Demuškin-Erzeugende einer elementar-abelschen p-Erweiterung

Von Uwe Jannsen und Kay Wingberg

Sei k ein irregulärer $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper vom Grad n über $\mathbb{Q}_p$ mit Irregularitätsexponenten s, $q = p^s$ und $k(p)$ der p-Abschluß von k mit Galoisgruppe $D = \mathrm{Gal}\,(k(p)/k)$. Dann ist D eine pro-p-Gruppe mit $n + 2$ Erzeugenden und einer definierenden Relation, der Demuškin-Relation. Es gibt also eine minimale Darstellung von D durch eine freie pro-p-Gruppe F und einen abgeschlossenen Normalteiler r von F, der von einem Element $w \in F$ erzeugt wird:

$$1 \to r \to F \xrightarrow{\pi} D \to 1 .$$

Nach Demuškin gibt es für $q \neq 2$ eine Basis $x_1, \ldots, x_{n+2}$ von F, so daß mit $[a, b] = a \cdot b \cdot a^{-1} \cdot b^{-1}$ gilt

$$w = x_1^q \cdot [x_1, x_2] \cdot \cdots \cdot [x_{n+1}, x_{n+2}] .$$

Für $q = 2$ ergeben sich drei weitere Fälle (siehe Labute [4]). Durch die Angabe der Erzeugenden und der Relation ist die Gruppe D algebraisch vollständig bestimmt.

Ist nun K/k eine endliche galoissche p-Erweiterung mit Galoisgruppe G, so ist es wünschenswert, auch eine algebraische Kenntnis der galoistheoretischen Surjektion

$$\varphi : D \twoheadrightarrow G$$

zu besitzen. Kennt man nämlich die Bilder der $\pi(x_i)$ in G (die Demuškin-Erzeugenden von G), so reduziert sich z. B. jedes Einbettungsproblem für K/k mit beliebigem Kern auf ein rein gruppentheoretisches Wortproblem. Weiter läßt sich dann die Struktur der multiplikativen Gruppe K^* bzw. der p-Vervollständigung $A(K)$ von K^* als G-Modul angeben, siehe [2].

In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß für eine elementar-abelsche Erweiterung K/k eine Basis $x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}$ von F existiert, die der Relativsituation angepaßt ist: φ bildet $\pi(z_1), \ldots, \pi(z_{n+2-d})$ auf die Eins in G ab und die Bilder von $\pi(x_1), \ldots, \pi(x_d)$ erzeugen G minimal; dabei behält das Demuškinwort w im wesentlichen noch die oben angegebene Form. Daraus erhalten wir eine explizite Beschreibung der G-Modulstruktur von $A(K)$ durch $\mathbb{Z}_p[G]$-Erzeugende und Relationen. Weiter werden wir am Schluß die Wirksamkeit dieser Methode zur Lösung von Einbettungsproblemen an einigen Beispielen demonstrieren.

Für eine pro-p-Gruppe X setzen wir im folgenden zur Abkürzung $H^n(X) = H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ und bezeichnen mit

$$d(X) = \dim X/X^* = \dim H^1(X)$$

die minimale Erzeugendenanzahl von X, wobei $X^* = X^p[X, X]$ die Frattinigruppe von X und die Dimension über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gemeint ist.

Das Cupprodukt

$$\cup : H^1(D) \times H^1(D) \to H^2(D) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

bildet eine nicht-ausgeartete, antisymmetrische Bilinearform auf $H^1(D)$. Sei t die Dimension des Radikals des Teilraums $H^1(G)$ von $H^1(D)$ oder äquivalent dazu, die Dimension des Radikals des Teilraums $K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ von k^*/k^{*p} bezüglich der nicht-ausgearteten, antisymmetrischen Bilinearform, die durch das Hilbertsymbol

$$(\, , \,) : k^*/k^{*p} \times k^*/k^{*p} \to \mu_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

gegeben ist, wobei μ_p die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln von k bezeichnet. Es gilt $0 \leqq t \leqq d = d(G)$. Wir beachten noch, daß obige Bilinearform für $q \neq 2$ alternierend ist. Bezeichnen wir mit μ_K bzw. μ_k die Gruppe der Einheitswurzeln von p-Potenzordnung in K bzw. k, so gilt der

Satz 1: *Sei K/k eine elementar-abelsche p-Erweiterung mit Irregularitätsexponenten $s + \varkappa$ und $q = p^s \neq 2$. Dann gibt es eine Basis $x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}$ von F, so daß*

$$w = w_1^q \cdot w_2$$

ist mit

$$w_2 = [x_1, z_1] \cdot \ldots \cdot [x_t, z_t] \cdot [x_{t+1}, x_{t+2}] \cdot \ldots \cdot [x_{d-1}, x_d] \cdot [z_{t+1}, z_{t+2}] \cdot \ldots \cdot [z_{n+1-d}, z_{n+2-d}],$$

$$w_1 = \begin{cases} z_1 & \mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*), & \varkappa = 1, & (1) \\ z_{t+1}, & \mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*), & \varkappa = 0, & (2) \\ x_{t+1} \cdot z_{t+1}, & \mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*), \ \mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)\, K^{*p}, & \varkappa = 0, & (3) \\ x_{t+1}, & \mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*), & \varkappa = 1, & (4) \\ x_1, & \mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*), \ \mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*)\, K^{*p}, & \varkappa = 0, & (5) \end{cases}$$

und

1. $\psi(z_i) = 1, \qquad i = 1, \ldots, n + 2 - d,$
2. $\langle \psi(x_i), i = 1, \ldots, d \rangle = G$

mit $\psi = \varphi \circ \pi$.

Bemerkung:

Die geometrischen Eigenschaften der Kummergruppe haben nicht nur Einfluß auf die Fallunterscheidungen, sondern spiegeln sich auch direkt in dem Aussehen des Demuškinwortes wider.

