Journal für die reine und angewandte Mathematik
Herausgegeben von **Helmut Hasse** und **Hans Rohrbach**

Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 30

Sonderabdruck aus Band 226, 1967. Seite 175 bis 183

Elementarteilertheorie über Maximalordnungen

Von *Manfred Knebusch* in Hamburg

Die Elementarteilertheorie über Dedekindringen (s. [4], S. 31ff. und die dort angegebene Literatur, ferner etwa [8], S. 214ff.) läßt sich, wie in dieser Note demonstriert werden soll, weitgehend auf Gitter über Maximalordnungen halbeinfacher assoziativer Algebren übertragen.

Für anregende Diskussionen bin ich Herrn H. Jacobinski zu Dank verpflichtet.

Bezeichnungen und Problemstellung

Sei $\mathfrak{o}$ ein Dedekindring, K sein Quotientenkörper, C halbeinfache Algebra endlicher Dimension über K, $\mathfrak{O}$ eine Maximalordnung von C über $\mathfrak{o}$. Die Minimalnorm von C über K bezeichnen wir mit $N(x)$.

M und $N < M$ seien fest vorgegebene, endlich erzeugte $\mathfrak{O}$-Linksmoduln, die als $\mathfrak{o}$-Moduln torsionsfrei seien („Gitter"). Wir denken uns M in $V := K \underset{\mathfrak{o}}{\otimes} M$ eingebettet: $V = KM$. Weil $\mathfrak{O}$ hereditär ist (s. [1], S. 5), sind M, N nicht nur über $\mathfrak{o}$, sondern sogar über $\mathfrak{O}$ projektiv. (Es läßt sich leicht ein freier $\mathfrak{O}$-Modul konstruieren, der M umfaßt.) Ferner läßt sich M in eine direkte Summe von Moduln zerlegen, die zu Linksidealen von $\mathfrak{O}$ isomorph sind ([7], S. 330, [3], S. 13).

Wir fragen nun nach Zerlegungen von M dieser Art, die auch auf N direkte Zerlegungen induzieren, ferner nach durch geeignete Simultanzerlegungen definierbaren Invarianten des Modulpaares (M, N).

$KN \cap M$ ist direkter Summand von M. Denn wegen der Projektivität von $M/KN \cap M$ zerfällt die exakte Sequenz

$$0 \to KN \cap M \to M \to M/KN \cap M \to 0 .$$

Daher können wir von vornherein $KN = KM$ annehmen.

Besitzt $\mathfrak{O}$ Nullteiler, so läßt sich jede Zerlegung von M durch die entsprechende Zerlegung eines zugehörigen Ω_1-Gitters M_1 beschreiben, wobei Ω_1 eine durch $\mathfrak{O}$ gegebene nullteilerfreie Maximalordnung ist (s. § 2 Anfang). Trotzdem ist es nicht zweckmäßig, nur nullteilerfreie Maximalordnungen zu betrachten, denn bei Lokalisierung nach Primidealen von $\mathfrak{o}$ treten im allgemeinen doch wieder Nullteiler auf. Ebensowenig ist es zweckmäßig, gleich nach Simultanzerlegungen in *unzerlegbare* Moduln zu fragen, weil auch Unzerlegbarkeit keine unter Lokalisierungen invariante Eigenschaft ist. Statt dessen setzen wir zunächst (§ 1) voraus, daß V freier C-Modul ist und suchen nach Zerlegungen des Paares (M, N), deren Summanden über K zu C isomorph werden.

Es zeigt sich, daß solche Zerlegungen stets existieren (Satz 1). Es gibt also eine freie Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V über C und Linksideale $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{O}$, die über K ganz C aufspannen („volle Linksideale"), so daß

$$(*) \qquad M = \mathfrak{A}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n x_n, \quad N = \mathfrak{B}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{B}_n x_n$$

wird. Wegen $M \supset N$ sind die im Brandtschen Gruppoid gebildeten Quotienten $\mathfrak{R}_i := \mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ganz, und es läßt sich überdies erreichen, daß

$$(**) \qquad N(\mathfrak{R}_1) \supset \cdots \supset N(\mathfrak{R}_n)$$

ist. Ist in $\mathfrak{O}$ jedes volle Linksideal Hauptideal, so läßt sich $(**)$ sogar zu der Beziehung $\mathfrak{R}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{R}_n$ verbessern (s. Absatz vor Satz 4).

Trotz der Forderung $(**)$ können die $N(\mathfrak{R}_i)$ bei verschiedenen Zerlegungen verschieden ausfallen. Stimmt $\mathfrak{o}$ mit dem Zentrum von $\mathfrak{O}$ überein, so tritt dieses Phänomen über $\mathfrak{O}$ genau dann auf, wenn von den Komplettierungen von $\mathfrak{O}$ nach den Primidealen von $\mathfrak{o}$ mindestens eine Nullteiler besitzt.

