

# Quanteneffekte gespeicherter Ionen



Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der  
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) der Fakultät für  
Physik der Universität Regensburg

vorgelegt von  
**Christoph Skornia**  
aus Landau a. d. Isar

2001

1. Gutachter: Prof. Dr. E. Werner
2. Gutachter: Prof. Dr. H. Walther

Tag der mündlichen Prüfung: 2.7.2001

# Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde theoretisch untersucht, inwieweit an einzelnen gespeicherten Ionen Grundlagenexperimente zu Quanteneffekten durchgeführt werden können und mit welchen Resultaten dabei zu rechnen ist. Angeregt von Untersuchungen an Atomstrahlen [1] konnten konkrete Vorhersagen über den Einfluss eines Resonators auf die Energieniveaueverschiebungen eines gespeicherten  $\text{In}^+$ -Ions getroffen werden. Bei realistisch angenommenen experimentellen Parametern wurde zum einen numerisch gezeigt, dass diese Verschiebung sehr gut nachgewiesen werden kann. Zum anderen wurden aber auch die bisher verwendeten analytischen Näherung weiter verfeinert. Das zugehörige Experiment befindet sich gerade im Aufbau.

Im Rahmen der Untersuchung von Kohärenzeffekten der inneren Freiheitsgrade konnten bislang nicht bekannte Zusammenhänge zwischen „Autler-Townes-Splitting“ und dem gerade in jüngster Zeit vielfach diskutiertem „Coherent-Population-Trapping“ hergestellt werden. Diese ermöglichen ein tieferes Verständnis der Natur der beiden Effekte, sowie eine klare Trennung der jeweiligen Parameterräume. Hierbei stellte sich heraus, dass gerade das gespeicherte  $\text{In}^+$ -Ion ein ideales System zum experimentellen Nachweis dieser Zusammenhänge darstellt.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wurden stets Systeme aus zwei oder mehr Ionen betrachtet. Die Frage inwieweit Wechselwirkungen von einzelnen Ionen die im Fluoreszenzlicht derartiger Systeme beobachteten Hell- und Dunkelphasen beeinflusst, wurde hier untersucht. Dabei wurde nachgewiesen, dass diese Wechselwirkungen gerade dann beobachtet werden können, wenn das Fluoreszenzlicht der Ionen derart aufgelöst wird, dass es den einzelnen Ionen zugeordnet werden kann. Im gegenteiligen Fall konnte gezeigt werden, dass als Konsequenz des Quanten-Zeno-Effekts der Nachweis der Wechselwirkungen unmöglich wird. Dieser Zusammenhang zwischen der Dipol-Dipol Wechselwirkung und der optischen Auflösung des Fluoreszenzlichts wurde hier zum ersten Mal theoretisch nachgewiesen.

Darüberhinaus wurden auch Interferenzeffekte in der Einzelphotonenstatistik von an zwei oder mehr Ionen gestreutem Laserlicht gefunden. Diese wurden analytisch für beliebige Laserintensitäten und Einfallswinkel, bei frei wählbarer Position des betrachteten Detektors, berechnet. Diese Rechnungen zeigen die sehr weitreichende Analogie zwischen

Young'schen Doppelspaltexperiment und dem hier untersuchten System, wobei aber auch die Quantennatur der berechneten Effekte bewiesen werden konnte. Erstaunlicherweise besitzt das gestreute Licht je nach Streuwinkel völlig unterschiedliche statistische Eigenschaften, wozu es kein klassisches Analogon gibt. Die Ursache für diese Effekte, welche ohne Wechselwirkung der einzelnen Ionen zustande kommen, ist die Verschränkung der Ionen durch die Reduktion des Systemzustands als Folge der Detektion. Die Erweiterung dieser Rechnungen auf Ionenketten zeigt ebenfalls sehr starke Quanteninterferenzen. Dabei wurde nachgewiesen, dass es als Folge von geeigneter Detektion möglich ist auch mehrere gespeicherte Ionen sehr einfach in einen verschränkten Zustand zu bringen.

Sämtliche im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Effekte sind auch im experimentell zugänglichen Bereich. Die konkrete Umsetzung ist bereits am Max-Planck-Institut für Quantenoptik in Vorbereitung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Innere Dynamik gespeicherter Ionen</b>	<b>1</b>
1.1	Ionenfallen . . . . .	1
1.2	Hamiltonoperator . . . . .	2
1.3	Mastergleichung . . . . .	4
1.4	Atom-Laser-Wechselwirkung . . . . .	8
1.5	Spontanemission und Resonanzfluoreszenz . . . . .	11
1.6	Strahlungsintensität und Photonenkorrelationen . . . . .	13
1.7	Quantensprungmethode . . . . .	15
1.8	Verschränkung von Ionenpaaren . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Effekte von Einzelionen</b>	<b>19</b>
2.1	Modendichte in der Resonator-QED . . . . .	19
2.2	Modifizierte Lambshift . . . . .	22
2.2.1	Grundlagen . . . . .	22
2.2.2	Numerische Betrachtung . . . . .	23
2.2.3	Fehleranalyse . . . . .	24
2.2.4	Analytische Approximationen . . . . .	27
2.3	Quantenkohärenzen im Einzelion . . . . .	29
2.3.1	Grundlagen . . . . .	29
2.3.2	Uhrenlaserinduzierte Kohärenz . . . . .	31
2.3.3	Kühlaser in Resonanz . . . . .	33
2.3.4	Allgemeiner Fall . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Quantensprünge in Ionenpaaren</b>	<b>41</b>
3.1	Dipol-Dipol-Wechselwirkung in Ionenpaaren . . . . .	41
3.2	Mastergleichung für Ionenpaare . . . . .	42
3.2.1	Symmetrisierung . . . . .	42
3.2.2	Ratengleichungen . . . . .	44
3.2.3	Fluoreszenzphasen . . . . .	46
3.2.4	Erweiterungen . . . . .	47
3.3	Quanten-Zeno-Effekt für die Dipol-Dipol Wechselwirkung . . . . .	48
3.3.1	Entwicklung des Zustandsvektors . . . . .	48
3.3.2	Übergang vom doppelt hellen in den einfach hellen Unterraum . . . . .	49

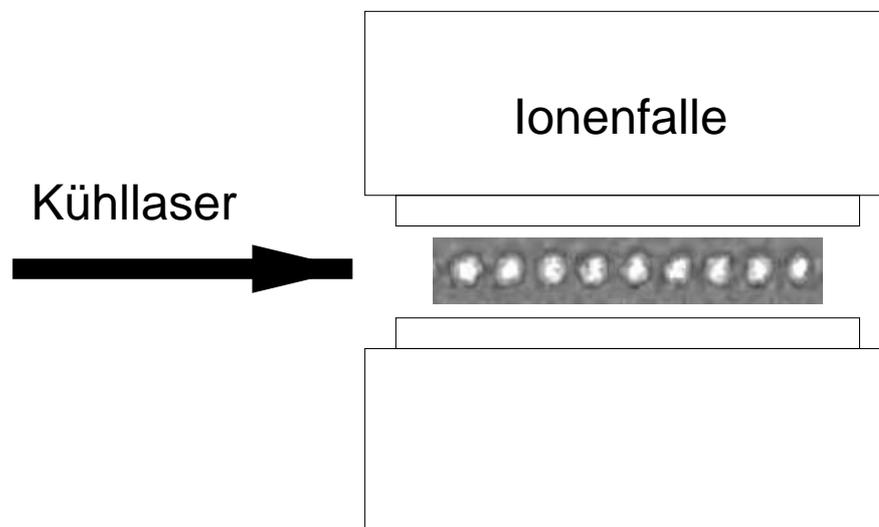
3.3.3	Übergang in den dunklen Zustand . . . . .	50
3.3.4	Verbleibende Übergänge . . . . .	52
3.4	Dipol-Dipol-Wechselwirkung im V-System mit zwei Lasern . . . . .	53
3.4.1	Grundlagen . . . . .	53
3.4.2	Quanten-Monte-Carlo Simulationen . . . . .	54
3.4.3	Analyse des Dichteoperators . . . . .	56
3.5	Ortsaufgelöste Detektion . . . . .	61
3.5.1	Grundlagen . . . . .	61
3.5.2	Sprünge und Raten . . . . .	63
3.5.3	Dipol-Dipol Wechselwirkung und Verschränkung . . . . .	63
3.5.4	Signatur der Dipol-Dipol Wechselwirkung . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Photonenkorrelationen</b>	<b>69</b>
4.1	Korrelationsfunktionen für 2-Niveau Systeme . . . . .	69
4.2	Interferenzeffekte zweier unabhängiger Ionen . . . . .	70
4.2.1	Mastergleichung und stationäre Zustände . . . . .	70
4.2.2	Dynamik des Systems und Detektionsschema . . . . .	73
4.2.3	Intensität . . . . .	78
4.2.4	Bunching und Antibunching . . . . .	79
4.2.5	Interpretation . . . . .	84
4.3	Korrelationsfunktionen und Dipol-Dipol Wechselwirkung . . . . .	85
4.3.1	Sub- und Superradianz . . . . .	85
4.3.2	Bunching und Antibunching . . . . .	87
4.4	2-Niveau-Ionenketten . . . . .	88
4.4.1	Vom Doppelspalt zum Gitter . . . . .	88
4.4.2	Korrelationen 2. Ordnung . . . . .	90
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

# 1

## Innere Dynamik gespeicherter Ionen

### 1.1 Ionenfallen

Die Technologie des Speicherns und Kühlens einzelner Ionen hat sich in den letzten Jahren mit sehr großen Schritten weiterentwickelt. Seit zum ersten Mal 1958 die Speicherung von Ionen in einem mit Radiofrequenz oszillierendem Quadrupolfeld demonstriert wurde [2], gab es immer wieder grundlegende Experimente, welche diese Technik benutzten, um Zugang zu den Eigenschaften einzelner Atome zu finden [3–6]. Die Ionen können dabei



**Abbildung 1.1:** Ionenfalle und Laserkühlung

über Tage an ihrem Ort festgehalten werden. Am Max-Planck-Institut für Quantenoptik werden seit Jahren Effekte an Magnesium-, Kalzium- und Indiumionen untersucht [7–11], wobei es auch möglich ist, die Ionen in den Grundzustand des sie einschließenden Potentials zu kühlen [12]. Da dieses Potential in guter Näherung dem eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators entspricht, sind dessen Eigenschaften gut bekannt,

die Temperatur eines Ions liegt dort im Bereich von unter  $100 \mu K$ . Derartig niedrige Temperaturen können nur mit Laserkühlung [13–15] erzeugt werden. Diese beruht darauf, dass bei der Wechselwirkung eines Ions mit Laserlicht geeigneter Wellenlänge Photonen absorbiert werden, deren Energie niedriger ist als diejenige der vom Ion wieder emittierten Photonen. Diese Energiedifferenz wird der kinetischen Energie des Ions entzogen, das Ion wird gekühlt.

In einem derartigen System können die Ionen als gut lokalisiert angenommen werden, die äußeren Freiheitsgrade des Systems sind dabei stabil. Gerade solche „Modellsysteme“ sind jedoch erforderlich, um die innere, die elektronischen Freiheitsgrade betreffende, Dynamik von Ionen zu betrachten. Insofern sind gespeicherte gekühlte Ionen ein ideales System um Quanteneffekte auf unmittelbare Weise sichtbar zu machen. So wurden auch Quantensprünge von einzelnen Ionen nachgewiesen, welche vorher nur in theoretischen Modellen angenommen wurden [16–23]. Allgemein zeigt sich, dass mit dieser Technologie die grundlegenden „Gedankenexperimente“ der Quantenmechanik der Überprüfung durch ein „Laborexperiment“ zugänglich gemacht werden können.

## 1.2 Hamiltonoperator

Für die Analyse der inneren Dynamik von gespeicherten Ionen ist es nötig, den Hamiltonoperator des Systems zu kennen. Die Betrachtung kann unter der Annahme, dass die äußeren Freiheitsgrade stabil sind, auf den Wechselwirkungshamiltonoperator der Ionen mit dem elektromagnetischem Strahlungsfeld reduziert werden. Dabei werden die Ionen als fest lokalisiert angenommen.

Nach der von Power und Zienau für ein System von Atomen im Strahlungsfeld eingeführten Transformation [24, 25] lässt sich der Hamiltonoperator in Dipolnäherung in der Form

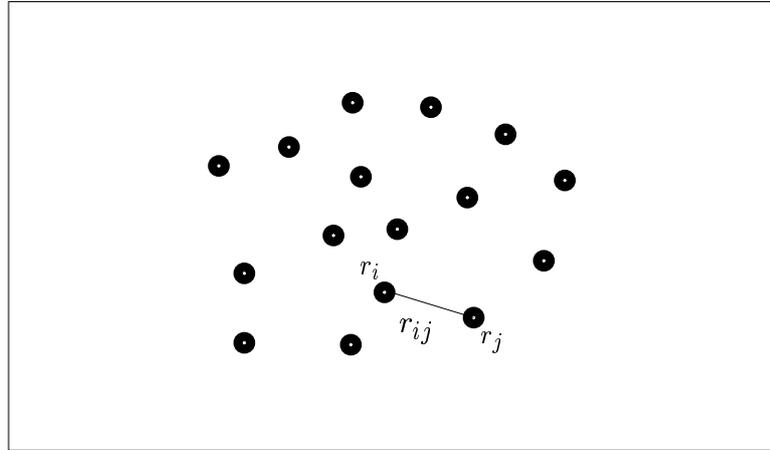
$$H' = H_0 - \sum_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{E}_j + 2\pi \int |\mathbf{P}(r)|^2 d^3r = H + H_s \quad (1.1)$$

darstellen [26, 27], wobei

$$H = H_0 - \sum_j \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{E}_j, \quad H_s = 2\pi \int |\mathbf{P}(r)|^2 d^3r, \quad \mathbf{P}(r) = \sum_j \mathbf{d}_j \delta(r - r_j). \quad (1.2)$$

$H_0$  ist dabei der ungestörte Hamiltonoperator der einzelnen Atome sowie des Strahlungsfeldes,  $\mathbf{E}_j$  ist der transversale Anteil des elektromagnetischen Feldes am Ort  $\mathbf{r}_j$  des  $j$ -ten Atoms mit Dipolmoment  $\mathbf{d}_j$ .

Bei den weiteren Umformungen soll zunächst von 2-Niveau-Atomen ausgegangen werden, die Erweiterung auf mehrere Niveaus erfolgt am Ende durch Summation über die Einzeltermine. Die Modenexpansion



**Abbildung 1.2:** Ansammlung von Atomen im Strahlungsfeld

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^{(+)} + \mathbf{E}_j^{(-)} = i \sum \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} a_{\mathbf{k}s} \epsilon_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{h.c.} \quad (1.3)$$

des elektromagnetischen Feldes sowie folgende Form des Dipoloperators

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{d}_{eg}^{(j)} |e\rangle_{jj} \langle g| + \text{h.c.} \quad (1.4)$$

ermöglichen die weitere Vereinfachung des Hamiltonoperators. Hierbei ist  $\epsilon_{\mathbf{k}s}$  der Polarisationsvektor und  $a_{\mathbf{k}s}$  der Vernichtungsoperator des Feldes,  $|e\rangle_j$  ist der angeregte und  $|g\rangle_j$  der Grundzustand des  $j$ -ten Atoms. Definiert man weiterhin

$$\sigma_j^+ := |e\rangle_{jj} \langle g|, \quad \sigma_j^- := |g\rangle_{jj} \langle e|, \quad \text{und} \quad \sigma_j^z := |e\rangle_{jj} \langle e| - |g\rangle_{jj} \langle g|, \quad (1.5)$$

so findet man unter Verwendung der Rotating-Wave-Approximation <sup>1</sup>:

$$H = \hbar\omega \sum_i \sigma_i^z + \hbar \sum_{\mathbf{k}s} \omega_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} + \hbar \sum_{\mathbf{k}s} (g_{\mathbf{k}s} a_{\mathbf{k}s} \sigma_{\mathbf{k}}^+ + \text{h.c.}) \quad (1.6)$$

mit

$$\sigma_{\mathbf{k}}^\pm := \sum_i \sigma_i^\pm e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad g_{\mathbf{k}s} := -i \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0 V}} (\mathbf{d} \cdot \epsilon_{\mathbf{k}s}). \quad (1.7)$$

<sup>1</sup>Im vorliegenden Fall wurden die Terme  $a_{\mathbf{k}s} \sigma_i$  und  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger \sigma_i^+$  vernachlässigt. Eine detaillierte Analyse der Rotating-Wave-Approximation findet man in [26], Appendix A.

Diese Darstellung (1.6), welche auch die Dipol-Dipol-Wechselwirkung beinhaltet, soll die Grundlage aller weiteren Berechnungen sein. Im Besonderen sollen dabei die spontanen Emissionen des Systems behandelt werden.

Zum einen soll eine Darstellung für die Zeitentwicklung eines beliebigen Zustandsvektors unter der Bedingung, dass im System keine spontane Emission von Photonen stattfindet, gefunden werden. Diese ist die Grundlage für die durchgeführten Quanten-Monte-Carlo-Simulationen, welche eine Analyse der inneren Dynamik des Systems ermöglichen. Zum anderen soll die Dynamik der atomaren Freiheitsgrade aber auch mit Hilfe der Mastergleichung für den Dichteoperator betrachtet werden. Damit wird die quantenstatistische Behandlung des vorliegenden Systems auch ohne numerischen Simulationen ermöglicht.

### 1.3 Mastergleichung

Um die Eigenschaften der spontanen Emissionen eines Systems aus mehreren Atomen zu betrachten, ist es sinnvoll, die von der Mastergleichung für den Dichteoperator gegebene Quantenstatistik zu analysieren [28–31]. Deshalb soll neben dem Hamiltonoperator (1.6) auch die Mastergleichung des Systems bestimmt werden.

Der Dichteoperator des gesamten Systems aus Atomen und elektromagnetischem Feld ist gerade [26, 27]

$$\rho_{AR} := \sum_i P(i) |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (1.8)$$

wobei über alle Anteile  $\{|\Psi_i\rangle\}_i$  des Gesamtzustands mit jeweiligen statistischen Gewichten  $P(i)$  summiert wird. Interessiert man sich für die Eigenschaften eines Teils des Gesamtsystems, so bildet man die Spur über die Freiheitsgrade des anderen Teils und erhält damit die reduzierten Dichteoperatoren. In hier betrachteten Fall sind dies der Atomanteil  $\rho_A$  und der Feldanteil  $\rho_R$ . So definiert man

$$\rho_A := \text{Tr}_R \rho_{AR}, \quad \text{und} \quad \rho_R := \text{Tr}_A \rho_{AR}. \quad (1.9)$$

Der Dichteoperator erfüllt die Schrödingergleichung und so folgt

$$\dot{\rho}_{AR} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho_{AR}]. \quad (1.10)$$

Dies führt im Wechselwirkungsbild für den laplace-transformierten Dichteoperator  $\hat{\rho}_A^I$  weiter zu [26]

$$\begin{aligned}
\rho_A^I(0) - z\hat{\rho}_A^I &= - \sum_{ij} \hat{\gamma}_{ij}^+ \{ \sigma_i^+ \sigma_j^- \rho_A^I - 2\sigma_j^- \rho_A^I \sigma_i^+ + \rho_A^I \sigma_i^+ \sigma_j^- \} - \\
&\quad - \sum_{ij} \hat{\gamma}_{ij}^- \{ \sigma_i^- \sigma_j^+ \rho_A^I - 2\sigma_j^+ \rho_A^I \sigma_i^- + \rho_A^I \sigma_i^- \sigma_j^+ \} - \\
&\quad - i \sum_{ij} \hat{\Omega}_{ij} [\sigma_i^+ \sigma_j^-, \rho_A^I]
\end{aligned} \tag{1.11}$$

mit

$$\hat{\gamma}_{ij}^\pm(z) = \sum_{\mathbf{ks}} g_{\mathbf{k}si} g_{\mathbf{k}s}^* z \{ z^2 + (\omega_{\mathbf{ks}} \mp \omega)^2 \} \tag{1.12}$$

$$\hat{\Omega}_{ij}(z) = - \sum_{\mathbf{ks}} g_{\mathbf{k}si} g_{\mathbf{k}s}^* \left\{ (\omega_{\mathbf{ks}} - \omega) [z^2 + (\omega_{\mathbf{ks}} - \omega)^2]^{-1} + (-)^{\delta_{ij}} (\omega \rightarrow -\omega) \right\} \tag{1.13}$$

Geht man weiterhin davon aus, dass für die betrachteten Zeitskalen und Atomabstände  $r_{ij}$  gilt:  $t \gg \omega$ ,  $\max(r_{ij}/c) \ll \Delta t$ , dann lässt sich die Markov-Approximation anwenden. Damit können sowohl  $\hat{\gamma}_{ij}^\pm(z)$  als auch  $\hat{\Omega}_{ij}(z)$  durch ihre Grenzwerte für  $z \rightarrow 0^+$  ersetzt werden.

Man findet

$$\gamma_{ij} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \hat{\gamma}_{ij}^\pm(z) = \pi \sum_{\mathbf{ks}} g_{\mathbf{k}si} g_{\mathbf{k}s}^* \delta(\omega - \omega_{\mathbf{ks}}) \tag{1.14}$$

$$\Omega_{ij} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \hat{\Omega}_{ij}(z) = - \sum_{\mathbf{ks}} g_{\mathbf{k}si} g_{\mathbf{k}s}^* [(\omega_{\mathbf{ks}} - \omega)^{-1} + (-)^{\delta_{ij}} (\omega_{\mathbf{ks}} + \omega)^{-1}] \tag{1.15}$$

Nimmt man weiterhin den Grenzwert für beliebig große  $L$  so kann die Summation über  $\mathbf{k}$  durch Integration über ein Modenkontinuum ersetzt werden<sup>2</sup>:

$$\sum_{\mathbf{ks}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_{\mathbf{s}} \tag{1.16}$$

Damit folgt<sup>3</sup>:

<sup>2</sup>Die hier entstehenden Integrationen, welche auch über Pole führen, sind im weiteren Verlauf stets als Hauptwertintegrale zu verstehen.

<sup>3</sup>Hier wurde noch der Anteil des Hamiltonoperators des freien Elektrons [24] berücksichtigt. Außerdem wurden diejenigen Terme vernachlässigt, deren Beitrag proportional zu  $\delta(r_{ij})$  ist [32].

$$\gamma_{ij} = \frac{c}{4\pi\hbar\epsilon_0} \int k^3 dk d\Omega' \delta(\omega - kc) |d|^2 (1 - \cos\theta') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_{ij}} \quad (1.17)$$

$$\Omega_{ii} = -\frac{2|d|^2 k_0^3}{3\pi\hbar\epsilon_0} \int dk [(k + k_0)^{-1} + (k - k_0)^{-1}] \quad (1.18)$$

$$\Omega_{ij} = -\frac{2|d|^2 k_0^2}{3\pi\hbar\epsilon_0} \int k dk [(k - k_0)^{-1} + (k + k_0)^{-1}] \times \\ [j_0(kr_{ij}) + (\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}) j_2(kr_{ij})] \quad \text{für } i \neq j \quad (1.19)$$

wobei  $\theta$  gleich dem Winkel zwischen  $\mathbf{d}$  und dem Raumwinkel  $\mathbf{R}$  und  $k_0 := \frac{\omega}{c}$  ist. Hierbei wurde angenommen, dass die Dipolmomente der einzelnen Atome gleich ausgerichtet sind.

Diese Ausdrücke können, wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch ausgeführt werden wird, leicht auch an veränderte Randbedingungen angepasst werden. Dies ist etwa bei der Modifikation des System durch eine Cavity erforderlich. Der Ausdruck  $\Omega_{ii}$  steht gerade für die Lambshift, welche weiter nur durch Renormierung [33] oder durch Einführen einer Abschneidefrequenz [34, 35] bestimmt werden kann. Hier soll im folgenden  $\Omega_{ij}$  nur für  $i \neq j$  betrachtet werden.

Geht man vom nicht modifizierten Vakuum aus, so lassen sich die verbleibenden Integrale analytisch lösen, woraus folgt:

$$\gamma_{ij} = \gamma \left\{ \frac{\sin(kr_{ij})}{kr_{ij}} + \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right) \times \right. \\ \left. \left[ \left( \frac{3}{(kr_{ij})^3} - \frac{1}{(kr_{ij})} \right) \sin(kr_{ij}) - \frac{3}{(kr_{ij})^2} \cos(kr_{ij}) \right] \right\} \quad (1.20)$$

$$\Omega_{ij} = \frac{3}{2} \gamma \left\{ (1 - 3 \cos^2 \theta) \left[ \frac{\sin(kr_{ij})}{(kr_{ij})^2} + \frac{\cos(kr_{ij})}{(kr_{ij})^3} \right] - (1 - \cos^2 \theta) \frac{\cos(kr_{ij})}{(kr_{ij})} \right\} \quad (1.21)$$

mit  $\gamma := \frac{2}{3} |d|^2 \frac{k^3}{\hbar\epsilon_0}$ .

Sowohl  $\gamma_{ij}$  als auch  $\Omega_{ij}$  weisen mit dem Atomabstand  $r_{ij}$  oszillierendes Verhalten auf. Die Periodizität ist gerade die Übergangswellenlänge zwischen  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$ . Die Einhüllende des Betrags fällt für größere Atomabstände wie  $\frac{1}{r_{ij}}$  ab, weshalb für große Atomabstände diese Wechselwirkungen für die Dynamik keine Rolle mehr spielen.

Während aber für sehr kleine Atomabstände  $\gamma_{ij}$  gegen 1 konvergiert, so divergiert  $\Omega_{ij}$  für geeignete  $\theta$ . Allerdings sei darauf hingewiesen, dass die Näherungen, welche zu (1.19) geführt haben für beliebig kleine  $r_{ij}$  ungültig werden, insbesondere ist es dann nicht mehr gerechtfertigt die Atome wie Punktdipole zu behandeln.

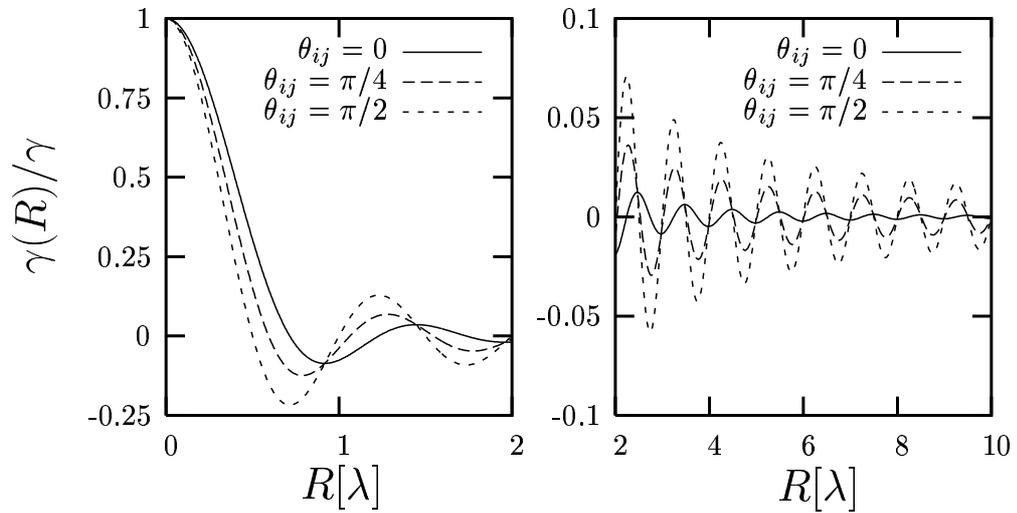


Abbildung 1.3: Abstandsabhängigkeit des Parameters  $\gamma_{ij}$  ( $R := |\mathbf{r}_{ij}|$ )

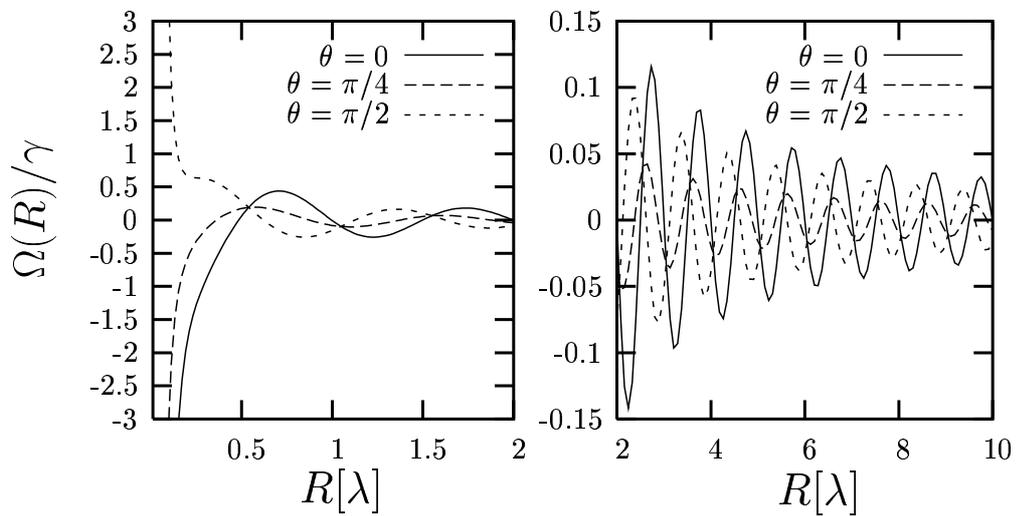


Abbildung 1.4: Abstandsabhängigkeit des Parameters  $\Omega_{ij}$  ( $R := |\mathbf{r}_{ij}|$ )

Für die gesamte Mastergleichung folgt damit nach Rücktransformation ins Schrödingerbild

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_A = & i\omega_0 \sum_i [\sigma_i^z, \rho_A] - i \sum_{i \neq j} \Omega_{ij} [\sigma_i^+ \sigma_j^-, \rho_A] \\ & - \sum_{ij} \gamma_{ij} (\sigma_i^+ \sigma_j^- \rho_A - 2\sigma_j^- \rho_A \sigma_i^+ + \rho_A \sigma_i^+ \sigma_j^-) \end{aligned} \quad (1.22)$$

wobei die ursprüngliche Übergangsfrequenz  $\omega$  durch  $\omega_0 = \omega + \Omega_{ii}$ , also der Übergangsfrequenz mit Lambshift, ersetzt wurde.

Diese Form der Mastergleichung lässt sich auch sehr gut für ein System aus Multilevelatomen verallgemeinern, dazu müssen die auftretenden Summen nur über alle möglichen Übergänge gebildet werden, der Rest der Rechnung wird dadurch nicht berührt. Mit den Definitionen

$$\sigma_{ij}^{\alpha\beta} := |\alpha\rangle_{ij}\langle\beta|, \quad \gamma_{ij}^{\alpha\beta} := \gamma_{ij}|_{k \rightarrow k_{\alpha\beta}}, \quad \text{und} \quad \Omega_{ij}^{\alpha\beta} := \Omega_{ij}|_{k \rightarrow k_{\alpha\beta}}, \quad (1.23)$$

sowie den renormalisierten Energieniveaus von  $\omega_\alpha$  ( $\omega_\alpha > \omega_\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$ ) für den Zustand  $|\alpha\rangle$  findet man:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_A = & -i \sum_{i\alpha} [\omega_\alpha \sigma_i^{\alpha\alpha}, \rho_A] - i \sum_{i \neq j, \alpha > \beta} \Omega_{ij}^{\alpha\beta} [\sigma_j^{\alpha\beta} \sigma_i^{\beta\alpha}, \rho_A] \\ & - \sum_{ij, \alpha > \beta} \gamma_{ij}^{\alpha\beta} (\rho_A \sigma_j^{\alpha\beta} \sigma_i^{\beta\alpha} + \sigma_i^{\beta\alpha} \rho_A \sigma_j^{\alpha\beta} + \text{h.c.}) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Diese Mastergleichung beschreibt die gesamte Dynamik der atomaren Freiheitsgrade unter der Voraussetzung, dass sich das elektromagnetische Feld zur Zeit  $t = 0$  im Vakuumzustand befindet. Die Dipol-Dipol-Wechselwirkung wird durch die Koeffizienten  $\gamma_{ij}^{\alpha\beta}$  und  $\Omega_{ij}^{\alpha\beta}$  für  $i \neq j$  beschrieben während  $2\gamma_{ii}^{\alpha\beta}$  gerade die Zerfallsrate von  $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$  ist und „Fermis Goldener Regel“ entspricht.

## 1.4 Atom-Laser-Wechselwirkung

Im Gegensatz zu den vorhergehenden Abschnitten soll sich das elektromagnetische Feld im Weiteren nicht mehr im Vakuumzustand befinden. Es wird angenommen, dass sich die Atome in einem Laserfeld befinden welches resonant zu einem der atomaren Übergänge ist. Da die Atom-Laser-Wechselwirkung für jedes Atom von den anderen Atomen unabhängig ist, kann sie auch nur für ein einzelnes Atom betrachtet werden und dann als Summe der einzelnen Wechselwirkungen in die bisherigen Formeln integriert

werden.

Wie schon in (1.1) so wird auch hier die Wechselwirkung des einzelnen Atoms mit dem elektromagnetischem Feld durch den Wechselwirkungshamiltonoperator

$$H_{AL} = -\mathbf{d}_A \cdot \mathbf{E}_L \quad (1.25)$$

beschrieben, wobei das Feld aus einer Mode des Feldes in (1.3) besteht. Nach Wahl geeigneter Koordinaten<sup>4</sup> gilt nun [36, 37]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_{eg} (\sigma^+ + \sigma^-), \quad \text{sowie} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{E}_j = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{s}} (a_{\mathbf{k}\mathbf{s}} + a_{\mathbf{k}\mathbf{s}}^\dagger). \quad (1.27)$$

$\mathbf{k}$  und  $\mathbf{s}$  beschreiben hier die vom Laser angeregte Mode,  $\mathbf{d}_{eg}$  ist das Dipolmatrixelement der Zustände  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$ .

Befindet sich die Lasermode in einem kohärenten Zustand mit großer mittlerer Photonenzahl ( $\langle N \rangle \gg 1$ ), so lässt sich der Hamiltonoperator (1.25) mit

$$2\Omega_R := \mathcal{V}_R := -2\mathbf{d}_{eg}\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{s}} \sqrt{\frac{\omega_L}{2\hbar\epsilon_0 V}} \sqrt{\langle N \rangle} \quad (1.28)$$

zu

$$H_{AL} = \hbar\Omega_R (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (1.29)$$

vereinfachen.  $\mathcal{V}_R$  heißt die Rabifrequenz<sup>5</sup> des Atom-Laser-Systems, und wird im Folgenden als einziger Parameter für die Leistung des Laser angesehen.

Um die Wirkung eines Lasers auf ein Atom zu verstehen ist es sinnvoll die zeitliche Entwicklung eines Atoms unter Vernachlässigung des spontanen Zerfalls zu betrachten. Für ein Atom im Zustand  $\Psi(t) = c_e(t)|e\rangle + c_g(t)|g\rangle$  gilt mit der Schrödingergleichung:

$$\dot{c}_e(t) = -i\Omega_R c_g(t) \quad \text{und} \quad \dot{c}_g(t) = -i\Omega_R c_e(t) \quad (1.30)$$

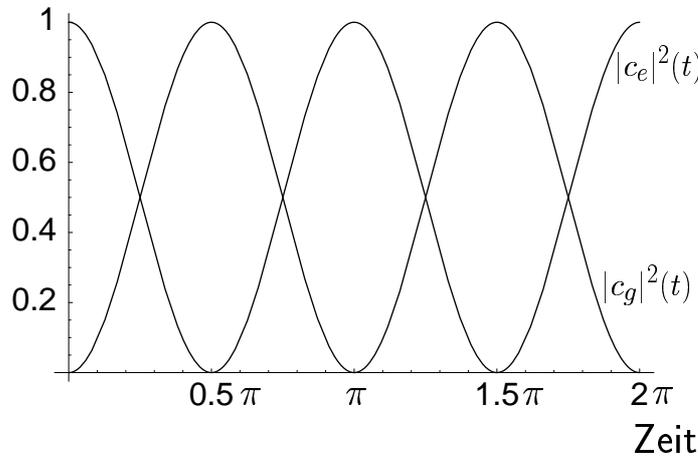
<sup>4</sup>Hierbei wird implizit angenommen, dass es sich bei dem angenommenen Laserfeld nicht um ein stehendes Feld handelt.

<sup>5</sup>Wie in der Literatur, so wird auch im weiteren Text dieser Arbeit auch  $\Omega_R$  als Rabifrequenz bezeichnet, die Notation bleibt jedoch eindeutig.

Offensichtlich wird dieses System unter der Annahme, dass das Atom zur Zeit  $t = 0$  im Grundzustand ist, durch

$$c_e(t) = -i \sin(\Omega_R t) \quad \text{und} \quad c_g(t) = \cos(\Omega_R t) \quad (1.31)$$

gelöst. Für die Populationen gilt damit  $\rho_{ee} = \sin^2(\Omega_R t)$  sowie  $\rho_{gg} = \cos^2(\Omega_R t)$ . Dieses oszillatorische Verhalten der Populationen mit der Periode  $\mathcal{V}_R$  nennt man Rabioszillationen.



**Abbildung 1.5:** Rabioszillationen der atomaren Freiheitsgrade

In der Mastergleichung eines Systems von Atomen (1.24) führt ein Laser, welcher resonant zum atomaren Übergang  $|l_e\rangle \rightarrow |l_g\rangle$  mit oben angenommenen Eigenschaften eingestrahlt wird, einfach zu zusätzlichen Termen, so dass gilt [38]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_A = & -i \sum_{i\alpha} [\omega_\alpha \sigma_i^{\alpha\alpha}, \rho_A] - i \sum_{i \neq j, \alpha > \beta} \Omega_{ij}^{\alpha\beta} [\sigma_j^{\alpha\beta} \sigma_i^{\beta\alpha}, \rho_A] \\ & - \sum_{ij, \alpha > \beta} \gamma_{ij}^{\alpha\beta} \left( \rho_A \sigma_j^{\alpha\beta} \sigma_i^{\beta\alpha} + \sigma_i^{\beta\alpha} \rho_A \sigma_j^{\alpha\beta} + \text{h.c.} \right) \\ & - i\hbar \sum_i \Omega_{Ri} \left[ e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}_i - \omega_L t)} \sigma_i^{l_e l_g} + \text{h.c.}, \rho_A \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Bei gleichzeitiger Einstrahlung mehrerer Laser, deren Wellenlänge ausreichend unterschiedlich ist, wird obige Summation in der Mastergleichung einfach übertragen. Damit lassen sich nun allgemein Mehratomssysteme beschreiben, welche mit resonanten Lasern wechselwirken.

