Über regulär-singuläre Lösungen von Systemen linearer Differentialgleichungen. I

Von *Ekkehard Wagenführer* in Regensburg

Einleitung

Thema der vorliegenden Arbeit ist die komplexe Matrix-Differentialgleichung

$$x^{s+1}\,Y'(x) - B(x)\,Y(x) = 0, \tag{1}$$

mit $s \in \mathbb{N}$, also positiv, ganzzahlig, B holomorphe Abbildung der Kreisscheibe

$$\mathfrak{K}_R = \{x \in \mathbb{C} \mid 0 \leqq |x| < R\}$$

in $M_n(\mathbb{C})$, den Raum der komplexen (n, n)-Matrizen, und $B(0) \neq 0$.

Wir suchen in $\hat{\mathfrak{K}}_R$, der Riemannschen Fläche von $\arg x$ über $\mathfrak{K}_R \setminus \{0\}$, analytische Lösungen Y von (1) der Form

$$Y(x) = H(x)x^J = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I + J} \quad (I = \text{Einheitsmatrix}) \tag{2}$$

mit konstantem $J \in M_n(\mathbb{C})$ und

$$H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu H_\nu \text{ konvergent für } x \in \mathfrak{K}_R. \tag{3}$$

Die Spalten der Matrix $Y(x)$ sind dann Lösungen des Systems

$$x^{s+1}y'(x) - B(x)y(x) = 0 \quad \left(y(x) = (\eta_i\,(x))_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n\right), \tag{4}$$

deren Komponenten $\eta_i(x)$ sich bei Annäherung an $x = 0$ „bestimmt verhalten", solche Lösungen heißen auch „regulär-singulär". Unter (4) läßt sich die komplexe Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{s+n}\eta^{(n)}(x) - \sum_{i=0}^{n-1} x^i q_i(x)\eta^{(i)}(x) = 0 \qquad (q_i : \mathfrak{K}_R \to \mathbb{C} \text{ holomorph}) \tag{5}$$

eingliedern.

Wegen $s > 0$ können wir keine Fundamentallösung der Form (2) erwarten, statt dessen suchen wir Lösungen mit größt-möglichem Rang, d. h. möglichst viele linear unabhängige regulär-singuläre Lösungen von (4).

Das Problem im Fall der Differentialgleichung n-ter Ordnung (5) wurde 1911 von O. Perron [7] gelöst. Vorangegangen waren Arbeiten von L. W. Thomé [8], der keine Konvergenzaussagen über die gefundenen formalen Reihen macht, und von H. v. Koch [3], der das Problem mit Hilfe unendlicher Determinanten löst, wobei als Konvergenzbedingung für die Determinanten zusätzlich $q_{n-1} = 0$ vorausgesetzt werden muß. Perron verzichtet auf letztgenannte Einschränkung und umgeht unendliche Determinanten, indem er die für die Potenzreihenkoeffizienten einer Lösung auftretenden Rekursionen samt Konvergenzbedingung in ein endliches Gleichungssystem umformt; sein recht umständliches Vorgehen wird von E. Hilb [2] durch Formulierung eines Gleichungssystems im l^2 entscheidend vereinfacht; ansonsten bringt Hilb keine neuen Ergebnisse.

Der bisher einzige Beitrag in der Literatur, wann für ein System (4) einzelne regulärsinguläre Lösungen vorliegen, ist der Satz von F. Lettenmeyer [4], der auch in der neueren Arbeit von Harris, Sibuya und Weinberg [1] bewiesen ist. Dieser Satz enthält eine hinreichende Bedingung für die Existenz einzelner in $\mathfrak{K}_R$ holomorpher Lösungen von (4), was dem Spezialfall $J = 0$ in (2) entspricht.

In unserem Problembereich liegt auch die Frage nach einfachen Bedingungen, wann eine Fundamentallösung von (1) der Form (2) vorliegt. Anders als bei der Differentialgleichung n-ter Ordnung ist im allgemeinen Fall die Bedingung $s = 0$ dazu nicht notwendig. Erst in neuerer Zeit wurden von D. A. Lutz [5] und [6] Kriterien gefunden, die nur von den ersten Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $B(x)$ abhängen. Die von Lutz verwendeten Methoden sind andere als in vorliegender Arbeit, da bei ihm von vornherein nur Fundamentallösungen (2) angesetzt werden.

Um die allgemeine Frage auch nach nicht invertierbaren Lösungsmatrizen $Y(x)$ der Form (2) zu beantworten, suchen wir im 1. Kapitel dieser Arbeit zunächst nach formalen Lösungen von (1), nicht notwendig konvergenten Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I+J}$, deren Koeffizienten die für eine Lösung (2) geltenden Rekursionen erfüllen; der maximale Rang einer formalen Lösung wird den Rang jeder Lösung (2) nach oben abschätzen. Mit der Potenzreihenentwicklung von B,

$$B(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu B_\nu \tag{6}$$

lauten die Rekursionen:

$$\begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu = 0 & (\mu = 0, \ldots, s-1) \\ \sum_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu - H_{\mu-s}(J + (\mu - s) I) = 0 & (\mu = s, s+1, \ldots). \end{cases} \tag{7}$$

Eine erste Reduktion in Abschnitt 1. 1 führt von (7) auf eine Folge linearer Gleichungssysteme, deren Koeffizientenmatrizen von einem komplexen λ abhängen und, als Blockmatrizen notiert, im einfachen Fall die folgende Gestalt haben:

$$A_\varrho(\lambda) = \begin{pmatrix} B_0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ B_1 & B_0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ B_{s-1} & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_s - \lambda I & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ B_\varrho & \cdots & B_s - (\lambda + \varrho - s) I & B_{s-1} & \cdots & B_0 \end{pmatrix} \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots); \tag{8}$$

im allgemeinen Fall kommen Ableitungen der $A_\varrho(\lambda)$ hinzu. Anders als bei geläufigen Eigenwertaufgaben ist der in λ lineare Teil der $A_\varrho(\lambda)$ nicht invertierbar; deshalb wollen wir in Abschnitt 1. 2 allgemeinere Sätze über Polynommatrizen zusammenstellen, wozu die Smithsche Normalform als wesentliches Hilfsmittel dient.

12*

Kernpunkt unserer Überlegungen in Abschnitt 1. 3 ist ein Defektvergleich der Matrizen A_ϱ — über dem Körper $\mathbb{C}(\lambda)$; als Ergebnis von Hilfssatz 1. 23 notieren wir:

(9) *Ab einer Nummer q mit $q \leqq ns - 1$ haben alle Matrizen A_ϱ $(\varrho \geqq q)$ den gleichen Defekt d.*

Aus der Matrix $A_{q+1}(\lambda)$ gewinnen wir eine Art „charakteristisches Polynom", aus dem wir mit Hilfe endlich vieler der folgenden A_ϱ mögliche Werte für J und den maximalen Rang einer formalen Lösung genau bestimmen können, gekoppelt mit einem algebraischen Verfahren, die formalen Lösungen zu berechnen. Abschnitt 1. 4 bringt theoretische Abschätzungen für den maximalen Rang $r_{\max}$ einer formalen Lösung, durch die eine im allgemeinen komplizierte Rechnung im Sinne des vorangehenden Abschnitts vermieden wird. Für die Frage nach der Existenz von regulär-singulären Fundamentallösungen besonders wichtig ist die aus Satz 1. 38 fließende Folgerung

$$r_{\max} = n \frown d = n \cdot s. \tag{10}$$

Im 2. Kapitel überführen wir die Rekursionen (7) in ein unendliches Gleichungssystem, das nur Lösungen mit konvergenter Potenzreihe besitzt, und schließlich auf ein endliches homogenes System, bestehend aus den Rekursionen (7) bis zu einer endlichen Nummer neben weiteren s linearen Matrizengleichungen, deren Koeffizienten man durch Grenzprozesse ermitteln müßte (Satz 2. 16). An dieser Stelle gehen wir kurz auf den Fall $s = 0$ ein, für den wir einen neuen Beweis für die Konvergenz jeder formalen Lösung (2) gewonnen haben, gültig in jeder komplexen Banach-Algebra.

Im Abschnitt 2. 2 suchen wir, wieder für den Fall $s > 0$, hinreichende Kriterien für die Lösbarkeit des in Satz 2. 16 aufgestellten Gleichungssystems, ohne die letzten s Gleichungen zu kennen. Wir gewinnen gleichzeitig Aussagen über den mindestens erreichbaren Rang einer regulär-singulären Lösung.

Die Grundgedanken des in diesem Kapitel angewandten Verfahrens finden sich schon in den Arbeiten von Perron [7], Hilb [2], Lettenmeyer [4] und Harris, Sibuya und Weinberg [1], benutzt für die jeweiligen Spezialfälle. Zur Anwendbarkeit auf das allgemeine Problem bedurfte das Verfahren folgender Erweiterungen, die bisher nicht vorlagen:

1. Verallgemeinerung auf unendliche lineare Gleichungssysteme in einer Banach-Algebra statt in $\mathbb{C}$,

2. Konsequente Formulierung des äquivalenten endlichen Gleichungssystems und

3. Lösung des Systems mit den im 1. Kapitel gewonnenen algebraischen Methoden.

Die Güte der hier gewonnenen Rangabschätzung für eine regulär-singuläre Lösung erweist sich in der Folgerung:

Falls $d = n \cdot s$, ist jede formale Lösung konvergent, woraus sich mit (10) *zusammen als Satz* 2. 31 *ergibt:*

(11) (1) *besitzt ein regulär-singuläres Fundamentalsystem genau dann, wenn*

$$d = n \cdot s.$$

Vor dem von Lutz [6] gefundenen Kriterium zeichnet sich (11) vor allem dadurch aus, daß wirklich höchstens die $n \cdot s$ ersten B_ν benutzt werden, während Lutz die Anzahl der Rechenschritte, die man zur Anwendung seines Satzes benötigt, nicht allgemein nach oben abschätzt. Auch fehlt bei Lutz ein Verfahren, eine Fundamentallösung (2) zu berechnen.

Das 3. Kapitel der vorliegenden Arbeit ist Beispielen und Anwendungen gewidmet, beginnend mit dem Satz von Lettenmeyer. Der enge Anwendungsbereich dieses Satzes wird im anschließenden Rechenbeispiel verlassen, das die hier neu entwickelten Verfahren zur Gewinnung formaler bzw. konvergenter Lösungen (2) erläutert. Das abschließende Beispiel, wieder allgemeinerer Natur, behandelt die Differentialgleichung n-ter Ordnung. Durch die einfache Struktur der Matrizen B_ν in diesem Spezialfall sind die Größen d und $r_{\max}$ sehr leicht zu bestimmen. Die Tatsache, daß hier stets $r_{\max} < n$, liefert einen neuen Beweis für den Satz, daß die Differentialgleichung n-ter Ordnung (5) mit $s > 0$ keine regulär-singuläre Fundamentallösung haben kann.

Schließlich sind wir in der Lage, die Sätze von Perron aus unseren allgemeinen Überlegungen herzuleiten, wobei in der Frage nach logarithmenbehafteten Lösungen ein bei Perron aufgetretener Fehler zu verbessern ist.