Man kann Eindeutigkeit der $N(\mathfrak{R}_i)$ dennoch erzwingen, indem man sich auf „kanonische Zerlegungen" von (M, N) (s. Definition S. 178) beschränkt.

Aus den genannten Resultaten gewinnen wir in § 2 mit Leichtigkeit entsprechende Sätze über Simultanzerlegungen von M und N in unzerlegbare Gitter.

In § 3 gehen wir noch kurz auf die Theorie der endlich erzeugten Torsionsmoduln über einer Maximalordnung ein.

§ 1. V sei freier C-Modul

Satz 1. *Es gibt eine freie Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V über C und volle Linksideale $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ von $\mathfrak{O}$, so daß*

$$(*) \qquad M = \mathfrak{A}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n x_n, \quad N = \mathfrak{B}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{B}_n x_n$$

ist und für die Idealquotienten $\mathfrak{R}_i := \mathfrak{A}_i^{-1}\mathfrak{B}_i$

$$(**) \qquad N(\mathfrak{R}_1) \supset \cdots \supset N(\mathfrak{R}_n)$$

gilt.

Ehe wir diesen Satz beweisen, studieren wir die Abspaltung direkter, zu vollen Linksidealen von isomorpher Summanden von *einem* Gitter M.

Sei $x \in V$ freies Element von V, d. h. es sei $cx \neq 0$ für jedes $c \neq 0$ aus C. $\mathfrak{A}$ bezeichne den „Koeffizienten"

$$\text{Koeff}\,(x, M) := \{c \in C \mid cx \in M\}$$

von x bezüglich M. $M \cap Cx = \mathfrak{A}x$.

Weil $M/\mathfrak{A}x$ projektiv ist, haben wir direkte Zerlegungen

$$(1.3) \qquad M = \mathfrak{A}x \oplus M', \quad V = Cx \oplus V'$$

mit $V' := KM'$.

Ausgehend von einer beliebigen Zerlegung $V = Cx \oplus V'$ von V (x frei), fragen wir umgekehrt: Wann ist $M = \mathfrak{A}x \cap M'$ mit $M' := V' \cap M$? Das ist genau dann der Fall, wenn es zu der exakten Sequenz

$$0 \to M' \to M \xrightarrow[\varphi \mid M]{} \overline{\mathfrak{A}}\varphi(x) \to 0$$

($\varphi :=$ kanonische Abbildung von V auf V/V', $\bar{\mathfrak{A}} :=$ Koeff $(\varphi(x), \varphi(M))$) einen Schnitt $\bar{\mathfrak{A}}\varphi(x) \to M$ mit $\varphi(x) \to x$ gibt. Dieser Schnitt läßt sich nur auf eine Weise definieren und existiert genau dann, wenn $\bar{\mathfrak{A}}x < M$, d. h. $\bar{\mathfrak{A}} < \mathfrak{A}$ ist. Andererseits ist stets $\mathfrak{A} < \bar{\mathfrak{A}}$. Wir fassen zusammen:

Lemma 1. *$V = Cx \oplus V'$ sei direkte Zerlegung von V in freie Summanden, φ die kanonische Abbildung von V auf V/V'. Dann gilt für $\mathfrak{A} :=$ Koeff (x, M) und*

$$\bar{\mathfrak{A}} := \text{Koeff}\,(\varphi(x), \varphi(M)):$$

$$\mathfrak{A} < \bar{\mathfrak{A}}, \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow M = \mathfrak{A}x \oplus (V' \cap M). \tag{1.5}$$

Sei $\mathfrak{p}$ Primideal $\neq 0$ von $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ der Bewertungsring zu $\mathfrak{p}$ in K. Allgemein bezeichnen wir für ein $\mathfrak{o}$-Gitter G mit $G_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \underset{\mathfrak{o}}{\otimes} G = \mathfrak{o}_\mathfrak{p} G < KG$ von G an der Stelle $\mathfrak{p}$. Für unser $\mathfrak{O}$-Gitter M ist $M_\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$-Gitter. Es gilt für ein freies Element x von V:

$$\text{Koeff}\,(x, M_\mathfrak{p}) = \text{Koeff}\,(x, M)_\mathfrak{p}. \tag{1.6}$$

Lemma 2. *Ist x_1 freies Element von V, $\mathfrak{p}$ ein Primideal ($\neq 0$) von $\mathfrak{o}$, so ist jedes Element x einer kleinen Umgebung von x_1 bezüglich der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Topologie von V wieder freies Element mit* Koeff $(x, M_\mathfrak{p}) =$ Koeff $(x_1, M_\mathfrak{p})$.