Beweis: Sei $v \in F \setminus F^*$ mit der Eigenschaft

$$w \equiv v^q \bmod [F, F],$$

dann gilt, da die Torsionsgruppe von D^{ab} das Bild von μ_k unter dem Reziprozitätshomomorphismus ω_k ist,

$$\omega_k(\zeta) \equiv \pi(v) \bmod [D, D] \quad \text{bzw.} \quad \omega_{K/k}(\zeta) = \psi(v),$$

für eine primitive q-te Einheitswurzel $\zeta \in \mu_k$. Sei

$$T = \{\chi \in H^1(D) : \chi(\pi(v)) = 0\},$$

so gilt $\dim T = n + 1$ und $\operatorname{rad} T = T^\perp = \langle \tau \rangle$ mit $\tau \in H^1(D)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*) \Leftrightarrow \varphi \circ \pi(v) = 1 \Leftrightarrow \chi(\pi(v)) \\ = 0 \;\forall\, \chi \in H^1(G) \subseteqq H^1(D) \Leftrightarrow H^1(G) \subseteqq T. \end{aligned}$$

Für das folgende siehe etwa [1], IX. § 4.2.
Fall 1: $H^1(G) \subseteqq T$

1.1: $\tau \in H^1(G)$,

dann ist sogar $\tau \in H^1(G) \cap T^\perp \subseteqq H^1(G) \cap H^1(G)^\perp = \operatorname{rad} H^1(G)$. Mit $\mathfrak{x}_1 := \tau$ erhalten wir folgende Witt-Zerlegung von $H^1(D)$: es existiert eine Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_d, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{n+2-d}$ von $H^1(D)$ mit

$$\begin{aligned} &\langle \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_t \rangle = \operatorname{rad} H^1(G), \\ &\langle \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_d \rangle = H^1(G), \\ (+) \qquad &\mathfrak{x}_1 \cup \mathfrak{z}_1 = \cdots = \mathfrak{x}_t \cup \mathfrak{z}_t = 1, \\ &\mathfrak{x}_{t+1} \cup \mathfrak{x}_{t+2} = \cdots = \mathfrak{x}_{d-1} \cup \mathfrak{x}_d = 1, \\ &\mathfrak{z}_{t+1} \cup \mathfrak{z}_{t+2} = \cdots = \mathfrak{z}_{n+1-d} \cup \mathfrak{z}_{n+2-d} = 1, \\ &\text{und sonst null.} \end{aligned}$$

Ferner ist $\mathfrak{z}_1 \notin T$, da sonst $\mathfrak{x}_1$ nicht aus $\operatorname{rad} T$ wäre; also gilt ohne Einschränkung $\mathfrak{z}_1(\pi(v)) = 1$. Weiter folgt, daß alle übrigen Basisvektoren aus $(T^\perp)^\perp = T$ sind. Für die Dualbasis $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{n+2-d}$ von F/F^* ist für beliebige Liftungen die Eigenschaft 1. des Satzes erfüllt, denn nach Definition einer Dualbasis gilt

$$\mathfrak{x}_i(\psi(z_j)) = 0, \qquad i = 1, \ldots, d, \quad j = 1, \ldots, n + 2 - d,$$

wenn man die $\mathfrak{x}_i$ vermöge φ als Elemente von $H^1(G)$ auffaßt. Da die $\mathfrak{x}_i$ den Teilraum $H^1(G)$ erzeugen, folgt $\psi(z_j) = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n + 2 - d$. Die Eigenschaft 2. folgt trivialerweise aus 1., da ψ surjektiv ist.

Nach einem Satz von Serre, der das Cupprodukt und die Relationenstruktur einer pro-p-Gruppe verknüpft (siehe [4], Prop. 3), gilt die Kongruenz

$$w \equiv \prod_{i=1}^{d} x_i^{\bar{a}_i \cdot p} \cdot \prod_{i=1}^{n+2-d} z_i^{\bar{b}_i \cdot p} \cdot w_2 \bmod F^{p^s} \cdot [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big],$$

$$0 \leqq \bar{a}_i, \bar{b}_i \leqq p - 1,$$

also wegen $w \equiv v^q \equiv \Pi x_i^{a_i \cdot q} \cdot \Pi z_i^{b_i \cdot q} \bmod F^{p^{s+1}} \cdot [F, F]$ mit eindeutig bestimmten $a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$

$$w \equiv \prod_{i=1}^{d} x_i^{a_i \cdot q} \cdot \prod_{i=1}^{n+2-d} z_i^{b_i \cdot q} \cdot w_2 \bmod F^{p^{s+1}} \cdot [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big].$$

Nach Konstruktion gilt aber wegen $v = \Pi x_i^{a_i} \cdot \Pi z_i^{b_i} \bmod [F, F]$

$$0 = \mathfrak{x}_i\big(\pi(v)\big) = a_i \bmod p, \qquad i = 1, \ldots, d,$$

$$0 = \mathfrak{z}_i\big(\pi(v)\big) = b_i \bmod p, \qquad i = 2, \ldots, n + 2 - d,$$

$$1 = \mathfrak{z}_1\big(\pi(v)\big) = b_1 \bmod p,$$

also erhalten wir

$$w \equiv z_1^q \cdot w_2 \bmod F^{p^{s+1}} \cdot [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big].$$

1.2: $\tau \notin H^1(G)$.

