A}^{[k]}_{\varrho}(\lambda)$, die den gleichen Aufbau wie die $A_{\varrho}(\lambda)$ haben, nur aus $k\cdot n$-zeiligen statt $n$-zeiligen Blockmatrizen zusammengesetzt, wird (1.20) äquivalent den Gleichungen

$$\widetilde{A}^{[k]}_{\varrho}(\lambda_1)\widetilde{C}^{[k]}_{\varrho} = 0 \qquad (\varrho = 0,1,2,\dots) ,$$

wobei $\widetilde{A}^{[k]}_{\varrho}(\lambda)$ durch einfache Vertauschung von Zeilen und Spalten aus $A^{[k]}_{\varrho}(\lambda)$ hervorgeht. Wir setzen daher

$$\widetilde{A}^{[k]}_{\varrho}(\lambda) \text{ und } A^{[k]}_{\varrho}(\lambda) \quad \text{sowie} \quad \widetilde{C}^{[k]}_{\varrho} \text{ und } C^{[k]}_{\varrho}$$

gleich; insbesondere schreiben wir

$$(1.22) \quad C^{[k]}_{\varrho} = (h^{[k]}_{0}, h^{[k]}_{1}, \dots, h^{[k]}_{\varrho}) = (h_{1\nu}, \dots, h_{k\nu})^{\varrho}_{\nu=0} .$$

Als Abkürzungen notieren wir für $\varrho \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$\mathfrak{N}_{\varrho}(\lambda) = \text{Nullraum von } A_{\varrho}(\lambda) ,$$
$$\hat{\mathfrak{N}}_{\varrho}(\lambda) = \text{ausgearteter Nullraum von } A_{\varrho}(\lambda) ,$$
$$\delta_{\varrho}(\lambda) = \dim \mathfrak{N}_{\varrho}(\lambda) = n(\varrho+1) - \operatorname{rg} A_{\varrho}(\lambda) ,$$
$$d_{\varrho} = \dim \hat{\mathfrak{N}}_{\varrho}(\lambda) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \delta_{\varrho}(\lambda) .$$

Entsprechend sei für $k \in \mathbb{N}$

$\mathfrak{N}^{[k]}_{\varrho}(\lambda)$, $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{\varrho}(\lambda)$ Nullraum bzw. ausgearteter Nullraum von $A^{[k]}_{\varrho}(\lambda)$ ,

$$\delta^{[k]}_{\varrho}(\lambda) = \dim \mathfrak{N}^{[k]}_{\varrho}(\lambda) ,$$
$$d^{[k]}_{\varrho} = \dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{\varrho}(\lambda) .$$

Über das Verhalten der Defekte bei wachsendem $\varrho$ notieren wir

<u>Hilfssatz 1.23</u>

Für jedes $\varrho \in \mathbb{N}_0$ gilt

1.) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \delta_{\varrho}(\lambda) \leq \delta_{\varrho+1}(\lambda)$ ; $\delta_{\varrho}(\lambda+1) \leq \delta_{\varrho+1}(\lambda)$ ,

2.) $d_{\varrho} \leq d_{\varrho+1}$ , $d_0 > 0$ ,

3.) $d_{\varrho+1} - d_{\varrho} \leq d_{\varrho} - d_{\varrho-1}$ , wobei $d_{-1}=0$ zu setzen ist,

4.) $d_{\varrho} \leq n\cdot s$ ;

Außerdem gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ , $\varrho \in \mathbb{N}_0$

5.) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \delta_\varrho^{[k]}(\lambda) \leq \delta_{\varrho+1}^{[k]}(\lambda) \;;\; \delta_\varrho^{[k]}(\lambda+1) \leq \delta_{\varrho+1}^{[k]}(\lambda)$,

6.) $d_\varrho^{[k]} = k \cdot d$ . –

– Aus den Ungleichungen 2.)– 4.) ergibt sich als

<u>Folgerung 1.24</u>

Es existiert eindeutig $q \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft

$$\varrho < q \curvearrowright d_\varrho < d_{\varrho+1} ,$$

$$\varrho \geq q \curvearrowright d_\varrho = d_q .$$

Die Zahlen q und $d_q$ lassen sich abschätzen durch

$$d_q \leq n \cdot s \quad ; \quad q \leq n \cdot s - 1 .$$

Um zunächst (1.24) herzuleiten, definieren wir

<u>Def.(1.25)</u> $\begin{cases} d = \max\limits_{\varrho \in \mathbb{N}_0} d_\varrho \\ q = \min \{ \varrho \in \mathbb{N}_0 \mid d_\varrho = d \} , \end{cases}$

so daß also

$$d = d_q .$$

Wegen (1.23),4.) existiert $\max\limits_{\varrho \in \mathbb{N}_0} d_\varrho$ , wegen 2.) und 3.) ist die erste Eigenschaft von (1.24) für q erfüllt. Zur Abschätzung beachtet man, daß für $q > 0$

$$n \cdot s \geq d_q = \sum_{\varrho=0}^{q-1} (d_{\varrho+1} - d_\varrho) + d_0 \geq q + 1 ,$$

letzteres, da jeder Summand $d_{\varrho+1} - d_\varrho \geq 1$ , $d_0 \geq 1$ .

Zum <u>Beweis von Hilfssatz 1.23</u> bezeichne

$$\mathfrak{U}_\varrho(\lambda) = \{ (h_\nu)_{\nu=0}^{\varrho} \in \mathfrak{N}_\varrho(\lambda) \text{ mit } h_0 = 0 \} ,$$

$$\mathfrak{N}_\varrho^!(\lambda) = \{ h_0 \in \mathbb{C}^n \mid \exists\, h_1, \ldots, h_\varrho \text{ mit } (h_\nu)_{\nu=0}^{\varrho} \in \mathfrak{N}_\varrho(\lambda) \} .$$

Vermöge der Zuordnung

$$(0, h_1, \ldots, h\ ) \longmapsto (h_1, \ldots, h_\varrho)$$

ist

$$\mathfrak{U}_\varrho(\lambda) \simeq \mathfrak{N}_{\varrho-1}(\lambda+1) \qquad (\text{mit } \mathfrak{N}_{-1}(\lambda) = \{0\}) ,$$

außerdem ist mit dem Isomorphismus

$$(h_0, h_1, \ldots, h\ ) + \mathfrak{U}_\varrho(\lambda) \longmapsto h_0$$

stets

$$\mathfrak{N}_\varrho(\lambda)/\mathfrak{U}_\varrho(\lambda) \simeq \mathfrak{N}_\varrho'(\lambda) ,$$

folglich

(+) $\quad \dim \mathfrak{N}_\varrho'(\lambda) = \delta_\varrho(\lambda) - \delta_{\varrho-1}(\lambda+1) .$

Die Ungleichung

$$\delta_\varrho(\lambda+1) \leq \delta_{\varrho+1}(\lambda)$$

folgt aus der Tatsache, daß $\mathfrak{U}_{\varrho+1}(\lambda)$ Unterraum zu $\mathfrak{N}_{\varrho+1}(\lambda)$ ist, isomorph zu $\mathfrak{N}_\varrho(\lambda+1)$ . - Zum Beweis, daß

$$\delta_\varrho(\lambda) \leq \delta_{\varrho+1}(\lambda) ,$$

beachte man, daß $A_{\varrho+1}(\lambda)$ aus $A_\varrho(\lambda)$ entsteht durch Hinzufügen von n Nullspalten -, was den Rang nicht ändert, - und anschließend von n Zeilen, wodurch sich der Rang um höchstens n erhöht, also

$$\delta_{\varrho+1}(\lambda) = (\varrho+2)n - \operatorname{rg} A_{\varrho+1}(\lambda) \geq (\varrho+1)n - \operatorname{rg} A_\varrho(\lambda) = \delta_\varrho(\lambda) .$$

Durch Übergang auf

$$d_\varrho = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \delta_\varrho(\lambda)$$

erhält man Aussage 2.); $d_0 > 0$ war in (1.1) vorausgesetzt. Korollar 1.12 b) liefert, daß für höchstens endlich viele $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\delta_\varrho(\lambda) > d_\varrho \quad \text{gelten kann .}$$

Daher wählen wir ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so, daß gleichzeitig

$$\delta_\varrho(\lambda+1) = \delta_\varrho(\lambda) = d_\varrho \ ; \ \delta_{\varrho+1}(\lambda) = d_{\varrho+1} \ ; \ \delta_{\varrho-1}(\lambda+1) = d_{\varrho-1} .$$

Aus (+) folgt dann Aussage 3.), wenn man beachtet, daß

$$\mathfrak{N}_{\varrho+1}'(\lambda) \subseteq \mathfrak{N}_\varrho'(\lambda) .$$

4.) interessiert nur für $\varrho \geq s$ :

Streicht man in $A_\varrho(\lambda)$ die ersten $n\cdot s$ Zeilen und letzten $n\cdot s$ Spalten, ist die entstandene Determinante (als charakteristisches Polynom einer komplexen Matrix) sicher nicht das Nullpolynom, daher ist - über dem Körper $\mathbb{C}(\lambda)$ -

$$\operatorname{rg} A_\varrho \geq (\varrho+1)\cdot n - n\cdot s , \text{ also } d_\varrho \leq n\cdot s .$$

Durch Übergang auf die $\widetilde{A_\varrho^{[k]}}(\lambda)$ , die die gleiche Struktur wie die $A_\varrho(\lambda)$ besitzen, ergibt sich Aussage 5.) , während 6.) schon mit (1.18),$\delta$) bewiesen ist .

Im folgenden beschäftigen uns die $A_\varrho(\lambda)$ nur noch für $\varrho \geq q$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ ist nach den vorhergehenden Sätzen

$$\dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda) = \dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q}(\lambda) = k \cdot d \quad .$$

Nach Abschnitt 1.2.2. seien

$$(h^{[k]}_{\nu i}(\lambda))^q_{\nu=0} \qquad (i = 1,\dots,k\cdot d)$$

Vektorpolynome, die für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Basis von $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_q(\lambda)$ bilden; dann sind die Vektorpolynome

$$(\underbrace{0,0,\dots,0}_{(\mu+1)\text{-mal}},h^{[k]}_{0i}(\lambda+\mu+1),\dots,h^{[k]}_{qi}(\lambda+\mu+1)\ ) \qquad (i=1,\dots,k\cdot d)$$

für jedes komplexe $\lambda$ linear unabhängig und liegen in $\mathfrak{N}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda)$; nach Hilfssatz 1.14 erzeugen sie $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda)$. Das halten wir fest in

<u>Hilfssatz 1.26</u>

Sei $\mu \in \mathbb{N}_0$ , $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig . Dann gilt

$$(h^{[k]}_\nu)^{q+1+\mu}_{\nu=0} \in \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q+1+\mu}(\lambda) \curvearrowright h^{[k]}_0 = \dots = h^{[k]}_\mu = 0 \ .$$

Wir definieren für $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$

<u>Def.(1.27)</u>

$$\mathfrak{M}^{[k]}_\mu(\lambda) = \Big\{ (h^{[k]}_\nu)^{\mu}_{\nu=0} : \exists\ h^{[k]}_{\mu+1},\dots,h^{[k]}_{q+\mu+1} \in \mathbb{C}^{nk} \quad \text{, so daß} \quad (h^{[k]}_\nu)^{q+\mu+1}_{\nu=0} \in \mathfrak{N}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda) \Big\} .$$

Außerdem sei für $\mu \in \mathbb{N}_0$

<u>Def.(1.28)</u>
$$\begin{cases} \chi_\mu(\lambda) = \text{g.g.T. der } \langle (q+\mu+2)n-d\rangle\text{-zeiligen Unterdeterminanten von } A_{q+\mu+1}(\lambda) \ , \\ \chi(\lambda) = \chi_0(\lambda) \quad . \end{cases}$$

$\chi_\mu(\lambda)$ in $A_{q+\mu+1}(\lambda)$ ist unter Satz 1.11 einzuordnen als das Polynom $\psi_r(\lambda)$ in $A(\lambda)$ . Wir beschäftigen uns zunächst nur mit $\chi(\lambda) = \chi_0(\lambda)$ .

Es gilt für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , $\mu \in \mathbb{N}_0$ :

Hilfssatz 1.29

1.) $\mathfrak{M}_o^{[k]}(\lambda_o) \neq \{0\} \curvearrowright \chi(\lambda_o) = 0$ ,

2.) $\chi(\lambda_o) \neq 0 \curvearrowright \mathfrak{N}_q^{[k]}(\lambda_o) = \hat{\mathfrak{N}}_q^{[k]}(\lambda_o)$ ,

3.) $\chi(\lambda_o+\mu+1) \neq 0 \curvearrowright \mathfrak{N}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_o)/\hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_o) \simeq \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_o)$
vermöge

(x) $\qquad (h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{q+\mu+1} + \hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_o) \longmapsto (h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{\mu}$ .

Zum Beweis von 1.) und 2.) nehmen wir an, es sei $\chi(\lambda_o) \neq 0$ . Dann ist nach (1.18),$\varepsilon$)

(xx) $\qquad \mathfrak{N}_{q+1}^{[k]}(\lambda_o) = \hat{\mathfrak{N}}_{q+1}^{[k]}(\lambda_o)$ ,

daher mit (1.26)

$$h_o^{[k]} \in \mathfrak{M}_o^{[k]}(\lambda_o) \curvearrowright h_o^{[k]} = 0 \quad .$$

Weiter gilt

$$k\cdot d \leq \dim \mathfrak{N}_q^{[k]}(\lambda_o) = \delta_q^{[k]}(\lambda_o) \leq \delta_{q+1}^{[k]}(\lambda_o) = k\cdot d \quad ,$$

letzteres wegen (xx) : daraus folgt 2.), da auch

$$\dim \hat{\mathfrak{N}}_q^{[k]}(\lambda_o) = k\cdot d \quad .$$

Die unter 3.) angegebene Zuordnung (x) ist wegen Hilfssatz 1.26 in jedem Fall lineare und surjektive Abbildung. Falls

$$h_o^{[k]} = \ldots = h_\mu^{[k]} = 0 \quad ,$$

so wegen 2.)

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=\mu+1}^{\mu+q+1} \in \mathfrak{N}_q^{[k]}(\lambda_o+\mu+1) = \hat{\mathfrak{N}}_q^{[k]}(\lambda_o+\mu+1) \; ;$$

und dem Beweis von (1.26) entnehmen wir, daß

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{q+\mu+1} \in \hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_o) \; .$$

Mit Aussage 3.) werden Lösungen der Gleichung

$$A_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_o)\; C_{q+\mu+1}^{[k]} = 0 \quad ,$$

die bezüglich des ausgearteten Nullraums von $A_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_o)$ linear unabhängig sind, durch die lineare Unabhängigkeit der Abschnitte bis zur Komponente $\mu$ charakterisiert. Uber die Lösbarkeit von Rekursionen der Form (1.5) notieren wir

<u>Hilfssatz 1.30</u>

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig; $\lambda_o \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}_o$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \mu \in \mathbb{N} : \mu \geq p+1 \curvearrowright \chi(\lambda_o+\mu) \neq 0 .$$

<u>Beh.:</u> Jedes $(p+1)$-tupel

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{p} \in \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_o)$$

läßt sich zu einer eindeutig bestimmten Lösungsfolge

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{\infty}$$

der Rekursionen

$$(1.31) \qquad A_\varrho^{[k]}(\lambda_o)C_\varrho^{[k]} = 0 \quad , \quad C_\varrho^{[k]} = (h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{\varrho} \qquad (\varrho=0,1,2,..)$$

fortsetzen.

<u>Beweis:</u>

Für $\mu \geq p+1$ bezeichne

$$\psi_\mu : \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_o) \longrightarrow \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_o) \text{ die lineare Zuordnung}$$

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{\mu} \longmapsto (h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{p} .$$

Hilfssatz 1.29,3.) zusammen mit 1.23,5.) liefert

$$(\alpha) \quad \dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_o) \leq \dim \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_o) .$$

Andererseits nehmen wir an, es sei

$$0 \neq (h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{\mu} \in \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_o) \text{ mit } h_o^{[k]} = \ldots = h_p^{[k]} = 0 ;$$

dann wäre mit $j = \min\{\nu \in \{p+1,..,\mu\} : h_\nu^{[k]} \neq 0\}$

$$h_j^{[k]} \in \mathfrak{M}_o^{[k]}(\lambda_o+j) ,$$

was nach Hilfssatz 1.29,1.) unmöglich ist. Es folgt

($\beta$) $\psi_\mu$ ist injektive, lineare Abbildung,

mit ($\alpha$) zusammen also

($\gamma$) $\forall \mu \geq p+1 \quad \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_o) \simeq \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_o)$ vermöge des Isomorphismus $\psi_\mu$.