Beweis. x_1 läßt sich zu einer freien Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V über C ergänzen, so daß $M_\mathfrak{p} = \mathfrak{A}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n x_n$ wird mit geeigneten vollen Linksidealen $\mathfrak{A}_i$ von $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ in C. Liegt $x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n$ ($\lambda_i \in C$) bezüglich $\mathfrak{p}$ nahe an x_1, d. h. λ_1 nahe an 1, die anderen λ_i nahe an Null, so ist λ_1 sicher invertierbares Element von C. Daher ist dann x frei. Ferner ist

$$\text{Koeff}\,(x, M_\mathfrak{p}) = \bigcap_{\{i \mid \lambda_i \neq 0\}} \mathfrak{A}_i \lambda_i^{-1} = (\lambda_1 \mathfrak{A}_1^{-1} + \cdots + \lambda_n \mathfrak{A}_n^{-1})^{-1} = \mathfrak{A}_1,$$

sofern λ_1 Einheit der Rechtsordnung von $\mathfrak{A}_1$ ist und $\lambda_i \mathfrak{A}_i^{-1} < \mathfrak{A}_1^{-1}$ für $i = 2, \ldots, n$ ist. Das läßt sich bei guter Approximation erreichen. q. e. d.

Beweis von Satz 1. a) Für ein beliebiges freies Element x von V schreiben wir $\mathfrak{A}_x :=$ Koeff (x, M), $\mathfrak{B}_x :=$ Koeff (x, N), $\mathfrak{R}_x := \mathfrak{A}_x^{-1}\mathfrak{B}_x$. Mit $\mathfrak{a} := \{\alpha \in \mathfrak{o} \mid \alpha M < N\}$ gilt stets $\mathfrak{a}\mathfrak{A}_x < \mathfrak{B}_x < \mathfrak{A}_x$. Anwendung der Minimalnorm liefert: $\mathfrak{a}^r < N(\mathfrak{R}_x) < \mathfrak{o}$ ($r :=$ Grad des Minimalpolynoms von C). Somit bilden die $N(\mathfrak{R}_x)$ eine endliche Menge, und es ist in der üblichen symbolischen Schreibweise

$$N(\mathfrak{R}_x) = \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} N(\mathfrak{R}_x)_\mathfrak{p}. \tag{1.7}$$

Wir suchen jetzt zu jedem $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$ ein freies Element $y_\mathfrak{p}$ von V, für das $N(\mathfrak{R}_{y_\mathfrak{p}})_\mathfrak{p}$ maximal ausfällt. Diese $y_\mathfrak{p}$ können wir gleichzeitig, jedes in der zu dem entsprechenden $\mathfrak{p}$ gehörigen Topologie, durch ein Element x_1 von V beliebig genau approximieren (schwacher Approximationssatz). Nach Lemma 2, (1. 6), (1. 7) ist x_1 bei guter Approximation freies Element von V und $N(\mathfrak{R}_{x_1})$ *Teiler jedes anderen* $N(\mathfrak{R}_x)$.

b) Statt $\mathfrak{A}_{x_1}$, $\mathfrak{B}_{x_1}$, $\mathfrak{R}_{x_1}$ schreiben wir jetzt kurz $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{R}_1$. Sei $M = \mathfrak{A}_1 x_1 \oplus M'$ eine *beliebige* Zerlegung von M zu x_1 (vgl. (1. 3)). Angenommen es ist *nicht*

$$N = \mathfrak{B}_1 x_1 \oplus (M' \cap N).$$

Nach Lemma 1 bedeutet dies: Ist φ die kanonische Abbildung von V auf V/KM', so ist

$$\bar{\mathfrak{B}}_1 := \text{Koeff}\,(\varphi(x_1), \varphi(N)) \underset{\neq}{>} \mathfrak{B}_1.$$

Andererseits zerfällt die exakte Sequenz

$$0 \to M' \cap N \to N \to \overline{\mathfrak{B}}_1 \varphi(x_1) \to 0,$$

d. h. es gibt sicher ein freies x_1' in V mit $\varphi(x_1') = \varphi(x_1)$, Koeff $(x_1', N) = \overline{\mathfrak{B}}_1$. Nach (1. 4) ist Koeff $(x_1', M) < \mathfrak{A}_1$. Nun zeigt sich der gewünschte Widerspruch:

$$\mathfrak{R}_{x_1'} > \overline{\mathfrak{B}}_1 \mathfrak{A}_1^{-1} \mathrel{\substack{>\\ \neq}} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1^{-1} = \mathfrak{R}_1^{-1},$$

also $N(\mathfrak{R}_{x_1'}) \mathrel{\substack{>\\ \neq}} N(\mathfrak{R}_1)$. Es ist also doch

$$M = \mathfrak{A}_1 x_1 \oplus M', \quad N = \mathfrak{B}_1 x_1 \oplus M' \cap N.$$

M' und $M' \cap N$ lassen sich in gleicher Weise weiterzerlegen. Wir erhalten so schließlich eine Zerlegung $(*)$. $(**)$ ergibt sich unmittelbar aus dem benutzten Verfahren.