Mit $\mathfrak{z}_{t+2} := \tau \in T^\perp \subseteqq H^1(G)^\perp$ ist auch der Teilraum $\operatorname{rad} H^1(G) \oplus \mathfrak{z}_{t+2}$ isotrop in $H^1(D)$. Wie im Fall 1.1 gibt es wieder eine Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_d, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{n+2-d}$ von $H^1(D)$ mit den Eigenschaften $(+)$. Ferner ist $\mathfrak{z}_{t+1} \notin T$, so daß wir ohne Einschränkung annehmen können, daß $\mathfrak{z}_{t+1}\big(\pi(v)\big) = 1$ ist; alle übrigen Basisvektoren sind aus T. Wir erhalten also eine Basis $x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}$ von F mit den gewünschten Eigenschaften 1. und 2. sowie

$$w \equiv z_{t+1}^q \cdot w_2 \bmod F^{p^{s+1}} \cdot [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big].$$

Fall 2: $\quad H^1(G) \nsubseteq T$.

2.1: $\operatorname{rad} H^1(G) \subseteqq T$,

dann gibt es ein $\mathfrak{x}_{t+1} \in H^1(G) \setminus T$ mit $\mathfrak{x}_{t+1}\big(\pi(v)\big) = 1$, sowie $\mathfrak{x}_{t+1} \cup \tau \neq 0$, da sonst der Charakter $\mathfrak{x}_{t+1}$ aus $(T^\perp)^\perp = T$ wäre. Sei ohne Einschränkung $\mathfrak{x}_{t+1} \cup \tau = 1$.

Ergänzen wir $\mathfrak{x}_{t+1}$ zu einer Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_d, \mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{n+2-d}$ von $H^1(D)$ mit den Eigenschaften $(+)$, so gilt

$$\tau = \mathfrak{x}_{t+2} + \sum_{i \neq t+2} a_i \cdot \mathfrak{x}_i + \sum_{i \geqq t+1} b_i \cdot \mathfrak{z}_i, \qquad 0 \leqq a_i, b_i \leqq p - 1,$$

da $\mathfrak{x}_{t+1} \cup \tau = 1$ und wegen $\tau \in T^\perp \subseteqq \big(\operatorname{rad} H^1(G)\big)^\perp$ die Orthogonalität $\mathfrak{x}_i \cup \tau = 0$ für $i = 1, \ldots, t$ gilt. Durch einen Basiswechsel, ohne $\mathfrak{x}_{t+1}$ abzuändern, ist zu erreichen, daß weiterhin $(+)$ gilt und

$$\tau = \mathfrak{x}_{t+2} + b \cdot \mathfrak{z}_{t+2}, \qquad b \in \{0, 1\},$$

ist. So ergibt sich

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{z}_i \in T, \quad i \neq t+1, \quad \text{sowie} \quad (\mathfrak{z}_{t+1} - b \cdot \mathfrak{x}_{t+1}) \in T,$$

da $(\mathfrak{z}_{t+1} - b \cdot \mathfrak{x}_{t+1})$ orthogonal zu τ ist; also gilt

$$\mathfrak{z}_{t+1}\big(\pi(v)\big) = b.$$

Wir erhalten also eine Basis $x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}$ von F mit den Eigenschaften 1. und 2. sowie

$$w \equiv (x_{t+1} \cdot z_{t+1}^b)^q \cdot w_2 \bmod F^{p^{s+1}} \cdot [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big].$$

2.2: $\operatorname{rad} H^1(G) \nsubseteq T$,

dann gibt es ein $\mathfrak{x}_1 \in \operatorname{rad} H^1(G) \setminus T$ mit $\mathfrak{x}_1\big(\pi(v)\big) = 1$ sowie $\mathfrak{x}_1 \cup \tau = 1$. Setzen wir $\mathfrak{z}_1 := \tau$ und ergänzen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{z}_1$ zu einer Basis von $H^1(D)$ mit den Eigenschaften $(+)$, so sind alle Basisvektoren bis auf $\mathfrak{x}_1$ aus T. Wir erhalten also wieder eine Basis $x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}$ von F mit den Eigenschaften 1. und 2. sowie

$$w \equiv x_1^q \cdot w_2 \bmod F^{p^{s+1}} \cdot [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big].$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß obige Kongruenzen in Gleichheit überführt werden können. Es ist

$$w \equiv (w_1 \cdot y)^q \cdot w_2 \bmod [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big]$$

mit $y \in F^p$. Setzen wir $w_1' = w_1 \cdot y$, so ist

$$w \equiv w_1'^q \cdot \begin{cases} [x_1, z_1'] \cdot [x_1, y^{-1}] \cdot \cdots & 1.1, \\ \cdots \cdot [z_{t+1}', z_{t+2}] \cdot [y^{-1}, z_{t+2}] \cdot \cdots & 1.2,\ 2.1 \quad b = 1, \\ \cdots \cdot [x_{t+1}', x_{t+2}] \cdot [y^{-1}, x_{t+2}] \cdot \cdots & 2.1 \quad b = 0, \\ [x_1', z_1] \cdot [y^{-1}, z_1] \cdot \cdots & 2.2, \end{cases}$$
$$\bmod [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big]$$

und wenn wir w_1' wieder mit w_1 bezeichnen, so gilt wegen $[y, *] \in [F, F]^p \big[[F, F], F\big]$

$$w \equiv w_1^q \cdot w_2 \bmod [F, F]^p \cdot \big[[F, F], F\big].$$

Daraus folgt

$$w \equiv w_1^q \cdot w_2 \cdot u \bmod [F, F]^q \cdot \big[[F, F], F\big]$$

mit

$$u = \Pi [u_i, u_j]^{a_{i,j} \cdot p}, \quad u_i, u_j \in \{x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}\}, \quad 0 \leqq a_{i,j} \leqq q-1.$$