1. Formale Lösungen

Es sei

$$B(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu B_\nu \text{ mit } 0 < \operatorname{rg} B_0 < n \tag{1.1}$$

die für $x \in \mathfrak{K}_R$ konvergente Potenzreihendarstellung von B. Das Einsetzen einer Lösung (2) in die Differentialgleichung (1) liefert nach Multiplikation der Potenzreihen und Koeffizientenvergleich für die H_ν die Rekursionen

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu = 0 & (\mu = 0, 1, \ldots, s-1) \\ \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} H_\nu - H_{\mu-s}(J + (\mu - s) I) = 0 & (\mu = s, s+1, \ldots). \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Wenn eine Folge von Matrizen $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$ den Gleichungen (1.2) mit einem gewissen $J \in M_n(\mathbb{C})$ genügt, nennen wir die formale Reihe

$$Y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu x^{\nu I + J} \tag{1.3}$$

„formale Lösung" von (1). Falls dabei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu H_\nu$ für $|x| < R$ konvergiert, ist die durch (1.3) dargestellte analytische Funktion natürlich Lösung von (1).

Zur Lösbarkeit von (1.2) mit maximalem Rang von $Y(x)$ muß die Matrix J vorweg bestimmt werden. Offenbar ist die Nicht-Invertierbarkeit von B_0 notwendig für die nichttriviale Lösbarkeit von (1.2); andererseits gestattet es diese Voraussetzung nicht, die μ-te Gleichung eindeutig nach H_μ aufzulösen. Da über Matrizengleichungen der Form (1.2) anscheinend keine Literatur vorliegt, wird (1.2) im folgenden auf Gleichungssysteme für die Spalten der H_ν zurückgeführt.

1.1. Reduktion der Rekursionsformeln

Für jedes invertierbare $T \in M_n(\mathbb{C})$ ist mit $Y(x)$ auch

$$Y(x)\, T = \sum_{\nu=0}^{\infty} (H_\nu T) x^{\hat{J} + \nu I}, \; \hat{J} = T^{-1} J T,$$

formale Lösung von (1). Daher genügt es, (1. 2) mit J in Jordanscher Normalform zu lösen. Sei also

$$(1.\,4)\begin{cases} J = \left(\begin{array}{cccccc|c} J_1^1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_1^{t_1} & & & & 0 \\ & & & J_2^1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & J_m^{t_m} & \\ \hline & & 0 & & & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} r \\ \left.\vphantom{1}\right\} n-r \end{array} \\ \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{r}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-r} \\[2ex] J_i^\tau = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} (k_i^\tau, k_i^\tau) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \tau = 1, \ldots, t_i). \end{cases}$$

Zur Erläuterung der $(n - r, n - r)$-Nullmatrix in der rechten unteren Ecke von J sei folgendes vermerkt:

Die k_i^τ Spalten der H_ν in der formalen Lösung (1. 3), die an der Stelle von J_i^τ stehen,

$$(h_{\varkappa\nu})_{\nu=0}^\infty = (h_{\varkappa\nu}^{i\tau})_{\nu=0}^\infty \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k_i^\tau),$$

erfüllen die — nur von λ_i und k_i^τ abhängigen — Gleichungen

$$(1.\,5)\begin{cases} \text{a)}\ \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} h_{\varkappa\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, \ldots, s-1;\ \varkappa = 1, \ldots, k_i^\tau) \\ \text{b)}\ \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} h_{1\nu} - (\lambda_i + \mu - s) h_{1\mu-s} = 0 \qquad (\mu = s, s+1, \ldots) \\ \text{c)}\ \sum\limits_{\nu=0}^{\mu} B_{\mu-\nu} h_{\varkappa\nu} - (\lambda_i + \mu - s) h_{\varkappa,\mu-s} - h_{\varkappa-1,\mu-s} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu = s, s+1, \ldots;\quad \varkappa = 2, \ldots, k_i^\tau). \end{cases}$$

Wenn alle zu demselben J_i^τ gehörenden Folgen $(h_{\varkappa\nu})_{\nu=0}^\infty$ $(\varkappa = 1, \ldots, k_i^\tau)$ Null sind, kann man J_i^τ durch eine beliebige (k_i^τ, k_i^τ)-Matrix ersetzen. Wir wählen dazu die Nullmatrix und verschieben sie in die rechte untere Ecke von J; entsprechend rücken die Nullspalten in den H_ν nach rechts. Das rechtfertigt als erste Grundannahme für eine formale Lösung (1. 3):

(A)
J habe die Gestalt (1. 4) mit $0 \leqq r \leqq n$;
die letzten $n - r$ Spalten aller H_ν seien Null;
falls $r > 0$, seien
$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden,
t_i die Anzahl der Kästchen J_i^τ zu λ_i (ohne Berücksichtigung der $(n - r, n - r)$-Nullmatrix), so daß $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{\tau=1}^{t_i} k_i^\tau = r$.

Die Spalten der formalen Lösung $Y(x)$, die dem Jordankästchen J_i^τ entsprechen, sind die Reihen

$$(1.6)\qquad x^{\lambda_i}\sum_{j=1}^{\varkappa}\frac{1}{(\varkappa-j)!}(\log x)^{\varkappa-j}\sum_{\nu=0}^{\infty}x^\nu h_{j\nu}^{i\tau}\qquad (\varkappa=1,\ldots,k_i^\tau),$$

durch die im Fall der Konvergenz Lösungen von (4) dargestellt werden. Auch wenn Reihen der Form (1.6) nicht konvergieren, wollen wir mit ihnen rechnen wie mit konvergenten Reihen, die Rechenoperationen sind bei Coddington and Levinson [10], S. 114ff. eingehend erläutert. —

Bei beliebigem $z\in\mathbb{N}$ sind die Folgen

$$(h_{\varkappa\nu-z})_{\nu=0}^{\infty}\ (\varkappa=1,\ldots,k_i^\tau),\ \text{mit } h_{\varkappa\mu}=0 \text{ für } \mu\leqq-1,$$

Lösungen von (1.5) zu λ_i-z; diesen Übergang von λ_i auf λ_i-z, der im Fall der Konvergenz die in (1.6) dargestellten Funktionen ungeändert läßt, wollen wir immer dann durchführen, wenn $\lambda_i=\lambda_j+z$ mit $z\in\mathbb{N}$, wobei $i,j\in\{1,\ldots,m\}$.

Dadurch wird als zusätzliche Annahme erreicht:

(B) | *Für $i\neq j$ sei $\lambda_i-\lambda_j$ nicht ganzzahlig.*

Es bezeichne rg Y die Dimension des Raumes, den sämtliche r Reihen in (1.6) aufspannen, zunächst als formale Reihen, bei Konvergenz als analytische Abbildungen. Für den letzteren Fall wird sich zeigen, daß mit beiden Definitionen rg Y den gleichen Wert hat. — Die letzte Voraussetzung für $Y(x)$ sei

(C) | *Zu jedem λ_i $(i=1,\ldots,m)$ seien die t_i Folgen*

$$(h_{1\nu}^{i1})_{\nu=0}^{\infty},\ (h_{1\nu}^{i2})_{\nu=0}^{\infty},\ldots,(h_{1\nu}^{it_i})_{\nu=0}^{\infty}$$

linear unabhängig.

Zur Rechtfertigung zeigen wir

Satz 1.7. a) *Unter Voraussetzung* (A) *und* (B) *ist* (C) *notwendig und hinreichend dafür, daß* rg $Y=r$.

b) *Für eine formale Lösung $Y(x)$ mit* (A) *und* (B) *existiert ein invertierbares $T\in M_n(\mathbb{C})$, so daß für $Y(x)\,T$ zusätzlich Voraussetzung* (C) *erfüllt ist.*

Beweis. Aus (C) wollen wir zunächst im Fall der Konvergenz die lineare Unabhängigkeit aller r Funktionen in (1.6) folgern. Eine Abbildung

$$x^\lambda\sum_{j=1}^{\varkappa}(\log x)^{\varkappa-j}h_j(x)\ \text{ mit }\ h_j:\mathfrak{R}_R\to\mathbb{C}^n\ \text{holomorph},\ h_1\neq 0$$

ist bekanntlich Hauptvektor $\varkappa$-ter Stufe zum Eigenwert $e^{2\pi i\lambda}$ des Umlaufoperators U mit

$$[U(y)](x)=y(x\cdot e^{2\pi i})\ \text{ für }\ y:\hat{\mathfrak{R}}_R\to\mathbb{C}^n\ \text{analytisch.}$$

Da es genügt, die lineare Unabhängigkeit der Hauptvektoren zum gleichen Eigenwert zu zeigen, beschränken wir uns wegen (B) auf die Funktionen (1.6), die zu einem festen λ_i gehören. Deren lineare Unabhängigkeit ergibt sich wegen (C) durch Ordnen einer Linearkombination nach Potenzen von $\log x$ und damit Zerlegung in Hauptvektoren verschiedener Stufen. — Die zugehörige Rechnung lehrt, daß auch als formale Reihen alle Reihen (1.6) linear unabhängig sind. Wenn umgekehrt (C) für ein λ_i nicht erfüllt ist, sind von den unter (1.6) aufgeführten schon die t_i Reihen

$$x^{\lambda_i}\sum_{\nu=0}^{\infty}x^\nu h_{1\nu}^{i\tau}\qquad(\tau=1,\ldots,t_i)$$

linear abhängig und damit rg $Y < r$. Diesem Fall wollen wir zum Beweis von b) weiter nachgehen:

I. Ist ein $(h_{1\nu}^{i\tau})_{\nu=0}^{\infty}$ die Nullfolge, so rücken wir $h_{1\nu}^{i\tau}$ in H_ν ans Ende und verkleinern J_i^τ um eine Zeile und Spalte. Dem entspricht der Übergang

$$(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \mapsto (H_\nu T_I)_{\nu=0}^{\infty}$$

mit einer Permutationsmatrix T_I, wobei $T_I^{-1} J T_I$ durch Nullsetzen der letzten Zeile in ein J_I abgeändert wird, das Bedingung (1. 4) mit $r - 1$ statt r erfüllt und für das die Beziehung gilt:

$$(H_\nu T_I) T_I^{-1} x^J T_I = (H_\nu T_I) x^{J_I}, \text{ also } Y(x) T_I = \sum_{\nu=0}^{\infty} (H_\nu T_I) x^{\nu I + J_I}$$

II. Aus dem allgemeineren Fall gewinnen wir I., indem wir eine Linearkombination der übrigen $(h_{1\nu}^{i\tau})_{\nu=0}^{\infty}$ von einer Folge $(h_{1\nu}^{i\tau_0})_{\nu=0}^{\infty}$ mit minimalem $k_i^{\tau_0}$ subtrahieren und (evtl.) für $\varkappa = 2, \ldots, k_i^{\tau_0}$ die mit den gleichen Koeffizienten gebildete Linearkombination der $(h_{\varkappa\nu}^{i\tau})_{\nu=0}^{\infty}$ von $(h_{\varkappa\nu}^{i\tau_0})_{\nu=0}^{\infty}$. Dies entspricht der Zuordnung $(H_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \mapsto (H_\nu T_{II})_{\nu=0}^{\infty}$ mit einer Matrix T_{II}, für die gilt

$$T_{II}^{-1} J T_{II} = J.$$

Die Verfahren I. und II. lassen sich so lange anwenden, bis $r = \operatorname{rg} Y$ erreicht ist.

Im folgenden suchen wir formale Lösungen $Y(x)$ mit Bedingung (A), (B) und (C), so daß $r = \operatorname{rg} Y$ maximal wird.