Satz 2 (vgl. [7], S. 479). *Sei $\mathfrak{O}$ Maximalordnung einer Divisionsalgebra, $\mathfrak{o}$ kompletter diskreter Bewertungsring. Dann treten in jeder Zerlegung $(*)$ von (M, N), für die $(**)$ oder die damit gleichwertige Aussage*

$$\mathfrak{R}_1 > \cdots > \mathfrak{R}_n$$

gilt, die gleichen Ideale $\mathfrak{R}_i$ auf („Elementarteiler").

Beweis. Jedes Ideal von $\mathfrak{O}$ ist zweiseitig und Potenz des einzigen maximalen Ideals von $\mathfrak{O}$. Die Moduln $\mathfrak{A}_i/\mathfrak{B}_i \cong \mathfrak{O}/\mathfrak{R}_i$ sind daher alle unzerlegbar. Man wende den Satz von Krull-Schmidt auf M/N an.

Zusatz. Ist (M', N') ein weiteres Modulpaar mit dem gleichen System von Elementarteilern wie (M, N), so gibt es einen Isomorphismus von M auf M', der N auf N' abbildet.

Im allgemeinen sind jedoch die $N(\mathfrak{R}_i)$ in einer Simultanzerlegung $(*)$ von (M, N), für die $(**)$ gilt, nicht eindeutig bestimmt. (s. Satz 3). Wir können nur feststellen, daß das Produkt $N(\mathfrak{R}_1) \cdots N(\mathfrak{R}_n)$ nicht von der Wahl der Simultanzerlegung abhängt. Ist nämlich ohne Einschränkung der Allgemeinheit C zentral einfach über K von der Dimension m^2, so gilt für das Ordnungsideal $(M : N)$ von M/N, betrachtet als $\mathfrak{o}$-Modul (s. [5], S. 80):

$$(M : N) = (N(\mathfrak{R}_1) \cdots N(\mathfrak{R}_n))^m. \tag{1. 8}$$

Die Eindeutigkeit der Ideale $N(\mathfrak{R}_i)$ läßt sich dennoch erzwingen, indem man sich auf Zerlegungen $(*)$ beschränkt, die nach dem im Beweis von Satz 1 benutzten Verfahren gewonnen werden können.

Definition. $KN = KM = V$ sei freier C-Modul. Für jedes freie Element x von V bezeichne $\mathfrak{R}_x$ den Quotienten Koeff $(x, M)^{-1}$ Koeff (x, N).

Eine Simultanzerlegung $(*)$ von M, N heiße *kanonisch*, wenn über $(**)$ hinaus gilt: $N(\mathfrak{R}_i)$ teilt $N(\mathfrak{R}_x)$ für jedes freie Element x von $Cx_i + \cdots + Cx_n$.

Satz 1a. *Ein Paar (M, N) von $\mathfrak{O}$-Gittern mit $N < M$ und $KN = KM =$ freier C-Modul besitzt stets kanonische Simultanzerlegungen $(*)$. Die $N(\mathfrak{R}_i)$ fallen bei jeder solchen Zerlegung gleich aus.*

Beweis. Es ist nur noch die eindeutige Bestimmtheit der $N(\mathfrak{R}_i)$ zu zeigen. Zu einem Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von $\mathfrak{o}$ erhält man aus einer kanonischen Zerlegung von (M, N) sofort eine kanonische Zerlegung der zugehörigen komplettierten Lokalisierungen $\overline{M}_\mathfrak{p}$, $\overline{N}_\mathfrak{p}$ (s. Lemma 2). Gehören zu der Zerlegung von (M, N) die Ideale $N(\mathfrak{R}_i)$, so zur letzteren Zerlegung deren Komplettierungen $\overline{N(\mathfrak{R}_i)}_\mathfrak{p}$.

Zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1a können wir daher annehmen, daß $\mathfrak{o}$ diskreter kompletter Bewertungsring ist, ferner, wie man sich leicht überlegt, daß C zentral einfach über K ist. Dann ist $\mathfrak{O} = \sum_{i,j=1}^{r} \Omega e_{ij}$ mit Matrixeinheiten e_{ij} und Maximalordnung Ω eines kompletten Schiefkörpers (s. z. B. [5], S. 100).

Unsere Behauptung ergibt sich nun als Folge des Elementarteilersatzes für Ω-Moduln (s. Satz 2).

Zunächst können wir in der Simultanzerlegung $(\ast)$ von M, N annehmen:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \cdots = \mathfrak{A}_n = \mathfrak{O}.$$

Man braucht dazu nur die x_i mit geeigneten Skalaren zu multiplizieren. Die $N(\mathfrak{N}_i)$ ändern sich dabei nicht.