Da aber

$$[u_i, u_j]^{a_{i,j} p} \equiv [u_i^{a_{i,j} \cdot p}, u_j] \equiv [u_i, u_j^{a_{i,j} \cdot p}] \bmod \big[[F, F], F\big]$$

gilt, erhalten wir außer im Fall 2.1 $b = 1$ durch einen Basiswechsel

$$w \equiv w_1^q \cdot w_2 \bmod [F, F]^q \cdot \big[[F, F], F\big]. \tag{$*$}$$

Im Fall 2.1 $b = 1$ erscheinen die Kommutatoren $[z_{t+2}, x_{t+2}]^{a\cdot p}$ problematisch. Durch geeignete Basiswechsel erhalten wir aber

$$\begin{aligned} w &\equiv (x_{t+1} \cdot z_{t+1})^q \cdot w_2 \cdot [z_{t+2}, x_{t+2}]^{a\cdot p} \\ &\equiv (x_{t+1} \cdot z_{t+1})^q \cdot \cdots \cdot [x_{t+1} \cdot z_{t+2}^{a\cdot p}, x_{t+2}] \cdot \cdots \\ &\equiv (x'_{t+1} \cdot z_{t+2}^{-a\cdot p} \cdot z_{t+1})^q \cdot \cdots \cdot [x'_{t+1}, x_{t+2}] \cdot \cdots \\ &\equiv (x'_{t+1} \cdot z'_{t+1})^q \cdot \cdots \cdot [x'_{t+1}, x_{t+2}] \cdot \ldots \cdot [z_{t+2}^{a\cdot p} \cdot z'_{t+1}, z_{t+2}] \cdot \cdots \\ &\equiv (x'_{t+1} \cdot z'_{t+1})^q \cdot \cdots \cdot [x'_{t+1}, x_{t+2}] \cdot \cdots \cdot [z'_{t+1}, z_{t+2}] \cdot \cdots \\ &\quad \bmod [F, F]^q \cdot \big[[F, F], F\big] \end{aligned}$$

mit $x'_{t+1} = x_{t+1} \cdot z_{t+2}^{a\cdot p}$ und $z'_{t+1} = z_{t+2}^{-a\cdot p} \cdot z_{t+1}$; also gelangen wir auch in diesem Fall zu der Kongruenz (*). Nach dem bekannten Verfahren von Demuškin (siehe etwa [4]) läßt sich ein Basiswechsel vornehmen, der ohne w_1 abzuändern die Kongruenzen (*) in Gleichungen überführt (man benötigt dafür sogar nur Kongruenzen modulo $F^{(3,q)} = F^{q^2}[F, F]^q \cdot \big[[F, F], F\big]$). Da bei allen Basiswechseln die Basisvektoren um Elemente aus F^* abgeändert werden, bleiben die Eigenschaften 1. und 2. erhalten.

Wir haben noch zu klären, unter welchen Bedingungen die verschiedenen Fälle auftreten. Die Unterscheidung in Fall 1 und 2 durch $\mu_k \subseteq N_{K/k}(K^*)$ bzw. $\mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*)$ wurde bereits gezeigt. Ferner liefert die aus der exakten Sequenz

$$1 \to \mu_p \to k(p)^* \xrightarrow{p} k(p)^* \to 1$$

gewonnene exakte Kohomologie-Sequenz die Isomorphie

$$k^*/k^{*p} \xrightarrow{\delta} H^1(D).$$

Es gilt nun das

Lemma 1: *$\delta(\overline{\mu_k}) = T^\perp$, wenn $\overline{\mu_k}$ die Gruppe $\mu_k k^{*p}/k^{*p}$ bezeichnet.*

Beweis: Es gilt mit der Invariantenabbildung Inv_k von k für $a \in k^*$ und $\chi \in H^1(D)$

$$Inv_k\big(\chi \cup \delta(\bar{a})\big) = \chi\big(\omega_k(a)\big).$$

Daraus folgt wegen $\pi(v) \equiv \omega_k(\zeta) \bmod [D, D]$

$$Inv_k\big(\chi \cap \delta(\bar{\zeta})\big) = 0 \quad \text{für alle} \quad \chi \in T.$$

Da die Invariantenabbildung ein Isomorphismus ist, gilt

$$\delta(\bar{\zeta}) \in T^\perp,$$

woraus wegen $\dim T^\perp = 1$ die Behauptung folgt.

Mit dem Lemma 1 erhalten wir

$$\tau \in H^1(G) \Leftrightarrow \bar{\zeta} \in K^{*p} \cap k^*/k^{*p} \Leftrightarrow \bar{\zeta} \in K^{*p} \Leftrightarrow \varkappa = 1,$$

also ist $\varkappa = 1$ genau in den Fällen 1.1 und 2.1 $b = 0$. Weiter gilt wegen $N_{K/k}(K^*)/k^{*p} = (K^{*p} \cap k^*/k^{*p})^\perp$ (siehe [2], Lemma 3.1)

$$\begin{aligned} \mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)\, K^{*p} &\Leftrightarrow \zeta \in N_{K/k}(K^*)/k^{*p} \cdot K^{*p} \cap k^*/k^{*p} \\ &\Leftrightarrow \tau \in H^1(G)^\perp + H^1(G) \\ &\Leftrightarrow T^\perp \subseteqq \left(\operatorname{rad} H^1(G)\right)^\perp \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rad} H^1(G) \subseteqq T; \end{aligned}$$

also ist im Fall 2.1 $b = 1$ die Gruppe μ_k in $N_{K/k}(K^*)\, K^{*p}$ enthalten, im Fall 2.2 dagegen nicht.

Zusatz: Hat man für eine vorgegebene Körpererweiterung K/k eine Basis $a_1 k^{*p}, \ldots, a_d k^{*p}$ der Kummergruppe gefunden, derart daß

$$(a_{t+1}, a_{t+2})_k = \cdots = (a_{d-1}, a_d)_k = \zeta_p,$$

$$(a_i, a_j)_k = 1 \quad \text{für alle anderen} \quad i < j$$

gilt, wobei $(\ ,\ )_k$ das Hilbertsymbol und ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel aus k bezeichnet, und ferner in den Fällen (4) und (5) ζk^{*p} und im Fall (3) das Element $ak^{*p} \in K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ aus der Darstellung $\zeta = a \cdot b$, $b \in N_{K/k}(K^*)$ ein Basiselement ist, so zeigt der Beweis von Satz 1, daß die Basiselemente $x_1, \ldots, x_d$ von F so gewählt werden können, daß sie auf die Erzeugenden σ_i der Gruppen $\operatorname{Gal}\left(k\left(\sqrt[p]{a_i}\right)/k\right)$ mit $\sigma_i\left(\sqrt[p]{a_j}\right) = \zeta_p^{\delta_{ij}} \sqrt[p]{a_j}$ abgebildet werden.

