Universität Regensburg
Mathematik

Géométrie toroïdale et géométrie analytique non Archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels

Amaury Thuillier

Preprint Nr. 10/2006

Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels

Amaury Thuillier

28 juillet 2006

Résumé. La géométrie analytique non archimédienne au sens de V. G. Berkovich fournit un cadre naturel pour formuler les aspects combinatoires de la théorie des variétés toriques et des plongements toroïdaux. Ce point de vue conduit à une preuve conceptuelle et élémentaire du résultat suivant : si X est un schéma algébrique sur un corps parfait et si D est le diviseur exceptionnel, à croisements normaux, d'une résolution des singularités de X, le type d'homotopie du complexe d'incidence de D est un invariant de X. Il s'agit d'une généralisation d'un théorème de D. Stepanov.

Abstract. V. G. Berkovich's Non-Archimedean analytic geometry provides a natural framework to understand the combinatorial aspects in the theory of toric varities and toroidal embeddings. This point of view leads to a conceptual and elementary proof of the following result : if X is an algebraic scheme over a perfect field and if D is the exceptional normal crossing divisor of a resolution of the singularities of X, the homotpy type of the incidence complexe of D is an invariant of X. This is a generalization of a theorem due to D. Stepanov.

Table des matières

INTRODUCTION

Ce travail trouve son origine dans un article de D. Stepanov ([**11**]). Étant donnés un corps k de caractéristique nulle, un k-schéma algébrique X et un point singulier isolé x de X, le théorème de résolution des singularités de Hironaka garantit l'existence d'un Idéal $\mathfrak{I}$ sur X, de support $\{x\}$ et tel que le diviseur exceptionnel E de l'éclatement de $\mathfrak{I}$ soit à croisements normaux simples (ce qui signifie que ses composantes irréductibles sont sans auto-intersection). La combinatoire des intersections multiples des composantes irréductibles de E donne naissance à un ensemble simplicial $\Delta(\mathrm{E})$, le *complexe d'incidence* de ce diviseur, dont on note $|\Delta(\mathrm{E})|$ la réalisation géométrique. Si $\Delta(\mathrm{E})$ dépend évidemment du choix de l'Idéal $\mathfrak{I}$, Stepanov démontre qu'il n'en va pas de même pour le type d'homotopie de l'espace topologique $|\Delta(\mathrm{E})|$, qui est un invariant de la singularité x. Ce résultat est déduit du théorème de factorisation faible des applications birationnelles en caractéristique nulle (dont une démonstration est due à D. Abramovich, D. Karu, K. Matsuki et K. Włodarczyk, une autre à K. Włodarczyk), lequel permet essentiellement, en écrivant l'application birationnelle naturelle entre deux résolutions de x comme une composée d'applications birationnelles suffisamment élémentaires, de passer de l'ensemble simplicial $\Delta(\mathrm{E}_1)$ à l'ensemble simplicial $\Delta(\mathrm{E}_2)$ par une suite de transformations simples ne modifiant pas le type d'homotopie de la réalisation géométrique. Pour pouvoir appliquer ce théorème de factorisation, il faut préalablement compactifier les schémas en jeu ; on considère pour cela un voisinage U de x dans X, que l'on plonge dans un k-schéma propre $\overline{\mathrm{U}}$, régulier en dehors de x et tel que $\overline{\mathrm{U}} - \mathrm{U}$ soit un diviseur à croisements normaux simples. La démonstration de Stepanov fonctionne de manière identique si l'on part, plus généralement, d'un k-schéma algébrique X et d'une composante connexe *propre* de son lieu singulier. Notons en outre que la restriction à la caractéristique nulle est imposée par l'utilisation du théorème de résolution des singularités de Hironaka pour établir le théorème de factorisation et pour construire des compactifications convenables.

Nous proposons dans ce texte une approche conceptuelle et élémentaire d'une généralisation du théorème de Stepanov, n'utilisant pas le théorème de factorisation faible. Précisément, on établit au chapitre 4 le résultat suivant.

THÉORÈME — *Soient* X *un schéma algébrique sur un corps parfait k et* Y *est un sous-schéma fermé de* X. *Si* $f_1 : \mathrm{X}_1 \to \mathrm{X}$ *et* $f_2 : \mathrm{X}_2 \to \mathrm{X}$ *sont deux morphismes propres tels que* $f_i^{-1}(\mathrm{Y})$ *soit un diviseur à croisements normaux simples et que* f_i *induise un isomorphisme de* $\mathrm{X}_i - f_i^{-1}(\mathrm{Y})$ *sur* $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, $i = 1, 2$, *alors les espaces topologiques* $|\Delta(f_1^{-1}(\mathrm{Y}))|$ *et* $|\Delta(f_2^{-1}(\mathrm{Y}))|$ *sont canoniquement homotopes.*

La démonstration est une application des idées introduites par V. G. Berkovich en *géométrie analytique non archimédienne* et elle procède en deux étapes.

1. Désignant par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ les k-schémas formels obtenus en complétant X, X_1 et X_2 le long de Y, $f_1^{-1}(\mathrm{Y})$ et $f_2^{-1}(\mathrm{Y})$ respectivement, leurs *fibres génériques* $\mathfrak{X}_\eta$, $\mathfrak{X}_{1,\eta}$ et $\mathfrak{X}_{2,\eta}$ sont par définition des espaces analytiques sur le corps k, vu comme un corps non archimédien en le munissant de la valeur absolue triviale. Comme on s'y attend, les morphismes f_1 et f_2 induisent des isomorphismes $\mathfrak{X}_{1,\eta} \tilde{\to} \mathfrak{X}_\eta$ et $\mathfrak{X}_{1,\eta} \tilde{\to} \mathfrak{X}_\eta$; en particulier, les espaces topologiques sous-jacents à $\mathfrak{X}_\eta$, $\mathfrak{X}_{1,\eta}$ et $\mathfrak{X}_{2,\eta}$ sont canoniquement *homéomorphes*.

2. La condition imposée au corps de base k d'être *parfait* est là pour garantir que les immersions ouvertes $\mathrm{X}_1 - f_1^{-1}(\mathrm{Y}) \hookrightarrow \mathrm{X}_1$ et $\mathrm{X}_2 - f_2^{-1}(\mathrm{Y}) \hookrightarrow \mathrm{X}_2$ sont des *plongements toroïdaux*. Il existe alors des sous-espaces fermés canoniques $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1)$ et $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2)$ de $\mathfrak{X}_{1,\eta}$ et $\mathfrak{X}_{2,\eta}$ respectivement ayant les propriétés suivantes ($i \in \{1, 2\}$) :

– l'espace topologique $\mathfrak{X}_{i,\eta}$ se *contracte* sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_i)$;

– $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}_i)$ s'identifie au *cône épointé* sur l'espace topologique $|\Delta(f_i^{-1}(\mathrm{Y}))|$;

et cela permet de conclure que les espaces topologiques $|\Delta(f_1^{-1}(\mathrm{Y}))|$ et $|\Delta(f_2^{-1}(\mathrm{Y}))|$ ont le même type d'homotopie, à savoir celui de l'espace topologique $\mathfrak{X}_\eta$.

Avant d'aborder le théorème de Stepanov, on montre dans les pages suivantes que la théorie de Berkovich fournit un cadre naturel pour formuler la construction, initialement décrite par D. Mumford dans le deuxième chapitre de la monographie [**9**], du *complexe polyédrique conique* associé à un plongement toroïdal. Pour cela, la première étape est de voir que l'*éventail* d'une variété torique X (sous un tore T) s'identifie à un sous-espace localement fermé $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ de l'espace de Berkovich $\mathrm{X}^{\beth}$ de X, dont l'adhérence $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ est la réunion des éventails associés aux différentes orbites dans X ; en outre, l'action de T sur X donne naturellement naissance à une contraction de l'espace $\mathrm{X}^{\beth}$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$. Cette construction et ces propriétés s'étendent au cas d'un plongement toroïdal.

Les idées et techniques ici mises en œuvre proviennent des travaux de Berkovich. Tout d'abord, l'*espace de Berkovich* $\mathfrak{X}^{\beth}$ d'un *k*-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ n'est pas autre chose que sa « fibre générique » au sens de l'article [**4**] (cette construction est essentiellement due à P. Berthelot [**6**]). Cet espace analytique n'étant pas invariant relativement aux éclatements centrés dans la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$, la terminologie est quelque peu fâcheuse et nous nous sommes permis de la modifier. La *fibre générique* $\mathfrak{X}_\eta$ de $\mathfrak{X}$ considérée dans ce travail, qui possède la propriété d'invariance recquise, est un ouvert de $\mathfrak{X}^{\beth}$. Notre description des variétés toriques du point de vue de la géométrie analytique non archimédienne est une version détaillée de la section 6.1 de [**1**]. Enfin, l'extension aux plongements toroïdaux suit de près la construction, par Berkovich, du squelette d'un schéma formel pluristable ([**5**]).

Remarque. — L'énoncé du théorème doit être valable sans hypothèse sur le corps *k*. Comme on l'a mentionné, c'est le passage par la géométrie toroïdale qui nécessite de supposer que *k* est parfait et, si ce chemin a un intérêt intrinsèque puisqu'il permet de reformuler la construction du complexe polyédral d'un plongement toroïdal dans le cadre de la théorie de Berkovich, il ne devrait pas être la voie obligée pour accéder au théorème. Si $\mathfrak{X}$ est le complété formel d'un *k*-schéma algébrique le long d'un diviseur à croisements normaux simples, il est de fait possible (et facile) de définir inconditionnellement le sous-espace fermé $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ de $\mathfrak{X}_\eta$, mais il semble que l'on ait besoin de supposer *k* parfait pour obtenir, via l'action de tores formels, une preuve aisée de la contractibilité de $\mathfrak{X}_\eta$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$.

Il est par ailleurs raisonnable de penser que l'existence d'un corps de base est superflue et que l'énoncé du théorème précédent est vrai sous la seule condition que X soit un schéma localement noethérien excellent (il en est alors de même pour X_1 et X_2, et le complexe d'incidence d'un diviseur à croisements normaux simples sur un schéma localement noethérien excellent est bien défini).

Je suis reconnaissant à Klaus Künnemann d'avoir attiré mon attention sur l'article de Stepanov et le remercie pour ses encouragements à conduire ce travail à son terme. Cela fut fait au cours d'une année passée au sein de l'université de Regensburg, que je remercie chaleureusement pour son accueil.

1. L'ESPACE DE BERKOVICH D'UN *k*-SCHÉMA FORMEL LOCALEMENT ALGÉBRIQUE

Soit *k* un corps, que l'on voit comme un corps non archimédien en le munissant de la valeur absolue triviale ; la topologie induite sur *k* est discrète. On désigne par $\mathbf{SchAlg}_k$ la catégorie dont les objets sont les *k*-schémas localement algébriques et dont les flèches sont les morphismes de *k*-schémas.

Un *k*-schéma formel est *localement algébrique* s'il est localement isomorphe au complété formel d'un *k*-schéma algébrique le long d'un sous-schéma fermé ; il s'agit en particulier d'un *k*-schéma formel adique. Les *k*-schémas formels localement algébriques sont les objets d'une sous-catégorie pleine de la catégorie des *k*-schémas formels, notée $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$. On définit d'un foncteur pleinement fidèle de $\mathbf{SchAlg}_k$ dans $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$ en associant à tout *k*-schéma localement algébrique X sont complété le long du sous-schéma fermé X ; il est équivalent de munir l'anneau $\mathscr{O}_\mathrm{X}(\mathrm{U})$ de la topologie discrète pour tout ouvert quasi-compact $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$.

L'objet essentiel de ce chapitre est la définition d'un foncteur d'une certaine sous-catégorie de $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$ – mêmes objets et morphismes adiques – dans la catégorie $\mathbf{An}_k$ des espaces k-analytiques, associant à un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ sa *fibre générique*, notée $\mathfrak{X}_\eta$; on introduira pour cela un foncteur de $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$ dans $\mathbf{An}_k$, faisant correspondre à un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ son *espace de Berkovich* $\mathfrak{X}^\beth$. Par construction, la fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$ d'un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ définit un sous-espace k-analytique fermé de $\mathfrak{X}^\beth$ et la fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ de $\mathfrak{X}$ est l'espace analytique induit sur l'ouvert complémentaire.

Il n'y a là rien d'original par rapport aux travaux de V. Berkovich. Il faut en particulier dire dès maintenant que l'*espace de Berkovich* $\mathfrak{X}^\beth$ d'un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ n'est pas autre chose que sa « fibre générique » définie et étudiée dans l'article [**4**] et que cette construction est initialement due à P. Berthelot [**6**]. Il s'avère cependant que le terme de fibre générique est inadapté à la situation que nous considérons, l'espace analytique $\mathfrak{X}^\beth$ n'étant pas invariant relativement aux éclatements centrés dans la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$; tel est par contre le cas de l'espace analytique $\mathfrak{X}_\eta$, et c'est cette observation que traduit la modification terminologique adoptée dans ce texte. Rappelons enfin que $\beth$ est la deuxième lettre de l'alphabet hébreu, transcrite par les lettres V et B dans l'alphabet latin.

1.1. Préliminaires

Nous renvoyons au livre [**1**] et au premier chapitre de l'article [**2**] pour les notions fondamentales de géométrie analytique non archimédienne au sens de Berkovich et nous contentons ici de quelques rappels.

Fixons un corps K muni d'une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$ pour laquelle il est complet.

(1.1.1) Quels que soient les nombres réels strictement positifs $r_1, \ldots, r_n$, $\mathrm{K}\{r_1^{-1}\mathrm{T}_1, \ldots, r_n^{-1}\mathrm{T}_n\}$ désigne la K-algèbre de Banach des séries formelles $f = \sum_{\nu\in\mathbb{N}^n} a_\nu \mathrm{T}_1^{\nu_1}\ldots\mathrm{T}_n^{\nu_n} \in \mathrm{K}[[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]]$ telles que les nombres réels $|a_\nu| r_1^{\nu_1}\ldots r_n^{\nu_n}$ tendent vers 0 lorsque $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$ tend vers $+\infty$, munie de la norme définie par $||f|| = \max_\nu |a_\nu| r_1^{\nu_1}\ldots r_n^{\nu_n}$. Une algèbre K-*affinoïde* est une K-algèbre de Banach quotient d'une K-algèbre de Banach de la forme précédente, et elle est dite *strictement affinoïde* si les r_i peuvent être choisis dans le sous-groupe $|\mathrm{K}^\times|$ de $\mathbb{R}_{>0}$.

(1.1.2) Étant donnée une algèbre K-affinoïde A, on désigne par $\mathscr{M}(\mathrm{A})$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives et bornées sur A. Une telle semi-norme coïncide avec la valeur absolue sur le corps K. Si x est un point de $\mathscr{M}(\mathrm{A})$ et a est un élément de A, on note indifféremment $|a|(x)$ ou $|a(x)|$ l'évaluation de x en a.

Comme pour tout anneau de Banach, la *semi-norme spectrale* d'une algèbre K-affinoïde A est définie par la formule

$$|a|_{\mathrm{sp}} = \lim_{n\to+\infty} ||a^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_n ||a^n||^{\frac{1}{n}}.$$

De la commutativité de A se déduit la propriété suivante :

$$|a|_{\mathrm{sp}} = \max_{\mathscr{M}(\mathrm{A})} |a|(x).$$

On note A° l'ensemble des éléments a de A tels que $|a|_{\mathrm{sp}} \leq 1$; c'est une sous-K°-algèbre de A. Tout K-morphisme borné $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ entre algèbre K-affinoïdes induit un K°-homomorphisme f° de A° dans B° car $|f(a)|_{\mathrm{sp}} \leq |a|_{\mathrm{sp}}$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

(1.1.3) Une partie V de $\mathscr{M}(\mathrm{A})$ est un *domaine affinoïde* si le foncteur $\mathrm{h_V}$ de la catégorie des algèbres K-affinoïdes (et des K-morphismes bornés) dans celle des ensembles, qui à une algèbre B associe l'ensemble des K-homomorphismes bornés φ de A dans B tels que l'image de l'application induite ${}^a\varphi : \mathscr{M}(\mathrm{B}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$ soit contenue dans V, est représentable. À tout domaine affinoïde V de $\mathscr{M}(\mathrm{A})$ sont donc associés une algèbre K-affinoïde $\mathrm{A_V}$ et un K-homomorphisme borné $\mathrm{A} \to \mathrm{A_V}$, uniquement déterminés à un isomorphisme unique près, et l'on vérifie que l'application induite $\mathscr{M}(\mathrm{A_V}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$ est une bijection sur V. Parmi les domaines affinoïdes figurent les domaines rationnels, de la forme

$V = \{|f_1| \leq r_1|f_0|, \ldots, |f_n| \leq r_n|f_0|\}$, où $f_0, \ldots, f_n$ sont des éléments de A engendrant l'idéal unité et $r_1, \ldots, r_n$ sont des nombres réels strictement positifs ; dans ce cas, A_V est l'algèbre K-affinoïde $A\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\}/(f_1 - f_0T_1, \ldots, f_n - f_0T_n)$.

(1.1.4) On fait de l'ensemble $X = \mathscr{M}(A)$ un *site* en le munissant de la topologie de Grothendieck suivante (voir [**7**] et [**6**]).

- Les objets, appelés *domaine analytique*, sont les parties U de X admettant un recouvrement $\{V_i\}$ par des domaines affinoïdes vérifiant la condition suivante : pour toute algèbre K-affinoïde B et tout K-homomorphisme borné $\varphi : A \to B$ tel que l'image de l'application ${}^a\varphi : \mathscr{M}(B) \to \mathscr{M}(A)$ soit contenue dans U, celle-ci est recouverte par un nombre fini des V_i.
- Les recouvrements admissibles d'un domaine analytique U sont les recouvrements $\{U_i\}$ de U par des domaines analytiques U_i vérifiant la condition suivante : pour toute algèbre K-affinoïde B et tout K-homomorphisme borné $\varphi : A \to B$ tel que l'image de l'application ${}^a\varphi : \mathscr{M}(B) \to \mathscr{M}(A)$ soit contenue dans U, il existe un recouvrement de $\mathscr{M}(B)$ par un nombre fini de domaines affinoïdes qui raffine le recouvrement $\{\varphi^{-1}(U_i)\}$.

Ce site est noté X_G. D'après un théorème de Tate, il existe un et un seul faisceau de K-algèbres $\mathscr{O}_{X_G}$ sur X_G satisfaisant aux deux conditions suivantes : $\mathscr{O}_{X_G}(V) = A_V$ pour tout domaine affinoïde $V \subset X$ et, si W, V sont des domaines affinoïdes tels que $W \subset V$, l'homomorphisme de restriction $\mathscr{O}_{X_G}(V) \to \mathscr{O}_{X_G}(W)$ est le K-homomorphisme borné de A_V dans A_W factorisant la flèche canonique $A \to A_W$.

(1.1.5) Munissons maintenant $X = \mathscr{M}(A)$ de la topologie engendrée par les évaluations $(x \mapsto |f(x)|)$, $f \in A$; l'espace topologique obtenu est compact et les domaines affinoïdes en sont des parties compactes, donc fermées. Du fait que tout point de X admette manifestement un système fondamental de voisinages formé de domaines affinoïdes, chaque ouvert Ω de X est un domaine analytique et tout recouvrement ouvert de Ω est admissible ; il existe donc un morphisme évident Π du site X_G vers le site topologique associé à X et l'image directe $\mathscr{O}_X = \Pi_*(\mathscr{O}_{X_G})$ est un faisceau de K-algèbres sur l'espace topologique X. Le terme d'« ouvert » n'est employé que pour la topologie qui vient d'être définie (dans le cadre de la topologie de Grothendieck sur le site X_G, on parlera de domaines analytiques ou d'objets de ce site) ; s'il n'y a pas d'ambiguité, on notera toutefois indistinctement $\mathscr{O}_X$ pour les faisceaux structuraux du site X_G et de l'espace topologique X.

Pour tout point x de X, les fibres $\mathscr{O}_{X,x}$ et $\mathscr{O}_{X_G,x}$ sont des anneaux locaux ; le premier est la limite du système inductif des A_V, V parcourant l'ensemble des domaines affinoïdes de X qui sont des voisinages de x, tandis que le second est la limite du système inductif des A_W, W parcourant cette fois le système inductif des domaines affinoïdes W de X qui contiennent x.

(1.1.6) En vertu du théorème de Tate mentionné au point précédent, A est l'anneau des sections globales du faisceau structural de $\mathscr{M}(A)$; il existe par conséquent un unique morphisme d'espaces k-localement annelés $\rho_A : \mathscr{M}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$ induisant l'homomorphisme identique de A. Il est facile de voir que l'application sous-jacente envoie une semi-norme $x \in \mathscr{M}(A)$ sur son noyau $\{a \ni A \mid |a(x)|0\}$ (il s'agit bien d'un idéal premier de A en vertu de la multiplicativité de x).

On dispose également d'un morphisme de sites k-localement annelés $r_A : \mathscr{M}(A) \to \mathrm{Spf}(A^\circ)$, uniquement déterminé par la condition suivante : pour tout élément f de A°, $r_A^{-1}(D(f))$ est le domaine affinoïde $\{|f| = 1\}$ et l'homomorphisme de $\Gamma(\mathfrak{D}(f), \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ dans $\Gamma(r_A^{-1}(D(f)), \mathscr{O}_{\mathscr{M}(A)_G})$ est la flèche canonique de $A^\circ_{\{f\}}$ dans $A\{T\}/(Tf - 1)$. L'application sous-jacente envoie une semi-norme multiplicative $x \in \mathscr{M}(A)$ sur l'idéal premier ouvert $\{a \in A^\circ \mid |a(x)| < 1\}$ de l'anneau topologique A° et est appelée *application de réduction*.

(1.1.7) Étant donné un espace K-affinoïde $X = \mathscr{M}(A)$, l'ensemble des sous-espaces fermés Γ de X tels que, pour tout $f \in A$,

$$\max_X |f| = \max_\Gamma |f|,$$

admet un plus petit élément : c'est par définition le *bord de Shilov* de X, que l'on note $\Gamma(X)$ ([**1**], corollaire 2.4.5). Ce sous-ensemble est fini, et il est non vide si X est non vide.

Les deux propriétés fondamentales du bord de Shilov d'un espace affinoïde $X = \mathscr{M}(A)$ sont les suivantes.

- Si A est strictement affinoïde, $\Gamma(X)$ est l'image réciproque par l'application de réduction r_A : $\mathscr{M}(A) \to \mathrm{Spf}(A^\circ)$ de l'ensemble des points génériques (de la fibre spéciale) du schéma formel $\mathrm{Spf}(A^\circ)$.

- Quelle que soit l'extension non archimédienne K'/K, $\Gamma(X)$ est l'image de $\Gamma(X_{K'})$ par la projection canonique de $X_{K'} = \mathscr{M}(A\widehat{\otimes}_K K')$ sur X.

(1.1.8) La définition des espaces K-analytiques généraux par recollement d'espaces K-affinoïdes est présentée dans le premier chapitre de l'article [**2**]. Un espace K-analytique X est en particulier un espace topologique localement compact muni d'une famille distinguée de sous-espaces compacts, ses *domaines affinoïdes* ; tout point x de X possède un voisinage de la forme $V_1 \ldots V_n$, où $V_1, \ldots, V_n$ sont des domaines affinoïdes tels que $x \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$. L'ensemble sous-jacent à X possède en outre une topologie de Grothendieck ainsi définie :

– les objets, appelés *domaines analyiques*, sont les sous-espaces topologiques Y de X dont tout point y admet un voisinage de la forme $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, où $V_1, \ldots, V_n$ sont des domaines affinoïdes et $y \in V_1 \cap \ldots \cap V_n$;
– un recouvrement d'un domaine analytique Y par des domaines analytiques V_i est admissible s'il admet un raffinement $\{U_j\}$ tel que tout point y de Y admette un voisinage de la forme $U_1 \cup \ldots \cup U_n$ avec $y \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$.

On d'esigne par X_G le site défini par cette topologie de Grothendieck ; comme les ouverts de X (resp. les recouvrement ouverts) sont des domaines analytiques (resp. des recouvrements admissibles), on dispose naturellement d'un morphisme de sites $\Pi_X : X_G \to X$.

Le site X_G est en outre muni d'un *faisceau structural* en K-algèbres $\mathscr{O}_{X_G}$, dont les tiges en tout point de x sont des anneaux locaux et tel que, pour tout domaine affinoïde V de X, $\mathscr{O}_X(V)$ soit la K-agèbre affinoïde de V. On désigne par $\mathscr{O}_X$ le faisceau $(\Pi_X)_*\mathscr{O}_{X_G}$ sur l'espace topologique (sous-jacent à) X, qui en fait un espace K-localement annelé. Pour tout point x de X, le corps résiduel de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ est canoniquement muni d'une valeur absolue prolongeant celle de K et l'on note $\mathscr{H}(x)$ le corps non archimédien obtenu par complétion.

(1.1.9) À tout K-schéma localement algébrique X est naturellement associé un espace K-analytique, de la manière suivante : le foncteur Φ_X de la catégorie des espaces K-analytiques dans celle des ensembles, qui à un espace K-analytique Y fait correspondre l'ensemble des morphismes d'espaces K-localement annelés de Y dans X, est représentable par un espace K-analytique X^{an} et un morphisme d'espaces K-localement annelés $\rho_X : X^{an} \to X$. L'espace X^{an} est *l'espace* K-*analytique* associé au K-schéma X. On trouvera au chapitre 3 du livre [**1**] la démonstration de cette assertion ainsi que les principales propriétés du foncteur $X \rightsquigarrow X^{an}$.

(1.1.10) L'article [**5**] contient la définition d'un foncteur « fibre générique » $\mathfrak{X} \rightsquigarrow \mathfrak{X}_\eta$ de la catégorie des K°-schémas formels localement de présentation finie dans celle des espaces K-analytiques. Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ est affine, $\mathscr{A} \otimes_{K^\circ} K$ est une algèbre K-affinoïde et $\mathfrak{X}_\eta = \mathscr{M}(\mathscr{A} \otimes_{K^\circ} K)$.

LEMME 1.1. — *Soient* K *un corps non archimédien et* $\mathfrak{X}$ *un* K°*-schéma formel plat et localement de présentation finie tel que l'espace* K*-analytique* $X = \mathfrak{X}_\eta$ *soit un espace* K*-affinoïde. Le bord de Shilov* $\Gamma(X)$ *est contenu dans l'image réciproque par l'application de réduction* $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}$ *de l'ensemble des points génériques (de la fibre spéciale) de* $\mathfrak{X}$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathfrak{X}$ soit affine, d'anneau $\mathscr{A}$. L'homomorphisme canonique $\mathscr{A} \to A = \mathscr{A} \otimes_{K^\circ} K$ est injectif, à valeurs dans sous-K°-algèbre A° de A et identifie cette dernière à la fermeture intégrale de $\mathscr{A}$ dans A ([**7**], paragraphes 6.1.2 et 6.4.3) ; le morphisme correspondant $p : \mathrm{Spf}(A^\circ) \to \mathrm{Spf}(\mathscr{A})$ est donc entier et dominant, et les points génériques de $\mathrm{Spf}(A^\circ)$ sont exactement les images réciproques des points génériques de $\mathrm{Spf}(\mathscr{A})$. Vu le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spf}(\mathrm{A}^\circ) \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{X} = \mathscr{M}(\mathrm{A}) \arrow[ur, "r_{\mathrm{A}}"] \arrow[r, "r_{\mathrm{Spf}(\mathscr{A})}"'] & \mathrm{Spf}(\mathscr{A}) \end{tikzcd}$$

nous obtenons dans ce cas l'identité entre $\Gamma(\mathrm{X})$ et l'image réciproque par $r_{\mathrm{Spf}(\mathscr{A})}$ de l'ensemble des points génériques de $\mathrm{Spf}(\mathscr{A})$.