Die Rekursionen (1. 2) haben wir bereits auf (1. 5) zurückgeführt; daran anschließend definieren wir für $\varrho \in \mathbb{N}_0$ als Spaltenvektoren des $\mathbb{C}^{n(\varrho+1)}$

$$C_{\varkappa\varrho} = (h_{\varkappa\nu})_{\nu=0}^{\varrho} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k_i^\tau) \tag{1. 8}$$

sowie für $\lambda \in \mathbb{C}$ die $(\varrho + 1) \cdot n$-zeilige quadratische Matrix $A_\varrho(\lambda)$, in Blockschreibweise notiert als

$$A_\varrho(\lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & B_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ B_\varrho & B_{\varrho-1} & \cdots & B_0 \end{pmatrix} & (\varrho = 0, \ldots, s-1), \\[2ex] \begin{pmatrix} B_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ B_1 & B_0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ B_{s-1} & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_s - \lambda I & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & 0 \\ B_\varrho & \cdots & B_s - (\lambda + \varrho - s) I & B_{s-1} & \cdots & B_0 \end{pmatrix} & (\varrho = s, s+1, \ldots). \end{cases} \tag{1. 9}$$

Die $A_\varrho(\lambda)$ sind Matrizenpolynome 1. Grades in λ; (1. 5) bei festem i und τ können wir unter Benutzung der höheren Ableitungen von $A_\varrho(\lambda)$ in der äquivalenten Form

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \frac{1}{(\varkappa - j)!} A_\varrho^{(\varkappa-j)}(\lambda_i) C_{j\varrho} = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k_i^\tau;\ \varrho = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1. 10}$$

schreiben. Die folgenden Abschnitte sollen sich mit der allgemeinen Theorie von Polynommatrizen, sogenannten λ-Matrizen, beschäftigen.

1. 2. Zur Theorie der λ-Matrizen

Eine λ-Matrix $A = A(\lambda)$ hat als Koeffizienten komplexe Polynome in λ, A ist daher Matrix über $\mathbb{C}(\lambda)$, dem Körper der komplexen rationalen Funktionen, andererseits ist $A(\lambda)$ bei festem $\lambda \in \mathbb{C}$ komplexe Matrix. Für die folgenden Abschnitte setzen wir voraus:

(Λ) | *$A = A(\lambda)$ sei m-zeilige quadratische λ-Matrix,* $\operatorname{rg} A = r$ — *als Matrix über* $\mathbb{C}(\lambda)$.

Dabei sind die Bezeichnungen m und r unabhängig von (A) in Abschnitt 1. 1 gemeint.

1. 2. 1. Die Smithsche Normalform. Unter Voraussetzung (Λ) gilt

Satz 1. 11. *Es existieren m-zeilige quadratische λ-Matrizen P und Q mit konstanter, von Null verschiedener Determinante, so daß*

$$PAQ = S \text{ (Smithsche Normalform von } A\text{), wobei}$$

$$S(\lambda) = \operatorname{diag}\big(\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_r(\lambda), 0, 0, \ldots, 0\big),$$

$$\varphi_i \neq 0 \text{ normierte Polynome } (i = 1, \ldots, r) \text{ mit}$$

$$\varphi_i \text{ Teiler von } \varphi_{i+1} \qquad (i = 1, \ldots, r-1).$$

Jedes Polynom

$$\Psi_j(\lambda) = \prod_{i=1}^{j} \varphi_i(\lambda)$$

ist der größte gemeinsame Teiler aller Unterdeterminanten von A mit der Zeilenzahl j $(j = 1, \ldots, r)$; folglich ist S durch A eindeutig bestimmt.

Einen Beweis dazu findet man z. B. bei Gantmacher [9], S. 130. P und Q sind Einheiten im Ring der λ-Matrizen, insbesondere sind $P(\lambda)$ und $Q(\lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ invertierbar. Wir notieren

Korollar 1. 12.

a) $r = \max\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \operatorname{rg} A(\lambda)$,

b) $\operatorname{rg} A(\lambda_0) < r \curvearrowleft \psi_r(\lambda_0) = 0$.

1. 2. 2. Der ausgeartete Nullraum von A(λ). Neben (Λ) sei angenommen:

$$r = \operatorname{rg} A < m,\ S = PAQ \text{ Smithsche Normalform von } A.$$

Für festes $\lambda \in \mathbb{C}$ bezeichne den Nullraum von $A(\lambda)$

$$\mathfrak{N}(\lambda) = \mathfrak{N}_A(\lambda) := \{C \in \mathbb{C}^m : A(\lambda)C = 0\}.$$

Offenbar sind für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ die kanonischen Einheitsvektoren

$$e_{r+1}, \ldots, e_m \in \mathfrak{N}_S(\lambda).$$

Für die $m - r$ Vektorpolynome des $\mathbb{C}^m$

$$f_i(\lambda) = Q(\lambda)e_i \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

gilt $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

$$f_{r+1}(\lambda), \ldots, f_m(\lambda) \in \mathfrak{N}_A(\lambda), \text{ lin. unabhängig.}$$

Bei festem $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir als „ausgearteten Nullraum" zu $A(\lambda)$:

$$\hat{\mathfrak{N}}(\lambda) = \hat{\mathfrak{N}}_A(\lambda) := \operatorname{span}\left(f_{r+1}(\lambda), \ldots, f_m(\lambda)\right). \tag{1.13}$$

$\hat{\mathfrak{N}}_A(\lambda)$ ist stets $(m-r)$-dimensionaler Unterraum von $\mathfrak{N}_A(\lambda)$, die Unabhängigkeit von Q folgern wir aus

Hilfssatz 1. 14. *Es seien $\tilde{f}_{r+1}(\lambda), \ldots, \tilde{f}_m(\lambda)$ Vektorpolynome im $\mathbb{C}^m$, und $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$*

$$\tilde{f}_{r+1}(\lambda), \ldots, \tilde{f}_m(\lambda) \in \mathfrak{N}_A(\lambda),$$

linear unabhängig. Dann gilt $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\hat{\mathfrak{N}}_A(\lambda) = \operatorname{span}\left(\tilde{f}_{r+1}(\lambda), \ldots, \tilde{f}_m(\lambda)\right).$$

Zum *Beweis* benutzen wir die Vektorpolynome

$$\tilde{e}_i(\lambda) = Q(\lambda)^{-1}\tilde{f}_i(\lambda) \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

mit der Eigenschaft

$$S(\lambda)\tilde{e}_i(\lambda) = 0 \qquad (i = r+1, \ldots, m).$$

Wegen der Diagonalgestalt von S gilt mit gewissen komplexen Polynomen q_{ij}:

$$\tilde{e}_i(\lambda) = \sum_{j=r+1}^{m} q_{ij}(\lambda)e_j \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

und folglich

$$\tilde{f}_i(\lambda) = \sum_{j=r+1}^{m} q_{ij}(\lambda)f_j(\lambda).$$

Es ergibt sich unmittelbar

Folgerung 1. 15. *Falls B Einheit im Ring der λ-Matrizen, so ist für alle $\lambda_0 \in \mathbb{C}$*

$$\hat{\mathfrak{N}}_{BA}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}_A(\lambda_0) = B(\lambda_0) \cdot \hat{\mathfrak{N}}_{AB}(\lambda_0).$$

Folgerung 1. 16.

$$\mathfrak{N}(\lambda_0)/\hat{\mathfrak{N}}(\lambda_0) \neq \{0\} \curvearrowright \psi_r(\lambda_0) = 0.$$

1. 2. 3. Die Matrizen $A^{[k]}(\lambda)$. Wir untersuchen jetzt Gleichungssysteme der Form (1. 10), also mit Ableitungen von $A(\lambda)$ in der Koeffizientenmatrix. Es sei vorausgesetzt (Λ) mit $r < m$, $S = PAQ$ gemäß Satz 1. 11. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die $k \cdot m$-zeilige quadratische λ-Matrix $A^{[k]}(\lambda)$ durch

Definition 1. 17.

$$A^{[k]}(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A'(\lambda) & A(\lambda) & 0 & & \vdots \\ \frac{1}{2!}A''(\lambda) & A'(\lambda) & A(\lambda) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(k-1)!}A^{(k-1)}(\lambda) & \cdots & \cdots & A'(\lambda) & A(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Element der $\varkappa$-ten Blockzeile, i-ten Blockspalte für $i \leqq \varkappa$ ist also

$$\frac{1}{(\varkappa - i)!} \frac{d^{\varkappa - i}}{d\lambda^{\varkappa - i}} A(\lambda).$$

Wir bezeichnen für festes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathfrak{N}^{[k]}(\lambda) = \mathfrak{N}_A^{[k]}(\lambda) \text{ und } \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda) = \hat{\mathfrak{N}}_A^{[k]}(\lambda)$$

den Nullraum bzw. ausgearteten Nullraum von $A^{[k]}(\lambda)$. Ein Element $C^{[k]} \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda)$ — der Index $[k]$ in $C^{[k]}$ bedeutet nur, daß $C^{[k]} \in \mathbb{C}^{mk}$ — zerlegen wir in Vektoren des $\mathbb{C}^m$, so daß

$$C^{[k]} = (C_\varkappa)_{\varkappa=1}^k = (C_1, \ldots, C_k),$$

letzteres aus schreibtechnischen Gründen an Stelle der Spaltenschreibweise. Die Komponenten von $C^{[k]}$ erfüllen die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \frac{1}{(\varkappa - j)!} A^{(\varkappa - j)}(\lambda) C_j = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Einige Vorbemerkungen zählen wir auf in

Hilfssatz 1. 18.

α) $(C_1, C_2, \ldots, C_k) \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda) \frown (0, C_1, \ldots, C_{k-1}) \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda);$

$(C_1, C_2, \ldots, C_k) \in \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda) \frown (0, C_1, \ldots, C_k) \in \mathfrak{N}^{[k+1]}(\lambda).$

β) $P^{[k]}(\lambda) A^{[k]}(\lambda) Q^{[k]}(\lambda) = S^{[k]}(\lambda),$

$P^{[k]}$ und $Q^{[k]}$ sind Einheiten im Ring der $k \cdot m$-zeiligen λ-Matrizen.

γ) $\mathfrak{N}_A^{[k]}(\lambda) = Q^{[k]}(\lambda) \mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda); \; \hat{\mathfrak{N}}_A^{[k]}(\lambda) = Q^{[k]}(\lambda) \hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda).$

δ) *Die $k \cdot (m - r)$ Einheitsvektoren*

$E_{\varkappa,i}^{[k]} = (0, \ldots, 0, \underset{\varkappa}{e_i}, 0, \ldots, 0) \qquad (i = r + 1, \ldots, m; \varkappa = 1, \ldots, k)$

sind für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Basis von $\hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda)$; folglich

$$\dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda) = k \cdot (m - r) = k \cdot \dim \hat{\mathfrak{N}}(\lambda).$$

ε) $\psi_r(\lambda_0) \neq 0 \frown \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda_0).$

ζ) *Falls* $D^{[k]} = (D_1, D_2, \ldots, D_k) \in \mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda)$, $Q^{[k]}(\lambda) D^{[k]} = (C_1, C_2, \ldots, C_k)$, *so*

$C_1 = Q(\lambda) D_1.$

Die Beweise zu α) und ζ) erübrigen sich; zu β) rechnet man unter Benutzung der Produktregel für höhere Ableitungen nach, daß z. B.

$$(P \cdot A)^{[k]} = P^{[k]} A^{[k]}.$$

Ferner ist

$$\det P^{[k]}(\lambda) = \big(\det P(\lambda)\big)^k \neq 0, \text{ konstant},$$

also sind $P^{[k]}$ und $Q^{[k]}$ im Ring der λ-Matrizen invertierbar, was mit (1. 15) sofort γ) liefert. δ) lesen wir an der Gestalt von $S^{[k]}(\lambda)$ ab; man sieht, daß für $\psi_r(\lambda_0) \neq 0$ $\mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda_0)$, wegen γ) also $\mathfrak{N}_A^{[k]}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}_A^{[k]}(\lambda_0)$.