Corollar: *Sei $q \neq 2$ und $G = \langle\sigma_1\rangle \times \cdots \times \langle\sigma_d\rangle$ mit den σ_i wie im obigen Zusatz, dann läßt sich die p-Vervollständigung $A(K) = \varprojlim K^*/K^{*p^n}$ von K^* folgendermaßen als $\mathbb{Z}_p[G]$-Modul durch Erzeugende und definierende Relationen beschreiben.*

Seien

$$\begin{array}{ll} u_{i,j} & 1 \leqq i, j \leqq d, \\ v_i & 1 \leqq i \leqq d, \\ w_i & 1 \leqq i \leqq n + 2 - d \end{array}$$

Erzeugende eines freien $\mathbb{Z}_p[G]$-Moduls M vom Rang $n + 2 + d^2$, dann ist $A(K)$ isomorph zu M/N, wenn der Untermodul N von M erzeugt wird von

$$\text{I.} \quad \begin{cases} u_{i,i} \\ u_{i,j} + u_{j,i} \\ (\sigma_k - 1) \cdot u_{i,j} + (\sigma_j - 1) \cdot u_{k,i} + (\sigma_i - 1) \cdot u_{j,k} \quad 1 \leqq i, j, k \leqq d \\ (\sigma_i - 1) \cdot v_j - \left(\sum_{\nu=0}^{p-1} \sigma_j^\nu\right) \cdot u_{i,j} \end{cases}$$

II. $$u = \sum_{i=1}^{t} (\sigma_i - 1) \cdot w_i + \sum_{i=t+1,t+3,\ldots,d-1} u_{i,i+1} \quad \text{mit}$$

$$u = \begin{cases} q \cdot w_1, & (1) \\ q \cdot w_{t+1}, & (2) \\ p^{s-1} \cdot v_{t+1} + p^{s-1} \left(\sum_{\nu=0}^{p-1} \sigma_{t+1}^{\nu} \right) \cdot w_{t+1}, & (3) \\ p^{s-1} \cdot v_{t+1}, & (4) \\ p^{s-1} \cdot v_1, & (5) \end{cases}$$

mit den Fallunterscheidungen (1)—(5) des Satzes.

Beweis: Sei

$$1 \to R_d \to F_d \to G \to 1$$

eine minimale Darstellung der Gruppe G durch eine freie pro-p-Gruppe F_d vom Rang d und einem offenen Normalteiler R_d von F_d. Aus [2], Kap. II erhalten wir mit den dortigen Bezeichnungen die exakte Sequenz

$$\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{d} \mathbb{Z}_p[G] \cdot dx_i \oplus \sum_{i=1}^{n+2-d} \mathbb{Z}_p[G] \cdot dz_i \\ \nearrow^{\varphi} \qquad \uparrow \\ 1 \to \mathbb{Z}_p[G] \cdot \overline{w} \to R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{n+2-d} \to A(K) \to 1 \quad \text{mit} \quad \overline{w} = w[R, R]. \end{array}$$

Der $\mathbb{Z}_p[G]$-Modul R_d^{ab} wird von

$$v_i = \left(\sum_{\nu=0}^{p-1} \sigma_i^{\nu} \right) dx_i, \quad u_{i,j} = (\sigma_i - 1)\, dx_j - (\sigma_j - 1)\, dx_i, \quad 1 \leqq i, j \leqq d,$$

erzeugt mit den definierenden Relationen I. (siehe z. B. Wingberg, J. r. u. angew. Math. 305). Also wird der Modul $A(K)$ von v_i, $u_{i,j}$, $1 \leqq i, j \leqq d$, und $w_i = dz_i$, $1 \leqq i \leqq n + 2 - d$, erzeugt. Zu den Relationen I. kommt nur noch die Relation $\overline{w}$ hinzu; diese ist mit II. identisch, wenn man mit Hilfe des Fox'schen Differentialkalküls $\varphi(\overline{w})$ berechnet und in den $u_{i,j}$, v_i, w_i ausdrückt.

Wir wollen noch in Anlehnung an die Arbeit [2] das Zerlegungsverhalten des $\mathbb{Z}_p[G]$-Moduls $A(K)$ betrachten. Es sei weiterhin $q \neq 2$. und G eine elementar-abelsche p-Gruppe.

Satz 2: *Ist $\mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*)$ oder $t < d$, so gilt die $\mathbb{Z}_p[G]$-Isomorphie*

$$A(K) = \begin{cases} (R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^t)/\mathbb{Z}_p[G] \times \mathbb{Z}_p[G]^h, & \textit{im Fall } (1), (4), (5), \\ (R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{t+1})/\mathbb{Z}_p[G] \times \mathbb{Z}_p[G]^{h-1}, & \textit{im Fall } (2), (3), \end{cases}$$

mit $h = n + 2 - (d + t)$.

Ist hingegen $\mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)$ und $t = d$, dann gilt

$$A(K) = \begin{cases} R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^d/\mathbb{Z}_p[G] \times \mathbb{Z}_p[G]^h, & \varkappa = 1 \quad (\textit{Fall}\ (1)), \\ R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{d+1}/\mathbb{Z}_p[G] \times \mathbb{Z}_p[G]^{h-1}, & \varkappa = 0 \quad (\textit{Fall}\ (2)). \end{cases}$$

Die oben angegebenen Summanden sind dabei jeweils unzerlegbar.