Die $\mathfrak{B}_i$ sind von der Form

$$\mathfrak{B}_i = \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{s}_\nu^{(i)} I_\nu \tag{1.9}$$

mit $I_\nu = \sum_{j=1}^{r} \Omega e_{j\nu}$ und Ω-Idealen $\mathfrak{s}_\nu^{(i)}$. Indem wir die x_i noch um eine Einheit von $\mathfrak{O}$ der Form $\sum_{\nu=1}^{r} e_{\nu,\pi(\nu)}$ mit passender Permutation π der Indizes $1, \ldots, r$ abändern, erreichen wir:

$$\mathfrak{s}_1^{(i)} > \cdots > \mathfrak{s}_r^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.10}$$

Aus der Maximalität der

$$N(\mathfrak{N}_i) = \prod_{\nu=1}^{r} N_0(\mathfrak{s}_\nu^{(i)}) \quad (N_0 = \text{Norm von } K\Omega/K) \tag{1.11}$$

folgt weiter

$$\mathfrak{s}_r^{(i)} > \mathfrak{s}_1^{(i+1)} \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{1.12}$$

denn z. B. für

$$x = e_{11}x_i + \cdots + e_{r-1,r-1}x_i + e_{r1}x_{i+1}$$

ergibt sich

$$N(\mathfrak{N}_x) = N_0(\mathfrak{s}_1^{(i)}) \cdots N_0(\mathfrak{s}_{r-1}^{(i)})\, N_0(\mathfrak{s}_1^{(i+1)}) < N(\mathfrak{N}_i)\,.$$

Die $\mathfrak{s}_\nu^{(i)}$ sind somit die Elementarteiler des Ω-Moduls

$$e_{11}N = \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathfrak{s}_1^{(i)} e_{11}x_i \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_r^{(i)} e_{1r}x_i)$$

bezüglich

$$e_{11}M = \bigoplus_{i=1}^{n} (\Omega e_{11}x_i \oplus \cdots \oplus \Omega e_{1r}x_i)$$

in der richtigen Reihenfolge. Daher sind die $\mathfrak{s}_\nu^{(i)}$ und nach (1.11) ebenso die $N(\mathfrak{N}_i)$ durch (M, N) eindeutig bestimmt.

Definition. Die bei einer kanonischen Simultanzerlegung von (M, N) auftretenden $N(\mathfrak{N}_i)$ wollen wir die *Elementarnormen* des Modulpaares (M, N) nennen.

Wir fragen jetzt: Für welche Maximalordnungen ist jede Simultanzerlegung $(\ast)$ eines beliebigen Modulpaares (M, N), für die $(\ast\ast)$ gilt, kanonisch?

Zunächst notieren wir das aufgrund des Beweises von Satz 1 evidente

Korollar zu Satz 1a. *Eine Zerlegung* $(*)$ *von* M, N *bei der für jedes* $i = 1, \ldots, n$ $N(\mathfrak{R}_i)$ *die i-te Elementarnorm von* M, N *ist*[1]), *ist kanonisch.*

Beweis. Wegen der Maximalität von $N(\mathfrak{R}_1)$ können wir für eine kanonische Zerlegung x_1 als erstes Basiselement benutzen. Weiter können wir den komplementären Summanden von $\mathfrak{A}_1 x_1$ in M beliebig wählen (s. Beweis von Satz 1). Wir wählen ihn als $\mathfrak{A}_2 x_2 + \cdots + \mathfrak{A}_n x_n$. Die maximale Norm $N(\mathfrak{R}_x)$ mit freiem x aus $C x_2 + \cdots + C x_n$ ist die zweite Elementarnorm $N(\mathfrak{R}_2)$. Wir können also x_2 als zweites Basiselement wählen. etc.

Satz 3. *C sei zentral einfach über K.*

1. *Ist für jedes Primideal* $\mathfrak{p} \neq 0$ *von* $\mathfrak{o}$ *die Komplettierung* $\bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}}$ *von* $\mathfrak{O}$ *nullteilerfrei, so ist jede Simultanzerlegung* $(*)$ *eines Paares* (M, N) *von* $\mathfrak{O}$*-Moduln mit* $N < M$, $KN = KM =$ *freier C-Modul, für die* $(**)$ *gilt, kanonisch.*

2. *Anderenfalls gibt es in jedem freien C-Modul* $V \gneqq C$ *Paare* (M, N) *von* $\mathfrak{O}$*-Gittern mit* $KN = KM = V$, *die unkanonische Zerlegungen* $(*)$ *besitzen, für die immerhin* $(**)$ *gilt.*

Bemerkung. Satz 1. a und Satz 3. 1 liefern für $\mathfrak{O} = \mathfrak{o}$ den Elementarteilersatz über Dedekindringen.