## 1.5 Spontanemission und Resonanzfluoreszenz

Die Diskussion über Quantensprünge wurde viele Jahre geführt, zeitlich nichtstetige Prozesse entsprechen nicht der menschlichen Intuition und wurden deshalb vielfach als Argument für die Unvollständigkeit der Quantentheorie verwendet. Erst seit von der Theorie mit Quanten-Monte-Carlo-Simulationen vorhergesagte Effekte [16–20] auch am einzelnen Atom nachgewiesen wurden [21–23], scheinen Quantensprünge auch von Kritikern der Quantentheorie akzeptiert zu werden. Unter der spontanen Emission eines Photons durch ein Atom versteht man einen Übergang des Atoms in den elektronischen Freiheitsgraden bei gleichzeitiger Anregung des Strahlungsfeldes. Dabei können auch andere Freiheitsgrade des Atoms, wie etwa der Impuls, verändert werden, im Allgemeinen handelt es sich dabei jedoch immer um Prozesse der Form

$$|a\rangle_A \otimes |\{n\}\rangle_R \rightarrow |b\rangle_A \otimes |\{n+1\}_k\rangle_R, \quad (1.33)$$

wobei die Indizes  $A$  und  $R$  die Zustände des Atoms bzw. des Strahlungsfeldes kennzeichnen. Für die Beschreibung der im Weiteren untersuchten Effekte ist es ausreichend die Emission eines 2-Niveau Atoms ohne Berücksichtigung nicht-elektronischer Freiheitsgrade des Atoms zu betrachten. Die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeit das Atom, ohne Wechselwirkung mit einem Laserfeld, im angeregten Zustand  $|e\rangle$  zu finden, lässt sich leicht aus der Mastergleichung (1.24) bestimmen. Man findet [38, 39]

$$\rho_{ee}(t) = e^{-2\gamma t} \rho_{ee}(0), \quad (1.34)$$

was auch dem exponentiellen Zerfallsgesetz von Weisskopf und Wigner [40] entspricht. Um das Spektrum des spontanen Zerfalls zu bestimmen, löst man die Schrödingergleichung (1.6) für den Ansatz

$$|\Psi\rangle(t) = c_e(t)|e, \{0\}\rangle + \sum_{\mathbf{k}} c_g^{\mathbf{k}} |g, \{1\}_{\mathbf{k}}\rangle, \quad |\Psi\rangle(0) = |e, \{0\}\rangle \quad (1.35)$$

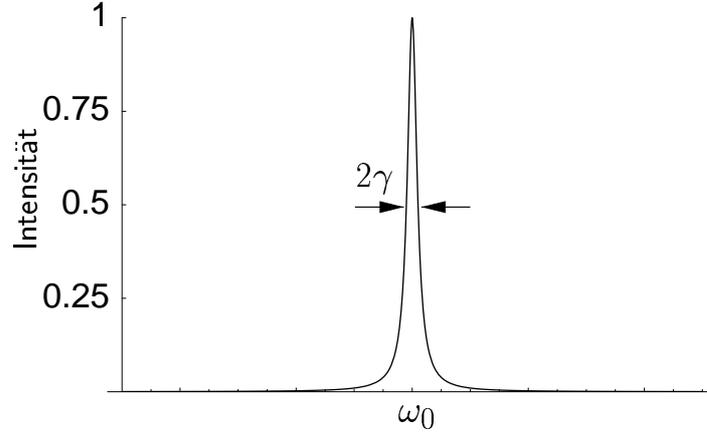
und findet unter Vernachlässigung der auftretenden Levelshifts <sup>6</sup>

$$|c_g^{\mathbf{k}}(\infty)|^2 = \frac{\gamma \omega_{\mathbf{k}}}{\pi \omega_{eg}^2} [(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{eg})^2 + \gamma^2]^{-1} \quad (1.36)$$

Daraus folgt die Energieverteilung der emittierten Strahlung, es handelt sich dabei um eine Lorentzfunktion mit der Linienbreite  $\gamma$ , welche auch als die natürliche Linienbreite des Übergangs bezeichnet wird. Auf die weiteren spektralen Eigenschaften, wie sie etwa bei Wechselwirkung mit Laserlicht oder unter Veränderung der kinetischen Freiheitsgrade auftreten, soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen werden <sup>7</sup>

<sup>6</sup>Die Rolle der Levelshifts wird eingehend in [41] diskutiert

<sup>7</sup>Emissions- und Absorptionsspektren wurden in der Literatur vielfach untersucht, deshalb sei hier auf [37] verwiesen.



**Abbildung 1.6:** Die Energieverteilung von spontan emittierten Photonen wird durch eine Lorentz-funktion beschrieben, deren Breite von der Spontanemissionsrate  $2\gamma$  abhängt.

Die hier als kurze Ableitung des Hamiltonoperators und der Mastergleichung angegebenen Formeln für die Wechselwirkung von Atomen mit dem quantisierten Strahlungsfeld können ebenso mit einer klassischen Behandlung des Feldes gefunden werden. Insbesondere ist das Zerfallsgesetz keine Folge der Feldquantisierung. Aus (1.33) wird jedoch auch klar, dass sich ein 2-Niveau-Atom, welches ein Photon emittiert hat sich im Grundzustand befindet und deshalb keine weitere Emission mehr stattfinden kann. Dies ist mit klassischer Elektrodynamik jedoch nicht zu erklären.

Betrachtet man nun ein 2-Niveau-Atom, welches von einem Laser resonant getrieben wird und dabei spontan emittiert, so folgt nach Lösung von (1.32) für die Entwicklung von  $\rho_{ee}(t)$

$$\rho_{ee}(t) = \frac{\Omega_R^2}{(\gamma^2 + 2\Omega_R^2)} \left\{ 1 - e^{-\frac{3}{2}\gamma t} \left[ \cos\left(\frac{t}{2}\nu\right) + 3\frac{\gamma}{\nu} \sin\left(\frac{t}{2}\nu\right) \right] \right\}. \quad (1.37)$$

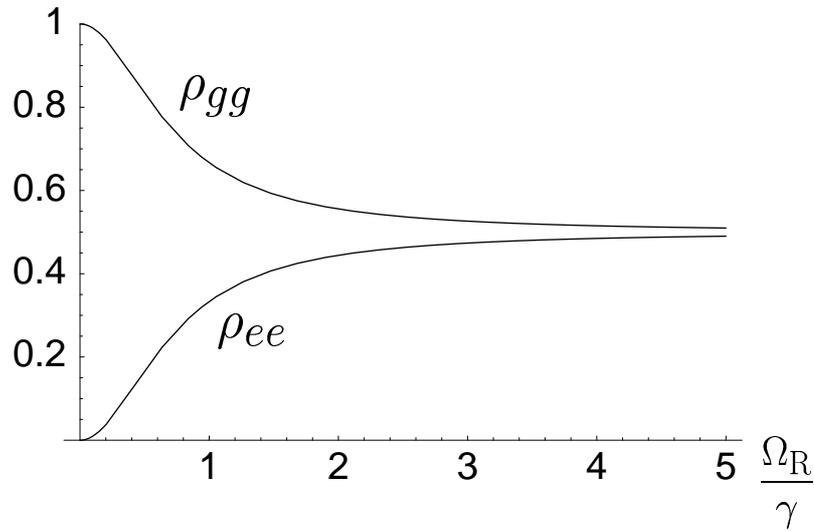
Hier wurde angenommen, dass  $\nu = \sqrt{16\Omega_R^2 - \gamma^2} > 0$  gilt und  $\rho_{ee}(0) = 0$  ist.

Offenbar strebt das System aus Atom und Laser einem Gleichgewichtszustand, dem „stationären Zustand“ des Systems, zu für welchen gilt:

$$\rho_{ee}^{SS} := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{ee}(t) = \frac{\Omega_R^2}{(\gamma^2 + 2\Omega_R^2)} \quad (1.38)$$

Befindet sich ein System in einem reinen Zustand  $|\Psi\rangle$  so folgt aus (1.8):

$$\rho \circ \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi| = |\Psi\rangle 1 \langle\Psi| = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \rho, \quad (1.39)$$



**Abbildung 1.7:** Anregung eines Atoms in Abhängigkeit der Leistung des resonant treibenden Lasers

Für obigen stationären Zustand gilt jedoch  $\rho^{SS} \circ \rho^{SS} \neq \rho^{SS}$ . Damit beschreibt dessen Dichteoperator ein statistisches Gemisch von  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$ , obwohl sich das Atom zur Zeit  $t = 0$  in dem reinen Zustand  $|g\rangle$  befand. Dieses Auftreten von statistischen Gemischen ist eine Konsequenz des spontanen Zerfalls. In einem System, in welchem dieser vernachlässigt wird, entwickelt sich ein reiner Ausgangszustand auch zu einem reinen Endzustand (siehe (1.31)).

## 1.6 Strahlungsintensität und Photonenkorrelationen

Die Intensität am Ort  $\mathbf{x}$  der von einem System von 2-Niveau-Atomen emittierten Strahlung wird gewöhnlicherweise als Erwartungswert des Photonennflusses pro Einheitsraumwinkel um den Ort  $\mathbf{x}$  angegeben. Dieser lässt sich mit den zugehörigen E-Feld-Operatoren aus (1.3) beschreiben, wobei ausschließlich der Anteil der positiven Frequenzen  $E^{(+)}$  betrachtet wird. Man definiert [37]:

$$I(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{\hbar\omega} \langle E^{(-)}(\mathbf{x}, t) E^{(+)}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (1.40)$$

Hierbei wurde  $E^{(-)}(\mathbf{x}, t) := (E^{(+)}(\mathbf{x}, t))^*$  verwendet.

Mit der Fernfeldnäherung für den Dipoloperator lässt sich die Intensität auch auf die atomaren Operatoren  $\sigma_i^{\pm}$  zurückführen [26, 42], für die Intensität findet man damit:

$$I(\mathbf{x}, t) := \frac{3\gamma}{4\pi} \sin^2 \theta \sum_{i,j} e^{ik_0 \mathbf{x} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \langle \sigma_i^+(t - \frac{x}{c}) \sigma_j^-(t - \frac{x}{c}) \rangle \quad (1.41)$$

$\theta$  soll hierbei der Winkel zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{d}$  sein.

Interessiert man sich hingegen für die statistischen Eigenschaften der emittierten Photonen, so vernachlässigt man Retardierungseffekte und verwendet die dimensionslose Korrelationsfunktion erster Ordnung. Diese unterscheidet sich nur um einen Vorfaktor von der Intensität und wird als

$$G^{(1)}(\mathbf{x}, t) := \sum_{i,j} e^{ik_0 \mathbf{x} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} \langle \sigma_i^+(t) \sigma_j^-(t) \rangle \quad (1.42)$$

definiert.

Für eine tiefere statistische Betrachtung der emittierten Photonen ist es weiterhin sinnvoll auch bedingte Wahrscheinlichkeiten miteinzubeziehen. Diese werden von der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung beschrieben, welche mit

$$G^{(2)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, t + \tau) := \sum_{i,j,m,n} e^{ik_0 [\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_j) + \mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_i)]} \langle \sigma_m^+(t) \sigma_n^+(t + \tau) \sigma_i^-(t + \tau) \sigma_j^-(t) \rangle \quad (1.43)$$

definiert ist [37]. Da für die weiteren Überlegungen die absoluten Photonenzählraten von untergeordneter Bedeutung sind, soll nur die normalisierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung

$$g^{(2)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, t + \tau) := \frac{G^{(2)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, t + \tau)}{G^{(1)}(\mathbf{x}_1, t) G^{(1)}(\mathbf{x}_2, t)} \quad (1.44)$$

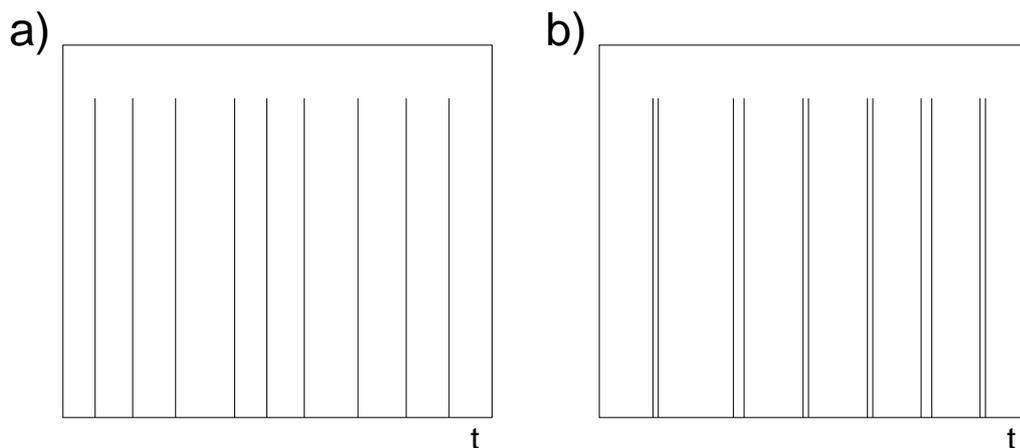
verwendet werden. Diese lässt sich unter Verwendung des Quantenregressionstheorems [43, 44] direkt in den Ausdruck

$$g^{(2)}(\mathbf{x}_1, t; \mathbf{x}_2, t + \tau) = \frac{P(\mathbf{x}_2, t + \tau | \mathbf{x}_1, t)}{P(\mathbf{x}_2, t)} \quad (1.45)$$

überführen.  $P(\mathbf{x}, t)$  ist die Wahrscheinlichkeit der Detektion eines Photons zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  und  $P(\mathbf{x}_2, t + \tau | \mathbf{x}_1, t)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit der Detektion zur Zeit  $t + \tau$  am Ort  $\mathbf{x}_2$  unter der Bedingung einer Detektion zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}_1$ . Diese Darstellung

liefert damit unmittelbar die Bedeutung von  $g^{(2)}$ .

Benutzt man zur Analyse des emittierten Lichts nur einen Detektor, so nennt man Licht mit der Eigenschaft  $g^{(2)}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}, 0) > 1$  **gebuncht** und mit  $g^{(2)}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}, 0) < 1$  **antigebuncht**. Diese intuitive Namensgebung liefert auch eine anschauliche Interpretation der  $g^{(2)}$ -Funktion, welche mit Ergebnissen von Experimenten [9, 45] und Quanten-Monte-Carlo-Simulationen [14, 46] untermauert wird (Abb. 1.8).



**Abbildung 1.8:** Photonendetektionszeiten von (a) antigebunchtem (b) und gebunchtem Licht in der Emission von 2 Atomen

Ein einzelnes von einem Laser getriebenes 2-Niveau Atom zeigt offensichtlich totales Antibunching ( $g^{(2)}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}, 0) = 0 \forall \mathbf{x}$ ), da nach einer Emission zur Zeit  $t = 0$  für jede weitere Emission eine neue Anregung durch den Laser nötig ist. Dies wurde auch am einzelnen Atom bereits von Diedrich et al. 1987 [9] experimentell gezeigt. Die Messung von Photonkorrelationen ist jedoch immer noch eine schwierige experimentelle Aufgabe, welche aber von der Entwicklung immer effizienterer Detektoren zunehmend erleichtert wird. Für 2 Atome gibt es bereits Messungen von Wineland et al. [45], allerdings werden dabei die Emissionen über den gesamten Raumwinkel aufaddiert, was zu einem Verlust an Information über das System führt. Dies soll in Kapitel 4 noch ausführlicher behandelt werden.

## 1.7 Quantensprungmethode

Die spontanen Emissionen eines Systems sind nicht exakt zeitlich vorherzusagen. Diese grundlegende Folge der Quantenmechanik hat natürlich zur Folge, dass die Theorie nur Aussagen über Wahrscheinlichkeiten machen kann. Die Verfügbarkeit von genügend leistungsfähigen Computern legt jedoch eine Simulation des Systems nahe, in der ein Zufallsgenerator die fehlende Lücke schließt. Derartige Simulationen werden treffenderweise Quanten-Monte-Carlo-Simulationen genannt [47–51].

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellten Programme verfolgen alle die selbe Grundidee. Ausgehend von einem reinen Zustand des simulierten Systems wird die Entwicklung des Zustands unter der Voraussetzung berechnet, dass keine Emission stattfindet. Nach jedem Schritt dieser Berechnung wird die Wahrscheinlichkeit einer Emission bestimmt und mit dem Zufallsgenerator entschieden, ob ein weiterer Zeitschritt ohne Emission berechnet wird, oder eine, der jeweiligen Emission entsprechende, Reduktion des Zustands durchgeführt wird.

Die Entwicklung des atomaren Zustandes  $|\Psi\rangle$  unter der Voraussetzung, dass keine Emission stattfindet, wird von einer modifizierten Schrödingergleichung beschrieben, welche statt des vollständigen Hamiltonoperators nur einen bedingten Hamiltonoperator  $H_{\text{cond}}$  beinhaltet. Dies wird in [47] im Detail diskutiert. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \frac{i}{\hbar}H_{\text{cond}}|\Psi\rangle \quad (1.46)$$

Der bedingte Hamiltonoperator beschreibt die Entwicklung eines Unterraums des gesamten Zustandsraums, in dem das Strahlungsfeld konstant ist. Für die hier auftretenden Fragestellungen geht man vom Vakuum aus, welches erhalten bleiben soll. Für ein System, welches durch den Hamiltonoperator (1.6) beschrieben wird, findet man im Wechselwirkungsbild [48]:

$$H_{\text{cond}} = \frac{\hbar}{i} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \alpha>\beta}} \gamma_{ij}^{\alpha\beta} \sigma_i^{\alpha\beta} \sigma_j^{\beta\alpha} \quad (1.47)$$

Die Indizes  $i,j$  kennzeichnen dabei die Atome und  $\alpha, \beta$  die Niveaus, wobei gelten soll  $\alpha > \beta \Leftrightarrow E_\alpha > E_\beta$ ,  $\gamma_{ij}^{\alpha\beta}$  sind wie in (1.24) definiert. Soll das System auch noch von einem oder mehreren Lasern getrieben werden, so wird zum bedingten Hamiltonoperator noch der jeweilige Wechselwirkungshamiltonoperator des Atoms mit dem Laserfeld addiert. Mit Wechselwirkung mit Lasern schreibt sich der bedingte Hamiltonian folgendermaßen [52]:

$$H_{\text{cond}} = \frac{\hbar}{i} \left[ \sum_{\substack{i,j=1 \\ \alpha>\beta}} \gamma_{ij}^{\alpha\beta} \sigma_i^{\alpha\beta} \sigma_j^{\beta\alpha} + \sum_i \sum_{(\lambda,\mu)} i\Omega_R^{\lambda\mu} \left( \sigma_i^{\lambda\mu} + \sigma_i^{\lambda\mu} \right) \right]. \quad (1.48)$$

Die Übergänge, auf denen eine Wechselwirkung mit einem Laserfeld stattfindet, werden hier mit  $\lambda$  und  $\mu$  indiziert.

Die typischen Zeitskalen der Entwicklung des Systems sind nach (1.46) und (1.48) durch  $\frac{1}{\gamma_{ij}^{\alpha\beta}}$  und  $\frac{1}{\Omega_R^{\lambda\mu}}$  gegeben. Da die Zeitschritte in den verwendeten Simulationen ohnehin viel

kleiner sein müssen, ist es in jedem Falle ausreichend für die Zeitentwicklung die lineare Approximation

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \left(1 - \frac{i}{\hbar} H_{\text{cond}} \Delta t\right) |\Psi(t)\rangle \quad (1.49)$$

zu verwenden.

Darüberhinaus benötigt man noch die Wahrscheinlichkeiten für die jeweils angenommene Detektion. Diese hängen aber vom gewählten Schema der Detektion ab und werden in den späteren Abschnitten von Fall zu Fall bestimmt. Die Übereinstimmung von Quanten-Monte-Carlo-Simulationen mit experimentellen Daten wurde schon vielfach gezeigt [51], so dass man hier ein theoretisches Hilfsmittel zur Verfügung hat, welches die Analyse der zu untersuchenden Systeme grundlegend vereinfacht. Für eine weitere Analyse dieses Verfahrens sei hier zudem noch auf [53] verwiesen.

## 1.8 Verschränkung von Ionenpaaren

Die möglichen Quantenzustände von Ionenpaaren liegen im Tensorprodukt  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  der Zustandsräume der einzelnen Ionen [54]. Aus den diskreten gebundenen elektronischen Zuständen der einzelnen Ionen mit den zugehörigen vollständigen Basen  $\{|n\rangle_1\}$  und  $\{|n\rangle_2\}$  lässt sich eine Basis des Produktraumes definieren und jeder Zustand  $|\Psi\rangle$  darin hat folglich die Darstellung:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2 =: \sum_{n,m} c_{nm} |n, m\rangle \quad (1.50)$$

Diese Konstruktion des Zustandsraums beinhaltet jedoch auch die Existenz von Zuständen, welche nicht als Produkt der Zustände der einzelnen Ionen dargestellt werden können [54]. Der Zustand

$$|s_{12}\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 2\rangle + |2, 1\rangle) \quad (1.51)$$

ist nur eines der einfachsten Beispiele dafür. Derartige Zustände  $|\Psi\rangle$ , für die gilt

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi\rangle_2 \quad \forall |\Psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i \quad (1.52)$$

nennt man „verschränkte“ Zustände<sup>8</sup> [55]. Die selbstverständliche Existenz von Verschränkung in der Quantentheorie hat seit deren Entwicklung zu einer intensiven

<sup>8</sup>Im Allgemeinen ist die Bedingung der Verschränkung von den Freiheitsgraden abhängig, welche verschränkt werden sollen. Im Rahmen dieser Arbeit sollen jedoch ausschließlich die diskreten elektronischen Freiheitsgrade von Ionen betrachtet werden.

Diskussion über die Richtigkeit einer derartigen Theorie, weit über die Physik hinaus, geführt. Die Entwicklung der Bellschen Ungleichungen [56] und deren Überprüfung, sowie die Erzeugung von verschränkten Zuständen im Allgemeinen, sind sehr intensiv bearbeitete laufende Forschungsprojekte [57–64].

In der konkreten Behandlung von Ionenpaaren geht man vielfach zum Dichteoperatorkalkül über, welcher für die Produktzustände von 2-Niveau-Ionenpaaren folgende Darstellung liefert:

$$\begin{aligned}
\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| &= (e_1|e\rangle_1 + g_1|g\rangle_1) \otimes (e_2|e\rangle_2 + g_2|g\rangle_2) \\
&\quad (e_1^*\langle e|_1 + g_1^*\langle g|_1) \otimes (e_2^*\langle e|_2 + g_2^*\langle g|_2) \\
&= |e_1|^2|e_2|^2|e, e\rangle\langle e, e| + \\
&\quad |e_1|^2|g_2|^2|e, g\rangle\langle e, g| + |g_1|^2|e_2|^2|g, e\rangle\langle g, e| + \\
&\quad |g_1|^2|g_2|^2|g, g\rangle\langle g, g| + \\
&\quad [|e_1|^2e_2g_2^*|e, e\rangle\langle e, g| + |e_2|^2e_1g_1^*|e, e\rangle\langle g, e| + \\
&\quad e_1e_2g_1^*g_2^*|e, e\rangle\langle g, g| + e_1g_2g_1^*e_2^*|e, g\rangle\langle g, e| + \\
&\quad |g_2|^2e_1g_1^*|e, g\rangle\langle g, g| + |g_1|^2e_2g_2^*|g, e\rangle\langle g, g| + \text{h.c.}] \quad (1.53)
\end{aligned}$$

Die Separabilität<sup>9</sup> eines beliebigen Zustands dieses Systems kann mit dieser Darstellung sehr gut überprüft werden, was im weiteren Verlauf dieser Arbeit nötig sein wird.

Die Verschränkung von Systemen kann auch zu nichtklassischen Korrelationen führen. Betrachtet man etwa einen Zustand  $|s_{12}\rangle$  wie in (1.51), so findet man jedes Ion mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  im angeregten Zustand. Nach einer Messung von Ion 1 im angeregten Zustand hinterlässt man Ion 2 mit Wahrscheinlichkeit 1 im Grundzustand. Da dies nicht vom Abstand der Ionen abhängig ist, sondern ausschließlich vom Ausgangszustand  $|s_{12}\rangle$ , existieren für diesen Zustand nicht-lokale Korrelationen zwischen den beiden Ionen. Die Untersuchung von solchen Korrelationen wird in den Abschnitten 3 und 4 noch detaillierter durchgeführt werden.

---

<sup>9</sup>Unter Separabilität versteht man die Darstellbarkeit eines Dichteoperators Tensorprodukt von Dichteoperatoren aus den zugrundeliegenden einzelnen Zustandsräumen

# 2

## Effekte von Einzelionen

### 2.1 Modendichte in der Resonator-QED

Im vorherigen Kapitel wurde immer davon ausgegangen, dass sich die betrachteten Atome im freien, unendlich ausgedehnten Raum befinden. Dies sind spezielle Randbedingungen, die entsprechende Auswirkungen auf die Energieniveaus und die Emissionsraten von Atomen haben. Werden nun diese Randbedingungen geändert, so verändern sich auch die zugehörigen spektralen Eigenschaften der Atome. Dies ist eine Folge der Quantisierung des Vakuumsfeldes, weshalb die Untersuchung dieser Abhängigkeiten einen Test der Quantenelektrodynamik liefert.

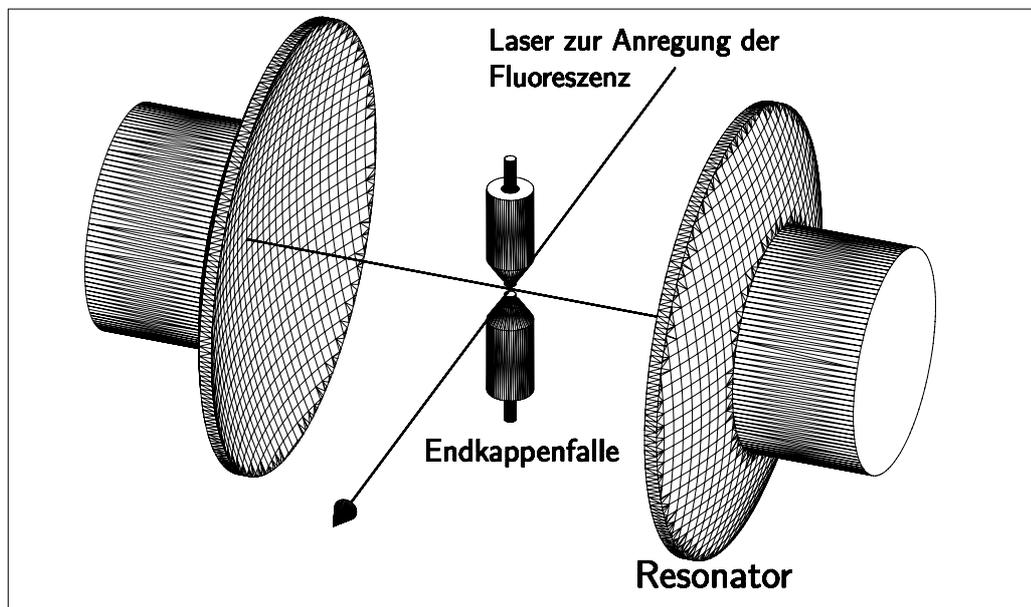


Abbildung 2.1: Ion in einem konfokalen Resonator

Will man ein System unter veränderten Randbedingungen, wie etwa in einem Resonator

untersuchen, so ist es naheliegend, den Übergang von der diskreten zur kontinuierlichen Modenstruktur (1.16) näher zu betrachten. Im allgemeinsten Fall von beliebigen Randbedingungen ist dieser Übergang nur numerisch zu beschreiben, im Fall von planparallelen Oberflächen des Resonator gibt es jedoch auch sehr aufwendige analytische Betrachtungen [65, 66]. Für diese Arbeit soll jedoch nur der Fall eines konfokalen Resonators diskutiert werden, was eine weitgehend analytische Theorie ermöglicht. Zudem sorgt die, bei dieser Geometrie auftretende, Modenentartung [67–70] für eine Verstärkung der untersuchten Prozesse, was die experimentelle Durchführbarkeit erleichtert.

Der Übergang zum Modenkontinuum wird unter veränderten Randbedingungen für die hier betrachtete Resonatorgeometrie mit

$$\sum_{\mathbf{k}s} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int \Lambda(k) d^3k \sum_s \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei  $\Lambda(k)$  die Modifikation der Modendichte im Resonator beschreibt. Kennt man den Reflexionskoeffizienten  $R$  des Resonatorspiegels, so kann mit Hilfe der Finesse  $F := \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$  folgender Ausdruck für den konfokalen Resonator mit Spiegelabstand  $L$  gefunden werden [71].

$$\Lambda(k) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+(2F/\pi)^2}}{1+(2F/\pi)^2 \sin^2(2kL)} & \text{für } \mathbf{k} \text{ in } \Delta\Omega_{\text{cav}} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

$\Delta\Omega_{\text{cav}}$  ist der durch den Resonator abgedeckte Raumwinkel, wobei offensichtlich ist, dass für  $\mathbf{k}$  außerhalb  $\Delta\Omega_{\text{cav}}$  keine Modifikation stattfindet und  $\Lambda(k)$  dort gleich 1 ist.

Die vorliegende Arbeit befasst sich ausschließlich mit Übergängen im optischen Bereich, deshalb sollen nur Resonatoren mit Finessen  $F < 10^6$  betrachtet werden. Weiterhin wird im Experiment, aufgrund der Positionierung in der Ionenfalle, ein Resonator hoher Ordnung ins Auge gefasst, bei dem  $L = n\lambda$  mit  $n \approx 10^3 - 10^5$ . Aus diesem Grund ist das Modenvolumen im Resonator relativ groß und die Kopplung  $g$  (1.7) entsprechend klein. Für typische experimentelle Parameter ist es damit gut gerechtfertigt, das Feld im Resonator im Vakuumzustand anzunehmen. Für höhere Finessen und kleinere Modenvolumina, wie diese im Mikrowellenbereich zur Verfügung stehen, ist dies natürlich falsch. Dort beruhen interessante Effekte gerade darauf beruhen, dass Photonen im Resonator zirkulieren und vom Atom reabsorbiert werden können. An dieser Stelle sei nur auf die Mikromaser-Experimente am Max-Planck-Institut für Quantenoptik verwiesen [61].

Für die spontanen Emissionen eines Atoms, welches sich im Zentrum des Resonators befindet, lässt sich deren Modifikation durch die veränderten Randbedingungen im Resonator mit der veränderten Modendichtefunktion und dem Anteil  $f(\Delta\Omega_{\text{cav}})$  der Spontanemissionen in den Resonatorraumwinkel beschreiben. Dieser ist in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  zwischen dem Dipolmoment des Atoms und  $\Omega$  gerade

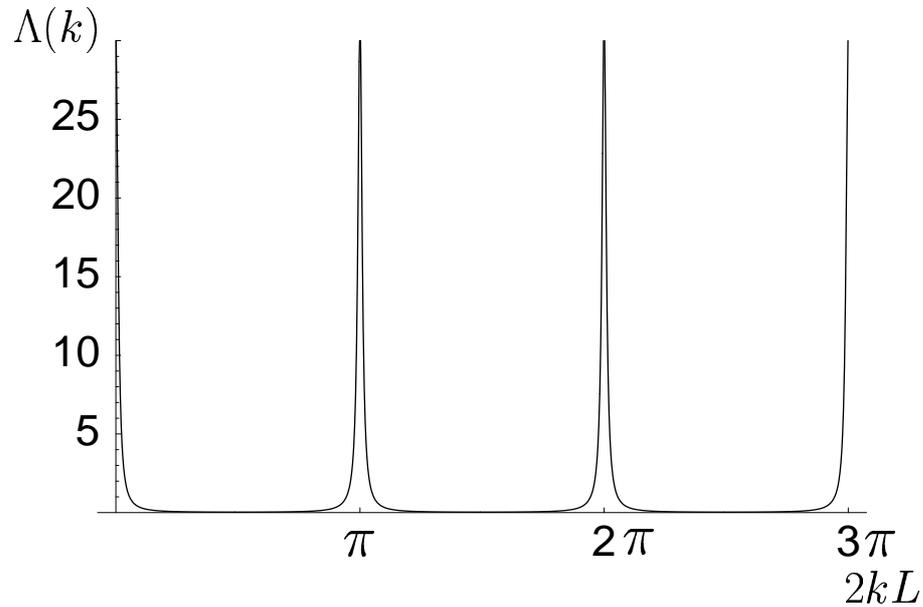


Abbildung 2.2: Modendichte eines konfokalen Resonator mit Finesse  $F = 1000$

$$f(\Delta\Omega_{\text{cav}}) = \frac{\int_{\Delta\Omega_{\text{cav}}} \sin^2\theta \, d\Omega}{\oint \sin^2\theta \, d\Omega} = \frac{3}{8\pi} \int_{\Delta\Omega_{\text{cav}}} \sin^2\theta \, d\Omega \quad (2.3)$$

Aus der Herleitung der Spontanemissionsrate (1.17) folgt damit für einen Übergang mit der Wellenzahl  $k$  unmittelbar die Modifikation  $2\gamma_{\text{cav}}$  derselben:

$$\gamma_{\text{cav}} = \gamma_{\text{vac}} \{1 + [\Lambda(k) - 1] f(\Delta\Omega_{\text{cav}})\} \quad (2.4)$$

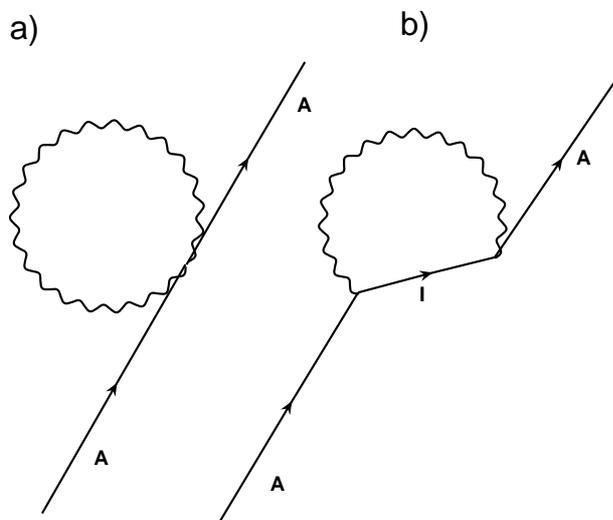
Damit kann die spontane Emission je nach Abstand der Spiegel verstärkt oder unterdrückt werden [1, 72, 73]

Versteht man die spontanen Emissionen als Konsequenz der Vakuumoszillationen, so ist nur folgerichtig, dass eine Veränderung der Struktur des Vakuums auch die Emissionen beeinflusst. Die statistischen Eigenschaften dieser modifizierten Spontanemissionen wurden im Detail von von Zanthier et al. analysiert [71], ein experimenteller Nachweis dieses Effekts, allerdings an einem durch den Resonator geführten Ionenstrahl, wurde von Heinzen und Feld [1] geliefert. Die Experimente an gespeicherten Ionen stehen in diesem Bereich noch aus.

## 2.2 Modifizierte Lambshift

### 2.2.1 Grundlagen

Das Auftauchen einer Niveaushiftung im Vakuum scheint in Kapitel 1.3 selbstverständlich. Die Diskussion dieser Verschiebung, welche nach W. E. Lamb benannt wurde, hat jedoch eine lange Geschichte. Da ein Elektron die Fähigkeit zur Absorption und Emission eines Photons besitzt, sind auch die in den Feynman-Diagrammen (Abb. 2.3) dargestellten Prozesse in die Betrachtungen des energetischen Zustands eines Elektrons miteinzubeziehen [74].



**Abbildung 2.3:** (a) Instantane Emission und Absorption eines Photons und (b) Emission und Absorption eines Photons mit Zeitverzögerung

Dabei stößt man auf die sogenannte Selbstenergie des Elektrons, welche in verschiedenen Standardlehrbüchern für Quantenmechanik behandelt wird und für elektronische Übergänge zu einer der Gleichung (1.18) äquivalenten Form führt [33, 74]. Von Interesse ist dabei auch, dass erst die Massen- und Ladungsrenormalisierung der kovarianten Störungstheorie die Herleitung eines endlichen Wertes für die Lambshift ermöglicht. Da hier jedoch nicht die absoluten Übergangsfrequenzen bestimmt werden sollen, sondern nur die, durch den Resonator ins System eingebrachte Modifikation derselben, ist es in jedem Falle ausreichend, die nichtrelativistische Darstellung wie in Kapitel 1.3 zu verwenden. Im Laufe der Rechnungen soll dies noch näher gezeigt werden. Die Lambshift innerhalb eines Resonators lässt sich nach Gleichung (1.18) und (2.1) folgendermaßen darstellen:

$$\delta\omega = \frac{\gamma}{\pi} \int \frac{\Lambda(\omega)}{\omega_0 - \omega} \cdot d\omega \quad (2.5)$$

Für die Modifikation durch den Resonator  $\Delta\omega = \delta\omega_{\text{cav}} - \delta\omega_{\text{cav}}$  findet man damit unmittelbar

$$\Delta\omega = \frac{\gamma}{\pi} f(\Delta\Omega_{\text{cav}}) \int \frac{\Lambda(\omega) - 1}{\omega_0 - \omega} d\omega, \quad (2.6)$$

Das ist gerade die nichtrelativistisch massenrenormalisierte Form des Ausdrucks, den Heizen und Feld für den Vergleich zwischen Theorie und Experiment verwenden [1].  $f(\Delta\Omega_{\text{cav}})$  soll im Folgenden als Eigenschaft des einzusetzenden Resonators behandelt werden und wird deshalb theoretisch nicht weiter betrachtet.

Es bleibt jedoch noch das Integral

$$\int \left[ \frac{\sqrt{1 + (2F/\pi)^2}}{1 + (2F/\pi)^2 \sin^2(2\omega L/c)} - 1 \right] \frac{1}{\omega_0 - \omega} d\omega \quad (2.7)$$

zu bestimmen, was, wie bereits in Kapitel 1.3 erwähnt, als Hauptwertintegral zu verstehen ist. Dies soll im Weiteren diskutiert werden.

### 2.2.2 Numerische Betrachtung

Da die Struktur des Integranden wegen der Periodizität von  $\Lambda(\omega)$  keine Vergrößerung der Intervallbreite für eine numerische Integration zulässt, ist es nötig, einige Vorüberlegungen in die Numerik einzubringen. Dazu definiert man die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\sqrt{1 + (2F/\pi)^2}}{1 + (2F/\pi)^2 \sin^2(2\omega L/c)} = 1 \quad (2.8)$$

der Größe nach geordnet als Reihe  $a_n$ . Das zu bestimmende Integral lässt sich damit in eine Summe aus Einzelintegralen

$$\int \frac{\Lambda(\omega) - 1}{\omega_0 - \omega} d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\Lambda(\omega) - 1}{\omega_0 - \omega} d\omega =: \sum_{n=0}^{\infty} I(n) \quad (2.9)$$

zerlegen. Klarerweise handelt es sich bei  $I(n)$  um eine alternierende Folge welche schließlich monoton fällt. Das heisst:

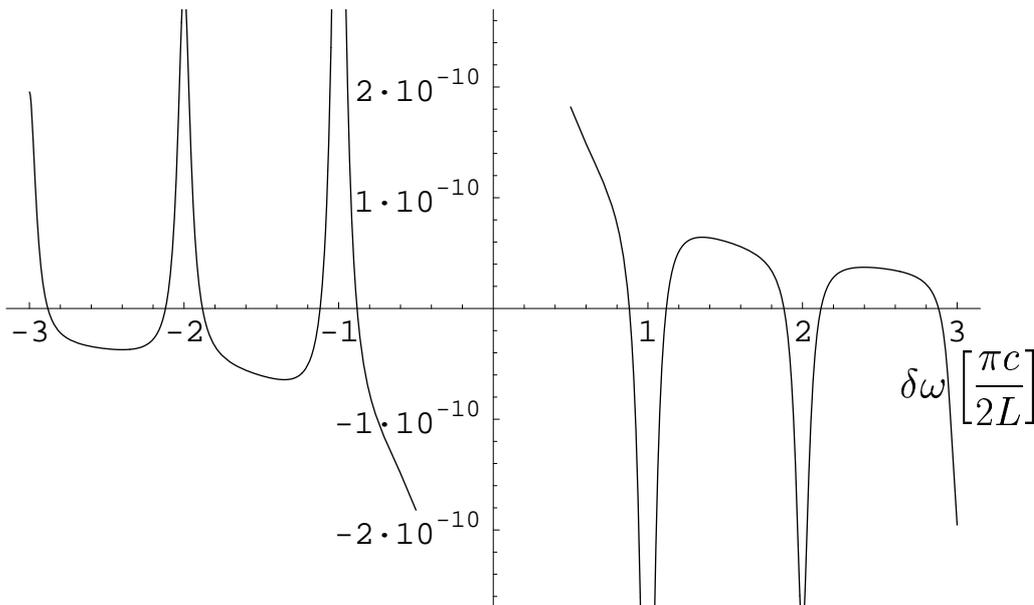
$$\exists N \text{ so dass } \forall n > N \text{ gilt: } \text{sgn}(I(n)) = -\text{sgn}(I(n+1)) \wedge |I(n+1)| < |I(n)| \quad (2.10)$$

Diese Bedingung ist hinreichend für die Endlichkeit des Gesamtintegrals und liefert zudem eine Abschätzung der Genauigkeit der angestellten Berechnungen.

Die in (2.9) verwendeten Folgenglieder  $a_n$  können aus der Gleichung (2.8) analytisch mit

$$a_n = \frac{c}{2L} \left[ \pi \text{Floor} \left( \frac{n}{2} \right) - (-1)^n \arcsin \left( \frac{\sqrt{-\pi^2 + \pi \sqrt{4F^2 + \pi^2}}}{2F} \right) \right] \quad (2.11)$$

bestimmt werden, wobei sich für große Finessen das Argument des arcsin noch weiter zu  $\sqrt{\frac{\pi}{2F}}$  vereinfacht. Damit ist die restliche Numerik auf Einzelintegrale einfacher Struktur reduziert.