Pour traiter le cas général, il suffit de considérer un recouvrement de type fini $\mathscr{U}$ de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines. Pour tout $\mathrm{U} \in \mathscr{U}$, $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathrm{U}) = \left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)_\eta$ est un domaine affinoïde de X dont le bord de Shilov est contenu dans le sous-espace fermé $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathfrak{X}_s^{(0)})$ de X d'après ce qui précède. Désignant par A l'algèbre affinoïde de X,

$$\max_{\mathrm{X}} |f| = \max_{\mathrm{U}\in\mathscr{U}} \max_{r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathrm{U})} |f|$$

et donc

$$\max_{\mathrm{X}} |f| = \max_{r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathfrak{X}_s^{(0)})} |f|$$

pour tout élément f de A ; vu la définition du bord de Shilov de X rappelée précédemment, l'inclusion

$$\Gamma(X) \subset r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathfrak{X}_s^{(0)})$$

en découle immédiatement. □

1.2. Construction

Rappelons que l'on considère un corps k, muni de la valeur absolue triviale.

Il existe deux manières différentes d'associer un espace k-analytique à un k-schéma localement algébrique X.

- La première est celle rappelée ci-dessus (**1.1.9**).

- La seconde repose fondamentalement sur la trivialité de la valeur absolue de k : celle-ci permet en effet de voir X comme un schéma formel localement de présentation finie sur l'anneau k° $(= k)$, et l'on peut alors considérer sa fibre générique au sens de l'article [**3**] (voir **1.1.10**).

La seconde manière de procéder s'étend naturellement au cas d'un k-schéma formel localement algébrique, ce qui est réalisé dans l'article [**4**]. Nous reformulons cette construction dans ce qui suit.

(1.2.1) Étant donné un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$, on désigne par $\Psi_{\mathfrak{X}}$ le foncteur de la catégorie des espaces k-analytiques dans celle des ensembles, qui a tout espace k-analytique Y associe l'ensemble des morphismes *bornés* de sites k-localement annelés de Y_{G} dans $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire les morphismes f satisfaisant à la condition suivante : pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ et tout domaine affinoïde V de Y avec $f(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$, l'homomorphisme

$$f^\# : \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}_{\mathrm{G}}})$$

est tel que $||f^\#(a)|| \leq 1$ pour tout $a \in \mathrm{A}$.

Proposition et définition 1.2. — *Soit $\mathfrak{X}$ un k-schéma formel localement algébrique.*

*Le foncteur $\Psi_{\mathfrak{X}}$ est représentable par un espace k-analytique $\mathfrak{X}^{\beth}$ et un morphisme borné de sites k-localement annelés $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^{\beth}_{\mathrm{G}} \to \mathfrak{X}$. Cet espace k-analytique est l'*espace de Berkovich *de $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas d'un schéma affine $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et vérifions que le couple constitué de l'espace k-affinoïde $\mathscr{M}(\mathrm{A})$ – la k-algèbre A étant vue comme une k-algèbre de

Banach en la munissant de la norme triviale – et de l'application de réduction $r_{\mathrm{A}} : \mathscr{M}(\mathrm{A})_{\mathrm{G}} \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ représente le foncteur Ψ_{X}.

Si $\mathrm{Y} = \mathscr{M}(\mathrm{B})$ est un espace k-affinoïde, les morphismes bornés de sites k-localement annelés $f : \mathrm{Y}_{\mathrm{G}} \to \mathrm{X}$ sont en correspondance biunivoque avec les k-homomorphismes bornés $f^{\#} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ qui leur sont associés, et donc avec les morphismes d'espaces k-affinoïdes ${}^{a}(f^{\#}) : \mathscr{M}(\mathrm{B}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$; on dispose en outre pour tout f d'un diagramme commutatif (de morphismes bornés de sites k-localement annelés)

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}(\mathrm{B})_{\mathrm{G}} \arrow[r, "{}^{a}(f^{\#})"] \arrow[d, "r_{\mathrm{B}}"'] \arrow[dr, "f"] & \mathscr{M}(\mathrm{A})_{\mathrm{G}} \arrow[d, "r_{\mathrm{A}}"] \\ \mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \arrow[r, "{}^{a}(f^{\#})"'] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

et l'on obtient ainsi que le couple $(\mathscr{M}(\mathrm{A}), r_{\mathrm{A}})$ représente la restriction du foncteur $\Psi_{\mathrm{Spec(A)}}$ à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{An}_k$ dont les objets sont les espaces k-affinoïdes.

Quel que soit l'espace k-analytique Y et le morphisme borné de sites k-localement annelés f : $\mathrm{Y}_{\mathrm{G}} \to \mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, on dispose d'une famille compatible de k-homomorphismes bornés $f^{\#}_{\mathrm{V}/\mathrm{X}} : \mathrm{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{V})$ pour tout domaine k-affinoïde V dans Y. On en déduit une famille de morphismes d'espaces k-affinoïdes ${}^{a}(f^{\#}_{\mathrm{V}/\mathrm{X}}) : \mathrm{V} \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$ tels que $f = r_{\mathrm{A}} \circ {}^{a}(f^{\#}_{\mathrm{V}/\mathrm{X}})_{\mathrm{G}}$, et ces derniers se recollent en un morphisme d'espaces k-analytiques $f^{\sqsupset} : \mathrm{Y} \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$ tel que $f = r_{\mathrm{A}} \circ f^{\sqsupset}_{\mathrm{G}}$. Posant $\mathrm{X}^{\sqsupset} = \mathscr{M}(\mathrm{A})$ et $r_{\mathrm{X}} = r_{\mathrm{A}}$, on établit ainsi que le couple $(\mathrm{X}^{\sqsupset}, r_{\mathrm{X}})$ représente le foncteur Ψ_{X} lorsque $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est un k-schéma affine.

Considérant toujours $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, soit Y un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal $\mathfrak{I}$ de A ; on pose $\widehat{A} = \varprojlim(\mathrm{A}/\mathfrak{I}^n)$ et on s'intéresse au k-schéma formel affine $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{A}})$. Rappelant que l'on voit X comme un schéma formel en munissant A de la topologie discrète, l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \widehat{\mathrm{A}}$ définit une flèche $j : \mathfrak{X} \to \mathrm{X}$ dans $(\mathbf{SchAlg}_k)^{\wedge}$, laquelle donne naissance à un morphisme de foncteurs $\Psi_{\mathfrak{X}} \to \Psi_{\mathrm{X}}$. En vertu de la première partie de cette démonstration, le foncteur Ψ_{X} est représenté par l'espace k-affinoïde $\mathrm{X}^{\sqsupset}$ et le morphisme $r_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}^{\sqsupset}_{\mathrm{G}} \to \mathrm{X}$. Étant donné un espace k-affinoïde $\mathrm{Y} = \mathscr{M}(\mathrm{B})$ et un morphisme d'espaces k-analytiques $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}^{\sqsupset}$ défini par un homomorphisme borné $f^{\#} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, l'image de f est contenue dans l'ouvert

$$r_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{Y}) = \{x \in \mathrm{X}^{\sqsupset} \mid |a|(x) < 1,\ a \in \mathfrak{I}\}$$

si et seulement si

$$|f^{\#}(a)|_{\mathrm{sp}} = \max_{\mathrm{X}} |f^{\#}(a)| < 1$$

pour tout $a \in \mathfrak{I}$ ou, de manière équivalente, si et seulement si, pour tout $a \in \mathfrak{I}$, la suite des puissances de l'élément $f^{\#}(a)$ de B tend vers 0 (voir [**1**], proposition 2.1.4). Il revient au même de dire que l'homomorphisme $f^{\#}$ est continu relativement à la topologie $\mathfrak{I}$-adique sur A car l'idéal $\mathfrak{I}$ est de type fini. Comme la sous-k-algèbre topologique B° de B est séparée et complète, les assertions

– l'image de f est contenue dans $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{Y})$;
– le k-homomorphisme $f^{\#} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ – qui est à valeurs dans B° – se prolonge, nécessairement de manière unique, en un homomorphisme continu de $\widehat{\mathrm{A}}$ dans B° ;

sont équivalentes. Il en découle immédiatement que le foncteur $\Psi_{\mathfrak{X}}$ est représenté par l'espace k-analytique $\mathfrak{X}^{\sqsupset}$ induit par $\mathrm{X}^{\sqsupset}$ sur l'ouvert $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{Y})$ et par le morphisme borné de sites k-localement annelés $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^{\sqsupset} \to \mathfrak{X}$ obtenu en restreignant $r_{\mathfrak{X}}$.

Considérons finalement un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ quelconque. Étant donné un espace k-analytique Y, un morphisme borné de sites k-localement annelés $f : \mathrm{Y}_{\mathrm{G}} \to \mathfrak{X}$ induit pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ un morphisme borné de sites k-localement annelés $f_{\mathrm{U}} : f^{-1}(\mathrm{U})_{\mathrm{G}} \to \mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}$ (noter que $f^{-1}(\mathrm{U})$ est un domaine analytique dans Y) et il existe donc un unique morphisme d'espaces k-analytiques $f_{\mathrm{U}}^{\beth} : f^{-1}(\mathrm{U}) \to \left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)^{\beth}$ tel que $f_{\mathrm{U}} = r_{\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}} \circ f_{\mathrm{U}}^{\beth}$. Les conditions de recollement des schémas formels affines $\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}$ en le schéma formel $\mathfrak{X}$ donnent lieu à des conditions de recollement pour les espaces k-analytiques $\left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)^{\beth}$ qui sont compatibles avec les réductions : pour tous ouverts affines U, V de X tels que $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{V}}\right)^{\beth}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "i^{\beth}"] \arrow[d, "r_{\mathfrak{X}_{|\mathrm{V}}}"'] & \left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)^{\beth}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "r_{\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}}"] \\ \mathfrak{X}_{|\mathrm{V}} \arrow[r, "i"'] & \mathfrak{X}_{|\mathrm{U}} \end{tikzcd}$$

dans lequel i désigne l'immersion ouverte de $\mathfrak{X}_{|\mathrm{V}}$ dans $\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}$, est commutatif. Après recollement, on obtient donc un espace k-analytique $\mathfrak{X}^{\beth}$ – recouvert par les domaines analytiques $\left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)^{\beth}$ –, un morphisme bornés de sites k-localement annelés $r_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}^{\beth} \to \mathfrak{X}$ et un morphisme d'espaces k-analytiques $f^{\beth} : \mathrm{Y} \to \mathfrak{X}^{\beth}$, le triplet $(\mathfrak{X}^{\beth}, r_{\mathfrak{X}}, f^{\beth})$ étant uniquement déterminé par les conditions suivantes : pour tout ouvert affine U de X, $r_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathrm{U})$ est le domaine analytique $\left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)^{\beth}$ de $\mathfrak{X}^{\beth}$ et la restriction de $f^{\beth}$ (resp. r_{X}) à $f^{-1}(\mathrm{U})$ (resp. à $\left(\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}\right)^{\beth}_{\mathrm{G}}$) est le morphisme $f_{\mathrm{U}}^{\beth}$ (resp. $r_{\mathfrak{X}_{|\mathrm{U}}}$). L'identité $f = r_{\mathfrak{X}} \circ f_{\mathrm{G}}^{\beth}$ est évidente et il est facile de vérifier que l'application

$$\Psi_{\mathfrak{X}}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{An}_k}(\mathrm{Y}, \mathfrak{X}^{\beth}), \quad f \mapsto f^{\beth}$$

est une bijection. La démonstration est alors achevée. □

Il découle immédiatement du résultat précédent que, si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont deux k-schémas formels localement algébriques, tout k-morphisme de schémas formels $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ donne lieu à un morphisme d'espaces k-analytiques $f^{\beth} : \mathfrak{X}^{\beth} \to \mathfrak{Y}^{\beth}$ tel que le diagramme de morphismes de sites

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^{\beth}_{\mathrm{G}} \arrow[r, "f^{\beth}_{\mathrm{G}}"] \arrow[d, "r_{\mathfrak{X}}"'] & \mathrm{Y}^{\beth}_{\mathrm{G}} \arrow[d, "r_{\mathfrak{Y}}"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"'] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'identité

$$(g \circ f)^{\beth} = g^{\beth} \circ f^{\beth}$$

est évidente pour tous morphismes $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$, et l'on a donc défini un foncteur de la catégorie des k-schémas formels localement algébriques dans celle des espaces k-analytiques.

Remarque 1.3. — 1) Si X est un k-schéma localement algébrique, des éléments de comparaison entre les espaces analytiques X^{an} et $\mathrm{X}^{\beth}$ seront donnés un peu plus loin **(1.3.1)**. On peut toutefois d'ores et déjà remarquer que l'ensemble $\mathrm{X}^{\mathrm{an}}(\mathrm{K})$ des points des X^{an} est exactement l'ensemble $\mathrm{X}(\mathrm{K})$ des K-points de X tandis que $\mathrm{X}^{\beth}(\mathrm{K})$ est le sous-ensemble de $\mathrm{X}(\mathrm{K})$ formé des K-points $t : \mathrm{Spec}(\mathrm{K}) \to \mathrm{X}$ tels que, si t est localisé au point $x \in \mathrm{X}$ et U est un voisinage affine de x, l'homomorphisme $t^{\#} : \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to \mathrm{K}$ soit borné : $|t^{\#}(f)| \leq 1$ pour tout $f \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. De manière équivalente, $\mathrm{X}^{\beth}(\mathrm{K})$ est l'ensemble des K-points de X admettant un prolongement en un K°-point. En guise d'exemple : si $\mathrm{X} = \mathrm{A}_k^n$, l'ensemble sous-jacent à X^{an} est constitué de toutes les semi-normes multiplicatives sur $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ qui prolongent la valeur absolue de k tandis que celui sous-jacent à $\mathrm{X}^{\beth}$ est formé de toutes les semi-normes multiplicatives sur $k[\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_n]$ qui sont majorées par 1 (ces dernières prolongeant nécessairement la valeur absolue de k).

2) Considérons un corps non archimédien K ; quel que soit l'espace K-analytique Y, on désigne par $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^{\circ}$ le faisceau de K°-algèbres sur le site Y_{G} tel que, pour tout domaine analytique $\mathrm{V} \subset \mathrm{Y}$, $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}^{\circ}(\mathrm{V})$ soit l'ensemble des sections $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{V})$ vérifiant $|f(x)| \leq 1$ pour tout point $x \in \mathrm{V}$. Si maintenant $\mathfrak{X}$ est un

K°-schéma formel localement de présentation finie, la démonstration précédente s'adapte facilement pour établir que le foncteur $\Psi_{\mathfrak{X}}$ de la catégorie des espaces K-analytiques dans celle des ensembles, qui à un espace K-analytique Y fait correspondre l'ensemble des morphismes de sites localement K°-annelés $\mathfrak{X} \to (Y_G, \mathscr{O}_Y^\circ)$, est représentable. Cela fournit une autre description de l'espace K-analytique « fibre générique » de $\mathfrak{X}$ introduit dans l'article [**3**].

3) Comme cela a déjà été dit, la définition/proposition précédente est la reformulation, dans un cas particulier, de la construction par Berkovich d'une « fibre générique » pour une certaine classe de schémas formels ([**4**]). Le changement terminologique introduit se justifie par le désir de conserver à l'expression « fibre générique » une signification adéquate dans la situation ici considérée. $\diamond$

PROPOSITION 1.4. — *Considérons un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$.*

1. Si $\mathfrak{X}$ est le complété formel d'un k-schéma localement algébrique X *le long d'un sous-schéma fermé* Y *et si $j : \mathfrak{X} \to X$ est le morphisme canonique dans* $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$*, le morphisme $j^\sqsupset$ réalise un isomorphisme de $\mathfrak{X}^\sqsupset$ sur l'ouvert $r_X^{-1}(Y)$ de $X^\sqsupset$ et le diagramme de morphisme de sites k-annelés*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_G^\sqsupset \arrow[r, "j_G^\sqsupset"] \arrow[d, "r_{\mathfrak{X}}"'] & X^\sqsupset \arrow[d, "r_X"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

est commutatif.

2. Désignant par $i_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X}_s \hookrightarrow \mathfrak{X}$ l'immersion fermée canonique, le morphisme $i_{\mathfrak{X}}^\sqsupset : \mathfrak{X}_s^\sqsupset \to \mathfrak{X}^\sqsupset$ est une immersion fermée d'espaces k-analytiques.

Démonstration. 1. Cette assertion a été établie au cours de la démonstration de la proposition 1.2 lorsque le schéma X est affine et le cas général s'en déduit tout de suite en considérant un recouvrement de X par des ouverts affines.

2. On se ramène au cas du complété formel $\mathfrak{X}$ d'un *k*-schéma algébrique affine $X = \mathrm{Spec}(A)$ le long du fermé $Y = V(\mathfrak{I})$ définit par un idéal $\mathfrak{I}$ de A. La fibre spéciale de $\mathfrak{X}$ est le *k*-schéma algébrique Y et le composé des morphismes canoniques de *k*-schémas formels $Y = \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{X} \to X$ est l'immersion fermée définie par l'épimorphisme $p : A \to A/\mathfrak{I}$. Il en découle que le composé du morphisme $i_{\mathfrak{X}^\sqsupset} : \mathfrak{X}_s^\sqsupset \to \mathfrak{X}^\sqsupset$ par l'immersion ouverte $\mathfrak{X}^\sqsupset \to X^\sqsupset$ est le morphisme de $Y^\sqsupset = \mathscr{M}(A/\mathfrak{I})$ dans $X^\sqsupset = \mathscr{M}(A)$ défini par l'épimorphisme p ; c'est une immersion fermée d'espaces *k*-analytiques et il en est donc de même pour $i_{\mathfrak{X}}$. $\square$

PROPOSITION 1.5. — *Étant donné un k-schéma localement algébrique* X*, il existe un morphisme d'espaces localement k-annelés et un seul $\rho_X : X^\sqsupset \to X$ qui satisfasse à la condition suivante : quel que soit l'ouvert affine* U *de* X *la restriction du morphisme ρ_X au domaine affinoïde $U^\sqsupset$ est le morphisme $\rho_U U^\sqsupset \to U$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les morphismes d'espaces *k*-localement annelés $\rho_U : U^\sqsupset \to U \subset X$ associés aux ouverts affines de X se recollent, c'est-à-dire que, pour tous ouverts affines V, U de X tels que $V \subset U$, le diagramme naturel (dans la catégorie des espaces *k*-localement annelés)

$$\begin{tikzcd} V^\sqsupset \arrow[r, "i^\sqsupset"] \arrow[d, "\rho_V"'] & U^\sqsupset \arrow[d, "\rho_U"] \\ V \arrow[r, "i"'] & U \end{tikzcd}$$

est commutatif, i désignant l'immersion ouverte canonique. Tel est bien le cas car les morphismes d'espaces *k*-localement annelés $\rho_U \circ i^\sqsupset$ et $i \circ \rho_V$ de $V^\sqsupset$ dans U induisent le même homomorphisme de $\Gamma(U, \mathscr{O}_U) = \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ dans $\Gamma(Vb, \mathscr{O}_{V^\sqsupset}) = \Gamma(V, \mathscr{O}_V) = \Gamma(V, \mathscr{O}_X)$, à savoir l'homomorphisme de restriction. $\square$

(1.2.2) La seconde assertion de la proposition 1.4 conduit naturellement à la définition de la *fibre générique* d'un k-schéma formel localement algébrique.

DÉFINITION ET PROPOSITION 1.6. — *Étant donné un k-schéma formel localement algébrique* $\mathfrak{X}$, *sa* fibre générique *est l'espace k-analytique induit par* $\mathfrak{X}^{\beth}$ *sur l'ouvert* $\mathfrak{X}^{\beth} - \mathfrak{X}_s^{\beth}$ *; on la note* $\mathfrak{X}_\eta$.

Si $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{Y}$ *sont deux objets de* $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$ *et* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *est un morphisme* adique, $f^{\beth}(\mathfrak{X}_\eta) \subset \mathfrak{Y}_\eta$ *et l'on note* f_η *le morphisme induit de* $\mathfrak{X}_\eta$ *dans* $\mathfrak{Y}_\eta$.

On dispose ainsi d'un foncteur « fibre générique » de la catégorie $(\mathbf{SchAlg}_k)^{\mathrm{ad}}$ *– dont les objets sont les k-schémas formels localement algébriques et dont les flèches sont les k-morphismes adiques – dans la catégorie des espaces k-analytiques.*

Démonstration. Soient $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique entre deux objets de $(\mathbf{SchAlg}_k)^\wedge$ et $\mathfrak{I}$ un Idéal de définition de $\mathfrak{Y}$; comme $\mathfrak{J} = f^{-1}(\mathfrak{I})$ est, par hypothèse, un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, $f^{\beth}$ envoie l'ouvert $\mathfrak{X}_\eta = \mathfrak{X}^{\beth} - \mathrm{V}(\mathfrak{J})$ de $\mathfrak{X}^{\beth}$ dans l'ouvert $\mathfrak{Y}_\eta = \mathfrak{Y}^{\beth} - \mathrm{V}(\mathfrak{I})$ de $\mathfrak{Y}^{\beth}$. □

Remarque 1.7. — Au sens de la définition précédente, la fibre générique d'un k-schéma localement algébrique X est *vide*. ◇

1.3. Propriétés

(1.3.1) L'espace de Berkovich $\mathrm{X}^{\beth}$ d'un k-schéma localement algébrique X possède un certain nombre de propriétés élémentaires, regroupées dans la proposition suivante.

PROPOSITION 1.8. — *Soit* X *un k-schéma localement algébrique.*

1) *Pour tout* $x \in \mathrm{X}^{\beth}$, *le point* $r_{\mathrm{X}}(x)$ *de* X *est une spécialisation du point* $\rho_{\mathrm{X}}(x)$: $r_{\mathrm{X}}(x) \in \overline{\{\rho_{\mathrm{X}}(x)\}}$. *Réciproquement, étant donnés des points* ξ *et* ζ *dans* X *tels que* $\zeta \in \overline{\{\xi\}}$, *il existe un point x dans* $\mathrm{X}^{\beth}$ *tel que* $\rho_{\mathrm{X}}(x) = \xi$ *et* $r_{\mathrm{X}}(x) = \zeta$.

2) *Étant donné un ouvert affine* U *de* X, *tout point x de* $\rho_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U})$ *définit une semi-norme multiplicative sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, *bornée si et seulement si* $r_{\mathrm{X}}(x)$ *appartient à* U. *Le point x induit en outre une valeur absolue non archimédienne sur le corps* $\kappa(\rho_{\mathrm{X}}(x))$ *qui coïncide avec la valeur absolue triviale sur k. Le corps non archimédien* $\mathscr{H}(x)$ *est le complété de* $\kappa(\rho_{\mathrm{X}}(x))$ *pour cette valeur absolue.*

3) *Quel que soit le point* ξ *de* X, *l'intersection des fibres* $\rho_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ *et* $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ *est réduite à un point, noté* $\sigma(\xi)$ *auquel correspond la valeur absolue triviale sur le corps* $\kappa(\xi)$.

Tout point x de $\mathrm{X}^{\beth}$ *tel que la valeur absolue du corps non archimédien* $\mathscr{H}(x)$ *soit triviale est de la forme* $\sigma(\xi)$, $\xi \in \mathrm{X}$.

4) *Étant donné un point* ξ *dans* X, *le sous-espace topologique* $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ *de* $\mathrm{X}^{\beth}$ *est localement compact et son adhérence dans* $\mathrm{X}^{\beth}$ *est*

$$\bigcup_{\substack{\xi' \in \mathrm{X} \\ \xi' \to \xi}} r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi').$$

Démonstration. Il suffit de démontrer ces assertions lorsque le schéma X est affine, d'anneau A.

1) Puisque $\rho_{\mathrm{A}}(x) = \{f \in \mathrm{A} \mid |f|(x) = 0\} \subset r_{\mathrm{A}}(x) = \{f \in \mathrm{A} \mid |f|(x) < 1\}$, $r_{\mathrm{A}}(x)$ est, pour tout point x de $\mathrm{X}^{\beth} = \mathscr{M}(\mathrm{A})$, une spécialisation de $\rho_{\mathrm{A}}(x)$ dans $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$.

Considérons réciproquement deux points ξ, ζ dans X tels que $\zeta \in \overline{\{\xi\}}$ et désignons par Y le sous-schéma fermé intègre de X de point générique ξ. Comme ce schéma est noethérien, il existe un anneau de valuation discrète R et un morphisme $\mathrm{Spec}(\mathrm{R}) \to \mathrm{Y}$ envoyant le point générique sur ξ et le point fermé sur ζ ([**EGA**], Chap. II § 7, proposition (7.1.7)) ; munissant le corps des fractions K de R d'une valeur absolue associée à la valuation, le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ définit un point x dans $\mathrm{X}^{\beth}$ tel que $\rho_{\mathrm{X}}(x) = \xi$ et $r_{\mathrm{X}}(x) = \zeta$.

2) C'est immédiat.

3) Quel que soit le point x de $\mathrm{X}^{\beth}$, l'égalité $r_{\mathrm{X}}(x) = \rho_{\mathrm{X}}(x) = \xi$ est équivalente à la condition

$$(\forall f \in \mathrm{A}),\ \big((f(\xi) = 0) \Leftrightarrow (|f|(x) = 0) \Leftrightarrow (|f|(x) < 1)\big) ;$$

il y a donc, pour tout point $\xi \in \mathrm{X}$, un et un seul point dans $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi) \cap \rho_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$, à savoir celui défini par la semi-norme multiplicative sur A provenant, via l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \kappa(\xi)$, de la valeur absolue triviale sur le corps résiduel $\kappa(\xi)$ du point ξ.

Nous pouvons ainsi définir une application σ de X dans $\mathrm{X}^{\beth}$ en posant $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi) \cap \rho_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi) = \{\sigma(\xi)\}$ pour tout $\xi \in \mathrm{X}$. Il est clair que l'image de cette application est l'ensemble des points x de $\mathrm{X}^{\beth}$ tels que la valeur absolue du corps non archimédien $\mathscr{H}(x)$ soit triviale.

4) Ayant muni l'anneau $\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi}$ de la norme triviale, l'homomorphisme canonique $\mathrm{A} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi}$ donne lieu à une application continue et injective $\iota : \mathscr{M}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi}) \to \mathrm{X}^{\beth} = \mathscr{M}(\mathrm{A})$, dont l'image, on le vérifie facilement, est précisément le sous-espace

$$\bigcup_{\substack{\xi' \in \mathrm{X} \\ \xi' \to \xi}} r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi')$$

de $\mathrm{X}^{\beth}$. L'espace topologique $\mathscr{M}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi})$, étant le spectre d'un anneau de Banach commutatif, est compact ([**1**], théorème 1.2.1) ; il en découle que ι réalise un homéomorphisme sur son image, qui est en particulier un sous-espace fermé de $\mathrm{X}^{\beth}$. La compacité locale du sous-espace $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ de $\mathrm{X}^{\beth}$ est claire : il s'agit de l'image, par l'homéomorphisme ι, du sous-espace

$$\{x \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi} \mid |f(x)| < 1,\ f \in \mathfrak{m}_{\xi}\}$$

du compact $\mathscr{M}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi})$ et, l'idéal $\mathfrak{m}_{\xi}$ étant de type fini, ce sous-espace est ouvert, donc localement compact.

