Inventiones math. 12, 300 – 303 (1971)

Ein Satz über die Werte von quadratischen Formen über Körpern

MANFRED KNEBUSCH (Saarbrücken)

Zu einer quadratischen Form

$$q(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i \leqq j} a_{ij} x_i x_j$$

über einem Körper K, bei der nicht alle Koeffizienten $a_{ij} \in K$ Null seien, bezeichne $D^*(q)$ die Menge der von q dargestellten Elemente $\neq 0$ von K und $G(q)$ die von $D^*(q)$ erzeugte Untergruppe von K^*. Diese Gruppe verdient u.a. bei nichtausgeartetem q als Bild der Spinornorm $\theta: O(q) \to K^*/K^{*2}$ ein gewisses Interesse. Sei L eine Körpererweiterung von K von endlichem Grad. $q \otimes L$ bezeichne die aus q durch Basiserweiterung über L entstehende Form.

Witt äußerte mir gegenüber im Frühjahr 1968 die Vermutung, daß $G(q \otimes L)$ unter der Normabbildung $N_{L/K}: L^* \to K^*$ in $G(q)$ hinein abgebildet wird, wenn q nicht ausgeartet ist. Das Ziel dieser kleinen Note ist der Beweis der Vermutung in einer verschärften Form. Ist q über K isotrop, so ist $D^*(q) = K^*$ und nichts zu zeigen. Wir setzen im folgenden q stets als anisotrop voraus, d.h. $q(x_1, \ldots, x_n) = 0$ sei in K nur mit $x_1 = \cdots = x_n = 0$ lösbar. Doch darf die zu q gehörige Bilinearform $\sum_{i \leqq j} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$ auch ausgeartet sein, was natürlich nur bei Char $K = 2$ vorkommen kann.

Satz. *q sei anisotrop, α sei ein Element von L^*. Wird α von $q \otimes L$ dargestellt oder ist $q \otimes L$ isotrop, so ist $N_{L/K}(\alpha)$ Produkt von $[L:K]$ Elementen aus $D^*(q)$.*

Für $[L:K] = 2$ und Char $K \neq 2$ findet sich dieser Satz bei Lorenz [1], S. 54/55 mit Angabe einer expliziten Produktdarstellung von $N_{L/K}(\alpha)$, die mit einer evidenten Modifikation auch bei Char $K = 2$ richtig bleibt.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach $n = [L:K]$. Dabei gehen wir nach einer recht bekannten Methode vor, die auf Lagrange zurückgeht. Sie wurde in jüngerer Zeit insbesondere in der Note [3] von Springer benutzt und von Witt in [4] sorgfältig analysiert.

Für jedes $r \geqq 1$ bezeichne $D^*(q)^r$ die Menge aller Produkte von r Elementen aus $D^*(q)$. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei jetzt $n > 1$. Wir behandeln zunächst den Fall, daß α in K liegt. Ist n gerade, so ist $N_{L/K}(\alpha)$ ein Quadrat und somit sicherlich in $D^*(q)^n$ gelegen. Ist n ungerade, so muß nach dem Satz von Springer aus der schon zitierten Note [3] auch $q\otimes L$ anisotrop sein, also nach Voraussetzung das Element α darstellen. $(-\alpha)\perp q\otimes L$ ist isotrop. Nach demselben Satz von Springer ist $(-\alpha)\perp q$ über K isotrop, d.h. $\alpha\in D^*(q)$. Daher liegt $N_{L/K}(\alpha)=\alpha^n$ in $D^*(q)^n$.

Sei jetzt der Körper $E:=K(\alpha)$ von K und auch von L verschieden, also $[L:E]=r<n$ und $[E:K]=s<n$. Ist $q\otimes E$ isotrop, so ist nach Induktionsvoraussetzung $N_{E/K}(\alpha)\in D^*(q)^s$, somit liegt die r-te Potenz $N_{L/K}(\alpha)$ von $N_{E/K}(\alpha)$ in $D^*(q)^n$. Sei $q\otimes E$ anisotrop. Indem wir die Induktionsvoraussetzung erst auf L/E, dann auf E/K anwenden, sehen wir $N_{L/E}(\alpha)\in D^*(q\otimes E)^r$ und dann $N_{L/K}(\alpha)\in D^*(q)^n$.

Ab jetzt können wir $K(\alpha)=L$ annehmen. $p(t)\in K[t]$ bezeichne das (normierte) Minimalpolynom von α über K. Wir setzen zunächst $\alpha\in D^*(q\otimes L)$ voraus. (Damit wären wir für $\operatorname{Char} K\neq 2$ schon fertig.) $D^*(q\otimes L)$ ist gegen Inversenbildung stabil. Wir haben somit in $K(\alpha)$ eine Gleichung

$$1=\alpha\cdot q(g_1(\alpha),\ldots,g_d(\alpha))$$

mit Polynomen $g_i(t)\in K[t]$ von Graden $|g_i|\leqq n-1$. {Den Grad eines Polynoms bezeichnen wir durch $|\ |$.} Das führt auf eine Gleichung