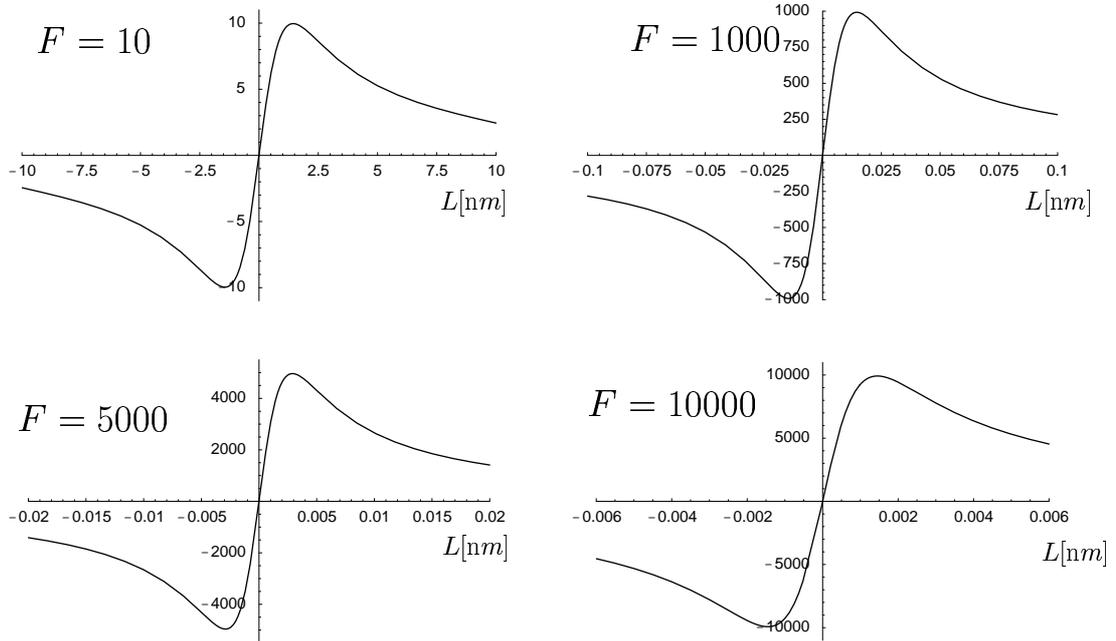


**Abbildung 2.4:** Integrand  $\frac{\Lambda(\omega_0 + \delta\omega) - 1}{\delta\omega}$  für  $\omega_0 = 8,16847 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$  und  $L = L_{\text{res}} + 0.014 \text{ nm}$

Die verbleibenden Berechnungen der einzelnen Reihenglieder können mit gewöhnlichen Integrationsroutinen, wie diese in Computeralgebraprogrammen enthalten sind, durchgeführt werden. In diesem Fall wurden diese mit Mathematica berechnet und mit den Nag-Routinen in Fortran gegengetestet. In den Abbildungen werden immer Ergebnisse für die Finessen  $F = 10, 1000, 5000, 10000$  angegeben, um zu zeigen, dass die hier verwendete Numerik auf einem großem Parameterbereich sehr gut funktioniert. Die geplotteten Ergebnissen ergeben sich aus den jeweils 5 ersten Integrationsintervallen um den Pol des Integranden. Die Genauigkeit dieser Angaben soll im folgenden näher untersucht werden.

### 2.2.3 Fehleranalyse

Im angewandten Verfahren sind zwei Sorten von Fehlern zu berücksichtigen, zum einen die Fehler der verwendeten Routinen, welche nur endliche Genauigkeit liefern, zum anderen die Fehler, welche durch die Berücksichtigung einer endlichen Zahl von in (2.9)



**Abbildung 2.5:** Ergebnisse der numerischen Berechnung für das Integral (2.7)

definierten Reihengliedern entstehen. Der erstere kann als Parameter in den verwendeten Programmen gewählt werden. Der zum Ergebnis relative Fehler wurde dort auf  $10^{-5}$  gesetzt, was die nötigen experimentellen Anforderungen voll erfüllt. Die Ergebnisse der verwendeten Routinen waren unter diesen Anforderungen identisch, so dass dieser Wert als gesichert angenommen werden kann.

Der durch die Berücksichtigung von nur endlich vielen Reihengliedern entstehende Fehler kann mit (2.10) abgeschätzt werden. Sei dazu  $N$  derart gewählt, dass gilt:

$$I(N) > 0 \quad \wedge \quad |I(N)| > |I(m)| \quad \forall m > N \quad (2.12)$$

Damit folgt weiter mit (2.10)

$$\text{sgn}(I(N+k) + I(N+k+1)) = (-1)^k \quad \forall k > 0 \quad (2.13)$$

Aus der ursprünglichen Reihe lassen sich also zwei Reihen extrahieren, welche sich nur durch das Glied  $I(N)$  und das Vorzeichen unterscheiden:

$$\sum_{n=N}^{\infty} I(n) > 0 \quad \wedge \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} I(n) < 0 \quad (2.14)$$

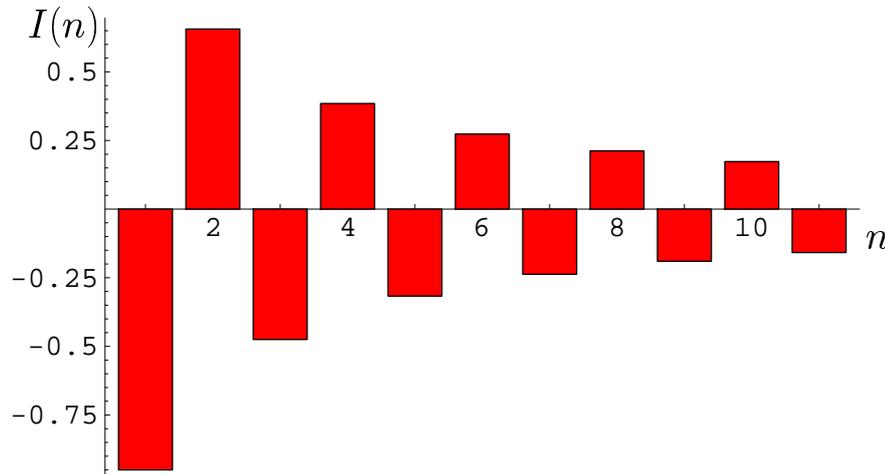
Weiterhin gilt also

$$\sum_{n=N}^{\infty} I(n) - I(N) < 0. \quad (2.15)$$

Somit kann die gesamte Reihe wegen

$$I(N) > \sum_{n=N}^{\infty} I(n) > 0 \quad (2.16)$$

unter Bestimmung des ersten Gliedes abgeschätzt werden.



**Abbildung 2.6:** Für die Fehlerabschätzung benötigte Summenglieder der alternierenden Folge  $I(n)$  für  $F = 1000$ ,  $\omega_0 = 8,16847 \cdot 10^{15}$  Hz und  $L = L_{\text{res}} + 0.014$  nm

Damit ist klar, dass es ausreichend ist, wie in 2.5, nur die ersten Integrationsintervalle zu berücksichtigen, da dies bereits einen relativen Fehler von unter  $10^{-3}$  liefert.

Diese Betrachtung liefert nebenbei auch noch den Beweis für die Bedeutungslosigkeit der Hochenergieanteile der betrachteten Modifikation der Lambshift. Es ist also völlig gerechtfertigt die Darstellung (2.6) für die Lambshift im Resonator zu wählen, da die Unterschiede zu einer renormalisierten Betrachtung<sup>1</sup> für die relevanten Terme im Niederenergiebereich keine Rolle spielen.

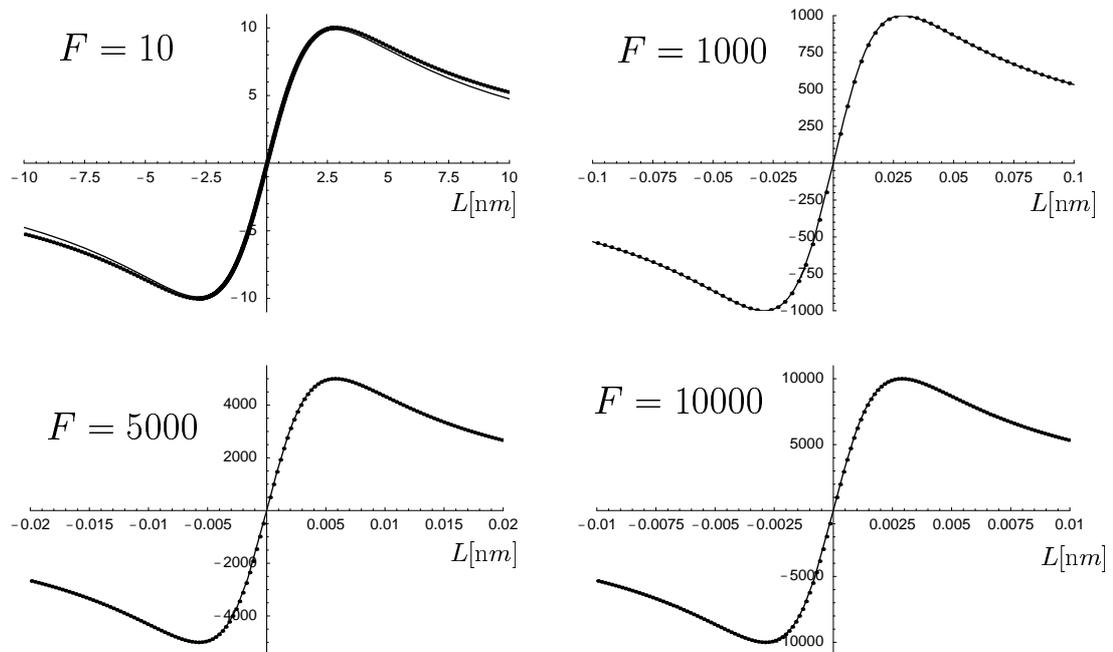
<sup>1</sup>Für eine korrekte Betrachtung des Hochenergieanteils der Lambshift sei hier auf [33] verwiesen.

### 2.2.4 Analytische Approximationen

Da sich oben gezeigt hat, dass die für die Numerik zu berücksichtigenden Terme von verhältnismäßig einfacher Struktur sind, scheint es auch naheliegend, eine analytische Approximation von (2.6) zu versuchen. Dies wurde für den Bereich niedriger Finessen bereits von Heinzen et al. [1] getan, was zum Ausdruck

$$\int \frac{\Lambda(\omega) - 1}{\omega_0 - \omega} d\omega \approx \frac{2\pi F^2 \sin(4\omega_0 L/c)}{\pi^2 + 4F^2 \sin^2(2\omega_0 L/c)} \quad (2.17)$$

führt. Allerdings gibt es zu diesem Ausdruck keinerlei Fehlerbetrachtung, so dass die theoretische Legitimation dieser Näherung erst durch den Vergleich mit der oben eingeführten Numerik erbracht werden kann.



**Abbildung 2.7:** Vergleich der numerisch bestimmten Werte mit der analytischen Approximation von Heinzen und Feld

Der Vergleich zeigt sehr gute Übereinstimmung für Resonatorlängen, welche nahe an der Resonanz zur atomaren Übergangsfrequenz liegen. Das bestätigt, dass der Hauptanteil der Niveauschiebung von der Wechselwirkung mit dem Vakuumfeld in der Nähe des Pols von (2.7) stammt. Um also die maximal messbare Verschiebung zu bestimmen, ist die Näherung gut zu gebrauchen. Man findet:

$$\Delta\omega_{max} = \frac{\gamma}{\pi} f(\Delta\Omega_{cav}) \frac{F^2}{\sqrt{F^2 - (\pi/2)^2}} \approx \frac{\gamma}{\pi} f(\Delta\Omega_{cav}) F \quad \forall F \gg \pi \quad (2.18)$$

Die analytische Beschreibung lässt sich jedoch für diejenigen Bereiche, welche weit von der Resonanz entfernt sind, noch weiter verfeinern. Durch Anpassen der analytischen Näherung an die numerisch erhobenen Daten, lässt sich eine neue Näherung finden, welche für verstimzte Resonatoren bessere Übereinstimmung zeigt, jedoch 2 ausschließlich numerisch zu bestimmende Konstanten enthält. Man findet:

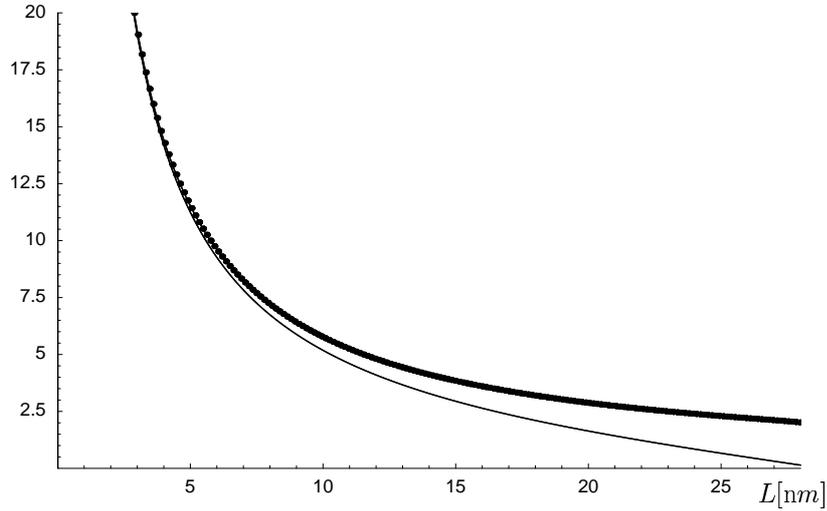
$$\Delta\omega = \frac{\gamma}{\pi} f(\Delta\Omega_{cav}) \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{4F\pi^{5/2}\sqrt{4F^2 + \pi^2} \sin(4\omega_0 L/c)}{[\pi^2 + 4F^2 \sin^2(2\omega_0 L/c)]^2} \quad (2.19)$$

mit:

$$f_1(F, L) := \frac{1}{2} \left( k_1 + \left( \frac{k_2 F L}{\lambda_0} \right)^2 \right) \quad (2.20)$$

$$f_2(F, L) := 1 - \left( \frac{4\delta L}{\lambda_0} \right)^6 \quad (2.21)$$

Für die verbleibenden numerischen Konstanten  $k_1$  und  $k_2$  findet man  $k_1 = 0.4361 \pm 10^{-4}$  und  $k_2 = 2.663 \pm 10^{-3}$

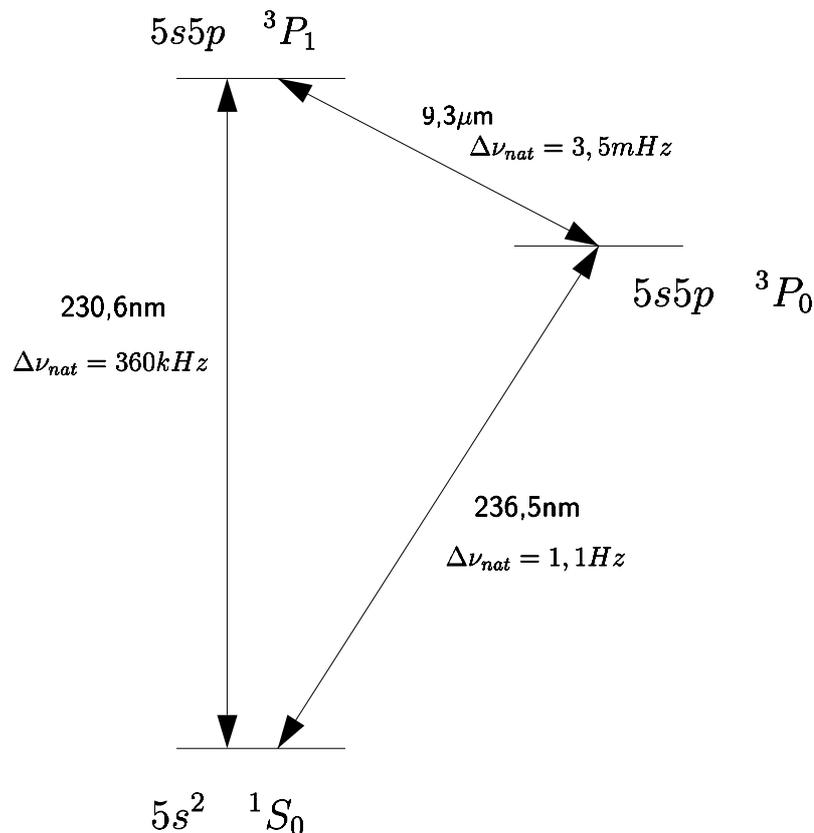


**Abbildung 2.8:** Die Punkte der numerischen Berechnung liegen exakt auf der Kurve der verfeinerten analytischen Approximation, während die Approximation (2.17) davon abweicht. Die Parameter sind  $F = 1000$  und  $\omega_0 = 8,16847 \cdot 10^{15}$  Hz.

## 2.3 Quantenkohärenzen im Einzelion

### 2.3.1 Grundlagen

Im Rahmen der Untersuchungen am einzelnen  $\text{In}^+$ -Ion [7, 12] stellt sich auch die Frage, inwieweit dort Möglichkeiten zur kohärenten Beeinflussung der Besetzungswahrscheinlichkeiten der einzelnen internen Zustände realisiert werden können.  $\text{In}^+$  stellt in sehr guter Näherung ein V-System dar, welches durch die Zustände  $5s^2 \ ^1S_0$  als Grund, und  $5s5p \ ^3P_1$  sowie  $5s5p \ ^3P_0$  als erste angeregte Zustände repräsentiert wird.



**Abbildung 2.9:** Niveauschema von  $\text{In}^+$ ; hier sind nur die in der weiteren Berechnung relevanten Zustände aufgeführt.

Seit der ersten Beobachtung von „Coherent Population Trapping“ (CPT) [75–78] hat dieser Effekt experimentelle wie auch theoretische Arbeiten angeregt. Sowohl die „Dunklen Resonanzen“ in  $\Lambda$ -Systemen, in denen zwei Grundzustände mit kohärenten Lichtfeldern an ein gemeinsames angeregtes Niveau gekoppelt werden [77], als auch neuere Effekte wie die „Electromagnetically Induced Transparency“ (EIT) [79] wurden sehr detailliert untersucht. Die Erhöhung des Brechungsindex ohne Absorption [80] oder auch „Lasing Without Inversion“ (LWI) [81–84] sind in diesem Zusammenhang

ebenfalls zu nennen. Durch die extrem starke Dispersion an der CPT-Resonanz wurden kürzlich Gruppengeschwindigkeiten gemessen, welche mehrere Größenordnungen unter der Vakuumlichtgeschwindigkeit liegen [85, 86].

In einem  $\Lambda$ -System tritt CPT genau dann auf, wenn die Kohärenz zwischen den zwei Grundzuständen durch einen nichtlinearen Prozess angeregt wird. Experimentell kann das durch gleichzeitiges Anlegen von zwei Lasern erreicht werden, wobei jeder von einem der Grundzustände nahezu resonant an das gemeinsame angeregte Niveau koppelt. Wenn die Energiedifferenz der beiden Laser gleich der Energiedifferenz der beiden Grundzustände ist, wird das Atom optisch in eine kohärente Überlagerung der beiden Grundzustände gepumpt. In diesem Fall wird kein weiteres Licht absorbiert [78]. Da die beiden Grundzustände stabil sind, kann diese Grundzustandskohärenz eine lange Lebensdauer haben, was zu extrem schmalen Resonanzen führt.

Es wurden jedoch in der Vergangenheit auch Systeme mit anderen Niveauschemata, wie etwa V-, oder Kaskadensysteme, untersucht, wobei viele Effekte sowohl experimentell, als auch theoretisch sehr detailliert ausgeleuchtet wurden [78]. Hier soll das V-System von  $\text{In}^+$  analysiert werden, welches, wie das  $\text{In}^+$ , über extrem unterschiedliche Lebensdauern des angeregten Zustands verfügt. Die  $5s^2 \ ^1S_0 - 5s5p \ ^3P_0$  Interkombinationslinie (Uhr-übergang) wird durch die magnetische Hyperfeinwechselwirkung induziert, weshalb die Lebensdauer dieses Zustands mit  $\tau(^3P_0) \simeq 195 \text{ ms}$  ( $\Gamma_{^3P_0} \simeq 2\pi \cdot 0.82 \text{ Hz}$ ) sehr lang ist. Dies entspricht einem Faktor von  $\sim 10^5$  im Vergleich zum  $5s^2 \ ^1S_0 - 5s5p \ ^3P_1$  (Kühl)übergang mit  $\tau(^3P_1) \simeq 440 \text{ ns}$  ( $\Gamma_{^3P_1} \simeq 2\pi \cdot 360 \text{ kHz}$ ). Daher erlaubt es der schmale  $5s^2 \ ^1S_0 - 5s5p \ ^3P_0$  Übergang verhältnismäßig ungewöhnliche Eigenschaften zu studieren.

Auch in diesem Zusammenhang zeigt sich der in 1 bereits erwähnte Vorteil der Verwendung von einzelnen gespeicherten Ionen. Nachdem das Ion sich im Grundzustand des Fallenfeldes befindet, kann es als gut lokalisiert und insbesondere in Ruhe [87] angenommen werden. Deshalb spielt für die Messung von Spektren der Doppler-Effekt erster Ordnung keine Rolle, in zweiter Ordnung wird der Effekt vernachlässigbar klein. Auch die Kollisionsverbreiterung wird durch hinreichend niedrige Drücke in der Vakuumkammer unterdrückt. Die räumliche Varianz des Laserfeldes oder der Atomdichte spielt bei der Wechselwirkung mit einem einzelnen Ion ebenfalls keine Rolle. Die Untersuchung mit  $\text{In}^+$  liefert zudem den Vorteil, dass wegen der fehlenden Hyperfeinaufspaltung und der Metastabilität des  $5s5p \ ^3P_0$ -Niveaus keinerlei „Repumping“-Effekte oder Zeeman-Substrukturen in die theoretische Beschreibung integriert werden müssen. In diesem Fall ist ein echtes geschlossenes 3-Niveau-System realisiert. Kohärenzeffekte in  $\Lambda$ -Systemen wurden bislang in  $\text{Ba}^+$  untersucht [88–92], wobei es sich bei den beteiligten Übergängen um Dipolübergänge handelte, welche von vergleichbarer Lebensdauer waren. In  $\text{In}^+$  ist das gerade nicht der Fall, was in dieser Arbeit zu weiteren Überlegungen Anlass gab.

### 2.3.2 Uhrenlaserinduzierte Kohärenz

Um ein V-System zu modellieren, definiert man die Zustände  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ , welche an einen gemeinsamen Grundzustand  $|3\rangle$  gekoppelt sind (siehe Abb. 2.9). Wir nehmen weiterhin an, dass wie in  $\text{In}^+$  der Zustand  $|1\rangle$  energetisch höher liegt als  $|2\rangle$  und die Übergänge  $|1\rangle - |3\rangle$  und  $|2\rangle - |3\rangle$  von Lasern mit den Frequenzen  $\omega_{l1}$  und  $\omega_{l2}$  sowie den zugehörigen Rabi-Frequenzen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  getrieben werden. Das Atom kann spontan von  $|1\rangle$  nach  $|3\rangle$  mit der Rate  $2\Gamma_1$  und von  $|2\rangle$  nach  $|3\rangle$  mit der Rate  $2\nu$  zerfallen, wobei wir den Übergang von  $|1\rangle$  nach  $|2\rangle$  vernachlässigen (obwohl dieser in  $\text{In}^+$  mit der Rate  $\Gamma_{3P_1 \rightarrow 3P_0} \simeq 2\pi \cdot 3.5\text{MHz}$  vorkommt). Da die Lebensdauer von  $|2\rangle$  derart lange ist, kann dieser Übergang nicht direkt durch gestreute Photonen detektiert werden; stattdessen wird die Besetzung von  $|2\rangle$  durch eine Unterbrechung der Fluoreszenz auf dem schnellen  $|1\rangle - |2\rangle$  Übergang bestimmt [93]. Die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustands  $|1\rangle$  bei Durchstimmen des Lasers mit  $\omega_{l2}$  wird also über die Intensität der Fluoreszenz auf dem schnellen Übergang bestimmt. In diesem Punkt unterscheidet sich dieses Schema grundlegend von den bisherigen, bei denen die Fluoreszenz auf dem Übergang des durchgestimmten Lasers gemessen wurde.

Die Mastergleichung des untersuchten Systems resultiert aus der Gleichung (1.24), wobei die Modifikation für die Wechselwirkung mit nicht resonanten Lasern leicht integriert werden kann. Es folgt:

$$\dot{\rho}_{11} = -2\Gamma_1\rho_{11} + i\epsilon_1\rho_{31} - i\epsilon_1^*\rho_{13} \quad (2.22)$$

$$\dot{\rho}_{12} = -(\Gamma_1 + \nu + i(\delta_1 - \delta_2))\rho_{12} + i\epsilon_1\rho_{32} - i\epsilon_2^*\rho_{13} \quad (2.23)$$

$$\dot{\rho}_{13} = -(\Gamma_1 + \gamma_l + i\delta_1)\rho_{13} - i\epsilon_2\rho_{12} - i\epsilon_1(\rho_{11} - \rho_{33}) \quad (2.24)$$

$$\dot{\rho}_{22} = -2\nu\rho_{22} + i\epsilon_2\rho_{32} - i\epsilon_2^*\rho_{23} \quad (2.25)$$

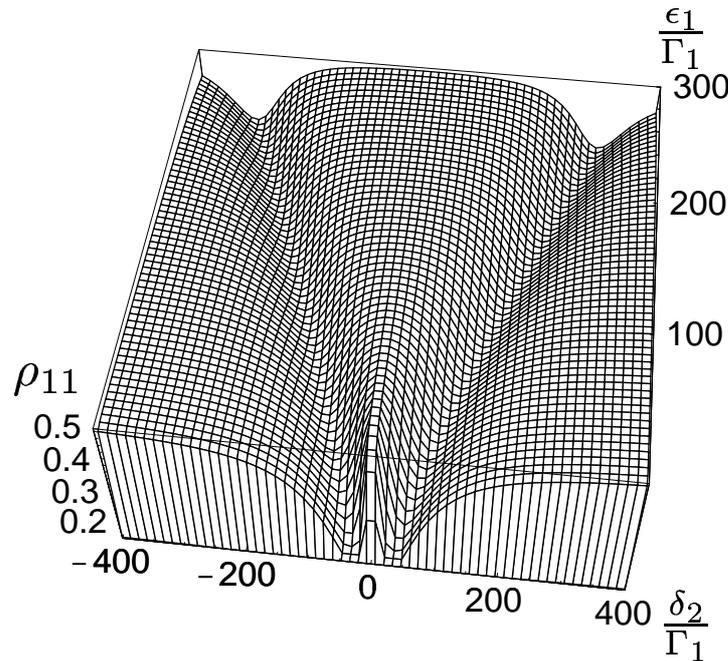
$$\dot{\rho}_{23} = -(\nu + i\delta_2 + \gamma_l)\rho_{23} - i\epsilon_1\rho_{21} - i\epsilon_2(\rho_{22} - \rho_{33}) \quad (2.26)$$

$$\rho_{33} = 1 - \rho_{11} - \rho_{22} \quad (2.27)$$

Die Verstimmung der Laser von der Resonanzfrequenz werden mit  $\delta_i = \omega_{li} - \omega_i$  für  $i = 1, 2$  bezeichnet und  $\gamma_l$  ist die Linienbreite des Uhrenlasers. Da  $\gamma_l$  im Allgemeinen viel größer als  $\nu$  sein kann wird dies hier berücksichtigt.

Der stationäre Zustand lässt sich aus obigem Gleichungssystem vollständig analytisch bestimmen, für die weiteren Untersuchungen sollen dabei die Population  $\rho_{11}$  und die Kohärenz  $\rho_{12}$  betrachtet werden, welche interessantes Verhalten zeigen.

Die Population  $\rho_{11}$  des stationären Zustands ist bei resonantem Kühllaser ( $\delta_1 = 0$ ) in Abb. 2.11 geplottet. Bei schwacher Anregung des  $|3\rangle - |2\rangle$  Übergangs zeigt das Anregungsspektrum zwei klar getrennte gut aufgelöste Peaks. In diesem Parameterbereich testet der schwache Laser die Anregungswahrscheinlichkeit der „dressed states“ des Kühllasers aus einer Art Zuschauerposition, welche das System nicht beeinflusst. Das

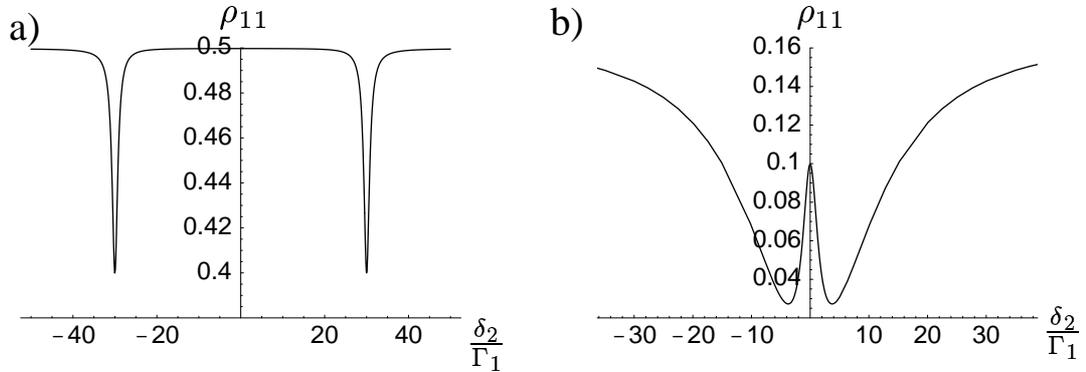


**Abbildung 2.10:** Population  $\rho_{11}$  in Abhängigkeit von der Verstimmung  $\delta_2$  und Intensität  $\epsilon_2$  des Uhrenlasers für  $\delta_1 = 0$

beobachtete Anregungsspektrum welches durch Durchstimmen des Uhrenlasers gewonnen wird, zeigt deshalb die doppelt gepeakte Struktur, welche auch als „Autler-Townes splitting“ bekannt ist [94].

Wird die Leistung des Uhrenlasers erhöht, verändert das Spektrum seine Form grundlegend (Abb. 2.11 (b)). Für den Grenzfall, in dem beide Laser die zugehörigen Übergänge sättigen, erscheint innerhalb einer breiten Resonanz ein scharfer Peak, an dem  $\rho_{11}$  annähernd seinen Ausgangswert (für sehr stark verstimmten oder abgeschalteten Uhrenlaser) erreicht. Für  $\delta_2 = 0$  sind beide Laser in Resonanz, was zum Aufbau einer Kohärenz zwischen den beiden angeregten Zuständen  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  führt. Diese erhöht die Emissionsrate auf dem  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergang und unterdrückt die Absorption des Lasers  $\omega_{12}$  [95]. Es wurde im  $\Lambda$ -System früher bereits gezeigt, dass starkes Pumpen auf einem der metastabilen Übergänge zu einer Stabilisierung der Quantenfluktuationen im Fluoreszenzspektrum führen kann [96–98]. Bemerkenswert ist weiterhin, dass die erhöhte Fluoreszenz, welche zwischen den beiden ATS-Peaks liegt, deutlich vom Anstieg im Zentrum beim CIC-Regime unterscheidbar ist. Im ATS-Regime ohne Verstimmung des Kühllasers ( $\delta_1 = 0$ ) ist das Anregungsspektrum durch zwei Lorentzkurven mit gleicher Breite gegeben, welche um die gleiche Frequenz rot- bzw. blauverschoben um die Resonanz des Uhrenlasers liegen. Im Fall von CIC handelt es sich ebenfalls um zwei Lorentzkurven, welche jedoch beide an der Resonanz ( $\delta_2 = 0$ ) liegen, und unterschiedliche Amplitude, Breite und

Vorzeichen besitzen.



**Abbildung 2.11:** Population  $\rho_{11}$  in Abhängigkeit von der Verstimmung  $\delta_2$  im ATS- (a) und CIC-Regime (b)

In den hier angestellten Betrachtungen soll das Verhalten in beiden Grenzfällen geklärt werden, wobei auch insbesondere der Übergang von einem ins andere Regime analysiert wird. Dabei zeigt sich, dass es klar definierte Bedingungen für das eine oder das andere Regime gibt, und eine klare Trennlinie gezogen werden kann. Diese Trennlinie wird durch einen einzigen Kontrollparameter, welcher durch das Verhältnis der Rabi-Frequenzen  $\epsilon_1/\epsilon_2$  der beiden Laser gegeben ist, bestimmt. Dieses Verhältniss gibt, über die Population des oberen Niveaus  $|1\rangle$ , den Grad an Laserinduzierter Kohärenz zwischen den beiden angeregten Zuständen an.

### 2.3.3 Kühllaser in Resonanz

Im diesem Abschnitt wird angenommen, dass der Kühllaser in Resonanz zum  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergang ( $\delta_1 = 0$ ) ist. Im weiteren wird aus der Mastergleichung (2.22) der stationäre Zustand bestimmt und anhand der besonderen Eigenschaften des Niveauschemas von  $\text{In}^+$  vereinfacht. Hierbei ist es von besonderem Nutzen, dass sich die Lebensdauer der beiden angeregten Zustände um den Faktor  $\Gamma_1/\nu \approx 10^5$  unterscheiden. Wir gehen folglich von

$$\Gamma_1 \gg \nu \quad (2.28)$$

aus. Obwohl wir annehmen, dass der Uhrenlaser spektral viel breiter als der Uhrenübergang ist, gilt für diese Breite  $\gamma_l$ :

$$\Gamma_1 \gg \gamma_l \gg \nu \quad (2.29)$$

Insgesamt befinden wir uns aber auch bei starker Sättigung des Uhrenübergangs im Limit

$$\Gamma_1, \epsilon_1 \gg \gamma_l, \epsilon_2 \gg \nu \quad (2.30)$$

Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich die Lösung von (2.22) für den stationären Zustand sehr weitgehend zu vereinfachen, und damit auch das Verhalten des Systems zu verstehen. Unter Verwendung von (2.30) ergibt sich für die Population des oberen Zustandes  $|1\rangle$ :

$$\rho_{11} = \frac{\epsilon_1^2}{2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1 (\delta_2^2 + \Gamma_1^2)}{(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2) \nu} \cdot \frac{1}{(\delta_2^2 - \lambda_1^2)(\delta_2^2 - \lambda_2^2)} \right) \quad (2.31)$$

Die Parameter  $\lambda_i$  sind durch

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{a \pm b}, \quad (2.32)$$

mit

$$a = \frac{(4\epsilon_1^4 - \Gamma_1^4)\nu - \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1}{2(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)\nu} \quad (2.33)$$

$$b = \sqrt{\frac{(\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1 - (2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)\nu \eta_1)(\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1 - (2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)\nu \eta_2)}{(2(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)\nu)^2}} \quad (2.34)$$

und

$$\eta_{1,2} = 3(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2) \pm 2\sqrt{9\epsilon_1^4 + 10\epsilon_1^2 \Gamma_1^2 + 2\Gamma_1^4} \quad (2.35)$$

gegeben.

Der gesamte Ausdruck für (2.31) ist unabhängig von der Linienbreite des Uhrenlasers  $\gamma_l$ . Das ist eine Konsequenz des Limits (2.30): Terme von  $\gamma_l$ , welche im ursprünglichen Ausdruck nur als Summen mit  $\epsilon_1, \Gamma_1$  auftreten, werden in der Ableitung von (2.31) vernachlässigt. Das bedeutet, dass auch ein instabiler Uhrenlaser die Form der in Glg. (2.31) angegebenen Population nicht beeinflusst.

Da  $a$  für beliebige  $\epsilon_1, \epsilon_2$  reell ist, folgt aus Glg. (2.31) und (2.32), dass das Verhalten des System kritisch vom Wert von  $b$  abhängt. Ist  $b$  rein imaginär, so gilt

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{a \pm i|b|}, \quad (2.36)$$

was zu

$$\lambda_1 = \lambda_2^* = \lambda_0 + i\Gamma_0 \quad (2.37)$$

führt, und schließlich den Ausdruck

$$\rho_{11} = \frac{\epsilon_1^2}{2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1 (\delta_2^2 + \Gamma_1^2)}{(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2) \nu} \cdot \frac{1}{[(\delta_2 - \lambda_0)^2 + \Gamma_0^2] \cdot [(\delta_2 + \lambda_0)^2 + \Gamma_0^2]} \right) \quad (2.38)$$

für die oben berechnete Population liefert.

Offenbar kann das Anregungsspektrum für rein imaginäres  $b$  durch zwei Lorentzfunktionen mit gleicher Breite an den Positionen  $\pm\lambda_0$  beschrieben werden. Das entspricht natürlich dem gut bekannten Autler-Townes Doublet. Im Limit (2.30) kann die Position der Peaks mit

$$\lambda_0 = \epsilon_1 \sqrt{\sqrt{1 + 2 \left( \frac{\Gamma_1}{\epsilon_1} \right)^2 + \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2 \frac{\Gamma_1}{\nu}} - \frac{\gamma_l}{\Gamma_1} - \left( \frac{\Gamma_1}{\epsilon_1} \right)^2} \quad (2.39)$$

angegeben werden. Wie erwartet hängt dieser Term auch von der Rabi-Frequenz des Uhrenlasers ab.

Ist  $b$  reell, so folgt aus (2.33) und (2.34):

$$a \pm b < 0 \quad (2.40)$$

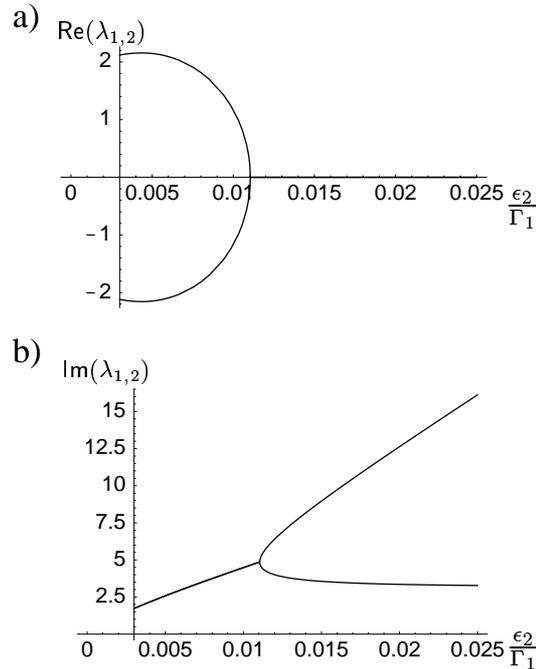
Deshalb gilt:

$$\lambda_1 = i\sqrt{|a+b|}, \quad \lambda_2 = i\sqrt{|a-b|} \quad (2.41)$$

In diesem Fall kann  $\rho_{11}$  weiter zu

$$\rho_{11} = \frac{\epsilon_1^2}{2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2} \cdot \left( 1 - \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1 (\delta_2^2 + \Gamma_1^2)}{(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2) \nu} \cdot \frac{1}{(\delta_2^2 + |\lambda_1|^2) \cdot (\delta_2^2 + |\lambda_2|^2)} \right) \quad (2.42)$$

umgeformt werden. Wiederum findet man zwei Lorentzkurven, welche aber beide am Zentrum der Linie bei  $\delta_2 = 0$  liegen. Die beiden Peaks haben jedoch unterschiedliche Breiten  $|\lambda_1|$  und  $|\lambda_2|$ .