Pour établir que le sous-espace fermé

$$\bigcup_{\substack{\xi' \in \mathrm{X} \\ \xi' \to \xi}} r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi')$$

de $\mathrm{X}^{\beth}$ est l'adhérence de $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$, il reste à vérifier que tout fermé F de $\mathrm{X}^{\beth} = \mathscr{M}(\mathrm{A})$ contenant $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ contient également $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{U}_{\xi})$, où $\mathrm{U}_{\xi} = \{\xi' \in \mathrm{X} \mid \xi' \to \xi\}$ est l'ensemble des générisations de ξ dans X.

Comme F est l'intersection des domaines analytiques compacts le contenant, on est ramené au cas où F est un domaine analytique compact. Soit K une extension non archimédienne de k satisfaisant aux deux conditions suivantes :

– $\widetilde{\mathrm{K}} = k$;
– $\mathrm{F}_{\mathrm{K}} = p_{\mathrm{K}/k}^{-1}(\mathrm{F})$ est une réunion finie de domaines strictement K-affinoïdes de $\mathrm{X}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$, $p_{\mathrm{K}/k}$ désignant la projection canonique de $\mathrm{X}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ sur X.

L'espace K-analytique $\mathrm{X}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ est la fibre générique du K°-schéma formel affine, plat et de présentation finie

$$\mathfrak{X} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Spf}(k)} \mathrm{Spf}(\mathrm{K}^{\circ}) = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}^{\circ})$$

(**1.1.10**), dont la fibre spéciale est canoniquement isomorphe à X. D'après un théorème de M. Raynaud ([**10**], Theorem 1.5), il existe un éclatement admissible $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et un ouvert U de $\mathfrak{Y}$ tels que $\mathrm{F}_{\mathrm{K}} = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(\mathrm{U})$.

Désignant par U_{ζ} l'ensemble des générisations d'un point ζ de $\mathfrak{Y}$, il est facile de vérifier l'égalité

$$f_s^{-1}(\mathrm{U}_{\xi}) = \bigcup_{\zeta \in f_s^{-1}(\xi)} \mathrm{U}_{\zeta}.$$

L'inclusion $\supset$ est claire car, si V est un ouvert de X contenant le point ξ, $f_s^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de $\mathfrak{Y}_s$ contenant chacun des points de la fibre $f_s^{-1}(\xi)$. L'inclusion réciproque découle de la propreté du morphisme f_s : étant donnés une générisation ξ' de ξ dans X et un point ζ' dans $\mathfrak{Y}_s$ tel que $f_s(\zeta') = \xi'$, l'image par f_s du fermé $\overline{\{\zeta'\}}$ de $\mathfrak{Y}_s$ est un fermé de X contenant le point ξ' et donc également sa spécialisation ξ ; il existe ainsi un point ζ dans $f_s^{-1}(\xi)$ tel que $\zeta' \in \mathrm{U}_{\zeta}$.

La conclusion s'obtient maintenant aisément en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X^{\beth}\widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{r_{\mathfrak{Y}}} & \mathfrak{Y}_s \\ {\scriptstyle p_{K/k}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_s} \\ X^{\beth} & \xrightarrow[r_X]{} & X. \end{array}$$

Le fermé $F_K = p_{K/k}^{-1}(F)$ contient par hypothèse

$$p_{K/k}^{-1}(r_X^{-1}(\xi)) = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(f_s^{-1}(\xi))\ ;$$

comme il coïncide avec l'image réciproque de l'ouvert U de $\mathfrak{Y}_s$ par l'application de réduction $r_{\mathfrak{Y}}$, U contient donc la fibre de f_s au-dessus du point ξ et par conséquent l'ensemble

$$\bigcup_{\zeta\in f_s^{-1}(\xi)} U_\zeta$$

des générisations des points de celle-ci. Vu l'identité établie au paragraphe précédent, U contient ainsi $f_s^{-1}(U_\xi)$; on obtient par suite l'inclusion

$$p_{K/k}^{-1}(r_X^{-1}(U_\xi)) = r_{\mathfrak{Y}}^{-1}(f_s^{-1}(U_\xi)) \subset F_K,$$

puis

$$r_X^{-1}(U_\xi) \subset F.$$

La démonstration est achevée. □

Disons également un mot sur les relations entre les espaces k-analytiques X^{an} et $X^{\beth}$ associés à un k-schéma localement algébrique X.

PROPOSITION 1.9. — *Étant donné un k-schéma localement algébrique* X, *on désigne par* $i_X : X^{\beth} \to X^{an}$ *le morphisme d'espaces k-analytiques défini par le morphisme d'espaces k-localement annelés* $\rho_X : X^{\beth} \to X$.

1) *Pour tout ouvert affine* U *de* X, *la restriction de* i_X *au domaine affinoïde* $U^{\beth}$ *est un isomorphisme sur un domaine affinoïde de* X^{an}.

2) *Le morphisme* i_X *réalise un isomorphisme de* $X^{\beth}$ *sur un domaine analytique de* X^{an} *(resp. sur* X^{an}*) si et seulement si le k-schéma* X *est séparé (resp. propre).*

3) *Si* $f : X \to Y$ *est un morphisme de k-schémas localement algébriques, le diagramme naturel*

$$\begin{array}{ccc} X^{\beth} & \xrightarrow{i_X} & X^{an} \\ {\scriptstyle f^{\beth}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{an}} \\ Y^{\beth} & \xrightarrow[i_Y]{} & Y^{an} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. 1) Soient U un ouvert affine de X, d'anneau A, et choisissons une présentation $I \to k[T_1,\ldots,T_n] \to A$ de ce dernier. Le morphisme

$$i_{\mathbb{A}_k^n} : \mathbb{A}_k^{n,\,\beth} \to \mathbb{A}_k^{n,\,an}$$

réalise un isomorphisme de $\mathbb{A}_k^{n,\,\beth} = \mathscr{M}(k[T_1,\ldots,T_n])$ sur le domaine affinoïde $E(0,1) = \{|T_1| \leq 1,\ldots,|T_n| \leq 1\}$ de $\mathbb{A}_k^{n,\,an}$; comme $U^{\beth}$ (resp. U^{an}) est le sous-espace analytique de $\mathbb{A}_k^{n,\,\beth}$ (resp. $\mathbb{A}_k^{n,an}$) défini par l'idéal I et i_X est le morphisme induit par $i_{\mathbb{A}_k^n}$, il en découle que i_X réalise un isomorphisme de $U^{\beth}$ sur le domaine analytique $U^{an} \cap E(0,1)$. Ce dernier est donc en particulier un domaine affinoïde de X^{an}.

2) L'image de i_{X} est un domaine analytique de X^{an} et i_{X} réalise un isomorphisme de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur son image si et seulement l'application sous-jacente est injective.

Considérons des points x et y dans X^{an} et $\mathrm{X}^{\beth}$ respectivement et notons $\underline{x} : \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{X}$ et $\underline{y} : \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(y)^{\circ}) \to \mathrm{X}$ les morphismes qu'il définissent ; l'égalité $i_{\mathrm{X}}(y) = x$ a lieu si et seulement si $\mathscr{H}(x) = \mathscr{H}(y)$ et si le diagramme naturel

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(y)) \arrow[r, "\underline{x}"] \arrow[d] & \mathrm{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(y)^{\circ}) \arrow[ur, "\underline{y}"'] \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k) \end{tikzcd}$$

est commutatif. La conclusion découle donc d'une application directe du critère valuatif de séparation ([**EGA**], Chap. II § 7, proposition (7.2.3)) : si X est séparé (sur k), il existe au plus un point y dans $\mathrm{X}^{\beth}$ tel que $i_{\mathrm{X}}(y) = x$; réciproquement, si l'application i_{X} est injective, le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spec}(k)$ est séparé. Notons que, vu le premier point de la proposition précédente et la démonstration du critère valuatif de séparation, il est suffisant de considérer les anneaux de valuation $\mathscr{H}(y)^{\circ}, y \in \mathrm{X}^{\beth}$.

Utilisant le critère valuatif de propreté ([**EGA**], Chap. II § 7, théorème (7.3.8)), le même raisonnement permet de montrer que i_{X} réalise un isomorphisme de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur X^{an} si et seulement si le k-schéma X est propre.

3) Cette assertion est évidente. □

(1.3.2) La notion de fibre générique d'un k-schéma formel localement algébrique $\mathfrak{X}$ que nous avons introduite à la définition 1.6 a la propriété fondamentale d'être invariante relativement aux éclatements centrés dans la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$.

Proposition 1.10. — *Soient $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ un morphisme de k-schémas localement algébriques et* Y *un sous-schéma fermé de* X*. On désigne par $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}'$) le complété formel de* X *(resp.* X'*) le long de* Y *(resp. $f^{-1}(\mathrm{Y})$) et on note $\widehat{f} : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ le morphisme (adique) de k-schémas formels induit par f.*

Si le morphisme f est propre et s'il réalise un isomorphisme de l'ouvert $\mathrm{X}' - f^{-1}(\mathrm{Y})$ sur l'ouvert $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, le morphisme d'espaces k-analytiques $\widehat{f}_{\eta} : \mathfrak{X}'_{\eta} \to \mathfrak{X}_{\eta}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Il s'agit de prouver que le morphisme d'espaces k-analytiques $f^{\beth} : \mathrm{X}'^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$ induit un isomorphisme de l'ouvert $\mathfrak{X}'_{\eta} = r_{\mathrm{X}'}^{-1}(f^{-1}(\mathrm{Y})) - (f^{-1}(\mathrm{Y}))^{\beth}$ sur l'ouvert $\mathfrak{X}_{\eta} = r_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{Y}) - \mathrm{Y}^{\beth}$. On se ramène immédiatement au cas où le schéma X est affine, d'anneau A, et où $\mathrm{Y} = \mathrm{V}(g)$, $g \in \mathrm{A}$; nous procédons alors en deux étapes.

Première étape. — L'application sous-jacente au morphisme $\widehat{f}_{\eta}$ est bijective.

Considérons en effet un point x dans $\mathfrak{X}_{\eta}$ et désignons par $\underline{x} : \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)^{\circ}) \to \mathrm{X}$ le morphisme qu'il induit. L'appartenance de x à $\mathfrak{X}_{\eta}$ se traduit par la propriété suivante : le point fermé du schéma local $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)^{\circ})$ est envoyé dans le fermé Y de X tandis que l'image de son point générique appartient à l'ouvert $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$. Puisque le morphisme f réalise un isomorphisme de $\mathrm{X}' - f^{-1}(\mathrm{Y})$ sur $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, il existe un unique morphisme $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{X}'$ localisé dans $\mathrm{X}' - f^{-1}(\mathrm{Y})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{X}' \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)^{\circ}) \arrow[r, "\underline{x}"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

soit commutatif et, comme f est en outre propre, il existe alors un unique morphisme φ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)^{\circ})$ dans X' tel que $f \circ \varphi = \underline{x}$. Le morphisme φ définit un point x' dans $\mathrm{X}'^{\beth} - (f^{-1}(\mathrm{Y}))^{\beth}$ tel que $r_{\mathrm{X}'}(x') \in f^{-1}(\mathrm{Y})$ et $f^{\beth}(x') = x$ ou, de manière équivalente, un point x' dans $\mathfrak{X}'_{\eta}$ tel que $\widehat{f}_{\eta}(x') = x$. L'application sous-jacente au morphisme $\widehat{f}_{\eta}$ est ainsi bijective.

Notons explicitement le fait suivant, que nous venons de justifier et que l'on utilisera dans la suite de la démonstration. Étant donné un point x dans $\mathfrak{X}_\eta$, il existe un unique morphisme λ : $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{X}'$ localisé dans $\mathrm{X}' - f^{-1}(\mathrm{Y})$ tel que $f \circ \lambda = \underline{x}$; en outre, pour tout ouvert affine U de X' dans lequel λ est localisé, la semi-norme multiplicative sur $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}(\mathrm{U})$ définie par l'homomorphisme $\lambda^\# : \mathscr{O}_{\mathrm{X}'}(\mathrm{U}) \to \mathscr{H}(x)$ est *bornée*.

Seconde partie. — Nous allons maintenant établir l'assertion suivante : si V est un domaine affinoïde dans $\mathfrak{X}'_\eta$, $f^\sqsupset(\mathrm{V})$ est un domaine affinoïde dans $\mathfrak{X}_\eta$ et le morphisme induit $\mathrm{V} \to f^\sqsupset(\mathrm{V})$ est un isomorphisme. Jointe à la bijectivité de l'application sous-jacente, cette propriété garantit que le morphisme $\widehat{f_\eta}$ est un isomorphisme et la proposition sera donc démontrée.

On se ramène tout de suite au cas d'un domaine affinoïde V contenu dans $\mathrm{U}^\sqsupset$, U étant un ouvert affine de $\mathrm{X}'^\sqsupset$, d'anneau A'. Désignons par A'_V l'algèbre affinoïde de V, par α le k-homomorphisme de A dans A'_V obtenu en composant $f^\# : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ par l'homomorphisme canonique $\mathrm{A}' \to \mathrm{A}'_\mathrm{V}$ et notons h_V $\big($resp. $h_{f^\sqsupset(\mathrm{V})}\big)$ le foncteur de la catégorie des algèbres k-affinoïdes dans celle des ensembles, qui à une algèbre B associe l'ensemble des morphismes $\mathscr{M}(\mathrm{B}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A}')$ (resp. $\mathscr{M}(\mathrm{B}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$) dont l'image est contenue dans V $\big($resp. dans $f^\sqsupset(\mathrm{V})\big)$. Le résultat que nous devons démontrer est équivalent à chacune des assertions suivantes :

– le couple $(\mathrm{A}'_\mathrm{V}, \beta)$ représente le foncteur $h_{f^\sqsupset(\mathrm{V})}$;

– le morphisme de foncteurs $h_\mathrm{V} \to h_{f^\sqsupset(\mathrm{V})}$ induit par $f^\# : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ est un isomorphisme.

Soient B une algèbre k-affinoïde et $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un k-homomorphisme borné tel que l'image du morphisme correspondant ${}^a\varphi : \mathscr{M}(\mathrm{B}) \to \mathscr{M}(\mathrm{A})$ soit contenue dans $f^\sqsupset(\mathrm{V})$. Puisque $f^\sqsupset(\mathrm{V})$ est inclus dans l'ouvert $\mathfrak{X}_\eta = \{x \in \mathscr{M}(\mathrm{A}) \mid 0 < |g|(x) < 1\}$ de $\mathrm{X}^\sqsupset = \mathscr{M}(\mathrm{A})$, $0 < |\varphi(g)|(y) < 1$ pour tout point y de $\mathscr{M}(\mathrm{B})$; en particulier, $\varphi(g)$ est un élément inversible de B et φ se factorise donc à travers l'homomorphisme $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_g$. Posant $g' = f^\#(g)$, l'homomorphisme $f^\# : \mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ induit par hypothèse un isomorphisme de A_g sur $\mathrm{A}'_{g'}$; il existe donc un k-homomorphisme et un seul $\psi : \mathrm{A}' \to \mathrm{B}$ tel que $\psi \circ f^\# = \varphi$. Quel que soit le point y de $\mathscr{M}(\mathrm{B})$, le morphisme $\lambda : \mathrm{Spec}(\mathscr{H}(y)) \to \mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}')$ déduit de ψ est localisé dans l'ouvert $\mathrm{U} - \mathrm{V}(g') = \mathrm{U} \cap (\mathrm{X}' - f^{-1}(\mathrm{Y}))$ et $f \circ \lambda$ est le morphisme défini par le point $\varphi(y)$ de $\mathscr{M}(\mathrm{A})$; d'après la remarque concluant la première étape, le morphisme λ est *borné* et l'on a ainsi $|\psi(f)|(y) \leq 1$ pour tous $f \in \mathrm{A}'$ et $y \in \mathscr{M}(\mathrm{B})$. Ceci implique l'existence d'un nombre réel strictement positif C tel que $||\psi(f)||_\mathrm{B} \leq \mathrm{C}$ pour tout $f \in \mathrm{A}'$ ([**1**], proposition 2.1.4) : le k-homomorphisme ψ est *borné*.

Nous venons de prouver que, pour toute algèbre k-affinoïde B, l'application

$$h_\mathrm{V}(\mathrm{B}) \to h_{f^\sqsupset(\mathrm{V})}(\mathrm{B}),\ \varphi \mapsto \varphi \circ f^\#,$$

est une bijection. Le morphisme de foncteurs $h_\mathrm{V} \to h_{f^\sqsupset(\mathrm{V})}$ induit par $f^\#$ est donc un isomorphisme, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 1.11. — Voici une démonstration plus courte de la proposition précédente. S'étant ramené au cas où le schéma X est affine, observons que le schéma X' est séparé car le morphisme f est propre – donc séparé. En vertu de la proposition 1.9, on dispose dans ces conditions d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}'^\sqsupset \arrow[r, "i_{\mathrm{X}'}"] \arrow[d, "f^\sqsupset"'] & \mathrm{X}'^{\mathrm{an}} \arrow[d, "f^{\mathrm{an}}"] \\ \mathrm{X}^\sqsupset \arrow[r, "i_\mathrm{X}"'] & \mathrm{X}^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

et les morphismes i_X, $i_{\mathrm{X}'}$ réalisent des isomorphismes sur leurs images. Comme f induit un isomorphisme de $\Omega' = \mathrm{X}' - f^{-1}(\mathrm{Y})$ sur $\Omega = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$, f^{an} induit un isomorphisme de l'ouvert

$$\Omega'^{\mathrm{an}} = \mathrm{X}'^{\mathrm{an}} - (f^{-1}(\mathrm{Y}))^{\mathrm{an}} = \mathrm{X}'^{\mathrm{an}} - (f^{\mathrm{an}})^{-1}(\mathrm{Y}^{\mathrm{an}})$$

sur

$$\Omega^{\mathrm{an}} = \mathrm{X}^{\mathrm{an}} - \mathrm{Y}^{\mathrm{an}}$$

et il en découle que $f^{\beth}$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{X}'_\eta = r_{\mathrm{X}'}^{-1}(f^{-1}(\mathrm{Y})) \cap \Omega'^{\mathrm{an}}$ sur son image dans $\mathfrak{X}_\eta = r_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{Y}) \cap \Omega^{\mathrm{an}}$.

Il reste à s'assurer de la surjectivité de $f^{\beth}$, qui découle de la propreté du morphisme f (cf. première étape de la démonstration précédente). $\diamond$

(1.3.3) Nous achevons ce premier chapitre en établissant deux résultats plus techniques dont nous aurons à nous servir ultérieurement.

PROPOSITION 1.12. — *Soient* X, Y *deux k-schémas localement algébriques et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme quasi-fini et plat.*

1) *Soit* $\mathrm{D} \subset \mathrm{Y}^{\beth}$ *un domaine affinoïde. Si* $\mathrm{E} = (f^{\beth})^{-1}(\mathrm{D}) \subset \mathrm{X}^{\beth}$ *est un domaine affinoïde,*

$$\Gamma(\mathrm{E}) \subset (f^{\beth})^{-1}(\Gamma(\mathrm{D})).$$

2) *Quel que soit le point* ξ *de* X, *le morphisme d'espaces k-analytiques* $f^{\beth} : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{Y}^{\beth}$ *induit une application du sous-espace topologique* $r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ *dans le sous-espace topologique* $r_{\mathrm{Y}}^{-1}(f(\xi))$ *qui est surjective, ouverte, propre et à fibres finies.*

Démonstration. Il suffit de démontrer ces assertions lorsque X et Y sont quasi-compacts.

1) Soit K une extension non archimédienne de k dont la valeur absolue est non triviale et telle que $\mathrm{D}_{\mathrm{K}} = \mathrm{D} \otimes_k \mathrm{K}$ et $\mathrm{E}_{\mathrm{K}} = \mathrm{E} \otimes_k \mathrm{K}$ soient des espaces strictement K-affinoïdes. Les espaces K-analytiques $\mathrm{X}^{\beth}_{\mathrm{K}} = \mathrm{X}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ et $\mathrm{Y}^{\beth}_{\mathrm{K}} = \mathrm{Y}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ sont les fibres génériques (au sens de Berkovich, [**3**]) des K°-schémas formels de présentation finie $\mathfrak{X} = \mathrm{X}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}^\circ$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Y}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}^\circ$ respectivement et l'on note $f^{\beth}_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}^{\beth}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{Y}^{\beth}_{\mathrm{K}}$ et $f_{\mathrm{K}^\circ} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ les morphismes induits par f.

En vertu d'un théorème de Raynaud ([**10**], Theorem 1.5), il existe un éclatement admissible $\mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ ainsi qu'un ouvert affine V de $\mathfrak{Y}$ tel que D_{K} soit l'image réciproque de V par l'application de réduction $r_{\mathrm{Y}'} : \mathrm{Y}^{\beth}_{\mathrm{K}} = \mathfrak{Y}_\eta \to \mathfrak{Y}$. On note $f'_{\mathrm{K}^\circ} : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ le morphisme déduit de f_{K° par le changement de base $\mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$. Tout comme f, f_{K° et f'_{K° sont des morphismes quasi-finis et plats.

Le domaine K-affinoïde $\mathrm{E}_{\mathrm{K}} = (f^{\beth})^{-1}(\mathrm{E})\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ de $\mathrm{X}^{\beth}_{\mathrm{K}}$ est l'image réciproque de D_{K} par $f^{\beth}_{\mathrm{K}}$; vu le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}^{\beth}_{\mathrm{K}} \arrow[r, "r_{\mathfrak{X}'}"] \arrow[d, "f^{\beth}_{\mathrm{K}}"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "f'_{\mathrm{K}^\circ}"] \\
\mathrm{Y}^{\beth}_{\mathrm{K}} \arrow[r, "r_{\mathfrak{Y}'}"'] & \mathfrak{Y}' ,
\end{tikzcd}$$

c'est donc également l'image réciproque par l'application de réduction $r_{\mathfrak{X}'}$ de l'ouvert $\mathrm{U} = (f'_{\mathrm{K}^\circ})^{-1}(\mathrm{V})$ du schéma formel $\mathfrak{Y}'$.

Le morphisme f'_{K° étant quasi-fini et plat, l'ensemble $\mathfrak{U}_s^{(0)}$ des points génériques de la fibre spéciale du schéma formel $\mathfrak{U} = \mathfrak{X}'_{|\mathrm{U}}$ est l'image réciproque de l'ensemble $\mathfrak{V}_s^{(0)}$ des points génériques de la fibre spéciale du schéma formel $\mathfrak{V} = \mathfrak{Y}'_{|\mathrm{V}}$. On a donc :

$$\Gamma(\mathrm{E}_{\mathrm{K}}) \subset r_{\mathfrak{X}'}^{-1}(\mathfrak{U}_s^{(0)}) = (f^{\beth}_{\mathrm{K}})^{-1}(r_{\mathfrak{Y}'}^{-1}(\mathfrak{V}_s^{(0)})) = \Gamma(\mathrm{D}_{\mathrm{K}})$$

et la conclusion vient de ce que $\Gamma(\mathrm{D})$ (resp. $\Gamma(\mathrm{E})$) est l'image de $\Gamma(\mathrm{D}_{\mathrm{K}})$ (resp. $\Gamma(\mathrm{E}_{\mathrm{K}})$) par la projection canonique de D_{K} (resp. E_{K}) sur D (resp. E).

2) Le schéma Y étant noethérien et le morphisme f étant de type fini, nous pouvons recourir au chapitre III § 4 de [**EGA**] et appliquer le corollaire (4.4.5) du théorème (4.4.3) (« Main Theorem » de Zariski) : il existe un voisinage ouvert de ξ dans X qui est isomorphe à une partie ouverte d'un Y-schéma fini sur Y. Il est donc loisible, pour démontrer la seconde assertion de la proposition, de supposer que le morphisme f est *fini* ; on peut également remplacer X et Y par des voisinages affines de ξ et $f(\xi)$ respectivement. Sous ces conditions, le morphisme $f^{\beth} : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{Y}^{\beth}$ est fini et plat en vertu de la proposition 3.2.1 de [**2**] et l'application continue sous-jacente est donc ouverte (proposition

3.2.7 du même article), à fibres finies et surjective ([**1**], corollaire 2.1.16). Elle est évidemment propre puisque les espaces topologiques $X^{\beth}$ et $Y^{\beth}$ sont compacts.

L'image réciproque du sous-espace $r_Y^{-1}(f(\xi))$ par $f^{\beth}$ est la réunion des $r_X^{-1}(\xi')$, ξ' parcourant l'ensemble des points de la fibre de f au-dessus de $f(\xi)$. La topologie induite sur l'image réciproque Ω de $r_X^{-1}(f(\xi))$ par $f^{\beth}$ fait de chacun de ces sous-ensembles une partie ouverte et fermée : en effet, quel que soit le point ξ' dans $f^{-1}(f(\xi))$, les sous-espaces

$$\bigcup_{\substack{\zeta \in X \\ \zeta \to \xi'}} r_X^{-1}(\zeta) \quad \text{et} \quad \bigcup_{\substack{\zeta \in X \\ \xi' \to \zeta}} r_X^{-1}(\zeta)$$

de $X^{\beth}$ sont respectivement fermés (proposition 1.8) et ouverts (anti-continuité de r_X) et tous deux ont pour trace $r_X^{-1}(\xi')$ sur Ω. L'application continue de $r_X^{-1}(\xi)$ dans $r_Y^{-1}(f(\xi))$ induite par $f^{\beth}$ est donc ouverte et à fibres finies ; elle est également propre puisque les adhérences de $r_X^{-1}(\xi)$ et $r_Y^{-1}(f(\xi))$ sont des sous-espaces compacts de $X^{\beth}$ et $Y^{\beth}$.

Pour établir la surjectivité de cette application, il suffit de savoir que l'homomorphisme $f_\xi^{\#}$: $\mathscr{O}_{Y,f(\xi)} \to \mathscr{O}_{X,\xi}$ induit un homomorphisme *fini* après passage aux complétés ([**EGA**], Chap. II § 6, proposition (6.2.1) et Chap. I § 0, 7.4). Soit en effet un point y dans $Y^{\beth}$ tel que $r_Y(y) = f(\xi)$ et notons $\chi_y : \mathscr{O}_{Y,f(\xi)} \to \mathscr{H}(y)$ l'homomorphisme qui lui est associé ; celui-ci est à valeurs dans l'anneau $\mathscr{H}(y)^\circ$ des entiers du corps non archimédien $\mathscr{H}(y)$ et l'homomorphisme $\chi_Y : \mathscr{O}_{Y,f(\xi)} \to \mathscr{H}(y)^\circ$ est local, donc se prolonge au complété $\mathfrak{m}_{f(\xi)}$-adique de $\mathscr{O}_{Y,f(\xi)}$. L'anneau $\widehat{\mathscr{O}_{X,\xi}} \otimes_{\widehat{\mathscr{O}_{Y,f(\xi)}}} \mathscr{H}(y)$ est une $\mathscr{H}(y)$-algèbre finie et non nulle ; si K est le corps résiduel de l'un des ses idéaux maximaux, il existe un unique prolongement de la valeur absolue de $\mathscr{H}(y)$ à K et, comme f induit un morphisme propre $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_{X,\xi}}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{\mathscr{O}_{Y,f(\xi)}})$, il existe un (unique) homomorphisme local $\chi'_y : \widehat{\mathscr{O}_{X,\xi}} \to K^\circ$ tel que $\chi'_y \circ f_\xi^{\#} = \chi_y$. La semi-norme multiplicative induite par χ'_y sur $\mathscr{O}_{X,\xi}$ est bornée et elle définit un point x dans $X^{\beth}$ tel que $r_X(x) = \xi$ et $f^{\beth}(x) = y$. □

2. L'ESPACE DE BERKOVICH D'UNE VARIÉTÉ TORIQUE

Dans ce chapitre, k est un corps que l'on voit comme un corps non archimédien en le munissant de la valeur absolue triviale. On considère un k-tore déployé T, de groupe des caractères $M = \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Gr}}(T, \mathbb{G}\mathrm{m})$, et une k-variété torique X, c'est-à-dire un k-schéma algébrique intègre muni d'une action de T et possédant une orbite ouverte.