Beweis: Nach [3], Satz 3.5. und 2.2. sind die Bedingungen $\mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)$ und $t = d$ notwendig und hinreichend dafür, daß R_d^{ab} direkter $\mathbb{Z}_p[G]$-Summand von $A(K)$ ist. Das weitere ergibt sich aus [2], Satz 4.4, wenn wir beachten, daß die Aussage $\mu_K \subseteqq N_{K/k}(K^*)\, K^{*p}$ genau in den Fällen (2) und (3) gilt; dies ergibt sich aus dem

Lemma 2: *Sei $q \neq 2$; für den maximalen zyklotomischen Zwischenkörper $\tilde{K}$ einer endlichen galoisschen p-Erweiterung K von k vom Grad $[\tilde{K} : k] = p^\varkappa$ zerfalle die exakte Sequenz*

$$1 \to Gal(K/\tilde{K}) \to G \to Gal(\tilde{K}/k) \to 1.$$

Dann gilt

$$\varkappa \neq 0 \Rightarrow \mu_K \nsubseteq N_{K/k}(K^*)\, K^{*p}.$$

Beweis: Sei U eine Untergruppe von G mit $G = U \cdot Gal(K/\tilde{K})$ und $U \cong Gal(\tilde{K}/k)$. Für den Fixkörper L von U ist K/L eine zyklotomische Erweiterung. Wegen $q \neq 2$ folgt daher

$$\mu_L = N_{K/L}(\mu_K) \subseteqq k^{*p^\varkappa} \cdot L^{*p} \quad \text{für} \quad \mu_K \subseteqq N_{K/k}(K^*)\, K^{*p}.$$

Also ist $\varkappa = 0$, da andernfalls $\mu_L \subseteqq L^{*p}$ folgen würde.

Wir wenden nun Satz 1 zur Lösung von Einbettungsproblemen für die Erweiterung K/k an. Ein solches Problem wird beschrieben durch ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & D & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 1 & \to & A & \to & E & \xrightarrow{j} & G & \to & 1 \end{array}$$

mit einer exakten Zeile bestehend aus den pro-p-Gruppen E und A sowie $G = Gal(K/k)$ und der kanonischen Surjektion von D auf G. Eine (eigentliche) Lösung dieses Einbettungsproblems ist ein (surjektiver) Homomorphismus $\psi\colon D \to E$, der das Diagramm kommutativ ergänzt.

Sei weiterhin $q \neq 2$, dann erhalten wir in Verschärfung der Ergebnisse aus [3]:

Satz 3: *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *Für K/k ist jedes Einbettungsproblem*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & D & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 1 & \to & A & \to & E & \to & G & \to & 1 \end{array}$$

mit beliebiger pro-p-Gruppe A lösbar; gilt $d(E) \leqq \frac{n+2}{2}$, so existieren eigentliche Lösungen.

b) *Es gilt $A(K) \cong R_d^{ab} \times N$ mit einem $\mathbb{Z}_p[G]$-Modul N.*

c) *Es gilt $\mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)$ und $K^{*p} \cap k^* \subseteqq N_{K/k}(K^*)\, k^{*p}$.*

d) *Es gilt $\mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)$ und $H^1(G)$ ist total isotroper Teilraum von $H^1(D)$.*

Beweis: Die Implikation von a) nach b) gilt nach [3], Satz 2.2 und die Aussagen b), c) und d) sind wegen den Sätzen [3], 2.2, 3.5 und 3.4 äquivalent.

Sei nun d) erfüllt und $x_1, \ldots, x_d, z_1, \ldots, z_{n+2-d}$ eine Basis von F mit den Eigenschaften aus Satz 1, d. h. w hat die Form

$$w = z_m^q \cdot [x_1, z_1] \cdot \cdots \cdot [x_d, z_d] \cdot [z_{d+1}, z_{k+2}] \cdot \cdots \cdot [z_{n+1-d}, z_{n+2-d}]$$

$$m = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \varkappa = 1, \\ d+1, & \text{falls} \quad \varkappa = 0. \end{cases}$$

Sei I der von $z_1, \ldots, z_d, z_{d+2}, z_{d+4}, \ldots, z_{n+2-d}$ erzeugte Normalteiler in F; dann ist $F' = F/I$ eine freie pro-p-Gruppe vom Rang $\frac{n+2}{2}$. Wegen $w \in I$ und $\pi(I) \subseteqq \operatorname{Ker} \varphi$ gibt es Surjektionen ϱ und λ, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & r \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, two heads, "\text{kan.}"'] & D \arrow[r] \arrow[dl, "\varrho"] \arrow[d, two heads, "\varphi"] & 1 \\
& & F' \arrow[r, two heads, "\lambda"'] & G &
\end{tikzcd}$$

Sei nun durch die exakte Zeile

$$1 \to A \to E \xrightarrow{j} G \to 1$$

ein beliebiges Einbettungsproblem über K/k für die Gruppe D gegeben, dann erhalten wir wegen der Freiheit von F' eine Liftung $\xi\colon F' \to E$ von j. Die Komposition

$$D \overset{\varrho}{\twoheadrightarrow} F' \xrightarrow{\xi} E$$

ist eine Lösung des Einbettungsproblems. Für $d(E) \leqq \frac{n+2}{2}$ kann ξ surjektiv gewählt werden.

Beispiele:

Wir wollen zunächst fünf Beispiele für die verschiedenen Fälle des Satzes 1 angeben.