Bei vorgegebenem $(h_\nu^{[k]})_{\nu=o}^{p} \in \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_o)$ definieren wir für

$\mu = p, p+1, \ldots$ :

$$h_\mu^{[k]} = \text{letzte Komponente von } \psi_\mu^{-1}((h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^p) ,$$

so daß für alle $\mu \geq p+1$ , wie man leicht sieht,

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^\mu = \psi_\mu^{-1}((h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^p) \in \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0) .$$

Damit ist $(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^\infty$ die gesuchte, eindeutig bestimmte Lösungsfolge von (1.31) .

Zur Lösbarkeit von (1.2) notieren wir zusammenfassend

<u>Satz 1.32</u>

1.) Falls $\chi = 1$ , hat (1.2) nur die triviale Lösung.

2.) Sei $\chi \neq 1$ , es <u>bezeichne</u>

α) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die Nullstellen von $\chi$ mit den Eigenschaften

$\lambda_i - \lambda_j$ nicht ganzzahlig $(i \neq j)$ ,

jede Nullstelle von $\chi$ hat die Form $\lambda_i + z$ mit $z \in \mathbb{N}_0$ , $1 \leq i \leq m$ .

β) $p_i = \max \{ z \in \mathbb{N}_0 \mid \chi(\lambda_i + z) = 0 \}$ $(i = 1, \ldots, m)$ ,

$p = \max_{\iota=1}^{m} p_i$ .

Schließlich sei für $i = 1, \ldots, m$

γ) $v_i$ = Vielfachheit von $\lambda_i$ als Nullstelle von $\chi_p$ ,

$t_i$ , $k_i^\tau$ $(\tau = 1, \ldots, t_i)$ gemäß Satz 1.19 für die Nullstelle $\lambda_i$ von $\chi_p$ definiert, so daß

$$\sum_{\tau=1}^{t_i} k_i^\tau = v_i .$$

<u>Behauptung:</u> Die Rekursionen (1.2) mit den Bedingungen (A), (B), (C) von Abschnitt 1.1 lassen sich lösen unter Übernahme der in α) und β) definierten Größen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ , $t_i$ , $k_i^\tau$ in die durch (1.4) definierte Matrix J. Dabei ist

$$r = \sum_{\iota=1}^{m} v_i$$

der maximale Rang einer formalen Lösung.

- Daß stets $v_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{m} v_i \leq n$, ist im folgenden Abschnitt noch zu zeigen.

Zum Beweis sei daran erinnert, daß wir die nichttriviale Lösbarkeit von (1.2) auf die nichttriviale Lösbarkeit von Systemen der Form (1.5) zurückgeführt haben. (1.5) ist den Rekursionen (1.31) äquivalent, wenn man $\lambda_o = \lambda_i$, $k_i^{\tau} = k$ setzt. - Nehmen wir an, es sei eine Folge

$$(h_{\nu}^{[k]})_{\nu=o}^{\infty} \neq 0 \quad \text{mit} \quad \mu = \min \{ \nu \in \mathbb{N}_o \mid h_{\nu}^{[k]} \neq 0 \}$$

Lösung von (1.31). Wegen

$$h_{\mu}^{[k]} \in \mathfrak{M}_o^{[k]}(\lambda_o + \mu)$$

ist nach Hilfssatz 1.29,1.)

$$\chi(\lambda_o + \mu) = 0 .$$

$\chi$ muß also überhaupt Nullstellen besitzen, womit 1.) gezeigt ist. Wir ersetzen dann

$$\lambda_o \text{ durch } \lambda_o + z_o \text{ mit } z_o = \min \{ z \in \mathbb{Z} \mid \chi(\lambda_o + z) = 0 \}$$

und verfahren mit den zu $\lambda_o$ gehörenden Lösungsfolgen, wie in Abschnitt 1.1 vor (B) gezeigt. Daher genügt es, (1.31) bzw. (1.5) nur für die unter $\alpha$) erwähnten $\lambda_i$ zu lösen.

Für festes $i \in \{1,..,m\}$ bezeichne kurz

$$t := t_i \;, \; k_{\tau} := k_i^{\tau} \quad (\tau = 1,...,t) .$$

Satz 1.19, angewandt auf $\lambda_i$ als $\lambda_o$, $A_{q+1+p}(\lambda)$ als $A(\lambda)$ - und damit $\chi_p(\lambda)$ als $\psi_r(\lambda)$ - liefert Systeme

(+) $\quad (h_{1\nu}^{\tau},...,h_{k_{\tau}\nu}^{\tau})_{\nu=o}^{q+1+p} \in \mathfrak{N}_{q+1+p}^{[k_{\tau}]}(\lambda_i) \qquad (\tau=1,...,t)$

- zur Bezeichnung vgl. (1.22) - , mit

$(h_{1\nu}^{\tau})_{\nu=o}^{q+1+p}$ $(\tau=1,..,t)$ lin.unabh. bzgl. $\hat{\mathfrak{N}}_{q+1+p}(\lambda_i)$ ,

also nach Hilfssatz 1.29,3.)

(++) $\quad (h_{1\nu}^{\tau})_{\nu=o}^{p} \quad (\tau=1,...,t)$ linear unabhängig .

Die Abschnitte

$$(h_{1\nu}^{\tau},...,h_{k_{\tau}\nu}^{\tau})_{\nu=o}^{p} \in \mathfrak{M}_p^{[k_{\tau}]}(\lambda_i)$$

lassen sich wegen Hilfssatz 1.30 eindeutig zu Lösungsfolgen

$(h^{\tau}_{1\nu},\dots,h^{\tau}_{k_\tau\nu})^{\infty}_{\nu=o}$ von (1.5) fortsetzen $(\tau=1,\dots,t)$,

wobei Bedingung (C) durch (++) garantiert ist; - die Komponenten $h^{\tau}_{\kappa\nu}$ für $\nu=p+1,p+2,\dots,p+q+1$ sind natürlich eventuell andere als in (+) . -

$v_i = \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau$ ist maximal bezüglich der Lösbarkeit von Systemen (1.5) zu $\lambda_i$ unter Bedingung (C), da nach Hilfssatz 1.30 die Zuordnungen

$$(h^{\tau}_{1\nu},\dots,h^{\tau}_{k_\tau\nu})^{\infty}_{\nu=o} \longmapsto (h^{\tau}_{1\nu},\dots,h^{\tau}_{k_\tau\nu})^{p}_{\nu=o} \quad \text{und}$$

$$(h^{\tau}_{1\nu})^{\infty}_{\nu=o} \longmapsto (h^{\tau}_{1\nu})^{p}_{\nu=o}$$

bijektiv und linear sind .

## 1.4. Abschätzungen für den Rang einer formalen Lösung

Im folgenden wollen wir die Größe $\sum_{i=1}^{m} v_i$ abschätzen. Wir nehmen an, daß $\chi \neq 1$ , und übernehmen die Bezeichnungen aus Satz 1.32. Eine erste wichtige Gleichung fließt aus

<u>Hilfssatz 1.33</u>

Für alle $\mu \geq p$ ist $\sum_{i=1}^{m} v_i = \text{Grad}\,\chi_{\mu+1} - \text{Grad}\,\chi_\mu$ .

Zum <u>Beweis</u> zählen wir sämtliche Nullstellen von $\chi_\mu$ und $\chi_{\mu+1}$ auf und vergleichen ihre Vielfachheiten.

1.) Die Zahlen

I. $\lambda_i+\nu$ $\quad (i=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,p_i)$ ,

II. $\lambda_i-\nu$ $\quad (i=1,\dots,m;\ \nu=0,\dots,\mu$ und evt. $\mu+1)$

sind Nullstellen von $\chi_\mu$. - Zum Nachweis von II. für $\nu = 0,\dots,\mu$ benutzt man (1.23),1.), wonach

$$\delta_{q+\mu+1}(\lambda_i-\nu) \geq \delta_{q+\mu+1-\nu}(\lambda_i) \geq \delta_{q+1}(\lambda_i) > d ,$$

zum Beweis von I. ersetzt man nur $\lambda_i$ durch $\lambda_i+p_i$ .

2.) Unter I. und II. sind alle Nullstellen von $\chi_\mu$ aufgeführt.
- Für eine Nullstelle $\lambda'$ von $\chi_\mu$ gilt nämlich

$$\mathfrak{N}_{q+\mu+1}(\lambda') \supsetneqq \hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}(\lambda') .$$

Entweder ist nun $\chi(\lambda'+\mu+1) = 0$ , dann ist $\lambda'$ unter II. aufgeführt. Andernfalls, nach (1.29),3.) existiert

$$0 \neq (h_\nu)_{\nu=0}^{\mu} \in \mathfrak{M}_\mu^{[1]}(\lambda') .$$

Mit $j = \min\{\nu \mid h_\nu \neq 0\}$ gilt

$$h_j \in \mathfrak{M}_0^{[1]}(\lambda'+j) \text{ , daher } \lambda'+j \text{ Nullstelle von } \chi .$$

Entsprechend sind die Nullstellen von $\chi_{\mu+1}$

I') $\lambda_i+\nu$ $\quad (i=1,..,m;\ \nu=0,..,p_i)$ ,

II') $\lambda_i-\nu-1$ $\quad (i=1,..,m;\ \nu=0,...,\mu$ und evt. $\mu+1)$.

Man beachte, daß wir die $\lambda_i$ selbst oben in beiden Zeilen I. und II. aufgeführt haben, hier nur unter I') .

3.) Die Vielfachheiten jeder Nullstelle $\lambda_i+\nu$ (aus I.bzw.I')) in $\chi_\mu$ und $\chi_{\mu+1}$ stimmen überein ; jedes $\lambda_i$ ist genau $v_i$-fache Nullstelle. -

Jedes $\lambda_i+\nu$ als $\lambda_o$ erfüllt die Voraussetzung von Hilfssatz 1.30, daher ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ :

$$\dim \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_i+\nu) = \dim \mathfrak{M}_{\mu+1}^{[k]}(\lambda_i+\nu) = \dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i+\nu).$$

Nach Satz 1.19,3.) sowie (1.29),3.) bedeutet das bei genügend großem k , daß die Vielfachheiten von $\lambda_i+\nu$ in $\chi_\mu$, $\chi_{\mu+1}$ und $\chi_p$ übereinstimmen.

4.) Die Vielfachheit jeder Nullstelle $\lambda_i-\nu$ (aus II. ) in $\chi_\mu$ ist gleich der Vielfachheit von $\lambda_i-\nu-1$ in $\chi_{\mu+1}$ . -

Da $\chi(\lambda_i-\nu-1) \neq 0$ , ist stets $\mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_i-\nu-1) = \{0\}$, folglich

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{q+\mu+1} \in \mathfrak{N}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_i-\nu-1) \\ \Longleftrightarrow \quad h_0^{[k]} = 0 \wedge (h_\nu^{[k]})_{\nu=1}^{q+\mu+1} \in \mathfrak{N}_{q+\mu}^{[k]}(\lambda_i-\nu) . \end{array} \right.$$

Daher ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\dim \mathfrak{N}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_i-\nu-1) = \dim \mathfrak{N}_{q+\mu}^{[k]}(\lambda_i-\nu) .$$

-Da die ausgearteten Nullräume beide die Dimension $k \cdot d$ haben, bleibt wieder nur Satz 1.19,3.) für genügend großes k anzuwenden.

Folglich stehen, der Vielfachheit entsprechend gezählt, unter I. so viele Nullstellen wie unter I'), unter II. so viele wie unter II'); die $\lambda_i$ sind in I., II. doppelt gezählt, in I'), II') nicht ; also hat $\chi_{\mu+1}$ der Vielfachheit nach,

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \quad \text{Nullstellen mehr als } \chi_\mu .$$

Aus den Beweisteilen 1.) bzw. 2.) folgern wir direkt

Korollar 1.34

1.) $\forall i \in \{1,\dots,m\} \quad v_i > 0$ ,

2.) Falls $\chi = 1$ , so auch alle $\chi_\mu = 1 \quad (\mu \in \mathbb{N})$ .

Für die Praxis leichter anwendbare Kriterien liefert der folgende Hilfssatz, den wir für die weitere Theorie aber nicht brauchen .

Hilfssatz 1.35

1.) Wenn sich alle verschiedenen Nullstellen von $\chi$ nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so ist

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = \text{Grad}\, \chi .$$

2.) In jedem Fall

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \leq \text{Grad}\, \chi .$$

Beweis: Im ersten Fall ist $p = 0$ , also $\chi = \chi_p$ . - Im allgemeinen Fall schätzen wir die Vielfachheiten von

$\lambda_i + z \quad (z=0,1,\dots,p)$ als Nullstellen von $\chi$ ab.

Nach Satz 1.19 sowie (1.29),3.) ist für $k \geq \max_\tau k_i^\tau$

$$\dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i) = v_i .$$

Mit gewissen ganzen Zahlen

$$0 \leq z_1 < z_2 < \dots < z_l \leq p \qquad (l \geq 1)$$

gibt es Basisvektoren von $\mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i)$, die sich in l Klassen einteilen lassen, so daß in der $\mu$-ten Klasse Vektoren der Gestalt

$$(0,\ldots,0,h_{z_\mu j}^{[k]},\ldots,h_{p,j}^{[k]}) \qquad (j=1,\ldots,\sigma_\mu)$$

mit

$$h_{z_\mu j}^{k} \quad (j=1,\ldots,\sigma_\mu) \text{ lin.unabh. }, \in \mathfrak{M}_o^{[k]}(\lambda_i+z_\mu)$$

zusammengefaßt sind. Dann ist offensichtlich

$$\dim \mathfrak{N}_{q+1}^{[k]}(\lambda_i+z_\mu) - k\cdot d \geq \dim \mathfrak{M}_o^{[k]}(\lambda_i+z_\mu) \geq \sigma_\mu \quad (\mu=1,\ldots,l).$$

Folglich ist die Summe der Vielfachheiten von $\lambda_i+z_\mu$ $(\mu=1,\ldots,l)$ als Nullstellen in $\chi$ mindestens gleich

$$\sum_{\mu=1}^{l} \sigma_\mu = v_i .$$

Daß im allgemeinen Fall nicht unbedingt

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = \text{Grad } \chi \quad ,$$

dazu sind leicht Beispiele zu finden. -

Nach Satz 1.32 bezeichnen wir als maximalen Rang einer formalen Lösung

$$(1.36) \qquad r_{max} = \begin{cases} 0 \ , & \text{falls } \chi = 1 \ , \\ \sum_{i=1}^{m} v_i \ , & \text{falls } \chi \neq 1 \ . \end{cases}$$

Zur Rechtfertigung bleibt zu zeigen

<u>Bemerkung 1.37</u>

Es ist stets $\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \leq n$ .

Mit der Bezeichnung,

$\omega_o$ = Vielfachheit des Eigenwerts 0 von $B_o$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms,

wollen wir genauere Abschätzungen für $r_{max}$ liefern:

<u>Satz 1.38</u>

1.) $s\cdot r_{max} \leq d \leq s\cdot\omega_o$ ;

2.) $r_{max} = \omega_o \iff d = s\cdot\omega_o$ .

Aus der um eine triviale Ungleichung erweiterten 1.Behauptung,

$$s \cdot r_{max} \leq d \leq s \cdot \omega_o \leq s \cdot n \quad ,$$

ist außer (1.37) unmittelbar der Beweis des folgenden Satzes abzulesen, den wir vor dem Beweis von (1.38) notieren:

Satz 1.39

1.) $r_{max} = n \Leftrightarrow d = n \cdot s$

2.) $r_{max} = n \Rightarrow B_o$ nilpotent .

Wie einfache Gegenbeispiele bestätigen, ist die Umkehrung von (1.39),2.) falsch, ebenso kann man die Ungleichungen (1.38),1.) i.a. nicht durch Gleichungen ersetzen.