Wir benutzen diese Vorbemerkungen in dem wichtigen

Satz 1. 19. *Es sei λ_0 Nullstelle von ψ_r der Vielfachheit $v > 0$; nach Satz 1. 11 sei t $(1 \leqq t \leqq r)$ dadurch festgelegt, daß λ_0 für $\tau = t+1, \ldots, r$ nicht Nullstelle von $\varphi_{r-\tau+1}$, für $\tau = 1, \ldots, t$ aber k_τ-fache Nullstelle von $\varphi_{r-\tau+1}$, so daß*

$$0 < k_t \leqq k_{t-1} \leqq \cdots \leqq k_1, \quad \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau = v.$$

Dann gilt:

1) *Für $\tau = 1, \ldots, t$; $\varkappa = 1, \ldots, k_\tau$ existieren $C_\varkappa^\tau \in \mathbb{C}^m$ mit*

$$(\ast) \quad \begin{cases} (C_\varkappa^\tau)_{\varkappa=1}^{k_\tau} \in \mathfrak{N}^{[k_\tau]}(\lambda_0) \qquad (\tau = 1, \ldots, t) \\ C_1^1, C_1^2, \ldots, C_1^t \text{ lin. unabhängig bezüglich } \hat{\mathfrak{N}}(\lambda_0). \end{cases}$$

2) *Bezüglich $(\ast)$ ist $\sum_{\tau=1}^{t} k_\tau$ maximal: falls Aussage 1) mit anderen Zahlen*

$$t' \in \mathbb{N}, \ k'_\tau \in \mathbb{N} \qquad (\tau = 1, \ldots, t')$$

erfüllbar ist, so

$$\sum_{\tau=1}^{t'} k'_\tau \leqq \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau = v.$$

3) *Für $k \geqq k_1$ ist* $\dim \mathfrak{N}^{[k]}(\lambda_0)/\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}(\lambda_0) = v$.

Zum *Beweis* ersetzen wir A durch seine Smithsche Normalform S. Bei der entsprechenden Transformation geht $(\ast)$ in eine äquivalente Aussage für S über, die erste Zeile wegen (1. 18) γ), die zweite Zeile auf Grund von (1. 18) ζ) und (1. 15). Für S wird Aussage 1) erfüllt durch die k_τ-tupel

$$(D_\varkappa^\tau)_{\varkappa=1}^{k_\tau} = (e_{r-\tau+1}, 0, \ldots, 0) \qquad (\tau = 1, \ldots, t),$$

da nach Voraussetzung

$$\varphi_{r-\tau+1}(\lambda_0) = \varphi'_{r-\tau+1}(\lambda_0) = \cdots = \varphi_{r-\tau+1}^{(k_\tau - 1)}(\lambda_0) = 0;$$

und die Einheitsvektoren $e_{r-\tau+1}$ $(\tau = 1, \ldots, t)$ sind bezüglich $\hat{\mathfrak{N}}_S(\lambda_0)$ linear unabhängig.

Zum Beweis der 3. Aussage bilden wir zu den $(D_\varkappa^\tau)_{\varkappa=1}^{k_\tau}$ die folgenden v Vektoren des $\mathbb{C}^{m \cdot k}$

$$(\ast\ast) \qquad D_{\tau\varkappa}^{[k]} = (0, \ldots, 0, D_1^\tau, \ldots, D_\varkappa^\tau) = (0, \ldots, 0, e_{r-\tau+1}, 0, \ldots, 0),$$

also mit $D_1^\tau = e_{r-\tau+1}$ als $(k - \varkappa + 1)$-ter Komponente $(\varkappa = 1, \ldots, k_\tau;\ \tau = 1, \ldots, t)$.

Mit (1. 18) α) und δ) folgt, daß sämtliche $D_{\tau\varkappa}^{[k]} \in \mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda_0)$, linear unabhängig bezüglich $\hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda_0)$ sind. Wie man an der Form von $S^{[k]}(\lambda_0)$ abliest, gibt es keine weiteren bzgl. $\hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda_0)$ linear unabhängige Vektoren in $\mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda_0)$; damit ist Behauptung 3) bewiesen.

Schließlich seien $t' \in \mathbb{N}$, k'_τ $(\tau = 1, \ldots, t')$ angenommen, so daß Aussage $(\ast)$ für S mit Systemen

$$(D'^\tau_\varkappa)_{\varkappa=1}^{k'_\tau} \qquad (\tau = 1, \ldots, t')$$

erfüllt ist. Für $k \geqq \max k'_\tau$ konstruieren wir wie in $(\ast\ast)$ dann $\sum_{\tau=1}^{t'} k'_\tau$ Vektoren aus $\mathfrak{N}_S^{[k]}(\lambda_0)$, die bezüglich $\hat{\mathfrak{N}}_S^{[k]}(\lambda_0)$ linear unabhängig sind. Aussage 3) liefert uns, daß

$$\sum_{\tau=1}^{t'} k'_\tau \leqq v.$$

1. 3. Konstruktion der formalen Lösungen

An die Definition (1. 8) anschließend, fassen wir die $C_{\varkappa\varrho}$ weiter zusammen zu

$$C_\varrho^{[k]} = (C_{\varkappa\varrho})_{\varkappa=1}^k \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei $k_i^\tau = k$ gesetzt ist. Dann läßt sich (1. 10) schreiben als

$$(1.20) \qquad A_\varrho^{[k]}(\lambda_i) C_\varrho^{[k]} = 0 \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots),$$

so daß wir die Ergebnisse der letzten Abschnitte anwenden können. Um das Verhalten der $A_\varrho^{[k]}(\lambda)$ bei wachsendem ϱ leichter zu überblicken, schließen wir eine zweite Notation für die $C_\varrho^{[k]}$ an, indem wir anders zusammenfassen. Mit den Definitionen

$$(1.21) \qquad h_\nu^{[k]} = (h_{\varkappa\nu})_{\varkappa=1}^k = (h_{1\nu}, h_{2\nu}, \ldots, h_{k\nu}),$$

gemeint als Vektoren des $\mathbb{C}^{n \cdot k}$, schreiben wir:

$$(1.22) \qquad \begin{aligned} C_\varrho^{[k]} &= (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^\varrho \\ &= (h_0^{[k]}, h_1^{[k]}, \ldots, h_\varrho^{[k]}) \\ &= (h_{1\nu}, h_{2\nu}, \ldots, h_{k\nu})_{\nu=0}^\varrho. \end{aligned}$$

Würde man $C_\varrho^{[k]}$ nach (1. 22) als eine Spalte des $\mathbb{C}^{nk(\varrho+1)}$ untereinanderschreiben, müßte man die Matrix $A_\varrho^{[k]}(\lambda)$ entsprechend umordnen: gleichnamige Zeilen- und Spaltenvertauschungen führen dabei auf eine Gestalt wie (1. 9), bestehend aus $k \cdot n$- statt n-zeiligen quadratischen Blockmatrizen. Auch die umgeordnete Matrix nennen wir $A_\varrho^{[k]}(\lambda)$.

Als Abkürzungen notieren wir für $\varrho \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathfrak{N}_\varrho(\lambda) = \text{Nullraum von } A_\varrho(\lambda),$$

$$\hat{\mathfrak{N}}_\varrho(\lambda) = \text{ausgearteter Nullraum von } A_\varrho(\lambda),$$

$$\delta_\varrho(\lambda) = \dim \mathfrak{N}_\varrho(\lambda) = n(\varrho + 1) - \operatorname{rg} A_\varrho(\lambda),$$

$$d_\varrho = \dim \hat{\mathfrak{N}}_\varrho(\lambda) = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \delta_\varrho(\lambda).$$

Entsprechend sei für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{N}_\varrho^{[k]}(\lambda),\ \hat{\mathfrak{N}}_\varrho^{[k]}(\lambda) \text{ Nullraum bzw. ausgearteter Nullraum von } A_\varrho^{[k]}(\lambda),$$

$$\delta_\varrho^{[k]}(\lambda) = \dim \mathfrak{N}_\varrho^{[k]}(\lambda),\ d_\varrho^{[k]} = \dim \hat{\mathfrak{N}}_\varrho^{[k]}(\lambda).$$

Über das Verhalten der Defekte bei wachsendem ϱ notieren wir

Hilfssatz 1. 23. *Für jedes $\varrho \in \mathbb{N}_0$ gilt*

1) $\delta_\varrho(\lambda) \leqq \delta_{\varrho+1}(\lambda)$; $\delta_\varrho(\lambda + 1) \leqq \delta_{\varrho+1}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$,

2) $d_\varrho \leqq d_{\varrho+1}$; $d_0 > 0$,

3) $d_{\varrho+1} - d_\varrho \leqq d_\varrho - d_{\varrho-1}$, *wobei* $d_{-1} = 0$ *zu setzen ist*,

4) $d_\varrho \leqq n \cdot s$.

Außerdem gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, $\varrho \in \mathbb{N}_0$

5) $\delta_\varrho^{[k]}(\lambda) \leqq \delta_{\varrho+1}^{[k]}(\lambda)$; $\delta_\varrho^{[k]}(\lambda + 1) \leqq \delta_{\varrho+1}^{[k]}(\lambda)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}$,

6) $d_\varrho^{[k]} = k \cdot d$. —

Aus den Ungleichungen 2)—4) ergibt sich als

Folgerung 1. 24. *Es existiert eindeutig* $q \in \mathbb{N}_0$ *mit der Eigenschaft*

$$\varrho < q \curvearrowright d_\varrho < d_{\varrho+1}, \ \varrho \geqq q \curvearrowright d_\varrho = d_q.$$

Die Zahlen q *und* d_q *lassen sich abschätzen durch*

$$d_q \leqq n \cdot s; \ q \leqq n \cdot s - 1.$$

Um zunächst (1. 24) herzuleiten, definieren wir

Definition (1. 25). $d = \max\limits_{\varrho \in \mathbb{N}_0} d_\varrho$, $q = \min \{\varrho \in \mathbb{N}_0 \mid d_\varrho = d\}$.

Es ist also $d = d_q$. Wegen (1. 23), 4) existiert $\max\limits_{\varrho \in \mathbb{N}_0} d_\varrho$, wegen 2) und 3) ist die erste Eigenschaft von (1. 24) für q erfüllt. Zur Abschätzung beachtet man, daß für $q > 0$

$$n \cdot s \geqq d_q = \sum_{\varrho=0}^{q-1} (d_{\varrho+1} - d_\varrho) + d_0 \geqq q + 1,$$

letzteres, da jeder Summand $d_{\varrho+1} - d_\varrho \geqq 1$, $d_0 \geqq 1$.