Les orbites de T dans X sont des sous-schémas intègres localement fermés dont les points génériques forment un sous-ensemble de X noté $\Xi(X)$. Si x est un point de X, on désigne par $O(x)$ l'orbite de T dans X contenant x.

Pour tout caractère $m : T \to \mathbb{G}\mathrm{m}_k = \mathrm{Spec}(k[S, S^{-1}])$, on pose $\chi_m = m^{\#}(S)$.

Une structure de *cône rationnel* sur un espace topologique C est par définition la donnée d'un groupe abélien libre de type fini L et d'un homomorphisme injectif $\lambda : L \to C^0(C, \mathbb{R}_{>0})$ tel que l'application tautologique

$$\lambda^\vee : C \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(C, \mathbb{R}_{>0})$$

réalise un homéomorphisme sur un sous-cône rationnel de l'espace vectoriel réel $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{R}_{>0})$, c'est-à-dire une partie de la forme $\{u \mid u(\ell_1) \leq 1, \ldots, u(\ell_n) \leq 1\}$, $\ell_1, \ldots, \ell_n \in L$ (notation multiplicative).

On dira que C est *strictement convexe* si $\lambda^\vee(C)$ ne contient aucune droite. Sous cette condition, il existe un semi-groupe de type fini $S \subset L$ engendrant L et tel que l'application $\lambda^\vee$ réalise un homéomorphisme de C sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\S,]0,1])$ des morphismes de monoïdes unitaires de § dans $]0,1]$ muni de la topologie engendrée par les évaluations $(u \mapsto u(s))$, $s \in S$. La *compactification* *canonique* de C est par définition l'immersion ouverte

$$\mathrm{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathrm{S},]0,1]) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(\mathrm{S}, [0,1]).$$

2.1. L'éventail d'une k-variété torique et sa compactification

(2.1.1) L'action de T sur X donne naissance à une action du k-groupe analytique $\mathrm{T}^{\beth}$ sur $\mathrm{X}^{\beth}$. Le groupe $\mathrm{T}^{\beth}(k) = \mathrm{T}(k)$ des k-points de $\mathrm{T}^{\beth}$ opère par automorphismes sur l'espace k-analytique $\mathrm{X}^{\beth}$ et l'on dispose en outre d'un endomorphisme remarquable $\mathbf{p}$ de l'ensemble sous-jacent à X.

DÉFINITION 2.1. — *Étant donné un point x dans $\mathrm{X}^{\beth}$, $\mathbf{p}(x)$ est l'image par l'application canonique*

$$\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathscr{H}(x) = \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$$

de l'unique point de Shilov de l'espace $\mathscr{H}(x)$-affinoïde $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathscr{H}(x)$.

Remarque 2.2. — Soit K/k une extension non archimédienne.

1. L'espace K-affinoïde $\mathrm{E} = \mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ possède un unique point de Shilov car $\widetilde{E}$ est le $\widetilde{K}$-schéma intègre $\mathrm{T}\otimes_k\widetilde{\mathrm{K}}$.

2. Si $\alpha : \mathscr{M}(\mathrm{K}) \to \mathrm{X}^{\beth}$ est un morphisme localisé au point x de $\mathrm{X}^{\beth}$, $\mathbf{p}(x)$ est l'image du point de Shilov de $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ par le morphisme

$$\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K} = \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K}) \xrightarrow{1\times\alpha} \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth} \xrightarrow{m} \mathrm{X}^{\beth}$$

(où m est l'action de $\mathrm{T}^{\beth}$ sur $\mathrm{X}^{\beth}$). ◇

La continuité de l'application $\mathbf{p}$ sera établie un peu plus loin.

PROPOSITION 2.3. — (i) *L'application* $\mathbf{p}$ *satisfait à la condition* $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$ *; son image* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *est donc l'ensemble de ses points fixes :*

$$\mathfrak{S}(\mathrm{X}) = \{x \in \mathrm{X}^{\beth} \mid \mathbf{p}(x) = x\}.$$

ii) *Si un point x de* $\mathrm{X}^{\beth}$ *est fixé par* $\mathbf{p}$, *il est fixe sous l'action du groupe* $\mathrm{T}(k)$. *L'assertion réciproque est vraie dès que le corps k est infini.*

Démonstration. (i) Étant donné un point x de $\mathrm{X}^{\beth}$, considérons les points de Shilov respectifs y et z de $\mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ et $\mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ et notons α le morphisme canonique

$$\mathscr{M}(\mathscr{H}(\mathrm{z})) \to \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth}$$

défini par le point z. Nous allons vérifier que les morphismes $m\circ(m\times 1)\circ\alpha$ et $m\circ(1\times m)$įrcα de $\mathscr{M}(\mathscr{H}(\mathrm{z}))$ dans $\mathrm{X}^{\beth}$ sont localisés aux points $\mathbf{p}(x)$ et $\mathbf{p}^2(x)$ respectivement, de sorte que la conclusion découlera directement de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth} \arrow[r, "m\times 1"] \arrow[d, "1\times m"'] & \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth} \arrow[d, "m"] \\
\mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth} \arrow[r, "m"'] & \mathrm{X}^{\beth}.
\end{tikzcd}$$

Commençons par l'observation préliinaire suivante : quelle que soit l'extension non archimédienne K/k, le morphisme

$$m\times 1 : \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K}) \to \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K})$$

envoie le point de Shilov de $\mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K})$ sur celui de $\mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K})$ et, identifiant la fibre de la projection $\mathrm{pr}_{23} : \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K}) \to \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K})$ au-dessus du point de Shilov σ de $\mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathrm{K})$ avec $\mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(\sigma))$. En vertu de la caractérisation du bord de Shilov d'un espace strictement affinoïde rappelée en (**1.1.8**), il s'agit d'une reformulation des assertions analogues pour les points génériques des schémas intègres $\mathrm{T}\times\mathrm{T}\times\mathrm{Spec}(\widetilde{\mathrm{K}})$, $\mathrm{T}\times\mathrm{Spec}(\widetilde{\mathrm{K}})$ et $\mathrm{T}\times\mathrm{Spec}(\widetilde{\mathscr{H}(\sigma)})$.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration.

- D'après ce que l'on vient de dire, le morphisme $m \times 1$ envoie le point z de $\mathrm{T}^\beth \times \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth$ sur le point y de $\mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth$ et le morphisme $m \circ (m \times 1) \circ \alpha$ est donc localisé au point $\mathbf{p}(x)$ de $\mathrm{X}^\beth$.

- D'un autre côté, on sait également que le point z est envoyé sur y par la projection $\mathrm{pr}_{23} : \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \to \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth$ et qu'il s'identifie au point de Shilov de $\mathrm{pr}_{23}^{-1}(y) \simeq \mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(y))$. Vu le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^\beth \times \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "1\times m"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{23}"'] & \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\
\mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "m"'] & \mathrm{X}^\beth,
\end{tikzcd}$$

le morphisme $\mathrm{pr}_2 \circ (1 \times m) \circ \alpha$ est localisé au point $m(y) = \mathbf{p}(x)$ de $\mathrm{X}^\beth$ et $1 \times m$ envoie z sur le point de Shilov de $\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(\mathbf{p}(x)))$; le morphisme $m \circ (1 \times m) \circ \alpha$ est donc localisé au point $\mathbf{p}(\mathbf{p}(x))$ de $\mathrm{X}^\beth$.

(ii) Considérons un point x dans $\mathrm{X}^\beth$ et un élément t de $\mathrm{T}^\beth(k) = \mathrm{T}(k)$. L'automorphisme de $\mathrm{X}^\beth$ que définit t est la flèche

$$\underline{t} : \mathrm{X}^\beth = \mathscr{M}(k) \times \mathrm{X}^\beth \xrightarrow{t \times 1} \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \longrightarrow \mathrm{X}^\beth$$

et, désignant également par $\underline{t}$ l'automorphisme « multiplication par t » de $\mathrm{T}^\beth$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{t}\times 1"'] & \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\underline{t}\times 1"'] & \mathrm{X}^\beth \arrow[d, "\underline{t}"] \\
\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \arrow[r] & \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "m"'] & \mathrm{X}^\beth
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme l'automorphisme $\underline{t} \times 1$ de $\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ fixe nécessairement le point de Shilov de cet espace affinoïde, nous obtenons l'identité

$$\underline{t}(\mathbf{p}(x)) = \mathbf{p}(x)$$

et en déduisons que chacun des points de $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) = \mathbf{p}(\mathrm{X}^\beth)$ est fixé par le groupe $\mathrm{T}^\beth(k) = \mathrm{T}(k)$.

Supposons maintenant que le corps k soit infini et soit x un point de $\mathrm{X}^\beth$ fixé par le groupe $\mathrm{T}^\beth(k)$: l'application $\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \to \mathrm{X}^\beth$ envoie le sous-ensemble $\mathrm{T}^\beth(k) \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ sur le point x. Cette application étant continue et le point x étant fermé, tout point de $\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ adhérent à $\mathrm{T}^\beth(k) \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ a pour image x. Comme le corps k est infini, le sous-ensemble $\mathrm{T}(k) \times \operatorname{Spec}(\widetilde{\mathscr{H}(x)})$ de $\mathrm{T} \times \operatorname{Spec}(\widetilde{\mathscr{H}(x)})$ est dense et il découle alors du lemme suivant que le point de Shilov de $\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ est adhérent à $\mathrm{T}^\beth(k) \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$, ce qui implique l'égalité $\mathbf{p}(x) = x$. □

Lemme 2.4. — *Soient K/k une extension non archimédienne et Σ un sous-ensemble de $\mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$; si l'image de Σ par l'application de réduction $r : \mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K} \to \mathrm{T} \otimes_k \widetilde{\mathrm{K}}$ est dense, le point de Shilov de $\mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ est adhérent à Σ.*

Démonstration. Le point de Shilov y de $\mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ est l'unique point dont l'image par l'application de réduction r est le point générique ξ du $\widetilde{\mathrm{K}}$-schéma intègre $\mathrm{T} \otimes \widetilde{\mathrm{K}}$. Fixons un voisinage ouvert Ω de y ; lorsque U parcourt l'ensemble $\mathscr{U}$ des voisinages ouverts de ξ, les $r^{-1}(\mathrm{U})$ forment une famille de sous-espaces fermés de $\mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ d'intersection vide avec le compact $\mathrm{T} \widehat{\otimes}_k \mathrm{K} - \Omega$ et il existe donc $\mathrm{U} \in \mathscr{U}$ tel que $r^{-1}(\mathrm{U}) \subset \Omega$. Si le sous-ensemble $r(\Sigma)$ de $\mathrm{T} \otimes_k \widetilde{\mathrm{K}}$ est dense, $\Sigma \cap \Omega \neq \emptyset$ et le point de Shilov de $\mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ est adhérent à Σ. □

Quelle que soit l'extension non archimédienne K/k, le point de Shilov de l'espace K-affinoïde $\mathrm{T} \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ est l'unique élément de l'image réciproque du point générique du $\widetilde{\mathrm{K}}$-schéma intègre $\mathrm{T} \otimes_k \widetilde{\mathrm{K}}$ par l'application de réduction $\mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K} \to \mathrm{T} \otimes_k \mathrm{K}$. Cette observation suggère de considérer l'application

$p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, associant à un point $x \in \mathrm{X}$ l'image du point générique de $\mathrm{T} \otimes_k \kappa(x)$ par l'application canonique

$$\mathrm{T} \otimes_k \kappa(x) \to \mathrm{T} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}.$$

PROPOSITION 2.5. — 1. *L'application p est un endomorphisme de l'espace topologique sous-jacent à* X, *vérifiant $p^2 = p$.*

2. *Si x est un point de* X, *$p(x)$ est le point générique de l'orbite de* T *dans* X *contenant x.*

3, *Les diagrammes naturels*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "\mathbf{p}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathrm{X}^\beth \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd} \qquad \textit{et} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "\mathbf{p}"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{X}^\beth \arrow[d, "r"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Démonstration. 2. L'orbite d'un point x de X sous T est une partie localement fermée de X qui coïncide avec l'image du morphisme

$$\mathrm{T} \otimes_k \kappa(x) \longrightarrow \mathrm{T} \times \mathrm{X} \xrightarrow{m} \mathrm{X} \ ;$$

comme le schéma $\mathrm{T} \otimes_k \kappa(x)$ est irréductible, cette orbite est irréductible et $p(x)$ en est le point générique.

3. Fixons un point x dans $\mathrm{X}^\beth$. Identifiant $\mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth$ et $(\mathrm{T} \times \mathrm{X})^\beth$ via l'isomorphisme canonique $(\mathrm{T} \tilde{\times} \mathrm{X})^\beth \to \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathrm{X}^\beth \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{T} \times \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd} \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{X}^\beth \arrow[r, "m"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{X}^\beth \arrow[d, "r"] \\ \mathrm{T} \times \mathrm{X} \arrow[r, "m"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. On déduit du premier que ρ envoie le point de Shilov de $\mathrm{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x))$ - identifié à la fibre $\mathrm{pr}_2^{-1}(x)$ – sur le point générique de $\mathrm{T} \times \mathrm{Spec}(\kappa(\rho(x)))$, et du second découle alors l'égalité

$$p(\rho(x)) = \mathbf{p}(\rho(x)).$$

On prouve de même l'égalité $p(r(x)) = r(\mathbf{p}(x))$.

1. La continuité de l'application p se déduit facilement du point 2 : étant donné un fermé $\mathrm{F} \subset \mathrm{X}$, $p^{-1}(\mathrm{F})$ est la réunion des orbites $\mathrm{O}(\xi)$, $\xi \in \Xi(\mathrm{X}) \cap \mathrm{F}$; c'est également la réunion de leurs adhérences, et il s'agit donc bien d'un sous-ensemble fermé de X puisque l'ensemble $\Xi(\mathrm{X}) \cap \mathrm{F}$ est fini.

L'identité $p^2 = p$ se démontre de façon analogue à l'identité $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$ (proposition 2.3) ; elle s'en déduit d'ailleurs directement via le point 3, en vertu de la surjectivité de l'application ρ (ou de l'application de réduction r). □

COROLLAIRE 2.6. — *Pour tout point $\xi \in \Xi(\mathrm{X})$,*

$$\mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{O}(\xi)) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\xi) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\mathrm{O}(\xi)) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\xi).$$

Démonstration. Ce sont des conséquences directes des propositions 2.3 et 2.5 : si x est un point de $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ tel que $\rho(x)$ appartienne à l'orbite $\mathrm{O}(\xi)$, $x = \mathbf{p}(x)$ et $\rho(\mathbf{p}(x)) = p(\rho(x))$ est le point générique de celle-ci, c'est-à-dire ξ ; on prouve de même l'égalité $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\mathrm{O}(\xi)) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\xi)$. □

Remarque 2.7. — Le point de Shilov t_0 de $\mathrm{T}^\beth$ est « culminant » (*peaked*) au sens de Berkovich – quelle que soit l'extension non archimédienne K de k, la norme de la k-algèbre de Banach $\mathscr{H}(x) \widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ est multiplicative – et $\mathbf{p}$ est l'application

$$\mathrm{X}^\beth \to \mathrm{X}^\beth, \ \ x \mapsto t_0 * x$$

définie au paragraphe 5.2 de [**1**]. ◇

Nous allons maintenant décrire explicitement le sous-ensemble $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ de $\mathrm{X}^{\beth}$.

(2.1.2) Désignons par X_0 l'orbite ouverte de T dans X et soit V un ouvert affine invariant de X ; X_0 est contenue dans V et s'identifie à l'orbite ouverte de V vu comme variété torique sous T. Fixons une immersion ouverte équivariante $j : \mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{X}$; $j(\mathrm{T}) = \mathrm{X}_0$ et l'homomorphisme $j^{\#} : \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \to \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}}) = k[\mathrm{M}]$ identifie $\Gamma(V, \mathscr{O}_X)$ à l'algèbre $k[\mathrm{S}]$ d'un semi-groupe de type fini $\mathrm{S} \subset \mathrm{M}$ engendrant M. Notons que $j^{\#}$ réalise un isomorphisme du groupe $\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^{\times})$ sur le groupe $\Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_T^{\times}) = k^{\times}\mathrm{M}$, donc de $\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^{\times})/k^{\times}$ sur M, et que le semi-groupe S est l'image de $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \cap \Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^{\times})$. Observons enfin que, via $j^{\#}$, l'action de T sur V provient de l'homomorphisme

$$k[\mathrm{S}] \to k[\mathrm{S}] \otimes_k k[\mathrm{M}], \qquad \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m \mapsto \sum_{m \in S} a_m \chi_m \otimes \chi_m.$$

On désigne par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S}, [0,1])$ l'ensemble des morphismes de monoïdes unitaires de S dans $[0,1]$ – c'est-à-dire les applications $u : \mathrm{S} \to [0,1]$ telles que $u(s+s') = u(s)u(s')$ et $u(0) = 1$ –, muni de la topologie engendrée par les évaluations $(u \mapsto u(s))$ que définissent les éléments de S.

LEMME 2.8. — *L'application* $\mathbf{p}$ *stabilise le sous-ensemble* $\mathrm{V}^{\beth}$ *de* $\mathrm{X}^{\beth}$ *et, quel que soit le point* $x \in \mathrm{V}^{\beth}$, $\mathbf{p}(x)$ *est le point de* $\mathrm{V}^{\beth}$ *correspondant à la semi-norme multiplicative*

$$k[\mathrm{S}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_{m \in \mathrm{S}} |a_m| |\chi_m|(x).$$

Démonstration. La première assertion découle simplement de ce que l'action de $\mathrm{T}^{\beth}$ sur $\mathrm{X}^{\beth}$ stabilise $\mathrm{V}^{\beth}$. La seconde est de vérification immédiate : le point de Shilov de $\mathrm{T}^{\beth} \widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x) = \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)\{\mathrm{M}\})$ correspond à la semi-norme

$$\mathscr{H}(x)\{\mathrm{M}\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \sum_{m \in \mathrm{M}} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m|$$

et la semi-norme induite sur $k[\mathrm{S}]$ via l'homomorphisme

$$k[\mathrm{S}] \to k[S] \otimes_k k[\mathrm{M}] \to \mathscr{H}(x)\{\mathrm{M}\}, \ \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m \mapsto \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m(x) \chi_m,$$

qui correspond au point $\mathbf{p}(x)$ de $\mathrm{V}^{\beth}$, est donc :

$$k[\mathrm{S}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m \chi_m(x)| = \max_m |a_m| |\chi_m|(x).$$

□

PROPOSITION 2.9. — 1. *L'application* $\mathbf{p}$ *est continue ; il s'agit donc d'une rétraction de* $\mathrm{X}^{\beth}$ *sur le sous-espace fermé* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$.

2. *Pour tout élément u de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S}, [0,1])$, *l'application*

$$\mathrm{J}(u) : k[\mathrm{S}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_{m \in \mathrm{S}} |a_m| u(m)$$

est une semi-norme multiplicative bornée et l'application J *de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S}, [0,1])$ *dans* $\mathrm{V}^{\beth}$ *ainsi obtenue réalise un homéomorphisme sur le sous-espace fermé* $\mathfrak{S}(\mathrm{V}) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{V}^{\beth}$ *de* $\mathrm{V}^{\beth}$.

Démonstration. 1. Si $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ est un ouvert affine invariant et $f \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, la fonction réelle $|f| \circ \mathbf{p}$ sur $\mathrm{V}^{\beth}$ est continue en vertu du lemme précédent. La restriction de $\mathbf{p}$ au fermé $\mathrm{V}^{\beth}$ est donc continue et, puisque X est recouvert par des ouverts affines invariants, l'application $\mathbf{p}$ est continue. Comme l'espace topologique sous-jacent à $\mathrm{X}^{\beth}$ est séparé, l'ensemble $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ des points fixes de $\mathbf{p}$ est fermé et $\mathbf{p}$ est une rétraction de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ en vertu de l'identité $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}$.

2. La première assertion se vérifie facilement : étant donnée une application $u : \mathrm{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, l'application

$$\mathrm{J}(u) : k[\mathrm{S}] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \sum_{m \in \mathrm{S}} a_m \chi_m \mapsto \max_m |a_m| u(m)$$

est une semi-norme multiplicative si et seulement si $u(\mathrm{S}) \subset [0,1]$. L'application J de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},[0,1])$ ainsi définie est continue car, pour tout élément $f = \sum_{m\in\mathrm{S}} a_m\chi_m \in k[\mathrm{S}]$, la fonction réelle

$$u \mapsto \max_m |a_m| u(m)$$

sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},[0,1])$ est continue ; l'injectivité de J est évidente puisque $u(m) = |\chi_m|(\mathrm{J}(u))$ pour tout $m \in \mathrm{M}$ et il s'agit donc d'un homéomorphisme du compact $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},[0,1])$ sur son image dans $\mathrm{V}^{\beth}$. Le lemme précédent montre que celle-ci contient $\mathfrak{S}(\mathrm{V}) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{V}^{\beth}$, et il fournit également l'inclusion réciproque : pour tout $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},[0,1])$, $\mathbf{p}(\mathrm{J}(u))$ est le point de $\mathrm{V}^{\beth}$ correspondant à la semi-norme

$$k[\mathrm{S}] \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ \sum_{m\in\mathrm{S}} a_m\chi_m \mapsto \max_m |a_m||\chi_m|(\mathrm{J}(u)) = \max_m |a_m| u(m),$$

donc $\mathbf{p}(\mathrm{J}(u)) = \mathrm{J}(u)$ et $\mathrm{J}(u)$ est ainsi un point de $\mathfrak{S}(\mathrm{V})$. □

Posons $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{X}_0)$ et $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) = \mathfrak{S}(\mathrm{V}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{X}_0) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \cap \mathrm{V}^{\beth}$. L'application $\mathrm{J} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},[0,1]) \to \mathfrak{S}(\mathrm{V})$ introduite au point 2 de la proposition précédente réalise un homéomorphisme de l'ouvert $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},]0,1])$ sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ – car $\rho^{-1}(\mathrm{X}_0) \cap \mathrm{V}^{\beth}$ est précisément l'ouvert de $\mathrm{V}^{\beth}$ défini par les conditions $\chi_m \neq 0$, $m \in \mathrm{S}$ – et munit donc $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ d'une structure naturelle de cône rationnel strictement convexe. En vertu de la discussion précédant le lemme 2.8, cette structure est, de manière équivalente, définie par l'application canonique

$$\Gamma(\mathrm{X}_0, \mathscr{O}_X^\times)/k^\times \to \mathrm{C}^0(\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}), \mathbb{R}_{>0}),\quad f \mapsto |f|$$

et elle est donc indépendante du choix de l'immersion ouverte équivariante $j : \mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{X}$. Nous venons ainsi d'associer à tout ouvert affine invariant $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ un cône rationnel strictement convexe dont $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) = \mathfrak{S}(V) \cap \rho^{-1}(\mathrm{X}_0)$ est l'ensemble sous-jacent .

Proposition 2.10. — *Soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ *un ouvert affine invariant et rappelons que r désigne l'application de réduction* $\mathrm{V}^{\beth} \to \mathrm{V}$.

1. *Pour tout ouvert affine invariant* $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ *est une face du cône* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$*, d'ensemble sous-jacent* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap \mathrm{U}^{\beth}$*, et la correspondance* $\mathrm{U} \mapsto \mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ *réalise une bijection de l'ensemble des ouverts affines invariants de* V *sur l'ensemble des faces du cône* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$.

2. *La correspondance* $\xi \mapsto \mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap r^{-1}(\xi)$ *réalise une bijection de l'ensemble* $\Xi(\mathrm{V}) = \Xi(\mathrm{X}) \cap \mathrm{V}$ *des points génériques des orbites de* T *dans* V *sur l'ensemble des intérieurs des faces du cône* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$.

3. *L'intérieur de* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ *correspond à l'unique orbite fermée dans* V.

Démonstration. 1. Toute face F du cône $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},]0,1])$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},]0,1]) \mid u_{|\mathrm{P}_\mathrm{F}} = 1\},$$

où P_F est une partie de S contenant 0 et telle que

$$\big(\forall s, s' \in \mathrm{S},\ s + s' \in \mathrm{P}_\mathrm{F} \Longleftrightarrow s, s' \in \mathrm{P}_\mathrm{F}\big)\ ;$$

de plus, F s'identifie canoniquement au cône rationnel strictement convexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S}_\mathrm{F},]0,1])$, S_F étant le semi-groupe $\mathrm{S} - \mathrm{P}_\mathrm{F} \subset \mathrm{M}$, et la correspondance $\mathrm{F} \mapsto \mathrm{S}_\mathrm{F}$ réalise une bijection de l'ensemble des faces de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},]0,1])$ sur l'ensemble des semi-groupes de type fini dans M contenant S. Ces semi-groupes S' correspondent biunivoquement aux ouverts affines invariants $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, de telle sorte que le cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S}',]0,1])$; on obtient ainsi que la correspondance $\mathrm{U} \mapsto \mathfrak{S}_0(\mathrm{U}) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap \mathrm{U}^{\beth}$ réalise une bijection de l'ensemble des ouverts affines invariants de V sur l'ensemble des faces du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$.

2. Si F est une face du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},]0,1])$, le sous-schéma localement fermé et intègre O_F de V défini par l'annulation des sections χ_m, $m \in \mathrm{S} - \mathrm{P}_\mathrm{F}$, et l'inversibilité des sections χ_m, $m \in \mathrm{P}_\mathrm{F}$, est une orbite sous T dans V. Lorsque F parcourt l'ensemble des faces de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$, les O_F recouvrent V et toute orbite de T dansV est donc de cette forme. L'image réciproque de O_F par l'application de réduction r étant définie par les conditions $|\chi_m| < 1$, $m \in \mathrm{S} - \mathrm{P}_\mathrm{F}$, et $|\chi_m| = 1$, $m \in \mathrm{P}_\mathrm{F}$, $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap r^{-1}(\mathrm{O}_\mathrm{F})$

est précisément l'intérieur de la face F et, vu le corollaire 2.6, la correspondance $\xi \mapsto \mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap r^{-1}(\xi)$ réalise une bijection de l'ensemble $\Xi(\mathrm{V}) = \Xi(\mathrm{X}) \cap \mathrm{V}^{\beth}$ des points génériques des orbites de T dans V sur l'ensemble des intérieurs des faces du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$.