Beweis von Satz 1.38

Es sei daran erinnert, daß $B_o$ als nicht-invertierbar vorausgesetzt war, d.h. $\omega_o > 0$. Für $\omega_o = 0$ ist natürlich $d = 0$ und $r_{max} = 0$, da es nur die triviale Lösung von (1.5) gibt. Wir brauchen den Satz also in jedem Fall nur für $\omega_o > 0$ zu beweisen. - Wir zeigen folgende Aussagen:

I. $d \leq s\,\omega_o$ ,

II. $d = s \cdot \omega_o \Rightarrow r_{max} = \omega_o$ ,

III. $s \cdot r_{max} \leq d$ .

Aus I. und III. schließt man unmittelbar

$$r_{max} = \omega_o \Leftrightarrow d = s \cdot \omega_o \ .$$

Zunächst nehmen wir an, daß $B_o$ in der folgenden Gestalt (z.B. in Jordanscher Normalform) vorliegt:

$$B_o = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right) \qquad , \text{ wobei}$$

D invertierbare $(n-\omega_o, n-\omega_o)$-Matrix - fällt weg für $\omega_o = n$ - ,

N nilpotente $(\omega_o, \omega_o)$-Matrix .

**Wenn** nämlich mit einer invertierbaren Matrix $T \in M_n(\mathbb{C})$ die Transformation

$$B_o \longrightarrow T^{-1} B_o T$$

die obige Form erzeugt, geht man für jedes $\varsigma \in \mathbb{N}_o$ mit

$$T_\varsigma = \begin{pmatrix} T & & & \\ & T & & O \\ & O & \ddots & \\ & & & T \end{pmatrix}_{((\varsigma+1)n,(\varsigma+1)n)}$$

von $A_\varsigma(\lambda)$ über auf $T_\varsigma^{-1} A_\varsigma(\lambda) T_\varsigma$ .

Dabei bleibt die Struktur (1.9) der $A_\varsigma(\lambda)$ erhalten. Weil sich bei vorliegender Transformation die Smithsche Normalform jeder Matrix $A_\varsigma(\lambda)$ nicht ändert, bleiben auch die Größen $d_\varsigma$, q und d sowie die Polynome $\chi_\nu(\lambda)$ invariant.

Für $\varsigma \geq 2s$ bezeichnen wir mit $V_\varsigma(\lambda)$ die übrigens schon in Hilfssatz 1.23,4.) benutzte $\langle(\varsigma+1)\cdot n - s\cdot n\rangle$-zeilige Untermatrix von $A_\varsigma(\lambda)$ :

$$V_\varsigma(\lambda) = \begin{pmatrix} B_s - \lambda I & B_{s-1} & \cdots & B_o & & O \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & & B_o \\ & & & & \ddots & \vdots \\ B_\varsigma & \cdots & & \cdots & & B_s - (\lambda+\varsigma-s)I \end{pmatrix}$$

Falls $\omega_o < n$, unterteilen wir jede Matrix $B_\nu$ $(\nu \in \mathbb{N}_o)$ so wie $B_o$ ,

$$B_\nu = \left(\begin{array}{c:c} B_\nu^1 & B_\nu^2 \\ \hdashline B_\nu^3 & B_\nu^4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n-\omega_o \\ \}\, \omega_o \end{array}$$
$$\qquad\quad \underbrace{\qquad}_{n-\omega_o} \;\; \underbrace{\qquad}_{\omega_o}$$

und betrachten die folgende $\langle(\varsigma+1)\cdot n - s\cdot\omega_o\rangle$-zeilige Untermatrix von $A_\varsigma(\lambda)$, die entsteht, wenn man in den ersten s Blockzeilen von $A_\varsigma(\lambda)$ die zu den $B_\nu^3$ , $B_\nu^4$ gehörenden Zeilen wegläßt, analog in den letzten s Blockspalten die zu den $B_\nu^2$ , $B_\nu^4$ gehörenden Spalten.

$$U_{\varrho}(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} D & O & & & & \\ B_1^1 & B_1^2 & D & O & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ B_{s-1}^1 & B_{s-1}^2 & \cdots & & D & O \end{matrix} & O \\ \hline V_{\varrho}(\lambda) & \begin{matrix} D & & \\ O & & \\ B_1^1 & \ddots & \\ B_1^3 & & \ddots \\ \vdots & & D \\ \vdots & & O \\ \vdots & & B_1^2 & D \\ B_{s-1}^3 & \cdots & B_1^3 & O \end{matrix} \end{array}\right)$$

Für den Fall, daß $\omega_o = n$, setzen wir

$$U_{\varrho}(\lambda) = V_{\varrho}(\lambda)$$

und zeigen für beide Fälle

<u>Hilfssatz 1.40</u>

Die Determinante von $U_{\varrho}(\lambda)$ ist ein Polynom vom genauen Grad $\omega_o \cdot ( \varrho - s + 1 )$.

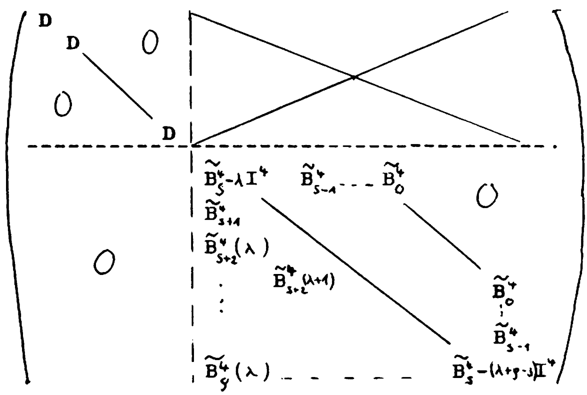
– Für $\omega_o = n$ ist $U_{\varrho}(\lambda) = V_{\varrho}(\lambda)$ und daher die Determinante das charakteristische Polynom einer $n \cdot (\varrho - s + 1)$-zeiligen Matrix.

Für $\omega_o < n$ berechnen wir die Determinante von $U_{\varrho}(\lambda)$ in mehreren Transformationsschritten :

a) Da D konstante, invertierbare Matrix ist, können wir, ohne den Wert der Determinante zu ändern, durch Zeilenoperationen in $U_{\varrho}(\lambda)$ sämtliche $B_\nu^3$ und für $\nu \neq o, s$ die $B_\nu^1$ sowie alle $B_s^1 - (\lambda + \mu) I^1$ $(\mu = 0, .., \varrho - s)$ annullieren. Oben beginnend, hat man dazu jede mit D endende Blockzeile, mit einer geeigneten Matrix von links multipliziert, von jeder folgenden Blockzeile zu subtrahieren. Die benötigten Faktoren sind die Matrizen $B_\nu^3 D^{-1}$, $B_\nu^1 D^{-1}$ $(\nu \neq 0, s)$ bzw. $(B_s^1 - (\lambda + \mu) I^1) D^{-1}$. Im letzten Fall wird durch die links von einem D stehenden, evt. schon abgeänderten, aber konstanten $B_\kappa^2$ (konstant sicher für $\kappa = 1, .., s$) die links neben $B_s - (\lambda + \mu) I^1$ stehenden $B_\nu^2$ – also $\nu = s+1, ..., 2s$ –

in Matrizenpolynome (höchstens) 1. Grades abgeändert, die bei weiteren Transformationsschritten ihrerseits bewirken, daß auch die $B_\nu^4$ für $\nu=s+2,\dots,2s+1$ Matrizenpolynome (h.) 1.Grades werden, die $B_\nu^2$ für $\nu=2s+1,\dots,3s$ solche (höchstens) vom Grad 2, daher die $B_\nu^4$ für $\nu=2s+2,\dots,3s+1$ vom Grad 2, usf. .

b) Der nächste Schritt besteht in einer Permutation der Zeilen und Spalten mit dem Effekt, daß die Matrizen D im Anfang der Hauptdiagonale hintereinanderstehen. Die so transformierte Matrix hat die Gestalt




Rechts oben stehen die zu Polynommatrizen abgeänderten $B_\nu^2$, die den Wert der Determinante nicht beeinflussen. Bezeichnet man die im rechten unteren Teil stehende

$(\varsigma-s+1)\cdot\omega_0$-zeilige Matrix als $\tilde{U}_\varsigma(\lambda)$, so gilt

$$\det U_\varsigma(\lambda) = \pm (\det D)^{\varsigma+1}\cdot \det \tilde{U}_\varsigma(\lambda) \ .$$

Es bleibt also $\det \tilde{U}_\varsigma(\lambda)$ zu berechnen.

c) Dazu bemerken wir:

$\tilde{B}_0^4 = N$, $\tilde{B}_1^4$, ..., $\tilde{B}_{s+1}^4$ sind konstante Matrizen,

die $B_\nu^4$ für $\nu \geq s+2$ aus der 2.Blockspalte von $U_\varsigma(\lambda)$ sind in Matrizenpolynome $\tilde{B}_\nu^4(\lambda)$ übergegangen, und zwar ist für $k \in \mathbb{N}_0$ , $j = 0,\ldots,s-1$

$$\widetilde{B}^{+}_{ks+j+2}(\lambda) \text{ Polynommatrix höchstens vom Grad } k.$$

Aus Symmetriegründen sind die unterhalb $B^{+}_{s}-(\lambda+\mu)I^{+}$ stehenden $B^{+}_{\nu}$ in $\widetilde{B}^{+}_{\nu}(\lambda+\mu)$ übergegangen.

Der Anteil $\lambda\cdot I$ in der Hauptdiagonale von $\widetilde{U}_{\varrho}(\lambda)$ erlaubt es, durch Zeilenumformungen die von $\lambda$ abhängigen Anteile in den Matrizen $\widetilde{B}^{+}_{\nu}(\lambda+\mu)$ wieder zum Verschwinden zu bringen, womit $\widetilde{U}_{\varrho}(\lambda)$ auf die Gestalt

$$\widetilde{\widetilde{U}}_{\varrho} - \lambda\cdot I \text{ transformiert wird, mit konstantem } \widetilde{\widetilde{U}}_{\varrho} .$$

Damit ist die Determinante von $\widetilde{U}_{\varrho}(\lambda)$ als charakteristisches Polynom einer Matrix ein Polynom vom genauen Grad

$\omega_o\cdot(\varrho-s+1)$ , womit unser Hilfssatz gezeigt ist.

I. $d = s\cdot\omega_o$ folgt aus der Tatsache, daß für alle $\varrho \geq 2s$ $\det U_{\varrho}(\lambda)$ nicht das Nullpolynom ist, folglich $\operatorname{rg} A_{\varrho} \geq (\varrho+1)\cdot n - s\cdot\omega_o$ , und daher $d_{\varrho} \leq s\cdot\omega_o$ .

II. Falls $d = \omega_o\cdot s$ , ist für $\nu \geq 1$

$\chi_{\nu-1}(\lambda)$ = g.g.T. der $\langle(q+1+\nu)\cdot n - \omega_o\cdot s\rangle$-zeiligen Unterdeterminanten von $A_{q+\nu}(\lambda)$ ; Nullpolynome werden natürlich nicht berücksichtigt.

a) Für jedes $\nu$ mit $q+\nu \geq 2s$ ist nach Hilfssatz 1.40

$\Delta_{\nu}(\lambda) := \det U_{q+\nu}(\lambda)$

eine der zur Auswahl stehenden Unterdeterminanten, und zwar Polynom vom Grad

$\omega_o\cdot\nu + \omega_o\cdot(q-s+1)$ .

b) Die Zahl der nicht identisch verschwindenden Unterdeterminanten von $A_{q+\nu}(\lambda)$ ist durch eine von $\nu$ unabhängige Zahl $t^2$ beschränkt, mit

$t$ = Anzahl der Möglichkeiten, $\omega_o\cdot s$ Zeilen in $A_q(\lambda)$ zu streichen.

$A_{q+\nu}(\lambda)$ enthält nämlich als Teilmatrizen

$(A_q(\lambda) \mid 0 \ )$ in den ersten Zeilen sowie

$\begin{pmatrix} 0 \\ A_q(\lambda+\nu) \end{pmatrix}$ in den letzten Spalten.

Da schon $d_q = \omega_0 s$, wird eine Unterdeterminante sicher das Nullpolynom, wenn nicht alle $\omega_0 \cdot s$ Zeilen in der erstgenannten Teilmatrix, alle $\omega_0 \cdot s$ Spalten in der zweiten Teilmatrix gestrichen werden.

c) Die Auswahl der in $A_q(\lambda)$ zu streichenden $\omega_0 \cdot s$ Zeilen bzw. Spalten sei durch die Indizes $\tau$ und $\sigma$ charakterisiert $(\tau, \sigma = 1,\dots,t)$, die zugehörige Unterdeterminante von $A_{q+\nu}(\lambda)$ sei

$$\Delta_\nu^{\sigma,\tau}(\lambda) \quad , \quad \text{wobei } \Delta_\nu^{1,1}(\lambda) = \Delta_\nu(\lambda) \ .$$

d) Da die Zeilen und Spalten von $U_\nu(\lambda)$ bezüglich des Körpers $\mathbb{C}(\lambda)$ linear unabhängig sind, existieren (von $\nu$ unabhängig) rationale Funktionen $r_\tau(\lambda)$, $s_\sigma(\lambda)$ $(\tau, \sigma = 1,\dots,t)$, so daß stets

$$\Delta_\nu^{\sigma,\tau}(\lambda) = r_\tau(\lambda)\ s_\sigma(\lambda+\nu) \cdot \Delta_\nu(\lambda) \qquad (r_1 = s_1 = 1).$$

Da alle Unterdeterminanten Polynome sind, teilen die Nenner der $r_\tau$ und $s_\sigma$ (in reduzierter Darstellung) sämtlich $\Delta_\nu(\lambda)$.

e) Mit $R(\lambda)$ = Hauptnenner aller $r_\tau(\lambda)$,
$S(\lambda)$ = Hauptnenner aller $s_\sigma(\lambda)$

folgt

$$\chi_{\nu-1}(\lambda) = \frac{1}{\text{k.g.V.}(R(\lambda), S(\lambda+\nu))} \cdot \Delta_\nu(\lambda)$$

und für $\nu$ genügend groß

$$\chi_{\nu-1}(\lambda) = \frac{1}{R(\lambda)\cdot S(\lambda+\nu)} \cdot \Delta_\nu(\lambda) \ .$$

Demnach ist für alle $\nu$ ab einer gewissen Nummer

$$\text{Grad}\,\chi_\nu - \text{Grad}\,\chi_{\nu-1} = \text{Grad}\,\Delta_{\nu+1} - \text{Grad}\,\Delta_\nu = \omega_0 \ .$$

III. Falls $d = n\cdot s$, folgt aus der in I. bewiesenen Ungleichung

$$d \leq \omega_o\cdot s \leq n\cdot s$$

sofort, daß

$$d = \omega_o\cdot s = n\cdot s\ ,$$

also nach II.

$$r_{max} = \omega_o = n\ .$$

Im folgenden sei also $d < n\cdot s$ vorausgesetzt. Es bezeichne

$a$ den maximalen Grad aller $\langle(q+2)\cdot n - d\rangle$-zeiligen Unterdeterminanten von $A_{q+1}(\lambda)$ .

Wir zeigen, daß für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt :

(x) | Jede $\langle(q+2+\nu\cdot s)\cdot n - d\rangle$-zeilige Unterdeterminante von $A_{q+1+\nu\cdot s}(\lambda)$ ist Polynom höchstens vom Grad $a + \nu\cdot d$ .