Beweis. 1) Aus Satz 2 und dem soeben formulierten Korollar folgt sofort, daß jede Zerlegung $(*)$ von (M, N), für die $(**)$ gilt, kanonisch ist, sofern $\mathfrak{o}$ kompletter diskreter Bewertungsring und $\mathfrak{O}$ Divisionsalgebra ist. Weil allgemein eine Zerlegung $(*)$ genau dann kanonisch ist, wenn die zugehörigen Zerlegungen der komplettierten Moduln $\bar{M}_{\mathfrak{p}}$, $\bar{N}_{\mathfrak{p}}$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von $\mathfrak{o}$ kanonisch sind (s. Lemma 2), ist damit der erste Teil der Behauptung klar.

2) Sei $V = \bigoplus_{i=1}^{n} C x_i$, $n \geqq 2$. Wir betrachten ein Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von $\mathfrak{o}$, für das $\bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}}$ Nullteiler besitzt: $\bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i,j=1}^{r} \Omega e_{ij}$ mit Matrixeinheiten $e_{ij} (r \geqq 2)$ und $\Omega =$ Maximalordnung einer Divisionsalgebra über K (s. z. B. [5], S. 100). Wir definieren $\bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}}$-Gitter

$$
\begin{aligned}
M' &:= \bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}} x_1 + \cdots + \bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}} x_n, \\
N' &:= \mathfrak{B}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{B}_n x_n.
\end{aligned}
\tag{1. 13}
$$

Die $\mathfrak{B}_i$ seien dabei ganze $\bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{p}}$-Ideale, die wir so wählen, daß $(**)$ und für die den $\mathfrak{B}_i$ vermögen (1. 9) zugeordneten Ω-Ideale $\mathfrak{s}_\nu^{(i)}$ (1. 10) gilt, aber (1. 12) für mindestens ein i verletzt wird. Die Zerlegung (1. 13) ist dann sicher unkanonisch (s. Beweis von Satz 1. a). Wir bilden weiter

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathfrak{O} x_1 + \cdots + \mathfrak{O} x_n \\
N &:= \mathfrak{C}_1 x_1 + \cdots + \mathfrak{C}_n x_n
\end{aligned}
\tag{1. 14}
$$

mit den durch

$$\overline{(\mathfrak{C}_i)}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{B}_i, \quad \overline{(\mathfrak{C}_i)}_{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{O}}_{\mathfrak{q}} \text{ für } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$$

definierten $\mathfrak{O}$-Idealen $\mathfrak{C}_i$.

Die Zerlegung (1. 14) von (M, N) ist nicht kanonisch. Trotzdem ist

$$N(\mathfrak{C}_1) > \cdots > N(\mathfrak{C}_n).$$

[1]) Wegen (1. 8) genügt es, $(n - 1)$ der $N(\mathfrak{R}_i)$ zu kennen.

Abschließend sei bemerkt, daß, *falls in $\mathfrak{O}$ jedes volle Linksideal Hauptideal ist*, bei einer kanonischen Zerlegung $(*)$ eines beliebigen Gitterpaares (M, N) die x_i sich um skalare Faktoren so abändern lassen, daß über $(**)$ hinaus

$$\mathfrak{R}_1 > \cdots > \mathfrak{R}_n$$

gilt. Über einer beliebigen Maximalordnung $\mathfrak{O}$ gilt nämlich

Satz 4. *M und $N < M$ seien $\mathfrak{O}$-Gitter mit $KM = KN =$ freier C-Modul. $(*)$ sei kanonische Zerlegung von M, N, bei der alle $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{O}$ seien*[2]*. Dann ist*

$$\mathfrak{A}_1 < \cdots < \mathfrak{A}_n .$$

Beweis. Ist $(*)$ kanonische Zerlegung von (M, N), so ist für beliebige Indizes $i, j = 1, \ldots, r$ mit $i < j$

$$M_{ij} := \mathfrak{A}_i x_i + \mathfrak{A}_j x_j, \quad N_{ij} := \mathfrak{B}_i x_i + \mathfrak{B}_j x_j$$

kanonische Zerlegung des so definierten Gitterpaares (M_{ij}, N_{ij}). Somit genügt es, den Satz für $n = 2$ zu beweisen. Aus der kanonischen Zerlegung

$$M = \mathfrak{A}_1 x_1 + \mathfrak{A}_2 x_2, \quad N = \mathfrak{O} x_1 + \mathfrak{O} x_2$$

liest man nun für $x = x_1 + x_2$ ab: $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{O}$. Somit ist

$$\mathfrak{R}_x^{-1} = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 < \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{R}_1^{-1}.$$

Wegen der Maximalität von $N(\mathfrak{R}_1)$ muß $\mathfrak{A}_1 \cap a_2 = \mathfrak{A}_1$, also $\mathfrak{A}_2 > \mathfrak{A}_1$ sein. q. e. d.

§ 2. V beliebiger C-Modul

Wir suchen jetzt nach Simultanzerlegungen von M, N in *unzerlegbare* Summanden und nehmen ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit C als *einfach* an.