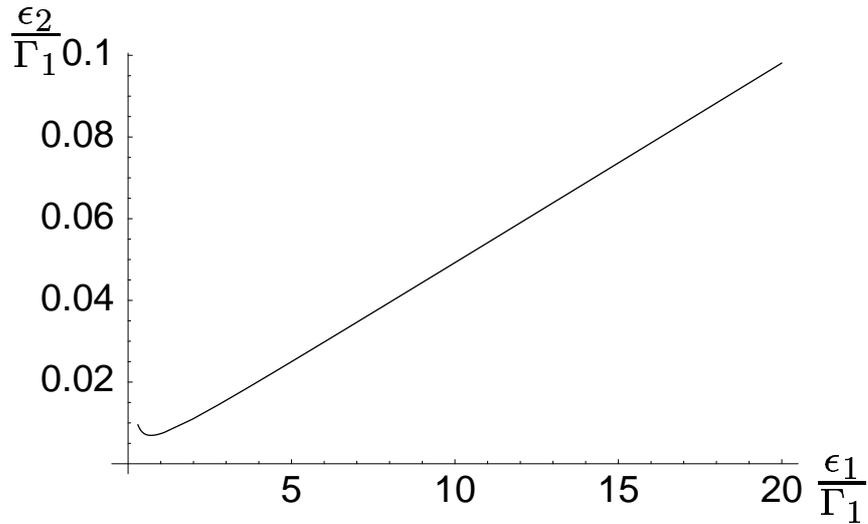
**Abbildung 2.12:** Position (a) und Breite (b) der Lorentzpeaks in Abhängigkeit von der Rabi-Frequenz des Uhrenlasers

Aus den Plots von Real- und Imaginärteil von  $\lambda_{1,2}$  in Abb. 2.12 geht hervor, dass es einen kritischen Wert  $\epsilon_2^c$  gibt, an welchem der Realteil von  $\lambda_{1,2}$  verschwindet, und sich der Imaginärteil in zwei Äste aufspaltet. Unterhalb von  $\epsilon_2^c$  gilt genau das umgekehrte, dort unterscheiden sich die Positionen der Peaks gerade um das Vorzeichen, aber die Breiten sind gleich. Diese beiden Strukturen lassen sich durch eine klare Linie voneinander trennen. Die Bedingung dafür lautet  $b = 0$  und führt zu:

$$\epsilon_2^c = \epsilon_1 \cdot \sqrt{\left(2 + \left(\frac{\Gamma_1}{\epsilon_1}\right)^2\right) \left(6 + 3 \left(\frac{\Gamma_1}{\epsilon_1}\right)^2 + 2\sqrt{9 + 10 \left(\frac{\Gamma_1}{\epsilon_1}\right)^2 + 2 \left(\frac{\Gamma_1}{\epsilon_1}\right)^4}\right) \frac{\nu}{\Gamma_1}} \quad (2.43)$$

Diese Trennlinie ist in Abb. 2.13 aufgetragen. Wie aus (2.43) folgt, hängt die Grenzlinie sowohl von der Sättigung des Kühlübergangs  $\frac{\epsilon_1}{\Gamma_1}$  wie auch dem Verhältnis der natürlichen Linienbreiten der beiden angeregten Zustände  $\frac{\Gamma_1}{\nu}$  ab. Für starke Sättigung vereinfacht sich Glg. 2.43 zu:

$$\epsilon_2^c = \epsilon_1 \cdot \sqrt{24} \sqrt{\frac{\nu}{\Gamma_1}} \quad (2.44)$$



**Abbildung 2.13:** Trennlinie zwischen ATS und CIC Regime

Bemerkenswert ist, dass sich die CIC-Resonanzen an der gleichen Stelle (bei  $\delta_2 = 0$ ) befinden, aber umgekehrte Vorzeichen haben. Dies ist im Ausdruck (Glg. 2.38) nicht unmittelbar zu erkennen, deshalb soll diese Darstellung unter der Voraussetzung  $\epsilon_2 > \epsilon_2^c$  weiter vereinfacht werden. Man betrachtet dazu zuerst den Grenzwert für  $\nu \rightarrow 0$  (was im CIC-Regime wegen  $\epsilon_2 \gg \nu$  annähernd gegeben ist) um die verbleibende Differenz weiter zu vereinfachen. Diese Methode führt auf:

$$\rho_{11} = \frac{\epsilon_1^2}{2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2} + \frac{\epsilon_1^2}{\delta_2^2 + 2(\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)} - \frac{\epsilon_1^4 \epsilon_2^2 \Gamma_1}{(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)^2 (\delta_2^2 + \frac{\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \Gamma_1}{(2\epsilon_1^2 + \Gamma_1^2)\nu})\nu} \quad (2.45)$$

Der erste Term in (2.45) ist gerade die Fluoreszenz, welche auch ohne den Uhrenlaser beobachtet würde, was identisch mit dem Limes für beliebig große Verstimmungen  $\delta_2$  ist. Die beiden nächsten Terme resultieren aus einem starken Uhrenlaser, der aber trotzdem dem Limit (2.30) genügt. Der zweite Term hängt nicht explizit von der Uhrenlaserintensität ab. Die Breite dieses Peaks wird von der Linienbreite des Übergangs  $|1\rangle - |3\rangle$  und der Leistung des zugehörigen Lasers vollständig bestimmt. Der letzte Term wird hingegen durch eine Erhöhung der Uhrenlaserleistung verbreitert, darüberhinaus hängt die Breite auch von der natürlichen Linienbreite des Übergangs  $|2\rangle - |1\rangle$  ab. Bei starker Sättigung des Kühlübergangs ( $\epsilon_1/\Gamma_1 \gg 1$ ) ist das Verhältnis der Breiten der beiden Peaks in (2.45) annähernd gleich:

$$\sqrt{6} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_2^c} \quad (2.46)$$

Die Reduktion der Fluoreszenz auf dem  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergang, welche durch den dritten Term in (2.45) beschrieben wird, ist eine Folge der Erhöhung des Populationstransfers in den Zustand  $|2\rangle$  bei größerer Uhrenlaserleistung. Deshalb ist der positive Lorentzpeak (zweiter Term in (2.45)) eine Konsequenz von Kohärenzen zwischen den Zuständen [99]. Um dies auch explizit zu zeigen, ist der Aufbau der Kohärenz  $\rho_{12}$  zwischen den oberen beiden Niveaus in Abb. 2.14 in Abhängigkeit der Laserverstimmung  $\delta_2$  dargestellt.

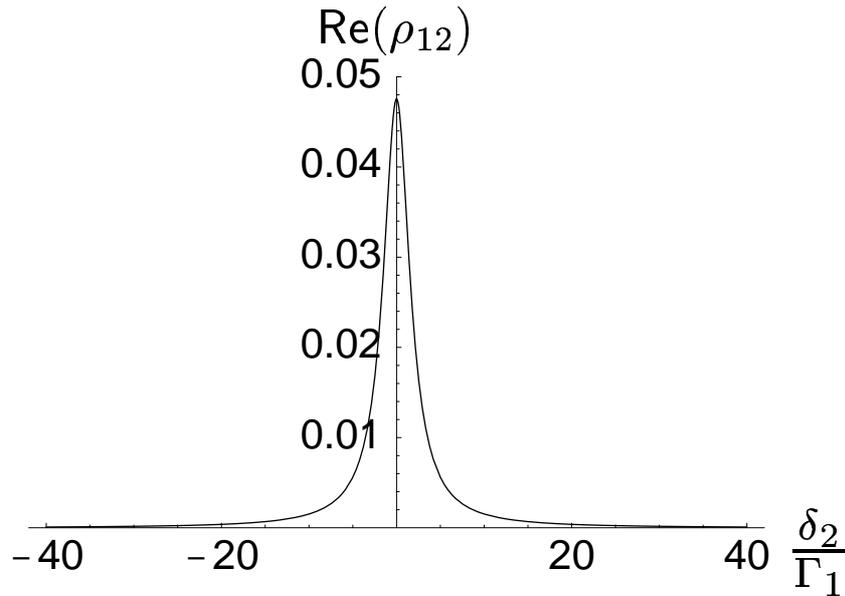
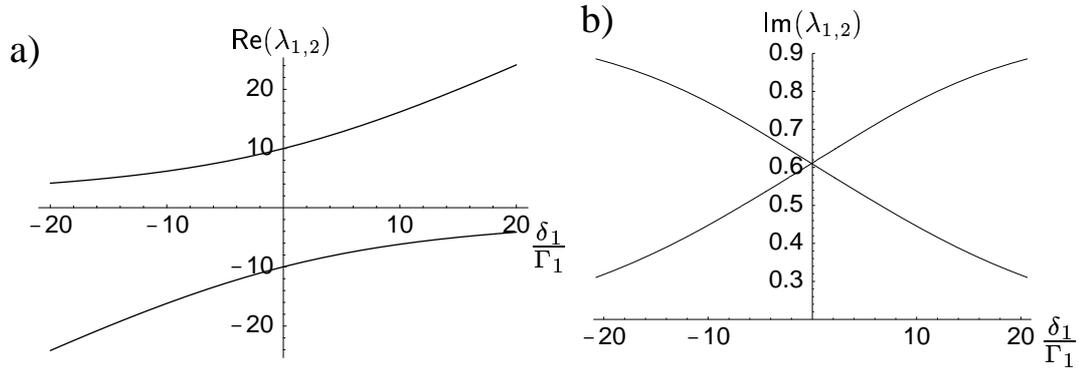


Abbildung 2.14: Kohärenz  $\rho_{12}$  in Abhängigkeit von  $\delta_2$

### 2.3.4 Allgemeiner Fall

Für den allgemeinen Fall eines nichtresonanten Kühllasers  $\delta_1 \neq 0$  kann die Mastergleichung (2.22) ebenfalls analytisch gelöst werden. Allerdings sind diese Lösung extrem lang und unübersichtlich, so dass diese hier nur graphisch vorgestellt werden.

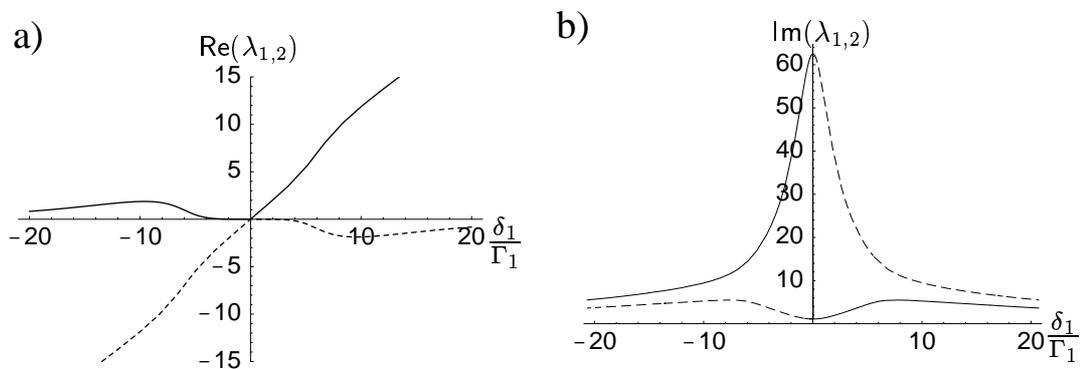
Im ATS-Regime  $\epsilon_2 < \epsilon_2^c$  befinden sich die beiden Peaks an Positionen welche asymmetrisch zu  $\delta_2 = 0$  sind. Dies ist eine Konsequenz der 2-Photonen-Resonanz-Bedingung für die beiden Laser. Im CIC-Regime hingegen wird nur der scharfe Peak verschoben, die breite Resonanz der reduzierten Fluoreszenz bleibt im Frequenzraum annähernd konstant. Um dieses Verhalten zu verstehen, ist es nötig, den Pol von  $\rho_{11}$  als Funktion von  $\delta_1$  zu betrachten. Die komplexen Nullstellen des Nenners von  $\rho_{11}$  sollen wie oben mit  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gekennzeichnet werden. In den Abb. 2.15 und 2.16 wird der Real- und Imaginärteil von  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  als Funktion von  $\delta_1$  in den beiden Grenzfällen  $\epsilon_2 < \epsilon_2^c$  und  $\epsilon_2 > \epsilon_2^c$  gezeigt. Im Fall von ATS werden die beiden Resonanzen um einen ungleichen Anteil von der Resonanz weg (bzw. zu ihr hin) verschoben und die Breiten beginnen auseinander



**Abbildung 2.15:** Breite und Position der ATS-Peaks in Abhängigkeit von  $\delta_1$

zu laufen. Derjenige Peak welcher zur Resonanz hin verschoben wird, wird schärfer und umgekehrt.

Im Fall von  $\epsilon_2 > \epsilon_2^c$  wird die CIC-Resonanz blauverschoben für  $\delta_1 > 0$  und rotverschoben für  $\delta_1 < 0$ . Die breite Resonanz wird dagegen kaum verschoben, allerdings nimmt deren Breite rapide für größere Verstimmungen von  $\delta_1$  ab.



**Abbildung 2.16:** Breite und Position der CIC-Peaks in Abhängigkeit von  $\delta_1$

Insgesamt wurde mit obiger Rechnung ein V-System mit sehr unterschiedlichen Lebensdauern der angeregten Zustände untersucht, welche von einem Laser auf dem schnellen Übergang kontinuierlich gepumpt wird und einem zweiten Laser mit unterschiedlicher Intensität auf dem langsamen Übergang ausgesetzt ist. Dabei konnten zwei Grenzfälle in Abhängigkeit der Laserintensität des Uhrenlasers klar voneinander abgegrenzt werden. Im ATS-Regime erfüllt der Uhrenlaser die Funktion eines Detektors, der die Population der gesplitteten dressed-states des schnellen Übergangs misst. Das führt auf die gut bekannte Doppelpeakstruktur des Autler-Townes splitting. Im Gegensatz dazu verursacht

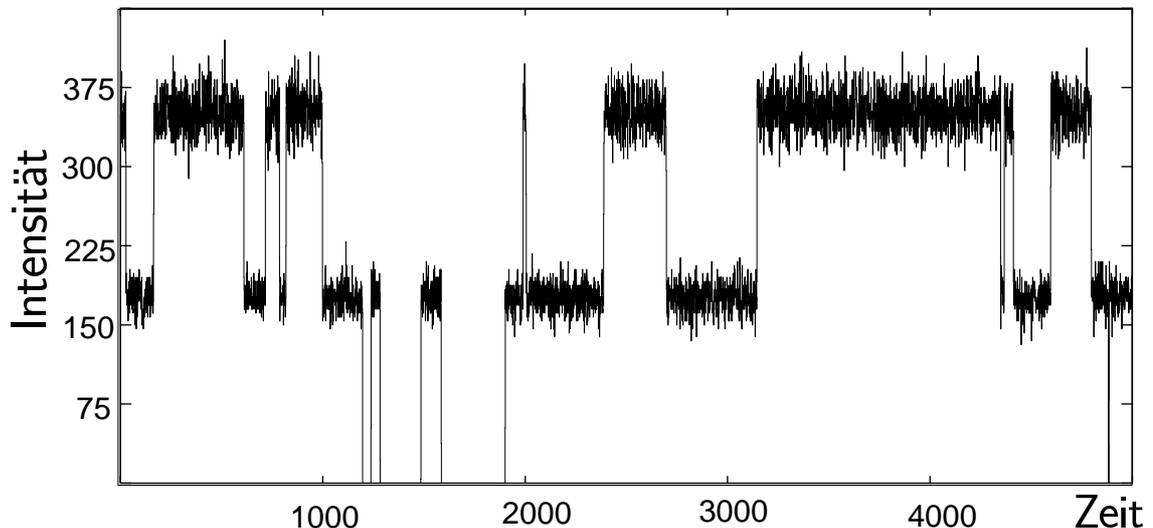
der Uhrenlaser im CIC-Regime einen Populationstransfer in den Zustand  $|2\rangle$ . Die an der 2-Photonenresonanz entstehende Kohärenz unterdrückt die Absorption des Uhrenlasers und fördert damit die Emission von Fluoreszenzlicht auf dem schnellen Übergang. Für  $\delta_1 = 0$  wurden einfache analytische Formeln gefunden, welche das Verhalten des Systems vollständig beschreiben und Breite und Position der auftretenden Lorentzpeaks angeben. Darüberhinaus konnte eine scharfe Trennlinie zwischen den beiden Regimes gezogen werden, welche einen Zusammenhang zwischen den beiden Laserleistungen angibt. Für den Fall der Sättigung des Kühlübergangs konnte dieser Zusammenhang sehr weit vereinfacht werden (Glg. 2.44). Für gegebene Laserintensitäten kann damit unmittelbar das zu beobachtende Regime angegeben werden. Konkrete Experimente dazu sind in Vorbereitung [100].

# 3

## Quantensprünge in Ionenpaaren

### 3.1 Dipol-Dipol-Wechselwirkung in Ionenpaaren

Die Diskussion, inwieweit die Dipol-Dipol-Wechselwirkung die Quantenstatistik von Ionenpaaren beeinflusst, wird seit langer Zeit unter immer neuen Aspekten diskutiert. Es gibt dazu eine Reihe an theoretischen Arbeiten [52, 101–112], aber auch experimentelle Ergebnisse, welche sich zu widersprechen scheinen [21, 113–115].



**Abbildung 3.1:** Statistische Fluoreszenzphasen von 2 Ionen. Hier wird die Anzahl pro Zeiteinheit gezählter Photonen geplottet. Die Fluoreszenz der Ionen wechselt dabei zwischen Phasen in denen beide, nur eines, oder keines der beiden Ionen emittieren.

Dabei werden die Quantensprünge von zwei oder mehreren 3-Niveau-Atomen untersucht welche auf einem (schnellen) Übergang mit einem Laser wechselwirken, sich aber auch in

einem metastabilen Zustand befinden können. Anhand des detektierten Fluoreszenzlichts dieser Atome lässt sich feststellen, wann sich welches Atom im metastabilen Zustand befindet. Man findet deutlich unterscheidbare Hell- und Dunkelphasen der einzelnen Atome, welche eindeutig als Quantensprünge zu interpretieren sind. Die Analyse dieser Hell- und Dunkelphasen der einzelnen Atome soll hier auch Klarheit über die Konsequenzen der Dipol-Dipol-Wechselwirkung, oder auch allgemeiner über beliebige kooperative Effekte in derartigen Systemen liefern.

Sauter et al. [21] haben experimentelle Ergebnisse vorgelegt, welche in Gruppen von  $Ba^+$ -Ionen eine Rate an simultanen Übergängen zeigen, die von den statistischen Vorhersagen für nicht wechselwirkende Atome abweicht. In einem weiteren Experiment von Itano et al. [116] konnte dies jedoch nicht bestätigt werden. Dort wurden  $Hg^+$ -Ionen untersucht, welche nur Bruchteile einer Übergangswellenlänge voneinander entfernt waren, und keinerlei Abweichung von der Statistik unabhängig strahlender Atome festgestellt. Neuere Ergebnisse von Block et al. [114, 117] zeigen in einer linearen Kette von Kalziumionen allerdings wieder erhöhte Raten für Mehrfachsprünge. Die Autoren schlagen als Erklärung nicht weiter spezifizierte langreichweitige Wechselwirkungen für Ionenkristalle vor. Es scheint also immer noch ungeklärt, welche Parameter die Ergebnisse der einzelnen Experimente bedingen und wie diese kontrolliert werden können.

Prinzipiell müssen dabei zwei Arten von Systemen unterschieden werden, zum einen diejenigen, in denen die Atome durch spontane Zerfälle in das metastabile Niveau gelangen, zum anderen die, in denen ein zweiter Laser verwendet wird, welcher die Atome (entweder durch  $\pi$ -Pulse oder auch kontinuierlich) dorthin befördert. Um die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zu analysieren ist es hilfreich, beide Schemata zu betrachten, da sich in jedem der der jeweiligen Systeme neue Aspekte herausarbeiten lassen. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels, sollen die theoretischen Vorhersagen für derartige Systeme anhand von Master-Gleichungen, Ratengleichungen und Quanten-Monte-Carlo-Simulationen analysiert werden. Dabei werden auch die Ergebnisse des Mastergleichungsansatzes von Javanainen [110] und Agarwal [107, 109], sowie die Quanten-Monte-Carlo-Simulationen von Beige [52] vorgestellt und weiterentwickelt.

## 3.2 Mastergleichung für Ionenpaare

### 3.2.1 Symmetrisierung

Die Mastergleichung (1.32) soll nun für den betrachteten Fall vereinfacht werden. Um die Analyse nach Fluoreszenzphasen zu ermöglichen, ist es sinnvoll, die reine Zustandsbasis zu verlassen und eine symmetrisierte Basis, welche aus den „Dressed States“ der einzelnen Atome aufgebaut ist, zu verwenden.

Der Grundzustand soll dabei (wie im vorhergehenden Abschnitt) mit  $|3\rangle_i$  bezeichnet werden. Der angeregte Zustand für das  $i$ -te Atom ist  $|1\rangle_i$  und der metastabile  $|2\rangle_i$ . Die dressed

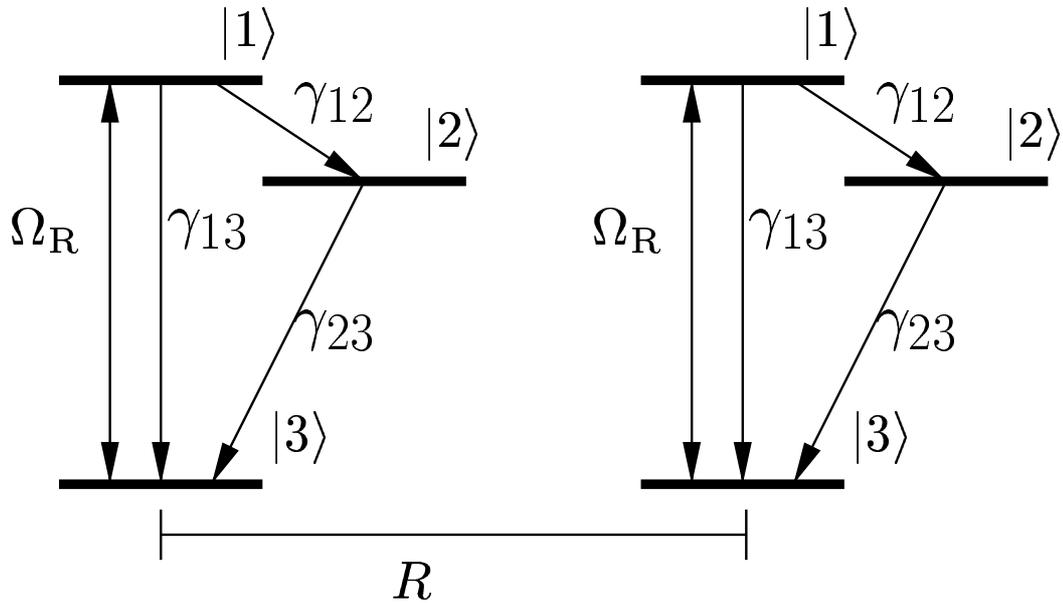


Abbildung 3.2: Zwei wechselwirkende 3-Niveau-Systeme

states für das  $i$ -te Atom sind unter Annahme der Laserwechselwirkung auf dem Übergang  $|1\rangle - |3\rangle$  definiert als:

$$\begin{aligned}
 |+\rangle_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 + |3\rangle_1) \\
 |-\rangle_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 - |3\rangle_1) \\
 |+\rangle_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_2 + |3\rangle_2) \\
 |-\rangle_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_3 - |3\rangle_3)
 \end{aligned}$$

(3.1)

Sie haben die Eigenschaft für das 2-Niveau-Subsystem aus  $|1\rangle - |3\rangle$  im Grenzfall starker Laserleistung stationär zu werden. Alle weiteren Wechselwirkungen sind ebenfalls symmetrisch in den beiden Ionen, also verspricht eine Symmetrisierung der Dressed-State-Basis aus  $|+\rangle_i$ ,  $|-\rangle_i$  und  $|2\rangle_i$  die größte Vereinfachung der inneren Dynamik des Systems. Für ein 3-Niveau-Ionenpaar definiert man demzufolge die neue unitäre Basis:

$$\begin{aligned}
|+\rangle &:= |+, +\rangle \\
|-\rangle &:= |-, -\rangle \\
|\pm^s\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) \\
|\pm^a\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle - |-, +\rangle) \\
|2^+{}^s\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, 2\rangle + |2, +\rangle) \\
|2^+{}^a\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, 2\rangle - |2, +\rangle) \\
|2^-{}^s\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, 2\rangle + |2, -\rangle) \\
|2^-{}^a\rangle &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-, 2\rangle - |2, -\rangle) \\
|2\rangle &:= |2, 2\rangle
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Diese Basis hat zwei grundlegende Eigenschaften, welche für die Betrachtung des Gesamtproblems von großem Nutzen sind. Zum ersten lassen sich Unterräume, welche den Fluoreszenzphasen des Systems entsprechen, gerade durch die Vektoren dieser Basis aufspannen (s.u.). Zum zweiten erzeugt der Laser, welcher mit dem Übergang  $|3\rangle - |1\rangle$  wechselwirkt, keinerlei Kohärenzen zwischen den so definierten Basiszuständen. Unter dieser Symmetrisierung soll die Mastergleichung des System betrachtet werden.

### 3.2.2 Ratengleichungen

Die Mastergleichung (1.32) wurde von Javanainen und Lewenstein [110] analysiert. Es wurde gezeigt, dass sich die vereinfachte Mastergleichung für den Grenzwert starker Laserintensität (Rabifrequenz  $\gg$  jede der beteiligten Raten) zu einem geschlossenem System von Ratengleichungen umformen lässt.

Mit der Definition  $P_i = \rho_{ii}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_+ &= \frac{1}{2} \left[ (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) \left( P_+ + \frac{1}{2} P_{\pm s} \right) + \frac{1}{2} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) P_{\pm a} + (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^s} \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^a} - (2\gamma_{13} + \gamma_{13}(R) + 2\gamma_{12}) P_+ \right] \\
\dot{P}_- &= \frac{1}{2} \left[ (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) \left( P_- + \frac{1}{2} P_{\pm s} \right) + \frac{1}{2} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) P_{\pm a} + (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^s} \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^a} - (2\gamma_{13} + \gamma_{13}(R) + 2\gamma_{12}) P_- \right] \\
\dot{P}_{\pm s} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) (P_+ + P_-) + (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) P_{\pm a} + \frac{1}{2} (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) - 2(\gamma_{13} + \gamma_{12}) P_{\pm s} \right] \\
\dot{P}_{\pm a} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) (P_+ + P_- + 2P_{\pm s}) + \frac{1}{2} (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) - 2(\gamma_{13} - \gamma_{13}(R) + \gamma_{12}) P_{\pm a} \right] \\
\dot{P}_{\frac{1}{2}^s} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) + \frac{1}{4} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) (2P_+ + P_{\pm s}) + \frac{1}{2} (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) P_{\pm a} + (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) P_2 \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_{13} + \gamma_{12} + \gamma_{12}(R) + 2\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^s} \right] \\
\dot{P}_{\frac{1}{2}^a} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) + \frac{1}{4} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) P_{\pm a} + \frac{1}{2} (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) (2P_+ + P_{\pm s}) + (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) P_2 \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_{13} + \gamma_{12} - \gamma_{12}(R) + 2\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^a} \right] \\
\dot{P}_{\frac{1}{2}^s} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) + \frac{1}{4} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) (2P_- + P_{\pm s}) + \frac{1}{2} (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) P_{\pm a} + (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) P_2 \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_{13} + \gamma_{12} + \gamma_{12}(R) + 2\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^s} \right] \\
\dot{P}_{\frac{1}{2}^a} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) + \frac{1}{4} (\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) P_{\pm a} + \frac{1}{2} (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) (2P_- + P_{\pm s}) + (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) P_2 \right. \\
&\quad \left. - (\gamma_{13} + \gamma_{12} - \gamma_{12}(R) + 2\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) P_{\frac{1}{2}^a} \right] \\
\dot{P}_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^s} + P_{\frac{1}{2}^s} \right) + (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) \left( P_{\frac{1}{2}^a} + P_{\frac{1}{2}^a} \right) - 4\gamma_{23} P_2 \right] \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Diese Ratengleichungen ermöglichen im Folgenden die Fluoreszenzphasen des Systems analytisch zu betrachten.

### 3.2.3 Fluoreszenzphasen

Da im Zusammenhang mit der Detektion von Fluoreszenzphasen nur typische Quantensprungkonfigurationen interessant sind, kann man vom Limit

$$\gamma_{13} \pm \gamma_{13}(R) \gg \gamma_{12} \pm \gamma_{12}(R), \gamma_{23} \pm \gamma_{23}(R) \quad (3.4)$$

ausgehen, welches etwa auch vom  $\text{In}^+$  Ion sehr gut erfüllt wird. Zu betrachtende Abstände zwischen den Ionen sollen in jedem Fall mehr als 2 Wellenlängen des lasergetriebenen Übergangs (für  $\text{In}^+$  sogar mehr als 10-mal soviel) betragen. Damit gilt:

$$\frac{\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)}{\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)} < 2 \quad (3.5)$$

Bei der Detektion von Fluoreszenzphasen wird prinzipiell über Zeitintervalle gemittelt, die erheblich länger sind als die schnellste Rate, aber auch erheblich kürzer als alle weiteren. Aus (3.4) folgt aber, dass hier nur über beide Zerfallszeiten  $\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)$  und  $\gamma_{13} - \gamma_{13}(R)$  gemittelt werden kann. Sehr wohl können aber Übergänge, welche auf der Zeitskala der weiteren Raten stattfinden, aufgelöst werden.

Die Fluoreszenzphasen lassen sich also durch Unterräume  $B_2$ ,  $B_1$  und  $D$  folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} B_2 &= \{ |+\rangle, |-\rangle, |\pm^s\rangle, |\pm^a\rangle \} \hat{=} \text{Doppelte Fluoreszenz} \\ B_1 &= \left\{ \begin{array}{l} |2^{+s}\rangle, |2^{+a}\rangle \\ |2^{-s}\rangle, |2^{-a}\rangle \end{array} \right\} \hat{=} \text{Einfache Fluoreszenz} \\ D &= \{ |2\rangle \} \hat{=} \text{Keine Fluoreszenz} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in diesen Unterräumen folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_+ + P_- + P_{\pm^s} + P_{\pm^a} \\ P_1 &= P_{2^{+s}} + P_{2^{+a}} + P_{2^{-s}} + P_{2^{-a}} \\ P_D &= P_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Damit können für die Übergänge zwischen den Fluoreszenzphasen folgende Ratengleichungen verwendet werden, welche direkt aus (3.3) abgeleitet sind.

$$\begin{aligned}
\dot{P}_2 &= \gamma_{23}P_1 - \gamma_{12}P_2 \\
\dot{P}_1 &= \gamma_{12}P_2 + 2\gamma_{23}P_D - \left(\frac{1}{2}\gamma_{12} + \gamma_{23}\right)P_1 \\
\dot{P}_D &= \frac{1}{2}\gamma_{12}P_1 - 2\gamma_{23}P_D
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dabei zeigt sich überraschenderweise, dass die Übergänge zwischen den Fluoreszenzphasen nicht vom Abstand der beiden Atome abhängen. Solange Glg. (3.5) erfüllt ist taucht der Abstandsparameter  $R$  in (3.8) nicht auf. Da dies aber für jedes experimentelle System, welches bislang betrachtet wurde, gilt, ist obige Aussage der Theorie in diesem Punkt eindeutig <sup>1</sup>.

### 3.2.4 Erweiterungen

Um also Dipol-Dipol-Wechselwirkung von zwei Ionen sichtbar zu machen, ist es primär nötig, dieses Ergebnis richtig zu interpretieren und auch im Rahmen der zeitlichen Entwicklung von einzelnen Zuständen zu verstehen. Dies kann, wie im Weiteren gezeigt wird, durch die Auswertung von Quanten-Monte-Carlo-Simulationen eines derartigen Systems geschehen. Es sollen aber auch erweiterte Systeme untersucht werden. Zum einen kann noch ein zweiter Laser integriert werden, welcher ebenfalls den Übergang  $|3\rangle - |2\rangle$  treibt und damit zusammen mit dem 1. Laser ein  $V$ -System bildet. Wie von Beige et al. [52] gezeigt wurde, können damit Dipol-Dipol-Wechselwirkungen über Ionenabstände von mehreren Wellenlängen des Übergangs  $|1\rangle - |3\rangle$  sichtbar gemacht werden. Dies soll im Folgenden auch in für gespeicherte  $\text{In}^+$  Ionen erreichbaren Parameterbereichen (siehe (3.4)) untersucht werden.

Eine weitere Beschränkung, welche bisher nicht diskutiert wurde, steckt in der prinzipiellen Art der theoretischen Behandlung. Durch die Betrachtung der Ratengleichung (3.3) bzgl. der symmetrisierten Basis (3.2) ist es nur möglich, Detektionsschemata zu untersuchen, die nicht unterscheiden, welches Atom ein detektiertes Photon emittiert hat. Definiert man nun aber einen Detektor  $\sigma_i$ , welcher die Emission eines Photons vom  $i$ -ten Atoms auf dem Übergang  $|1\rangle - |3\rangle$  misst:

$$\sigma_i = |3\rangle_i \langle 1|, \tag{3.9}$$

so resultiert aus jeder Detektion ein Zustand, welcher sich nur als Superposition der symmetrisierten Basiszustände ausdrücken lässt. Damit kann aber die Entwicklung der Kohärenzen auch im Limit starker Sättigung nicht mehr vernachlässigt werden und die Behandlung mit Ratengleichungen aus (3.3) wird ungültig.

---

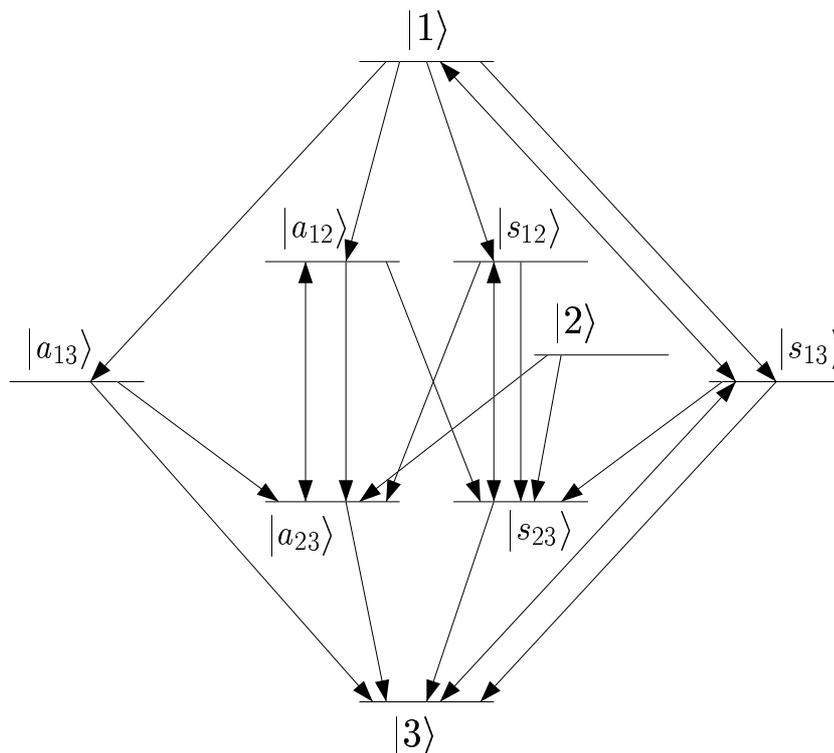
<sup>1</sup>In [110] werden noch weitere Limites untersucht, welche aber im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht von Bedeutung sind

Da die bereits in Labors eingesetzten CCD-Kameras sehr wohl eine orts aufgelöste Detektion des Fluoreszenzlichts ermöglichen, soll auch eine Simulation mit solchen Detektoren durchgeführt werden. Wie gezeigt wird, kann auch in diesem Fall die Dipol-Dipol Wechselwirkung sichtbar gemacht werden.

### 3.3 Quanten-Zeno-Effekt für die Dipol-Dipol Wechselwirkung

#### 3.3.1 Entwicklung des Zustandsvektors

Geht man davon aus, das betrachtete System in einem reinen Zustand vorzufinden, so kann die Entwicklung des Zustandsvektors mit Hilfe der Schrödingergleichung und dem Hamiltonoperator (1.29) untersucht werden. Für die Analyse der Quantensprünge des Systems muss dann, wie in Abschnitt 1.7 dargelegt, zunächst die zeitliche Entwicklung unter der Bedingung, dass kein Photon emittiert wird, untersucht werden.



**Abbildung 3.3:** 9-Niveau-System, die Laserwechselwirkungen sind mit Doppelpfeilen, die spontanen Zerfälle mit Einfachpfeilen gekennzeichnet

Für das in 3.2 diskutierte System lässt sich der bedingte Hamiltonian aus (1.48) schreiben als:

$$\begin{aligned}
H_{\text{cond}} = & \frac{\hbar}{i} \left[ \gamma_{13} (\sigma_{11}^{13} \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{13} \sigma_{22}^{31}) + \gamma_{13}(R) (\sigma_{11}^{13} \sigma_{22}^{31} + \sigma_{22}^{13} \sigma_{11}^{31}) \right. \\
& + \gamma_{12} (\sigma_{11}^{12} \sigma_{11}^{21} + \sigma_{22}^{12} \sigma_{22}^{21}) + \gamma_{12}(R) (\sigma_{11}^{12} \sigma_{22}^{21} + \sigma_{22}^{12} \sigma_{11}^{21}) \\
& + \gamma_{23} (\sigma_{11}^{23} \sigma_{11}^{32} + \sigma_{22}^{23} \sigma_{22}^{32}) + \gamma_{23}(R) (\sigma_{11}^{23} \sigma_{22}^{32} + \sigma_{22}^{23} \sigma_{11}^{32}) \\
& \left. - i\Omega_R (\sigma_{11}^{13} + \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{13} + \sigma_{22}^{31}) \right] \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Zusammen mit den sechs zugehörigen Quantensprungoperatoren [49]

$$\begin{aligned}
J_{31}^s &= \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{31} \\
J_{31}^a &= \sigma_{11}^{31} - \sigma_{22}^{31} \\
J_{21}^s &= \sigma_{11}^{21} + \sigma_{22}^{21} \\
J_{21}^a &= \sigma_{11}^{21} - \sigma_{22}^{21} \\
J_{23}^s &= \sigma_{11}^{32} + \sigma_{22}^{32} \\
J_{23}^a &= \sigma_{11}^{32} - \sigma_{22}^{32} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

und den zugehörigen Raten für einen beliebigen Zustandsvektor  $|\Psi\rangle$

$$P(J_{ij}^s) = 2(\gamma_{ij} + \gamma_{ij}(R)) \langle \Psi | J_{ij}^{s\dagger} J_{ij}^s | \Psi \rangle \quad (3.12)$$

$$P(J_{ij}^a) = 2(\gamma_{ij} - \gamma_{ij}(R)) \langle \Psi | J_{ij}^{a\dagger} J_{ij}^a | \Psi \rangle \quad (3.13)$$

kann die Dynamik dieses Systems vollständig beschrieben werden.

### 3.3.2 Übergang vom doppelt hellen in den einfach hellen Unter- raum

Jeder beliebige Zustandsvektor  $|\Psi\rangle(t)$  der sich zur Zeit  $t$  im doppelt fluoreszenten Unter-  
raum  $B_2$  befindet, kann in der reinen Zustandsbasis folgendermaßen beschrieben werden:

$$|\Psi\rangle(t) = c_1 |1, 1\rangle + c_2 |1, 3\rangle + c_3 |3, 1\rangle + c_4 |3, 3\rangle \quad (3.14)$$

Für den Zustand  $H_{\text{cond}}|\Psi\rangle(t)$  gilt folglich:

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar} H_{\text{cond}} |\Psi\rangle(t) = & [2(\gamma_{13} + \gamma_{12}) c_1 - i\Omega_R (c_2 + c_3)] |1, 1\rangle \\
& + [(\gamma_{13} + \gamma_{12}) c_2 + \gamma_{13}(R) c_3 - i\Omega_R (c_1 + c_4)] |1, 3\rangle \\
& + [(\gamma_{13} + \gamma_{12}) c_3 + \gamma_{13}(R) c_2 - i\Omega_R (c_1 + c_4)] |3, 1\rangle \\
& - i\Omega_R (c_2 + c_3) |3, 3\rangle \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Für Zeiten  $t + \tau$ , für die im Intervall  $[t, t + \tau]$  keine Emission stattfand, gilt somit

$$|\Psi\rangle(t + \tau) \in B_2. \quad (3.16)$$

Also ist es auch bei beliebig starker Dipol-Dipol-Wechselwirkung nur durch spontane Zerfälle möglich, den doppelt fluoreszenten Unterraum  $B_2$  zu verlassen.

Die Wahrscheinlichkeit für einen spontanen Übergang in den dunklen Unterraum  $D$  ist null. Für einen Zerfall des Zustands  $|\Psi\rangle$  aus (3.14) in den einfach fluoreszenten Raum  $B_1$  gilt:

$$\begin{aligned} P(B_2 \rightarrow B_1) &= P(J_{12}^s) + P(J_{12}^a) \\ &= (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) (2|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2) \\ &\quad + (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) (2|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2) \\ &= \gamma_{12} (2|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dieser Übergang ist auch hier völlig unabhängig vom Abstand der Ionen  $R$ . Durch (3.17) wird also auf einfache Weise erklärt, wieso auch im Mastergleichungskalkül von Javanainen und Lewenstein kein abstandsabhängiger Effekt nachgewiesen werden kann. Natürlich können trotzdem Effekte wie Sub- und Superradianz [118] auf dem schnellen  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergang auftreten; dies ist jedoch keine besondere Eigenschaft von 3-Niveausystemen. Zudem nehmen wir mit (3.5) an, dass  $\gamma_{13}(R)$  klein gegen  $\gamma_{13}$  ist und deshalb derartige Effekte für diesen Übergang ohnehin keine Rolle spielen.