3. Si $\xi \in \Xi(\mathrm{V})$ est le point générique d'une orbite fermée de T dans V, $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap r^{-1}(\xi) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap r^{-1}(\mathrm{O}(\xi))$ est l'intérieur d'une face de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ et il s'agit d'une partie ouverte de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ en vertu de l'anti-continuité de r ; $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) \cap r^{-1}(\xi)$ est donc l'intérieur de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$, lequel correspond bien à une orbite fermée de T dans V, à savoir le point fermé défini par l'annulation de toutes les sections χ_m, $m \in \mathrm{S}$. Cela prouve que V contient une et une seule orbite fermée, laquelle est réduite à un point et correspond à l'intérieur du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$. □

Lorsque V parcourt l'ensemble des ouverts affines invariants de la variété torique X, les cônes rationnels strictement convexes $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ recouvrent l'ouvert $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ de $\mathfrak{S}(X)$ et, si U, V sont deux tels ouverts,

$$\mathfrak{S}_0(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{S}_0(\mathrm{V}) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \cap \mathrm{U}^{\beth} \cap \mathrm{V}^{\beth} = \mathfrak{S}_0(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$$

est une face commune des cônes $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ et $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$. Le sous-espace $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ de $\mathrm{X}^{\beth}$, muni de la collection des cônes rationnels strictement convexes $\mathfrak{S}_0(\mathrm{V})$ associés au ouverts affines invariants V de X, est ainsi une réalisation intrinsèque de l'*éventail* de la variété torique X dans son espace de Berkovich $\mathrm{X}^{\beth}$.

(2.1.3) Le sous-espace fermé $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ de $\mathrm{X}^{\beth}$ est l'adhérence de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ (dans $\mathrm{X}^{\beth}$) : en effet, comme $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ est l'image de l'ouvert dense $\rho^{-1}(\mathrm{X}_0)$ par l'application continue $\mathbf{p} : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$, $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) = \mathbf{p}(\mathrm{X}^{\beth})$ est contenu dans l'adhérence de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$, laquelle est trivialement contenue dans $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$.

PROPOSITION 2.11. — *Quel que soit l'ouvert affine invariant* U *de* X, $\mathfrak{S}(\mathrm{U}) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \mathrm{U}^{\beth}$ *est l'adhérence de* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ *dans* $\mathrm{X}^{\beth}$ *et l'immersion ouverte* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U}) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathrm{U})$ *est la compactification canonique du cône strictement convexe* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$.

Démonstration. On sait que $\mathfrak{S}(\mathrm{U})$ est l'adhérence de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ dans $\mathrm{U}^{\beth}$; comme $\mathrm{U}^{\beth}$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{X}^{\beth}$, c'est également son adhérence dans $\mathrm{X}^{\beth}$.

Si $\mathrm{S} \subset \mathrm{M}$ est le semi-groupe associé à U, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S}, [0,1]) \arrow[r] & \mathfrak{S}(\mathrm{U}) \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mon}}(\mathrm{S},]0,1]) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathfrak{S}_0(\mathrm{U}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont les inclusions canoniques et dont les flèches horizontales sont des homéomorphismes, celle du bas réalisant en outre un isomorphisme de cônes rationnels, et l'immersion $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U}) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathrm{U})$ est bien la compactification canonique du cône rationnel strictement convexe $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$. □

On voit ainsi que $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ n'est autre que la compactification canonique de l'éventail de la variété torique X.

La description du bord de $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ est aisée et reflète la stratification de X en orbites, cette fois à travers l'application ρ. Observons que, pour tout point $\xi \in \Xi(\mathrm{X})$, l'adhérence $\overline{\mathrm{O}(\xi)}$ de l'orbite $\mathrm{O}(\xi) \subset \mathrm{X}$ est une variété torique sous un quotient de T.

PROPOSITION 2.12. — *Le sous-espace fermé* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *de* $\mathrm{X}^{\beth}$ *est la réunion disjointe des éventails* $\mathfrak{S}_0(\overline{\mathrm{O}(\xi)})$ *des adhérences des orbites de* T *dans* X *:*

$$\mathfrak{S}(\mathrm{X}) = \bigcup_{\xi \in \Xi(\mathrm{X})} \mathfrak{S}_0(\overline{\mathrm{O}(\xi)}).$$

En outre, pour tout point ξ *dans* $\Xi(\mathrm{X})$, $\mathfrak{S}_0(\overline{\mathrm{O}(\xi)}) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{O}(\xi))$.

Démonstration. Étant donné un élément ξ de $\Xi(\mathrm{X})$, désignons par Y l'adhérence de l'orbite $\mathrm{O}(\xi)$ munie de la structure de sous-schéma fermé réduit de X et soit T′ le tore quotient de T tel que Y soit une variété torique sous T′. On dispose d'un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{Y}^{\beth} \arrow[r, "m_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "\pi\times\mathrm{id}"'] & \mathrm{Y}^{\beth} \\ \mathrm{T}'^{\beth} \times \mathrm{Y}^{\beth} \arrow[ur, "m_{\mathrm{Y}}"'] & \end{tikzcd}$$

où $\pi : \mathrm{T}^{\beth} \to \mathrm{T}'^{\beth}$ est la projection canonique, m_{X} est la restriction de l'action de $\mathrm{T}^{\beth}$ sur $\mathrm{X}^{\beth}$ et m_{Y} est l'action de $\mathrm{T}'^{\beth}$ sur $\mathrm{Y}^{\beth}$. Pour toute extension non archimédienne K/k, l'application $\pi_{\mathrm{K}} : \mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K} \to \mathrm{T}'^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$ envoie le point de Shilov de la source sur celui du but. Il en découle que l'endomorphisme $\mathbf{p}_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y}^{\beth} \to \mathrm{Y}^{\beth}$ obtenu en considérant Y comme une variété torique sous T′ coïncide avec la restriction de l'endomorphisme $\mathbf{p}_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$ (considéré jusqu'ici) à l'image $\rho^{-1}(\mathrm{Y})$ de l'immersion canonique $\mathrm{Y}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$, laquelle réalise donc un homéomorphisme de $\mathfrak{S}(\mathrm{Y})$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{Y})$.

Comme $\mathrm{O}(\xi) = \mathrm{Y}_0$, $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Y})$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{O}(\xi))$ et, puisque X est la réunion disjointe des orbites $\mathrm{O}(\xi)$, $\xi \in \Xi(\mathrm{X})$,

$$\mathfrak{S}(\mathrm{X}) = \bigcup_{\xi\in\Xi(\mathrm{X})} \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{O}(\xi)) = \bigcup_{\xi\in\Xi(\mathrm{X})} \mathfrak{S}_0(\overline{\mathrm{O}(\xi)}).$$

□

(2.1.4) Nous aurons ultérieurement à utiliser le résultat suivant.

PROPOSITION 2.13. — *Soit* X *une k-variété torique sous* T, *affine et normale. Étant donnée une demi-droite rationnelle* D *dans le cône* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *de* X *qui n'est contenue dans aucune face stricte, il existe une variété torique normale* X′ *sous* T, *un morphisme propre et équivariant* $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *ainsi qu'un point* $\xi' \in \Xi(\mathrm{X}')$ *tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- le morphisme $f^{\beth}$ *induit un isomorphisme de polyèdres coniques rationnels* $\mathfrak{S}(\mathrm{X}') \to \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *qui identifie* D *à l'adhérence de* $\mathfrak{S}(\mathrm{X}') \cap r_{\mathrm{X}'}^{-1}(\xi')$ *dans* $\mathfrak{S}(\mathrm{X}')$ *;*

- le point $\xi = f(\xi')$ *appartient à* $\Xi(\mathrm{X})$ *et*

$$\overline{\{\xi'\}} = f^{-1}(\overline{\{\xi\}})\ ;$$

- muni de la structure de sous-schéma fermé réduit de X′, $\overline{\{\xi'\}}$ *est normal.*

Démonstration. Quelle que soit la face stricte F du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$, on désigne par F' l'enveloppe convexe de $\mathrm{F} \cup \mathrm{D}$ dans $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$; c'est un sous-cône de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ contenant F et D, le plus petit satisfaisant à cette condition. Si $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ sont deux faces strictes de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$, $\mathrm{F}_1' \cap \mathrm{F}_2' = (\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2)'$ et l'ensemble D formé de tous ces cônes F′ ainsi que de leurs faces constitue une décomposition polyédrale rationnelle finie du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ ([**9**], Chap. I § 2, définition 3). Par application des théorèmes 6, 7 et 8 de [**9**], Chap. I § 2, il existe une *k*-variété torique normale X′ sous T ainsi qu'un morphisme équivariant et propre $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ qui satisfont à la condition suivante (et sont uniquement déterminés, à un isomorphisme près, par celle-ci) : le morphisme $f^{\beth} : \mathrm{X}'^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$ induit un isomorphisme du cône polyédral rationnel $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}')$ sur le cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ tel que la décomposition $\mathscr{D}$ de ce dernier corresponde à la décomposition de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}')$ formée des cônes définis par les ouverts affines invariants de X′.

Utilisant la proposition 2.10, il découle immédiatement de cette propriété qu'il existe un point ξ' dans $\Xi(\mathrm{X}')$ tel que la demi-droite rationnelle $\mathrm{D} \subset \mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ soit l'image du sous-cône de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}')$ d'intérieur $r_{\mathrm{X}'}^{-1}(\xi')$. Si ξ est l'unique point de $\Xi(\mathrm{X})$ tel que D soit contenue dans la face $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \cap \overline{r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)}$ de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$, $f(\xi') = \xi$ en vertu du point 3 de cette même proposition.

Nous identifions maintenant les cônes $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}')$ et $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$, notés $\mathfrak{S}_0$ dans ce qui suit. L'adhérence du point ξ dans X est l'unique orbite fermée car $\mathfrak{S}_0 \cap r_{\mathrm{X}}^{-1}(\xi)$ est l'intérieur du cône $\mathfrak{S}_0$ et, le morphisme f étant équivariant, $f^{-1}(\xi)$ est la réunion des orbites $\mathrm{O}(\zeta)$ de X′ telles que $\mathfrak{S}_0 \cap r_{\mathrm{X}'}^{-1}(\zeta)$ soit contenu dans l'intérieur de $\mathfrak{S}_0$. D'un autre côté, l'adhérence de ξ' dans X' est la réunion des orbites $\mathrm{O}(\zeta')$ telles que D soit une face du cône d'intérieur $\mathfrak{S}_0 \cap r_{\mathrm{X}'}^{-1}(\zeta')$. L'égalité $\overline{\{\xi'\}} = f^{-1}(\{\xi\})$ découle immédiatement de cette description puisqu'elle est équivalente au fait suivant : quel que soit le cône C figurant dans $\mathscr{D}$, C rencontre l'intérieur de $\mathfrak{S}$ si et seulement si D en est une face.

Enfin, le sous-schéma intègre $\overline{\{\xi'\}} = \overline{\mathrm{O}(\xi')}$ de X' est normal car la variété torique X' l'est ([**9**], Chap. I § 1, proposition 2). □

2.2. La contraction de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$

(2.2.1) Comme l'a montré Berkovich, l'action du groupe k-analytique $\mathrm{T}^{\beth}$ sur $\mathrm{X}^{\beth}$ conduit naturellement à une contraction de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur le sous-espace fermé $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$, c'est-à-dire une homotopie reliant l'application identique de $\mathrm{X}^{\beth}$ à la rétraction $\mathbf{p}$ de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur le sous-espace fermé $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$.

LEMME 2.14. — *Quels que soient l'élément $t \in [0,1]$ et l'extension non archimédienne K/k, l'espace K-affinoïde*

$$\mathrm{G}_{\mathrm{K}}(t) = \{x \in \mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k \mathrm{K} \mid |\chi_m - 1| \leq t,\ m \in \mathrm{M}\}$$

est un sous-groupe K-analytique de $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$ possédant un unique point de Shilov, noté $g_{\mathrm{K}}(t)$. Si $\mathrm{K}'/\mathrm{K}/k$ est une tour d'extensions non archimédiennes, la projection canonique de $\mathrm{G}_{\mathrm{K}'}(t)$ sur $\mathrm{G}_{\mathrm{K}}(t)$ envoie $g_{\mathrm{K}'}(t)$ sur $g_{\mathrm{K}}(t)$.

Démonstration. Quelle que soit la k-algèbre affinoïde A, l'ensemble des A-points de $\mathrm{T}^{\beth}$ est le groupe des homomorphismes bornés du groupe abélien M dans le groupe $\mathrm{A}^{\times}$. Étant donnés $x, y \in \mathrm{T}^{\beth}(\mathrm{A})$ tels que $||x(m) - 1||, ||y(m) - 1|| \leq t$ pour tout $m \in \mathrm{M}$, $||x(m)|| = ||y(m)|| = 1$ (c'est la condition pour que x et y soient bornés) et

$$||x(m)y(m)^{-1} - 1|| \leq \max(||x(m) - 1||, ||y(m) - 1||) \leq t$$

pour tout $m \in \mathrm{M}$. Cela prouve que l'ensemble des A-points de $\mathrm{G}(t)$ est un sous-groupe de $\mathrm{T}^{\beth}(\mathrm{A})$, et donc que le domaine k-affinoïde $\mathrm{G}(t)$ est un sous-groupe k-analytique de $\mathrm{T}^{\beth}$. Il en est de même après toute extension non archimédienne K/k.

Choisissons maintenant une base $(m_1, \ldots, m_n)$ de M. L'homomorphisme $\varphi : \mathrm{T} \otimes_k \mathrm{K} \to \mathbb{A}^n_{\mathrm{K}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n])$ tel que $\varphi^{\#}(\mathrm{X}_i) = \chi_{m_i} - 1$, $1, \leq i \leq n$, induit un isomorphisme de $\mathrm{G}_{\mathrm{K}}(t)$ sur l'espace K-affinoïde $\{|\mathrm{X}_1| \leq t, \ldots, |\mathrm{X}_n| \leq t\}$, plongé dans $\mathbb{A}^{n\,\beth}_{\mathrm{K}}$. Ce dernier a un unique point de Shilov, défini par le prolongement de la semi-norme multiplicative

$$\mathrm{K}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu \mathrm{X}^\nu \mapsto \max_\nu |_\nu| t^{|\nu|},$$

et il en est donc de même pour $\mathrm{G}_{\mathrm{K}}(t)$.

Le comportement des points $g_{\mathrm{K}}(t)$ en fonction de K est évident. □

Remarque 2.15. — Quelle que soit l'extension non archimédienne K/k, l'application $g_{\mathrm{K}} : [0,1] \to \mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k \mathrm{K}$, $t \mapsto g_{\mathrm{K}}(t)$ est continue : en effet, si $(m_1, \ldots, m_n)$ est une base du groupe abélien M, la composée de g_{K} par l'immersion $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k \mathrm{K} \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{K}\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\})$ définie par $\mathrm{X}_i = \chi_{m_i} - 1$, $1 \leq i \leq n$, est continue car

$$|f|(g_{\mathrm{K}}(t)) = \max_\nu |a_\nu(f)| t^{|\nu|}$$

pour tout élément $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu(f) \mathrm{X}^\nu$ de $\mathrm{K}\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n\}$. ◇

L'homotopie $\mathrm{H} : [0,1] \times \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$ est définie comme suit : étant donnés un élément t de $[0,1]$ et un point x dans $\mathrm{X}^{\beth}$, $\mathrm{H}(t,x)$ est l'image du point $G_{\mathrm{K}}(t)$ de $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x)$ par l'application canonique

$$\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x) = \mathrm{T}^{\beth} \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{T}^{\beth} \times \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}.$$

PROPOSITION 2.16. — *L'application* $\mathrm{H}:[0,1]\times\mathrm{X}^{\beth}\to\mathrm{X}^{\beth}$ *que l'on vient de définir satisfait aux conditions suivantes :*

(i) *elle est continue ;*

(ii) $\mathrm{H}(0,\cdot)=\mathrm{id}_{\mathrm{X}^{\beth}}$, $\mathrm{H}(1,\cdot)=\mathbf{p}$ *et, pour tout* $t\in[0,1]$, *la restriction de l'application* $\mathrm{H}(t,\cdot)$ *à* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *est l'injection canonique de* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *dans* $\mathrm{X}^{\beth}$ *;*

(iii) *pour tout* $t\in[0,1]$ *et tout ouvert affine* $\mathrm{U}\subset\mathrm{X}$, *l'application* $\mathrm{H}(t,\cdot)$ *envoie* $\mathrm{U}^{\beth}$ *dans* $\mathrm{U}^{\beth}$.

Démonstration. (iii) Quel que soit l'ouvert affine invariant $\mathrm{U}\subset\mathrm{X}$, la stabilité de $\mathrm{U}^{\beth}$ sous chacune des applications $\mathrm{H}(t,\cdot)$, $t\in[0,1]$, est une conséquence immédiate de la stabilité de $\mathrm{U}^{\beth}$ sous l'action de $\mathrm{T}^{\beth}$ sur $\mathrm{X}^{\beth}$.

(ii) Les égalités $\mathrm{H}(0,\cdot)=\mathrm{id}_{\mathrm{X}^{\beth}}$ et $\mathrm{H}(1,\cdot)=\mathbf{p}$ découlent immédiatement de la définition de l'application H. Considérons un ouvert affine invariant $\mathrm{U}\subset\mathrm{X}$, un point x dans $\mathrm{U}^{\beth}$ et un élément f de $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. Comme, pour tout $t\in[0,1]$, $g_{\mathscr{H}(x)}(t)$ est le point de Shilov du domaine $\mathscr{H}(x)$-affinoïde $\mathrm{G}_{\mathscr{H}(x)}(t)$ de $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathrm{K}$,

$$|f(\mathrm{H}(t,x))|=\max_{\mathrm{G}_{\mathscr{H}(x)}}|m_x^{\#}(f)|,$$

où m_x est le morphisme $\mathrm{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathscr{H}(x)\to\mathrm{T}^{\beth}\times\mathrm{X}^{\beth}\to\mathrm{X}^{\beth}$. Puisque la famille des $\mathrm{G}_{\mathscr{H}(x)}(t)$ est croissante avec t, nous en déduisons la croissance de $|f(\mathrm{H}(t,x))|$ par rapport à t et obtenons ainsi les inégalités

$$|f(x)|=|f(\mathrm{H}(0,x))|\leq|f(\mathrm{H}(t,x))|\leq|f(\mathrm{H}(1,x))|=|f(\mathbf{p}(x))|$$

pour tout $t\in[0,1]$. Si le point x appartient à $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$, $\mathbf{p}(x)=x$; on a alors

$$|f(\mathrm{H}(t,x))|=|f(x)|$$

pour tous $f\in\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, $t\in[0,1]$, et donc $\mathrm{H}(t,x)=x$ pour tout $t\in[0,1]$.

(i) Nous allons enfin établir la continuité de H en vérifiant que la fonction réelle $|f(\mathrm{H}(t,x))|$ est continue sur $[0,1]\times\mathrm{U}^{\beth}$ pour tout ouvert affine invariant $\mathrm{U}\subset\mathrm{X}$ et tout élément f de $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$. Posons $\varphi(t,x)=|f(\mathrm{H}(t,x))|$.

- La continuité de φ par rapport à t découle directement de la remarque 2.15.

- Vérifions ensuite la continuité de φ par rapport à x. Les cas $t=0$ et $t=1$ étant déjà acquis, nous pouvons supposer $t\in]0,1[$. Choisissons une base $(m_1,\ldots,m_n)$ de M et notons F le composé de l'homomorphisme $m^{\#}:\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})\to\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})[\mathrm{M}]$ par le $\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$-homomorphisme $\alpha:\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})[\mathrm{M}]\to\Gamma(\mathrm{U},\mathscr{O}_{\mathrm{X}})[[\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n]]$ tel que $\alpha(\chi_{m_i})=1+\mathrm{X}_i$ $(1\leq i\leq n)$;

$$\mathrm{F}(f)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}^n}\mathrm{F}_\nu(f)\mathrm{X}_1^{\nu_1}\ldots\mathrm{X}_n^{\nu_n},$$

$\varphi(t,x)=\max_{\nu\in\mathbb{N}^n}|\mathrm{F}_\nu(f)|(x)t^{|\nu|}$.

La continuité des fonctions $|\mathrm{F}_\nu(f)|$ implique trivialement la semi-continuité inférieure de $\varphi(t,\cdot)$. Ces fonctions étant de plus majorées par 1 et t appartenant à $]0,1[$, il existe, pour tout point $x_0\in\mathrm{U}^{\beth}$ et tout nombre réel $\varepsilon>0$, un entier naturel N tel que, pour tout multi-indice $\nu\in\mathbb{N}^n$ de longueur $|\nu|\geq\mathrm{N}$,

$$|\mathrm{F}_\nu(f)|t^{|\nu|}\leq t^{|\nu|}<\varphi(t,x_0)+\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\{\varphi(t,\cdot)<\varphi(t,x_0)+\varepsilon\}=\bigcap_{\nu,\ |\nu|\leq\mathrm{N}}\{|\mathrm{F}_\nu(f)|<\varepsilon t^{-|\nu|}\}$$

est un voisinage de x_0, et donc que la fonction $\varphi(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement au point x_0. Nous avons donc établi la continuité de $\varphi(t,\cdot)$.

- La continuité de φ découle facilement des continuités partielles que l'on vient de vérifier et de la croissance par rapport à t. Considérons en effet un point (t_0,x_0) dans $[0,1]\times\mathrm{U}^{\beth}$ et un nombre réel $\varepsilon>0$. Il existe un nombre réel $\delta>0$ tel que

$$\varphi(t_0,x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leq\varphi(t,x_0)\leq\varphi(t_0,x_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout t appartenant au segment $[t_1,t_2] = [t_0-\delta, t_0+\delta] \cap [0,1]$; il existe également un voisinage Ω de X_0 dans $\mathrm{U}^{\beth}$ tel que

$$\varphi(t_1,x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(t_1,x) \quad \text{ et } \quad \varphi(t_2,x) \leq \varphi(t_2,x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout x appartenant à $\mathrm{U}^{\beth}$. Quels que soient alors $t \in [t_1,t_2]$ et $x \in \mathrm{U}$, la croissance de $\varphi(\cdot,x)$ sur $[0,1]$ et les inégalités précédentes impliquent :

$$\varphi(t,x) \leq \varphi(t_2,x) \leq \varphi(t_2,x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(t_0,x_0) + \varepsilon$$

et

$$\varphi(t,x) \geq \varphi(t_1,x) \geq \varphi(t_1,x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \varphi(t_0,x_0) - \varepsilon.$$

La fonction φ est donc continue au point (t_0,x_0). □

Remarque 2.17. — L'homotopie H considérée ici est un cas particulier de la construction effectuée par Berkovich dans le paragraphe 6.1 de [**1**]. ◇

(2.2.2) Soient Y le fermé complémentaire de l'orbite ouverte X_0 dans X, $\mathfrak{X}$ le complété formel de X le long de Y et o l'unique point de $\mathrm{X}^{\beth}$ tel que $r(o)$ soit le point générique de X ; en vertu de la proposition 2.10, o est le sommet commun de chacun des cônes $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ associés aux ouverts affines invariants $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$. La fibre générique $\mathfrak{X}_\eta$ de $\mathfrak{X}$ est un ouvert de $\mathrm{X}^{\beth}$ dont la trace sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ est le polyèdre conique épointé $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})^* = \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) - \{o\}$ car

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_\eta &= r^{-1}(\mathrm{Y}) - \rho^{-1}(\mathrm{Y}) \\ &= \rho^{-1}(\mathrm{X}_0) - r^{-1}(\mathrm{X}_0). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.18. — *L'homotopie* $\mathrm{H} : [0,1] \times \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$ *stabilise l'ouvert* $\mathfrak{X}_\eta$ *de* $\mathrm{X}^{\beth}$ *et l'application induite*

$$\mathrm{H} : [0,1] \times \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_\eta$$

contracte $\mathfrak{X}_\eta$ *sur* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})^*$.

Il en découle en particulier que l'espace analytique $\mathfrak{X}_\eta$ *est homotope à la sphère* $\mathrm{S}^{\dim(\mathrm{X})-1}$ *si le* k*-schéma* X *est propre, contractile sinon.*

Démonstration. L'homotopie H stabilise $\rho^{-1}(\mathrm{O}(\xi))$ et $r^{-1}(\mathrm{O}(\xi))$ pour chacun des points ξ de $\Xi(\mathrm{X})$; comme $\mathfrak{X}_\eta = \rho^{-1}(\mathrm{O}(r(o))) \cap \bigcup_{\xi \in \Xi(\mathrm{X}), \xi \neq r(o)} r^{-1}(\mathrm{O}(\xi))$, elle stabilise donc $\mathfrak{X}_\eta$.

La restriction de H à $\mathfrak{X}_\eta$ relie $\mathrm{H}(0,\cdot) = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}_\eta}$ à la rétraction $\mathbf{p}_{|\mathfrak{X}_\eta} : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{S}_0(\mathrm{X})^*$ et contracte donc $\mathfrak{X}_\eta$ sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})^*$. On a vu que le polyèdre conique $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ s'identifie canoniquement à l'éventail de la variété torique X ; l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})^*$ est donc homéomorphe à la sphère $\mathrm{S}^{\dim(\mathrm{X})-1}$ si cet éventail est complet – c'est-à-dire si X est propre – et il est contractile sinon. □

3. L'ESPACE DE BERKOVICH ASSOCIÉ À UN PLONGEMENT TOROÏDAL

Nous considérons toujours un corps k, muni de la valeur absolue triviale. Un *plongement toroïdal* est la donnée d'une k-variété normale X et d'un ouvert dense X_0 de X tel que l'immersion ouverte $\mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathrm{X}$ satisfasse à la condition suivante : tout point x de X admet un voisinage ouvert U muni d'un morphisme étale γ vers une variété torique Z tel que $\mathrm{X}_0 \cap \mathrm{U}$ soit l'image réciproque de l'orbite ouverte de Z.

Remarque 3.1. — 1) Il est évidemment loisible d'imposer aux k-schémas U et Z d'être affines.

2) La normalité de X permet de supposer que toutes les variétés toriques considérées sont normales. ◇

Nous allons voir que les résultats du chapitre précédent s'étendent facilement au cas des plongements toroïdaux.

3.1. L’éventail d’un plongement toroïdal et sa compactification

Nous considérons dans ce qui suit une k-variété irréductible et normale X et un ouvert dense X_0 tels que l’immersion ouverte $X_0 \hookrightarrow X$ soit un plongement toroïdal. Nous appellerons *carte étale* la donnée d’un ouvert U de X et d’un morphisme étale γ de U vers une variété torique normale Z tel que $X_0 \cap U = \gamma^{-1}(Z_0)$.

(3.1.1) Il est facile de voir que X est munie d’une stratification canonique, coïncidant avec la stratification en orbites si X est torique.

LEMME 3.2. — *Soient* U *un k-schéma et* $\gamma : U \to Z$, $\gamma' : U \to Z'$ *des morphismes étales vers des k-variétés toriques ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\gamma^{-1}(Z_0) = \gamma'^{-1}(Z'_0)$ *;*

(ii) $\gamma^{-1}(\Xi(Z)) = \gamma'^{-1}(\Xi(Z'))$

et, si elles sont vérifiées,

$$\gamma^{-1}(O(\gamma(\xi))) = \gamma'^{-1}(O(\gamma'(\xi)))$$

pour tout point ξ *appartenant à* $\gamma^{-1}(\Xi(Z)) = \gamma'^{-1}(\Xi(Z'))$.

Démonstration. Quel que soit le sous-schéma fermé Y de U, l’ensemble des points génériques de $\gamma^{-1}(Y)$ est l’image réciproque de l’ensemble des points génériques de Y car le morphisme γ est quasi-fini. Désignons par I l’ensemble des composantes irréductibles du fermé $U - \gamma^{-1}(Z_0)$; vu l’observation précédente, $\gamma^{-1}(\Xi(Z))$ est l’ensemble des points génériques des sous-schémas fermés

$$Y_{I'} = \bigcap_{Y' \in I'} Y',$$

I' parcourant l’ensemble des parties de I, et, pour tout point $\xi \in \gamma^{-1}(\Xi(Z))$, l’image réciproque par γ de l’orbite $O(\gamma(\xi))$ est le complémentaire dans $\overline{\{\xi\}}$ des fermés $\overline{\{\xi'\}}$, ξ' parcourant l’ensemble des spécialisations strictes de ξ dans $\gamma^{-1}(\Xi(Z))$.