C ist voller Matrixring über einer Divisionsalgebra D. Nach Wahl einer beliebigen Maximalordnung Ω in D können wir $\mathfrak{O}$ in der Gestalt

$$\mathfrak{O} = \sum_{i,j=1}^{s} \mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j^{-1} e_{ij} \tag{2. 1}$$

mit Matrixeinheiten e_{ij} und Rechtsidealen $\mathfrak{G}_i$ von Ω schreiben (s. [4], S. 18).

$\Omega^{(1)}$ bezeichne die Linksordnung von $\mathfrak{G}_1$. Jede Zerlegung des $\mathfrak{O}$-Gitters M spiegelt sich in der entsprechenden Zerlegung des $\Omega^{(1)}$-Gitters $M^{(1)} := e_{11} M$ wider. Es ist nämlich

$$M = \sum_{i=1}^{s} e_{ii} M = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_1^{-1} e_{i1} M^{(1)}. \tag{2. 2}$$

Indem wir Satz 1. a, das Korollar dazu und Satz 3 auf $M^{(1)}, N^{(1)}$ anwenden, erhalten wir mühelos die folgenden Sätze 5 und 6. Wir definieren dazu:

W sei unzerlegbarer C-Teilraum $\neq 0$ von V, $\mathfrak{r}_W$ bezeichne das Ordnungsideal $(M \cap W : N \cap W)$ von $M \cap W / N \cap W$, aufgefaßt als $\mathfrak{o}$-Modul.

Eine Simultanzerlegung

$$\begin{aligned} M &= M_1 \oplus \cdots \oplus M_t \\ N &= N_1 \oplus \cdots \oplus N_t \qquad (N_i = M_i \cap N) \end{aligned} \tag{2. 3}$$

[2] Gebraucht wird nur, daß alle $\mathfrak{B}_i$ gleich sind.

in unzerlegbare Moduln M_i, N_i heiße *kanonisch*, falls $\mathfrak{r}_i := (M_i : N_i)$ Teiler von $\mathfrak{r}_W$ für jeden unzerlegbaren Teilraum $W \neq 0$ von $KM_i + \cdots + KM_t$ ist. Insbesondere ist dann

$$\mathfrak{r}_1 > \cdots > \mathfrak{r}_t. \tag{2. 4}$$

Satz 5. *C sei einfach, M und $N < M$ seien $\mathfrak{O}$-Gitter mit $KM = KN$.*

Dann gilt: M, N besitzen kanonische Simultanzerlegungen in unzerlegbare Moduln. Die $\mathfrak{r}_i$ fallen dabei stets gleich aus („Elementarindizes" von (M, N)). Eine Simultanzerlegung (2. 3) *von (M, N), bei der $(M_i : N_i)$ der i-te Elementarindex von (M, N) für jedes $i = 1, \ldots, t$ ist, ist kanonisch.*

Satz 6. *Sei C zentral einfach über K. Sei D die zu C gehörige Divisionsalgebra.*

1. *Ist für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq 0$ von $\mathfrak{o}$ die Komplettierung $\overline{D}_\mathfrak{p}$ von D nullteilerfrei, so ist jede Simultanzerlegung* (2. 3) *eines beliebigen Paares (M, N) von $\mathfrak{O}$-Gittern mit $N < M$, $KN = KM$, für die* (2. 4) *gilt, kanonisch.*

2. *Anderenfalls gibt es in jedem zerlegbaren C-Modul V ein Paar von $\mathfrak{O}$-Gittern (M, N) mit $KN = KM$, das eine unkanonische Zerlegung* (2. 3) *besitzt, für die trotzdem* (2. 4) *gilt.*

§ 3. Torsionsmoduln

Aus Satz 1 folgt, daß jeder endlich erzeugte $\mathfrak{O}$-Modul T, der über $\mathfrak{o}$ nur Torsionselemente besitzt („*Torsionsmodul über* $\mathfrak{O}$"), direkte Summe von Moduln $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mit vollen Linksidealen $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ ist.

Die Lokalisierung $T_\mathfrak{p} := T \otimes_\mathfrak{o} \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ von T zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ stimmt mit ihrer Komplettierung $\overline{T}_\mathfrak{p} := T \otimes_\mathfrak{o} \overline{\mathfrak{o}}_\mathfrak{p}$ überein. Teilt $\mathfrak{p}$ nicht das Annullatorideal $\mathfrak{a} := \{\lambda \in \mathfrak{o} \mid \lambda T = 0\}$ von T in $\mathfrak{o}$, so ist $\overline{T}_\mathfrak{p} = 0$. Daher ist die natürliche Abbildung

$$T \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} T_\mathfrak{p} \tag{3. 1}$$

eine Bijektion. (Injektivität: [2], S. 112, Surjektivität mit starkem Approximationssatz.)