Die Aussage für $\nu=0$ liegt in der Definition von $a$, den Induktionsschritt von $\nu-1$ auf $\nu$ ($\nu \geq 1$) führen wir mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz. Eine nichtverschwindende $\langle(q+2+\nu\cdot s)\cdot n - d\rangle$-zeilige Unterdeterminante von $A_{q+1+\nu\cdot s}(\lambda)$ hat die Form

$$\Delta(\lambda) = \left|\begin{array}{ccccc|c} & & \hat{A}_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda) & & & 0 \\ \hline X & X & X & X & X & \underbrace{\overline{A}_{s-1}}_{r\,\geq\, ns-d\ \text{Spalten}} \end{array}\right| \Big\}\ n\cdot s\ \text{Zeilen}$$

Dabei entsteht $\hat{A}_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda)$ aus $A_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda)$ durch Streichen einer gewissen Anzahl ($\leq d$) von Spalten und genau d Zeilen, da sonst die Determinante Null wäre (vgl. II.b)! ). Die von $\lambda$ unabhängige Matrix $\overline{A}_{s-1}$ enthält also $n\cdot s$ Zeilen und $r \geq ns-d$ Spalten (von $A_{s-1}(\lambda)$) . Wir entwickeln $\Delta$ nach den $n\cdot s$-zeiligen Unterdeterminantmn der letzten $n\cdot s$ Zeilen. Da über $\overline{A}_{s-1}$ Nullen stehen, genügen die Unterdeterminanten, die alle Spalten von $\overline{A}_{s-1}$ und damit mindestens r konstante Spalten enthalten;

deren Grad ist höchstens

$$n \cdot s - r \leq d \quad ,$$

und die Kofaktoren als Unterdeterminanten von $A_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda)$ haben nach Induktionsannahme einen Grad von höchstens

$$a + (\nu-1) \cdot d \quad ,$$

woraus (x) folgt. Es ergibt sich für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Grad } \chi_{\nu s} \leq a + \nu \cdot d \quad ,$$

und für genügend große $\mu$ daher

$$s \cdot r_{max} = \text{Grad}\, \chi_{(\mu+1)s} - \text{Grad}\, \chi_{\mu \cdot s} \leq d \quad .$$

## 2. Konvergente Lösungen

In diesem Kapitel wollen wir (1.2) lösen unter der Konvergenzbedingung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} H_{\nu} \quad \text{konvergent für} \quad x \in \mathfrak{K}_R \quad ,$$

dann ist die Reihe (1.3) wirkliche Lösung von (1) .

### 2.1. Reduktion der Konvergenzbedingung

In diesem Unterkapitel werden wir von $M_n(\mathbb{C})$ nur die Eigenschaften als Banach-Algebra benutzen; für s wollen wir auch den Wert Null zulassen. - Es bezeichne

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{B} := M_n(\mathbb{C}) \quad ^{*)} \\ \mathcal{L}_1(\mathcal{B}) := \{ \mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \text{ linear (und stetig)} \} \\ \mathfrak{F} := \{ (H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0} \mid \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} H_{\nu} \text{ kgt. für } x \in \mathfrak{K}_R \} \ . \end{array} \right.$$

Für das folgende seien

$$l > 0 \quad \text{sowie} \quad J \in \mathcal{B} \text{ mit } |J| \leq 1$$

fest vorgegeben.

---

*) Als Norm in $M_n(\mathbb{C})$ benutzen wir

$$|A| = \max_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right) \quad \text{für} \quad A = (\alpha_{ij})_{(n,n)}$$

Satz 2.1

Ab einer natürlichen Zahl N', die nur von l abhängt, gilt für alle $N \geq N'$:

Zu beliebig vorgegebenen $H_o, \dots, H_{N-1} \in \mathcal{B}$ existieren eindeutig $H_N, H_{N+1}, \dots \in \mathcal{B}$ mit

$$① \left| \begin{array}{l} (H_\nu)_{\nu=o}^{\infty} \in \mathfrak{F} \\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu - H_{\mu-s}(J + (\mu-s)I) = 0 \qquad (\mu = N+s, N+s+1, \dots) \end{array} \right.$$

Dazu existieren (von J abhängige)

$$\text{mit} \quad \begin{array}{ll} \mathfrak{G}_{\mu,\nu} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{B}) & (\mu = N', N'+1, \dots ; \nu = 0, 1, \dots, \mu) \\ \mathfrak{G}_{\mu,\mu} = -I & , \end{array}$$

so daß ① äquivalent zu

$$② \left| \sum_{\nu=0}^{\mu} \mathfrak{G}_{\mu\nu} H_\nu = 0 \right. \qquad (\mu = N, N+1, \dots).$$

Zur Erläuterung notieren wir

Folgerung 2.2

In ② sind die Werte $H_N, H_{N+1}, \dots$ schon gegeben durch

(2.3) $H_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \mathfrak{G}_{\mu\nu} H_\nu \qquad (\mu = N, N+1, \dots)$,

also liegen alle Lösungsfolgen von ② bzw. (2.3) in $\mathfrak{F}$.

- Dem Beweis des Satzes ist das folgende Unterkapitel gewidmet, zunächst beschäftigen wir uns mit einer Verallgemeinerung des $l_\infty$.

2.1.1. Beweis von Satz 2.1

Für komplexe Banach-Räume $\mathcal{R}, \mathcal{r}$ bezeichne allgemein

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{R}, \mathcal{r}) = \{ \Lambda \mid \Lambda : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{r} \text{ stetig, linear} \},$$

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{R}) = \mathcal{L}_1(\mathcal{R}, \mathcal{R}) .$$

Für $0 < R' < R$ definieren wir

$$\mathfrak{F}_{R'} = \{ \mathcal{X} = (H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0} \mid \sup_{\nu \in \mathbb{N}_0} (R'^{\nu} |H_\nu|) < \infty \}.$$

Mit der Norm

$$|\mathfrak{X}|_{R'} = \sup_{\nu\in\mathbb{N}_0} (R'^{\nu}|H_\nu|)$$

ist $\mathfrak{F}_{R'}$ bekanntlich Banach-Raum ; mit

$|\Lambda|_{R'}$ sei auch die Operatornorm für $\Lambda \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{F}_{R'})$ bezeichnet .

Die Koeffizientenabschätzung für Potenzreihen liefert

(2.4) $\mathfrak{X} \in \mathfrak{F} \curvearrowright \forall R' \ (0 < R' < R) \quad \mathfrak{X} \in \mathfrak{F}_{R'}$ .

Falls $\mathfrak{X} = (H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}_{R'}$ , $A \in \mathcal{B}$, definieren wir

(2.5) $\mathfrak{X} A \ := \ (H_\nu A)_{\nu=0}^{\infty}$

Vermöge (2.5) entspricht $\mathfrak{X}$ einer linearen, beschränkten Abbildung von $\mathcal{B}$ in $\mathfrak{F}_{R'}$ , die wir auch $\mathfrak{X}$ nennen.

Eine Verallgemeinerung unendlicher Matrizen liefert uns

<u>Hilfssatz 2.6</u>

Es seien $\mathbb{L}_{\mu\nu} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{B}) \quad (\mu, \nu \in \mathbb{N}_0)$ mit

$$\sup \left\{ R'^{\mu} \sum_{\nu=0}^{j} \frac{|\mathbb{L}_{\mu\nu}|}{R'^{\nu}} \ : \mu,\ j \in \mathbb{N}_0 \right\} =: K < \infty .$$

Dann gilt

a) $\mathfrak{X} = (H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}_{R'} \curvearrowright \forall \mu \in \mathbb{N}_0 \ \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{L}_{\mu\nu} H_\nu$ absolut kgt. .

Definiert man

$$\Lambda \mathfrak{X} \ := \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{L}_{\mu\nu} H_\nu \right)_{\mu=0}^{\infty} ,$$

so ist

b) $\Lambda \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{F}_{R'})$ , $|\Lambda|_{R'} \leq K$ .

Wir schreiben kurz

$$\Lambda = (\mathbb{L}_{\mu\nu})_{\mu,\nu \in \mathbb{N}_0} .$$

<u>Beweis:</u>

Die Voraussetzung liefert uns, daß für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\mathbb{L}_{\mu\nu}|}{R'^{\nu}} < \infty ,$$

daher

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\mathbb{L}_{\mu\nu} H_\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\mathbb{L}_{\mu\nu}|}{R'^{\nu}} (R'^{\nu}|H_\nu|) \leq |\mathfrak{X}|_{R'} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|\mathbb{L}_{\mu\nu}|}{R'^{\nu}} \ :$$

Der Ausdruck $\sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{L}_{\mu\nu} H_\nu$ ist damit als Grenzwert in $\mathcal{B}$ erklärt, und für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0$ gilt die Abschätzung

$$R'^{\mu} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbb{L}_{\mu\nu} H_\nu \right| \leq R'^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{\mathbb{L}_{\mu\nu}}{R'^{\nu}} \right| \cdot |X|_{R'} \leq K \cdot |X|_{R'} \quad ,$$

womit auch die zweite Behauptung folgt .

Zur Anwendung dieser Überlegungen formen wir bei beliebigem $N \in \mathbb{N}$ die Rekursionen unter Satz 2.1, 1 geeignet um. Durch Trennen der Summen und Verschieben der Indizes $\mu$ erhalten wir als äquivalente Gleichungen

$$(2.7) \quad H_\mu(J + \mu I) - \sum_{\nu=N}^{\mu+s} B_{\mu+s-\nu} H_\nu = \sum_{\nu=0}^{N-1} B_{\mu+s-\nu} H_\nu \quad (\mu = N, N+1, \ldots)$$

Wir definieren die Operatoren $\mathbb{L}_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathcal{B})$ durch

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{L}_\nu A &:= B_\nu \cdot A \quad (\nu \neq s) \\ \mathbb{L}_s A &:= B_s A - AJ \end{aligned} \right\} \quad (A \in \mathcal{B}) \quad .$$

Wegen $|I| = 1$ gilt für die Operatornormen der $\mathbb{L}_\nu$

$$\begin{aligned} |\mathbb{L}_\nu| &= |B_\nu| & (\nu \neq s) \\ |\mathbb{L}_s| &\leq |B_s| + |J| \leq |B_s| + 1 \quad . \end{aligned}$$

Ersetzt man $\mu$ durch $N+\mu$ , wird (2.7) nach Division durch $N+\mu$ zu

$$(2.8) \quad H_{N+\mu} - \frac{1}{N+\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu+s} \mathbb{L}_{\mu+s-\nu} H_{N+\nu} = \frac{1}{N+\mu} \sum_{\nu=0}^{N-1} B_{N+\mu+s-\nu} H_\nu$$
$$(\mu = 0, 1, 2, \ldots) \ .$$

Für $N \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\Phi_{N\nu} = \left( \frac{1}{N+\mu} B_{N+\mu+s-\nu} \right)_{\mu=0}^{\infty} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, N-1) \ ,$$

$$X_N = (H_{N+\nu})_{\nu=0}^{\infty}$$

$$\Lambda_N = \left( \frac{1}{N+\mu} \mathbb{L}_{\mu+s-\nu} \right)_{\mu,\nu \in \mathbb{N}_0} \quad \text{mit } \mathbb{L}_\nu = 0 \text{ für } \nu \leq -1 \ .$$

Daß wir System (2.8) umformen können zu

$$(2.9) \quad (E - \Lambda_N) X_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} \Phi_{N\nu} H_\nu \qquad (E = \text{Identität in } \mathcal{F}_{R'})$$

rechtfertigen wir durch

<u>Hilfssatz 2.10</u>

1.) $\forall\, N \in \mathbb{N},\ \nu = 0,1,\dots,N-1 \qquad \Phi_{N\nu} \in \mathcal{F}$.

2.) Für jedes $R'$ mit $0 < R' < R$ gilt

a) $\Phi_{N\nu} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{B}, \mathcal{F}_{R'})$ gemäß (2.5) $\quad (N \in \mathbb{N}, \nu = 0,1,\dots,N-1)$,

b) $\Lambda_N \in \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_{R'})$ im Sinne von Hilfssatz 2.6 $(N \in \mathbb{N})$,

c) $|\Lambda_N|_{R'} \longrightarrow 0 \quad (N \to \infty)$ gleichmäßig für $|J| \leq 1$.

d) Es existiert $N'(1,R') \in \mathbb{N}$, so daß für alle $N \geq N'(1,R')$

$$E - \Lambda_N \text{ invertierbar in } \mathcal{L}_1(\mathcal{F}_{R'}) .$$

Aus der Holomorphie von $B(x)$ für $x \in \mathcal{K}_R$ folgt die 1.Aussage und mit (2.4) auch 2.)a). Weiter sei

$R''$ mit $R' < R'' < R$ gewählt; es bezeichne

$$\vartheta = \frac{R'}{R''}, \quad M = \max\left\{ |B(x)| \;\middle|\; |x| \leq R'' \right\} .$$

Mit Koeffizientenabschätzung nach Cauchy folgt:

$$|\mathbb{L}_\nu| \leq \frac{M}{R'^{\nu}} \quad (\nu \neq s), \qquad |\mathbb{L}_s| \leq 1 + \vartheta^s \cdot \frac{M}{R'^s} .$$

Wir verifizieren für $\Lambda_N$ die Voraussetzung von Hilfssatz 2.6, wobei in der $\mu$-ten Zeile jeweils nur bis $\mu+s$ zu summieren ist; für jedes $\mu \in \mathbb{N}_0$:

$$R'^{\mu} \cdot \frac{1}{N+\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu+s} \frac{|\mathbb{L}_{\mu+s-\nu}|}{R'^{\nu}} \leq \frac{1}{N+\mu} \left( M \cdot R'^{\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu+s} \frac{\vartheta^{\mu+s-\nu}}{R'^{\mu+s}} + 1 \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{N+\mu} \left( \frac{M}{(1-\vartheta)R'^s} + 1 \right) \quad ;$$

daher

$$\sup_{\mu \in \mathbb{N}_0} \left\{ R'^{\mu} \cdot \frac{1}{N+\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu+s} \frac{|\mathbb{L}_{\mu+s-\nu}|}{R'^{\nu}} \right\} \leq \frac{1}{N} \left( \frac{M}{(1-\vartheta)R'^s} + 1 \right) .$$

Anwendung von Hilfssatz 2.6 liefert unmittelbar die Aussagen 2.),b) und c). Wählt man $N'(1,R')$ so daß

$$\forall\, N \geq N'(1,R') \qquad |\Lambda_N|_{R'} \leq \frac{1}{N} \left( \frac{M}{(1-\vartheta)R'^s} + 1 \right) < 1 ,$$

ist nach dem bekannten Satz über die Neumannsche Reihe auch die letzte Behauptung erfüllt.

Für $N \geq N'(1,R')$ ist bei beliebig vorgegebenen $H_o,\dots,H_{N-1} \in \mathcal{B}$ (2.9) eindeutig nach $X_N$ auflösbar, wobei

$$(2.11) \qquad X_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} (E - \Lambda_N)^{-1} \Phi_{N\nu} H_\nu \quad .$$

Weil selbstverständlich

$$X_N \in \mathcal{F}_{R'} \curvearrowleft (H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{R'} \quad ,$$

können wir zusammenfassend notieren :

Unter den Voraussetzungen

$$(2.12) \left| \begin{array}{l} 0 < R' < R \;;\quad 1 > 0 \;,\; |J| \leq 1 \;, \\ N \geq N'(1,R') \quad \text{nach } (2.10),d) \;, \\ H_o,\dots,H_{N-1} \in \mathcal{B} \end{array} \right.$$

gilt

Hilfssatz 2.13

Es existiert genau eine Folge $X_N = (H_\nu)_{\nu=N}^{\infty}$ mit der durch N und R' charakterisierten Eigenschaft

$$\mathcal{E}(N,R') \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu - H_{\mu-s}(J+(\mu-s)I) = 0 & (\mu=N+s,N+s+1,\dots) \\ \sup_{\nu\in N_o} (R'^{\nu}|H_\nu|) < \infty & . \end{array} \right.$$

Zum Beweis von Satz 2.1, 1 fehlt, daß in jedem Fall schon

$$(2.14) \qquad X_N \in \mathcal{F} \quad .$$

Man wählt daher

$$N' = \min_{0<R'<R} N'(1,R') \;. \quad —$$

Als Hilfsmittel dient folgende Überlegung zu Hilfssatz 2.13:

Korollar 2.15

Unter Voraussetzung (2.12) nehmen wir $N_1 > N$ an, zu $H_o,\dots,H_{N-1}$ wählen wir die Glieder $H_N,\dots,H_{N_1-1}$ der Folge $X_N$ hinzu .