La même discussion étant valable pour le morphisme γ', l’équivalence des conditions (i) et (ii) devient évidente. Il en est de même pour l’identité

$$\gamma^{-1}(O(\gamma(\xi))) = \gamma'^{-1}(O(\gamma'(\xi))),$$

$\xi \in \gamma^{-1}(\Xi(Z))$, si ces conditions sont vérifiées. □

DÉFINITION 3.3. — *Nous désignerons par* $\Xi(X)$ *l’ensemble des points* ξ *de* X *satisfaisant à la condition suivante :*

il existe une carte étale $\gamma : U \to Z$ *telle que* $\xi \in U$ *et* $\gamma(\xi) \in \Xi(Z)$.

Étant donné un point ξ *dans* $\Xi(X)$, *nous noterons* $\Sigma(\xi)$ *le complémentaire dans* $\overline{\{\xi\}}$ *des fermés* $\overline{\{\xi'\}}$, ξ' *parcourant l’ensemble des spécialisations strictes de* ξ *dans* $\Xi(X)$.

PROPOSITION 3.4. — *Les sous-ensembles* $\Sigma(\xi)$, $\xi \in \Xi(X)$, *sont des parties localement fermées irréductibles et disjointes de* X,

$$X = \bigcup_{\xi \in \Xi(X)} \Sigma(\xi)$$

et

$$\overline{\Sigma(\xi)} = \bigcup_{\xi' \in \Xi(X),\ \xi \to \xi'} \Sigma(\xi').$$

En outre, quelle que soit la carte étale $\gamma : U \to Z$, $\Xi(X) \cap U = \gamma^{-1}(\Xi(Z))$ *et* $\Sigma(\xi) = \gamma^{-1}(O(\gamma(\xi))$ *pour tout point* $\xi \in \Xi(X) \cap U$.

Démonstration. C’est une conséquence évidente du lemme précédent et des propriétés analogues de la stratification d’une variété torique définie par ses orbites. □

Étant donné un point ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$, nous posons

$$\mathrm{X}(\xi) = \bigcup_{x' \in \Xi(\mathrm{X}), \xi' \to \xi} \Sigma(\xi).$$

Il s'agit d'un ouvert de X – c'est en effet une partie constructible stable par générisation – qui contient la strate $\Sigma(\xi)$ et dans lequel celle-ci est fermée.

Remarque 3.5. — Si X est une *k*-variété torique, $\mathrm{X}(\xi)$ est un ouvert affine invariant pour tout point ξ de $\Xi(\mathrm{X})$. Il est en effet invariant puisque réunion d'orbites, et il est affine car

$$\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\mathrm{X}(\xi))$$

est l'un des cônes figurant dans la décomposition canonique de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ définie par les ouverts affines invariants.

LEMME 3.6. — *Étant donné un point ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$ et une carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ telle que $\xi \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$,*

(i) $\gamma(\mathrm{X}(\xi)) \subset \mathrm{Z}(\gamma(\xi))$ *;*

(ii) γ *induit une bijection de* $\Xi(\mathrm{U}) = \Xi(\mathrm{X}) \cap U$ *sur* $\Xi(\mathrm{Z}(\gamma(\xi)))$.

Démonstration. (i) Cette assertion découle directement du fait que la stratification de U est l'image récriproque de celle de Z par ses orbites.

(ii) Le point précédent permet de supposer $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}(\gamma(\xi))$. Considérons un point ξ' dans $\Xi(\mathrm{Z})$ et soit Y le sous-schéma fermé intègre de Z de point générique ξ' ; la variété torique Z étant normale, il en est de même pour Y ([**9**], Chap. I, Prop. 2). Comme γ induit un morphisme étale de $Y' = \gamma^{-1}(\mathrm{Y})$ sur Y, Y′ est également normal et ses composantes connexes sont donc irréductibles. Toutes ces composantes doivent par ailleurs contenir le point ξ puisque U est un voisinage ouvert de ξ dans $\mathrm{X}(\xi)$ et Y′ est ainsi irréductible. Son point générique est l'unique élément de $\gamma^{-1}(\xi')$. □

(3.1.2) On rappelle que, si cela ne prête pas à confusion, un morphisme de *k*-schémas et le morphisme qu'il induit entre leurs espaces de Berkovich sont désignés par la même lettre.

Nous allons maintenant construire l'*éventail compactifié* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ du plongement toroïdal $\mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathrm{X}$ dans l'espace *k*-analytique $\mathrm{X}^{\beth}$. Cela découle directement du résultat suivant.

PROPOSITION 3.7. — *Soient ξ un point dans $\Xi(\mathrm{X})$ et $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ une carte étale telle que $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$. Posant $\xi' = \gamma(\xi)$, le morphisme γ induit un homéomorphisme de $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(\mathrm{Z}(\xi')))$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{Z}(\xi'))$.*

Démonstration. Nous procédons en trois étapes.

Première étape — Quelques réductions évidentes pour commençer. On peut tout d'abord remplacer la variété torique Z par l'ouvert invariant $\mathrm{Z}(\xi')$, qui est affine (lemme 3.6), auquel cas le morphisme γ réalise une bijection de $\Xi(\mathrm{U}) = \gamma^{-1}(\Xi(\mathrm{Z}))$ sur $\Xi(\mathrm{Z})$ (idem).

Notons ensuite qu'il est loisible de supposer l'ouvert U affine : en effet, comme le sous-ensemble $\mathfrak{S}(\mathrm{Z})$ de $\mathrm{Z}^{\beth}$ est inclus dans $r^{-1}(\Xi(\mathrm{Z}))$, son image réciproque par γ est contenue dans $r^{-1}(\Xi(\mathrm{X}(\xi)))$ et l'ensemble $\Xi(\mathrm{X}(\xi))$ des générisations du point ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$ est contenu dans tout voisinage ouvert affine de ξ.

Remarquons également qu'il suffit d'établir la bijectivité de l'application $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(\mathrm{Z})) \to \mathfrak{S}(\mathrm{Z})$ induite par γ; vu la continuité de γ et la compacité de $\mathrm{U}^{\beth}$ et $\mathrm{Z}^{\beth}$, il s'agira alors automatiquement d'un homéomorphisme.

Nous pouvons enfin nous restreindre à montrer que les fibres de γ sont réduites à un point au-dessus de l'intérieur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}) \cap r_{\mathrm{Z}}^{-1}(\xi')$ du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$. En effet :

- comme

$$\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}) = \bigcup_{\zeta' \in \Xi(\mathrm{Z})} \mathfrak{S}_0 \cap r_{\mathrm{Z}}^{-1}(\zeta'),$$

il suffit de remplacer Z par l'ouvert $\mathrm{Z}(\zeta')$ pour obtenir que les fibres de γ sont réduites à un point au-dessus de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}) \cap r_{\mathrm{Z}}^{-1}(\zeta')$ pour le point ζ' de $\Xi(\mathrm{Z})$;

- ayant vérifié que les fibres de γ sont réduites à un point au-dessus du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$, on en déduit qu'il en est de même au-dessus de $\mathfrak{S}(\mathrm{Z})$ en remplaçant la variété torique Z par les adhérences de ses orbites puisque

$$\mathfrak{S}(\mathrm{Z}) = \bigcup_{\zeta' \in \Xi(\mathrm{Z})} \mathfrak{S}_0(\overline{\mathrm{O}(\zeta')}).$$

Nous établissons finalement dans ce qui suit que les fibres du morphisme γ sont réduites à un point au-dessus de l'intérieur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}) \cap r_{\mathrm{Z}}^{-1}(\xi')$ du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$.

Deuxième étape — Soit D une demi-droite rationnelle dans le cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$ qui n'est contenue dans aucune face stricte. En vertu de la proposition 2.13, il existe une variété torique normale Z' sous le même tore que Z, un point ζ dans $\Xi(\mathrm{Z}')$ et un morphisme $f : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$, propre et équivariant, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

- f induit un isomorphisme (de polyèdres coniques rationnels) de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}')$ sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$ qui identifie D à l'adhérence de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}') \cap r_{\mathrm{Z}'}^{-1}(\zeta)$ dans $\mathrm{Z}'^{\beth}$;
- le point $\pi = f(\zeta)$ appartient à $\Xi(\mathrm{Z})$ et

$$\overline{\{\zeta\}} = f^{-1}(\overline{\{\pi\}}) ;$$

- muni de sa structure de sous-schéma fermé réduit de Z', $\overline{\{\zeta\}}$ est normal.

Considérons alors le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\gamma'"'] & \mathrm{U} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathrm{Z}' \arrow[r, "f"'] & \mathrm{Z}.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme f', propre et birationnel, induit un isomorphisme de l'ouvert $\gamma'^{-1}(\mathrm{Z}'_0)$ sur l'ouvert $\gamma^{-1}(\mathrm{Z}_0)$; f' réalise alors un isomorphisme de l'ouvert $\gamma'^{-1}(\rho_{\mathrm{Z}'}^{-1}(\mathrm{Z}'_0)) \subset \mathrm{U}'^{\beth}$ sur l'ouvert $\gamma^{-1}(\rho_{\mathrm{Z}}^{-1}(\mathrm{Z}_0)) \subset \mathrm{U}^{\beth}$ et, comme $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}) \subset \rho_{\mathrm{Z}}^{-1}(\mathrm{Z}_0)$, $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}') \subset \rho_{\mathrm{Z}'}^{-1}(\mathrm{Z}'_0)$, ce morphisme induit donc un homéomorphisme de $\gamma'^{-1}(\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}'))$ sur $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}))$.

L'anneau local de ζ dans Z' est de dimension 1 (car D est une demi-droite) et il s'agit donc d'un anneau de valuation discrète puisque le schéma noethérien Z' est normal. Désignant par ord_ζ cette valuation, la demi-droite $\mathrm{D} \subset \mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}')$ est l'image de l'application d_ζ de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathrm{Z}'^{\beth}$, qui associe au point t la semi-norme multiplicative $\mathrm{e}^{-\mathrm{ord}_\zeta(\cdot)t}$ sur $\Gamma(\mathrm{Z}', \mathscr{O}_{\mathrm{Z}'})$ ($d_\zeta(0)$ est la norme triviale). L'image réciproque de D par γ' est la réunion des images des applications analogues $d_{\zeta'} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathrm{U}'^{\beth}$ associées aux anneaux de valuation discrète $\mathscr{O}_{\mathrm{U}',\zeta'}$, $\zeta' \in \gamma^{-1}(\zeta)$. Les trois assertions suivantes sont donc équivalentes :

- γ réalise une bijection de $\gamma^{-1}(\mathrm{D})$ sur D ;
- γ' réalise une bijection de $\gamma'^{-1}(\mathrm{D})$ sur D ;
- la fibre de γ' au-dessus de ζ est réduite à un point.

C'est cette dernière que nous allons vérifier.

Soit π' l'unique point de U tel que $\gamma(\pi') = \pi$ (on rappelle que π appartient à $\Xi(\mathrm{Z})$ et que γ réalise une bijection de $\Xi(\mathrm{U}) = \gamma^{-1}(\Xi(\mathrm{Z}))$ sur $\Xi(\mathrm{Z})$) ; on pose $\mathrm{Y} = \overline{\{\pi\}}$ et $\mathrm{Y}' = \overline{\{\pi'\}}$, de telle sorte que $\mathrm{Y}' = \gamma^{-1}(\mathrm{Y})$. Le morphisme f' étant propre et birationnel, ses fibres sont connexes en vertu de la normalité de X ; le fermé

$$\mathrm{Y}'' = \gamma'^{-1}(f^{-1}(\mathrm{Y})) = f'^{-1}(\gamma^{-1}(\mathrm{Y})) = f'^{-1}(\mathrm{Y})$$

est donc connexe puisque Y est irréductible. Munissant Y'' (resp. $f^{-1}(\mathrm{Y})$) de la structure de sous-schéma fermé réduit de U' (resp. de U), γ' induit d'autre part un morphisme étale et dominant de

Y'' sur $f^{-1}(Y)$. Comme $f^{-1}(Y)$ est irréductible et normal, de point générique ζ, Y'' est également normal. Nous obtenons ainsi que Y'' est un k-schéma normal et connexe dominant $\overline{\{\zeta\}}$; il s'agit donc d'un k-schéma irréductible et son point générique est l'unique élément de $\gamma'^{-1}(\zeta)$.

À l'issue de cette étape, nous avons établi que le morphisme γ réalise une bijection de $\gamma^{-1}(D)$ sur D pour toute droite rationnelle $D \subset \mathfrak{S}_0(Z)$ qui n'est contenue dans aucune face stricte.

Troisième étape — Nous achevons maintenant de prouver que les fibres du morphisme γ au-dessus de l'intérieur $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$ du cône $\mathfrak{S}_0(Z)$ sont réduites à un point. Ce résultat est acquis, d'après l'étape précédente, au-dessus du sous-ensemble dense de $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$ constitué des points contenus dans une demi-droite rationnelle.

L'argument est purement topologique. D'après la proposition 1.12, l'application continue φ de $r_U^{-1}(\xi)$ dans $r_Z(\xi')$ induite par le morphisme γ est ouverte, propre et surjective (idem). Ces propriétés ont la conséquence suivante, qui fait l'objet du lemme ci-dessous : si φ est une fonction réelle continue sur $r_U^{-1}(\xi)$, la fonction réelle $\Lambda(\varphi)$ sur $r_Z^{-1}(\xi')$ définie par

$$\Lambda_z(\varphi) = \max\{\varphi(x),\ x \in \gamma^{-1}(z)\}$$

est continue. Quels que soient ainsi $f_1, \ldots, f_n \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, la fonction $\Lambda(|f_1 \ldots f_n|) - \Lambda(|f_1|) \ldots \Lambda(|f_n|)$ est continue sur $r_Z^{-1}(\xi)$; comme elle s'annule manifestement sur le sous-ensemble de $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$ formé des points contenus dans une demi-droite rationnelle, elle est identiquement nulle sur $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$ par densité.

Considérons finalement un point z dans $\mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$. Si $\gamma^{-1}(z) = \{z_1, \ldots, z_n\}$, il existe des éléments $f_1, \ldots, f_n$ de $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ tels que $|f_i(z_i)| > |f_i(z_j)|$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$; on a alors

$$\Lambda_z(f_1) \ldots \Lambda_z(f_n) = |f_1(z_1)| \ldots |f_n(z_n)|,$$

et l'égalité $\Lambda_z(f_1 \ldots f_n) = \Lambda_z(f_1) \ldots \Lambda_z(f_n)$ a lieu si et seulement si $n = 1$. La fibre $\gamma^{-1}(z)$ est donc réduite à un point, quel que soit $z \in \mathfrak{S}_0(Z) \cap r_Z^{-1}(\xi')$. La démonstration est achevée. □

LEMME 3.8. — *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques localement compacts et* $\gamma : X \to Y$ *une application continue, ouverte et surjective dont les fibres sont finies. Si* φ *est une fonction réelle continue sur* X*, la fonction réelle* ψ *sur* Y*, définie par*

$$\psi(y) = \max\{\varphi(x)\ ;\ x \in \gamma^{-1}(y)\}$$

pour tout point $y \in Y$*, est continue.*

Démonstration. Soient y un point dans Y et $\varepsilon > 0$ un nombre réel. L'application γ étant ouverte, il existe pour chaque point x de $\gamma^{-1}(y)$ un voisinage ouvert U_x de x dans X et un voisinage ouvert V_x de y dans Y tels que $\gamma(U_x) = V_x$. Comme la fibre $\gamma^{-1}(y)$ est finie,

$$V = \bigcap_{x \in \gamma^{-1}(y)} V_x$$

est un voisinage ouvert de y dans Y et

$$U = \bigcup_{x \in \gamma^{-1}(y)} U_x \cap \gamma^{-1}(V)$$

est un voisinage ouvert de $\gamma^{-1}(y)$ dans X. Quitte à réduire ces voisinages, on peut en outre supposer que la majoration

$$\sup_{U_x} |\varphi - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

est vérifiée pour tout x dans $\gamma^{-1}(y)$.

Le point y admettant un système fondamental $\mathscr{W}$ de voisinages compacts, la fibre $\gamma^{-1}(y)$ est l'intersection des compacts $\gamma^{-1}(W)$, $W \in \mathscr{W}$, et la compacité locale de X garantit l'existence d'un élément W de $\mathscr{W}$ tel que $\gamma^{-1}(W) \subset U$.

Considérons maintenant un point y' dans le voisinage $\mathrm{W} \cap \mathrm{V}$ de y. Comme U est un voisinage de $\gamma^{-1}(y')$ dans X, il existe pour tout point x' de $\gamma^{-1}(y')$ un point x dans $\gamma^{-1}(y)$ tel que $x' \in \mathrm{U}_x$, et ceci implique $\varphi(x) - \varepsilon \leq \varphi(x') \leq \varphi(x) + \varepsilon$; de ces inégalités découle alors la majoration

$$\psi(y') = \max\{\varphi(x') \; ; \; x' \in \gamma^{-1}(y')\} \leq \max\{\varphi(x) + \varepsilon \; ; \; x \in \gamma^{-1}(y)\} = \psi(y) + \varepsilon.$$

Enfin, puisque $\mathrm{V} \subset \gamma(\mathrm{U}_x)$, chacun des ouverts U_x rencontre la fibre $\gamma^{-1}(y')$ et les inégalités précédentes impliquent également la minoration

$$\psi(y) = \max\{\varphi(x) \; ; x \in \gamma^{-1}(y)\} \leq \max\{\varphi(x') + \varepsilon \; ; \; x' \in \gamma^{-1}(y')\} = \psi(y') + \varepsilon.$$

Nous avons établi la continuité de la fonction ψ en tout point y de Y. □

COROLLAIRE 3.9. — *Il existe une application continue et une seule* $\mathbf{p}_{\mathrm{X}} : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$ *telle que, pour toute carte étale* $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$, $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}^{\beth}) \subset \mathrm{U}^{\beth}$ *et le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}^{\beth} \arrow[r, "\mathbf{p}_X"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathrm{U}^{\beth} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathrm{Z}^{\beth} \arrow[r, "\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}"'] & \mathrm{Z}^{\beth} \end{tikzcd}$$

– dans lequel $\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}$ *est l'endomorphisme de* $\mathrm{Z}^{\beth}$ *introduit au cours du chapitre précédent – soit commutatif.*

Cette application est telle que $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}^2 = \mathbf{p}_{\mathrm{X}}$.

Démonstration. Considérons une carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$. Puisque, par définition, $\mathfrak{S}(\mathrm{Z}) = \mathbf{p}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{Z}^{\beth})$, il existe en vertu de la proposition 3.7 une application continue $\mathbf{p}_{\mathrm{U}} : \mathrm{U}^{\beth} \to \mathrm{U}^{\beth}$ et une seule telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U}^{\beth} \arrow[r, "\mathbf{p}_{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathrm{U}^{\beth} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathrm{Z}^{\beth} \arrow[r, "\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}"'] & \mathrm{Z}^{\beth} \end{tikzcd}$$

soit commutatif. L'identité $\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}^2 = \mathbf{p}_{\mathrm{Z}}$ implique immédiatement $\mathbf{p}_{\mathrm{U}}^2 = \mathbf{p}_{\mathrm{U}}$. Comme, pour tout ouvert affine invariant Z' de Z, $\mathbf{p}_{\mathrm{Z}'}$ est la restriction de $\mathbf{p}_{\mathrm{Z}}$ à $\mathrm{Z}'^{\beth}$ (lemme 2.8), les différentes applications $\mathbf{p}_{\mathrm{U}}$ se recollent en un endomorphisme $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}$ de l'espace topologique sous-jacent à $\mathrm{X}^{\beth}$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. □

On désigne par $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ l'image de l'application $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}$; c'est un sous-espace fermé de $\mathrm{X}^{\beth}$ et l'on pose $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) = \mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\mathrm{X}_0)$. L'application $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}$ est une rétraction de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$.

(3.1.3) La description de $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ est tout à fait semblable à celle de l'éventail compactifié d'une variété torique.

Commençons par introduire l'analogue de l'application $\mathbf{p}_{\mathrm{X}}$ au niveau schématique.

LEMME 3.10. — *Soit* $p_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *l'application associant à tout point* x *de* X *le point générique de l'unique strate de* X *contenant* x*. Il s'agit d'un endomorphisme continu de* X*, d'image* $\Xi(\mathrm{X})$ *et s'insérant dans les diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}^{\beth} \arrow[r, "\mathbf{p}_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathrm{X}^{\beth} \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} \mathrm{X}^{\beth} \arrow[r, "\mathbf{p}_{\mathrm{X}}"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{X}^{\beth} \arrow[d, "r"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "p_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

Démonstration. Quelle que soit la carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$, p_{X} stabilise l'ouvert U et sa restriction à U est l'application p_{U}. La continuité de p_{X} s'établit comme celle de p_{Z} (proposition 2.5) et la commutativité des deux diagrammes considérés découle directement de l'assertion analogue pour Z (idem) et de la proposition 3.7. □

Comme dans le cas torique, nous obtenons que, pour tout point $\xi \in \Xi(\mathrm{X})$, la trace sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ de l'image réciproque de la strate $\Sigma(\xi)$ de X par l'application de réduction $r : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}$ (resp. par l'application $\rho : \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}$) coïncide avec $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\xi)$ (resp. avec $\mathfrak{S}(X) \cap \rho^{-1}(\xi)$).

Passons maintenant à la structure naturelle de polyèdre conique rationnel sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$. Étant donnés un point ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$ et une carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ telle que $\xi \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$, nous savons que l'application γ réalise un homéomorphisme de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U}) = \gamma^{-1}(\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}))$ sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$ (proposition 3.7), ce qui permet de transporter la structure de cône rationnel de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$ sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$. Comme nous allons le vérifier, la structure de cône rationnel obtenue sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi)) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{U})$ est indépendante du choix de la carte étale et elle admet une description intrinsèque.

DÉFINITION 3.11. — *Quel que soient le plongement toroïdal* $\mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathrm{X}$ *et l'ouvert* U *de* X, $\Lambda(\mathrm{U})$ *(resp.* $\Lambda(\mathrm{U})_+$*) désigne le groupe des diviseurs (de Cartier) sur* U *dont le support est contenu dans* $\mathrm{U} - (\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_0)$.

Remarque 3.12. — Soient T un k-tore déployé, de groupe des caractères M, et Z une variété torique sous T, affine et normale. Quelle que soit l'immersion ouverte équivariante $j : \mathrm{T} \hookrightarrow \mathrm{Z}$, l'application $\mathrm{M} \to \mathrm{Div}(\mathrm{X})$, $m \mapsto \mathrm{div}(\chi_m)$ réalise un isomorphisme de M sur le groupe abélien $\Lambda(\mathrm{Z})$ et le semi-groupe $\mathrm{S} \subset \mathrm{M}$ associés à Z correspond au semi-groupe $\Lambda(\mathrm{Z})_+ \subset \Lambda(\mathrm{Z})$. ◇

Si U est un ouvert de X, tout élément D de $\Lambda(\mathrm{U})$ donne naissance à une fonction réelle continue $|\mathrm{D}|$ sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_0$ de la manière suivante. Étant donnés un point x dans $\mathrm{U}^{\beth} \cap \mathrm{X}_0$ et une équation f de D sur un voisinage V de $r(x)$ dans U, le nombre réel strictement positif $|f(x)|$ ne dépend que de D : si g est une autre équation de D sur un ouvert affine $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$, il existe une unité $u \in \Gamma(\mathrm{W}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})^{\times}$ telle que $g = u f_{|\mathrm{W}}$; comme chaque élément de l'anneau $\Gamma(\mathrm{W}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ est, en tout point de $\mathrm{W}^{\beth}$, de valeur absolue inférieure à 1 (valeur absolue triviale), les unités ont une valeur absolue contante, égale à 1, sur $\mathrm{W}^{\beth}$; on a donc $|f|(x) = |g|(x)$ et on pose $|\mathrm{D}|(x) = |f|(x)$. La fonction $|\mathrm{D}|$ est majorée par 1 si et seulement si le diviseur D est effectif et l'application

$$\Lambda(\mathrm{U}) \to \mathrm{C}^0(\mathrm{U}^{\beth} \cap \rho^{-1}(\mathrm{X}_0), \mathbb{R}_{>0}), \quad \mathrm{D} \mapsto |\mathrm{D}|$$

est un homomorphisme de groupes abéliens.

Si l'on note $\Xi(\mathrm{X}, 1)$ l'ensemble fini des points de $\Xi(\mathrm{X})$ tels que $\dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi}) = 1$ (de manière équivalente, ce sont les points génériques de $\mathrm{X} - \mathrm{X}_0$), la normalité de X implique l'injectivité de l'homomorphisme

$$\mathrm{cyc} : \Lambda(\mathrm{U}) \to \mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{U}, 1), \mathbb{Z}), \;\; \mathrm{D} \mapsto (\xi \mapsto \mathrm{mult}_{\xi}(\mathrm{D})),$$

envoyant un diviseur $\mathrm{D} \in \Lambda(\mathrm{U})$ sur le cycle 1-codimentionnel qui lui est associé : en particulier, $\Lambda(\mathrm{U})$ est un groupe abélien libre de type fini. De la normalité de U découle également le fait que le semi-groupe $\Lambda(\mathrm{U})_+ \subset \Lambda(\mathrm{U})$ est de type fini puisqu'il est déterminé par les inéquations $\mathrm{mult}_{\xi}(\cdot) \geq 0$, $\xi \in \Xi(\mathrm{U}, 1)$, qui sont en nombre fini (appliquer le lemme de Gordan) ; il s'agit évidemment d'un semi-groupe saturé.

LEMME 3.13. — *Soit* ξ *un point de* $\Xi(\mathrm{X})$.

1. *Si* $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ *est une carte étale telle que* $\xi \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$, *l'homomorphisme* $\gamma^* : \mathrm{Div}(\mathrm{Z}(\gamma(\xi))) \to \mathrm{Div}(\mathrm{U})$ *induit un isomorphisme de* $\Lambda(\mathrm{Z}(\xi))$ *sur* $\Lambda(\mathrm{U})$. *Le même résultat est valable pour les semi-groupes des diviseurs effectifs.*
2. *L'application de restriction* $\Lambda(\mathrm{X}(\xi)) \to \Lambda(\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi}))$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Considérons une carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ telle que $\xi \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$ et posons $\xi' = \gamma(\xi)$, $\mathrm{X}_\xi = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi})$, $\mathrm{Z}_{\xi'} = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{Z},\xi'})$.