Zum *Beweis von Hilfssatz* 1. 23 *bezeichne*

$$\mathfrak{A}_\varrho(\lambda) = \{(h_\nu)_{\nu=0}^\varrho \in \mathfrak{N}_\varrho(\lambda) \text{ mit } h_0 = 0\},$$

$$\mathfrak{N}'_\varrho(\lambda) = \{h_0 \in \mathbb{C}^n \mid \exists\, h_1, \ldots, h_\varrho \text{ mit } (h_\nu)_{\nu=0}^\varrho \in \mathfrak{N}_\varrho(\lambda)\}.$$

Vermöge der Zuordnung

$$(0, h_1, \ldots, h_\varrho) \mapsto (h_1, \ldots, h_\varrho)$$

ist

$$\mathfrak{A}_\varrho(\lambda) \cong \mathfrak{N}_{\varrho-1}(\lambda + 1) \qquad (\text{mit } \mathfrak{N}_{-1}(\lambda) = \{0\}),$$

außerdem ist mit dem Isomorphismus

$$(h_0, h_1, \ldots, h_\varrho) + \mathfrak{A}_\varrho(\lambda) \mapsto h_0$$

stets

$$\mathfrak{N}_\varrho(\lambda)/\mathfrak{A}_\varrho(\lambda) \cong \mathfrak{N}'_\varrho(\lambda),$$

folglich

$$(*) \qquad \dim \mathfrak{N}'_\varrho(\lambda) = \delta_\varrho(\lambda) - \delta_{\varrho-1}(\lambda + 1).$$

Die Ungleichung

$$\delta_\varrho(\lambda + 1) \leqq \delta_{\varrho+1}(\lambda)$$

folgt aus der Tatsache, daß $\mathfrak{A}_{\varrho+1}(\lambda)$ Unterraum zu $\mathfrak{N}_{\varrho+1}(\lambda)$ ist, isomorph zu $\mathfrak{N}_\varrho(\lambda + 1)$. Zum Beweis, daß

$$\delta_\varrho(\lambda) \leqq \delta_{\varrho+1}(\lambda),$$

beachte man, daß $A_{\varrho+1}(\lambda)$ aus $A_\varrho(\lambda)$ entsteht durch Hinzufügen von n Nullspalten —, was den Rang nicht ändert, — und anschließend von n Zeilen, wodurch sich der Rang um höchstens n erhöht, also

$$\delta_{\varrho+1}(\lambda) = (\varrho + 2)n - \operatorname{rg} A_{\varrho+1}(\lambda) \geqq (\varrho + 1) \cdot n - \operatorname{rg} A_\varrho(\lambda) = \delta_\varrho(\lambda).$$

Durch Übergang auf

$$d_\varrho = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \delta_\varrho(\lambda)$$

erhält man Aussage 2); $d_0 > 0$ war in (1. 1) vorausgesetzt. Korollar 1. 12 b) liefert, daß für höchstens endlich viele $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\delta_\varrho(\lambda) > d_\varrho$$

gelten kann. Daher wählen wir ein $\lambda \in \mathbb{C}$ so, daß gleichzeitig

$$\delta_\varrho(\lambda + 1) = \delta_\varrho(\lambda) = d_\varrho;\ \delta_{\varrho+1}(\lambda) = d_{\varrho+1};\ \delta_{\varrho-1}(\lambda + 1) = d_{\varrho-1}.$$

Aus ($\ast$) folgt dann Aussage 3), wenn man beachtet, daß $\mathfrak{N}'_{\varrho+1}(\lambda) \leqq \mathfrak{N}'_\varrho(\lambda)$.

4) interessiert nur für $\varrho \geqq s$:

Streicht man in $A_\varrho(\lambda)$ die ersten $n \cdot s$ Zeilen und letzten $n \cdot s$ Spalten, ist die entstandene Determinante (als charakteristisches Polynom einer komplexen Matrix) sicher nicht das Nullpolynom, daher ist — über dem Körper $\mathbb{C}(\lambda)$ —

$$\operatorname{rg} A_\varrho \geqq (\varrho + 1) \cdot n - n \cdot s, \text{ also } d_\varrho \leqq n \cdot s.$$

Wie schon im Anschluß an (1. 22) erwähnt, erhalten die $A_\varrho^{[k]}(\lambda)$ durch Umordnen von Zeilen und Spalten eine Struktur wie die $A_\varrho(\lambda)$, woraus sich Aussage 5) ergibt, während 6) schon mit (1. 18) δ) bewiesen ist.

Im folgenden beschäftigen uns die $A_\varrho(\lambda)$ nur noch für $\varrho \geqq q$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$ ist nach den vorhergehenden Sätzen

$$\dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda) = \dim \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_q(\lambda) = k \cdot d.$$

Nach Abschnitt 1. 2. 2 seien

$$(h^{[k]}_{\nu i}(\lambda))^q_{\nu=0} \qquad\qquad (i = 1, \ldots, k \cdot d)$$

Vektorpolynome, die für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Basis von $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_q(\lambda)$ bilden; dann sind die Vektorpolynome

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(\mu+1)\text{-mal}}, h^{[k]}_{0_i}(\lambda + \mu + 1), \ldots, h^{[k]}_{qi}(\lambda + \mu + 1)) \qquad (i = 1, \ldots, k \cdot d)$$

für jedes komplexe λ linear unabhängig und liegen in $\mathfrak{N}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda)$; nach Hilfssatz 1. 14 erzeugen sie $\hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda)$. Das halten wir fest in

Hilfssatz 1. 26. *Sei $\mu \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt*

$$(h^{[k]}_\nu)^{q+1+\mu}_{\nu=0} \in \hat{\mathfrak{N}}^{[k]}_{q+1+\mu}(\lambda) \curvearrowright h^{[k]}_0 = \cdots = h^{[k]}_\mu = 0.$$

Wir definieren für $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$

Definition 1. 27.

$$\mathfrak{M}^{[k]}_\mu(\lambda) = \{(h^{[k]}_\nu)^\mu_{\nu=0} : \exists\, h^{[k]}_{\mu+1}, \ldots, h^{[k]}_{q+\mu+1} \in \mathbb{C}^{nk}, \text{ so daß } (h^{[k]}_\nu)^{q+\mu+1}_{\nu=0} \in \mathfrak{N}^{[k]}_{q+\mu+1}(\lambda)\}.$$

Außerdem sei für $\mu \in \mathbb{N}_0$

Definition 1. 28.

$$\chi_\mu(\lambda) = \text{g. g. T. der } \langle (q + \mu + 2)n - d\rangle\text{-zeiligen Unterdeterminanten von } A_{q+\mu+1}(\lambda),$$

$$\chi(\lambda) = \chi_0(\lambda).$$

$\chi_\mu(\lambda)$ in $A_{q+\mu+1}(\lambda)$ ist unter Satz 1. 11 einzuordnen als das Polynom $\psi_r(\lambda)$ in $A(\lambda)$. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit $\chi(\lambda) = \chi_0(\lambda)$.

Es gilt für beliebiges $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$:

Hilfssatz 1. 29. 1) $\mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_0) \neq \{0\} \curvearrowright \chi(\lambda_0) = 0$,

2) $\chi(\lambda_0) \neq 0 \curvearrowright \mathfrak{N}_q^{[k]}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}_q^{[k]}(\lambda_0)$,

3) $\chi(\lambda_0 + \mu + 1) \neq 0 \curvearrowright \mathfrak{N}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_0)/\hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_0) \cong \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0)$

vermöge

$$(\ast) \qquad (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{q+\mu+1} + \hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_0) \mapsto (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\mu}.$$

Zum *Beweis* von 1) und 2) nehmen wir an, es sei $\chi(\lambda_0) \neq 0$. Dann ist nach (1. 18) ε)

$$(\ast\ast) \qquad \mathfrak{N}_{q+1}^{[k]}(\lambda_0) = \hat{\mathfrak{N}}_{q+1}^{[k]}(\lambda_0),$$

daher mit (1. 26)

$$h_0^{[k]} \in \mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_0) \curvearrowright h_0^{[k]} = 0.$$

Weiter gilt

$$k \cdot d \leqq \dim \mathfrak{N}_q^{[k]}(\lambda_0) = \delta_q^{[k]}(\lambda_0) \leqq \delta_{q+1}^{[k]}(\lambda_0) = k \cdot d,$$

letzteres wegen $(\ast\ast)$: daraus folgt 2), da auch

$$\dim \hat{\mathfrak{N}}_q^{[k]}(\lambda_0) = k \cdot d.$$

Die unter 3) angegebene Zuordnung $(\ast)$ ist wegen Hilfssatz 1. 26 in jedem Fall lineare und surjektive Abbildung. Falls

$$h_0^{[k]} = \cdots = h_\mu^{[k]} = 0,$$

so wegen 2)

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=\mu+1}^{\mu+q+1} \in \mathfrak{N}_q^{[k]}(\lambda_0 + \mu + 1) = \hat{\mathfrak{N}}_q^{[k]}(\lambda_0 + \mu + 1);$$

und dem Beweis von (1. 26) entnehmen wir, daß

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{q+\mu+1} \in \hat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_0).$$

Mit Aussage 3) werden Lösungen der Gleichung

$$A_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_0)\, C_{q+\mu+1}^{[k]} = 0,$$

die bezüglich des ausgearteten Nullraums von $A_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_0)$ linear unabhängig sind, durch die lineare Unabhängigkeit der Abschnitte bis zur Komponente μ charakterisiert. Über die Lösbarkeit von Rekursionen der Form (1. 5) notieren wir

Hilfssatz 1. 30. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig; $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft:*

$$\forall\, \mu \in \mathbb{N} : \mu \geqq p + 1 \curvearrowright \chi(\lambda_0 + \mu) \neq 0.$$

Behauptung. *Jedes $(p + 1)$-tupel $(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{p} \in \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_0)$ läßt sich zu einer eindeutig bestimmten Lösungsfolge $(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\infty}$ der Rekursionen*

$$(1.\,31) \qquad A_\varrho^{[k]}(\lambda_0)\, C_\varrho^{[k]} = 0, \; C_\varrho^{[k]} = (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\varrho} \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

fortsetzen.

Beweis. Für $\mu \geqq p + 1$ bezeichne

$$\psi_\mu : \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0) \to \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_0) \text{ die lineare Zuordnung}$$

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\mu} \mapsto (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{p}.$$

Hilfssatz 1. 29, 3) zusammen mit 1. 23, 5) liefert

$$(\alpha)\ \dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_0) \leqq \dim \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0).$$

Andererseits nehmen wir an, es sei

$$0 \neq (h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\mu} \in \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0) \text{ mit } h_0^{[k]} = \cdots = h_p^{[k]} = 0;$$

dann wäre, mit $j = \min\{\nu \in \{p+1, \ldots, \mu\} : h_\nu^{[k]} \neq 0\}$,

$$h_j^{[k]} \in \mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_0 + j),$$

was nach Hilfssatz 1. 29, 1) unmöglich ist. Es folgt

(β) ψ_μ ist injektive, lineare Abbildung,

mit (α) zusammen also

(γ) $\mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0) \cong \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_0)$ $\forall\, \mu \geqq p+1$ vermöge des Isomorphismus ψ_μ.

Bei vorgegebenem $(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{p} \in \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_0)$ definieren wir für $\mu = p, p+1, \ldots$:

$$h_\mu^{[k]} = \textit{letzte Komponente von } \psi_\mu^{-1}\left((h_\gamma^{[k]})_{\nu=0}^{p}\right),$$

so daß für alle $\mu \geqq p+1$, wie man leicht sieht,

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\mu} = \psi_\mu^{-1}\left((h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{p}\right) \in \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_0).$$

Damit ist $(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{\infty}$ die gesuchte, eindeutig bestimmte Lösungsfolge von (1. 31).