Anwendung von Hilfssatz 2.13 auf $N_1$ statt N liefert eine eindeutig bestimmte Folge

$$\hat{X}_{N_1} = (\hat{H}_\nu)_{\nu=N_1}^{\infty} \quad \text{mit } \mathcal{E}(N_1,R') \;.$$

Letztere Eigenschaft ist auch für den Folgenabschnitt

$$\mathcal{X}_{N_1} = (H_\nu)_{\nu=N_1}^{\infty} \quad \text{von} \quad \mathcal{X}_N \text{ erfüllt .}$$

Auf Grund der Eindeutigkeit ist

$$\hat{H}_\nu = H_\nu \quad \text{für alle} \quad \nu \geq N_1 \text{ . -}$$

Zu (2.14) müssen wir zeigen, daß für beliebiges R'' mit

$$R' < R'' < R : \quad \mathcal{X}_N \in \mathcal{F}_{R''} \quad .$$

Hilfssatz 2.13 wenden wir an auf $R''$, ein $N_1$ mit

$$N_1 > \max ( N , N'(1,R''))$$

sowie $H_0,\dots,H_{N_1-1}$ . Es ergibt sich eindeutig eine Folge

$$\hat{\mathcal{X}}_{N_1} = (\hat{H}_\nu)_{\nu=N_1}^{\infty} \quad \text{mit } \mathcal{E}(N_1,R'') ,$$

die wegen $R' < R''$ auch $\mathcal{E}(N_1,R')$ erfüllt. Aus Korollar (2.15) folgt, daß

$$\hat{\mathcal{X}}_{N_1} = (H_\nu)_{\nu=N_1}^{\infty}$$

und daher

$$\mathcal{X}_N \in \mathcal{F}_{R''} \quad . -$$

Ähnlich zeigen wir die Äquivalenz von (1) und (2) in Satz 2.1. Es sei R' mit $N'(1,R') = N'$ gewählt und $N \geq N'$ . Dann ist für $\mathcal{X}_N = (H_\nu)_{\nu=N}^{\infty}$ Aussage (1) damit gleichbedeutend, daß $\mathcal{X}_N$ Lösung von (2.11) mit $\mathcal{X}_N \in \mathcal{F}_{R'}$ .

Bezeichnet man mit $p_0 : \mathcal{F}_{R'} \longrightarrow \mathcal{B}$ die Zuordnung

$$(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \longmapsto H_0 \quad \text{und}$$

$$\mathcal{G}_{N\nu} := p_0 \circ ( E - \Lambda_N)^{-1} \circ \Phi_{N\nu} \quad (N \geq N', \ \nu = 0,\dots,N-1) ,$$

ergibt sich $H_N$ , die erste Komponente von $\mathcal{X}_N$ , als

$$H_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathcal{G}_{N\nu} H_\nu \quad \text{mit} \quad \mathcal{G}_{N\nu} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{B}) .$$

Nach Korollar 2.15 berechnet sich $\mathcal{X}_{N+1} = (H_\nu)_{\nu=N+1}^{\infty}$ durch

$$\mathcal{X}_{N+1} = \sum_{\nu=0}^{N} (E - \Lambda_{N+1})^{-1} (\Phi_{N+1,\nu} H_\nu) ,$$

folglich

$$H_{N+1} = \sum_{\nu=0}^{N} \mathcal{G}_{N+1\,\nu} H_\nu \quad .$$

Wiederholte Anwendung von Korollar (2.15) liefert also (2.3) und damit (2) als unendliches Gleichungssystem für $(H_\nu)_{\nu=N}^{\infty}$ . Die Aquivalenz von (1) und (2) folgt aus der schon im algebraischen eindeutigen Lösbarkeit von (2) .

## 2.1.2. Rückführung auf ein endliches Gleichungssystem

In Satz 2.1 sind die Rekursionen (1.2) nur ab $\mu = N+s$ berücksichtigt, die restlichen liefern weitere Bedingungen für $H_0, \dots, H_{N+s-1}$. Im Anschluß an Satz 2.1, mit

$$|J| \leq 1 \;, \; N \geq N'$$

notieren wir

Satz 2.16

Die Reihe $Y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I+J}$ ist konvergente Lösung der Differentialgleichung (1) genau dann, wenn für $H_0, \dots, H_{N+s-1}$ gilt

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a) \; \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu = 0 & & (\mu = 0, \dots, s-1) \\ b) \; \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu - H_{\mu-s}(J+(\mu-s)I) = 0 & & (\mu = s, \dots, N+s-1) \\ c) \; \sum_{\nu=0}^{\mu} \mathfrak{G}_{\mu\nu} H_\nu = 0 & & (\mu = N, \dots, N+s-1). \end{array} \right.$$

Die weiteren Koeffizienten $H_{N+s}, H_{N+s+1}, \dots$ sind durch

$$(2.18) \qquad H_\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \mathfrak{G}_{\mu\nu} H_\nu \qquad (\mu = N+s, N+s+1, \dots )$$

eindeutig bestimmt.

Der Beweis liegt in einer Zusammenfassung bisheriger Überlegungen, wonach Y Lösung von (1) genau dann, wenn $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ Lösung von (1.2) und $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$. Dabei stehen die Gleichungen (1.2) für $\mu = 0, \dots, N+s-1$ unter (2.17) a), b), und nach Satz 2.1 ist (1.2) für $\mu = N+s, N+s+1, \dots$ zusammen mit der Bedingung, daß $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, gleichbedeutend mit (2.17) c) zusammen mit (2.18). -

Da wir $M_n(\mathbb{C})$ in diesem Kapitel bisher nur als Banach-Algebra benutzt haben, bleibt Satz 2.16 in jeder komplexen Banach-Algebra $\mathcal{B}$ gültig. Im Fall $s=0$ reduziert sich (2.17) auf (2.17) b), woraus wir ersehen, daß jede formale Lösung von (1) auch schon konvergiert.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich wieder auf den Fall $s > 0$, unter Benutzung der speziellen algebraischen Eigenschaften von $M_n(\mathbb{C})$.

## 2.2. Lösung des reduzierten Problems

Unser Ziel sind Kriterien zur nichttrivialen Lösbarkeit von (2.17), ohne die $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ explizit zu kennen. Eine Lösung $Y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I+J}$ von (1) ist notwendig formale Lösung, als deren Rang wir nicht unbedingt $r_{max}$ annehmen dürfen. Nach Kapitel 1. setzen wir

| J in Gestalt (1.4) mit $r > 0$ ,

wobei wir nach den Überlegungen zu Satz 1.32

| $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ als (hier im Unterschied zu Satz 1.32 nicht notwendig alle) Nullstellen von $\chi$ mit $\chi(\lambda_i - z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{N}$

annehmen. Ferner sei

| $p$ = maximale ganzzahlige Differenz von Nullstellen von $\chi$ ;

schließlich wählen wir zur Anwendbarkeit von Satz 2.1 und damit Satz 2.16

| $l > \max \{ |\lambda| \mid \lambda$ Nullstelle von $\chi \} + 1$ ,
| $N \geq \max(N', p+q+2-s)$

mit q aus (1,24), so daß

$$(2.19)\begin{cases} |J| < l \\ N+s-1 \geq p+q+1 \end{cases} .$$

Unter dieser Voraussetzung untersuchen wir die $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ auf invariante lineare Unterräume von $M_n(\mathbb{C})$ . Es sei

$J_i^\tau$ ein festes Jordankästchen von J , und kurz
$k := k_i^\tau$ gesetzt .

Dann definieren wir die Projektionen

$\mathbb{P}_\kappa \in \mathcal{L}_1(M_n(\mathbb{C}))$  $(\kappa = 1,\ldots,k)$ durch

$\mathbb{P}_\kappa A := A \cdot P_\kappa$  für $A \in M_n(\mathbb{C})$

mit den Matrizen

$$P_\kappa = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \boxed{I_\kappa} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}_{(n,n)} , \quad I_\kappa \text{ an der Stelle von } J_i^\tau ,$$

$$I_\kappa = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(k,k)} \Big\} \kappa-1$$

Weiter bezeichne

$$\mathcal{U}_\kappa = \mathbb{P}_\kappa(M_n(\mathbb{C})) \qquad (\kappa = 1,\dots,k)$$

Dann ist $\mathcal{U}_\kappa$ linearer Unterraum von $M_n(\mathbb{C})$, bestehend aus allen Matrizen, die an der gleichen Stelle wie in $P_\kappa$ Nullspalten haben. Ferner sei die Matrix $Q_\kappa$ definiert als

$$Q_\kappa = I - P_\kappa \qquad (\kappa = 1,\dots,k)$$

Man rechnet sofort nach, daß

$$(2.20)\left\{\begin{array}{lll} \text{a)} & Q_\kappa J Q_\kappa = J Q_\kappa & (\kappa = 1,\dots,k)\ , \\ \text{b)} & P_1 J P_1 = J P_1 = P_1 J\ . & \end{array}\right.$$

Das benutzen wir in

<u>Hilfssatz 2.21</u>

a) $\mathfrak{G}_{\mu\nu}(\mathcal{U}_\kappa) \subset \mathcal{U}_\kappa \qquad (\kappa = 1,\dots,k; \mu \geq N' \ ; \nu = 0,\dots,\mu)$

b) Die Einschränkung von $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ auf $\mathcal{U}_1$ hängt nur von dem einen Jordankästchen $J_i^\tau$ ab .

Zum <u>Beweis</u> benutzen wir Satz,2.1 , zu dessen Anwendung wir $\mu$ mit N bezeichnen. Zum Nachweis von a) seien

$$H_0,\dots,H_{N-1} \in \mathcal{U}_\kappa \quad \text{beliebig vorgegeben.}$$

Wir zeigen, daß die durch (1) eindeutig bestimmte Folge

$$(H_\nu)_{\nu=0}^\infty \in \mathcal{F} \quad \text{gilt:} \quad H_\nu \in \mathcal{U}_\kappa \text{ für alle } \nu \geq N\ .$$

Rechtsmultiplikation von (1) mit $Q_\kappa$ liefert

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}(H_\nu Q_\kappa) - H_{\mu-s}(JQ_\kappa) + (\mu-s)H_{\mu-s}Q_\kappa = 0 \qquad (\mu \geq N+s)$$

und wegen (2.20) a):

$$(+) \quad \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}(H_\nu Q_\kappa) - (H_{\mu-s}Q_\kappa)(JQ_\kappa + (\mu-s)I) = 0 \qquad (\mu \geq N+s).$$

Daher ist die Folge $(H_\nu Q_\kappa)_{\nu=0}^\infty$ Lösung von (1) mit $JQ_\kappa$ statt J, wobei natürlich $|JQ_\kappa| \leq 1$ und $(H_\nu Q_\kappa)_{\nu=0}^\infty \in \mathcal{F}$ .

Aus der eindeutigen Lösbarkeit von (+) in $\mathfrak{F}$ folgt aus

$$H_\nu Q_\kappa = 0 \quad (\nu = 0,\ldots,N-1)$$

unmittelbar, daß alle weiteren

$$H_\nu Q_\kappa = 0 \quad (\nu \geq N) \text{ , also } H_\nu \in \mathfrak{U}_\kappa \text{ .}$$

$H_N$ speziell hat die Darstellung

$$H_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathfrak{G}_{N\nu} H_\nu \quad ;$$

und weil $H_0,\ldots,H_{N-1} \in \mathfrak{U}_\kappa$ beliebig wählbar sind, folgt Teil a) für $\mu \geq N'$, $\nu = 0,\ldots,\mu-1$, und natürlich auch für $\mathfrak{G}_{\mu\mu} = -I$ .

Zum Beweis von b) nehmen wir $H_0,\ldots,H_{N-1} \in \mathfrak{U}_1$ an. Wie oben ergibt sich durch Rechtsmultiplikation von ① mit $P_1$ unter Berücksichtigung von (2.20) b):

$$(++) \quad \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}(H_\nu P_1) - (H_{\mu-s}P_1)(JP_1 + (\mu-s)I) = 0 \quad (\mu \geq N+s),$$

wobei wieder $|JP_1| \leq 1$ , und wegen a) für alle $\nu$ : $H_\nu P_1 = H_\nu$ . Die gleiche Folge $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ ist daher Lösung von ① und (++). Markiert man die Abhängigkeit der $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$ von J durch

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu} =: \mathfrak{G}_{\mu\nu}(J) \text{ ,}$$

so liefert Satz 2.1 einerseits

$$H_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathfrak{G}_{N\nu}(J)\, H_\nu \text{ ,}$$

andererseits wegen (++)

$$H_N = H_N P_1 = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathfrak{G}_{N\nu}(JP_1)\, H_\nu \text{ ,}$$

also hängt die Einschränkung der $\mathfrak{G}_{N\nu}$ auf $\mathfrak{U}_1$ nur von $JP_1$ und damit nur von $J_i^\tau$ ab. -

Bezeichnet man in Abhängigkeit von $J_i^\tau$

$$P_1 =: P^{i,\tau} \quad (i = 1,\ldots,m;\ \tau = 1,\ldots,t_i) \text{ ,}$$

wozu wir $P^{0,0}$ als die zur unteren (n-r,n-r)-Nullmatrix in J gehörende Projektionsmatrix rechnen wollen, so folgt aus dem vorigen Hilfssatz durch einfache Rechnung:

<u>Korollar 2.22</u>

Das System $(H_\nu)_{\nu=0}^{N+s-1}$ ist genau dann Lösung von (2.17), wenn für alle $i=1,\ldots,m$; $\tau=1,\ldots,t_i$ sowie für $(i,\tau) = (0,0)$

$$(H_\nu P^{i\tau})_{\nu=0}^{N+s-1} \text{ Lösung von (2.17) .}$$

Daher genügt es, (2.17) mit Systemen $(H_\nu)_{\nu=0}^{N+s-1}$ zu lösen, deren Koeffizienten alle in demselben zum Jordankästchen $J_i^\tau$ gehörenden Unterraum $\mathfrak{U}_1$ liegen. Für $H_\nu \in \mathfrak{U}_1$ sei das dem $J_i^\tau$ entsprechende Spaltensystem

$$(h_{1\nu},\dots,h_{k\nu}) ,$$

dazu sei $H_\nu^\kappa$ $(\kappa = 1,\dots,k)$ definiert durch das Spaltensystem

$$(0,\dots,0,h_{\kappa\nu},0,\dots,0) ,$$

so daß also

$$H_\nu = \sum_{\kappa=1}^{k} H_\nu^\kappa \quad ; \quad \sum_{\kappa=j}^{k} H_\nu^\kappa \in \mathfrak{U}_j \qquad (j = 1,\dots,k) .$$

Um die $\mathbb{G}_{\mu\nu}$, auf $\mathfrak{U}_1$ eingeschränkt, weiter zu untersuchen, setzen wir wieder $\mu = N$; für $\nu = 0,1,\dots,N-1$ seien beliebige $H_\nu \in \mathfrak{U}_1$ vorgegeben. Für $H_N$ mit

$$H_N = \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathbb{G}_{N\nu} H_\nu$$

folgt nach Hilfssatz 2.21b) für $\kappa = 1,\dots,k$

$$H_N^\kappa = (\mathbb{P}_\kappa - \mathbb{P}_{\kappa+1}) \sum_{\nu=0}^{N-1} \mathbb{G}_{N\nu}\Big(\sum_{j=1}^{\kappa} H_\nu^j\Big) \qquad (\text{mit } \mathbb{P}_{k+1} = 0) ;$$

denn der Ausdruck

$$\mathbb{G}_{N\nu}\Big(\sum_{j=\kappa+1}^{k} H_\nu^j\Big) \in \mathfrak{U}_{\kappa+1}$$

liefert keinen Beitrag zu $H_N^\kappa$.