L'injectivité de l'application de restriction $\Lambda(\mathrm{U}) \to \Lambda(\mathrm{U}_{\xi'})$ découle directement de celle de l'homomorphisme $\mathrm{cyc} : \Lambda(\mathrm{U}) \to \mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{U},1),\mathbb{Z})$ et l'on sait déjà que l'application de restriction $\Lambda(\mathrm{Z}) \to \Lambda(\mathrm{Z}_{\xi'})$ est un isomorphisme. En vertu du lemme 3.6, le morphisme γ donne naissance à une bijection γ' de $\mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{U},1),\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{Z},1),\mathbb{Z})$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(\mathrm{U}) \arrow[r, "\mathrm{cyc}"] & \mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{U},1),\mathbb{Z}) \\
\Lambda(\mathrm{Z}) \arrow[u, "\gamma^*"] \arrow[r, "\mathrm{cyc}"'] & \mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{U},1),\mathbb{Z}) \arrow[u, "\gamma'"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif car γ est un morphisme étale. Vu les informations dont on dispose, le point 2 et la première assertion du point 1 seront démontrés si l'on établit que la flèche $\gamma^* : \Lambda(\mathrm{Z}_{\xi'}) \to \Lambda(\mathrm{U}_\xi)$ est un isomorphisme.

Le morphisme de schémas locaux noethériens $\gamma : \mathrm{X}_\xi \to \mathrm{Z}_{\xi'}$ est étale et *fini* (de degré $\deg_\xi \gamma$) ; on dispose donc d'un homomorphisme *norme* $\mathrm{N} : \Lambda(\mathrm{X}_\xi) \to \Lambda(\mathrm{Z}_{\xi'})$, vérifiant

$$\mathrm{cyc}(\gamma^*(\mathrm{N}(\mathrm{D}))) = (\deg_\xi \gamma)\mathrm{cyc}(\mathrm{D})$$

et donc

$$\gamma^*(\mathrm{N}(\mathrm{D})) = (\deg_\xi \gamma)\mathrm{D}$$

pour tout diviseur $\mathrm{D} \in \Lambda(\mathrm{U}_\xi)$, en vertu du fait que γ réalise une bijection de $\Xi(\mathrm{U},1) = \gamma^{-1}(\Xi(\mathrm{Z},1))$ sur $\Xi(\mathrm{Z},1)$ (lemme 3.6). On en déduit que l'homomorphisme de groupes abéliens $\gamma^* : \Lambda(\mathrm{X}_\xi) \to \Lambda(\mathrm{U}_{\xi'})$ induit un isomorphisme entre les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels associés, puis finalement que γ^* lui-même est un isomorphisme car un élément D de $\Lambda(\mathrm{Z}_{\xi'}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ appartient au sous-groupe $\Lambda(\mathrm{Z}_{\xi'})$ si et seulement si $\mathrm{cyc}(\mathrm{D})$ appartient au sous-groupe $\mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{Z},1),\mathbb{Z})$ de $\mathrm{Hom}(\Xi(\mathrm{Z},1),\mathbb{Q})$.

Observons enfin que l'isomorphisme γ^* de $\Lambda(\mathrm{U}_\xi)$ sur $\Lambda(\mathrm{Z}_{\xi'})$ envoie le semi-groupe $\Lambda(\mathrm{U}_\xi)_+$ sur le semi-groupe $\Lambda(\mathrm{Z}_\xi)_+$ car ceux-ci sont caractérisés par la condition $\mathrm{cyc} \geq 0$. □

Le premier point du lemme précédent à une conséquence immédiate que nous utiliserons ultérieurement.

COROLLAIRE 3.14. — *Soit ξ un point dans $\Xi(\mathrm{X})$.*

Si $\gamma_1 : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{Z}_1$ et $\gamma_2 : \mathrm{U}_2 \to \mathrm{Z}_2$ sont deux cartes étales telles que $\xi \in \mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2 \subset \mathrm{X}(\xi)$, il existe un isomorphisme équivariant canonique entre les k-variétés toriques Z_1 et Z_2.

Démonstration. Il est loisible de supposer $\mathrm{Z}_i = \mathrm{Z}_i(\gamma_i(\xi))$ $(i = 1,2)$. Soit U l'intersection des ouverts U_1 et U_2. Vu le premier point du lemme précédent, les morphismes $\gamma_1 : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}_1$ et $\gamma_2 : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}_2$ induisent des isomorphismes de semi-groupes $\gamma_1^* : \Lambda(\mathrm{Z}_1(\gamma_1(\xi)))_+ \tilde{\to} \Lambda(\mathrm{U})_+$ et $\gamma_2^* : \Lambda(\mathrm{Z}_2(\gamma_2(\xi)))_+ \tilde{\to} \Lambda(\mathrm{U})_+$; on dispose donc d'un isomorphisme canonique de semi-groupes

$$\Phi = (\gamma_1^*)^{-1} \circ \gamma_2^* : \Lambda(\mathrm{Z}_2(\gamma_2(\xi)))_+ \to \Lambda(\mathrm{Z}_1(\gamma_1(\xi)))_+,$$

lequel, en vertu de la remarque 3.12, détermine un isomorphisme équivariant de $\mathrm{Z}_1(\gamma_1(\xi))$ sur $\mathrm{Z}_2(\gamma_2(\xi))$. □

PROPOSITION 3.15. — *Soit ξ un point dans $\Xi(\mathrm{X})$.*

1. *L'application*

$$\Lambda(\mathrm{Spec}(\mathrm{X}(\xi)) \to \mathrm{C}^0(\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi)), \mathbb{R}_{>0}), \quad \mathrm{D} \mapsto |\mathrm{D}|$$

muni $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi)) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \cap r^{-1}(\mathrm{X}(\xi))$ d'une structure de cône rationnel strictement convexe.

Pour toute carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ telle que $\xi \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$, γ induit un isomorphisme de cônes rationnels entre $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi))$ et $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z}(\gamma(\xi)))$.

2. *Quel que soit la générisation ξ' de ξ dans* $\Xi(\mathrm{X})$,

$$\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi')) = \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi)) \cap \mathrm{X}(\xi')^{\sqsupset}$$

est une face du cône $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi))$ *et la correspondance*

$$\xi' \mapsto \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi'))$$

réalise une bijection de l'ensemble des générisations de ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$ *sur l'ensemble des faces du cône* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi))$.

3. *L'application*

$$\xi' \mapsto \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi)) \cap r^{-1}(\xi')$$

réalise une bijection de l'ensemble des générisations de ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$ *sur l'ensemble des intérieurs des faces du cône* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi))$.

Démonstration. Ayant rappelé que, pour toute variété torique affine Z d'orbite ouverte Z_0, la structure de cône rationnel sur $\mathfrak{S}_0(\mathrm{Z})$ est définie par le morphisme canonique

$$\Lambda(\mathrm{Z}) = \Gamma(\mathrm{Z}_0, \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}^{\times})/k^{\times} \to \mathrm{C}^0(\mathfrak{S}_0, \mathbb{R}_{>0}), \ \ \mathrm{D} \mapsto |\mathrm{D}|,$$

le premier point est une conséquence directe de la proposition 3.7 du lemme 3.13. Via la proposition 3.7, les deux points suivants se déduisent immédiatement des assertions analogues dans le cas torique, démontrées à la proposition 2.10. □

Ainsi que nous venons de l'établir, le sous-espace $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ de $\mathrm{X}^{\sqsupset}$ est naturellement muni d'une structure de polyèdre conique rationnel et la stratification canonique de X donne naissance à un recouvrement de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ par des cônes rationnels strictement convexes $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi))$ ($\xi \in \Xi(\mathrm{X})$) tel que, pour tous points $\xi', \xi'' \in \Xi(\mathrm{X})$,

$$\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi')) \cap \mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi''))$$

soit la réunion des faces communes à $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi))$ et $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}(\xi''))$. Par analogie avec le cas torique, nous dirons que $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ est l'*éventail* du plongement toroïdal $\mathrm{X}_0 \hookrightarrow \mathrm{X}$.

La description du sous-espace fermé $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ de $\mathrm{X}^{\sqsupset}$ se déduit facilement de celle de $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$.

Lemme 3.16. — *Soit ξ un point dans* $\Xi(\mathrm{X})$ *; munissant l'adhérence de la strate* $\Sigma(\xi)$ *de sa structure canonique de sous-schéma fermé réduit de* X, *l'immersion ouverte*

$$\Sigma(\xi) \hookrightarrow \overline{\Sigma(\xi)}$$

est un plongement toroïdal.

Démonstration. Modulo la proposition 3.4, cette assertion est une conséquence immédiate du fait que, dans toute variété torique *normale* Z, l'adhérence $\overline{\mathrm{O}}$ d'une orbite O est une variété torique normale dont O est l'orbite ouverte. □

Proposition 3.17. — 1. *Le sous-ensemble fermé* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *de* $\mathrm{X}^{\sqsupset}$ *est l'adhérence de* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ *et l'immersion ouverte* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \hookrightarrow \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *est la compactification canonique provenant du recouvrement par les cônes strictement convexes* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X}) \cap \mathrm{X}(\xi)^{\sqsupset}$, $\xi \in \Xi(\mathrm{X})$.

2. *Soit ξ un point dans* $\Xi(\mathrm{X})$. *L'immersion fermée canonique*

$$\overline{\Sigma(\xi)}^{\sqsupset} \hookrightarrow \mathrm{X}^{\sqsupset}$$

induit un homéomorphisme de $\mathfrak{S}(\overline{\Sigma(\xi)})$ *sur* $\mathfrak{S}(\mathrm{X}) \cap \rho^{-1}(\overline{\Sigma(\xi)})$.

3. *Le bord de la compactification* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ *de* $\mathfrak{S}_0(\mathrm{X})$ *reflète la stratification de* X *:*

$$\mathfrak{S}(\mathrm{X}) = \bigcup_{\xi \in \Xi(\mathrm{X})} \mathfrak{S}(\overline{\Sigma(\xi)}).$$

Démonstration. Modulo le lemme précédent, ces résultats découlent directement des énoncés analogues dans le cas torique (proposition 2.12). □

3.2. La contraction de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$

Comme dans le cas torique, nous allons maintenant voir qu'il existe une manière naturelle de définir une contraction de $\mathrm{X}^{\beth}$ sur $§(\mathrm{X})$. La construction qui suit est essentiellement celle de Berkovich au paragraphe 5 de l'article [**5**].

(2.2.1) L'application H va être obtenue en recollant des applications construites localement à partir des cartes étales.

Définition 3.18. — *Étant donné un k-groupe algébrique* G*, on désigne par* $\widehat{\mathrm{G}}_1$ *le complété formel de* G *au point unité* 1.

On rappelle que la catégorie des k-schémas s'identifie naturellement à une sous-catégorie pleine de la catégorie des k-schémas formels, au k-schéma affine $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ correspondant le k-schéma formel affine $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ obtenu en munissant l'anneau A de la topologie discrète. En particulier, si $m : \mathrm{G} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ est l'action d'un k-groupe G sur un k-schéma Z, le morphisme de k-schémas formels obtenu en composant m avec $i \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}} : \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{Z} \to \mathrm{G} \times \mathrm{Z}$, où i est le morphisme canonique de $\widehat{\mathrm{G}}_1$ dans G, est une action de $\widehat{\mathrm{G}}_1$ sur le k-schéma formel Z.

L'observation suivante se trouve dans l'article [**5**] de V. Berkovich (Lemma 5.5).

Lemme 3.19. — *Soient* G *un k-groupe,* Z *un k-schéma et* $m : \mathrm{G} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ *une action de* G *sur* Z*. Quel que soit le morphisme étale* $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$*, il existe un unique morphisme de k-schémas formels* $m' : \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ *définissant une action de* $\widehat{\mathrm{G}}_1$ *et tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\gamma"'] & \mathrm{U} \arrow[d, "\gamma"] \\
\widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{Z} \arrow[r, "m"'] & \mathrm{Z}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Démonstration. Notons i l'immersion fermée $\mathrm{Spf}(k) \to \widehat{\mathrm{G}}_1$ définissant le k-point 1 de $\widehat{\mathrm{G}}_1$ et considérons le diagramme cartésien suivant dans la catégorie des k-schémas formels :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "g"'] & & \mathrm{U} \arrow[d, "\gamma"] \\
\widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{G}}_1}\times\gamma"'] & \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{Z} \arrow[r, "m"'] & \mathrm{Z}.
\end{tikzcd}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{U}}"'] & & \mathrm{U} \arrow[d, "\gamma"] \\
\{1\} \times \mathrm{U} \arrow[r, "i\times\gamma"] & \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{Z} \arrow[r, "m"'] & \mathrm{Z}
\end{tikzcd}$$

est commutatif puisque $m \circ (i \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}})$ est l'identité de $\mathrm{Z} = \{1\} \times \mathrm{Z}$; il détermine donc une section σ_0 de g au-dessus de la fibre spéciale $\{1\} \times \mathrm{U}$ du k-schéma formel $\widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U}$. Le morphisme g étant étale, σ_0 se prolonge de manière unique en une section σ de g. Par construction, le morphisme $m' = f \circ \sigma$

de $\widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U}$ s'insère alors dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{G}}_1} \times \gamma"'] & \mathrm{U} \arrow[d, "\gamma"] \\ \widehat{\mathrm{G}}_1 \arrow[r, "m"'] & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

et $m' \circ (i \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) = f \circ \sigma_0$ est l'identité de $\mathrm{U} = \{1\} \times \mathrm{U}$. Pour établir que m' définit une action de $\widehat{\mathrm{G}}_1$ sur U, il reste à vérifier que le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[r, "\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{G}}_1} \times m'"'] & \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[d, "m'"] \\ \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[r, "m'"'] & \mathrm{U}, \end{tikzcd}$$

dans lequel $\mu : \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \widehat{\mathrm{G}}_1 \to \widehat{\mathrm{G}}_1$ est la loi de groupe de $\widehat{\mathrm{G}}_1$, est commutatif. Ceci découle du fait que chacun des morphismes $m' \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}})$ et $m' \circ (\mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{G}}_1} \times m')$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{U} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mathrm{id} \times \gamma"'] & \mathrm{U} \arrow[d, "\gamma"] \\ \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \widehat{\mathrm{G}}_1 \times \mathrm{Z} \arrow[r, "m''"'] & \mathrm{Z}, \end{tikzcd}$$

où

$$m'' = m \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}}) = m \circ (\mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{G}}_1} \times m),$$

le même raisonnement que précédemment montrant en effet qu'il existe un unique morphisme ayant cette propriété. □

(3.2.2) Considérons maintenant une carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ et notons T le tore de Z, de groupe des caractères M. Posant $\mathscr{T} = \widehat{\mathrm{T}}_1$, l'espace de Berkovich

$$\mathscr{T}^\beth = \{x \in \mathrm{T}^\beth \mid |\chi(m) - 1|(x) < 1,\ m \in \mathrm{M}\}$$

du k-schéma formel $\mathscr{T}$ est un sous-groupe k-analytique de $\mathrm{T}^\beth$, réunion des sous-groupes $\mathrm{G}(t)$, $t \in [0,1[$, définis dans (2.2.1).

Remarque 3.20. — Quelle que soit l'extension non archimédienne K de k, l'ensemble des K-points de $\mathscr{T}^\beth$ est le groupe des éléments x de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathrm{M}, \mathrm{K}^\times)$ tels que $|x(m) - 1| < 1$ pour tout $m \in \mathrm{M}$. ◇

Le morphisme de k-schémas formels $m' : \mathscr{T} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, déduit à l'aide du lemme précédent de l'action de T sur Z, induit un morphisme d'espaces k-analytiques $m' : \mathrm{T}^\beth \times \mathrm{U}^\beth \to \mathrm{U}^\beth$ qui définit une action du k-groupe analytique $\mathscr{T}^\beth$ sur $\mathrm{U}^\beth$ telle que le morphisme $p : \mathrm{U}^\beth \to \mathrm{Z}^\beth$ soit équivariant.

Tout point x de $\mathrm{U}^\beth$ définit tautologiquement un $\mathscr{H}(x)$-point $\underline{x} : \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{U}^\beth$ et donne lieu au morphisme canonique

$$m'_x : \mathscr{T}^\beth_{\mathscr{H}(x)} = \mathscr{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{U}^\beth,$$

composé par m' de l'homomorphisme $\mathrm{id}_{\mathscr{T}^\beth} \times \underline{x} : \mathscr{T}^\beth \times \mathscr{M}(\mathscr{H}(x)) \to \mathscr{T}^\beth \times \mathrm{U}^\beth$.

La définition suivante s'impose d'elle-même.

Définition 3.21. — *Étant donnée une carte étale* $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ *sur* X, *on définit une application* H_γ *de* $[0,1] \times \mathrm{U}^\beth$ *dans* $\mathrm{U}^\beth$ *en posant, pour tout point* $x \in \mathrm{U}^\beth$ *:*

- $\mathrm{H}_\gamma(t,x)$ *est l'image par* m'_x *du point de Shilov* $g_{\mathscr{H}(x)}(t)$ *de l'espace* $\mathscr{H}(x)$*-affinoïde* $\mathrm{G}_{\mathscr{H}(x)}$ *si* $t \in [0,1[$ *;*
- $\mathrm{H}_\gamma(1,x) = \mathbf{p}_{\mathrm{X}}(x)$.

Remarque 3.22. — 1) Quel que soit t dans $[0,1[$, l'application $\mathrm{H}_\gamma(t,\cdot)$ stabilise chacune des fibres de l'application de réduction $r : \mathrm{U}^\beth \to \mathrm{U}$.

2) Soient $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ une carte étale sur X et x un point de $\mathrm{U}^\beth$. Désignant par $m' : \mathscr{T} \times \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ l'action de $\mathscr{T}$ sur U fournie par le lemme 3.19, le morphisme $m'_x : \mathscr{T}^\beth \to \mathrm{U}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x)$ se factorise par la projection canonique de $\mathrm{U}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x)$ sur $\mathrm{U}^\beth$. Pour tout $t \in [0,1[$, l'image $\mathrm{G}(t,x)$ du sous-groupe analytique $\mathrm{G}_{\mathscr{H}(x)}(t) \subset \mathrm{T}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x)$ dans $\mathrm{U}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathscr{H}(x)$ est *l'orbite* du $\mathscr{H}(x)$-point $\underline{x}$ sous $\mathrm{G}_{\mathscr{H}(x)}(t)$.

3) Soit K une extension du corps k, également munie de la valeur absolue triviale. Ayant observé que toute k-variété torique normale est géométriquement normale (cela se vérifie localement, un ouvert affine invariant de semi-groupe associé S étant normal si et seulement si S est saturé), on constate que l'immersion ouverte $\mathrm{X}_0 \otimes_k \mathrm{K} \hookrightarrow \mathrm{X} \otimes_k \mathrm{K}$ est toujours un plongement toroïdal et que, si $p : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ est une carte étale sur X, $p_\mathrm{K} = p \otimes \mathrm{id} : \mathrm{U} \otimes_k \mathrm{K} \to \mathrm{Z} \otimes_k \mathrm{K}$ est une carte étale sur $\mathrm{X} \otimes_k \mathrm{K}$. Désignant par T le tore de Z, on vérifie immédiatement que l'action de $(\widehat{\mathrm{T} \otimes_k \mathrm{K}})_1$ sur $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{K}$ est celle déduite par changement de base de l'action de $\widehat{\mathrm{T}}_1$ sur U ; en découle en particulier la commutativité du diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times \mathrm{U}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K} & \xrightarrow{\mathrm{H}_{\gamma_\mathrm{K}}} & \mathrm{U}^\beth \widehat{\otimes}_k \mathrm{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0,1] \times \mathrm{U}^\beth & \xrightarrow[\mathrm{H}_\gamma]{} & \mathrm{U}^\beth. \end{array}$$

◇

Proposition 3.23. — *Quelle que soit la carte étale* $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ *sur* X, *l'application* $\mathrm{H}_\gamma : [0,1] \times \mathrm{U}^\beth \to \mathrm{U}^\beth$ *satisfait aux propriétés suivantes :*

(i) *elle est continue ;*

(ii) $\mathrm{H}_\gamma(0,\cdot$ *est l'identité de* $\mathrm{U}^\beth$ *et* $\mathrm{H}_\gamma(1,\cdot)$ *est la rétraction* $\mathbf{p}_\mathrm{U}$ *de* $\mathrm{U}^\beth$ *sur* $\mathfrak{S}(\mathrm{U})$ *;*

(iii) $\mathrm{H}_\gamma(t,\cdot$ *induit l'identité sur* $\mathfrak{S}(\mathrm{U})$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Démonstration. Désignant par H_Z l'homomotopie $[0,1] \times \mathrm{Z}^\beth \to \mathrm{Z}^\beth$ construite à la section 2.2 du chapitre précédent, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times \mathrm{U}^\beth & \xrightarrow{\mathrm{H}_\gamma} & \mathrm{U}^\beth \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_{[0,1]} \times \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ [0,1] \times \mathrm{Z}^\beth & \xrightarrow[\mathrm{H}_\mathrm{Z}]{} & \mathrm{Z}^\beth \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Ces deux assertions sont trivialement vérifiées.

(iii) Modulo le diagramme commutatif que l'on vient d'écrire, cette assertion découle directement du résultat analogue pour H_Z (proposition 2.16) et du fait que γ réalise une bijection de $\gamma^{-1}(\mathfrak{S}(\mathrm{Z})) = \mathfrak{S}(\mathrm{U})$ sur le sous-ensemble $\gamma(\mathfrak{S}(\mathrm{U}))$ de $\mathfrak{S}(\mathrm{Z})$.

(i) La continuité de H_γ s'établit exactement comme dans le cas torique (proposition 2.16). □

La dernière étape consiste à s'assurer que les homotopies locales H_γ peuvent se recoller en une homotopie globale H.

Lemme 3.24. — *Étant données deux cartes étales* $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ *et* $\gamma' : \mathrm{U}' \to \mathrm{Z}'$ *sur* X, H_γ *et* $\mathrm{H}_{\gamma'}$ *stabilisent* $(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')^\beth = \mathrm{U}^\beth \cap \mathrm{U}'^\beth$ *et leurs restrictions à* $[0,1] \times (\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')^\beth$ *coïncident.*

Démonstration. Les applications $\mathrm{H}_\gamma(t,\cdot)$ et $\mathrm{H}_{\gamma'}(t,\cdot)$ stabilisent les fibres de l'application de réduction $r : \mathrm{X}^\beth \to \mathrm{X}$ pour tout $t \in [0,1[$; elles stabilisent donc le sous-espace fermé $\mathrm{U}^\beth \cap \mathrm{U}'^\beth = (\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')^\beth = r^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ de $\mathrm{X}^\beth$, et ceci est vrai pour tout $t \in [0,1]$ par un argument de continuité.

Nous allons maintenant établir l'égalité

$$\mathrm{H}_{\gamma}(t,x) = \mathrm{H}_{\gamma'}(t,x)$$

pour tout point $x \in \mathrm{U}^{\beth} \cap \mathrm{U}'^{\beth}$ et tout $t \in [0,1]$. Notons d'emblée qu'il suffit de se restreindre au cas $t \in]0,1[$ puisque le résultat est déjà acquis si $t = 0$ ou $t = 1$.

Première étape — On peut supposer $\mathrm{U} = \mathrm{U}'$. On peut également supposer qu'il existe un point ξ dans $\Xi(\mathrm{X})$ tel que $\xi \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X}(\xi)$ car les ouverts $\mathrm{X}(\xi)$, $\xi \in \Xi(\mathrm{X})$, recouvrent X. Sous ces conditions, les variétés toriques Z et Z′ peuvent être remplacées par $\mathrm{Z}(\gamma(\xi))$ et $\mathrm{Z}'(\gamma'(\xi))$ respectivement (lemme 3.6), auquel cas les homomorphismes $\gamma^* : \Lambda(\mathrm{Z}) \to \Lambda(\mathrm{U})$ et $\gamma'^* : \Lambda(\mathrm{Z}') \to \Lambda(\mathrm{U}')$ sont des isomorphismes. Il existe en outre un isomorphisme équivariant $\varphi : \mathrm{Z}' \to \mathrm{Z}$ tel que $\varphi^* = (\gamma'^*)^{-1} \circ \gamma^*$ et on déduit enfin du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{T} \times \mathrm{U} \arrow[ddl, "\mathrm{id}\times\gamma"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\gamma'"] & & & \mathrm{U} \arrow[ddl, "\gamma"'] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
& & \mathscr{T} \times \mathrm{Z}' \arrow[dll, "\mathrm{id}\times\varphi"'] \arrow[rrr, "m_{\mathrm{Z}'}"] & & & \mathrm{Z}' \arrow[dll, "\varphi"] \\
\mathscr{T} \times \mathrm{Z} \arrow[rrr, "m_{\mathrm{Z}}"'] & & & \mathrm{Z} & &
\end{tikzcd}$$

l'identité $\mathrm{H}_{\varphi\circ\gamma} = \mathrm{H}_{\gamma'}$, qui permet de remplacer γ' par $\varphi \circ \gamma$.

On s'est ainsi ramené à établir l'assertion suivante : si $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ et $\delta : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ sont deux cartes étales affines telles que les homomorphismes $\gamma^*, \delta^* : \Lambda(\mathrm{Z}) \to \Lambda(\mathrm{U})$ soient des isomorphismes et coïncident, $\mathrm{H}_{\gamma}(t,\cdot) = \mathrm{H}_{\delta}(t,\cdot)$ pour tout $t \in]0,1[$. Notons que, comme les morphismes γ et δ de U dans Z induisent le même homomorphisme de $\Lambda(\mathrm{Z})$ dans $\Lambda(\mathrm{U})$, $\gamma^{-1}(\mathrm{O}) = \delta^{-1}(\mathrm{O})$ pour toute orbite O de Z.

Nous fixons maintenant un point x dans $\mathrm{U}^{\beth}$ et désignerons indistinctement par $\underline{x}$ les morphismes $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)^{\circ}) \to \mathrm{U}$ et $\mathrm{Spec}(\mathscr{H}(x)) \to \mathrm{U}$ qu'il induit, ainsi que le $\mathscr{H}(x)$-point de $\mathrm{U}^{\beth}_{\mathscr{H}(x)} = \mathrm{U}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathscr{H}(x)$ qu'il détermine.

Deuxième étape — Quitte à remplacer le corps k par une extension munie de la valeur absolue triviale, nous pouvons supposer que $r(x)$ est un k-point de U. En réduisant U, nous pouvons également supposer que $r(x)$ est l'unique point des fibres $\gamma^{-1}(\gamma(r(x)))$ et $\delta^{-1}(\delta(r(x)))$.

Du fait que γ et δ induisent les mêmes isomorphismes de $\Lambda(\mathrm{Z})$ sur $\Lambda(\mathrm{U})$, $\gamma^{-1}(\mathrm{O}) = \delta^{-1}(\mathrm{O})$ pour toute orbite O de Z ; les k-points $\gamma(r(x))$ et $\delta(r(x))$ de Z appartiennent ainsi à la même orbite et il existe en conséquence un élément α de $\mathrm{T}(k)$ tel que l'automorphisme $[\alpha]$ de Z auquel α donne naissance envoie $\gamma(r(x))$ sur $\delta(r(x))$. Comme au cours de la réduction préliminaire, on vérifie l'égalité $\mathrm{H}_{[\alpha]\circ\gamma} = \mathrm{H}_{\gamma}$, qui permet de remplacer le morphisme γ par $[\alpha] \circ \gamma$.

Au terme de cette seconde réduction, nous sommes ramenés à démontrer l'assertion suivante : soient $\gamma, \delta : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ des cartes étales affines et x un point de $\mathrm{U}^{\beth}$ tels que $r(x)$ soit un k-point de U, $\gamma(r(x)) = \delta(r(x))$ et

$$\gamma^{-1}(\gamma(r(x))) = \delta^{-1}(\delta(r(x))) = \{x\};$$

alors $\mathrm{H}_{\gamma}(t,x) = \mathrm{H}_{\delta}(t,x)$ pour tout $t \in]0,1[$.