Zur Lösbarkeit von (1. 2) notieren wir zusammenfassend

Satz 1. 32. 1) *Falls* $\chi = 1$, *hat* (1. 2) *nur die triviale Lösung.*

2) *Sei* $\chi \neq 1$, *es bezeichne*

α) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *die Nullstellen von* χ *mit den Eigenschaften*

$\lambda_i - \lambda_j$ *nicht ganzzahlig* $(i \neq j)$,

jede Nullstelle von χ *hat die Form* $\lambda_i + z$ *mit* $z \in \mathbb{N}_0$, $1 \leqq i \leqq m$.

β) $p_i = \max\{z \in \mathbb{N}_0 \mid \chi(\lambda_i + z) = 0\}$ $\quad (i = 1, \ldots, m), \quad p = \max\limits_{i=1}^{m} p_i$.

Schließlich sei für $i = 1, \ldots, m$

γ) $v_i =$ *Vielfachheit von* λ_i *als Nullstelle von* χ_p,

t_i, k_i^τ $(\tau = 1, \ldots, t_i)$ *gemäß Satz* 1. 19 *für die Nullstelle* λ_i *von* χ_p *definiert, so daß*

$$\sum_{\tau=1}^{t_i} k_i^\tau = v_i.$$

Behauptung. *Die Rekursionen* (1. 2) *mit den Bedingungen* (A), (B), (C) *von Abschnitt* 1. 1 *lassen sich lösen unter Übernahme der in* α) *und* β) *definierten Größen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, t_i, k_i^\tau$ *in die durch* (1. 4) *definierte Matrix J. Dabei ist*

$$r = \sum_{i=1}^{m} v_i$$

der maximale Rang einer formalen Lösung.

Daß stets $v_i > 0$ und $\sum_{i=1}^{m} v_i \leqq n$, ist im folgenden Abschnitt noch zu zeigen.

Zum *Beweis* sei daran erinnert, daß wir die nichttriviale Lösbarkeit von (1. 2) auf die nichttriviale Lösbarkeit von Systemen der Form (1. 5) zurückgeführt haben.

(1. 5) ist den Rekursionen (1. 31) äquivalent, wenn man $\lambda_0 = \lambda_i$, $k_i^\tau = k$ setzt. — Nehmen wir an, es sei eine Folge

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^\infty \neq 0 \text{ mit } \mu = \min \{\nu \in \mathbb{N}_0 \mid h_\nu^{[k]} \neq 0\}$$

Lösung von (1. 31). Wegen

$$h_\mu^{[k]} \in \mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_0 + \mu)$$

ist nach Hilfssatz 1. 29, 1)

$$\chi(\lambda_0 + \mu) = 0.$$

χ muß also überhaupt Nullstellen besitzen, womit 1) gezeigt ist. Wir ersetzen dann

$$\lambda_0 \text{ durch } \lambda_0 + z_0 \text{ mit } z_0 = \min \{z \in \mathbb{Z} \mid \chi(\lambda_0 + z) = 0\}$$

und verfahren mit den zu λ_0 gehörenden Lösungsfolgen, wie in Abschnitt 1. 1 vor (B) gezeigt. Daher genügt es, (1. 31) bzw. (1. 5) nur für die unter α) erwähnten λ_i zu lösen.

Für festes $i \in \{1, \ldots, m\}$ bezeichne kurz

$$t := t_i, \; k_\tau := k_i^\tau \qquad (\tau = 1, \ldots, t).$$

Satz 1. 19, angewandt auf λ_i als λ_0, $A_{q+1+p}(\lambda)$ als $A(\lambda)$ — und damit $\chi_p(\lambda)$ als $\psi_r(\lambda)$ — liefert Systeme

$$(*) \qquad (h_{1\nu}^\tau, \ldots, h_{k_\tau\nu}^\tau)_{\nu=0}^{q+1+p} \in \mathfrak{N}_{q+1+p}^{[k_\tau]}(\lambda_i) \qquad (\tau = 1, \ldots, t)$$

— zur Bezeichnung vgl. (1. 22) —, mit

$$(h_{1\nu}^\tau)_{\nu=0}^{q+1+p} \; (\tau = 1, \ldots, t) \text{ lin. unabh. bzgl. } \hat{\mathfrak{N}}_{q+1+p}(\lambda_i),$$

also nach Hilfssatz 1. 29, 3)

$$(**) \qquad (h_{1\nu}^\tau)_{\nu=0}^p \qquad (\tau = 1, \ldots, t) \text{ linear unabhängig.}$$

Die Abschnitte

$$(h_{1\nu}^\tau, \ldots, h_{k\nu_\tau}^\tau)_{\nu=0}^p \in \mathfrak{M}_p^{[k_\tau]}(\lambda_i)$$

lassen sich wegen Hilfssatz 1. 30 eindeutig zu Lösungsfolgen $(h_{1\nu}^\tau, \ldots, h_{k_\tau\nu}^\tau)_{\nu=0}^\infty$ von (1.5) fortsetzen ($\tau = 1, \ldots, t$), wobei Bedingung (C) durch $(**)$ garantiert ist; — die Komponenten

$$h_{\varkappa\nu}^\tau \text{ für } \nu = p + 1, p + 2, \ldots, p + q + 1$$

sind natürlich eventuell andere als in $(*)$. —

$v_i = \sum_{\tau=1}^t k_\tau$ ist maximal bezüglich der Lösbarkeit von Systemen (1. 5) zu λ_i unter Bedingung (C), da nach Hilfssatz 1. 30 die Zuordnungen

$$(h_{1\nu}^\tau, \ldots, h_{k_\tau\nu}^\tau)_{\nu=0}^\infty \mapsto (h_{1\nu}^\tau, \ldots, h_{k_\tau\nu}^\tau)_{\nu=0}^p \text{ und } (h_{1\nu}^\tau)_{\nu=0}^\infty \mapsto (h_{1\nu}^\tau)_{\nu=0}^p$$

bijektiv und linear sind.

1. 4. Abschätzungen für den Rang einer formalen Lösung

Im folgenden wollen wir die Größe $\sum_{i=1}^m v_i$ abschätzen. Wir nehmen an, daß $\chi \neq 1$, und übernehmen die Bezeichnungen aus Satz 1. 32. Eine erste wichtige Gleichung fließt aus

Hilfssatz 1. 33. *Für alle* $\mu \geqq p$ *ist* $\sum_{i=1}^m v_i = \operatorname{Grad} \chi_{\mu+1} - \operatorname{Grad} \chi_\mu$.

Zum *Beweis* zählen wir sämtliche Nullstellen von χ_μ und $\chi_{\mu+1}$ auf und vergleichen ihre Vielfachheiten.

1) *Die Zahlen*

$$\text{I. } \lambda_i + \nu \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, p_i),$$

$$\text{II. } \lambda_i - \nu \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, \mu \textit{ und evtl. } \mu + 1)$$

sind Nullstellen von χ_μ. — Zum Nachweis von II. für $\nu = 0, \ldots, \mu$ benutzt man (1. 23, 1), wonach

$$\delta_{q+\mu+1}(\lambda_i - \nu) \geqq \delta_{q+\mu+1-\nu}(\lambda_i) \geqq \delta_{q+1}(\lambda_i) > d,$$

zum Beweis von I. ersetzt man nur λ_i durch $\lambda_i + p_i$.

2) *Unter* I. *und* II. *sind alle Nullstellen von* χ_μ *aufgeführt.*

Für eine Nullstelle λ' von χ_μ gilt nämlich

$$\mathfrak{N}_{q+\mu+1}(\lambda') \supsetneqq \widehat{\mathfrak{N}}_{q+\mu+1}(\lambda').$$

Entweder ist nun $\chi(\lambda' + \mu + 1) = 0$, dann ist λ' unter II. aufgeführt. Anderfalls, nach (1. 29), 3) existiert

$$0 \neq (h_\nu)_{\nu=0}^{\mu} \in \mathfrak{M}_\mu^{[1]}(\lambda').$$

Mit $j = \min\{\nu \mid h_\nu \neq 0\}$ gilt

$$h_j \in \mathfrak{M}_0^{[1]}(\lambda' + j), \text{ daher } \lambda' + j \text{ Nullstelle von } \chi.$$

Entsprechend sind die Nullstellen von $\chi_{\mu+1}$

$$\text{I}') \ \lambda_i + \nu \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, p_i),$$

$$\text{II}') \ \lambda_i - \nu - 1 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \nu = 0, \ldots, \mu \text{ und evtl. } \mu + 1).$$

Man beachte, daß wir die λ_i selbst oben in beiden Zeilen I. und II. aufgeführt haben, hier nur unter I').

3) *Die Vielfachheiten jeder Nullstelle* $\lambda_i + \nu$ (*aus* I. *bzw.* I')) *in* χ_μ *und* $\chi_{\mu+1}$ *stimmen überein*; *jedes* λ_i *ist genau* v_i*-fache Nullstelle.* —

Jedes $\lambda_i + \nu$ als λ_0 erfüllt die Voraussetzung von Hilfssatz 1. 30, daher ist für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\dim \mathfrak{M}_\mu^{[k]}(\lambda_i + \nu) = \dim \mathfrak{M}_{\mu+1}^{[k]}(\lambda_i + \nu) = \dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i + \nu).$$

Nach Satz 1. 19, 3) sowie (1. 29), 3) bedeutet das bei genügend großem k, daß die Vielfachheiten von $\lambda_i + \nu$ in χ_μ, $\chi_{\mu+1}$ und χ_p übereinstimmen.

4) *Die Vielfachheit jeder Nullstelle* $\lambda_i - \nu$ (*aus* II.) *in* χ_μ *ist gleich der Vielfachheit von* $\lambda_i - \nu - 1$ *in* $\chi_{\mu+1}$. —

Da $\chi(\lambda_i - \nu - 1) \neq 0$, ist stets $\mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_i - \nu - 1) = \{0\}$, folglich

$$(h_\nu^{[k]})_{\nu=0}^{q+\mu+1} \in \mathfrak{N}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_i - \nu - 1) \curvearrowright h_0^{[k]} = 0 \wedge (h_\nu^{[k]})_{\nu=1}^{q+\mu+1} \in \mathfrak{N}_{q+\mu}^{[k]}(\lambda_i - \nu).$$

Daher ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\dim \mathfrak{N}_{q+\mu+1}^{[k]}(\lambda_i - \nu - 1) = \dim \mathfrak{N}_{q+\mu}^{[k]}(\lambda_i - \nu).$$

Da die ausgearteten Nullräume beide die Dimension $k \cdot d$ haben, bleibt wieder nur Satz 1. 19, 3) für genügend großes k anzuwenden.

Folglich stehen, der Vielfachheit entsprechend gezählt, unter I. so viele Nullstellen wie unter I'), unter II. so viele wie unter II'); die λ_i sind in I., II. doppelt gezählt, in I'), II') nicht; also hat $\chi_{\mu+1}$, der Vielfachheit nach,

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \text{ Nullstellen mehr als } \chi_\mu.$$

Aus den Beweisteilen 1) bzw. 2) folgern wir direkt

Korollar 1. 34. 1) $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$ *gilt* $v_i > 0$.

2) *Falls* $\chi = 1$, *so auch alle* $\chi_\mu = 1 \qquad (\mu \in \mathbb{N})$.

Für die Praxis leichter anwendbare Kriterien liefert der folgende Hilfssatz, den wir für die weitere Theorie aber nicht brauchen.