### 3.3.3 Übergang in den dunklen Zustand

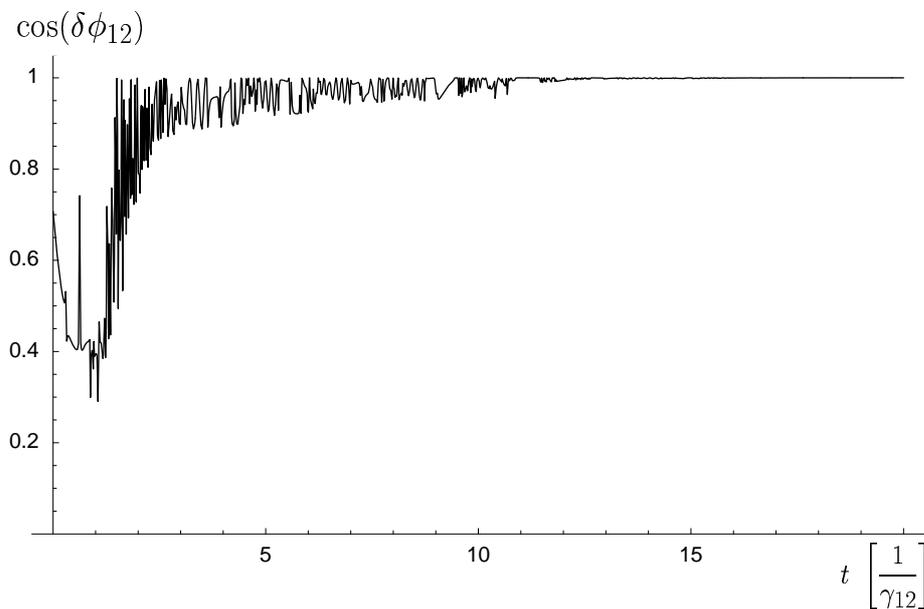
Die Betrachtungen aus 3.3.1 tragen für den Fall, dass sich das System im einfach fluoreszenten Unterraum  $B_1$  befindet, nicht mehr. Zwar verbleibt, nach analoger Rechnung wie in (3.15) der Zustand im Unterraum  $B_1$ , soweit kein spontaner Zerfall eintritt. Die Raten müssen im folgenden jedoch neu betrachtet werden. Für den Zustand  $|\Psi\rangle$  mit

$$|\Psi\rangle = c_1|1, 2\rangle + c_2|2, 1\rangle + c_3|3, 2\rangle + c_4|2, 3\rangle \quad (3.18)$$

aus  $B_1$  gilt für den Übergang in den dunklen Zustand  $|2, 2\rangle$

$$\begin{aligned} P(B_1 \rightarrow D) &= P(J_{12}^s) + P(J_{12}^a) \\ &= (\gamma_{12} + \gamma_{12}(R)) |c_1 + c_2|^2 \\ &\quad + (\gamma_{12} - \gamma_{12}(R)) |c_1 - c_2|^2 \\ &= 2\gamma_{12} (|c_1|^2 + |c_2|^2) + 4\gamma_{12}(R) |c_1| |c_2| \cos(\delta\phi_{12}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dabei ist  $\delta\phi_{12}$  der Phasenunterschied zwischen  $c_1$  und  $c_2$ . Offensichtlich kann diese Übergangsrate nicht unabhängig von  $R$  ausgedrückt werden. Demzufolge ist ein Einfluss der Dipol-Dipol-Wechselwirkung auf diesen Übergang prinzipiell möglich.  $H_{\text{cond}}$  ist jedoch bzgl. seiner Wirkung auf  $|1, 2\rangle$  und  $|2, 1\rangle$  völlig symmetrisch;  $c_1$  und  $c_2$  werden also in der durch  $H_{\text{cond}}$  beschriebenen Dynamik auf der Zeitskala  $\frac{1}{\gamma_{12}(R)}$  gleichen oder gegengleichen Werten zustreben. Damit werden die Rabioszillationen der beiden Ionen durch die Dipol-Dipol-Wechselwirkung mit Phasenfaktor 0 oder  $\pi$  synchronisiert<sup>2</sup> [46]. Das bedeutet aber gerade, dass die Dipol-Dipol-Wechselwirkung in den Übergangsraten in den dunklen Zustand Konsequenzen zeigen müsste.



**Abbildung 3.4:** Synchronisierung der Rabioszillationen

Als gegenläufiger Prozess zeigt sich der spontane Zerfall  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  auf der Zeitskala  $\frac{1}{\gamma_{13}}$ . Da bei der Betrachtung des Übergangs die Emissionen in beliebige Raumwinkel berücksichtigt werden müssen, wird die relative Phase  $\delta\phi$  von  $c_1$  und  $c_2$  nach jedem Zerfall  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$  zufällig verteilt.

Damit hat man eine typische Quanten-Zeno-Konfiguration, wie sie schon mehrfach experimentell und theoretisch untersucht wurde [119–126]. Ein spontaner Prozess beeinflusst die Dynamik eines kontinuierlichen Prozesses und friert diese durch ständiges Zurücksetzen des Zustandsvektors ein.

<sup>2</sup>Hier sei noch angemerkt, dass dieses Verhalten in völliger Analogie zum Verhalten zweier klassischer rotierender Dipole ist.

Für das betrachtete System, welches sich im Regime (3.4) befindet ergibt sich somit, dass die Auswirkung der Dipol-Dipol-Wechselwirkungen der Ionen durch den Quanten-Zeno-Effekt unterbunden wird. Die Veränderung der Übergangsraten findet auf einer erheblich längeren Zeitskala statt, als die spontanen Zerfälle, ein Aufbau der Dipol-Dipol Wechselwirkungen ist also nicht möglich.

### 3.3.4 Verbleibende Übergänge

Die verbleibenden Übergänge können analog der oben betrachteten untersucht werden. Dies ist zum einen der Übergang vom dunklen in den einfach hellen Unterraum und zum anderen der Übergang vom einfach hellen in den doppelt hellen Unterraum.

Ausgehend vom dunklen Zustand folgt unmittelbar

$$P(D \rightarrow B_1) = P(J_{23}^s) + P(J_{23}^a) = 4\gamma_{23}, \quad (3.20)$$

dieser Übergang ist also nicht von der Dipol-Dipol-Wechselwirkung abhängig.

Für die Rate vom einfach hellen in den doppelt hellen Unterraum findet man für einen Zustand  $|\Psi\rangle$  wie in (3.18)

$$\begin{aligned} P(B_1 \rightarrow B_2) &= P(J_{23}^s) + P(J_{23}^a) \\ &= \gamma_{23} (|c_1|^2 + |c_2|^2) + (\gamma_{23} + \gamma_{23}(R)) |c_3 + c_4|^2 \\ &\quad + (\gamma_{23} - \gamma_{23}(R)) |c_3 - c_4|^2 \\ &= 2\gamma_{23} (|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 + |c_4|^2) \\ &\quad + 4\gamma_{23}(R) |c_3||c_4| \cos(\delta\phi_{34}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

allerdings werden auch hier, wie in 3.3.3, jegliche weitere Konsequenzen durch den Quanten-Zeno-Effekt zerstört.

Insgesamt zeigt sich, dass die überraschenden Ergebnisse der Ratengleichungen (3.2.2) auch mit der Dynamik der Zustandsvektoren verstanden werden können. Insbesondere folgt aus dieser Betrachtung, dass nicht die mit der Sättigung des  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergangs einhergehende Dämpfung der Kohärenzen der Grund für diese Ergebnisse ist. Die Veränderung der Quantensprungraten durch die Dipol-Dipol Wechselwirkung wird vielmehr durch den Quanten-Zeno-Effekt unterdrückt.

## 3.4 Dipol-Dipol-Wechselwirkung im V-System mit zwei Lasern

### 3.4.1 Grundlagen

Wie in 3.2.4 diskutiert, ist eine der naheliegenden Erweiterungen des obigen Systems, einen zweiten Laser auf dem Übergang  $|2\rangle - |3\rangle$  einzustrahlen. Damit kann zum einen die Abgeschlossenheit der Unterräume  $B_2$ ,  $B_1$  und  $D$  überwunden werden, zum anderen aber auch die Zeitskala der Wechselwirkung mit dem dunklen Zustand sehr stark beeinflusst werden.

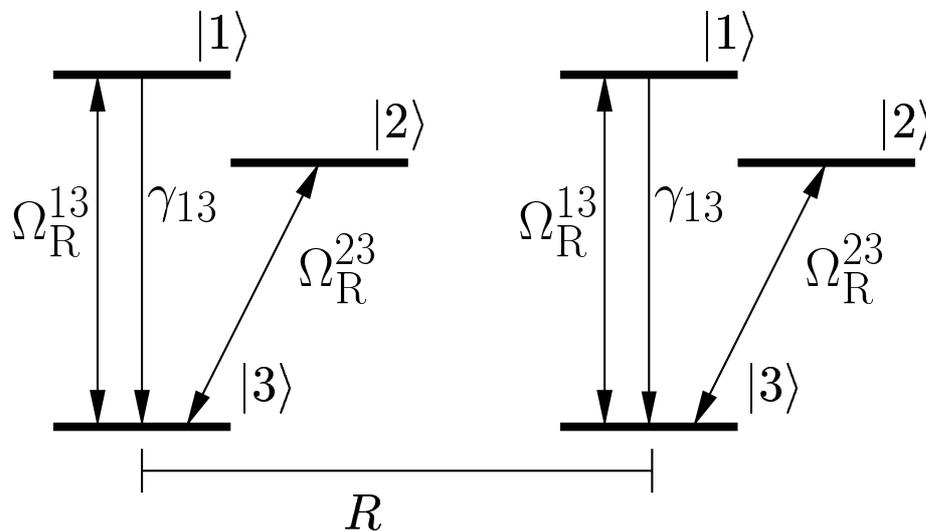


Abbildung 3.5: Wechselwirkung zweier V-Systeme mit 2-Lasern

Um das zu erreichen, ist es, wegen des Limits (3.4), welches auch hier nicht verlassen wird, nötig, den Übergang  $|2\rangle - |3\rangle$  stark zu sättigen. Damit ist für den Übergang zwischen den Unterräumen kein Zerfall von  $|1\rangle$  nach  $|2\rangle$  bzw. von  $|2\rangle$  nach  $|3\rangle$  mehr nötig. Trotzdem beobachtet man auch in derartigen Systemen ein so genanntes „Telegraphensignal“ [16, 17]. Dies wurde für Einzelionen vielfach untersucht [20, 21, 23] und lieferte auch die Bestätigung für die Richtigkeit der Theorie der Quanten-Monte-Carlo Simulationen [47, 48, 51].

Der bedingte Hamiltonian  $H_{\text{cond}}$  kann offensichtlich als

$$\begin{aligned}
H_{\text{cond}} = & \frac{\hbar}{i} \left[ \gamma_{13} (\sigma_{11}^{13} \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{13} \sigma_{22}^{31}) + \gamma_{13}(R) (\sigma_{11}^{13} \sigma_{22}^{31} + \sigma_{22}^{13} \sigma_{11}^{31}) \right. \\
& + \gamma_{12} (\sigma_{11}^{12} \sigma_{11}^{21} + \sigma_{22}^{12} \sigma_{22}^{21}) + \gamma_{12}(R) (\sigma_{11}^{12} \sigma_{22}^{21} + \sigma_{22}^{12} \sigma_{11}^{21}) \\
& + \gamma_{23} (\sigma_{11}^{23} \sigma_{11}^{32} + \sigma_{22}^{23} \sigma_{22}^{32}) + \gamma_{23}(R) (\sigma_{11}^{23} \sigma_{22}^{32} + \sigma_{22}^{23} \sigma_{11}^{32}) \\
& - i\Omega_R^{13} (\sigma_{11}^{13} + \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{13} + \sigma_{22}^{31}) \\
& \left. - i\Omega_R^{23} (\sigma_{11}^{23} + \sigma_{11}^{32} + \sigma_{22}^{23} + \sigma_{22}^{32}) \right] \quad (3.22)
\end{aligned}$$

geschrieben werden.

Das neue Regime

$$\gamma_{13} \pm \gamma_{13}(R), \Omega_R^{13} \gg \Omega_R^{23} \gg \gamma_{12} \pm \gamma_{12}(R), \gamma_{23} \pm \gamma_{23}(R) \quad (3.23)$$

erlaubt es jedoch, sämtliche von  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{12}(R)$ ,  $\gamma_{23}$  und  $\gamma_{23}(R)$  abhängigen Terme zu vernachlässigen, da jegliche von diesen verursachte Prozesse von der Laserwechselwirkung auf der Zeitskala  $\frac{1}{\Omega_R^{23}}$  überlagert werden. Es bleibt

$$\begin{aligned}
H_{\text{cond}} = & \frac{\hbar}{i} \left[ \gamma_{13} (\sigma_{11}^{13} \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{13} \sigma_{22}^{31}) + \gamma_{13}(R) (\sigma_{11}^{13} \sigma_{22}^{31} + \sigma_{22}^{13} \sigma_{11}^{31}) \right. \\
& - i\Omega_R^{13} (\sigma_{11}^{13} + \sigma_{11}^{31} + \sigma_{22}^{13} + \sigma_{22}^{31}) \\
& \left. - i\Omega_R^{23} (\sigma_{11}^{23} + \sigma_{11}^{32} + \sigma_{22}^{23} + \sigma_{22}^{32}) \right] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Der einzige hier verbleibende abstandsabhängige Term zeigt, dass man in diesem System die Möglichkeit gewinnt, die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zweier 2-Niveau-Systeme (bestehend aus  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$ ) zu untersuchen. Der dunkle Zustand  $|2\rangle$  dient dabei zusammen mit dem Laser auf  $|2\rangle - |3\rangle$  lediglich als Indikator.

### 3.4.2 Quanten-Monte-Carlo Simulationen

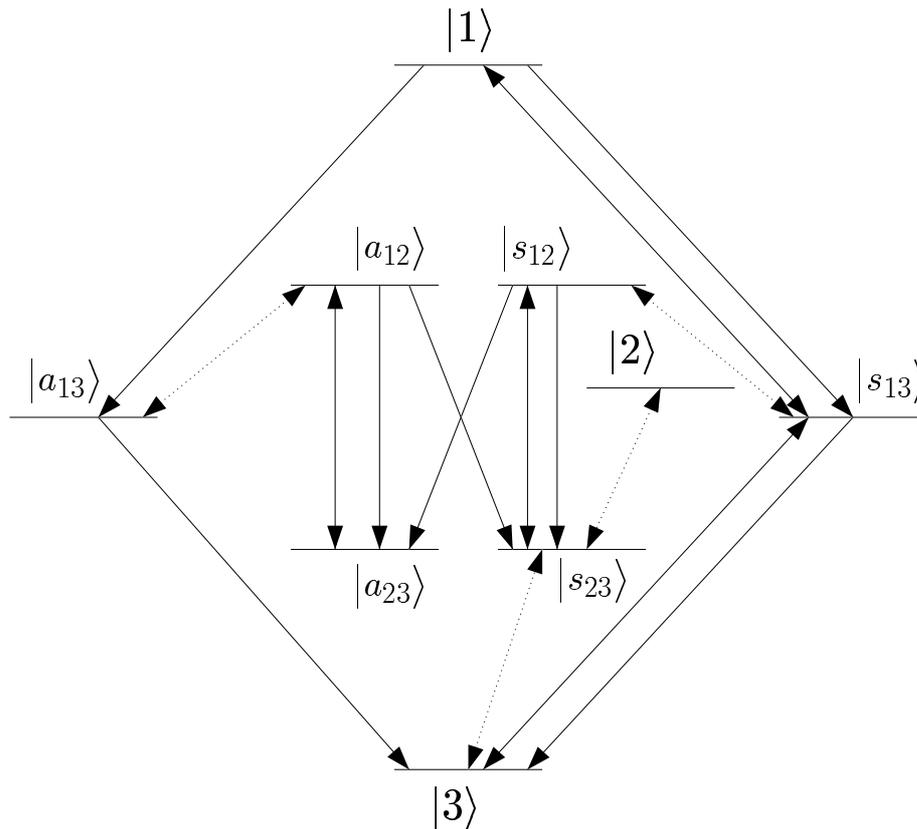
Die Quanten-Monte-Carlo Simulationen von Beige [52] zeigen, dass die Längen der einzelnen Fluoreszenzphasen stärker als erwartet von  $\gamma_{13}(R)$  abhängen. Interessant dabei ist, dass diese Abhängigkeit auch für verhältnismäßig große Ionenabstände von bis zu 10 Wellenlängen des  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergangs noch nachzuweisen ist. Deshalb soll im Rahmen dieser Arbeit besonders der Bereich großer (mit Ionenfallen für  $\text{In}^+$  realisierbarer)

Abstände genauer betrachtet werden.

Obwohl es für die Ergebnisse der Simulationen nicht von Bedeutung ist, welche Basis man dafür verwendet, ist es trotzdem einfacher, eine Symmetrisierung durchzuführen, da dies die explizite Angabe der auftretenden Raten am besten ermöglicht. Man verwendet die Basis

$$\begin{aligned}
 |i\rangle &= |i, i\rangle \quad i \in \{1, 2, 3\} \\
 |s_{ij}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|i, j\rangle + |j, i\rangle) \quad (i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \\
 |a_{ij}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|i, j\rangle - |j, i\rangle) \quad (i, j) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Damit ist es einfach die zugehörigen Raten anzugeben, welche von der Dipol-Dipol-Wechselwirkung abhängen. Aus Glg. (3.12) folgen für einen beliebigen Zustand  $|\Psi\rangle$  mit



**Abbildung 3.6:** 9-Niveau-System, die Kennzeichnungen sind analog zu Abb. 3.3. Der Laser welcher auf dem  $|2\rangle - |3\rangle$  Übergang wechselwirkt, ist durch die gepunkteten Doppelpfeile erkennbar

$$|\Psi\rangle = c_1|1\rangle + c_2|s_{13}\rangle + c_3|a_{13}\rangle + c_4|3\rangle + c_5|s_{12}\rangle + c_6|a_{12}\rangle + c_7|s_{23}\rangle + c_8|a_{23}\rangle + c_9|2\rangle \quad (3.26)$$

die Raten

$$\begin{aligned} P(J_{13}^s) &= (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) (2|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + |c_5|^2 + |c_6|^2) \\ P(J_{13}^a) &= (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R)) (2|c_1|^2 + 2|c_3|^2 + |c_5|^2 + |c_6|^2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Um zu verdeutlichen, welche spontanen Übergänge das für die einzelnen Basiszustände mit sich bringt, sind diese hier nochmal aufgeführt:

Ausgangszustand	→	Endzustand	Rate
$ 1\rangle$	→	$ s_{13}\rangle$	$2(\gamma_{13} + \gamma_{13}(R))$
$ 1\rangle$	→	$ a_{13}\rangle$	$2(\gamma_{13} - \gamma_{13}(R))$
$ s_{13}\rangle$	→	$ 3\rangle$	$2(\gamma_{13} + \gamma_{13}(R))$
$ a_{13}\rangle$	→	$ 3\rangle$	$2(\gamma_{13} - \gamma_{13}(R))$
$ s_{12}\rangle$	→	$ s_{23}\rangle$	$2(\gamma_{13} + \gamma_{13}(R))$
$ s_{12}\rangle$	→	$ a_{23}\rangle$	$2(\gamma_{13} - \gamma_{13}(R))$
$ a_{12}\rangle$	→	$ a_{23}\rangle$	$2(\gamma_{13} + \gamma_{13}(R))$
$ a_{12}\rangle$	→	$ s_{23}\rangle$	$2(\gamma_{13} - \gamma_{13}(R))$

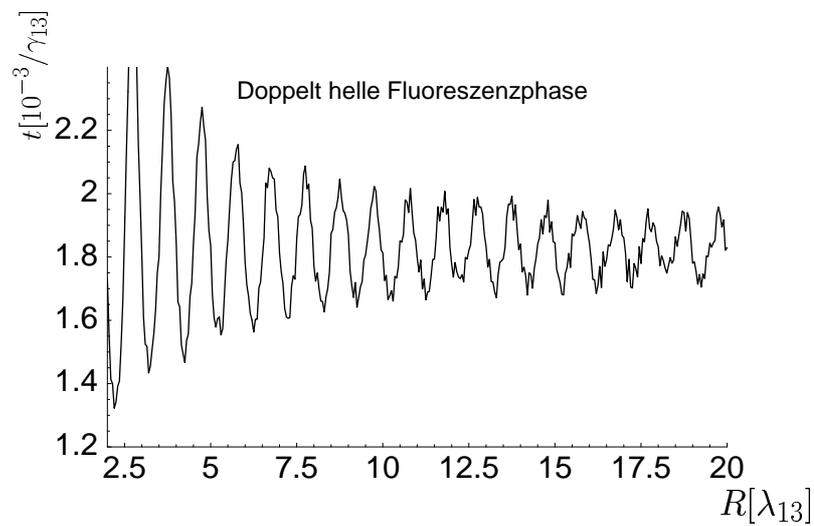
Aus Abb. 3.6 folgt, dass die einzige Möglichkeit, die Dipol-Dipol-Wechselwirkung in diesem System sichtbar zu machen, darin besteht, ein Ungleichgewicht in der Besetzungswahrscheinlichkeit zwischen  $|s_{13}\rangle$  und  $|a_{13}\rangle$  zu erzeugen, was wiederum die auftretenden Übergangsraten modifiziert. Genau das leistet aber der Laser auf dem  $|1\rangle - |3\rangle$  Übergang, welcher mit dem Zustand  $|a_{13}\rangle$  keinerlei Wechselwirkung zeigt (siehe Abb. 3.6).

Ausgehend von dieser Analyse bestätigen die Quanten-Monte-Carlo Simulationen, dass die Länge der Fluoreszenzphasen stark vom Abstand der Ionen abhängen. Diese Abhängigkeit ist auch im Bereich von 20 Wellenlängen des Übergangs  $|1\rangle - |3\rangle$  noch in der Größenordnung von  $\pm 2\%$ , was experimentell messbar sein sollte. Für  $\text{In}^+$  Paare würde das einem Ionenabstand von  $4,6\mu\text{m}$  entsprechen; auch das ist mit moderner Ionenfallentechnik erreichbar [127, 128].

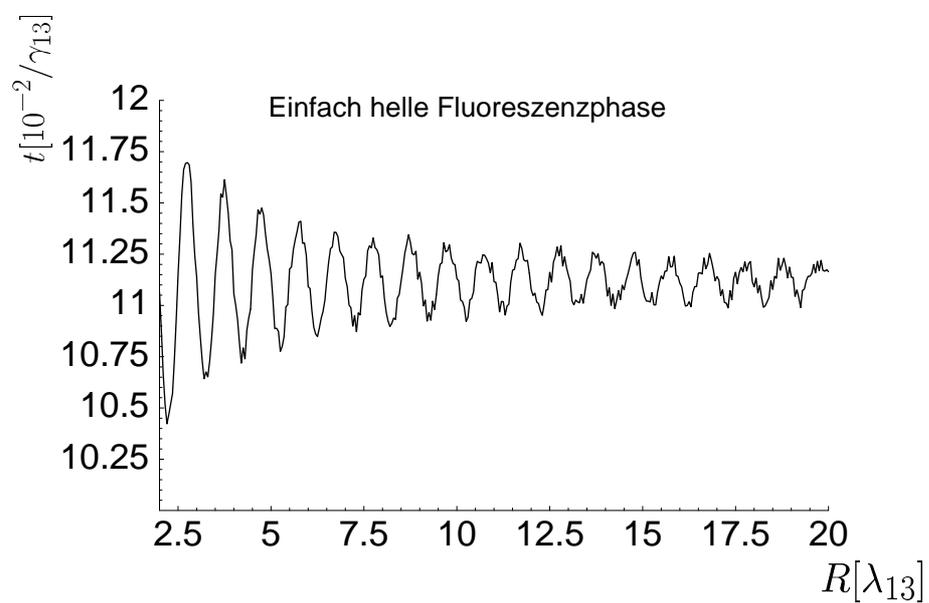
Die hier gelieferte Betrachtung kann auch noch analytisch verfeinert werden [129, 130], was jedoch einen alternativen Zugang mittels Dichteoperatoralkül voraussetzt.

### 3.4.3 Analyse des Dichteoperators

Die von Addicks et al. [130] durchgeführte Analyse der für dieses System geltenden Mastergleichung zeigt, dass für Systeme im Limit (3.4) im wesentlichen 2 Zeitskalen



**Abbildung 3.7:** Quanten-Monte-Carlo Daten der mittleren Länge der doppelt hellen Fluoreszenzphase



**Abbildung 3.8:** Quanten-Monte-Carlo Daten der mittleren Länge der einfach hellen Fluoreszenzphase

betrachtet werden müssen. Zum einen die „schnelle“ Zeitskala der Größenordnung  $\frac{1}{\gamma_{13}}$ , auf der die Populationen der Zustände der einzelnen Unterräume einem Gleichgewicht zustreben, zum zweiten die „langsame“ Zeitskala  $\frac{1}{\Omega_R^2}$ , auf welcher die Übergänge zwischen den Fluoreszenzphasen stattfinden. Vergleichbar der Analyse in 3.3 können auch für dieses Problem die Übergangsraten bestimmt werden.

Unter der Annahme  $\gamma_{13} \gg \Omega_R^{12}$  findet man für die einzelnen Unterräume folgende „stationäre“ Zustände <sup>3</sup> [130]:

$$\begin{aligned}
\rho_{B_2}^{SS} \propto & \left[ (4(\gamma_{13})^2 + 4(\Omega_R^{13})^2) + 16(\gamma_{13})^2 |\gamma_{13}(R) + i\Omega_{13}(R)|^2 \right] |3\rangle\langle 3| \\
& + \left[ i4\sqrt{2}\gamma_{13}\Omega_R^{13} (4(\gamma_{13})^2 + 4(\Omega_R^{13})^2 + \right. \\
& \quad \left. 4\gamma_{13} (\gamma_{13}(R) + i\Omega_{13}(R))) |3\rangle\langle s_{13}| + \text{h.c.} \right] \\
& + \left[ 16\gamma_{13}(\Omega_R^{13})^2 (\gamma_{13} + \gamma_{13}(R) + i\Omega_{13}(R)) |3\rangle\langle 1| + \text{h.c.} \right] \\
& + 4(\Omega_R^{13})^2 (8(\gamma_{13})^2 + 4(\Omega_R^{13})^2) |s_{13}\rangle\langle s_{13}| + 16(\Omega_R^{13})^4 [|1\rangle\langle 1| |a_{13}\rangle\langle a_{13}|] \\
& + \left[ i2\sqrt{2}\gamma_{13}4(\Omega_R^{13})^2 |s_{13}\rangle\langle 1| + \text{h.c.} \right] \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{B_1}^{SS} = & \frac{1}{4} \frac{1}{2(\gamma_{13})^2 + 4(\Omega_R^{13})^2} \left\{ \frac{1}{2} (4(\gamma_{13})^2 + 4(\Omega_R^{13})^2) [|s_{23}\rangle\langle s_{23}| + |a_{23}\rangle\langle a_{23}|] \right. \\
& + 2(\Omega_R^{13})^2 [|s_{12}\rangle\langle s_{12}| + |a_{12}\rangle\langle a_{12}|] \\
& \left. + 4i\gamma_{13}\Omega_R^{13} [|s_{23}\rangle\langle s_{12}| + |a_{23}\rangle\langle a_{12}| + \text{h.c.}] \right\} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\rho_D^{SS} = |2\rangle\langle 2|. \tag{3.30}$$

Damit können zusammen mit der aus (3.24) folgenden zeitlichen Entwicklung die Übergangsraten in zweiter Ordnung in  $\Omega_R^{23}$  bestimmt werden <sup>4</sup>. Dies führt auf:

<sup>3</sup>Bei der Bestimmung wird nur derjenige Anteil der Dynamik betrachtet, welcher das System im jeweiligen Unterraum belässt.

<sup>4</sup>Die Details dieser umfangreichen analytischen Rechnungen sind in [130] zu finden, wobei dort darüberhinaus auch die Verstimmung des Laser auf dem  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  betrachtet wird

$$P(B_2 \rightarrow B_1) =: P_{21} = 2\gamma_{13} \left( \frac{\Omega_R^{23}}{\Omega_R^{13}} \right)^2 \frac{2(\gamma_{13})^2}{(\gamma_{13})^2 + 2(\Omega_R^{13})^2} \times \left[ 1 + 2\gamma_{13}(R) \frac{\gamma_{13} ((\gamma_{13})^2 + 4(\Omega_R^{13})^2)}{((\gamma_{13})^2 + 2(\Omega_R^{13})^2)^2} \right] \quad (3.31)$$

$$P(B_1 \rightarrow B_2) =: P_{12} = 2\gamma_{13} \left( \frac{\Omega_R^{23}}{\Omega_R^{13}} \right)^2 \left[ 1 + 2\gamma_{13}(R) \frac{\gamma_{13}}{(\gamma_{13})^2 + 2(\Omega_R^{13})^2} \right] \quad (3.32)$$

$$P(B_1 \rightarrow B_0) =: P_{10} = 2\gamma_{13} \left( \frac{\Omega_R^{23}}{\Omega_R^{13}} \right)^2 \frac{(\gamma_{13})^2}{(\gamma_{13})^2 + 2(\Omega_R^{13})^2} \quad (3.33)$$

$$P(B_0 \rightarrow B_1) =: P_{01} = 2\gamma_{13} \left( \frac{\Omega_R^{23}}{\Omega_R^{13}} \right)^2 \quad (3.34)$$

$$(3.35)$$

Vom Ionenabstand  $R$  hängen nur die beiden Raten  $P_{21}$  und  $P_{12}$  ab, die Übergänge aus dem und in den dunklen Zustand  $|2\rangle$  werden durch die Dipol-Dipol Wechselwirkung auf dem  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  Übergang nicht berührt. Diese Ausdrücke werden natürlich für  $\Omega_R^{23} \not\gg \gamma_{23}$  ungültig, da ansonsten die Übergänge nicht durch den Laser, sondern durch spontane Übergänge  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  dominiert werden. Wie in Abb. 3.9 dargestellt, verschwindet der Einfluss der Dipol-Dipol Wechselwirkung in diesem Fall. Die jeweiligen Dipolmomente der einzelnen Atome werden dann vom Laserfeld überlagert.

Der Vergleich mit den Daten der Quanten-Monte-Carlo Simulationen zeigt auch für große Ionenabstände gute Übereinstimmung, wobei gerade für stärkere Laserleistungen auf dem  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  Übergang noch stärkere Auswirkungen sichtbar werden (siehe Abb. 3.7 u. 3.8). Dies fällt jedoch nicht mehr in den Gültigkeitsbereich der analytischen Betrachtung, ein Verständnis dieses Mechanismus konnte aufgrund der Komplexität der erforderlichen Mathematik bislang nicht gewonnen werden.

In jedem Falle zeigt diese Betrachtung, dass auch über Ionenabstände von mehreren Wellenlängen  $\lambda_{13}$ , noch Auswirkungen der Dipol-Dipol Wechselwirkung beobachtet werden können. Die Praxis der Vernachlässigung dieser Terme sollte daher in jedem einzelnen Fall gut gerechtfertigt sein. Für die am Max-Planck-Institut für Quantenoptik verwendeten  $\text{In}^+$  Ionenfallen sollten mit dieser Konfiguration noch Variationen der Fluoreszenzphasen um  $\pm 2\%$  festzustellen sein. Da die Länge dieser Phasen sehr genau bestimmt werden kann, ist die experimentelle Herausforderung im minimal möglichen Abstand der Ionen, sowie deren Kühlung zu sehen [12].

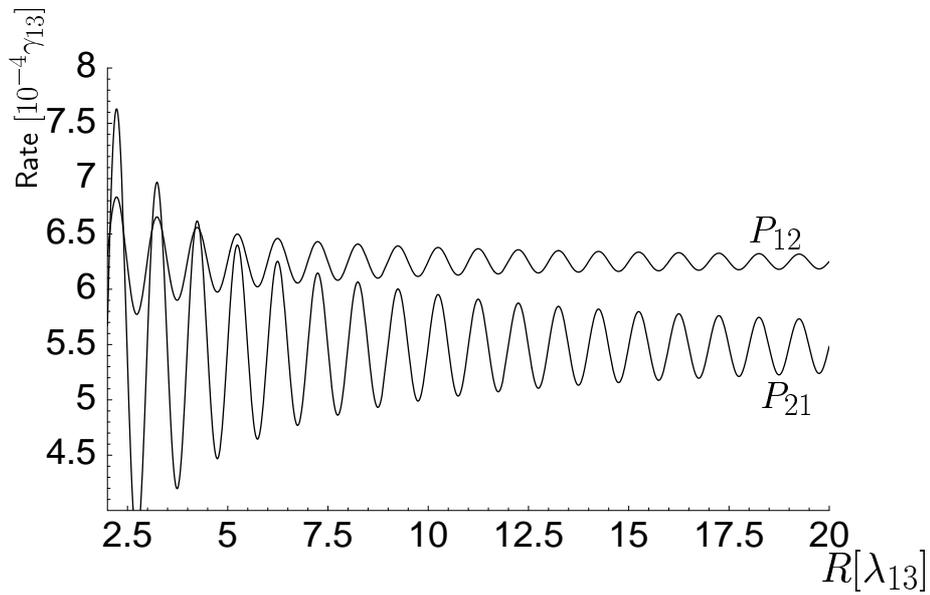


Abbildung 3.9: Modifikation der Übergangsraten in Abhängigkeit der Rabifrequenz  $\Omega_{13}$

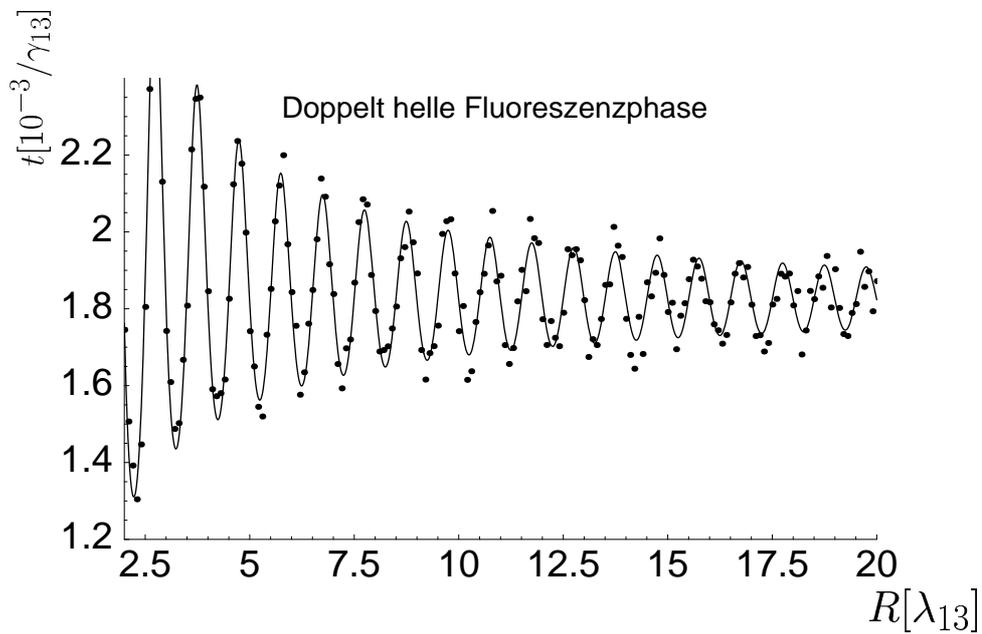
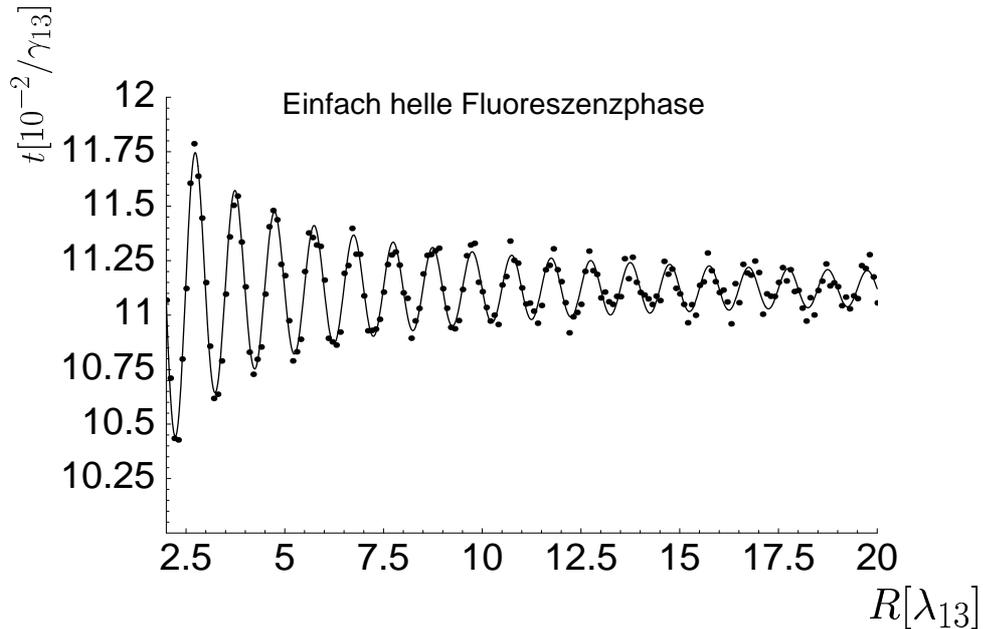


Abbildung 3.10: Lebensdauer der doppelt hellen Fluoreszenzphase, Vergleich zwischen Quanten-Monte-Carlo Daten und analytischen Termen



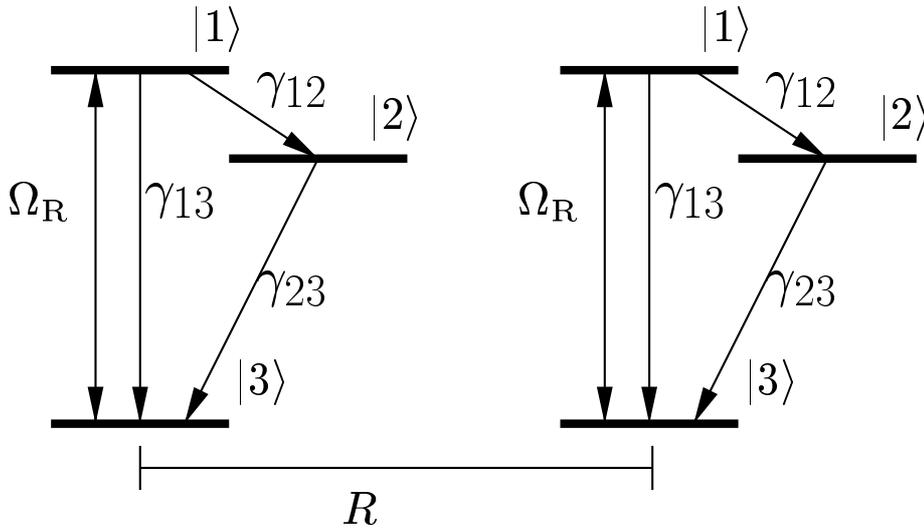
**Abbildung 3.11:** Lebensdauer der einfach hellen Fluoreszenzphase, Vergleich zwischen Quanten-Monte-Carlo Daten und analytischen Termen

## 3.5 Ortsaufgelöste Detektion

### 3.5.1 Grundlagen

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt sollen bei den wechselwirkenden Atomen nun wieder (wie in 3.3) sämtliche Übergänge berücksichtigt werden. Allerdings in Wechselwirkung mit nur einem Laser auf dem schnellen  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  Übergang.