Si l'on voit les $\mathscr{H}(x)^{\circ}$-points de $\mathrm{U} \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ}$ et $\mathrm{Z} \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ}$ comme des sous-schémas fermés, la condition précédente sur les fibres de γ et δ implique les égalités

$$\underline{x} = \gamma^{-1}(\gamma(\underline{x})) = \delta^{-1}(\delta(\underline{x}))$$

car les morphismes $\gamma, \delta : \mathrm{U} \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ} \to \mathrm{Z} \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ}$ sont étales.

Troisième étape – Nous considérons maintenant les orbites $\mathrm{G}(t,\gamma(\underline{x}))$ et $\mathrm{G}(t,\delta(\underline{x}))$ des points $\gamma(\underline{x})$ et $\delta(\underline{x})$ de $\mathrm{Z}_{\mathscr{H}(x)} = \mathrm{Z}\widehat{\otimes}_k\mathscr{H}(x)$ sous le groupe $\mathrm{G}(t)_{\mathscr{H}(x)}$ et allons prouver l'identité

$$\gamma^{-1}(\mathrm{G}(t,\gamma(\underline{x}))) = \delta^{-1}(\mathrm{G}(t,\delta(\underline{x})))$$

dans $U^{\beth}_{\mathscr{H}(x)}$.

Choisissons une immersion ouverte équivariante $T \hookrightarrow Z$ et notons S le semi-groupe dans M qui correspond à Z. Les morphismes γ et δ induisant le même homomorphisme de $\Lambda(Z) = M$ dans $\Lambda(U)$, les éléments $\gamma^{\#}\chi(m)$ et $\delta^{\#}\chi(m)$ de $\mathscr{O}_X(U)$ ont le même diviseur quel que soit $m \in S$ et il existe donc des unités $u_m \in \mathscr{O}_X(U)^{\times}$ telles que

$$\delta^{\#}\chi(m) = u_m \gamma^{\#}\chi(m)$$

pour tout $m \in S$. On pose $\delta_m = \delta^{\#}\chi(m)$ et $\gamma_m = \gamma^{\#}\chi(m)$ $(m \in S)$.

Comme $G(t, \gamma(\underline{x}))$ et $G(t, \delta(\underline{x}))$ sont respectivement les domaines affinoïdes

$$\{|\chi(m) - \gamma(\underline{x})^*\chi(m)| \leq t \ ; \ m \in S\} \quad \text{et} \quad \{|\chi(m) - \delta(\underline{x})^*\chi(m)| \leq t \ ; \ m \in \S\}$$

de $Z^{\beth}_{\mathscr{H}(x)}$, nous devons établir l'identité

$$\{|\gamma_m - \underline{x}^*\gamma_m| \leq t \ ; \ m \in S\} = \{|\delta_m - \underline{x}^*\delta_m| \leq t \ ; \ m \in S\}$$

dans $U^{\beth}_{\mathscr{H}(x)}$.

Écrivant $\delta_m - \underline{x}^*\delta_m$ sous la forme

$$\delta_m - \underline{x}^*\delta_m = u_m\gamma_m - \underline{x}^*u_m\underline{x}^*\gamma_m = u_m(\gamma_m - \underline{x}^*\gamma_m) + \underline{x}^*\gamma_m(u_m - \underline{x}^*u_m)$$

dans $\mathscr{O}_X(U) \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ}$, nous obtenons la majoration

$$\begin{aligned} |\delta_m - \underline{x}^*\delta_m| &\leq \max\left(|u_m|.|\gamma_m - \underline{x}^*\gamma_m|, |\underline{x}^*\gamma_m|.|u_m - \underline{x}^*u_m|\right) \\ &\leq \max(|\gamma_m - \underline{x}^*\gamma_m|, |u_m - \underline{x}^*u_m|) \end{aligned}$$

pour tout $m \in S$. Les éléments $\chi(m) - \gamma(\underline{x})^*\chi(m)$ de l'anneau $\mathscr{O}_Z(Z) \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ}$ engendrent l'idéal premier définissant le $\mathscr{H}(x)^{\circ}$-point $\gamma(\underline{x})$; en vertu de l'identité $\underline{x} = \gamma^{-1}(\gamma(\underline{x}))$ entre sous-schémas fermés de $U \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ}$ établie à la fin de l'étape précédente, il en découle que l'idéal premier de $\mathscr{O}_X(U)$ définissant le $\mathscr{H}(x)^{\circ}$-point $\underline{x}$ – c'est-à-dire le noyau de l'homomorphisme d'évaluation

$$\underline{x}^* : \mathscr{O}_X(U) \otimes_k \mathscr{H}(x)^{\circ} \to \mathscr{H}(x)^{\circ} \text{ –}$$

est engendré par les éléments $\gamma^{\#}(\chi(m) - \gamma(\underline{x})^*\chi(m)) = \gamma_m - \underline{x}^*\gamma_m$, $m \in S$. Nous déduisons immédiatement de cette dernière observation les majorations

$$|u_m - \underline{x}^*u_m| \leq \max_{m' \in S} |\gamma_{m'} - \underline{x}^*\gamma_{m'}|$$

puis

$$|\delta_m - \underline{x}^*\delta_m| \leq \max_{m' \in S} |\gamma_{m'} - \underline{x}^*\gamma_{m'}|$$

pour tout $m \in S$.

Les morphismes γ et δ jouant un rôle symétrique dans l'argument précédent, nous avons ainsi prouvé l'égalité

$$\max_{m \in S} |\gamma_m - \underline{x}^*\gamma_m| = \max_{m \in S} |\delta_m - \underline{x}^*\delta_m|$$

sur $U^{\beth}_{\mathscr{H}(x)}$, laquelle implique

$$\gamma^{-1}(G(t, \gamma(\underline{x}))) = \delta^{-1}(G(t, \delta(\underline{x})))$$

pour tout élément t de $[0, 1]$.

Quatrième étape – Désignons respectivement par m_{γ} et m_{δ} les actions du groupe k-analytique $\mathscr{T}^{\beth}$ sur $U^{\beth}$ qui sont déduites via γ et δ de l'action de ce groupe sur $Z^{\beth}$ (lemme 3.19). Dans la situation présente, $\gamma^{-1}(G(t, \gamma(\underline{x})))$ (resp. $\delta^{-1}(G(t, \delta(\underline{x})))$ est, pour tout $t \in]0, 1[$, l'orbite $G_{\gamma}(t, \underline{x})$ (resp. $G_{\delta}(t, \underline{x})$) du point $\underline{x}$ de $U^{\beth}_{\mathscr{H}(x)}$ sous le sous-groupe $G(t)_{\mathscr{H}(x)}$ de $\mathscr{T}^{\beth}\widehat{\otimes}_k\mathscr{H}(x)$, celui-ci agissant via m_{γ} (resp. m_{δ}). Comme les sous-ensembles $G_{\gamma}(t, \underline{x})$ et $G_{\delta}(t, \underline{x})$ sont des domaines affinoïdes ayant chacun un unique point de Shilov et que, par définition, les images de ces derniers par la projection canonique de $\mathrm{U}^{\beth}_{\mathscr{H}(x)} \to \mathrm{U}^{\beth}$ sont les points $\mathrm{H}_{\gamma}(t,x)$ et $\mathrm{H}_{\delta}(t,x)$ respectivement, nous avons finalement prouvé l'identité

$$\mathrm{H}_{\gamma}(t,x) = \mathrm{H}_{\delta}(t,x)$$

pour tout $t \in]0,1[$. La démonstration du lemme est achevée. □

THÉORÈME 3.25. — *Il existe une application et une seule*

$$\mathrm{H} : [0,1] \times \mathrm{X}^{\beth} \to \mathrm{X}^{\beth}$$

satisfaisant à la condition suivante : pour toute carte étale $\gamma : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ *sur* X, H *envoie* $[0,1] \times \mathrm{U}^{\beth}$ *dans* $\mathrm{U}^{\beth}$ *et sa restriction à* $[0,1] \times \mathrm{U}^{\beth}$ *est l'homotopie* H_{γ} *de la proposition 3.23.*

C'est une application continue telle que, pour tout point $x \in \mathrm{X}^{\beth}$ *:*
- $\mathrm{H}(0,x) = x$ *;*
- $\mathrm{H}(1,x) = \mathbf{p}_{\mathrm{X}}(x)$ *;*
- *si x appartient à* $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$, $\mathrm{H}(t,x) = x$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

Démonstration. Cet énoncé la conjonction de la proposition 3.23 et du lemme précédent. □

4. APPLICATION AUX DIVISEURS À CROISEMENTS NORMAUX

Dans ce dernier chapitre, les résultats précédemment obtenus sur les espaces de Berkovich associés aux plongements toroïdaux sont appliqués à la détermination explicite du type d'homotopie de la fibre générique $\mathfrak{X}_{\eta}$ du complété formel $\mathfrak{X}$ d'un k-schéma localement algébrique X le long d'un diviseur à croisements normaux simples. La formulation toroïdale de cette dernière situation nécessite de supposer que le corps k soit parfait.

4.1. Le complexe d'incidence d'un diviseur à croisements normaux

(4.1.1) On désigne par $\underline{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles $[n] = \{0,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, et dont les flèches $[n] \to [m]$ sont les applications croissantes. Par définition, un *ensemble simplicial* est un foncteur de la catégorie $\underline{\Delta}^{\mathrm{op}}$ dans celle des ensembles et un morphisme (ou une application simpliciale) entre ensembles simplicaux est un morphisme de foncteurs. Si Δ est un ensemble simplicial et n est un entier naturel, les éléments de l'ensemble $\Delta([n])$ sont les *n-simplexes* de Δ.

Étant donné un ensemble I, on désigne par Δ_{I} l'ensemble simplicial tel que

$$\Delta_{\mathrm{I}}([n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}([n],\mathrm{I})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4.1.2) Un *diviseur* D sur un schéma X est, par convention, un diviseur de Cartier et l'on désigne par $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ son support.

DÉFINITION 4.1. — *Un diviseur* D *sur un schéma localement noethérien* X *est dit* à croisements normaux simples *s'il existe en tout point x de* $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ *un système régulier de paramètres* $(z_1,\dots,z_d)$ *dans l'anneau local* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *et des entiers naturels* $\mathrm{N}_1,\dots,\mathrm{N}_d$ *tels que :* $\mathrm{D}_x = \mathrm{div}(z_1^{\mathrm{N}_1}\dots z_d^{\mathrm{N}_d})$.

Remarque 4.2. — Dans la définition précédente, le schéma X est *régulier* en tout point du support $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ de D ; si ce schéma est excellent, il existe donc un voisinage ouvert U de $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ qui est régulier. ◇

DÉFINITION ET PROPOSITION 4.3. — *Soient* X *un schéma localement noethérien excellent et* D *un diviseur à croisements normaux simples sur* X.

1) *La suite* $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de sous-ensembles de* X *définie par*

$$\mathrm{Y}_{-1} = \mathrm{Supp}(\mathrm{D}),\ \mathrm{Y}_0 = \mathrm{Rég}(\mathrm{Supp}(\mathrm{D})),\ \textit{et, pour tout } n \geq 0,\ \mathrm{Y}_{n+1} = \mathrm{Rég}(\mathrm{Y}_{n-1} - \mathrm{Y}_n)$$

est une stratification de $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ *en sous-espaces localement fermés. Quel que soit le point x de* $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$, *on note* $\Psi(\mathrm{D}\,;\,x)$ *l'ensemble des points génériques de* $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ *qui sont des générisations de x et on désigne par* $\Delta(\mathrm{D}\,;\,x)$ *l'ensemble simplicial* $\Delta_{\Psi(\mathrm{D};\,x)}$.

2) *Quels que soient les points* $x, y \in \mathrm{X}$, *on note « $x \to y$ » la relation de spécialisation* $y \in \overline{\{x\}}$ *et l'on voit ainsi* X *comme une petite catégorie dont* $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ *est une sous-catégorie pleine. Si* $x \to y$, *l'inclusion évidente* $\Psi(\mathrm{D}\,;\,x) \subset \Psi(\mathrm{D}\,;\,y)$ *donne lieu à une application simpliciale* $\Delta(\mathrm{D}\,;\,x) \to \Delta(\mathrm{D}\,;\,y)$ *; on dispose donc d'un foncteur* $\Delta(\mathrm{D}\,;\,\cdot)$ *de* $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$ *dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Par définition, le* complexe d'incidence *du diviseur à croisements normaux simples* D *est l'ensemble simplicial*

$$\Delta(\mathrm{D}) = \varinjlim_{\mathrm{Supp}(\mathrm{D})} \Delta(\mathrm{D}\,;\cdot).$$

3) *Pour tout entier naturel q, les q-faces non-dégénérées de* $\Delta(\mathrm{D})$ *correspondent biunivoquement aux points génériques de* Y_q.

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 0$, le sous-schéma fermé réduit $\overline{\mathrm{Y}_n}$ de X est excellent et Y_n en est l'ouvert dense des points réguliers. L'hypothèse que D soit à croisements normaux implique en outre immédiatement que

$$\overline{\mathrm{Y}_{n+1}} = \overline{\mathrm{Y}_n} - \mathrm{Y}_n = \overline{\mathrm{Y}_n} - \mathrm{Rég}(\overline{\mathrm{Y}_n})$$

soit purement de codimension un dans $\overline{\mathrm{Y}_n}$.

3) Quel que soit l'entier naturel q, l'ensemble des q-faces non dégénérées de $\Delta(\mathrm{D})$ est la réunion des q-faces non dégénérées des ensembles simpliciaux $\Delta(\mathrm{D}; x)$ vus comme sous-ensembles simpliciaux de $\Delta(\mathrm{D})$.

Étant donnés un point x dans $\mathrm{Supp}(\mathrm{D})$, un système régulier de paramètres $(z_1, \ldots, z_d)$ dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ et des entiers naturels $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_d$ tels que $\mathrm{D}_x = \mathrm{div}(z_1^{\mathrm{N}_1} \ldots z_d^{\mathrm{N}_d})$, désignons par I le sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, d\}$ constitué des indices i tels que $\mathrm{N}_i \geq 1$. Pour toute partie non vide I' de I, le fermé $\mathrm{Z}_{\mathrm{I}'} = \mathrm{V}(z_i\,;\, i \in \mathrm{I}')$ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},\xi})$ est irréductible (car régulier), de codimension $\mathrm{Card}(\mathrm{I}')$ dans X, et on vérifie par récurrence sur l'entier naturel n que l'application

$$\mathrm{C} \to \overline{\mathrm{C}} \cap \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$$

réalise une bijection de l'ensemble des composantes connexes de Y_n auxquelles le point x est adhérent sur l'ensemble des fermés $\mathrm{Z}_{\mathrm{I}'}$, où I' est une partie de I de cardinal $n+1$. D'autre part, $\Psi(\mathrm{D}; x)$ est, par définition, l'ensemble des points génériques des fermés $\mathrm{Z}_{\{i\}}$, $i \in \mathrm{I}$, et les q-faces non dégénérées de l'ensemble simplicial $\Delta(\mathrm{D}; x) = \Delta_{\Psi(\mathrm{D};x)}$ sont canoniquement en bijection avec les parties à $q+1$ éléments de l'ensemble $\Psi(\mathrm{D}; x)$. On voit donc que, pour tout entier naturel q, les q-faces non dégénérées de $\Delta(\mathrm{D}; x)$ correspondent biunivoquement aux points génériques de Y_q dont x est une spécialisation. □

Remarque 4.4. — Considérons la stratification

$$\mathrm{Supp}(\mathrm{D}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Y}_n$$

et désignons par $\Xi(\mathrm{D})$ l'ensemble des points génériques des strates. Étant donné un point x dans Y_n, il existe un unique point y dans $\Xi(\mathrm{D})$ tel que $x \in \overline{\{y\}}$; l'inclusion $\Psi(\mathrm{D}\,;\,y) \subset \Psi(\mathrm{D}\,;\,x)$ est alors une égalité et l'application canonique $\Delta(\mathrm{D}\,;\,y) \to \Delta(\mathrm{D}\,;\,x)$ est donc un isomomorphisme. Cette observation permet de remplacer Y par $\Xi(\mathrm{D})$ dans la définition de $\Delta(\mathrm{D})$:

$$\Delta(\mathrm{D}) = \varinjlim_{\Psi(\mathrm{D})} \Delta(\mathrm{D}\,;.\cdot)$$

◇

4.2. Généralisation d'un théorème de D. Stepanov

PROPOSITION 4.5. — *Soient* X *un schéma localement algébrique sur un corps* parfait k, D *un diviseur à croisements normaux simples sur* X *et* $\mathfrak{X}$ *le complété formel de* X *le long du fermé* Supp(D). *Étant donné un voisinage ouvert régulier* X′ *de* Supp(D) *dans* X*, l'immersion ouverte* $X' - \mathrm{Supp}(D) \hookrightarrow X'$ *est un plongement toroïdal et le polyèdre conique épointé* $\mathfrak{S}_0(X')^* = \mathfrak{S}(X') \cap \mathfrak{X}_\eta$ *construit au cours de la section 3.1 du chapitre précédent est canoniquement homéomorphe à l'espace topologique* $|\Delta(D)| \times]0, +\infty[$.

Démonstration. Le schéma X étant régulier en chaque point du support de D et excellent, il existe un voisinage ouvert régulier X′ de Supp(D) dans X.

Étant donnés un tel ouvert X′, un point x dans X′ et un système régulier de paramètres $(z_1, \ldots, z_d)$ dans $\mathscr{O}_{X,x}$ tel que $D_x = \mathrm{div}(z_1^{N_1} \ldots z_d^{N_d})$ pour certains entiers naturels $N_1, \ldots, N_d$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X′ tel que $z_1, \ldots, z_d \in \mathscr{O}_X(U)$ et $D_{|U} = \mathrm{div}(z_1^{N_1} \ldots z_d^{N_d})$. Désignons par I l'ensemble des indices $i \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $N_i > 0$ et par J son complémentaire dans $\{1, \ldots, n\}$. Le morphisme $\gamma : U \to \mathbb{A}_k^d = \mathrm{Spec}(k[T_1, \ldots, T_d])$ défini par

$$\gamma^* T_i = \begin{cases} z_i & \text{si } i \in I \\ z_i + 1 & \text{si } i \in J \end{cases}$$

($i \in \{1, \ldots, n\}$) est non-ramifié – et donc étale puisque le corps k est parfait – au point x ; quitte à restreindre U, on peut supposer que γ est étale en tout point et que les sections $z_i + 1$, $i \in J$, sont inversibles sur U. Sous ces conditions, l'ouvert $U \cap (X' - \mathrm{Supp}(D))$ est l'image réciproque par γ de l'ouvert $\{T_1 \neq 0, \ldots, T_n \neq 0\} \subset \mathbb{A}_k^d$, lequel est l'orbite ouverte de l'espace affine $\mathbb{A}_k^d$ vu comme variété torique via l'action canonique de $\mathbb{G}\mathrm{m}_k^d$. L'immersion $X' - \mathrm{Supp}(D) \hookrightarrow X'$ est donc un plongement toroïdal dont la décomposition

$$X' = X'_0 \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y_n - Y_{n+1}),$$

où $X'_0 = X' - \mathrm{Supp}(D)$, est la stratification canonique.

Comme cela a été expliqué au cours de la section 3.1 (à l'issue de la remarque 3.12), le diviseur $D^{\text{réd}}$ donne naissance à une fonction réelle $\varphi_{D^{\text{réd}}} = -\log|D^{\text{réd}}|$ sur l'ouvert $\rho_{X'}^{-1}(X'_0)$ de $X'^{\sqsupset}$; sa restriction à $\rho_{X'}^{-1}(X'_0) \cap U^{\sqsupset} \cap r_X^{-1}(\mathrm{Supp}(D))$ est la fonction $\sum_{i \in I}(-\log|z_i|)$.

Supposons maintenant que x soit un point générique de l'une des strates $Y_q - Y_{q+1}$ de

$$\mathrm{Supp}(D) = \bigcup_{n \geq 0} (Y_n - Y_{n+1}).$$

L'ensemble I est de cardinal $q + 1$ et x est l'un des points génériques du sous-espace localement fermé $\{z_i = 0,\ i \in I \text{ et } z_j \neq 0,\ j \in J\}$ de U ; $p(x)$ est donc un point générique du sous-espace fermé $\{T_i = 0,\ i \in I \text{ et } T_j \neq 0,\ j \in J\}$ de l'ouvert invariant $\{T_j \neq 0,\ j \in J\} \subset \mathbb{A}_k^d$. Vu la proposition 3.15, l'application

$$(-\log|z_1|, \ldots, -\log|z_d|) \ : \ \rho_{X'}^{-1}(X'_0) \cap U^{\sqsupset} \to \mathbb{R}^d$$

réalise un isomorphisme h du cône $\mathfrak{S}_0(U)$ sur le cône simplicial

$$\{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d \mid t_j = 0,\ j \in J \text{ et } t_i \geq 0,\ i \in I\}$$

qui ne dépend pas du choix des paramètres z_i. L'application h^{-1} induit donc un homéomorphisme i_x du q-simplexe standard

$$|\Delta(D; x)| = \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d \mid t_j = 0,\ j \in J \text{ et } t_i = 1,\ i \in I\}$$

sur le sous-espace fermé

$$\mathfrak{S}_0(U) \cap \{\varphi_{D^{\text{réd}}} = 1\}$$

du cône $\mathfrak{S}_0(U) \subset \mathfrak{S}_0(X')$.

Il découle directement de la définition du polyèdre conique $\mathfrak{S}_0(X')$ que les différentes applications $i_x : |\Delta(D;x)| \to \mathfrak{S}_0(X') \cap \{\varphi_{D_{\text{réd}}} = 1\}$ se recollent en un homéomorphisme canonique i de la réalisation géométrique $|\Delta(D)|$ du complexe d'incidence de D sur le sous-espace fermé $\mathfrak{S}_0(X) \cap \{\varphi_{D_{\text{réd}}} = 1\}$ du polyèdre épointé $\mathfrak{S}_0(X')^*$, et ceci de tel sorte que l'application $\delta : |\Delta(D)| \to \mathfrak{S}_0(X')^*/\mathbb{R}_{>0}$, composée de i par la projection canonique, soit un homéomorphisme. Nous obtenons ainsi un homéomorphisme canonique $(\delta^{-1}, \varphi_{D_{\text{réd}}})$ de $\mathfrak{S}_0(X')^* = \mathfrak{S}(X) \cap \mathfrak{X}_\eta$ sur $|\Delta(D)| \times]0, +\infty[$. □

Avec les hypothèses et les notations de la proposition précédente, on note $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ la trace de $\mathfrak{X}_\eta \subset X'^{\sqsupset}$ sur le sous-espace fermé $\mathfrak{S}(X')$ de $X'^{\sqsupset}$. L'endomorphisme $\mathbf{p}_{X'}$ de $X'^{\sqsupset}$ stabilise le sous-espace ouvert $\mathfrak{X}_\eta$ et induit donc un endomorphisme de ce dernier, noté $\mathbf{p}_{\mathfrak{X}}$, qui réalise une rétraction de $\mathfrak{X}_\eta$ sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$. Tant $\mathfrak{S}(\mathfrak{X})$ que $\mathbf{p}_{\mathfrak{X}}$ ne dépendent que du schéma formel $\mathfrak{X}$, et non du choix du voisinage régulier X' de Supp(D) dans X.

THÉORÈME 4.6. — *Soient* X *un schéma localement algébrique sur un corps* parfait *k et* Y *un sous-schéma fermé de* X. *Étant donnés deux morphismes* $f_1 : X_1 \to X$, $f_2 : X_2 \to X$ *tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout* $i \in \{1,2\}$ *:*

- le morphisme f_i *est propre et il réalise un isomorphisme de* $X_i - f_i^{-1}(Y)$ *sur* $X - Y$ *;*

- le sous-schéma fermé $f_i^{-1}(Y)$ *de* X_i *est un diviseur à croisements normaux simples ;*

les espaces topologiques $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$ *et* $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$ *sont homotopes.*

Démonstration. Désignons respectivement par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ les complétés formels de X, X_1 et X_2 le long de Y, $f_1^{-1}(Y)$ et $f_2^{-1}(Y)$. Les morphismes $\widehat{f_1} : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}$ et $\widehat{f_2} : \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}$ induisent des isomorphismes sur les fibres génériques (proposition 1.10) ; d'après le théorème 3.25 et la proposition 4.5, les applications continues

$$\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_2} \circ \widehat{f}_{2,\eta}^{-1} \circ \widehat{f}_{1,\eta} : \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2)$$

et

$$\mathbf{p}_{\mathfrak{X}_1} \circ \widehat{f}_{1,\eta}^{-1} \circ \widehat{f}_{2,\eta} : \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_2) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_1)$$

sont alors des équivalences d'homotopie réciproques et, vu la proposition précédente, les espaces topologiques $|\Delta(f_1^{-1}(Y))|$ et $|\Delta(f_2^{-1}(Y))|$ sont canoniquement homotopes. □

COROLLAIRE 4.7. — *Soit* X *un schéma localement algébrique sur un corps k de caractéristique* nulle *et soit* Y *un sous-schéma fermé* Y *de* X *tel que l'ouvert* $X - Y$ *soit dense et régulier. Désignant par* $\mathfrak{X}$ *le complété formel de* X *le long de* Y, *l'espace topologique sous-jacent à la fibre générique* $\mathfrak{X}_\eta$ *de* $\mathfrak{X}$ *a le type d'homotopie d'un CW-complexe.*

Démonstration. Appliquant les deux théorèmes principaux établis par Hironaka dans [**8**], il existe un Idéal sur X de support contenu dans Y et dont l'éclatement $f : X' \to X$ est tel que $f^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux simples. Le morphisme f étant propre et induisant un isomorphisme de $X' - f^{-1}(Y)$ sur $X - Y$, il donne lieu à un isomorphisme de $\mathfrak{X}'_\eta$ sur $\mathfrak{X}_\eta$; la conclusion en découle puisque l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}'_\eta$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe. □

Références

[EGA] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique*, Chap. I-IV, rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ, *Publications mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* (1960-1967)

[1] V. G. BERKOVICH, *Spectral Theory and analytic Geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol.33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990

[2] V. G. BERKOVICH, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, *Publ. math. de l'IHES* 78 (1993), 5-161

[3] V. G. BERKOVICH, Vanishing cycles for formal schemes, *Invent. Math.* **115** (1994), 539-571

[4] V. G. BERKOVICH, Vanishing cycles for formal schemes II, *Invent. Math.* **125** (1996), 367-390

[5] V. G. BERKOVICH, Smooth *p*-adic analytic spaces are locally contractible, *Invent. Math.* **125** (1999), 1-84

[6] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie (version provisoire 1991), Prépublication 96-03 de l'université de Rennes 1, disponible sur la Toile à l'adresse http ://perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/ (1996)

[7] S. BOSCH, U. GÜNTZER, R. REMMERT, *Non-Archimedean Analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 261, Springer Verlag, 1984

[8] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of algebraic varieties over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, 63 (1964), 109-326

[9] G. KEMPF, F. KNUDSEN, D. MUMFORD and B. SAINT-DONAT, *Toroidal Embeddings I*, Springer LNM **339** (1973)

[10] W. LÜTKEBOHMERT, Formal-algebraic and rigid-analytic geometry, *Math. Ann.* **286** (1990), 341-371

[11] D. STEPANOV, A note on the dual complex of a singularity, article disponible sur le site arXiv (2005)

Amaury Thuillier
NWFI-Mathematik
Universität Regensburg
D-93040 Regensburg
Deutschland
courriel : amaury.thuillier@mathematik.uni-regensburg.de