Für eine Klassifikation der endlich erzeugten Torsionsmoduln brauchen wir nach dem Satz von Krull-Schmidt nur die unzerlegbaren unter ihnen zu kennen.

Satz 7. *Die unzerlegbaren endlich erzeugten Torsionsmoduln $\neq 0$ über $\mathfrak{O}$ sind die Moduln der Form $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{(\nu)}$ mit maximalen Linksideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{O}$ und beliebigem Exponenten $\nu > 0$. Dabei bezeichne $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ das eindeutig durch $\mathfrak{P}$ bestimmte Produkt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_\nu$ im Brandtschen Gruppoid, bei dem alle Faktoren zusammengehörige Ideale* (s. [5], S. 77) *sind.*

Ist C einfach, so gilt:

$$\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{(\nu)} \cong \mathfrak{O}/\mathfrak{Q}^{(\mu)} \Leftrightarrow N(\mathfrak{P}^{(\nu)}) = N(\mathfrak{Q}^{(\mu)}) . \tag{3. 2}$$

Beweis. Ist T unzerlegbar, so stimmt T aufgrund der Bijektion (3. 1) mit seiner einzigen Lokalisierung $\overline{T}_\mathfrak{p} \neq 0$ überein. Wir können daher von vornherein — auch für den Beweis von (3. 2) — $\mathfrak{o}$ als kompletten diskreten Bewertungsring voraussetzen[3]).

Ferner können wir annehmen, daß C einfach ist.

$\mathfrak{O}$ läßt sich deuten als Endomorphismenring eines Linksgitters $\mathfrak{v}$ über der Maximalordnung Ω eines Schiefkörpers über $\mathfrak{o}$. Die Endomorphismen operieren dabei von rechts

[3]) Insbesondere brauchen wir Satz 1 nur für diesen besonders einfachen Fall.

auf $\mathfrak{v}$. Die vollen ganzen Linksideale von $\mathfrak{O}$ sind die Mengen Hom $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ von Endomorphismen von $\mathfrak{v}$, die $\mathfrak{v}$ in feste Ω-Gitter $\mathfrak{w} < \mathfrak{v}$ abbilden. Hom $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ ist genau dann maximales Linksideal von $\mathfrak{O}$, falls $\mathfrak{w}$ bezüglich $\mathfrak{v}$ die Elementarteiler (s. Satz 2) $\Omega, \ldots, \Omega, \mathfrak{p}_0$ besitzt ($\mathfrak{p}_0 =$ einziges Primideal von Ω). Hom $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ ist daher genau dann ein Ideal $\mathfrak{P}^{(\nu)}$, wenn $\mathfrak{w}$ die Elementarteiler $\Omega, \ldots, \Omega, \mathfrak{p}_0^\nu$ besitzt.

Damit ist (3. 2) evident. Weiter besitzt ein Modul $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{(\nu)}$ nur eine Kompositionsreihe, ist also sicher unzerlegbar.

Umgekehrt ist jeder unzerlegbare endlich erzeugte Modul nach Satz 1, und weil $\mathfrak{O}$ Hauptidealring ist, von der Form $\mathfrak{O}/\mathfrak{B}$. Sei $\mathfrak{B} = \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$. Aus dem folgenden trivialen Hilfssatz liest man ab, daß höchstens ein Elementarteiler von $\mathfrak{w}$ bezüglich $\mathfrak{v}$ von Ω verschieden sein darf.

Hilfssatz. *Sind* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *volle Linksideale von* $\mathfrak{O}$ *mit* $\mathfrak{C} + \mathfrak{D} = \mathfrak{O}$, *so ist die natürliche Abbildung* $\mathfrak{O}/\mathfrak{C} \cap \mathfrak{D} \to \mathfrak{O}/\mathfrak{C} \oplus \mathfrak{O}/\mathfrak{D}$ *bijektiv.*

$\mathfrak{B}$ muß also von der Form $\mathfrak{P}^{(\nu)}$ sein.

Literatur

[1] *M. Auslander* and *O. Goldman*, Maximal orders, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 1—24.

[2] *N. Bourbaki*, Algèbre commutative, Chap. II. Act. Sci. Ind. 1290. Paris 1962.

[3] *H. Cartan* and *S. Eilenberg*, Homological algebra, Princeton 1956.

[4] *Cl. Chevalley*, L'arithmétique dans les algèbres de matrices, Act. Sci. Ind. 323. Paris 1936.

[5] *M. Deuring*, Algebren, Berlin, Göttingen 1935.

[6] *I. Kaplansky*, Elementary divisors and modules, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464—491.

[7] *I. Kaplansky*, Modules over Dedekind rings and valuation rings, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 327—340.

[8] *O. T. O'Meara*, Introduction to quadratic forms, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

Eingegangen 23. November 1965