Sei $k = \mathbb{Q}_2(i)$ mit einer primitiven 4ten Einheitswurzel i, also $q = 4$ und $n = 2$; ferner sei K eine elementar-abelsche 2-Erweiterung von k mit Galoisgruppe $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, also $d(G) = 2$. Es können folgende fünf Fälle auftreten:

$i \in N_{K/k}(K^*)$	$i \in N_{K/k}(K^*)\,K^{*2}$	$\varkappa$	w	
1	1	1	$z_1^4 \cdot [x_1, z_1] \cdot [x_2, z_2]$	(1)
1	1	0	$z_1^4 \cdot [x_1, x_2] \cdot [z_1, z_2]$	(2)
0	1	0	$(x_1 z_1)^4 \cdot [x_1, x_2] \cdot [z_1, z_2]$	(3)
0	0	1	$x_1^4 \cdot [x_1, x_2] \cdot [z_1, z_2]$	(4)
0	0	0	$x_1^4 \cdot [x_1, z_1] \cdot [x_2, z_2]$	(5)

wobei 1 (bzw. 0) in den ersten beiden Spalten bedeutet, daß die darüberstehende Aussage wahr (bzw. falsch) ist, und x_1, x_2, z_1, z_2 eine Basis von F mit den Eigenschaften 1. und 2. aus Satz 1 ist. Setzen wir

$$K_1 = k\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right),$$

$$K_2 = k\left(\sqrt{3}, \sqrt{1 - i}\right),$$

$$K_3 = k\left(\sqrt{6}, \sqrt{1 - 2i}\right),$$

$$K_4 = k\left(\sqrt{2}, \sqrt{1 - 2i}\right),$$

$$K_5 = k\left(\sqrt{5}, \sqrt{1 - 2i}\right),$$

dann ist wegen

$$(i, 2)_k = (i, 3)_k = (i, 1 - i)_k = 1$$

$i \in N_{K_1/k}(K_1^*)$ und $i \in N_{K_2/k}(K_2^*)$. Wegen

$$(3, 2)_k = (3, 4)_{\mathbb{Q}_2} = 1 \quad \text{und} \quad (3, 1 - i)_k = (3, 2)_{\mathbb{Q}_2} = -1$$

gilt für K_1 die Aussage $t = d$, für K_2 hingegen $t = 0$; also ist K_1 ein Beispiel für den Fall 1, K_2 für den Fall 2. Aus

$$(2, 1 - 2i)_k = (2, 5)_{\mathbb{Q}_2} = -1,$$

$$(2, 1 - 2i)_k \cdot (i, 1 - 2i)_k = (2i, 1 - 2i)_k = 1$$

folgt $(i, 1 - 2i)_k = -1$, also ist $i \notin N_{K_j/k}(K_j^*)$ für $j = 3, 4, 5$. Die 8te Einheitswurzel $\zeta_8 = \dfrac{1 + i}{2}\sqrt{2}$ liegt nicht in K_3, denn sonst wäre mit $\sqrt{2} \in K_3$ auch $\sqrt{3} \in K_3$, also $K_1 = K_3$, was wegen $i \in N_{K_1/k}(K_1^*) \setminus N_{K_3/k}(K_3^*)$ nicht möglich ist. Wegen

$$(6i, 1 - 2i)_k = -(6, 1 - 2i)_k = -(6, 5)_{\mathbb{Q}_2} = 1 \quad \text{und} \quad (6i, 6)_k = 1$$

gilt $6i \in N_{K_3/k}(K_3^*)$ bzw. $i \in N_{K_3/k}(K_3^*)\,K_3^{*2}$; also ist K_3 ein Beispiel für den dritten Fall.

Der Körper K_4 stellt ein Beispiel für den Fall 4 dar, denn es ist $\zeta_8 \in K_4$ und $t = 0$ wegen $(2, 1 - 2i)_k = -1$.

Aus $(5, 1 - 2i)_k = (5, 5)_{\mathbb{Q}_2} = 1$ erhalten wir $t = d$ für den Körper K_5, der somit dem letzten Fall zuzuordnen ist.

Bemerkung:

Aus dem Satz 3 folgt, daß unter den betrachteten Körpern genau für K_1/k jedes Einbettungsproblem mit beliebiger p-Gruppe als Kern lösbar ist.

Zum Abschluß wollen wir noch zwei Beispiele angeben, wie ein vorgegebenes Einbettungsproblem $j: E \twoheadrightarrow G$ auf ein gruppentheoretisches Wortproblem zurückgeführt wird. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & r \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\psi"] & D \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varphi"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E \arrow[r, two heads, "j"] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

mit einer Liftung χ von ψ. Man erhält genau dann eine Liftung von φ nach E (also eine Lösung des Einbettungsproblems), wenn ein χ existiert mit $r \in \operatorname{Ker} \chi$, d. h. wenn w eine Folgerelation der in $\operatorname{Ker} \chi$ auftretenden und durch die Kenntnis von ψ explizit bekannten Relationen ist.

Sei $p \neq 2$, k ein irregulärer $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper über $\mathbb{Q}_p$ (also ist $n \geqq 2$) und $K = k\left(\sqrt[p]{a_1}, \sqrt[p]{a_2}\right)$, wobei $a_1 k^{*p}$, $a_2 k^{*p}$ eine wie im Zusatz bestimmte Basis der Kummergruppe $K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ ist, und zwar so, daß im Fall (4) und (5) $a_1 = \zeta$ im Fall (3) $\zeta = a_1 \cdot b$, $b \in N_{K/k}(K^*)$ ist. Ferner sei $\sigma_i \in G = Gal(K/k)$ gegeben durch

$$\sigma_i\left(\sqrt[p]{a_j}\right) = \zeta_p^{\delta_{ij}} \cdot \sqrt[p]{a_j}, \qquad 1 \leqq i, j \leqq 2;$$

also ist es nach dem Zusatz möglich, eine Basis $x_1, x_2, z_1, \ldots, z_n$ von F zu finden, derart, daß w die in Satz 1 angegebene Form besitzt und daß

$$\psi(x_i) = \sigma_i, \qquad i = 1, 2, \qquad \psi(z_i) = 1, \qquad i = 1, \ldots, n$$

gilt.