Für die entsprechenden Spalten von $H_N$ gelten mit gewissen Matrizen $G_{N\nu}^{\kappa,j} \in M_n(\mathbb{C})$ die Gleichungen

$$(2.23) \quad h_{\kappa N} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{\kappa} G_{N\nu}^{\kappa j} h_{j\nu} \qquad (\kappa = 1,\dots,k) .$$

Aus der durch Satz 2.1, (1) eindeutig bestimmten Folge $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ ergibt sich als weitere Lösung von (1) die Folge mit den entsprechenden Spaltensystemen

$$(0, h_{1\nu},\dots,h_{k-1,\nu}) \qquad (\nu = 0,1,2,\dots) .$$

Darauf (2.23) angewandt, liefert einerseits

$$h_{\kappa-1,N} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{j=2}^{\kappa} G_{N\nu}^{\kappa j} h_{j-1,\nu} ,$$

während unmittelbar nach (2.23)

$$h_{\kappa-1,N} = \sum_{\nu=0}^{N-1} \sum_{j=2}^{\kappa} G_{N\nu}^{\kappa-1,j-1} h_{j-1,\nu} .$$

Da wir die $h_{\kappa\nu}$ $(\nu=0,\ldots,N-1)$ beliebig wählen können, ist

$$G_{N,\nu}^{\kappa-1\,j-1} = G_{N\nu}^{\kappa j} \qquad (\nu=0,..,N-1;\ \kappa=2,..,k;\ j=2,\ldots,\kappa)\ .$$

Mit gewissen $G_{N\nu}^{\kappa} \in M_n(\mathbb{C})$ $(\kappa=0,..,k-1)$ schreiben wir daher

$$G_{N\nu}^{\kappa j} =: G_{N\nu}^{\kappa-j}\ .$$

Aus der Folge $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ erhalten wir eine weitere Lösung von ① in Satz 2.1, wenn wir in jedem $H_\nu$ das Spaltensystem $(h_{1\nu},\ldots,h_{k\nu})$, entsprechend verkürzt oder um Nullspalten erweitert, an die Stelle eines anderen Jordankästchens $J_i^{\sigma}$ zum gleichen Eigenwert $\lambda_i$ rücken. Damit sind die nach (2.21),b) nur von $J_i^{\tau}$ abhängigen $G_{\mu\nu}^{\kappa}$ jetzt auch unabhängig von Lage und Größe des Jordankästchens. Das rechtfertigt die Bezeichnung

$$G_{\mu\nu}^{\kappa} =: G_{\mu\nu}^{\kappa}(\lambda_i) \qquad (\mu \geq N',\ \nu=0,..,\mu-1,\ \kappa=0,1,2,\ldots)\ .$$

Zusätzlich definieren wir

$$G_{\mu\mu}^{0}(\lambda) := -I \qquad (\mu \geq N',\ \lambda \in \mathbb{C})$$

$$G_{\mu\mu}^{\kappa}(\lambda) := 0 \qquad (\kappa \geq 1)\ .$$

Als Ergebnis dieser Uberlegungen fassen wir zusammen:

<u>Satz 2.24</u>

Gemäß der Aufteilung von J zerfällt Gleichungssystem (2.17) in Gleichungen für die Spaltensysteme

$$(h_{1\nu},\ldots,h_{k\nu})_{\nu=0}^{N+s-1} \qquad (k := k_i^{\tau})\ ,$$

die in $(H_\nu)_{\nu=0}^{N+s-1}$ an der Stelle eines $J_i^{\tau}$ stehen. Diese Gleichungen lauten

$$(2.25)\left|\begin{array}{ll} \text{a)}\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}h_{\kappa\nu} = 0 & (\kappa=1,..,k;\ \mu=0,..,s-1) \\ \text{b)}\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}h_{1\nu} - (\lambda_i+\mu-s)h_{1\mu-s} = 0 & \\ \text{c)}\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu}h_{\kappa\nu} - (\lambda_i+\mu-s)h_{\kappa\mu-s} - h_{\kappa-1\,\mu-s} = 0\quad (\kappa=2,..,k) & \Big\}\ (\mu=s,\ldots,N+s-1) \\ \text{d)}\ \sum_{j=1}^{\kappa}\sum_{\nu=0}^{\mu} G_{\mu\nu}^{\kappa-j}(\lambda_i)h_{j\nu} = 0 & (\kappa=1,..,k;\ \mu=N,..,N+s-1)\ . \end{array}\right.$$

Die entsprechenden Spalten der durch (2.18) definierten $H_\nu$ sind bestimmt durch

$$\sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{\nu=0}^{\mu} G_{\mu\nu}^{\kappa-j}(\lambda_i)h_{j\nu} = 0 \qquad (\kappa=1,\ldots,k;\ \mu=N+s,N+s+1,\ldots) .$$

In komplexen Koeffizienten ausgeschrieben, hat das homogene Gleichungssystem (2.25) $k\cdot n\cdot s$ mehr Gleichungen als Unbekannte, d) besteht nämlich aus $k\cdot n\cdot s$ Gleichungen. Die Lösungsgesamtheit von a)-c) ist mit den Bezeichnungen vom 1.Kapitel gerade $\mathfrak{N}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i)$ ; wegen

$$\mathrm{rg}\ (2.25) \leq \mathrm{rg}\ (2.25),a)-c) + k\cdot n\cdot s$$

ist die Dimension der Lösungsgesamtheit von ganz (2.25) mindestens

$$\dim \mathfrak{N}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i) - k\cdot n\cdot s .$$

Da in (2.19) $N+s-1 \geq p+q+1$ vorausgesetzt war, berechnet man nach den Hilfssätzen 1.29 und 1.30

$$\dim \mathfrak{N}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i) = \dim \mathfrak{M}_{p}^{[k]}(\lambda_i) + k\cdot d .$$

Zusammenfassend notieren wir

<u>Hilfssatz 2.26</u>

Die Lösungsgesamtheit von (2.25) hat als Dimension mindestens

$$\dim \mathfrak{M}_{p}^{[k]}(\lambda_i) - k\cdot(n\cdot s - d) .$$

Da $\mathfrak{M}_{p}^{[k]}(\lambda_i) \simeq \mathfrak{N}_{q+p+1}^{[k]}(\lambda_i)/\hat{\mathfrak{N}}_{q+p+1}^{[k]}(\lambda_i)$ , läßt sich $\dim \mathfrak{M}_{p}^{[k]}(\lambda_i)$ aus den Größen $t_i$ und $k_i^{\tau}$ in Satz 1.32,$\gamma$) sofort ausrechnen. Mit den Beweismethoden von Satz 1.19 sieht man sofort, daß

$$(2.27)\quad \begin{cases} \dim \mathfrak{M}_{p}^{[1]}(\lambda_i) = t_i \\ \dim \mathfrak{M}_{p}^{[\kappa+1]}(\lambda_i) = \dim \mathfrak{M}_{p}^{[\kappa]}(\lambda_i) + \#\{\tau \mid k_i^{\tau} \geq \kappa+1\} \end{cases}$$

$$(\kappa=1,2,3,\ldots)$$

Wir bezeichnen für $k = 1,2,\ldots$

$$(2.28)\qquad w_i^k = \dim \mathfrak{M}_{p}^{[k]}(\lambda_i) - k\cdot(n\cdot s - d) .$$

- Ein Lösungssystem $(h_{1\nu},\ldots,h_{k\nu})_{\nu=0}^{N+s-1}$ von (2.25) läßt sich nach Satz 2.16 und Satz 2.24 eindeutig zu einer Lösung der Rekursionen (1.5) fortsetzen mit

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} h_{\kappa\nu} =: h_{\kappa}(x) \text{ konvergent für } x \in \mathcal{K}_R \quad (\kappa=1,2,\ldots,k) .$$

Nach (1.6) entspricht der Folge $(h_{1\nu},\ldots,h_{k\nu})_{\nu=0}^{\infty}$ die in $\hat{\mathcal{K}}_R$ analytische Lösung des Differentialgleichungssystems (4)

$$(\times) \qquad y(x) = x^{\lambda_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(k-j)!}(\log x)^{k-j} h_j(x)$$

Die weiteren in (1.6) erwähnten Lösungen von (4)

$$(\times\times) \qquad x^{\lambda_i} \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{(\kappa-j)!}(\log x)^{\kappa-j} h_j(x) \qquad (\kappa=1,\ldots,k-1)$$

lassen sich natürlich in Gestalt $(\times)$ mit dem gleichen k schreiben und gehören zu den Lösungssystemen

$$(0,\ldots,0,h_{1\nu},\ldots,h_{\kappa\nu})_{\nu=0}^{N+s-1} \qquad \text{von } (2.25) .$$

In diesem Sinne folgt aus Hilfssatz 2.26 unmittelbar

Satz 2.29

Falls $w_i^k > 0$ ( mit $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$ ), existieren mindestens $w_i^k$ linear unabhängige Lösungen von (4) der Form

$$x^{\lambda_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(k-j)!} (\log x)^{k-j} h_j(x)$$

zur festen Potenz $\lambda_i$, mit $h_j : \mathcal{K}_R \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph $(j=1,\ldots,k)$.

Um zur Formulierung für Matrizen zurückzukehren, wählen wir die $w_i^k$ linear unabhängigen Lösungen von (4) so, daß mit jeder Lösung $(\times)$ sämtliche nichttrivialen Lösungen $(\times\times)$ aufgezählt sind: so erhalten wir $w_i^k$ Spalten einer Lösung von (1),

$Y(x) = H(x)x^J$, mit J in Jordanscher Normalform,

wobei die gesamte Spaltenzahl der Jordankästchen zu $\lambda_i$ genau $w_i^k$ beträgt. Das Verfahren wenden wir an auf alle Nullstellen $\lambda_i$ aus Satz 1,32 $\alpha$), für die ein $w_i^k > 0$ existiert; k sei gewählt mit $w_i^k$ maximal .

Mit der Bezeichnung

$$w_i = \max\{0\ ,\ w_i^k\ :\ k \in \mathbb{N}\}\qquad (i = 1,\dots,m)$$

ist daher gezeigt

Satz 2.30

Für $r'_{max}$, den maximalen Rang einer Lösung von (1) der Gestalt

$$Y(x) = H(x)x^J \quad \text{mit} \quad H\colon \mathcal{K}_R \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \text{ holomorph}$$

gilt die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \;\leq\; r'_{max} \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} v_i \quad .$$

- Die 2.Ungleichung gilt, weil $Y(x)$ notwendig formale Lösung ist. - Abschließend notieren wir

Satz 2.31

Die Differentialgleichung (1) besitzt eine Fundamentallösung der Form

$$(2)\qquad Y(x) = H(x)x^J \quad ,\ H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu H_\nu \qquad (x \in \mathcal{K}_R)$$

genau dann, wenn

$$d = n\cdot s \quad .$$

Beweis: Eine Fundamentallösung der Form (2), für die wir ohne Einschränkung die Bedingungen (A),(B) und (C) aus dem 1.Kapitel annehmen dürfen, hat auch als formale Lösung den Rang n, folglich ist nach Satz 1.39 notwendig $d = n\cdot s$.

Falls umgekehrt $d = n\cdot s$, besitzt nach Hilfssatz 2.26 die Lösungsgesamtheit von (2.25) mindestens die Dimension von $\mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i)$. Andererseits liegt jede Lösung von (2.25), da man sie zu einer Lösung von (1.5) fortsetzen kann, schon in $\mathfrak{M}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i)$, wobei $\dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i) = \dim \mathfrak{M}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i)$ (siehe dazu ($\gamma$) im Beweis von Hilfssatz 1.30). Folglich ist der Lösungsraum von (2.25) genau $\mathfrak{M}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i)$. Nach Hilfssatz 1.20 liefert $\mathfrak{M}_{N+s-1}^{[k]}(\lambda_i)$ eindeutig alle formalen Lösungen von (1.5), nach Satz 2.16 und Satz 2.24 eindeutig die konvergenten Lösungen. Es folgt

<u>Korollar 2.32</u>

Falls $d = n\cdot s$, ist jede formale Lösung der Form (2) schon konvergent.

– Darüber hinaus, liefert Satz 1.39 die Existenz einer formalen Lösung vom Rang n, was den Beweis dieses Satzes beschließt.

Unmittelbare Folgerung ist der bei D.A.Lutz [8] als Satz 1 angegebene

<u>Satz</u>

Falls $S: \mathcal{K}_R \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ holomorph, mit
0 als mindestens $n\cdot s$-facher Nullstelle,
so hat die gestörte Differentialgleichung

$$x^{s+1}Y'(x) = (B(x) + S(x))\,Y(x)$$

genau dann ein regulär-singuläres Fundamentalsystem, wenn (1) dieses besitzt.

Unser Beweis liegt in der Tatsache, daß $q \leq n\cdot s - 1$, so daß sich $A_q(\lambda)$ und damit $d_q = d$ beim Übergang von $B(x)$ auf $B(x) + S(x)$ nicht ändern.

Das von D.A.Lutz in der gleichen Arbeit angegebene Kriterium, wann genau eine regulär-singuläre Fundamentallösung von (1) lautet

<u>Satz 3 ([8])</u>

Es sei die Folge $(\alpha_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ rekursiv definiert durch

$$\alpha_0(x) = 1\ ,\ \alpha_{\nu+1}(x) = \alpha_\nu'(x) + x^{-(s+1)}\alpha_\nu(x)B(x)\quad ;$$

es bezeichne
$p(\alpha_\nu)$ die Ordnung von Null als Pol von $\alpha_\nu$.

Dann gilt
(1) hat eine regulär-singuläre Fundamentallösung genau dann, wenn $p(\alpha_\nu) \leq \nu + n\cdot s \qquad (\nu = n,n+1,\dots,N)$,
wobei N von $B(x)$ abhängig ist.

Der entscheidende Nachteil dieses Kriteriums ist, daß eine obere Schranke für N nicht allgemein angegeben wird. N läßt sich zwar im Einzelfall auf rein algebraischem Wege bestimmen, jedoch ist das Verfahren dazu recht kompliziert. Auch ist an diesem Kriterium seine Abhängigkeit nur von höchstens den ersten $n \cdot s$ Koeffizienten von $B(x)$ nicht mehr unmittelbar einzusehen.

## 3. Beispiele und Anwendungen

### 3.1. Satz von Lettenmeyer

Der von F. Lettenmeyer [5] 1926 gefundene Satz lautet

Satz

Im Differentialgleichungssystem

$$(3.1) \qquad x^{s_i} \eta_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\, \eta_j(x) \qquad (i = 1,\dots,n)$$

seien die $\alpha_{ij}$ komplexwertige Funktionen, holomorph für $x \in \mathfrak{K}_R$,

die $s_i$ nichtnegative ganze Zahlen mit

$$0 < \sum_{i=1}^{n} s_i = \sigma < n .$$

Dann besitzt (3.1) mindestens $n-\sigma$ linear unabhängige in $\mathfrak{K}_R$ holomorphe Lösungen .

Zum Beweis bringen wir mit

$$s+1 = \max \{ s_i \mid i=1,\dots,n \} \qquad (\geq 1)$$

(3.1) auf Form (4), wobei wir $s=0$ zulassen müssen. Da wir nur holomorphe Lösungen suchen, fallen die Überlegungen des 1. Kapitels zur Bestimmung von J weg: wir setzen $J = 0$ und bestimmen $N \in \mathbb{N}$ so, daß Satz 2.1 anwendbar wird. Notwendige und hinreichende Bedingung für eine holomorphe Lösung von $(3.1)_{I_0}$

$$h(x) = \sum_{\nu=0} x^{\nu} h_{\nu} ,$$

ist Gleichungssystem (2.25) mit $k=1$, $\lambda_i=0$ für $(h_\nu)_{\nu=0}^{N+s-1}$.

Die Koeffizientenmatrix von (2.25),a),b) in diesem Fall ist $A_{N+s-1}(0)$, c) fällt wegen $k=1$ weg, und d) besteht aus $n \cdot s$ Gleichungen mit zunächst unbekannten Koeffizienten: im Fall $s=0$ fällt d) weg, wie wir am Ende von Kapitel 2.1. (S.43) bemerkt haben. Wie die folgende Rechnung lehrt, besitzt $A_{N+s-1}(0)$ mindestens $n\cdot(s+1)-\sigma$ Nullzeilen. Weil Gleichungssystem (2.25) $n\cdot s$ mehr Gleichungen als Unbekannte hat, wird damit die Dimension der Lösungsgesamtheit mindestens

$n-\sigma$, folglich existieren $n-\sigma$ holomorphe Lösungen von (3.1)

Zum Abzählen der Nullzeilen in $A_{N+s-1}(0)$ bezeichne

$\nu_\mu$ = Anzahl der Indizes i mit $s_i=\mu$ $\quad(\mu=0,\dots,s+1)$.