Zu klären ist in diesem Abschnitt, inwieweit die Quantensprungstatistik der einzelnen Ionen von der Dipol-Dipol Wechselwirkung beeinflusst ist. Die bisherigen theoretischen Analysen [52, 101–112] beruhen auf dem Dichteoperatorformalismus und enthalten implizit die Annahme, dass die Fluoreszenz der beiden Ionen aufaddiert wird. Diese kommen zum Ergebnis, dass sich die Dipol-Dipol Wechselwirkung auf die Dauer der Fluoreszenzphasen nicht auswirkt. In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass es sich dabei um eine Konsequenz des Zenoeffekts handelt. Experimentelle Arbeiten liefern dazu bislang keine eindeutige Aussage [21, 113–115]. Um diese Begrenzung der Ununterscheidbarkeit der Ionen zu überwinden, ist es entweder nötig die Kohärenzen im Dichteoperator zu berücksichtigen, was für das angegebene System nur mit sehr großem Aufwand möglich ist, oder aber eine Quanten-Monte-Carlo Simulation durchzuführen. In der Tat erweist es sich als erheblich effizienter, das System mit einer Quanten-Monte-Carlo Simulation zu behandeln. Der dazu nötige bedingte Hamiltonian wurde bereits in Glg. (1.48) angegeben.



**Abbildung 3.12:** Dipol-Dipol wechselwirkende Ionen im Abstand  $R$  mit sämtlichen berücksichtigten Raten

Weitere Näherungen, wie etwa die Vernachlässigung von einzelnen Termen, wie in (3.24), sind in diesem Fall nicht gerechtfertigt.

Auch hier geht man von einer typischen Quantensprüngekonfiguration mit

$$\Omega_R > \gamma_{13} \gg \gamma_{12}, \gamma_{23} \quad (3.36)$$

aus, wobei man darüberhinaus noch einen Atomabstand annimmt, welcher der Ungleichung

$$\lambda_{13}, \lambda_{23} \ll R < \lambda_{12} \quad (3.37)$$

entspricht. Für  $\text{In}^+$ -Ionen sind diese Bedingungen ( $\lambda_{12} = 9,3 \mu\text{m}$ , siehe Abb. 2.9) gut erfüllt. Im Folgenden wird, wie bereits oben erwähnt, bei der Detektion das Fluoreszenzlicht der beiden Ionen jeweils getrennt betrachtet.

Um nun die langreichweitigste Dipol-Dipol Wechselwirkung auf dem Übergang  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  sichtbar zu machen, ist es erforderlich, eines der beiden Ionen (o.E. Ion 1) in den metastabilen Zustand  $|2\rangle$  zu bringen. Dies folgt unmittelbar aus der Darstellung des bedingten Hamiltonoperators (3.10). Mittels selektiver Anregung durch entsprechende, sehr gut fokussierte, Laserpulse auf Ion 1 ist es möglich diesen Zustand zu präparieren [127, 128]. Befindet sich nun Ion 2 im fluoreszenten Unterraum  $\{|1\rangle, |3\rangle\}$ , so sieht man im Fluoreszenzbild Ion 2 leuchten, während Ion 1 dunkel ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Entwicklung dieses Ausgangszustands Effekte zeigt, welche eindeutig auf die Dipol-Dipol Wechselwirkung zurückzuführen sind.

### 3.5.2 Sprünge und Raten

Das System soll sich zur Zeit  $t = 0$  in einem separablen Zustand befinden, in welchem Ion 1 in Zustand  $|2\rangle$  ist. Eine Veränderung der Fluoreszenz der einzelnen Ionen kann, wie in Abschnitt 3.3, nur durch einen spontanen Zerfall verursacht werden. Die dafür nötigen Sprungoperatoren sind durch

$$J_{31}^i = \sigma_{ii}^{31} \quad (3.38)$$

$$J_{12}^i = \sigma_{ii}^{12} \quad (3.39)$$

$$J_{23}^i = \sigma_{ii}^{23} \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

gegeben. Die zugehörigen Raten sind:

$$P(J_{31}^i, |\Psi\rangle) = 2\gamma_{31} \langle \Psi | J_{31}^{i\dagger} J_{31}^i | \Psi \rangle = 2\gamma_{31} | \langle 1 | \Psi \rangle |^2 \quad (3.42)$$

$$P(J_{21}^i, |\Psi\rangle) = 2\gamma_{21} \langle \Psi | J_{21}^{i\dagger} J_{21}^i | \Psi \rangle = 2\gamma_{21} | \langle 1 | \Psi \rangle |^2 \quad (3.43)$$

$$P(J_{32}^i, |\Psi\rangle) = 2\gamma_{32} \langle \Psi | J_{32}^{i\dagger} J_{32}^i | \Psi \rangle = 2\gamma_{32} | \langle 2 | \Psi \rangle |^2 \quad (3.44)$$

Bei der Berechnung der Detektionsraten werden natürlich nur die Zerfälle von  $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$  berücksichtigt, alle anderen Zerfälle können ohnehin nicht gemessen werden.

Klarerweise hängen diese Raten im Gegensatz zu (3.12) nicht vom Abstand der Atome ab, da sich jeder der Sprungoperatoren nur auf eines der beiden Ionen bezieht. Das heißt jedoch keinesfalls, dass der Einfluss der Dipol-Dipol-Wechselwirkung nicht durch Messungen an den einzelnen Ionen nachgewiesen werden könnte. Die Dipol-Dipol Wechselwirkung führt in der kohärenten Entwicklung des Gesamtzustands zu einer Verschiebung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für die einzelnen Ionen und genau dies kann detektiert werden.

### 3.5.3 Dipol-Dipol Wechselwirkung und Verschränkung

Eine Konsequenz der Separabilität von Ionenpaarzuständen ist, dass jeder Operator, welcher sich nur auf eines der Ionen bezieht, die Wahrscheinlichkeitsamplituden der jeweils anderen Ionen unberührt lässt. Daraus folgt, dass separable Zustände keine Korrelationen zwischen den einzelnen Ionen zeigen können, sofern die Detektion nur jeweils eines der beiden Ionen betrifft. Umgekehrt heißt dies wiederum, dass Zustände bei denen die Detektion eines einzelnen Ions Konsequenzen für das andere Ion zeigt, verschränkt sind.

Für die durch einen Laserpuls auf Ion 1 präparierten separablen Zustände

$$|\Psi(0)\rangle = c_1 |2, 1\rangle + c_2 |2, 3\rangle = |2\rangle_1 \otimes (c_1 |1\rangle_2 + c_2 |3\rangle_2) \quad (3.45)$$

folgt aus der Zeitentwicklung (1.49) mit dem bedingten Hamiltonian (3.10) für spätere Zeitpunkte die Darstellung<sup>5</sup>

$$|\Psi(t)\rangle = c_1|2, 1\rangle + c_2|2, 3\rangle + c_3|1, 2\rangle + c_4|3, 2\rangle \quad (3.46)$$

mit  $c_1, c_2, c_3, c_4 \neq 0$ . Das Auftreten der Wahrscheinlichkeitsamplitude  $c_3$  ist ausschließlich eine Folge der Dipol-Dipol Wechselwirkung auf dem Übergang  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ , da ohne diese Wechselwirkung aus (3.10) sofort  $c_3 = c_4 = 0 \forall t$  folgt.

Für einen beliebigen separablen Zustand  $|\Phi\rangle$  mit

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle = & d_1|1, 1\rangle + d_2|1, 2\rangle + d_3|1, 3\rangle \\ & + d_4|2, 1\rangle + d_5|2, 2\rangle + d_6|2, 3\rangle \\ & + d_7|3, 1\rangle + d_8|3, 2\rangle + d_9|3, 3\rangle \end{aligned} \quad (3.47)$$

gilt jedoch nach (1.53) unmittelbar die Aussage:

$$d_2 \neq 0 \wedge d_4 \neq 0 \Rightarrow d_1 \neq 0 \quad (3.48)$$

Damit ist gezeigt <sup>6</sup>, dass der Zustand  $|\Psi(t)\rangle$  nicht separabel ist, die Dipol-Dipol Wechselwirkung sorgt also für eine Verschränkung der elektronischen Freiheitsgrade der Ionen.

Der Nachweis von Dipol-Dipol Wechselwirkung ist also, wegen der Verschränkung, durch die Detektion von Korrelationen zwischen den Emissionen der beiden Ionen möglich.

### 3.5.4 Signatur der Dipol-Dipol Wechselwirkung

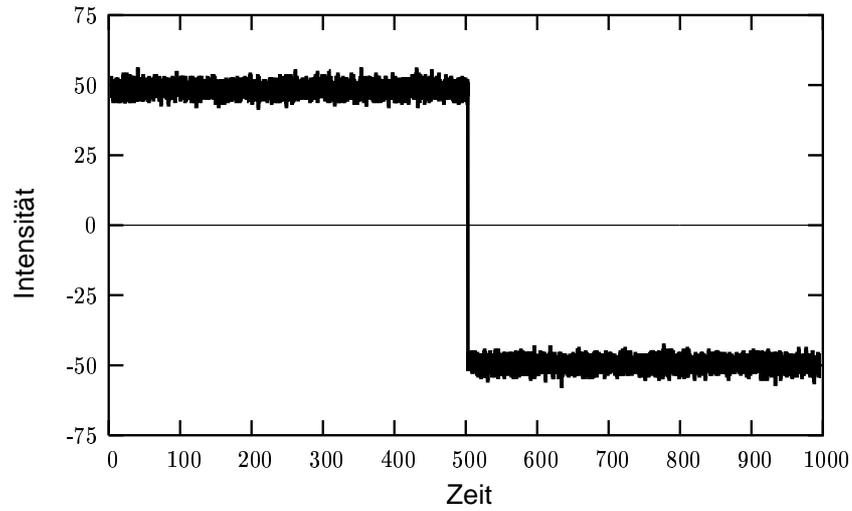
Eine Signatur der Dipol-Dipol Wechselwirkung <sup>7</sup>, in den Fluoreszenzphasen der Ionen, ist also in den Korrelationen der Emissionswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ionen zu suchen.

Für den präparierten Ausgangszustand  $|\Psi\rangle$  aus (3.45) können nach einer Zeitentwicklung mit den Bezeichnung aus (3.46) folgende Ereignisse mit entsprechenden Raten auftreten.

<sup>5</sup>Die Dipol-Dipol Wechselwirkungen auf den Übergängen  $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  und  $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$  wurden wegen des Limits (3.37) vernachlässigt

<sup>6</sup>Der Beweis für Verschränkung durch Dipol-Dipol Wechselwirkung ohne Vernachlässigung einzelner Terme der Zeitentwicklung ist analog zum hier demonstrierten, allerdings erheblich aufwendiger, da die Verschiedenheit von Null für einzelne Wahrscheinlichkeitsamplituden kein hinreichendes Kriterium für Verschränkung mehr darstellt.

<sup>7</sup>Im weiteren ist damit immer die einzig relevante Wechselwirkung auf dem  $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  Übergang gemeint

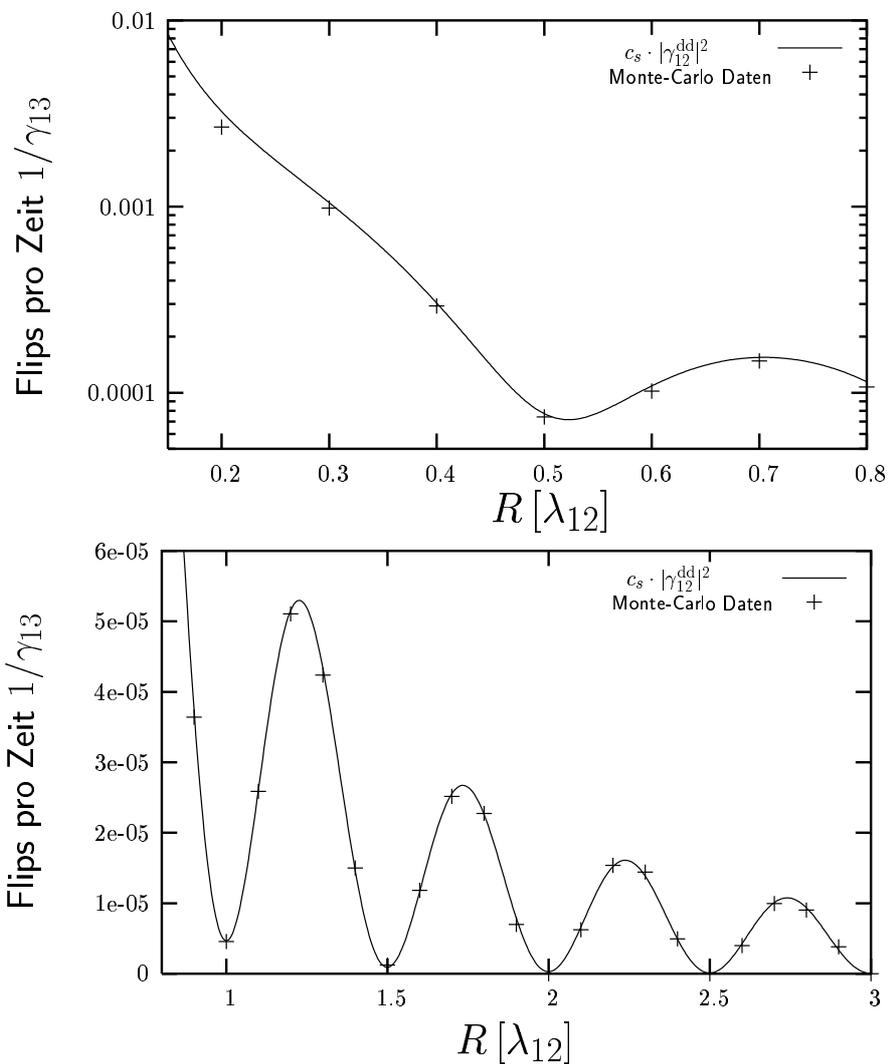


**Abbildung 3.13:** Flip in der Fluoreszenzphase. Die Anzahl der detektierten Photonen für Ion 1 ist mit positivem, die für Ion 2 mit negativem Vorzeichen aufgetragen. Das Zeitintervall für die Summation der Detektionen ist  $\frac{50}{\gamma_{13}}$  bei der Rabifrequenz  $\Omega_R = 8\gamma_{13}$ .

Zerfall	Rate	Endzustand
$ 1\rangle_2 \rightarrow  3\rangle_2$	$2\gamma_{13} c_1 ^2$	$ 2, 3\rangle$
$ 1\rangle_2 \rightarrow  2\rangle_2$	$2\gamma_{12} c_1 ^2$	$ 2, 2\rangle$
$ 2\rangle_2 \rightarrow  3\rangle_2$	$2\gamma_{23}( c_3 ^2 +  c_4 ^2)$	$\frac{1}{N}(c_3 1, 3\rangle + c_4 3, 3\rangle)$
$ 2\rangle_1 \rightarrow  3\rangle_1$	$2\gamma_{23}( c_1 ^2 +  c_2 ^2)$	$\frac{1}{N}(c_1 3, 1\rangle + c_2 3, 3\rangle)$
$ 1\rangle_1 \rightarrow  2\rangle_1$	$2\gamma_{12} c_3 ^2$	$ 2, 2\rangle$
$ 1\rangle_1 \rightarrow  3\rangle_1$	$2\gamma_{12} c_3 ^2$	$ 3, 2\rangle$

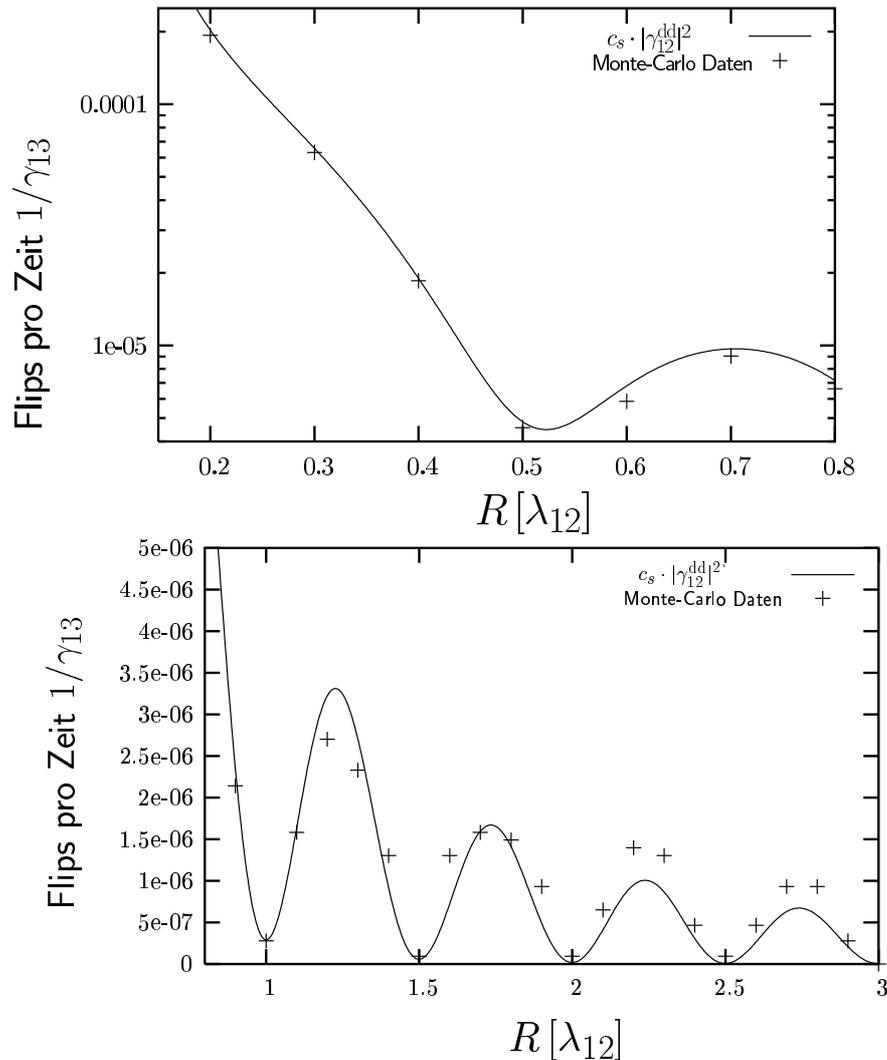
Damit folgt für die Veränderung der Fluoreszenzphasen:

Fluoreszenzphase nach dem Zerfall	Rate
Ion 1 dunkel; Ion 2 hell	$2\gamma_{13} c_1 ^2$
Ion 1 dunkel; Ion 2 dunkel	$2\gamma_{12}( c_1 ^2 +  c_3 ^2)$
Ion 1 hell; Ion 2 hell	$2\gamma_{23}$
Ion 1 hell; Ion 2 dunkel	$2\gamma_{13} c_3 ^2$



**Abbildung 3.14:** Quanten-Monte-Carlo Daten der Flips pro Zeiteinheit  $\frac{1}{\gamma_{13}}$  für  $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{13}} = 2 \cdot 10^{-2}$  im Vergleich zu  $\left| \frac{\gamma_{12}(R)}{\gamma_{13}} \right|^2$  mit  $c_s = 2$  und  $\Omega_R = 8$

Da die Ionen in einem Zustand präpariert werden, in dem Ion 1 dunkel und Ion 2 hell ist, kann mit der Rate  $2\gamma_{13}|c_3|^2$  ein Flip in der Fluoreszenzphase auftreten. Ion 2 wird dunkel, während gleichzeitig Ion 1 hell wird. Dies ist eine Konsequenz der Dipol-Dipol Wechselwirkung sowie der dadurch hervorgerufenen Verschränkung der Ionen.

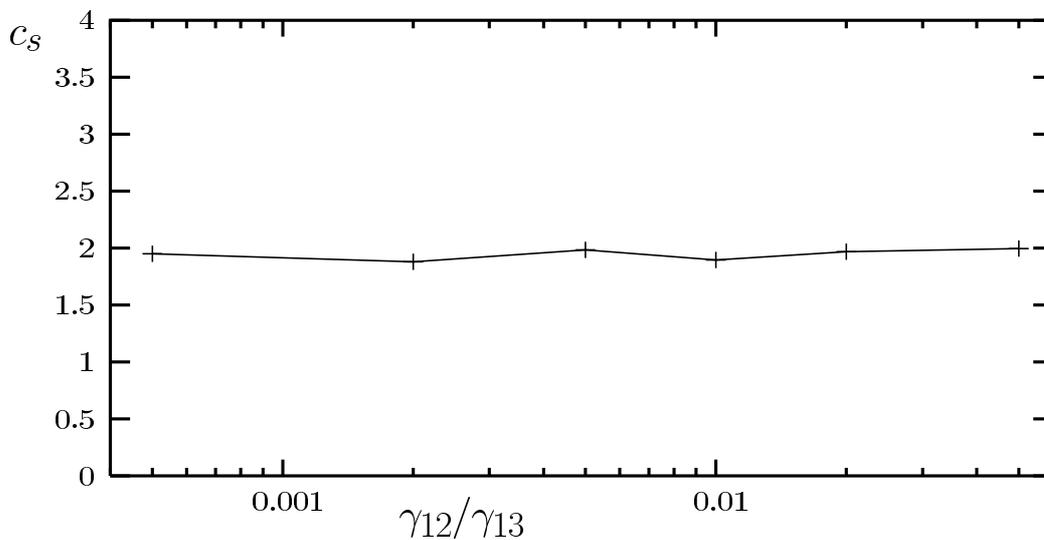


**Abbildung 3.15:** Quanten-Monte-Carlo Daten der Flips pro Zeiteinheit  $\frac{1}{\gamma_{13}}$  für  $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{13}} = 5 \cdot 10^{-3}$  im Vergleich zu  $\left| \frac{\gamma_{12}(R)}{\gamma_{13}} \right|^2$  mit  $c_s = 2$  und  $\Omega_R = 8$

Für die durchgeführten Quanten-Monte-Carlo-Simulationen wurde angenommen, dass nach jedem Zerfall, welcher beide Ionen in einem dunklen oder hellen Zustand hinterlässt, die Ionen neu präpariert werden. Damit werden nur diejenigen Zeitintervalle gezählt, in denen jeweils ein Ion leuchtet und das andere dunkel ist. Ausgewertet werden muss dann

lediglich die Anzahl der Flips pro Zeiteinheit. Der Vergleich mit dem durch die Dipol-Dipol Wechselwirkung gegebenen Parametern  $\left| \frac{\gamma_{12}(R)}{\gamma_{13}} \right|^2$  ergibt eine sehr gute funktionale Übereinstimmung. Sowohl Abb. 3.14 als auch Abb. 3.15 zeigen diese Abhängigkeit bis auf einen Skalierungsfaktor  $c_s = 2$ .

Um diese Abhängigkeit weiter zu untersuchen, wurden mehrere Simulationen im Parameterbereich von  $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{13}} = 2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-2}$  durchgeführt und die dort gewonnenen Daten an den analytischen Ausdruck  $\left| \frac{\gamma_{12}(R)}{\gamma_{13}} \right|^2$  gefittet<sup>8</sup>.



**Abbildung 3.16:** Skalierungsfaktor  $c_s$  für verschiedene Relationen  $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{13}}$

Das Ergebnis dieses Verfahrens ergibt für sämtliche Parameterbereiche Werte von  $c_s = 2 \pm 0,1$ , was die vorangegangene Analyse bestätigt. Flips in den Fluoreszenzphasen können eindeutig auf die Dipol-Dipol Wechselwirkung zurückgeführt werden. Angemerkt sein soll hier auch noch, dass bei der Untersuchung dieses Effekts keine Dekohärenzeffekte berücksichtigt werden müssen, da es zu keinem Zeitpunkt nötig ist Kohärenzen länger als  $\frac{1}{\gamma_{13}}$  aufrecht zu erhalten.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass dieses Verfahren eine neue Möglichkeit bietet Dipol-Dipol Wechselwirkung in den Quantensprüngen nachzuweisen. Unter Ausnutzung der, durch die Wechselwirkung induzierten, Verschränkung der beiden Ionen können Korrelationen in den Fluoreszenzphasen der beiden Ionen gefunden werden, welche sich als Flips im Photonenstrom der individuell detektierten Fluoreszenzphotonen darstellen lassen (Abb. 3.13) [46].

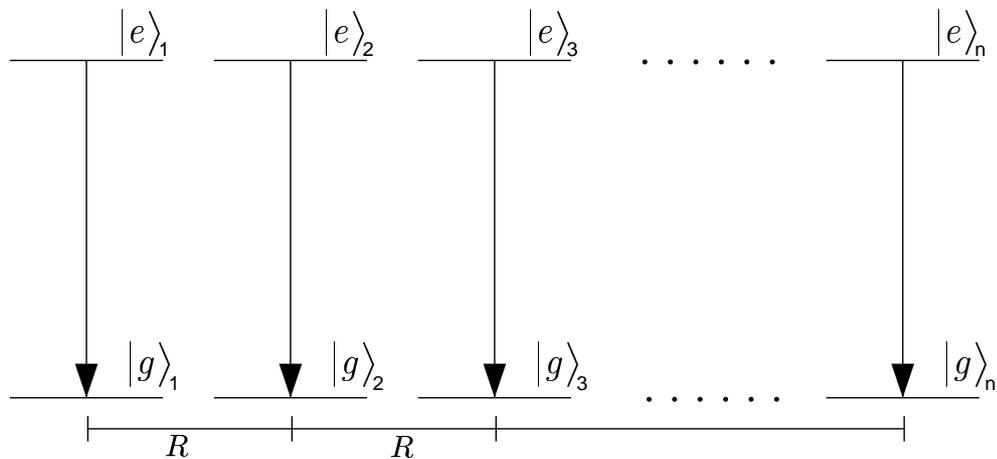
<sup>8</sup>Dazu wurden die in Mathematica integrierten „Least-Square-Fit“-Routinen verwendet.

# 4

## Photonenkorrelationen

### 4.1 Korrelationsfunktionen für 2-Niveau Systeme

Im folgenden Abschnitt soll eine weitere Klasse von kooperativen Effekten untersucht werden. Während in Abschnitt 3 ausschließlich Auswirkungen der Wechselwirkung zwischen Ionen auf die Fluoreszenzphasen des Systems untersucht wurden, sollen im Weiteren Quanteninterferenzen auf Einzelphotonenebene betrachtet werden.



**Abbildung 4.1:** Ionenkette aus äquidistanten 2-Niveau-Ionen in einer Ionenfalle

Die Analyse wird dabei nicht auf Ionenpaare beschränkt, es sollen auch Ionenketten aus äquidistanten 2-Niveau-Ionen betrachtet werden. In jedem Fall wird von einer kohärenten Anregung durch ein resonantes Laserfeld ausgegangen, wobei alle Ionen mit dem selben Feld wechselwirken. Die Phasendifferenz des Feldes am Ort der Ionen ist demzufolge konstant.

Wie in 1.6 gezeigt, können Interferenzeffekte einzelner Photonen mit Hilfe der Korrelationsfunktionen 1. und 2. Ordnung untersucht werden. Aus (1.42) und (1.43) folgt, dass diese vom Ort der Ionen  $\mathbf{r}_i$ , sowie dem Ort der Detektoren  $\mathbf{x}_i$  abhängen. Wie sich im Verlauf der nachfolgenden Rechnung zeigen wird, besteht eine zusätzliche Abhängigkeit von der Phasenlage der Ionen im eingestrahlten Laserlicht. Diese Phasenlage kann über die Positionen der Ionen, sowie dem Einfallswinkel des Laserfeldes mit dem Verbindungsvektor der Ionen kontrolliert werden. Im Gegensatz zu Abschnitt 3 ist es hier nötig die Abhängigkeit vom Ort des Detektors explizit zu berücksichtigen, da auf Einzelphotonenebene die Mittelung der Fluoreszenz über verschiedene Raumrichtung nicht mehr gerechtfertigt ist. Diese Art der Behandlung der Detektion ermöglicht es, wie in anderen Zusammenhängen bereits untersucht [26, 112, 131, 132], zusätzliche Informationen über das System durch die Detektorposition zu gewinnen. Damit werden auch Verschränkungseffekte, welche durch die Zustandsreduktion bei der Detektion hervorgerufen werden, sichtbar.

Im Gegensatz zu früheren Arbeiten [101, 133] werden die Ionen nicht vor der Detektion in einem bekannten Zustand präpariert, man überlässt die Entwicklung der Ionen, bis auf die Detektion, sich selbst. Das erfordert jedoch die Berücksichtigung der, durch spontane Zerfälle verursachten, Dissipation. Deshalb wird die gesamte Analyse mit dem Dichteoperatoralkül durchgeführt, welcher sich in diesem Fall als sehr leistungsfähig erweist. Darüberhinaus soll zur Interpretation der theoretischen Ergebnisse die Analogie zum bekannten Doppelspaltexperiment herangezogen werden. Als erstes soll ein „Doppelspalt“ mit 2 unabhängigen Ionen untersucht werden um später die Wechselwirkungen zu integrieren und die Rechnung auf Ionenketten auszudehnen.

## 4.2 Interferenzeffekte zweier unabhängiger Ionen

### 4.2.1 Mastergleichung und stationäre Zustände

Die identischen 2-Niveau-Ionen mit den Zuständen  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  sollen hier weit genug voneinander entfernt sein, um Dipol-Dipol-Wechselwirkungen vernachlässigen zu können. Es gilt also:

$$R := |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad \gamma \gg \gamma(R) \quad (4.1)$$

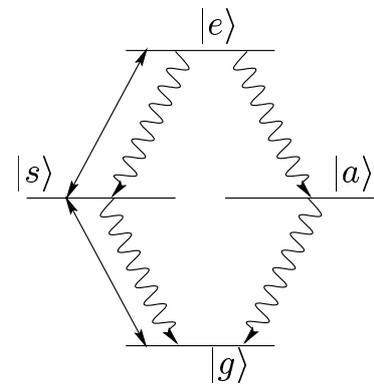
für  $\gamma := \gamma_{eg}$ .

Damit vereinfacht sich die Mastergleichung (1.22) zu:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i\Omega_R \sum_{\mu=1}^2 [e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}_\mu - \omega_L t)} \sigma_\mu^+ + \text{h.c.}, \rho] \\ & - \sum_{\mu=1}^2 \gamma (\sigma_\mu^+ \sigma_\mu^- \rho + \rho \sigma_\mu^+ \sigma_\mu^- - 2\sigma_\mu^- \rho \sigma_\mu^+), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$2\Omega_R$  ist dabei, wie in Kapitel 1.4, die Rabifrequenz bzgl. des  $|e\rangle - |g\rangle$  Übergangs und  $2\gamma$  dessen Zerfallsrate.

Für zwei 2-Niveau-Atome ergibt dies ein lineares Differentialgleichungssystem aus 16 gekoppelten reellen Gleichungen, welches jedoch weitgehende Symmetrieeigenschaften bzgl. der beiden Ionen aufweist. Diese können sehr gut durch die Konstruktion einer neuen Basis ausgenutzt werden. Ausgehend von der Mastergleichung (4.2) kann ein Zustand gefunden werden, welcher **nicht** mit dem eingestrahlt Laserfeld wechselwirkt. Dieser wird im weiteren als antisymmetrischer Zustand  $|a\rangle$  bezeichnet. Zusammen mit dem angeregtem Zustand  $|e, e\rangle$ , dem Grundzustand  $|g, g\rangle$  und einem symmetrischen, zu  $|a\rangle$  orthogonalem Zustand  $|s\rangle$  findet man folgende unitäre Basis:



**Abbildung 4.2:** Zwei 2-Niveau-Ionen in der modifizierten Dicke-Basis

$$|e\rangle := |e, e\rangle \quad (4.3)$$

$$|s\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\phi} |e, g\rangle + e^{i\phi} |g, e\rangle) \quad (4.4)$$

$$|a\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\phi} |e, g\rangle - e^{i\phi} |g, e\rangle) \quad (4.5)$$

$$|g\rangle := |g, g\rangle \quad (4.6)$$

$$\text{mit } \phi := \frac{1}{2} \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r}_{12}$$

Diese Basis stellt eine Erweiterung der gewöhnlich verwendeten Dicke-Basis [42, 134] dar, da hier neben dem Ionenabstand  $\mathbf{r}_{12}$  auch die Phasendifferenz  $\phi$  der beiden Ionen bzgl. des eingestrahlt Lasers  $\mathbf{k}_L$  integriert wird. Auch die Bezeichnungen des symmetrischen und antisymmetrischen Zustands weichen von denen der gewöhnlichen Dicke-Basis ab. Je nach

Einstrahlrichtung des Lasers kann der antisymmetrische Zustand dieser Basis sogar zum symmetrischen der Dicke-Basis und umgekehrt werden. In Abb. 4.2 ist das Niveauschema des System bzgl. der neuen Basis dargestellt. die geraden Linien sind dabei die Wechselwirkungen mit dem Laser, die gewellten Linien die spontanen Zerfälle. Die Mastergleichung vereinfacht sich mit dieser Basis zu einem System aus  $6 + 3$  jeweils gekoppelten Gleichungen. Mit  $\alpha := \frac{\Omega_R}{\sqrt{2}\gamma}$ ,  $\rho_{kl}^r := \text{Re}(\rho_{kl})$  und  $\rho_{kl}^i := \text{Im}(\rho_{kl})$  findet man:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{ee} &= 4(\alpha\rho_{es}^i - \rho_{ee}) \\
\dot{\rho}_{ss} &= 2(\rho_{ee} - \rho_{ss} + 2\alpha(\rho_{sg}^i - \rho_{es}^i)) \\
\dot{\rho}_{aa} &= 2(\rho_{ee} - \rho_{aa}) \\
\dot{\rho}_{es}^i &= -3\rho_{es}^i - 2\alpha(\rho_{ee} - \rho_{ss} + \rho_{eg}^r) \\
\dot{\rho}_{sg}^i &= 2\rho_{es}^i - \rho_{sg}^i + 2\alpha(1 - \rho_{ee} - \rho_{aa} - 2\rho_{ss} + \rho_{eg}^r) \\
\dot{\rho}_{eg}^r &= -2(\rho_{eg}^r + \alpha(\rho_{sg}^i - \rho_{es}^i))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{ea}^r &= -3\rho_{ea}^r - 2\alpha\rho_{sa}^i \\
\dot{\rho}_{sa}^i &= 2(\alpha(\rho_{ea}^r + \rho_{ag}^r) - \rho_{sa}^i) \\
\dot{\rho}_{ag}^r &= -2\rho_{ea}^r - 2\alpha\rho_{sa}^i - \rho_{ag}^r
\end{aligned} \tag{4.8}$$

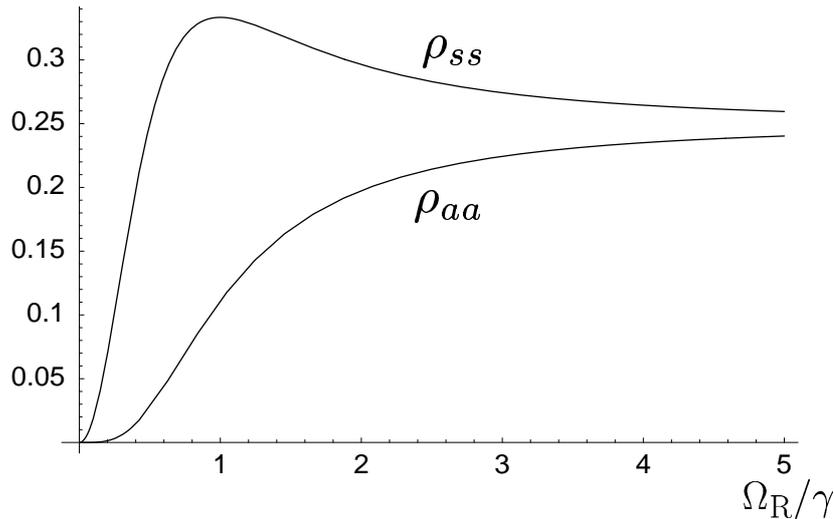
Dies stellt im Vergleich zum ursprünglichen System eine bedeutende Erleichterung dar. Der stationäre Zustand des System lässt in dieser Basis folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
\rho^{SS} &= \frac{1}{(\gamma^2 + 2\Omega_R^2)^2} \left\{ \Omega_R^4 |e\rangle\langle e| + \Omega_R^2 (\Omega_R^2 + 2\gamma^2) |s\rangle\langle s| + \right. \\
&\quad \Omega_R^4 |a\rangle\langle a| + (\Omega_R^2 + \gamma^2)^2 |g\rangle\langle g| + \\
&\quad \left[ i\sqrt{2}\Omega_R^3\gamma |e\rangle\langle s| + \Omega_R^2\gamma^2 |e\rangle\langle g| + \right. \\
&\quad \left. \left. i\sqrt{2}\Omega_R\gamma(\Omega_R^2 + \gamma^2) |s\rangle\langle g| + \text{h.c.} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Offensichtlich gilt damit für die Populationen bei beliebig starker Laserstrahlung:

$$\left. \begin{aligned}
\rho_{ee}^{SS} &= \rho_{ss}^{SS} = \rho_{aa}^{SS} = \rho_{gg}^{SS} = \frac{1}{4} \\
\rho_{es}^{SS} &= \rho_{ea}^{SS} = \rho_{eg}^{SS} = \rho_{sa}^{SS} = \rho_{sg}^{SS} = \rho_{ag}^{SS} = 0
\end{aligned} \right\} \text{für } \Omega_R \rightarrow \infty \tag{4.10}$$

Das entspricht gerade dem statistischem Gemisch an Zuständen, in dem sich beide Ionen mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  im angeregten Zustand befinden. Für einzelne Ionen ist das die übliche Sättigung mit dem Laser, Kohärenzeffekte der emittierten Strahlung sind dabei nicht mehr zu erwarten [135].



**Abbildung 4.3:** Populationen  $\rho_{ss}^{SS}$  und  $\rho_{aa}^{SS}$  des stationären Zustands  $\rho^{SS}$  in Abhängigkeit der Rabi-frequenz  $\Omega_R$

Bei schwacher Laserintensität entsteht jedoch, wie in Abb. 4.3 erkennbar, ein Ungleichgewicht zwischen symmetrischem und antisymmetrischem Zustand. Diese Differenz wird sich im Weiteren gerade als Voraussetzung für kooperative Effekte herausstellen.

### 4.2.2 Dynamik des Systems und Detektionsschema

Mit Hilfe der Mastergleichung in der Darstellung (4.7) kann nicht nur der stationäre Zustand berechnet werden, es lässt sich auch eine zeitabhängige Lösung finden. Das heißt, der Liouville-Operator des Systems kann vollständig analytisch bestimmt werden. Da jedoch der Ausdruck dafür sehr lang und unübersichtlich ist, sollen nur die zeitabhängigen, für die Korrelationsfunktionen relevanten Terme des Dichteoperators angegeben werden. Dazu ist es nötig die Form des Dichteoperators nach einer Detektion eines Photons zu kennen.

Vor der Detektion befindet sich das System im stationären Zustand, den Zustand nach der Detektion findet man durch die Reduktion mit dem zugehörigen Operator  $D(\mathbf{x})$  des Detektors am Ort  $\mathbf{x}$ . Als vom Detektionsort abhängiger Ausgangszustand für die Zeitentwicklung folgt damit:

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{D(\mathbf{x})\rho^{SS}D^\dagger(\mathbf{x})}{\langle D^\dagger(\mathbf{x})D(\mathbf{x}) \rangle} \quad (4.11)$$

Um Interferenzeffekte der Strahlung beider Ionen beobachten zu können, ist es, wie beim klassischen Doppelspalt, nötig keinerlei „Welcher-Weg-Information“ zu detektieren. Der Detektor darf also nicht unterscheiden, welches Ion das detektierte Photon emittiert hat. Die zugehörige Zustandsreduktion einer derartigen Detektion am Ort  $\mathbf{x}$  lässt sich gerade durch den Operator

$$D(\mathbf{x}) = \sigma_1^- + e^{i\phi}\sigma_2^- \quad (4.12)$$

mit  $\phi := \mathbf{k}_L \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{12}$  beschreiben [26].