Wir untersuchen im folgenden die zwei nicht-abelschen Gruppenerweiterungen E von G der Ordnung p^3, siehe auch [5].

1. Sei

$$E_1 = \left\langle u_1, u_2; u_1^p = u_2^p = [u_1, u_2]^p = \left[u_1, [u_1, u_2]\right] = \left[u_2, [u_1, u_2]\right] = 1\right\rangle$$

und ohne Einschränkung $j(u_i) = \sigma_i$, $i = 1, 2$.

Wir betrachten die nach Satz 1 möglichen Fälle. Wie schon erwähnt, ist im Fall (1) jedes Einbettungsproblem lösbar. Im Fall (5) stellt

$$\chi: \begin{cases} F \to E_1 \\ x_i \mapsto u_i, \quad i = 1, 2 \\ z_i \mapsto 1, \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

eine Liftung von ψ dar, für die w in Ker χ enthalten ist; also ist dieses Einbettungsproblem lösbar.

In den Fällen (2), (3), (4) gilt wegen $\psi(z_i) = 1$ für jede Liftung χ: $\chi(z_i) \in A$ und also $\chi([z_i, z_{i+1}]) = 1$; da E_1 den Exponenten p besitzt, gilt ferner $\chi(z_1^q) = \chi(x_1^q) = 1$. Also ist in diesen Fällen das Einbettungsproblem genau dann lösbar, wenn es eine Liftung χ gibt mit $[x_1, x_2] \in$ Ker χ. Wäre dies aber der Fall, so wäre E_1 eine abelsche Gruppe. Zusammenfassend gilt also:

Das Einbettungsproblem $j: E_1 \to G$ ist genau dann lösbar, wenn die Kummergruppe $K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ total isotrop ist.

2. Sei

$$E_2 = \langle u_1, u_2; u_1^p = u_2^{p^2} = [u_1, u_2] \cdot u_2^{-p} = 1 \rangle$$

$$\text{und } \begin{aligned} j(u_1) &= \sigma_1^a \sigma_2^b \\ j(u_2) &= \sigma_1^c \sigma_2^d \end{aligned} \qquad 0 \leqq a, b, c, d \leqq p - 1, D = a \cdot d - b \cdot c \neq 0 \mod p.$$

Für jede Liftung χ von ψ gilt, da $\chi(z_i)$ aus A ist und G trivial auf A operiert:

$$[z_i, z_{i+1}] \in \text{Ker}\, \chi, \quad i = 3, 5, \ldots, n-1, \quad [x_i, z_i] \in \text{Ker}\, \chi, \quad i = 1, 2,$$
$$z_1^p, x_1^{p^2} \in \text{Ker}\, \chi.$$

Die verschiedenen Liftungen χ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \chi(x_1) &= u_1^{d/D} \cdot u_2^{-b/D+pe}, & & \\ & & & 0 \leqq e, f \leqq p-1, \\ \chi(x_2) &= u_1^{-c/D} \cdot u_2^{a/D+pf}, & & \\ \chi(z_i) &\in A, & & i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Im Fall (1) ist jedes Einbettungsproblem lösbar; im Fall (5) ist das Einbettungsproblem genau dann lösbar, wenn es ein χ gibt mit $x_1^q \in$ Ker χ. Ist $s \geqq 2$, so existiert eine solche Liftung. Für $s = 1$ gilt

$$\chi(x_1^p) = u_2^{-pb/D};$$

also ist das Einbettungsproblem genau dann lösbar, wenn $b = 0$ ist. Im Fall (2) existiert keine Lösung, denn, da E nicht abelsch ist, gibt es keine Liftung χ von ψ mit $[x_1, x_2] \in$ Ker χ. Die gleiche Argumentation gilt in den Fällen (3) und (4) für $s \geqq 2$. Sei in diesen Fällen also $s = 1$, dann ist

$$\chi(x_1^p \cdot [x_{,1}\, x_2]) = u_2^{p(-b+1)/D}$$

für alle Liftungen χ von ψ. Somit ist das Einbettungsproblem genau für Surjektionen j mit $b = 1$ lösbar. Zusammenfassend gilt: Das Einbettungsproblem $j: E_2 \to G$ ist genau in den folgenden Fällen lösbar:

$K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ ist total isotrop und $\mu_k \subseteqq N_{K/k}(K^*)$,

$K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ ist total isotrop und $\mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*)$ sowie $b = 0$,

$K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$ ist hyperbolisch und $\mu_k \nsubseteq N_{K/k}(K^*)$ sowie $b = 1$.

Literatur

[1] N. Bourbaki, Algebrè Chap. 9, Paris 1959.
[2] U. Jannsen und K. Wingberg, Die p-Vervollständigung der multiplikativen Gruppe einer p-Erweiterung eines irregulären $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpers. J. r. u. angew. Math. **307/308**, 339—410 (1979).
[3] U. Jannsen und K. Wingberg, Einbettungsprobleme und Galoisstruktur lokaler Körper. J. r. u. angew. Math. **319**, 196—212 (1980).
[4] J. Labute, Classification of Demushkingroups. Canad. J. Math. **19**, 106—132 (1967).
[5] R. Massy et T. Nguyen-quang-do, Plongement d'une extension de degré p^2 dans une surextension non abélienne de degré p^3: étude locale-globale. J. reine u. angew. Math. **291**, 149—161 (1977).

Eingegangen am 5. 2. 1980.

Anschriften der Autoren: U. Jannsen, Universität Hamburg, FB Mathematik, Bundesstraße 55, D-2000 Hamburg 13; K. Wingberg, TU-Berlin, FB3 — Mathematik, Straße des 17. Juni 135, D-1000 Berlin 12.