Es ist die i-te Zeile in

$$(B_j\ B_{j-1}\ \dots\ B_0\ 0\dots\ 0) \qquad (j=0,\dots,s)$$

sicher dann Null, wenn $s_i < s+1-j$, also $s_i \leq s-j$, daher die Anzahl der Nullzeilen in $(B_j\ \dots\ B_0\ 0\ ..\ 0)$ mindestens

$$\sum_{\mu=0}^{s-j} \nu_\mu = n - \sum_{\mu=s-j+1}^{s+1} \nu_\mu .$$

Insgesamt wird die Mindestzahl von Nullzeilen in $A_{N+s-1}(0)$

$$(s+1)n - \sum_{j=0}^{s} \sum_{\mu=s-j+1}^{s+1} \nu_\mu = (s+1)n - \sum_{\mu=1}^{s+1} \mu\nu_\mu = (s+1)n-\sigma ,$$

was den Beweis vollendet.

## 3.2. Ein Zahlenbeispiel

Zur Erläuterung der im 1.Kapitel gefundenen Methoden betrachten wir das System

$$x^2 \begin{pmatrix} \eta_1' \\ \eta_2' \\ \eta_3' \\ \eta_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 & -x^2 & 0 \\ 0 & x & 4x^3 & x^2 \\ 0 & 0 & 3x & 1 \\ x & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist der Satz von Lettenmeyer hier nicht mehr anwendbar. Um zu prüfen, ob ein regulär-singuläres Fundamentalsystem vorliegt, berechnen wir d, indem wir die ersten

$A_\nu(\lambda)$ notieren und ihre Defekte als Matrizen über $\mathbb{C}(\lambda)$ bestimmen. Da stets $q \leq ns-1$ (nach(1.24)), beschränken wir uns auf $A_3(\lambda)$, welches ja $A_o(\lambda), A_1(\lambda)$ und $A_2(\lambda)$ als Teilmatrizen enthält.

$A_3(\lambda)$ hat folgende Gestalt,- die leeren Felder sind Nullen:

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
1-\lambda & & & & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & 1-\lambda & & & 0 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & 3-\lambda & & & & 0 & 1 & & & & & & & & \\
1 & & & 1-\lambda & & & 0 & 0 & & & & & & & & \\
\hline
 & & -1 & 0 & -\lambda & & & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & -\lambda & & & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & 2-\lambda & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & & -\lambda & & & 0 & 0 & & & & \\
\hline
 & & & & & & -1 & & 1-\lambda & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & 4 & & & & & 1 & & -1-\lambda & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 1-\lambda & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & & & -1-\lambda & & & 0 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\
\leftarrow Z.2 \\
\\
\leftarrow Z.4 \\
\\
\leftarrow Z.6 \\
\\
\\
\\
\leftarrow Z.10 \\
\\
\\
\\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Fundamentallösung ist erfüllt, da $B_o$ nilpotent.

Es ergibt sich

$$d_o = 2 \; ; \quad d_1 = 3 \quad ; \quad d_2 = 4 \; .$$

Damit ist

$$q = 2 \; , \quad d = n \cdot s \; ,$$

folglich liegt ein regulär-singuläres Fundamentalsystem vor.
- Zum Beweis, daß $d_1 = 3$ , beachte man, daß die 6. Zeile ein Polynom-Vielfaches der 1.Zeile ist ;

$d_2 = 4$ gilt, weil die 10. Zeile Linearkombination mit Polynomkoeffizienten aus der 3., 5. und 8. Zeile ist, nämlich

$$Z_{10} = (1-\lambda(1-\lambda)^2)Z_3 - Z_5 + \lambda(1-\lambda)Z_8 \quad .$$

Diese Tatsache ergänzen wir durch eine analoge Aussage für die Spalten:

die 11.Spalte ist $(\lambda-1)\times$ letzte Spalte ,

die 7.Spalte ist Linearkombination mit Polynomkoeffi-

zienten der 9., 12. und 14. Spalte .
Um die Lösungen der Differentialgleichung zu berechnen, benötigen wir $\chi(\lambda)$, den g.g.T. aller 12-zeiligen Unterdeterminanten von $A_3(\lambda)$ . Wir hatten gesehen, daß für jedes feste $\lambda$ die 2., 4., 6. und 10. Zeile Linearkombinationen der übrigen Zeilen sind, und analoges für die 7., 11., 13. und 15. Spalte gilt.

Bezeichnet man $\Delta(\lambda)$ die Determinante, entstanden aus $A_3(\lambda)$ durch Streichen der genannten Zeilen und Spalten, so gilt

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \quad \operatorname{rg} A_3(\lambda) < 12 \iff \Delta(\lambda) = 0 \quad ,$$

daher ist

$$\chi(\lambda) = \text{const.} \cdot \Delta(\lambda) \; .$$

Mehrfache Entwicklung von $\Delta(\lambda)$ nach Zeilen oder Spalten liefert

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-3) \; ,$$

und damit die einfachen Nullstellen $-1$ und $3$ sowie $0$ als doppelte Nullstelle von $\chi$ .
Von den in Satz 1.32 aufgezählten Größen sind zunächst

$$m = 1 \; , \quad \lambda_1 = -1 \; , \quad p = 4 \quad ;$$

aus $d = n \cdot s$ folgt wegen Satz 1.39

$$v_1 = 4 \quad .$$

Man rechnet sofort nach, daß

$$\operatorname{def} A_7(-1) = 7 = d+3 \quad , \text{ folglich ist}$$

$$\dim \mathfrak{M}_4^{[1]}(-1) = 3$$

und wegen $v_1 = 4$

$$\dim \mathfrak{M}_4^{[2]}(-1) = 4 = \dim \mathfrak{M}_4^{[k]}(-1) \quad \text{für alle} \quad k \geq 2 \; .$$

Daher liegen 3 linear unabhängige logarithmenfreie Lösungen und eine mit $\log x$ in der 1. Potenz vor.

In diesem Fall interessiert die Ordnung der Stelle $x = 0$ als Nullstelle bzw. Pol der logarithmenfreien Lösungen:

Da die Zahl 3 einfache Nullstelle von $\chi$ ist, mit maximalem Realteil, ist für alle k $\dim \mathfrak{M}_0^{[k]}(3) = 1$ ; und Hilfssatz 1.30, angewandt auf $\lambda_0 = 3$ , $k = 1$ liefert genau eine holomorphe Lösung $y_1$ mit Null als dreifacher Nullstelle; hier wird

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^5 \\ x^3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir rechnen weiter nach, daß

$$\operatorname{def} A_4(0) = 4 = d+1 \quad \text{, folglich ist}$$

$$\dim \mathfrak{M}_0^{[1]}(0) = 1 .$$

Nimmt man nun eine Basis von $\mathfrak{M}_4^{[1]}(-1)$ wie im Beweis von Hilfssatz 1.35 an, sieht man wegen

$\dim \mathfrak{M}_4^{[1]}(-1) = 3$ , daß auch $\dim \mathfrak{M}_0^{[1]}(-1) = 1$ ;

und es muß je eine logarithmenfreie Lösung zu den Potenzen 0 und -1 geben. Eine Berechnung aus den Rekursionen liefert

$$y_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 1 \\ -3x \end{pmatrix} , \quad y_4(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3x \\ x^{-1} \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Zur Bestimmung der logarithmenbehafteten Lösung folgern wir aus den Uberlegungen des Hilfssatz 1.35, daß wegen

$$\dim \mathfrak{M}_0^{[2]}(3) = \dim \mathfrak{M}_0^{[2]}(-1) = 1$$

sicher

$$\dim \mathfrak{M}_0^{[2]}(0) = 2$$

und daß die Lösung mit log x zur Potenz 0 gehört. Die Rekursionen liefern hier

$$y_3(x) = \log x \cdot y_2(x) + \begin{pmatrix} -3x \\ 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} .$$

## 3.3. Einordnung der Differentialgleichung n-ter Ordnung

Die komplexe Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(3.3)\qquad x^{s+n}\,\eta^{(n)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} x^i q_{n-i}(x)\eta^{(i)}(x) = 0$$

mit $s \in \mathbb{N}$

$q_i : \mathfrak{K}_R \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph $(i=1,\dots,n)$,

nicht alle $q_i(0) = 0$ ,

ist mit gewissen in $\mathfrak{K}_R$ holomorphen $\hat{q}_i$ , die nicht sämtlich in Null verschwinden, sowie mit dem Operator

$$\delta = x\,\frac{d}{dx}$$

äquivalent der Gleichung

$$(3.3')\qquad x^s\,\delta^n\,\eta(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \hat{q}_{n-i}(x)\delta^i\eta(x) = 0 .$$

Zu einem System aus n Lösungen $(\eta_1(x),\dots,\eta_n(x))$ von (3.3') ist die Matrix

$$Y(x) = (\delta^{\nu-1}\eta_i(x))_{(n,n)} \quad \text{mit}$$

$(\delta^{\nu-1}\eta_i(x))_{\nu=1}^{n}$ als i-ter Spalte

Lösung von

$$(1)\qquad x^{s+1}Y'(x) - B(x)Y(x) = 0$$

mit

$$(3.4)\qquad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^s & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x^s \\ \hat{q}_n(x) & & \cdots & & \hat{q}_1(x) \end{pmatrix} .$$

Nimmt man Y(x) in der Gestalt an

$$Y(x) = H(x)x^J \quad \text{mit} \quad H: \mathfrak{K}_R \setminus \{0\} \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \text{ holomorph,}$$

so verhalten sich die Lösungen $\eta_i$ von (3.3) bei Annäherung an $x = 0$ bestimmt, genau dann, wenn H in 0 höchstens einen Pol besitzt bzw. bei geeigneter Wahl von J in ganz $\mathfrak{K}_R$ holomorph ist. Damit ist (3.3) auf unsere allgemeine Fragestellung zurückgeführt, wobei B(x) in Gestalt (3.4) vorliegt.

Mit den Potenzreihendarstellungen der $\hat{q}_i(x)$ für $x \in \mathfrak{X}_R$

(3.5) $\quad \hat{q}_i(x) \;=\; \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu}\, \beta_{n+1-i,\nu} \qquad (i=1,\ldots,n)$

haben die $B_\nu$ die Gestalt

$$B_\nu = \begin{pmatrix} & O & \\ \beta_{1\nu} & \cdots & \beta_{n\nu} \end{pmatrix} \text{ für } \nu \neq s, \quad B_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ \beta_{1s} & \cdots & & & \beta_{ns} \end{pmatrix}.$$

Da nach Voraussetzung die letzte Zeile in $B_0$ nicht verschwindet, ist für $\nu = 0,1,\ldots,s-1$

$$d_\nu = (\nu+1)\,(n-1)$$

Zur Berechnung von $d_s$ und $\chi(\lambda)$ betrachten wir

$$A_s(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|c} & O & & & O & & & \\ \beta_{10} & \cdots & \beta_{n0} & & & & & \\ \hline & \vdots & & & & & & \\ & O & & & O & & & O \\ \beta_{1,s-1} & \cdots & \beta_{n,s-1} & \beta_{1,s-2} & \cdots & & \cdots & \\ \hline -\lambda & 1 & 0 \cdots 0 & & & & & \\ & \ddots & \ddots \;\; 0 & & O & & & O \\ O & & -\lambda \;\; 1 & & & & & \\ \beta_{1s} & \cdots & \beta_{ns}-\lambda & \beta_{1,s-1} & \cdots & & \cdots & \beta_{10} \cdots \beta_{n0} \end{array}\right)$$

Offensichtlich sind die nichtverschwindenden Zeilen (über dem Körper $\mathbb{C}(\lambda)$) linear unabhängig, daher

$$d_s = s\cdot(n-1) = d_{s-1} \quad .$$

Es folgt

$$(3.6) \quad \begin{cases} q = s-1 \\ d = s\cdot(n-1) \end{cases}$$

Für ein festes komplexes $\lambda$ ist $\delta_s(\lambda) < d$ genau dann, wenn die nichtverschwindenden Zeilen von $A_s(\lambda)$ - als Matrix über $\mathbb{C}$ - linear abhängig sind.

Das ist damit äquivalent, daß

$$\det\begin{pmatrix} \beta_{10} & \beta_{20} & \cdots & \beta_{n0} \\ -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\lambda & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad ,$$

denn die restlichen nichtverschwindenden Zeilen aus $A_s(\lambda)$ sind bezüglich der ersten n Komponenten linear unabhängig. Die Determinante hat den Wert

(3.7) $\quad f_o(\lambda) = \beta_{10} + \beta_{20} + \ldots + \beta_{no}\lambda^{n-1} \quad ,$

daher gilt

(3.8) $\quad \chi(\lambda) = \text{const.}\ f_o(\lambda)$ .

Ähnliche Uberlegungen, auf die Matrizen $A_{s+\mu}(\lambda)$ angewandt, liefern für alle $\mu \in N_o$

$$\chi_\mu(\lambda) = \text{const.} \prod_{\nu=o}^{\mu} f_o(\lambda+\nu) \ .$$

Falls $f_o(\lambda) \neq$ const., gilt für die Vielfachheiten der in Satz 1.32 ausgezeichneten Nullstellen $\lambda_i$ von $\chi$ als Nullstellen in $\chi_p$:

$$v_i = \sum_{\nu=0}^{p} \text{Vielfachheit von } \lambda_i+\nu \text{ als Nullst. in } f_o \ ,$$

und nach Hilfssatz 1.33 :

(3.9) $\quad r_{max} = \text{Grad von } f_o \leq n-1$ .

Schon die in (3.6) erwähnte Tatsache, daß $d < n\cdot s$, liefert mit Satz 2.31 einen direkten Beweis für den Satz, daß für $s > 0$ die Differentialgleichung (3.3) kein Fundamentalsystem von Lösungen, die sich bei $x=o$ bestimmt verhalten, besitzt.

Aus (3.9) folgern wir die stärkere Aussage, die Thomé [1,a] mit Reduktion der Differentialgleichung und Induktion bewiesen hat

Satz 3.10

Die Zahl der linear unabhängigen sich bei Null bestimmt verhaltenden Lösungen von (3.3) ist höchstens so groß wie der Grad von $f_o$ .

Hier liegt übrigens ein gutes Anschauungsbeispiel für Satz 1.38 mit $d < ns$ vor: es ist nämlich

$$\text{Grad } f_o = n-1 \curvearrowright B_{no} \neq 0 ,$$

und letzteres bedeutet genau, daß

$$\omega_o = n-1 ,$$

in Übereinstimmung mit Satz 1.38,2.) .

Um jetzt auf die Rekursionen näher einzugehen, nehmen wir eine formale Lösung von (1) mit $B(x)$ gemäß (3.4) an,

$$Y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I+J} ,$$

unter den Annahmen (A), (B) und (C) aus dem 1.Kapitel. Die Spalten der $H_\nu$ , die zum Jordankästchen $J_i^\tau$ der Spaltenzahl $k$ und zum Eigenwert $\lambda$ gehören, seien

$$h_{1\nu},\ldots,h_{k\nu} \qquad ( \nu = 0,1,2,\ldots ) ,$$

die Komponenten von $h$ seien

$$h^{\alpha}_{\kappa\nu} \qquad ( \alpha = 1,\ldots,n) ,$$

speziell bezeichne

$$\gamma_{\kappa\nu} := h^1_{\kappa\nu} \qquad (\kappa = 1,\ldots,k;\ \nu\in\mathbb{N}_0) .$$

Nach (1.6) sind im Falle der Reihenkonvergenz die Funktionen

$$(3.11)\quad \eta_\kappa(x) = x^\lambda \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{(\kappa-j)!} (\log x)^{\kappa-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \gamma_{j\nu} \quad (\kappa=1,\ldots,k)$$

Lösungen von (3.3) ; in jedem Fall nennen wir diese Reihen formale Lösungen von (3.3) .