Hilfssatz 1. 35. 1) *Wenn sich alle verschiedenen Nullstellen von* χ *nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so ist*

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = \operatorname{Grad} \chi.$$

2) *In jedem Fall ist*

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \leqq \operatorname{Grad} \chi.$$

Beweis. Im ersten Fall ist $p = 0$, also $\chi = \chi_p$. — Im allgemeinen Fall schätzen wir die Vielfachheiten von $\lambda_i + z$ $(z = 0, 1, \ldots, p)$ als Nullstellen von χ ab. Nach Satz 1. 19 sowie (1. 29), 3) ist für $k \geqq \max\limits_{\tau} k_i^\tau$

$$\dim \mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i) = v_i.$$

Mit gewissen ganzen Zahlen

$$0 \leqq z_1 < z_2 < \cdots < z_l \leqq p \qquad (l \geqq 1)$$

gibt es Basisvektoren von $\mathfrak{M}_p^{[k]}(\lambda_i)$, die sich in l Klassen einteilen lassen, so daß in der μ-ten Klasse Vektoren der Gestalt

$$(0, \ldots, 0, h_{z_\mu j}^{[k]}, \ldots, h_{p,j}^{[k]}) \qquad (j = 1, \ldots, \sigma_\mu)$$

mit

$$h_{z_\mu j}^{[k]} \ (j = 1, \ldots, \sigma_\mu) \text{ lin. unabh.}, \in \mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_i + z_\mu)$$

zusammengefaßt sind. Dann ist offensichtlich

$$\dim \mathfrak{N}_{q+1}^{[k]}(\lambda_i + z_\mu) - k \cdot d \geqq \dim \mathfrak{M}_0^{[k]}(\lambda_i + z_\mu) \geqq \sigma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, l).$$

Folglich ist die Summe der Vielfachheiten von $\lambda_i + z_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, l)$ als Nullstellen in χ mindestens gleich

$$\sum_{\mu=1}^{l} \sigma_\mu = v_i.$$

Daß im allgemeinen Fall nicht unbedingt

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = \operatorname{Grad} \chi,$$

dazu sind leicht Beispiele zu finden. —

Nach Satz 1. 32 bezeichnen wir als maximalen Rang einer formalen Lösung

$$r_{\max} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \chi = 1, \\ \sum_{i=1}^{m} v_i, & \text{falls } \chi \neq 1. \end{cases} \tag{1.36}$$

Zur Rechtfertigung bleibt zu zeigen

Bemerkung 1. 37. Es ist stets $\sum_{i=1}^{m} v_i \leqq n$.

Mit der Bezeichnung,

$\omega_0 =$ *Vielfachheit des Eigenwerts* 0 *von* B_0 *als Nullstelle des charakteristischen Polynoms*,

wollen wir genauere Abschätzungen für $r_{\max}$ liefern:

Satz 1. 38. 1) $s \cdot r_{\max} \leqq d \leqq s \cdot \omega_0$;

2) $r_{\max} = \omega_0 \Leftrightarrow d = s \cdot \omega_0$.

Aus der um eine triviale Ungleichung erweiterten 1. Behauptung,

$$s \cdot r_{\max} \leqq d \leqq s \cdot \omega_0 \leqq s \cdot n,$$

ist außer (1. 37) unmittelbar der Beweis des folgenden Satzes abzulesen, den wir vor dem Beweis von (1. 38) notieren:

Satz 1. 39. 1) $r_{\max} = n \Leftrightarrow d = n \cdot s$;

2) $r_{\max} = n \curvearrowright B_0$ *nilpotent.*

Wie einfache Gegenbeispiele bestätigen, ist die Umkehrung von (1. 39), 2) falsch, ebenso kann man die Ungleichungen (1. 38), 1) i. a. nicht durch Gleichungen ersetzen.

Beweis von Satz 1. 38. Es sei daran erinnert, daß B_0 als nicht-invertierbar vorausgesetzt war, d. h. $\omega_0 > 0$. Für $\omega_0 = 0$ ist natürlich $d = 0$ und $r_{\max} = 0$, da es nur die triviale Lösung von (1. 5) gibt. Wir brauchen den Satz also in jedem Fall nur für $\omega_0 > 0$ zu beweisen. — Wir zeigen folgende Aussagen:

I. $d \leqq s\,\omega_0$,

II. $d = s \cdot \omega_0 \curvearrowright r_{\max} = \omega_0$,

III. $s \cdot r_{\max} \leqq d$.

Aus I. und III. schließt man unmittelbar

$$r_{\max} = \omega_0 \curvearrowright d = s \cdot \omega_0.$$

Zunächst nehmen wir an, daß B_0 in der folgenden Gestalt (z. B. in Jordanscher Normalform) vorliegt:

$$B_0 = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right),$$

wobei D invertierbare $(n - \omega_0, n - \omega_0)$-Matrix — fällt weg für $\omega_0 = n$ —, N nilpotente (ω_0, ω_0)-Matrix.

Wenn nämlich mit einer invertierbaren Matrix $T \in M_n(\mathbb{C})$ die Transformation

$$B_0 \to T^{-1} B_0 T$$

die obige Form erzeugt, geht man für jedes $\varrho \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_\varrho = \begin{pmatrix} T & & & 0 \\ & T & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T \end{pmatrix}_{((\varrho+1)n,\,(\varrho+1)n)}$$

von $A_\varrho(\lambda)$ über auf $T_\varrho^{-1} A_\varrho(\lambda)\, T_\varrho$.

Dabei bleibt die Struktur (1. 9) der $A_\varrho(\lambda)$ erhalten. Weil sich bei vorliegender Transformation die Smithsche Normalform jeder Matrix $A_\varrho(\lambda)$ nicht ändert, bleiben auch die Größen d_ϱ, q und d sowie die Polynome $\chi_\nu(\lambda)$ invariant.

Für $\varrho \geqq 2s$ bezeichnen wir mit $V_\varrho(\lambda)$ die übrigens schon in Hilfssatz 1. 23, 4) benutzte $\langle(\varrho+1)\cdot n - s\cdot n\rangle$-zeilige Untermatrix von $A_\varrho(\lambda)$:

$$V_\varrho(\lambda) = \begin{pmatrix} B_s - \lambda I & B_{s-1} \dots & B_0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & B_0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ B_\varrho & \dots & \dots & \dots & B_s - (\lambda + \varrho - s) I \end{pmatrix}.$$

Falls $\omega_0 < n$, unterteilen wir jede Matrix B_ν $(\nu \in \mathbb{N}_0)$ so wie B_0,

$$B_\nu = \left(\begin{array}{c:c} B_\nu^1 & B_\nu^2 \\ \hdashline B_\nu^3 & B_\nu^4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, n - \omega_0 \\ \}\, \omega_0 \end{array}$$
$$\qquad\quad \underbrace{\qquad}_{n-\omega_0} \quad \underbrace{\qquad}_{\omega_0}$$

und betrachten die folgende $\langle(\varrho+1)\cdot n - s\cdot\omega_0\rangle$-zeilige Untermatrix von $A_\varrho(\lambda)$, die entsteht, wenn man in den ersten s Blockzeilen von $A_\varrho(\lambda)$ die zu den B_ν^3, B_ν^4 gehörenden Zeilen wegläßt, analog in den letzten s Blockspalten die zu den B_ν^2, B_ν^4 gehörenden Spalten.

$$U_\varrho(\lambda) = \left(\begin{array}{cccccc:ccc} D & 0 & & & & & & & \\ B_1^1 & B_1^2 & D & 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \\ B_{s-1}^1 & B_{s-1}^2 & \dots & B_1^2 & D & 0 \;\dots & 0 & & \\ \hline & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & D & & \\ & & & & & & 0 & \ddots & \\ & & V_\varrho(\lambda) & & & & B_1^1 & & \\ & & & & & & \vdots & & D \\ & & & & & & \vdots & & 0 \\ & & & & & & B_{s-1}^1 & & B_1^1\; D \\ & & & & & & B_{s-1}^3 & \dots & B_1^3\; 0 \end{array}\right)$$

Für den Fall, daß $\omega_0 = n$, setzen wir

$$U_\varrho(\lambda) = V_\varrho(\lambda)$$

und zeigen für beide Fälle

Hilfssatz 1. 40. *Die Determinante von* $U_\varrho(\lambda)$ *ist ein Polynom vom genauen Grad* $\omega_0 \cdot (\varrho - s + 1)$.

Für $\omega_0 = n$ ist $U_\varrho(\lambda) = V_\varrho(\lambda)$ und daher die Determinante das charakteristische Polynom einer $n \cdot (\varrho - s + 1)$-zeiligen Matrix.

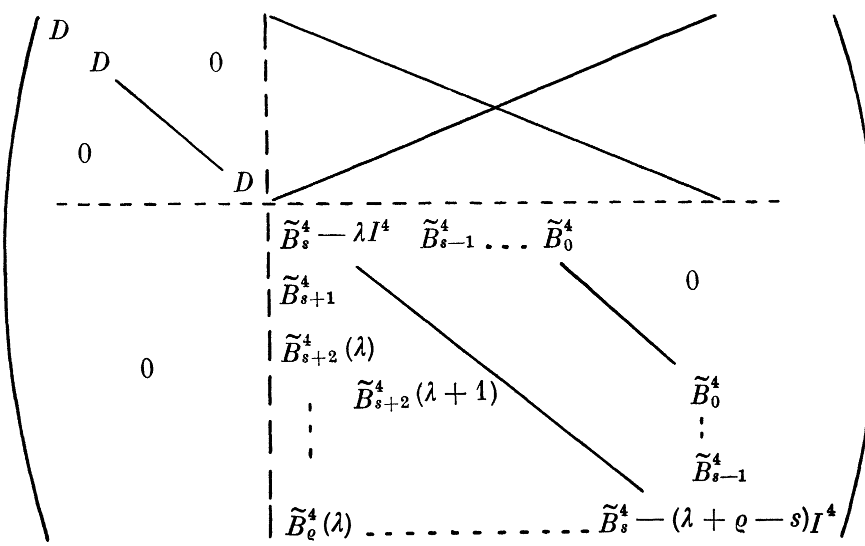
Für $\omega_0 < n$ berechnen wir die Determinante von $U_\varrho(\lambda)$ in mehreren Transformationsschritten:

a) Da D konstante, invertierbare Matrix ist, können wir, ohne den Wert der Determinante zu ändern, durch Zeilenoperationen in $U_\varrho(\lambda)$ sämtliche B^3_ν und für $\nu \neq 0, s$ die B^1_ν sowie alle $B^1_s - (\lambda + \mu) I^1$ $(\mu = 0, \ldots, \varrho - s)$ annullieren. Oben beginnend, hat man dazu jede mit D endende Blockzeile, mit einer geeigneten Matrix von links multipliziert, von jeder folgenden Blockzeile zu subtrahieren. Die benötigten Faktoren sind die Matrizen $B^3_\nu D^{-1}$, $B^1_\nu D^{-1}$ $(\nu \neq 0, s)$ bzw. $\left(B^1_s - (\lambda + \mu) I^1\right) D^{-1}$. Im letzten Fall wird durch die links von einem D stehenden, evtl. schon abgeänderten, aber konstanten $B^2_\varkappa$ (konstant sicher für $\varkappa = 1, \ldots, s$) die links neben $B^1_s - (\lambda + \mu) I^1$ stehenden B^2_ν — also $\nu = s + 1, \ldots, 2s$ — in Matrizenpolynome (höchstens) 1. Grades abgeändert, die bei weiteren Transformationsschritten ihrerseits bewirken, daß auch die Matrizen

$$B^4_\nu \text{ für } \nu = s + 2, \ldots, 2s + 1$$

Matrizenpolynome (höchstens) 1. Grades werden, die B^2_ν für $\nu = 2s + 1, \ldots, 3s$ solche (höchstens) vom Grad 2, daher die B^4_ν für $\nu = 2s + 2, \ldots 3, s + 1$ vom Grad 2, usf.