Für den Ausgangszustand  $\rho(\mathbf{x})$  nach der Detektion folgt somit

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2\Omega_R^2 + \gamma^2 (1 + \cos \delta(\mathbf{x}))} \left\{ \Omega_R^2 \cos^2 (\delta(\mathbf{x})/2) |s\rangle\langle s| + \right. \\ & \Omega_R^2 \sin^2 (\delta(\mathbf{x})/2) |a\rangle\langle a| + [\Omega_R^2 + \gamma^2 (1 + \cos \delta(\mathbf{x}))] |g\rangle\langle g| + \\ & \left[ \frac{i}{2} \Omega_R^2 \sin \delta(\mathbf{x}) |s\rangle\langle a| + i\sqrt{2}\Omega_R\gamma \cos (\delta(\mathbf{x})/2)^2 |s\rangle\langle g| + \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_R\gamma \sin \delta(\mathbf{x})) |a\rangle\langle g| + \text{h.c.} \right] \right\} \quad (4.13) \end{aligned}$$

mit  $\delta(\mathbf{x}) = (\mathbf{k}_L - k_L \mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}_{12}$ . Aus der Darstellung (1.53) für den separablen Dichteoperator folgt sofort die Verschränkungsbedingung:

$$\delta(\mathbf{x}) \neq n\pi, \quad (4.14)$$

Für alle Ionenabstände und Detektionspunkte, welche diese Bedingung erfüllen, befinden sich die beiden Ionen nach der Detektion in einem verschränkten Zustand. Damit ist gezeigt, dass die beiden Ionen des Systems durch die Detektion eines Photons verschränkt werden können, wenn nicht bekannt ist, von welchem Ion das detektierte Photon emittiert wurde. Dieses Konzept der „Verschränkung durch Detektion“ wurde auch schon in anderem Zusammenhang, sowohl in der Theorie als auch im Experiment untersucht und angewandt [136].

Bevor nun die zeitabhängigen Terme des Dichteoperators betrachtet werden, sei noch darauf hingewiesen, dass die Laserrichtung in (4.13) ausschliesslich über den optischen Wegunterschied zwischen den beiden optischen Wegen von der Laserquelle zum Detektor über je eines der beiden Ionen eingeht. Dies entspricht genau der Abhängigkeit beim gewöhnlichen Young'schen Doppelspaltexperiment.

Nun sollen die für die Korrelationsfunktionen nötigen Elemente des Dichteoperators zeitabhängig bestimmt werden; dies sind gerade  $\rho_{ee}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\rho_{ss}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\rho_{aa}(\mathbf{x}, t)$  sowie  $\rho_{sa}(\mathbf{x}, t)$  [111]. Nach Lösung der Mastergleichung (4.2) folgt mit  $s := 2 \left( \frac{\Omega_R}{\gamma} \right)^2 + 1$ ,  $\nu := \frac{1}{2} \sqrt{8s - 9}$  und  $\tau := \gamma t$ :

$$\begin{aligned} \rho_{ee}(\mathbf{x}, t) = & \frac{e^{-3\tau}(s-1)^2}{32s^2\nu^3(s+\cos\delta(\mathbf{x}))} \left\{ 8e^{3\tau}\nu^3(s+\cos\delta(\mathbf{x})) - \right. \\ & 4e^{\frac{3}{2}\tau}\nu^2 [2\nu\cos(\nu\tau)(s+2\cos(\delta(\mathbf{x}))) + (3s+(6-4s)\cos(\delta(\mathbf{x})))\sin(\nu\tau)] + \\ & \cos\delta(\mathbf{x}) [4(s-1)s\nu - 2(9+2(s-5)s)\nu\cos(2\nu\tau) - \\ & \left. + (16s^2 - 42s + 27)\sin(2\nu\tau)] \right\} \end{aligned} \quad (4.15)$$

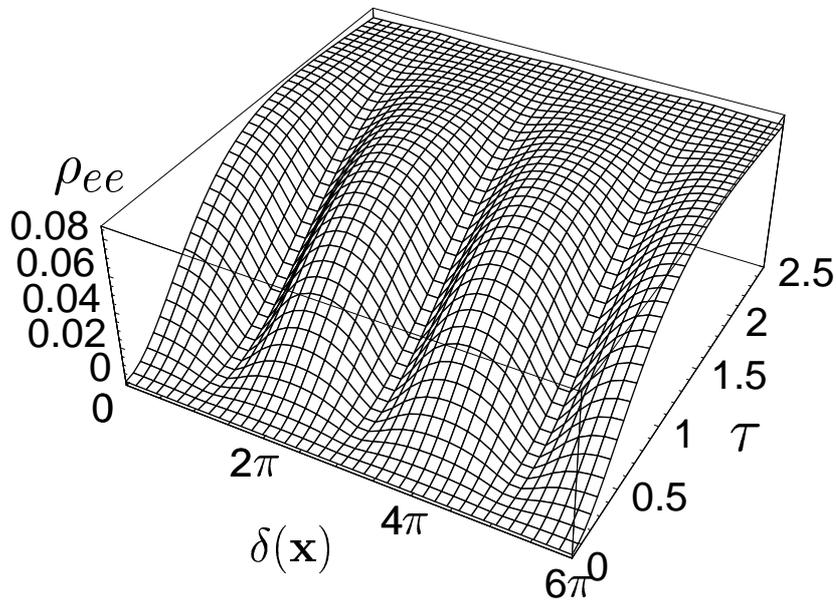


Abbildung 4.4: Population  $\rho_{ee}(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned}
\rho_{ss}(\mathbf{x}, t) = & \frac{e^{-3t}(s-1)}{16s^2\nu(s+\cos\delta(\mathbf{x}))} \left\{ 2e^t s^2 \nu \cos\delta(\mathbf{x}) + 4e^{3t}(s+3)\nu(s+\cos\delta(\mathbf{x})) + \right. \\
& 2e^{\frac{3}{2}t} [2\nu \cos(\nu t)(-3s+2(-3+s)\cos\delta(\mathbf{x})) + \\
& (s(4s-9) + 2(7s-9)\cos\delta(\mathbf{x})) \sin(\nu t)] + \\
& \cos\delta(\mathbf{x}) ([2(6+(s-6)s)\nu \cos(2\nu t) + \\
& \left. (18+s(9s-26)) \sin(2\nu t)] \right\} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

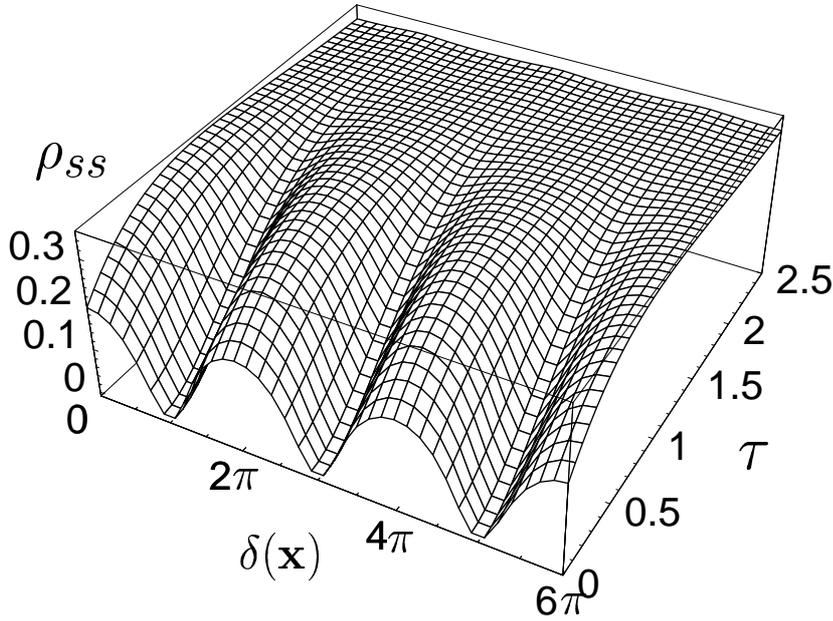
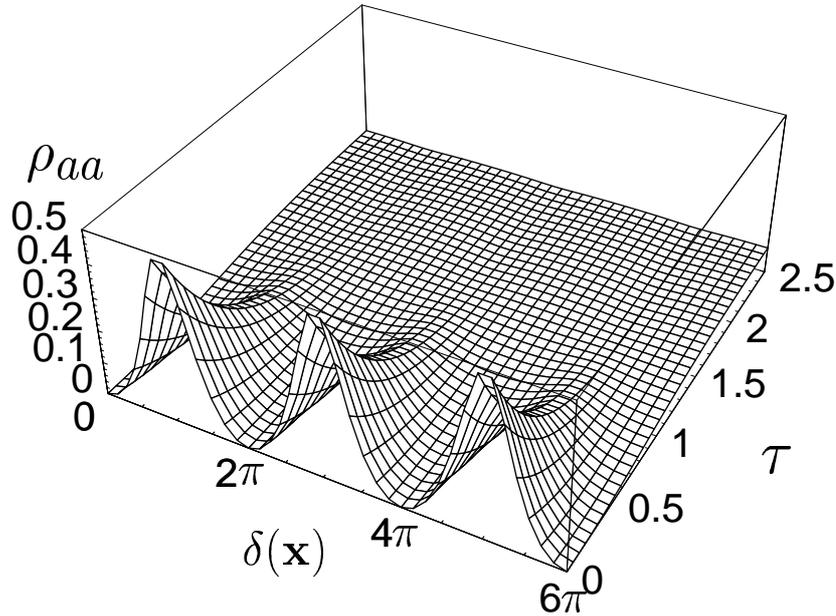


Abbildung 4.5: Population  $\rho_{ss}(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned}
\rho_{aa}(\mathbf{x}, t) = & \frac{e^{-3t}(s-1)}{32s^2\nu^2(s+\cos\delta(\mathbf{x}))} (-4e^t s^2 \nu^2 \cos(\delta(\mathbf{x})) + 8e^{3t}(s-1)\nu^2(s+\cos\delta(\mathbf{x})) + \\
& 4e^{\frac{3}{2}t}\nu [2\nu \cos(\nu t)(s-2(s-1)\cos\delta(\mathbf{x})) + \\
& ((3-4s)s-6(-1+s)\cos\delta(\mathbf{x})) \sin(\nu t)] + \\
& \cos(\delta(\mathbf{x})) [-8(s-1)^2 s + (18+s(9s-26)) \cos(2\nu t) - \\
& 2(6+(s-6)s)\nu \sin(2\nu t)]) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Abbildung 4.6: Population  $\rho_{aa}(\mathbf{x}, t)$ 

$$\rho_{sa}(\mathbf{x}, t) = i \frac{e^{\frac{5}{2}t}(s-1) \sin \delta(\mathbf{x})}{8s\nu(s + \cos \delta(\mathbf{x}))} \times \left\{ 4e^{\frac{3}{2}t}\nu + 2(s-2)\nu \cos(\nu t) + (6-5s) \sin(\nu t) \right\} \quad (4.18)$$

Diese Ausdrücke liefern sämtliche Informationen für die weitere Betrachtung der Korrelationsfunktionen 1. und 2. Ordnung. Deren Interpretation soll später zusammen mit der Interpretation der Korrelationsfunktionen erfolgen.

### 4.2.3 Intensität

Die theoretische Berechnung der Intensität an einem bestimmten Detektionspunkt wurde bereits mehrfach durchgeführt [131, 137, 138]. Ausgehend von der Darstellung (1.42) bleibt die Aufgabe, die dort enthaltenen Erwartungswerte explizit zu ermitteln. Unter der Annahme, dass sich das System im stationären Zustand befinden, gilt für unseren Fall:

$$\langle \sigma_1^+ \sigma_1^- \rangle = \langle \sigma_2^+ \sigma_2^- \rangle = \rho_{ee}^{SS} + \frac{1}{2} (\rho_{ss}^{SS} + \rho_{aa}^{SS}) \quad (4.19)$$

$$\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle = \langle \sigma_2^+ \sigma_1^- \rangle^* = \frac{1}{2} e^{2i\phi} (\rho_{ss}^{SS} - \rho_{aa}^{SS}), \quad (4.20)$$

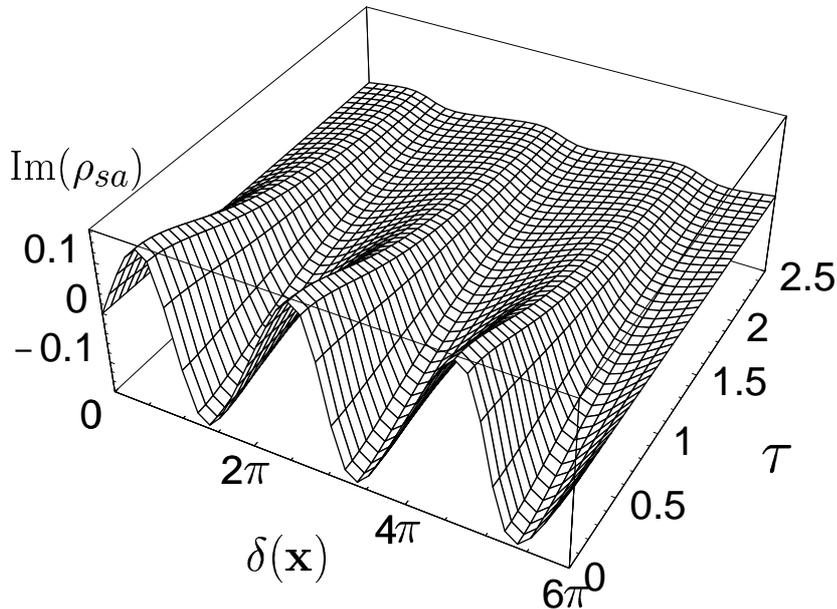


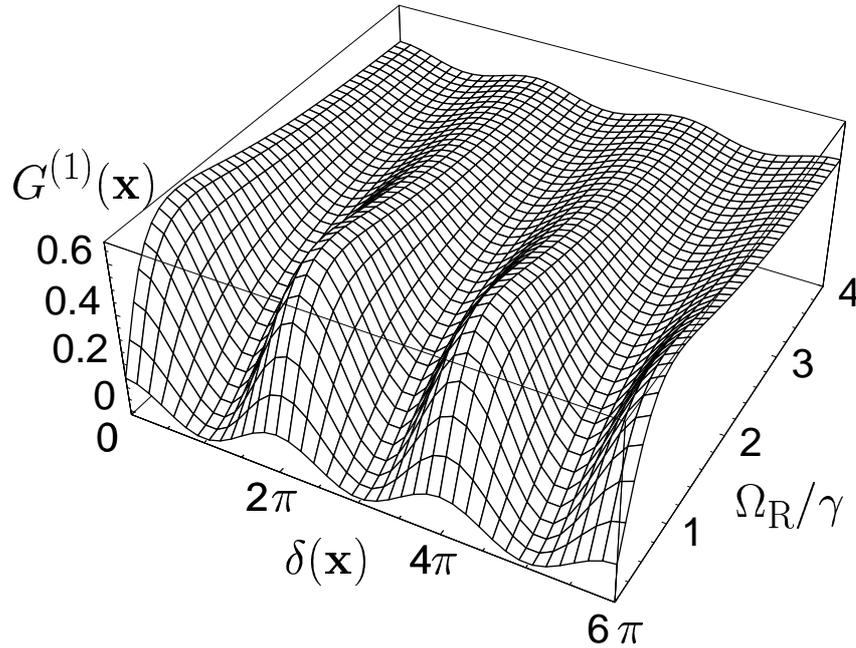
Abbildung 4.7: Kohärenz  $\rho_{sa}(\mathbf{x}, t)$

Damit folgt für die Korrelationsfunktion 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
 G^{(1)}(\mathbf{x}) &= (1 + \cos \delta(\mathbf{x})) [\rho_{ee}^{SS} + \rho_{ss}^{SS}] + (1 - \cos \delta(\mathbf{x})) [\rho_{ee}^{SS} + \rho_{aa}^{SS}] \\
 &= \frac{2\Omega_R^2 [\Omega_R^2 + \gamma^2(1 + \cos \delta(\mathbf{x}))]}{(\gamma^2 + 2\Omega_R^2)^2} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Man findet also Interferenzstreifen in der Intensität des emittierten Lichts, welche geringer werden, je größer die Rabi-Frequenz des einstrahlenden Lasers ist. Dieser Effekt ist gut bekannt und wurde auch experimentell bereits untersucht [138].

Die Interferenzstreifen machen die Analogie dieses Systems zum gewöhnlichen Doppelspaltversuch deutlich. Allerdings mit dem Unterschied, dass die Interferenzstreifen dort nicht bei höherer Intensität des gestreuten Lichts verschwinden. Dies ist aber bei der Wechselwirkung von Laserlicht mit Ionen sehr gut verstanden, da dort der Anteil von kohärent gestreutem Licht zum absolut gestreuten mit der Intensität des Lasers abnimmt [39, 135]



**Abbildung 4.8:** Interferenzstreifen in der Intensität des von 2 Ionen gestreuten Lichts in Abhängigkeit der Detektorposition und der Rabifrequenz des einstrahlenden Lasers

#### 4.2.4 Bunching und Antibunching

Um die statistischen Eigenschaften des gestreuten Lichts weiterhin zu untersuchen, soll als nächstes die Korrelationsfunktion 2. Ordnung betrachtet werden. Dafür müssen die in der Darstellung (1.43) auftretenden Operatorprodukte explizit berechnet werden. Nach Anwendung des „Quanten-Regressionstheorems“ bleibt davon jedoch nur der Erwartungswert des Detektors am Ort  $\mathbf{x}$ , unter der Voraussetzung des Ausgangszustands (4.13), zu bestimmen.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \langle D(\mathbf{x}_2, t) \rangle = & 2\rho_{ee}(\mathbf{x}_1, t) + \rho_{ss}(\mathbf{x}_1, t) + \rho_{aa}(\mathbf{x}_1, t) + \\ & \cos \delta(\mathbf{x}_2) (\rho_{ss}(\mathbf{x}_1, t) - \rho_{aa}(\mathbf{x}_1, t)) + \\ & 2 \sin \delta(\mathbf{x}_2) \text{Im}(\rho_{sa}(\mathbf{x}_1, t)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nach Einsetzen der im vorigen Abschnitt bestimmten Terme des zeitabhängigen Dichteoperators und der erforderlichen Normalisierung folgt für die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, t) = & 1 + \frac{e^{-3\tau}}{4\nu^2(s + \cos \delta(\mathbf{x}_1))(s + \cos \delta(\mathbf{x}_2))} \times \\
& \{ 4e^{2\tau}\nu^2 s \sin \delta(\mathbf{x}_1) \sin \delta(\mathbf{x}_2) + s [e^\tau \nu^2 s + (s - 1)^2] \cos \delta(\mathbf{x}_1) \cos \delta(\mathbf{x}_2) \\
& - e^{3\tau/2}\nu s^2 [2\nu \cos(\nu\tau) + 3 \sin(\nu\tau)] \\
& + 2e^{3\tau/2}\nu s (\cos \delta(\mathbf{x}_1) + \cos \delta(\mathbf{x}_2)) [(2s - 3) \sin(\nu\tau) - 2\nu \cos(\nu\tau)] \\
& + e^{\tau/2}\nu (2e^\tau \cos \delta(\mathbf{x}_1) \cos \delta(\mathbf{x}_2) + s \sin \delta(\mathbf{x}_1) \sin \delta(\mathbf{x}_2)) \\
& \quad [2\nu(s - 2) \cos(\nu\tau) + (5s - 6) \sin(\nu\tau)] \\
& + \frac{1}{4} \cos \delta(\mathbf{x}_1) \cos \delta(\mathbf{x}_2) [(s(s(4s - 33) + 64) - 36) \cos(2\nu\tau) \\
& + 2\nu(s - 2)(5s - 6) \sin(2\nu\tau)] \} \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Diese Darstellung trägt sämtliche Informationen über Zwei-Photonen-Korrelationen für beliebige Detektorpositionen bei beliebigen Zeitabständen sowie beliebiger Laserintensität.

**t=0:**

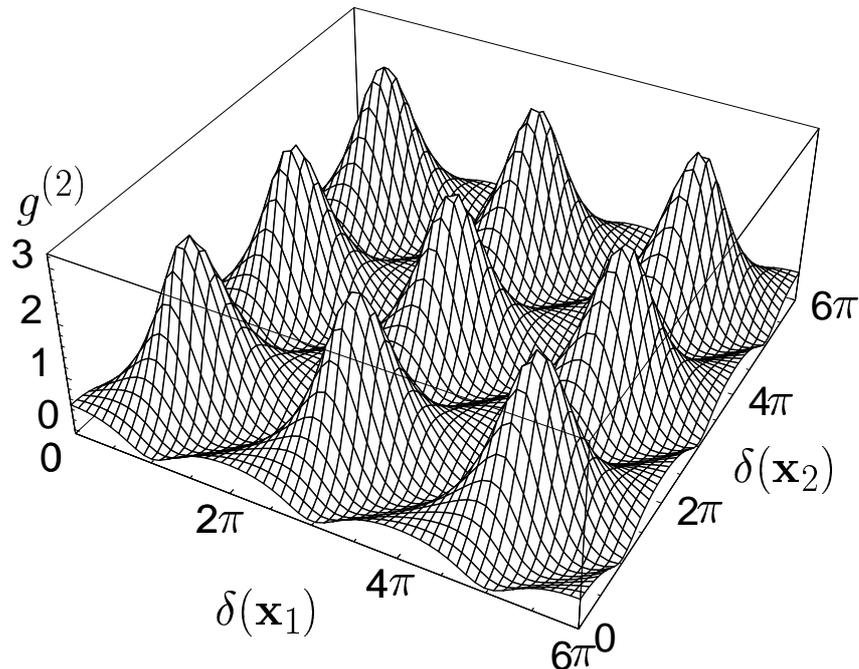
Für die Wahrscheinlichkeit 2 Photonen gleichzeitig zu detektieren, folgt daraus:

$$g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, 0) = \frac{s^2 \cos^2 \left( \frac{\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)}{2} \right)}{(s + \cos \delta(\mathbf{x}_1))(s + \cos \delta(\mathbf{x}_2))} \tag{4.24}$$

Verwendet man nur einen Detektor ( $\delta(\mathbf{x}_1) = \delta(\mathbf{x}_2) = \delta(\mathbf{x})$ ) findet man sofort

$$g^{(2)}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}, 0) = \frac{s^2}{(s + \cos \delta(\mathbf{x}))^2} \tag{4.25}$$

und damit die Existenz von Detektionspunkten, an denen gebunchtes und solche an denen antibunchtes Licht detektiert wird. Dies gilt hier, obwohl nur eine Laserquelle zur Anregung der beiden Ionen verwendet wird.



**Abbildung 4.9:** Interferenzstreifen in der normalisierten Korrelationsfunktion 2. Ordnung in Abhängigkeit der Detektorpositionen  $\delta(\mathbf{x}_1)$  und  $\delta(\mathbf{x}_2)$  für  $\Omega_R = 0.8\gamma$

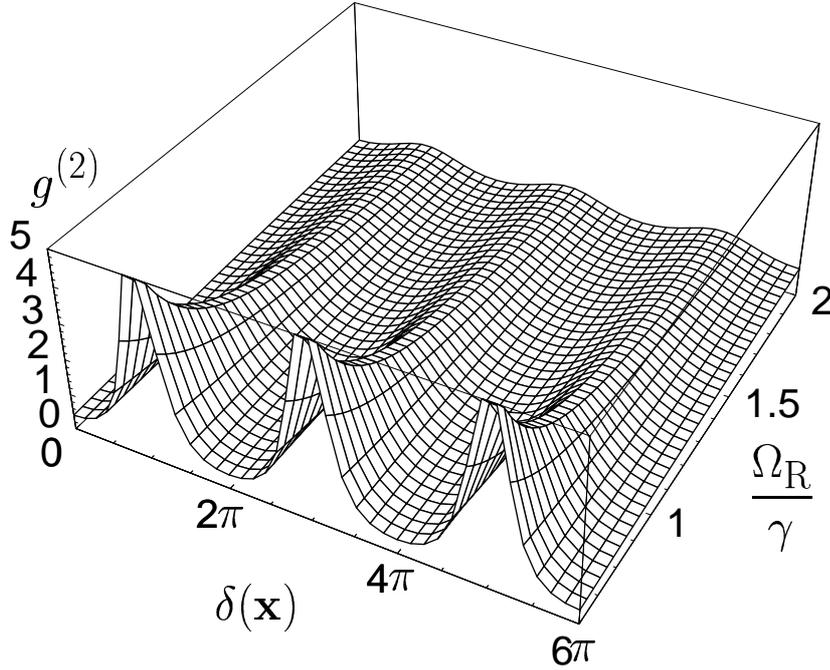
Wie schon bei Betrachtung der Korrelationsfunktion 1. Ordnung zeigt sich auch hier, dass die Interferenzen mit steigender Laserleistung verschwinden. Die Kohärenz des gestreuten Lichts ist auch hier eine notwendige Voraussetzung für die Beobachtung dieses Effekts.

### $t \neq 0$ :

Die zeitliche Entwicklung von  $g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, t)$  geht für beliebige Detektorpositionen gegen 1. Dies ist eine Folge der Normalisierung und bestätigt nur die wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung dieser Korrelationsfunktion. Die Zeitskala dieser Konvergenz ist typischerweise  $1/\gamma$ . Je nach Position des 1. Detektors<sup>1</sup> zeigt sich allerdings ein qualitativ unterschiedlicher Verlauf der Korrelationsfunktion.

Im Fall eines einzigen Detektors sieht man je nach Position des Detektors einen Übergang zwischen Bunching ( $\delta(\mathbf{x}) = (2n + 1)\pi$ ) und Antibunching ( $\delta(\mathbf{x}) = 2n\pi$ ). Es ist also möglich mit diesem System gleichzeitig gebunchtes und antigebunchtes Licht zu erzeugen. In klassischen Systemen, in denen die Ungleichung

<sup>1</sup>Mit 1. Detektor ist immer derjenige Detektor gemeint, mit welchem zeitlich die 1. Detektion durchgeführt wird.



**Abbildung 4.10:** Interferenzstreifen in der normalisierten Korrelationsfunktion 2. Ordnung in Abhängigkeit der Rabi-Frequenz  $\Omega_R$

$$\prod_{i=1}^2 (g^{(2)}(\mathbf{x}_i; \mathbf{x}_i) - 1) \geq (g^{(2)}(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2) - 1)^2 \quad (4.26)$$

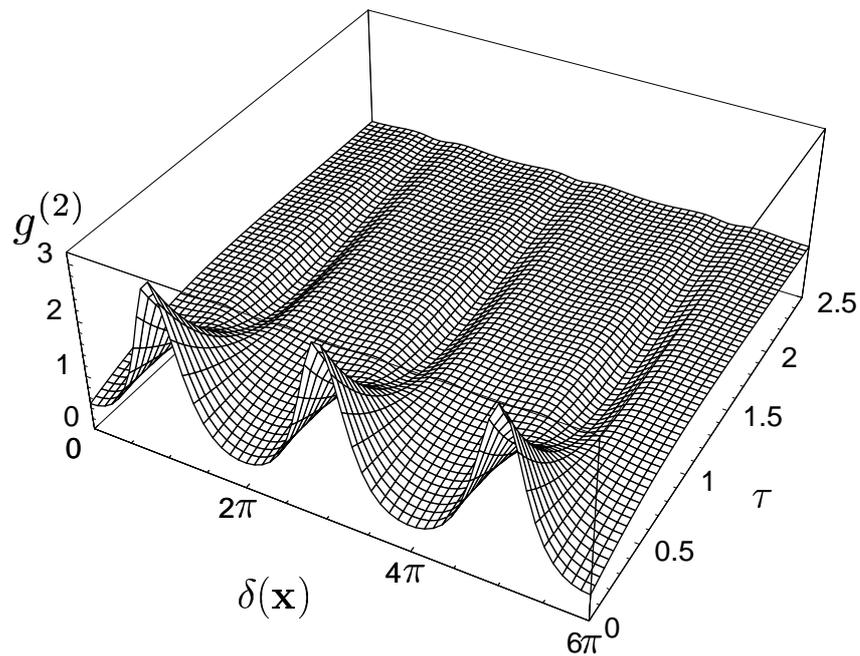
gilt [42] ist dies nicht möglich. Es gibt folglich keine klassische Analogie zu diesem Effekt.

Die Zeitskala  $1/\gamma$  ist in jedem Fall gut auflösbar, so dass dieser Effekt auch im experimentell zugänglichen Bereich liegt.

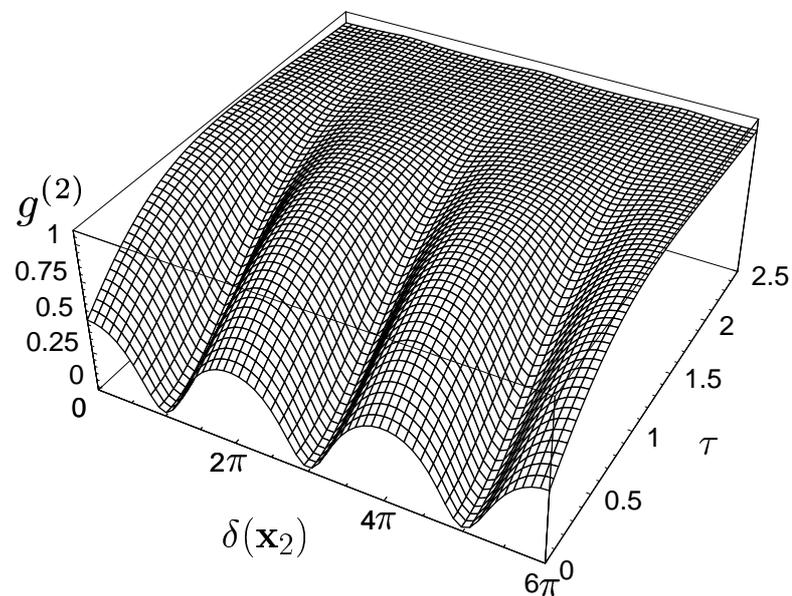
Bei der Verwendung von 2 Detektoren ist es nicht mehr möglich, von Bunching und Antibunching zu sprechen; die dabei auftretenden Effekte sind jedoch nicht minder interessant. Die Abbildungen 4.12 und 4.13 zeigen, dass sich, je nach Position des ersten Detektors, das Verhalten stark unterscheidet. In jedem Fall gilt:

$$g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, 0) = 0 \quad \forall \quad \delta(\mathbf{x}_2) \in \{\delta(\mathbf{x}_1) \pm (2n + 1)\pi\} \quad (4.27)$$

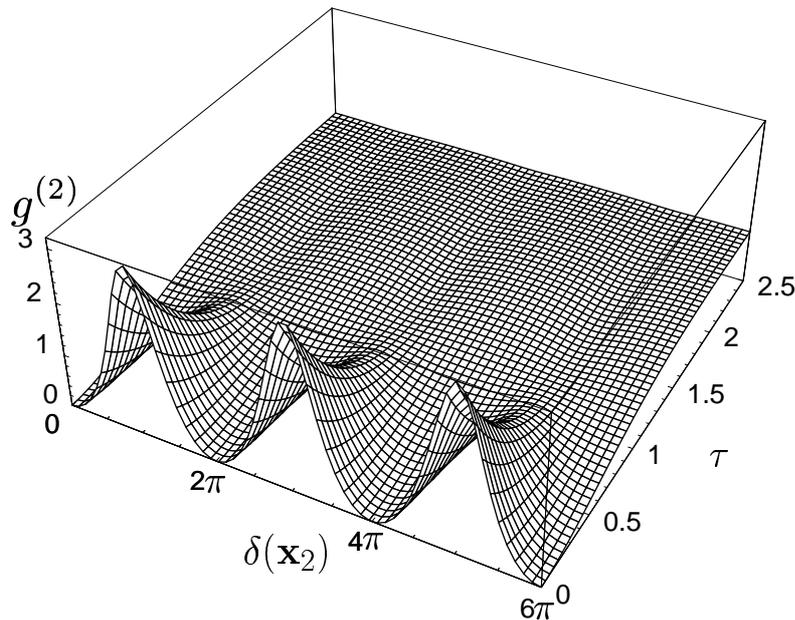
Damit sind gleichzeitige Detektionen an Detektoren bei denen sich  $\delta(\mathbf{x}_1)$  und  $\delta(\mathbf{x}_2)$  gerade um  $(2n + 1)\pi$  unterscheiden verboten, was klassisch ebenfalls nicht zu erklären ist.



**Abbildung 4.11:** Interferenzstreifen in der normalisierten Korrelationsfunktion 2. Ordnung für einen Detektor in Abhängigkeit der Zeit  $\tau = \gamma t$



**Abbildung 4.12:** Interferenzstreifen in der normalisierten Korrelationsfunktion 2. Ordnung in Abhängigkeit der Zeit  $\tau = \gamma t$ , wobei für den ersten Detektor  $\delta(\mathbf{x}_1) = 2n\pi$  gilt.



**Abbildung 4.13:** Interferenzstreifen in der normalisierten Korrelationsfunktion 2. Ordnung in Abhängigkeit der Zeit  $\tau = \gamma t$ , wobei für den ersten Detektor  $\delta(\mathbf{x}_1) = (2n + 1)\pi$  gilt.

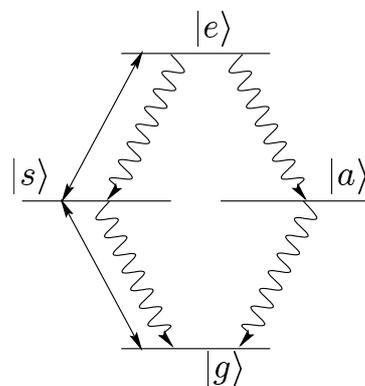
### 4.2.5 Interpretation

Die Interpretation der vorangegangenen Ergebnisse beruht auf der Analyse der Populationen des Dichteoperator in der Basis (4.3). Man unterscheidet zwei Emissionskanäle:

symmetrischer Kanal:  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle \rightarrow |g\rangle$

antisymmetrischer Kanal:  $|e\rangle \rightarrow |a\rangle \rightarrow |g\rangle$

Aus der Darstellung (4.21) der Korrelationsfunktion 1. Ordnung folgt, dass je nach Detektorposition Zerfälle über den einen bzw. den anderen Kanal detektiert werden. Die beiden Zerfallskanäle können vom Detektor also räumlich aufgelöst und getrennt werden. Wegen der Laserwechselwirkung ist darüberhinaus die Wahrscheinlichkeit für eine Emission auf dem symmetrischen Kanal höher als auf dem antisymmetrischen; dies führt zu räumlichen Interferenzstreifen in der Intensität. Das resultierende Ungleichgewicht in den Zerfallswahrscheinlichkeiten hängt auch von der Intensität des eingestrahlenen Lasers ab; für beliebig starke Anregung existiert es nicht mehr. Die sich daraus ergebende Abhängigkeit findet sich auch in den Interferenzstreifen wieder.



**Abbildung 4.14:** Modifizierte Dicke-Basis

Da der Laser nur mit den Zuständen  $|g\rangle$ ,  $|s\rangle$  und  $|e\rangle$  wechselwirkt, ist die Besetzungswahrscheinlichkeit im antisymmetrischen Zustand ausschließlich auf spontane Emissionen zurückzuführen. Um also einen Zerfall von  $|a\rangle$  nach  $|g\rangle$  detektieren zu können, muss eine spontane Emission  $|e\rangle$  nach  $|a\rangle$  vorangegangen sein. Photonen auf dem antisymmetrischen Kanal werden daher paarweise emittiert. Der symmetrische Kanal zeigt dagegen ein völlig anderes Verhalten. Die Besetzungswahrscheinlichkeit von  $|s\rangle$  ist in jedem Fall höher als die von  $|e\rangle$ , deshalb ist das System nach einer Emission mit grösserer Wahrscheinlichkeit in  $|g\rangle$  als in  $|s\rangle$ . Damit ist die Wahrscheinlichkeit für eine weitere Emission aber geringer als für die erste, man findet also Antibunching. Dies erklärt die von  $\Omega_R$  abhängigen Interferenzstreifen in Abb. 4.11.

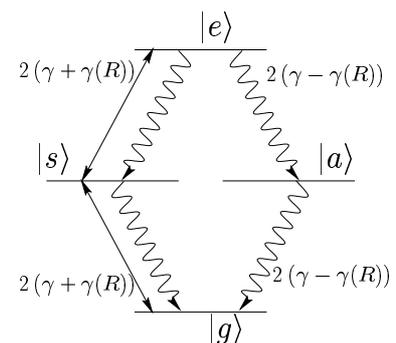
Das Auftreten von verbotenen Richtungen für gleichzeitige Detektion folgt aus der Tatsache, dass nach einer Detektion auf dem (o.E.) symmetrischen Kanal die Besetzungswahrscheinlichkeiten für  $|e\rangle$  und  $|a\rangle$  gleich 0 sind. Damit kann aber unmittelbar darauf kein Zerfall auf dem antisymmetrischen Kanal detektiert werden. Dies drückt sich auch in der Gleichung (4.25) aus.

## 4.3 Korrelationsfunktionen und Dipol-Dipol Wechselwirkung

### 4.3.1 Sub- und Superradianz

Die im vorhergehenden Abschnitt untersuchten Effekte, können auch unter Berücksichtigung der Dipol-Dipol-Wechselwirkung der Ionen betrachtet werden. Man untersucht nachwievor ein Paar von 2-Niveau-Atomen, jedoch ist es in diesem Fall nicht mehr möglich die Mastergleichung (1.32) des Systems weiter zu vereinfachen, da diese nicht mehr in den Freiheitsgraden der individuellen Ionen separiert. Trotzdem gibt es verschiedene Möglichkeiten Wechselwirkungseffekte zwischen den Ionen theoretisch zu analysieren [52, 102, 139].

Für die weiteren Rechnungen soll die beiden Ionen stets auf einer Phasenoberfläche des Lasers liegen. Die in (4.3) definierte Basis wird also zur gewöhnlichen Dicke Basis. Die Spontanemissionsraten des symmetrischen und antisymmetrischen Kanals unterscheiden sich jedoch um die Stärke der Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Es gilt:



**Abbildung 4.15:** Modifizierte Dicke-Basis mit modifizierten Raten

Zerfall:	Rate:
$\begin{array}{l}  e\rangle \rightarrow  s\rangle \\  s\rangle \rightarrow  g\rangle \end{array}$	$2(\gamma + \gamma(R))$
$\begin{array}{l}  e\rangle \rightarrow  a\rangle \\  a\rangle \rightarrow  g\rangle \end{array}$	$2(\gamma - \gamma(R))$

Diese veränderten Raten können nun auf verschiedene Arten sichtbar gemacht werden. Die naheliegendste davon ist, mit dem Laser den Zustand  $|s\rangle$  zu präparieren und die Zerfallszeiten in den Grundzustand zu messen. Eine andere Möglichkeit ist, das System kontinuierlich mit dem Laser zu treiben. Der stationäre Zustand des Dichteoperators mit Dipol-Dipol-Wechselwirkung kann dann analog zu (4.9) gefunden werden. Es folgt:

$$\rho^{SS} = \frac{1}{4\Omega_R^4 + 4\Omega_R^2\gamma^2 + \gamma^2(\gamma + \gamma(R))^2} \left\{ \Omega_R^4 |e\rangle\langle e| + \Omega_R^2 (\Omega_R^2 + 2\gamma^2) |s\rangle\langle s| + \right. \\ \left. \Omega_R^4 |a\rangle\langle a| + [\Omega_R^4 + 2\Omega_R^2\gamma^2 + \gamma^2(\gamma + \gamma(R))^2] |g\rangle\langle g| + \right. \\ \left. \left[ i\sqrt{2}\Omega_R^3\gamma |e\rangle\langle s| - \Omega_R^2\gamma(\gamma + \gamma(R)) |e\rangle\langle g| - \right. \right. \\ \left. \left. i\sqrt{2}\Omega_R\gamma(\Omega_R^2 + \gamma(\gamma + \gamma(R))) |s\rangle\langle g| + \text{h.c.} \right] \right\} \quad (4.28)$$

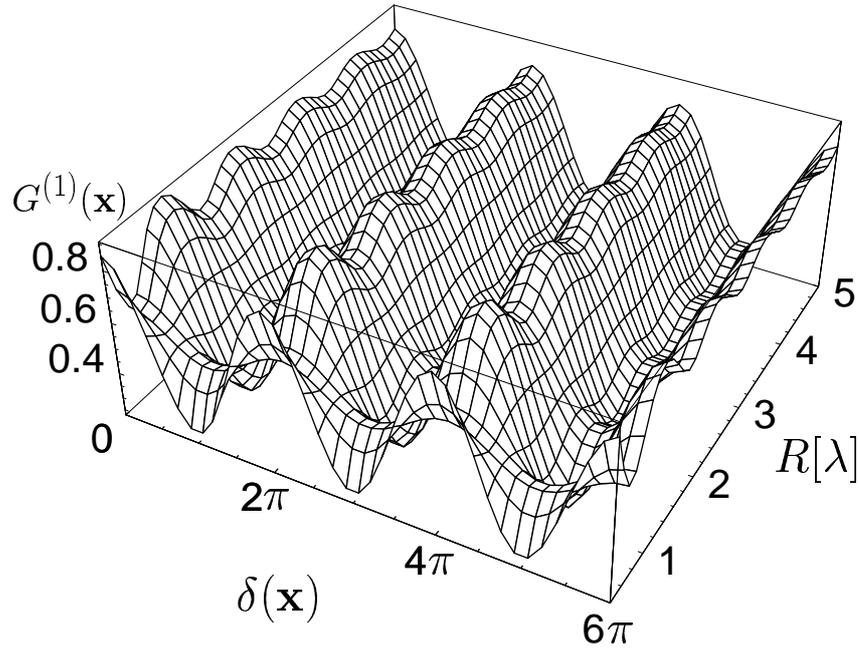
Für die Strahlungsintensität des Systems findet man damit:

$$G^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{2\Omega_R^2(\gamma(2\Omega_R^2 + \gamma(\gamma + \gamma(R))) + (2\Omega_R^2\gamma(R) + \gamma^2(\gamma + \gamma(R))) \cos \delta(\mathbf{x}))}{4\Omega_R^4\gamma + 4\Omega_R^2\gamma^3 + \gamma^3(\gamma + \gamma(R))^2} \quad (4.29)$$

Da der Laser, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, ein Übergewicht der Besetzungswahrscheinlichkeit auf dem symmetrischen Zustand gegenüber dem antisymmetrischen Zustand erzeugt, findet man damit die ebenfalls höheren bzw. niedrigeren Emissionsraten auf diesem Kanal in den Interferenzstreifen wieder 4.16. Darüberhinaus bleibt aber auch zusätzlich der Einfluss der Dipol-Dipol Wechselwirkung auf die Gesamtemissionsrate des Systems. Dieser Effekt der erniedrigten bzw. erhöhten Gesamtemissionsrate wird auch als Sub- bzw. Superradianz bezeichnet. Wie schon im vorhergehenden Abschnitt dargelegt verschwinden auch in diesem Fall die Interferenzen mit steigender Laserleistung, auch die Auswirkungen der Dipol-Dipol Wechselwirkung sind dann ebenfalls nicht mehr existent.