Von den Rekursionen (1.5), die von den $h_{\kappa\nu}$ gelöst werden, notieren wir die letzte Zeile jeder Gleichung.
Es ergibt sich

$$(3.12)\left|\begin{array}{ll} \text{a)} & \sum_{\nu=0}^{\mu}\Big( \sum_{i=1}^{n} B_{i\,\mu-\nu} h^i_{\kappa\nu}\Big) = 0 \qquad (\mu=0,\ldots,s-1;\ \kappa=1,\ldots,k) \\ \text{b)} & \sum_{\nu=0}^{\mu}\Big( \sum_{i=1}^{n} B_{i\,\mu-\nu} h^i_{1\nu}\Big)-(\lambda+\mu-s)h^n_{1\,\mu-s} = 0 \quad (\mu=s,s+1,\ldots ) \\ \text{c)} & \sum_{\nu=0}^{\mu}\Big( \sum_{i=1}^{n} B_{i\,\mu-\nu} h^i_{\kappa\nu}\Big)-(\lambda+\mu-s)h^n_{\kappa\,\mu-s}-h^n_{\kappa-1\,\mu-s} = 0 \end{array}\right.$$

$$(\kappa = 2,\ldots,k;\ \mu=s,s+1,\ldots) .$$

Die ersten $n-1$ Zeilen jeder Gleichung (1.15)a) liefern keinen Beitrag; aus Gleichung (1.15)b) für die Nummer $\mu+s$ entnehmen wir :

$$h^{i+1}_{1\mu} - (\lambda+\mu)h^{i}_{1\mu} = 0 \qquad (i = 1,..,n-1)$$

und daher

(3.13') $$h^{i}_{1\mu} = (\lambda+\mu)^{i-1}\,\gamma_{1\mu} \qquad (i = 1,..,n;\ \mu=0,1,2,...).$$

Mit den Definitionen

(3.34) $$\begin{cases} f_\nu(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{i\nu}\lambda^{i-1} & (\nu \neq s) \\ f_s(\lambda) = -\lambda^n + \sum\limits_{i=1}^{n} B_{is}\,\lambda^{i-1} & , \end{cases}$$

wobei $f_o$ schon unter (3.7) definiert war, ergeben sich durch Einsetzen von (3.13') in (3.12),a) und b) für die $\gamma_{1\nu}$ die Rekursionen

(3.15') $$\sum_{\nu=0}^{\mu} f_{\mu-\nu}(\lambda+\nu)\,\gamma_{1\nu} = 0 \qquad (\mu = 0,1,2,...) .$$

Aus den jeweils ersten n-1 Zeilen der Gleichungen (1.15), c) für $\mu+s$ folgt

$$h^{i+1}_{\kappa\mu} = (\lambda+\mu)h^{i}_{\kappa\mu} + h^{i}_{\kappa-1,\mu} \qquad (i=1,..,n-1;\ \kappa=2,..,k;\ \mu\in N_0),$$

woraus man mit einem Induktionsbeweis leicht sieht, daß

$$h^{i+1}_{\kappa\mu} = \sum_{j=0}^{\kappa-1}\binom{i}{j}(\lambda+\mu)^{i-j}\gamma_{\kappa-j,\mu} = \sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{1}{j!}\,\gamma_{\kappa-j\mu}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}(\lambda+\mu)^{i} .$$

Nimmt man (3.13') hinzu, haben wir stets

(3.13) $$h^{i}_{\kappa\mu} = \sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{1}{j!}\,\gamma_{\kappa-j,\mu}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}(\lambda+\mu)^{i-1} \qquad (\mu\in N_0,\ \kappa=1,...,k,\ i=1,..,n\ )$$

Dies für $\kappa \geq 2$ in (3.12),c) eingesetzt, liefert in Verallgemeinerung von (3.15') :

(3.15) $$\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{1}{j!}\sum_{\nu=0}^{\mu} f^{(j)}_{\mu-\nu}(\lambda+\nu)\gamma_{\kappa-j,\nu} = 0 \qquad (\kappa=1,..,k;\ \mu=0,1,2,..)$$

Da sich die $h^{i}_{j\mu}$ für $i=2,..,n$ durch (3.13) eindeutig aus den $\gamma_{j,\mu}$ berechnen lassen, notieren wir

Satz 3.16

Die Reihen (3.11) sind genau dann formale Lösungen von (3.3), wenn die Rekursionen

(3.15) $$\sum_{j=0}^{\kappa-1}\frac{1}{j!}\sum_{\nu=0}^{\mu} f^{(j)}_{\mu-\nu}(\lambda+\nu)\,\gamma_{\kappa-j,\nu} = 0$$

für $\kappa = 1,...,k;\ \mu = 0,1,2,...$ erfüllt sind .

- Selbstverständlich braucht man (3.15) nur für die $\lambda_i$ aus Satz 1.32 zu lösen; für $\mu \geq p$ sind die Gleichungen (3.15) wegen $f_o(\lambda_i+\mu) \neq 0$ nach eindeutig auflösbar; wegen

$$-f_o(\lambda_i+\mu)\gamma_{\kappa\mu} = \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{1}{j!} \sum_{\nu=0}^{\mu} f^{(j)}_{\mu-\nu}(\lambda_i+\nu)\gamma_{\kappa-j,\nu} + \sum_{\nu=0}^{\mu-1} f_{\mu-\nu}(\lambda_i+\nu)\gamma_{\kappa\nu}$$

ist $\gamma_{\kappa\mu}$ aus den $\gamma_{j\nu}$ mit $j = 0,\ldots,\kappa-1$; $\nu=0,\ldots,\mu$ sowie den $\gamma_{\kappa\nu}$ mit $\nu = 0,\ldots,\mu-1$ eindeutig bestimmbar. Daher notieren wir

<u>Hilfssatz 3.17</u>

Für jedes $\lambda_i$ aus Satz 1.32 und $k \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i)$ isomorph der Lösungsgesamtheit des Systems

$$(3.18) \quad \sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{1}{j!} \sum_{\nu=0}^{\mu} f^{(j)}_{\mu-\nu}(\lambda_i+\nu)\gamma_{\kappa-j,\nu} = 0 \quad (\kappa=1,\ldots,k;\ \mu=0,\ldots,p).$$

Zum Beweis zeigen wir, daß $\mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i)$ die **Gesamtheit** aller $(h_{\kappa\nu})_{\substack{\kappa=1,\ldots,k\\ \nu=0,\ldots,p}}$ ist, deren Komponenten $h^1_{\kappa\nu} = \gamma_{\kappa\nu}$ den Gleichungen (3.17) genügen und für deren übrigen Komponenten gilt:

$$(+) \quad h^{\alpha}_{\kappa\nu} = \sum_{j=0}^{\kappa-1} \frac{1}{j!} \gamma_{\kappa-j,\nu} \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} (\lambda+\nu)^{\alpha-1} \quad (\nu=0,\ldots,p;\ \kappa=1,\ldots,k;\ \alpha=2,\ldots,n).$$

Offensichtlich ist (3.18) und (+) dafür notwendig, daß man $(h_{\kappa\nu})_{\substack{\kappa=1,\ldots,k\\ \nu=0,\ldots,p}}$ zu einer Lösung $(h_{\kappa\nu})_{\substack{\kappa=1,\ldots,k\\ \nu=0,\ldots,p+s}}$ der Rekursionen (1.5) für $\mu=0,1,\ldots,p+s=p+q+1$ fortsetzen kann, denn (+) folgt aus (1.5) für $\mu=s,s+1,\ldots,p+s$. Nach den vorhergehenden Überlegungen liegt umgekehrt jede Lösung von (3.18) und (+) in $\mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i)$.

Als hinreichende Bedingung für die Existenz (nicht mehr nur formaler) regulär-singulärer Lösungen von (3.3) notieren wir nun zusammenfassend

Satz 3.19

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig

$\lambda_i$ eine der Nullstellen von $f_o$ mit

$\lambda_i - z$ nicht Nullstelle von $f_o$ für alle $z \in \mathbb{N}$,

$p$ = maximale ganzzahlige Differenz von Nullstellen von $f_o$.

Außerdem besitze das System (3.18) $l_k$ linear unabhängige Lösungen, mit $l_k > k \cdot s$.

Dann existieren mindestens $l_k - ks$ linear unabhängige Lösungen von (3.3) der Form

$$x^{\lambda_i} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(k-j)!} (\log x)^{k-j} \gamma_j(x)$$

mit $\gamma_j : \mathfrak{E}_R \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Dieser Satz folgt aus Hilfssatz 2.26 und Satz 2.29 unmittelbar, da

$$\dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i) = l_k \quad \text{und} \quad d = (n-1)\cdot s \quad .$$

In seiner Arbeit [3] über dieses Problem hat Perron den Satz 3.16 vollständig und den Satz 3.19 für $k=1$ bewiesen; letzterer entspricht seinen Ausführungen auf Seite 21 in [3]. Bei Behandlung der Fälle $k=2$, also der logarithmenbehafteten Lösungen (ebd. S.23-26) ist Perron ein Fehler unterlaufen. Die dort auf S.25 oben durchgeführte Differentiation nach $\lambda$ (bei Perron $\varsigma$) ist nicht motiviert, entsprechend ist der Ausdruck unter (63) – in dem wir hier e durch s, N durch N+2s, mit der Bedeutung aus Satz 2.1 ersetzen– :

$$(+) \qquad \sum_{i=0}^{N+s-1} \gamma_i \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big( \sum_{i=0}^{N+s-1} \gamma_i \frac{dD_\nu^{(i)}}{d\lambda} + \log x \sum_{i=0}^{N+s-1} \gamma_i D_\nu^{(i)} \Big) x^{\lambda+\nu}$$

nicht die allgemeine Gestalt einer Lösung mit log x. – Man kann die angegebenen Größen $D_\nu^{(i)}$ nämlich so wählen, daß die Abschnitte $(D_\nu^{(i)}(\lambda))_{\nu=0}^{N+s-1}$ $(i=0,\ldots,N+s-1)$ gerade die konstanten Einheitsvektoren sind, dann würde der logarithmenfreie Teil in (+) erst mit $x^{\lambda+N+s}$ beginnen, bei beliebig großem N.

Entsprechend ist die auf S.25 bei Perron angegebene Matrix zur Richtigstellung zu ersetzen durch

$$\begin{pmatrix}
G_0^{(0)} & & G_0^{(N+s-1)} & 0 & & 0 \\
\vdots & & & & & \\
G_{N+2s-1}^{(0)} & & G_N^{(N+s-1)} & 0 & & 0 \\
\frac{dG_0^{(0)}}{d\lambda} & \cdots & \frac{dG_0^{(N+s-1)}}{d\lambda} & G_0^{(0)} & & G_0^{(N+s-1)} \\
 & & & \vdots & & \vdots \\
\frac{dG_{N+2s-1}^{(0)}}{d\lambda} & \cdots & \frac{dG_{N+2s-1}^{(N+s-1)}}{d\lambda} & G_{N+2s-1}^{(0)} & \cdots & G_{N+2s-1}^{(N+s-1)}
\end{pmatrix}$$

Dazu bemerken wir, daß mit Wahl der $(D_\nu^{(i)}(\lambda))_{\nu=0}^{N+s-1}$ als Einheitsvektoren gilt :

$$G_\nu^{(i)}(\lambda) = f_{\nu-i}(\lambda+i) \qquad \text{für } \nu=0,..,N+s-1;\ i=0,..,\nu \ ,$$

$$G_\nu^{(i)}(\lambda) = 0 \qquad \text{für } \nu=0,..,N+s-1;\ i \geq \nu+1 \ ,$$

während die $G_\nu^{(i)}$ für $\nu = N+s,...,N+2s-1$ aus Grenzprozessen zu gewinnen sind. Läßt man die 2s Zeilen mit den $G_\nu^{(i)}$ für $\nu \geq N+s$ weg, erhält man die Koeffizientenmatrix von (3.18) mit k=2 und N+s-1 statt p, so daß sich nunmehr Satz 3.19 für k=2 ergibt .

## Schlußwort

Zum Abschluß ein Ausblick auf Probleme, die mit dem hier behandelten Thema verwandt sind, deren Behandlung aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde:

Die erste Frage ist, ob ein Beweis des auf Seite 52 zitierten Satzes von D.A. Lutz (Satz 3) mit den algebraischen Methoden dieser Dissertation möglich ist: vielleicht könnte man die angegebene Zahl N dann allgemein einschränken.

Ein weiteres Problem sind formale Fundamentallösungen der Differentialgleichung (1) von allgemeinerer Gestalt, nämlich

$$Y(x) = H(x)x^{J}\, e^{Q(\frac{1}{x})} ,$$

wobei

$H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\nu} H_{\nu}$ formale Potenzreihe ,

$J$ konstant, in Jordanscher Normalform ,

$$Q(\frac{1}{x}) = - \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{1}{\sigma x^{\sigma}} D_{\sigma}$$

mit Diagonalmatrizen $D_{\sigma}$ , die mit $J$ vertauschbar sind . Wenn nicht alle $D_{\sigma}$ Vielfache der Einheitsmatrix sind, wird man keine Konvergenz von $H(x)$ erwarten ; aber es könnte eine wirkliche Lösung durch $Y$ asymptotisch dargestellt werden. Die auftretenden Rekursionsformeln sind bei Coddington&Levinson [10] nur für den Fall aufgelöst, daß das charakteristische Polynom von $B_{o}$ verschiedene Nullstellen hat: mit den Methoden des 1.Kapitels dieser Arbeit wird man formale Lösungen der obigen Gestalt auch in allgemeineren Fällen konstruieren können.

## Literatur

[1] L.W. Thomé : Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Journal f.d.r.u.a. Mathematik
a) Bd. 74 (1872) , S. 193 - 217
b) Bd. 75 (1873) , S. 265 - 291
c) Bd. 76 (1873) , S. 273 - 302

[2] H.v.Koch: Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires , Acta Mathematica 16 (1892)

[3] O. Perron: Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten, Mathem. Annalen 70 , 1911

[4] E. Hilb : Über diejenigen Integrale ... (wie [3] ) , Mathem. Annalen 82 , 1923

[5] F. Lettenmeyer: Über die an einer Unbestimmtheitsstelle regulären Lösungen eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen , Sitzungsberichte Bayr.Akademie der Wiss., München, 1926

[6] W.A.Harris, Y.Sibuya, L.Weinberg: Holomorphic Solutions of Lin. Diff. Systems at Singular Points Archive for rat. Mech. and An., Bd.35 , 1969

[7] D.A.Lutz: On Systems of Linear Diff. Equations Having Regular-Singular Solutions Journal of Diff. Equations 1967

[8] D.A.Lutz: Some charakterisations of systems of lin. diff. equations having regular-singular solutions Transactions of AMS 126. 1967

## Lehrbücher

[9] Gantmacher: Matrizenrechnung I Dt.Verlag der Wissenschaften Berlin 1958, S.120ff.

[10] Coddington-Levinson: Theory of Ordinary Diff. Equations New york 1955 .

## Lebenslauf

Ich, Ekkehard Wagenführer, wurde am 20. Juni 1944 in Apolda/Thüringen als erstes Kind des evangelischen Pfarrers Dr. theol. Max-Adolf Wagenführer und seiner Ehefrau Ruth geb. Michaelis geboren. Seit 1946 lebe ich in Köln; am 9. Januar 1968 habe ich geheiratet; meine Frau, Christa geb. Potdevin, ist Realschullehrerin.

Nach 4 Jahren Volksschule besuchte ich ab Ostern 1954 den altsprachlichen Zweig des Neusprachlichen Gymnasiums in Köln-Nippes; dort legte ich im März 1963 die Reifeprüfung ab. Vom Sommersemester 1963 bis einschließlich Sommersemester 1971 war ich an der Universität Köln immatrikuliert und studierte die Fächer Mathematik und Physik. Die wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien in beiden Fächern war mein erstes Studienziel; nach dem Philosophikum im WS 1966/67 habe ich die Hauptprüfung am 11.Juli 1969 "mit Auszeichnung" bestanden.

Seit meinem 5. Studiensemester war ich studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut, mit der Aufgabe, eine Übungsgruppe zu betreuen. Im Rahmen dieser Tätigkeit habe ich 1967 auch ein Skriptum "Topologische Grundlagen" nach einer Analysis-Vorlesung von Prof. Dr. Schäfke ausgearbeitet. Nach meinem Staatsexamen wurde ich akademischer Tutor am Mathematischen Institut der Universität Köln. Es handelte sich um eine von der Stiftung Volkswagenwerk finanzierte Stelle, mit der Aufgabe, die Studenten der Anfangssemester zu fördern.

Seit dem 1. August 1971 bin ich wissenschaftlicher Angestellter im Fachbereich Mathematik der Universität Regensburg.