b) Der nächste Schritt besteht in einer Permutation der Zeilen und Spalten mit dem Effekt, daß die Matrizen D im Anfang der Hauptdiagonale hintereinanderstehen. Die so transformierte Matrix hat die Gestalt



Rechts oben stehen die zu Polynommatrizen abgeänderten B^2_ν, die den Wert der Determinante nicht beeinflussen. Bezeichnet man die im rechten unteren Teil stehende

$$(\varrho - s + 1) \cdot \omega_0\text{-zeilige Matrix als } \tilde{U}_\varrho(\lambda),$$

so gilt

$$\det U_\varrho(\lambda) = \pm (\det D)^{\varrho+1} \cdot \det \tilde{U}_\varrho(\lambda).$$

Es bleibt also $\det \tilde{U}_\varrho(\lambda)$ zu berechnen.

c) Dazu bemerken wir:

$$\widetilde{B}_0^4 = N,\ \widetilde{B}_1^4, \ldots, \widetilde{B}_{s+1}^4 \text{ sind konstante Matrizen,}$$

die B_ν^4 für $\nu \geqq s + 2$ aus der 2. Blockspalte von $U_\varrho(\lambda)$ sind in Matrizenpolynome $\widetilde{B}_\nu^4(\lambda)$ übergegangen, und zwar ist für $k \in \mathbb{N}_0$, $j = 0, \ldots, s - 1$,

$$\widetilde{B}_{ks+j+2}^4(\lambda) \text{ Polynommatrix höchstens vom Grad } k.$$

Aus Symmetriegründen sind die unterhalb $B_s^4 - (\lambda + \mu) I^4$ stehenden B_ν^4 in $\widetilde{B}_\nu^4(\lambda + \mu)$ übergegangen.

Der Anteil $\lambda \cdot I$ in der Hauptdiagonale von $\widetilde{U}_\varrho(\lambda)$ erlaubt es, durch Zeilenumformungen die von λ abhängigen Anteile in den Matrizen $\widetilde{B}_\nu^4(\lambda + \mu)$ wieder zum Verschwinden zu bringen, womit $\widetilde{U}_\varrho(\lambda)$ auf die Gestalt $\widetilde{\widetilde{U}}_\varrho - \lambda \cdot I$ transformiert wird, mit konstantem $\widetilde{\widetilde{U}}_\varrho$. Damit ist die Determinante von $\widetilde{U}_\varrho(\lambda)$ als charakteristisches Polynom einer Matrix ein Polynom vom genauen Grad $\omega_0 \cdot (\varrho - s + 1)$, womit unser Hilfssatz gezeigt ist.

I. $d \leqq s \cdot \omega_0$ folgt aus der Tatsache, daß det $U_\varrho(\lambda)$ für alle $\varrho \geqq 2s$ nicht das Nullpolynom ist, folglich rg $A_\varrho \geqq (\varrho + 1) \cdot n - s \cdot \omega_0$, und daher $d_\varrho \leqq s \cdot \omega_0$.

II. Falls $d = \omega_0 \cdot s$, ist $\chi_{\nu-1}(\lambda)$ für $\nu \geqq 1$ der g. g. T. der $\langle (q + 1 + \nu) \cdot n - \omega_0 \cdot s \rangle$-zeiligen Unterdeterminanten von $A_{q+\nu}(\lambda)$; Nullpolynome werden natürlich nicht berücksichtigt.

a) Für jedes ν mit $q + \nu \geqq 2s$ ist nach Hilfssatz 1. 40

$$\Delta_\nu(\lambda) := \det U_{q+\nu}(\lambda)$$

eine der zur Auswahl stehenden Unterdeterminanten, und zwar Polynom vom Grad

$$\omega_0 \cdot \nu + \omega_0 \cdot (q - s + 1).$$

b) Die Zahl der nicht identisch verschwindenden Unterdeterminanten von $A_{q+\nu}(\lambda)$ ist durch eine von ν unabhängige Zahl t^2 beschränkt, mit

$$t = \text{Anzahl der Möglichkeiten, } \omega_0 \cdot s \text{ Zeilen in } A_q(\lambda) \text{ zu streichen.}$$

$A_{q+\nu}(\lambda)$ enthält nämlich als Teilmatrizen

$$\big(A_q(\lambda) \mid 0\big) \text{ in den ersten Zeilen}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A_q(\lambda + \nu) \end{pmatrix} \text{ in den letzten Spalten.}$$

Da schon $d_q = \omega_0 \cdot s$, wird eine Unterdeterminante sicher das Nullpolynom, wenn nicht alle $\omega_0 \cdot s$ Zeilen in der erstgenannten Teilmatrix, alle $\omega_0 \cdot s$ Spalten in der zweiten Teilmatrix gestrichen werden.

c) Die Auswahl der in $A_q(\lambda)$ zu streichenden $\omega_0 \cdot s$ Zeilen bzw. Spalten sei durch die Indizes τ und σ charakterisiert ($\tau, \sigma = 1, \ldots, t$), die zugehörige Unterdeterminante von $A_{q+\nu}(\lambda)$ sei

$$\Delta_\nu^{\sigma,\tau}(\lambda), \text{ wobei } \Delta_\nu^{1,1}(\lambda) = \Delta_\nu(\lambda).$$

d) Da die Zeilen und Spalten von $U_\nu(\lambda)$ bezüglich des Körpers $\mathbb{C}(\lambda)$ linear unabhängig sind, existieren (von ν unabhängig) rationale Funktionen

$$r_\tau(\lambda),\ s_\sigma(\lambda) \qquad (\tau, \sigma = 1, \ldots, t),$$

so daß stets

$$\Delta_\nu^{\sigma,\tau}(\lambda) = r_\tau(\lambda) s_\sigma(\lambda + \nu) \cdot \Delta_\nu(\lambda) \qquad (r_1 = s_1 = 1).$$

Da alle Unterdeterminanten Polynome sind, teilen die Nenner der r_τ und s_σ (in reduzierter Darstellung) sämtlich $\Delta_\nu(\lambda)$.

e) Mit $R(\lambda)$ = Hauptnenner aller $r_\tau(\lambda)$, $S(\lambda)$ = Hauptnenner aller $s_\sigma(\lambda)$ folgt

$$\chi_{\nu-1}(\lambda) = \frac{1}{\text{k. g. V.}\,(R(\lambda), S(\lambda+\nu))} \cdot \Delta_\nu(\lambda)$$

und für ν genügend groß

$$\chi_{\nu-1}(\lambda) = \frac{1}{R(\lambda) \cdot S(\lambda + \nu)} \cdot \Delta_\nu(\lambda).$$

Demnach ist für alle ν ab einer gewissen Nummer

$$\text{Grad}\,\chi_\nu - \text{Grad}\,\chi_{\nu-1} = \text{Grad}\,\Delta_{\nu+1} - \text{Grad}\,\Delta_\nu = \omega_0.$$

III. Falls $d = n \cdot s$, folgt aus der in I. bewiesenen Ungleichung

$$d \leqq \omega_0 \cdot s \leqq n \cdot s$$

sofort, daß

$$d = \omega_0 \cdot s = n \cdot s,$$

also nach II.

$$r_{\max} = \omega_0 = n.$$

Im folgenden sei also $d < n \cdot s$ vorausgesetzt. Es bezeichne

a den maximalen Grad aller $\langle (q+2) \cdot n - d \rangle$-zeiligen Unterdeterminanten von $A_{q+1}(\lambda)$. Wir zeigen, daß für jedes $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(∗) | *Jede* $\langle (q + 2 + \nu \cdot s) \cdot n - d \rangle$*-zeilige Unterdeterminante von* $A_{q+1+\nu s}(\lambda)$ *ist Polynom höchstens vom* Grad $a + \nu \cdot d$.

Die Aussage für $\nu = 0$ liegt in der Definition von a, den Induktionsschritt von $\nu - 1$ auf ν ($\nu \geqq 1$) führen wir mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz. Eine nichtverschwindende $\langle (q + 2 + \nu \cdot s) \cdot n - d \rangle$-zeilige Unterdeterminante von $A_{q+1+\nu s}(\lambda)$ hat die Form

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \hat{A}_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda) & 0 \\ X\ X\ X\ X\ X & \underbrace{\overset{\frown}{A}_{s-1}}_{r \geqq ns - d \text{ Spalten.}} \end{vmatrix} \Big\} n \cdot s \text{ Zeilen}$$

Dabei entsteht $\hat{A}_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda)$ aus $A_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda)$ durch Streichen einer gewissen Anzahl ($\leqq d$) von Spalten und genau d Zeilen, da sonst die Determinante Null wäre (vgl. II. b) !). Die von λ unabhängige Matrix $\overset{\frown}{A}_{s-1}$ enthält also $n \cdot s$ Zeilen und $r \geqq ns - d$ Spalten (von $A_{s-1}(\lambda)$). Wir entwickeln Δ nach den $n \cdot s$-zeiligen Unterdeterminanten der letzten $n \cdot s$ Zeilen. Da über $\overset{\frown}{A}_{s-1}$ Nullen stehen, genügen die Unterdeterminanten, die alle Spalten von $\overset{\frown}{A}_{s-1}$ und damit mindestens r konstante Spalten enthalten; deren Grad ist höchstens

$$n \cdot s - r \leqq d,$$

und die Kofaktoren als Unterdeterminanten von $A_{q+1+(\nu-1)s}(\lambda)$ haben nach Induktionsannahme einen Grad von höchstens

$$a + (\nu - 1) \cdot d,$$

woraus ($\ast$) folgt. Es ergibt sich für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Grad}\ \chi_{\nu s} \leqq a + \nu \cdot d,$$

und für genügend große μ daher

$$s \cdot r_{\max} = \text{Grad}\ \chi_{(\mu+1)s} - \text{Grad}\ \chi_{\mu \cdot s} \leqq d.$$

Literatur

[1] *W. A. Harris, Y. Sibuya* and *L. Weinberg*, Holomorphic Solutions of Lin. Diff. Systems at Singular Points, Archive for rat. Mech. and Anal. **35** (1969).

[2] *E. Hilb*, Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten, Mathem. Annalen **82** (1923).

[3] *H. v. Koch*, Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires, Acta Mathematica **16** (1892).

[4] *F. Lettenmeyer*, Über die an einer Unbestimmtheitsstelle regulären Lösungen eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen, Sitzungsberichte Bayr. Akademie der Wiss., München 1926.

[5] *D. A. Lutz*, On Systems of Linear Diff. Equations Having Regular-Singular Solutions, Journal of Diff. Equations **3** (1967).

[6] *D. A. Lutz*, Some Characterisations of Systems of Lin. Diff. Equations Having Regular-Singular Solutions, Transactions AMS **126** (1967).

[7] *O. Perron*, Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten, Mathem. Annalen **70** (1911).

[8] *L. W. Thomé*, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, J. reine angew. Math. **74** (1872), 193—217; **75** (1873), 265—291; **76** (1873), 273—302.

[9] *F. R. Gantmacher*, Matrizenrechnung I, Berlin 1958, 120ff.

[10] *E. A. Coddington-N. Levinson*, Theory of Ordinary Diff. Equations, New York 1955.

Fachbereich Mathematik der Universität Regensburg, 84 Regensburg, Postfach

Eingegangen 21. April 1972