### 4.3.2 Bunching und Antibunching

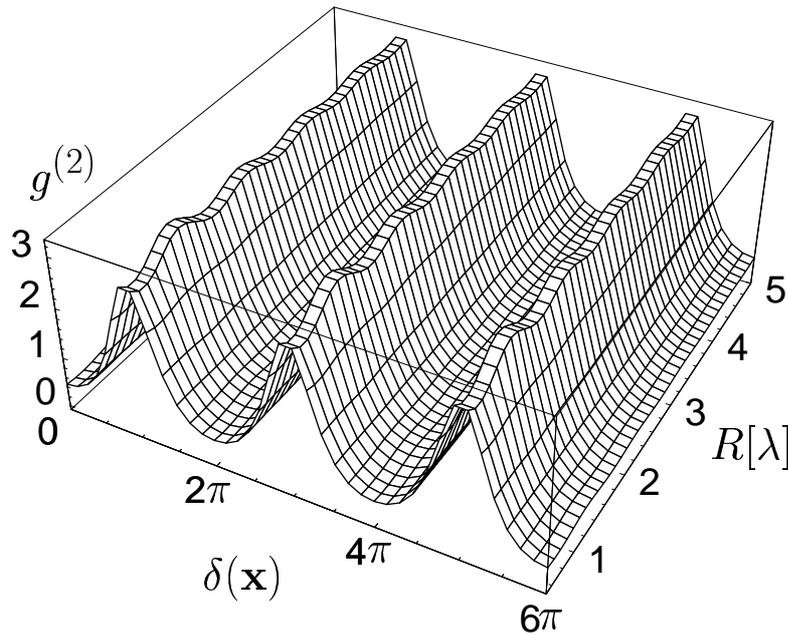
Aus dem Ausdruck (4.28) lässt sich unmittelbar auch die Korrelationsfunktion 2. Ordnung für die Zeit  $\Delta t = 0$  herleiten. Es folgt mit den dimensionslosen Größen  $s := 2 \left( \frac{\Omega_R}{\gamma} \right)^2 + 1$  und  $\gamma_{\text{dd}} = \frac{\gamma(R)}{\gamma}$ :



**Abbildung 4.16:** Einfluss der Dipol-Dipol Wechselwirkung auf die Interferenzstreifen

$$\begin{aligned}
 g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, 0;) &= \frac{s^2 + \gamma_{dd}(2 + \gamma_{dd})}{2(s + \cos \delta(\mathbf{x}_1))(s + \gamma_{dd} + (1 + s\gamma_{dd}) \cos \delta(\mathbf{x}_2))} \times \\
 &\left[ 1 + \gamma_{dd}(\cos \delta(\mathbf{x}_1) + \cos \delta(\mathbf{x}_2)) + \cos \delta(\mathbf{x}_1) \cos \delta(\mathbf{x}_2) + \right. \\
 &\left. \sqrt{1 - \gamma_{dd}^2} \sin \delta(\mathbf{x}_1) \sin \delta(\mathbf{x}_2) \right] \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Selbst bei sehr kleinen Atomabständen im Bereich einer Übergangswellenlänge werden die Interferenzen in den 2-Photonenkorrelationen nicht sehr stark beeinflusst. Es zeigt sich zwar, dass sich die Form der Interferenzstreifen mit der Stärke der Dipol-Dipol-Wechselwirkung verändert, die Größenordnung des Gesamteffekts variiert jedoch kaum. Für größere Atomabstände ist der Einfluss der Wechselwirkung zwischen den Ionen im Vergleich zu den Interferenzen von völlig untergeordneter Bedeutung. Die Zeitabhängigkeit, welche für diesen Fall nur numerisch bestimmt werden kann, zeigt ebenfalls nur geringe Abhängigkeit von der Dipol-Dipol-Wechselwirkung. Die wesentlichen Effekte werden davon nicht berührt.



**Abbildung 4.17:** Einfluss der Dipol-Dipol Wechselwirkung auf die Interferenzstreifen in der Korrelationsfunktion 2. Ordnung für einen Detektor

## 4.4 2-Niveau-Ionenketten

### 4.4.1 Vom Doppelspalt zum Gitter

Die Analogie vom Doppelspaltexperiment zu den Interferenzeffekten in der Resonanzfluoreszenz zweier Atome soll nun auch auf mehrere Atome ausgedehnt werden. Da in Ionenfallen inzwischen nicht nur Paare, sondern auch eine grössere Anzahl von Ionen (aufgereiht in kristalliner Form entlang einer Achse) stabil beobachtet werden können [12, 128], ist es auch experimentell interessant, inwieweit sich die Resonanzfluoreszenz einer Ionenkette mit den Interferenzen eines Gitters vergleichen lässt.

Die Reduktionsoperatoren für einen Detektor an der Position  $\mathbf{x}$  werden dann analog zu (4.12) als Operatorsumme der Reduktionsoperatoren für die einzelnen Ionen konstruiert. Für ein System aus  $N$  Ionen findet man<sup>2</sup>:

$$D(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi} \sigma_n^- \quad (4.31)$$

Unter Ausnutzung der Erwartungswerte

<sup>2</sup>wie in (4.12) nimmt man auch hier an, dass der Abstand der Ionen zu Detektor erheblich größer ist, als der Ionenabstand, d.h. das Fernfeld des Fluoreszenzlichtes wird betrachtet.

$$\langle \sigma_i^+ \sigma_i^- \rangle = \frac{\Omega_R^2}{2\Omega_R^2 + \gamma^2} \quad \forall i \quad (4.32)$$

$$\langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle = \frac{\Omega_R^2 \gamma^2}{(2\Omega_R^2 + \gamma^2)^2} \quad \forall i \neq j \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$

findet man durch Induktion für die Korrelationsfunktion 1. Ordnung:

$$G^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{(s-1) [1 + N(s-1)(1 - \cos \delta(\mathbf{x})) - \cos(N\delta(\mathbf{x}))]}{4s^2 \sin^2(\delta(\mathbf{x})/2)} \quad (4.35)$$

Die Analogie des Übergangs vom Doppelspalt zum Gitter auf Ionenketten zu übertragen, ist also für die Intensitätsverteilung sehr naheliegend. Für mehrere Ionen zeigen sich ausgeprägte Haupt-, sowie Nebenmaxima, welche exakt denen eines optischen Gitters entsprechen.

Wie schon bei 2 Atomen sinkt jedoch der Kontrast der Interferenzstreifen mit zunehmender Intensität des eingestrahlten Lasers; auch bei mehreren Atomen ist dies eine unmittelbare Konsequenz des höheren Anteils inkohärent gestreuten Fluoreszenzlichts.

#### 4.4.2 Korrelationen 2. Ordnung

Zur Berechnung der Korrelationsfunktion 2. Ordnung sind die in der Definition (1.43) auftretenden Operatorprodukte zu bestimmen. Da die Berechnung hier nur für  $\Delta t = 0$  ausgeführt werden soll, reicht es aus, die Erwartungswerte

$$\langle \sigma_k^+ \sigma_l^+ \sigma_m^- \sigma_n^- \rangle = \left( \frac{\Omega_R^2 \gamma^2}{(2\Omega_R^2 + \gamma^2)^2} \right)^2 \quad \text{für } |\{k, l, m, n\}| = 4 \quad (4.36)$$

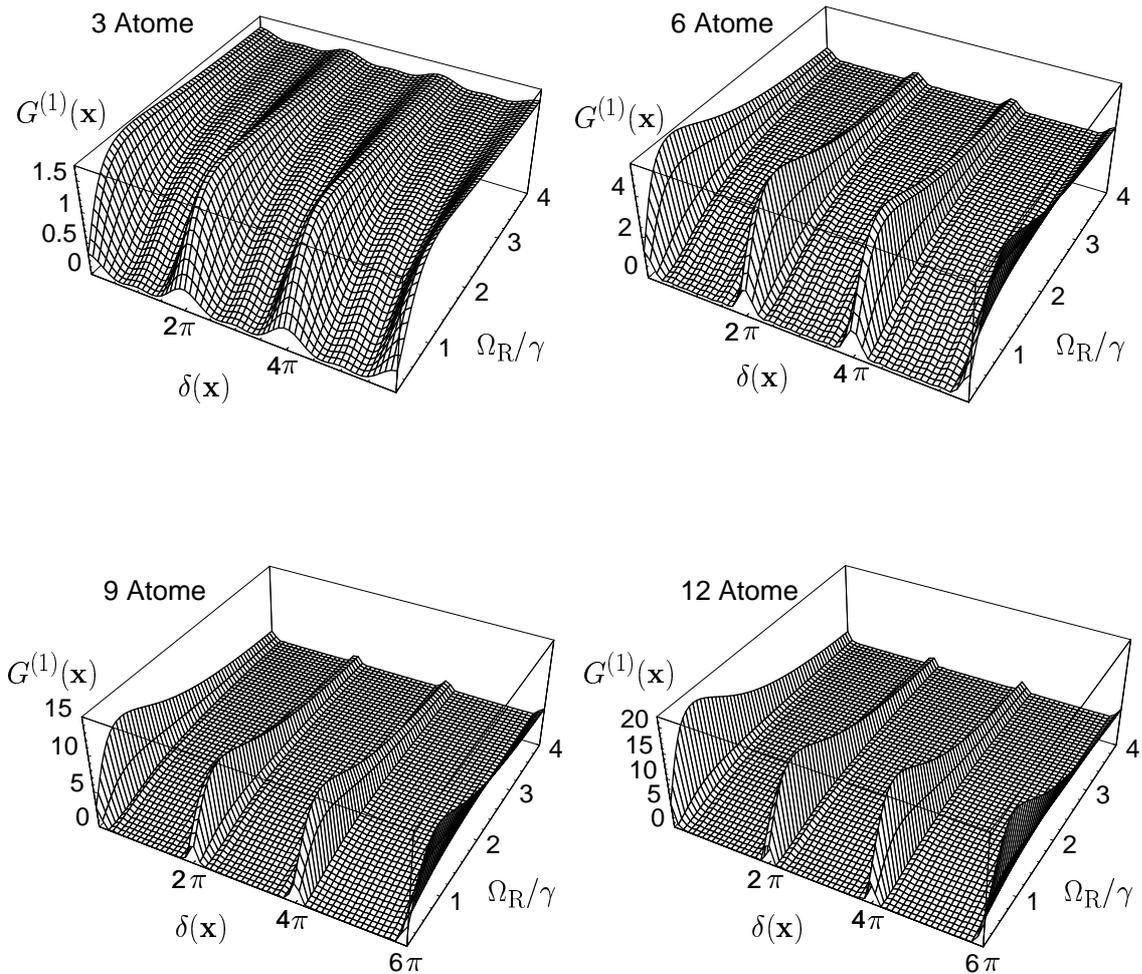
$$\langle \sigma_k^+ \sigma_l^+ \sigma_m^- \sigma_n^+ \rangle = \frac{\Omega_R^4 \gamma^2}{(2\Omega_R^2 + \gamma^2)^3} \quad \text{für } k \neq l \wedge m \neq n \wedge |\{k, l, m, n\}| = 3 \quad (4.37)$$

$$\langle \sigma_k^+ \sigma_l^+ \sigma_m^- \sigma_n^- \rangle = \frac{\Omega_R^4}{(2\Omega_R^2 + \gamma^2)^2} \quad \text{für } k \neq l \wedge m \neq n \wedge |\{k, l, m, n\}| = 2 \quad (4.38)$$

$$\langle \sigma_k^+ \sigma_l^+ \sigma_m^- \sigma_n^- \rangle = 0 \quad \text{für } k = l \vee m = n \quad (4.39)$$

$$(4.40)$$

zu kennen. Damit kann die Korrelationsfunktion 2. Ordnung auch für beliebige Atomzahlen analytisch berechnet werden. Es war jedoch bislang nicht möglich, eine der



**Abbildung 4.18:** Auftreten von Haupt und Nebenmaxima in der Intensität des von einer Ionenkette emittierten Lichts.

Intensitätsverteilung (4.35) vergleichbare geschlossene, explizit von der Ionenanzahl  $N$  abhängige Form zu finden<sup>3</sup>. Zudem ist die analytische Form von  $g^{(2)}$  für Atomzahlen größer als 4 sehr umfangreich, weshalb hier nur die Ergebnisse für drei und vier Ionen angegeben werden.

Man findet:

$$\begin{aligned}
 N = 3 : \\
 g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, 0) &= \frac{2s}{\prod_{i=1}^2 [3s + 4 \cos(\delta(\mathbf{x}_i)) + 2 \cos(2\delta(\mathbf{x}_i))] } \times \\
 &\quad \{ 3s + 2 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) + 2s \cos(\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) + \\
 &\quad s \cos(2(\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2))) + 2 \cos(2\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) + \\
 &\quad 2 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2)) \} \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

$$g^{(2)}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}, 0) = \frac{4s [3s + 2 \cos(\delta(\mathbf{x})) + \cos(2\delta(\mathbf{x}))]}{(3s + 4 \cos(\delta(\mathbf{x})) + 2 \cos(2\delta(\mathbf{x})))^2} \quad (4.42)$$

---

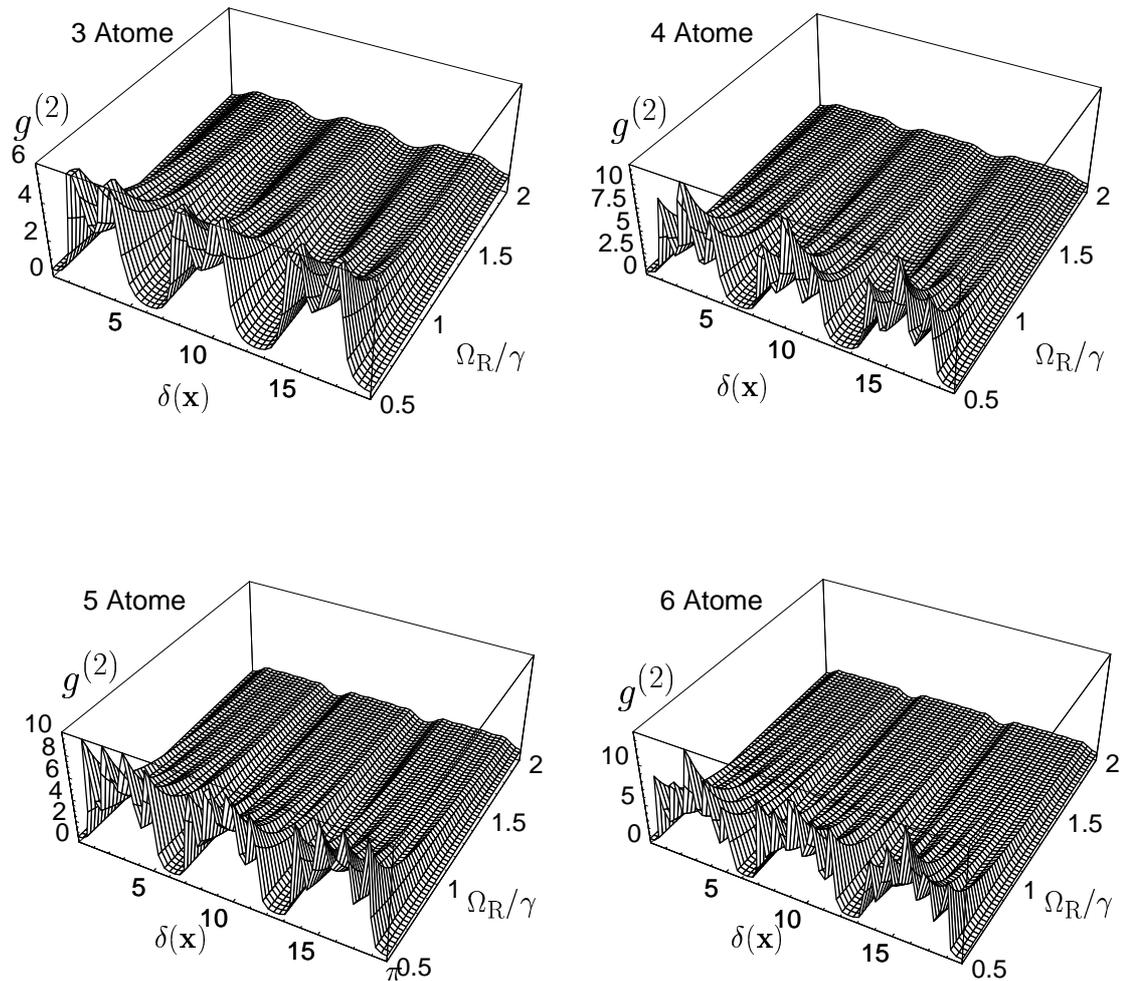
<sup>3</sup>Die dafür nötige Kombinatorik ist trotz der scheinbaren mathematischen Einfachheit des Problems nicht trivial

$$\begin{aligned}
N = 4 : \\
g^{(2)}(\mathbf{x}_1, 0; \mathbf{x}_2, 0) &= \frac{8 \sin(\delta(\mathbf{x}_1)/2)^2 \sin(\delta(\mathbf{x}_2)/2)^2}{\prod_{i=1}^2 [3 - 4s + 4(-1 + s) \cos(\delta(\mathbf{x}_1)) + \cos(4\delta(\mathbf{x}_1))]} \times \\
&\{6s^2 + (1 + 2s) \cos(\delta(\mathbf{x}_1) - 3\delta(\mathbf{x}_2)) + 2 \cos(2\delta(\mathbf{x}_1) - 2\delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ 2 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) + \cos(3\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ 2 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2)) + 2 \cos(2(\delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2))) \\
&+ \cos(3\delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2)) + s [2 \cos(2\delta(\mathbf{x}_1) - 3\delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ s [\cos(3\delta(\mathbf{x}_1) - 3\delta(\mathbf{x}_2)) + 2 \cos(2\delta(\mathbf{x}_1) - 2\delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ 3 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2))] + 2(2 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) - 2\delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ \cos(3\delta(\mathbf{x}_1) - 2\delta(\mathbf{x}_2)) + 2 \cos(2\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ \cos(3\delta(\mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x}_2)) + 2 \cos(\delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2)) \\
&+ \cos(2\delta(\mathbf{x}_1) + \delta(\mathbf{x}_2)) + \cos(\delta(\mathbf{x}_1) + 2\delta(\mathbf{x}_2)))] \\
&+ \cos(\delta(\mathbf{x}_1) + 3\delta(\mathbf{x}_2))\} \tag{4.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{(2)}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}, 0) &= \frac{2}{[3 \cos(\delta(\mathbf{x})) + 2(s + \cos(2\delta(\mathbf{x}))) + \cos(3\delta(\mathbf{x}))]^2} \times \\
&\{1 + 3s^2 + 3s \cos(\delta(\mathbf{x})) + (1 + 2s) \cos(2\delta(\mathbf{x})) \\
&+ s \cos(3\delta(\mathbf{x})) + \cos(4\delta(\mathbf{x}))\} \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Wie bei der Korrelationsfunktion 1. Ordnung treten auch in der Korrelationsfunktion 2. Ordnung wieder Haupt- und Nebenmaxima auf. Der Übergang zu komplexeren Interferenzbildern folgt auch hier erwartungsgemäß dem Analogon des Übergang auf ein Gitter in der Optik. Darüberhinaus findet man, wie schon bei Ionenpaaren, Raumrichtungen, in die gebunchtes und solche in die antiegebunchtes Licht emittiert wird, was die nichtklassische Natur dieses Effekts auch für größere Teilchenzahlen unterstreicht. Bemerkenswert ist zudem, dass auch hier wieder die Atome durch die Detektion verschränkt werden, was auf verhältnismässig einfache Weise die Beobachtung von Verschränkungseffekten mehrerer Teilchen ermöglicht. Auch im Hinblick auf die Micromaserphysik, wo ebenfalls die Verschränkung vieler Atome untersucht wird [140], ist dies ein interessanter Aspekt.

In Zukunft liegt nahe in diesem Zusammenhang zu untersuchen, ob diese Art der Verschränkung nicht auch die selektive Anregung von Bewegungszuständen ermöglicht. Dies wäre auch für die effiziente Kühlung von Ionenketten bei der Realisierung eines Quantencomputers von Bedeutung [141]. Gerade die hier ausgenutzten Symmetrieeigenschaften sind den Anforderung an Bewegungszustände beim sympathische Kühlen sehr ähnlich [142].



**Abbildung 4.19:** Auftreten von Haupt und Nebenmaxima in der Intensität des von einer Ionenkette emittierten Lichts.

Zusammenfassend lässt sich sagen dass die Photon-Photon-Korrelationen von Ionenketten eine Reihe interessanter Aspekte zeigen, welche gerade bei den aktuellen Fortschritten beim Speichern und Kühlen von Ionenketten auch experimentell zugänglich sein sollten.

# Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Heinzen und M. S. Feld, Phys. Rev. Lett. **59**, 2623 (1987).
- [2] W. Paul, O. Osberghaus und E. Fischer, Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministerium Nordrhein-Westfalen **415** (1958).
- [3] E. Fischer, Z. Physik **156**, 1 (1959).
- [4] H. Dehmelt, , in: D. R. Bates und I. Estermann (Hrsg.), *Advances in Atomic and Molecular Physics*, Bd. 3 u. 5, Academic (1967).
- [5] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek und H. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. **41**, 233 (1978).
- [6] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek und H. Dehmelt, Phys. Rev. A **22**, 1137 (1978).
- [7] E. Peik, G. Hollemann und H. Walther, Phys. Rev. A **49**, 402 (1994).
- [8] J. Höffges, H. Baldauf, T. Eichler, S. Helmfrid und H. Walther, Opt. Commun. **133**, 170 (1997).
- [9] F. Diedrich und H. Walther, Phys. Rev. Lett. **58**, 203 (1987).
- [10] H. Walther, Phys. Rep. **219**, 263 (1992).
- [11] H. Walther, Aust. J. of Phys. **46**, 37 (1993).
- [12] E. Peik, J. Abel, T. Becker, J. von Zanthier und H. Walther, Phys. Rev. A **60**, 439 (1999).
- [13] T. W. Hänsch und A. L. Schawlow, Opt. Commun. **13**, 68 (1975).
- [14] C. Cohen-Tannoudji, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, *Atoms in strong resonant fields*, in: R. Bailian, S. Haroche und S. Liberman (Hrsg.), *Frontiers in Laser Spectroscopy*, Bd. 1, S. 3, North-Holland, Amsterdam (1977).

- [16] R. J. Cook und H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1023 (1985).
- [17] C. Cohen-Tannoudji und J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **1**, 441 (1986).
- [18] A. Schenzle, R. G. Devoe und R. G. Brewer, *Phys. Rev. A* **33**, 2127 (1986).
- [19] R. J. Cook, *Progr. Optics* **28**, 363 (1990).
- [20] W. Nagourney, J. Sandberg und H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797 (1986).
- [21] T. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt und P. E. Toschek, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1696 (1986).
- [22] H. Dehmelt, *Nature* **325**, 581 (1987).
- [23] J. C. Bergquist, R. G. Hulet, W. M. Itano und D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699 (1986).
- [24] E. A. Power und S. Zienau, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **251**, 427 (1959).
- [25] M. Babiker und R. Loudon, *R. Soc. Lond. A* **385**, 439 (1983).
- [26] G. Agarwal, *Quantum Optics*, Bd. 70 d. Reihe *Springer Tracts in Modern Physics*, Springer (1974).
- [27] G. S. Agarwal, *Master equation methods in quantum optics*, in: E. Wolf (Hrsg.), *Progress in Optics XI*, North Holland (1973).
- [28] R. W. Zwanzig, *Lectures in theoretical physics*, in: , Bd. III, W. E. Brittin (1961).
- [29] R. W. Zwanzig, *Physica* **33**, 119 (1964).
- [30] P. N. Argyres, *Lectures in theoretical physics*, in: , Bd. VIIIA, W. E. Brittin (1966).
- [31] F. Haake, , Bd. 66 d. Reihe *Springer Tracts in Modern Physics*, Springer (1973).
- [32] Lehmberg, *Phys. Rev. A* **2**, 883 (1970).
- [33] J. D. Björken und S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill (1965).
- [34] H. A. Bethe und E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*, Academic Press (1957).
- [35] P. W. Milonni, *Semiclassical and quantum-elektrodynamical approaches in nonrelativistic radiation theory*, in: *Physics Reports*, S. 1–81, North Holland (1976).
- [36] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg, *Photons and Atoms*, Wiley (1989).
- [37] R. Loudon, *The Quantum Theory Of Light*, Oxford Science Publications (2000).

- [38] M. O. Scully und M. S. Zubairy, *Quantum optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions*, Wiley, New York (1992).
- [40] V. Weisskopf und E. Wigner, *Z. Phys.* **63**, 54 (1930).
- [41] G. S. Agarwal und R. R. Puri, *Phys. Rev. A* **33**, 1757 (1986).
- [42] H. Steudel und T. Richter, *Ann. d. Phys.* **35**, 122 (1978).
- [43] L. Onsager, *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931).
- [44] M. Lax, *Phys. Rev.* **129**, 2342 (1963).
- [45] D. Wineland, J. Bergquist, J. Bollinger und W. Itano, *Phys. Scr.* **59**, 286 (1995).
- [46] C. Skornia, J. von Zantier, G. S. Agarwal, E. Werner und H. Walther, *to be published*.
- [47] J. Dalibard, Y. Castin und K. Molmer, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 580 (1992).
- [48] K. Mølmer, Y. Castin und J. Dalibard, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 524 (1993).
- [49] G. C. Hegerfeldt, *Phys. Rev. A* **47**, 449 (1993).
- [50] H. J. Carmichael, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2273 (1993).
- [51] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics I*, Springer (1999).
- [52] A. Beige und G. Hegerfeldt, *Phys. Rev. A* **59**, 2385 (1999).
- [53] G. C. Hegerfeldt und D. G. Sondermann, *Quant. and Semiclass. Opt.* **8**, 121 (1996).
- [54] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu und F. Laloe, *Quantum Mechanics*, Wiley (1977).
- [55] E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807, 823, 844 (1935).
- [56] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [57] J. Cirac, P. Zoller, H. Kimble und H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3221 (1997).
- [58] D. Jaksch, H. Briegel, J. Cirac, C. Gardiner und P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1975 (1999).
- [59] L. Duan, G. Giedke, J. Cirac und P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4002 (2000).
- [60] B. Englert und H. Walther, *Opt. Commun.* **179**, 283 (2000).
- [61] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger und H. Walther, *Nature* **403**, 743 (2000).

- [62] B. T. H. Varcoe, S. Brattke, B. G. Englert und H. Walther, *Fortschr. der Phys.* **48**, 679 (2000).
- [63] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden und N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563 (1998).
- [64] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden und N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4737 (2000).
- [65] G. Barton, *Proc. of the Roy. Soc. London A Mat.* **410**, 141 (1987).
- [66] G. Barton, *Proc. of the Roy. Soc. London A Mat.* **410**, 175 (1987).
- [67] D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, R. E. Krieger Publishing (1989).
- [68] A. G. Fox und T. Li, *Bell Syst. Tech. J.* **40**, 135 (1961).
- [69] H. Kogelnik und T. Li, *Proc. of the IEEE* **54**, 1312 (1964).
- [70] T. Becker, *Spektroskopie an einem einzelnen gespeicherten  $in^+$ -ion*, Diplomarbeit, LMU München (1996).
- [71] J. von Zanthier, G. S. Agarwal und H. Walther, *Phys. Rev. A* **56**, 2242 (1997).
- [72] D. KLEPPNER, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 233 (1981).
- [73] D. J. Heinzen, J. J. Childs, J. E. Thomas und M. S. Feld, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1320 (1987).
- [74] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1967).
- [75] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi und G. Orriols, *Nuovo Cim.* **36**, 5 (1976).
- [76] H. R. Gray, R. M. Whitley und C. Stroud, *Opt. Lett.* **3**, 218 (1978).
- [77] E. Arimondo und G. Orriols, *Nouvo Cim.* **17**, 333 (1976).
- [78] E. Arimondo, *Coherent population trapping in laser spectroscopy*, in: E. Wolf (Hrsg.), *Progress in Optics*, Bd. XXXV, S. 257, Elsevier, Amsterdam (1996).
- [79] S. E. H. K. J. Boller, A. Imamoglu, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2593 (1991).
- [80] M. O. Scully, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1855 (1991).
- [81] A. Imamoglu und S. E. Harris, *Opt. Lett.* **14**, 1344 (1989).
- [82] A. Nottelmann, C. Peters und W. Lange, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1783 (1993).
- [83] A. S. Zibrov, M. D. Lukin, D. E. Nikonov, L. Hollberg, M. O. Scully, V. L. Velichansky und H. G. Robinson, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1499 (1995).

- [84] G. G. Padmabandu, G. R. Welch, I. N. Shubin, E. S. Fry, D. E. Nikonov, M. D. Lukin und M. O. Scully, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2053 (1996).
- [85] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton und C. H. Behroozi, *Nature* **397**, 594 (1999).
- [86] M. M. Kash, V. A. Sautenkov, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch, M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry und M. O. Scully, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 5229 (1999).
- [87] S. Stenholm, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 669 (1986).
- [88] P. E. Toschek und W. Neuhauser, , in: D. Kleppner und F. M. Pipkin (Hrsg.), *Atomic Physics 7*, Plenum (1981).
- [89] G. Janik, W. Nagourney und H. Dehmelt, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1251 (1985).
- [90] M. Schubert, I. Siemers und R. Blatt, *Phys. Rev. A* **39**, 5098 (1989).
- [91] M. Schubert, I. Siemers, R. Blatt, W. Neuhauser und P. Toschek, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3016 (1992).
- [92] Y. Stalgies, I. Siemers, B. Appasamy, T. Altevogt und P. E. Toschek, *Europhys. Lett.* **35**, 259 (1996).
- [93] H. Dehmelt, *IEEE Trans. Instr. Meas.* **31**, 83 (1982).
- [94] S. H. Autler und C. H. Townes, *Phys. Rev.* **100**, 703 (1955).
- [95] M. Fleischhauer, C. Keitel, M. O. Scully, C. Su, B. T. Ulrich und S. Y. Zhu, *Phys. Rev. A* **46**, 1468 (1992).
- [96] L. M. Narducci, G. L. Oppo und M. O. Scully, *Opt. Commun.* **75**, 111 (1990).
- [97] Y. Zhu, D. J. Gauthier, S. E. Morin, Q. Wu, H. J. Carmichael und T. W. Mossberg, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2499 (1990).
- [98] D. J. Gauthier, Y. Zhu und T. W. Mossberg, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2460 (1991).
- [99] G. Grynberg, M. Pinard und P. Mandel, *Phys. Rev. A* **54**, 776 (1996).
- [100] T. Becker, J. von Zanthier, A. Y. Nevsky, C. Schwedes, M. N. Skvortsov, H. Walther und E. Peik, , to be published.
- [101] Z. Ficek, R. Tanas und S. Kielich, *Opt. Acta* **33**, 1149 (1986).
- [102] Z. Ficek, R. Tanas und S. Kielich, *Phys. Rev. A* **29**, 2004 (1984).
- [103] Z. Ficek, R. Tanas und S. Kielich, *Opt. Acta* **30**, 713 (1983).
- [104] Z. Ficek, R. Tanas und S. Kielich, *Opt. Commun.* **69**, 20 (1988).

- [105] Q. V. Lawande, B. N. Jagatap und S. V. Lawande, *Phys. Rev. A* **42**, 4343 (1990).
- [106] S. V. Lawande, Q. V. Lawande und B. N. Jagatap, *Phys. Rev. A* **40**, 3434 (1989).
- [107] G. S. Agarwal, S. V. Lawande und R. Dsouza, *IEEE J. Quantum Elect.* **24**, 1413 (1988).
- [108] S. V. Lawande und B. N. Jagatap, *Phys. Rev. A* **39**, 683 (1989).
- [109] G. Agarwal, A. Brown, L. Narducci und G. Vetri, *Phys. Rev. A* **15**, 1613 (1977).
- [110] M. Lewenstein und J. Javanainen, *IEEE J. Quantum Elect.* **24**, 1403 (1988).
- [111] T. Rudolph, Z. Ficek und B. Dalton, *Phys. Rev. A* **52**, 636 (1995).
- [112] T. Richter, *Opt. Commun.* **80**, 285 (1991).
- [113] W. M. Itano, J. C. Bergquist und D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* **38**, 559 (1988).
- [114] M. Block, O. Rehm, P. Seibert und G. Werth, *Eur. Phys. J. D* **7**, 461 (1999).
- [115] C. J. S. Donald, D. M. Lucas, P. A. Barton, M. J. McDonnell, J. P. Stacey, D. A. Stevens, D. N. Stacey und A. M. Steane, *epl* **51**, 388 (2000).
- [116] D. J. Wineland, J. C. Bergquist, W. M. Itano und D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2935 (1987).
- [117] M. Block, A. Drakoudis, H. Leuthner, P. Seibert und G. Werth, *J. Phys. B* **33**, L375 (2000).
- [118] R. DeVoe und R. Brewer, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2049 (1996).
- [119] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger und D. J. Wineland, *Phys. Rev. A* **41**, 2295 (1990).
- [120] E. Block und P. R. Berman, *Phys. Rev. A* **44**, 1466 (1991).
- [121] P. Blanchard und A. X. Jadczyk, *Phys. Lett. A* **183**, 272 (1993).
- [122] T. Altenmüller und A. Schenzle, *Phys. Rev. A* **49**, 2016 (1994).
- [123] G. S. Agarwal und S. P. Tewari, *Phys. Lett. A* **185**, 139 (1994).
- [124] M. B. Plenio, P. L. Knight und R. C. Thompson, *Opt. Commun.* **123**, 278 (1996).
- [125] A. Beige, G. C. Hegerfeldt und D. G. Sondermann, *Found. Phys.* **27**, 1671 (1997).
- [126] C. Balzer, R. Huesmann, W. Neuhauser und P. E. Toschek, *Opt. Commun.* **180**, 115 (2000).

- [127] H. C. Nagerl, D. Leibfried, H. Rohde, G. Thalhammer, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler und R. Blatt, *Phys. Rev. A* **60**, 145 (1999).
- [128] H. C. Nagerl, C. Roos, H. Rohde, D. Leibfried, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler und R. Blatt, *Fortschr. der Phys.* **48**, 623 (2000).
- [129] A. Beige, S. F. Huelga, P. L. Knight und A. Et., *J. Mod Optic* **47**.
- [130] S. Addicks, A. Beige, M. Dakna und G. C. Hegerfeldt, *Double jumps and transition rates for two dipole-interacting atoms*, quant-ph/0002093.
- [131] T. Richter, *Ann. Phys. Leipzig* **43**, 529 (1986).
- [132] T. Richter, *Opt. Acta* **30**, 1769 (1983).
- [133] L. Mandel, *Phys. Rev. A* **28**, 929 (1983).
- [134] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **89**, 472 (1953).
- [135] J. T. Höffges, H. W. Baldauf, W. Lange und H. Walther, *J. Mod. Opt.* **44**, 1999 (1997).
- [136] C. Cabrillo, J. Cirac, P. Garcia-Fernandez und P. Zoller, *Phys. Rev. A* **59**, 1025 (1999).
- [137] U. Eichmann, J. Bergquist, J. Bollinger, J. Gilligan, W. Itano, D. Wineland und M. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2359 (1993).
- [138] W. Itano, J. Bergquist, J. Bollinger, D. Wineland, U. Eichmann und M. Raizen, *Phys. Rev. A* **57**, 4176 (1998).
- [139] A. Beige und G. C. Hegerfeldt, *Phys. Rev. A* **58**, 4133 (1998).
- [140] B. Varcoe und S. Brattke (2000), private Kommunikation.
- [141] J. I. Cirac und P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [142] G. Morigi und J. von Zanthier (2000), private Kommunikation.

# Danksagungen

An erster Stelle möchte ich den Betreuern dieser Arbeit Prof. Dr. Werner und Prof. Dr. Walther danken. Die in fachlicher Sicht überaus kompetente, sowie im menschlichen Bereich stets angenehme Anleitung und Kooperation haben diese Arbeit erst ermöglicht. Die freundliche Aufnahme in Ihre Arbeitsgruppen an der Universität Regensburg und am Max-Planck-Institut für Quantenoptik erlaubte mir unter besten Bedingungen zu arbeiten.

Auch Prof. Dr. Agarwal möchte ich an dieser Stelle danken, die Diskussionen und die gemeinsame Arbeit waren für mich stets vom Gewinn neuer Einsichten geprägt. Dr. Joachim von Zanthier bin ich für seine Begeisterung für die Physik und das in unserer Zusammenarbeit gezeigte Engagement, ganz besonderen Dank schuldig. Ohne seine Kompetenz und Ausdauer wäre mir wohl vieles verborgen geblieben.

Natürlich will ich auch diejenigen nicht vergessen, welche meinen Aufenthalt am MPQ besonders geprägt haben. Jens, der mir beigebracht hat, dass man core-Files nicht nur löschen kann, Angelika, seine Frau, die das zu schätzen weiß, Lukas, der auch in fortgeschrittenem Alter das Münchner Nachtleben immer wieder in erheblichen Aufruhr versetzt und natürlich Giovanna, das Herz und die Seele unseres Büros. Danke Freunde!

Ohne die Liebe, die mir Julia in den letzten sechs Jahren geschenkt hat, hätte das Leben jedoch nicht diesen Wert. Ich danke Dir für jede gemeinsame Minute.

Den letzten Dank haben meine Eltern und meine Schwestern verdient. Ihnen verdanke ich nicht nur die Möglichkeiten, meinen Neigungen und Interessen nachgehen zu können, sondern auch die Geborgenheit, die nötig ist um ein glückliches Leben führen zu können.

# Lebenslauf

---

**Name:** Christoph Anton Skornia

**Geburtsdatum:** 20.6.1970

**Geburtsort:** Wildthurn, Kreis Dingolfing-Landau

**Eltern:** Vater: Christoph Skornia  
Mutter: Ingeborg Skornia

**Geschwister:** Birgit Skornia, Krankenschwester  
Christine Skornia, Schülerin

**Schulische Ausbildung:** 9.1976 - 8.1980: Grundschule Landau a.d. Isar  
9.1980 - 8.1981: Hauptschule Landau a.d. Isar  
9.1981 - 5.1990: Gymnasium Landau a.d. Isar  
6.1990: Abitur

**Studium:** WS1990/1991- SS 1996:  
Studium für das Lehramt an Gymnasien, Mathematik  
und Physik an der Universität Regensburg  
12.1996: 1. Staatsexamen

**Promotion:** Seit 3.1997 Promotion in Zusammenarbeit mit dem  
Max-Planck-Institut für Quantenoptik