$$1+p(t)\,h(t)=t\,q(g_1(t),\ldots,g_d(t)) \tag{1}$$

in $K[t]$. Sei

$$h(t)=c\prod_{\lambda} h_\lambda(t) \tag{2}$$

die Zerlegung von $h(t)$ über K in endlich viele normierte irreduzible $h_\lambda(t)$ und konstantes $c\in K^*$. Mit m bezeichnen wir das Maximum der Grade $|g_i|$. Weil q anisotrop ist, hat die rechte Seite von (1) den genauen Grad $2m+1$. Wegen $m\leqq n-1$ ist also

$$\sum_{\lambda}|h_\lambda|=2m+1-n\leqq n-1. \tag{3}$$

Vergleich der Glieder vom Grad $2m+1$ in (1) zeigt

$$c\in D^*(q). \tag{4}$$

Wir setzen in (1) eine Wurzel β eines Polynoms h_λ ein und erhalten $\beta\neq 0$, $\beta^{-1}\in D^*(q\otimes K(\beta))$, also $\beta\in D^*(q\otimes K(\beta))$. Nach (3) ist jedes $|h_\lambda|<n$ und die Induktionsvoraussetzung ergibt

$$(-1)^{|h_\lambda|}\,h_\lambda(0)\in D^*(q)^{|h_\lambda|}. \tag{5}$$

Jetzt setzen wir in (1) $t=0$ ein und erhalten

$$c\,p(0)\prod_{\lambda} h_{\lambda}(0)=-1.$$

Nach (3) ist $n+\sum|h_{\lambda}|$ ungerade. Daher erhalten wir für $N_{L/K}(\alpha)$ den Ausdruck

$$(-1)^n\,p(0)=c^{-1}\prod_{\lambda}(-1)^{|h_{\lambda}|}\,h_{\lambda}(0)^{-1}. \tag{6}$$

(4), (5) und (6) zeigen, daß $N_{L/K}(\alpha)$ in $D^*(q)^r$ liegt mit $r=1+\sum|h_{\lambda}|=2(m+1)-n$. Weil $n-r\geqq 0$ und gerade ist, liegt $N_{L/K}(\alpha)$ a fortiori in $D^*(q)^n$.

Sei schließlich $q\otimes L$ isotrop. Anstelle von (1) haben wir in $K[t]$ jetzt eine Gleichung

$$p(t)\,h(t)=q\big(g_1(t),\ldots,g_d(t)\big) \tag{7}$$

mit $m:=\operatorname{Max}|g_i|\leqq n-1$ und $h(t)\neq 0$. Teilt ein irreduzibles Polynom alle g_i, so muß sein Quadrat in $h(t)$ aufgehen. Wir können also voraussetzen, daß die $g_i(t)$ keinen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler haben. Wir betrachten wieder die Zerlegung (2) von h und sehen wie zuvor:

$$\sum_{\lambda}|h_{\lambda}|=2m-n\leqq n-2, \tag{8}$$

$$c\in D^*(q). \tag{9}$$

Einsetzen einer Wurzel β eines h_{λ} liefert wie zuvor

$$(-1)^{|h_{\lambda}|}\,h_{\lambda}(0)\in D^*(q)^{|h_{\lambda}|}, \tag{10}$$

und Einsetzen von $t=0$ liefert

$$c\,p(0)\prod_{\lambda} h_{\lambda}(0)=d\in D^*(q). \tag{11}$$

Nach (8) ist $n+\sum|h_{\lambda}|$ gerade, also

$$(-1)^n p(0)=d\,c^{-1}\prod_{\lambda}(-1)^{|h_{\lambda}|}\,h_{\lambda}(0)^{-1}. \tag{12}$$

Aus (9)–(12) folgt $N_{L/K}(\alpha)\in D^*(q)^r$ mit der gleichen Zahl $r=\sum|h_{\lambda}|+2=2(m+1)-n$ wie im vorigen Abschnitt. Es ist also erst recht
$N_{L/K}(\alpha)\in D^*(q)^n$, q.e.d.

Bei nicht ausgeartetem q läßt sich mit einer anderen elementaren Methode auch der entsprechende Satz für die Gruppe $N(q)$ der Ähnlichkeitsnormen von q, d.h. der $\lambda\in K^*$ mit $q\cong(\lambda)\otimes q$, beweisen:

$$N_{L/K}\big(N(q\otimes L)\big)\subset N(q);$$

s. [2], S. 50.

Literatur

1. Lorenz, F.: Quadratische Formen über Körpern. Lecture notes Math. 130. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
2. Scharlau, W.: Quadratic forms, Queen's papers on pure and applied math. No. 22, Queen's University, Kingston, Ontario (1969).
3. Springer, T. A.: Sur les formes quadratiques d'indice zéro. C. R. Acad. Sci. **234**, 1517–1519 (1952).
4. Witt, E.: Verschiedene Bemerkungen zur Theorie der quadratischen Formen über einem Körper. Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles, 245–250 (1956).

Manfred Knebusch
Mathematisches Institut der Universität
BRD-6600 Saarbrücken 15
Deutschland

(Eingegangen am 5. Januar 1971)

Universitätsdruckerei H. Stürtz AG Würzburg
Printed in Germany