

<http://www.ftsm.ukm.my/apjitm>

Asia-Pacific Journal of Information Technology and Multimedia

*Jurnal Teknologi Maklumat dan Multimedia Asia-Pasifik*

Vol.1 No. 2, December 2012

e-ISSN:2289-2192

## **Keberkesanan Kaedah Pengenduran Berlebihan Teritlak Terhadap Penyelesaian Masalah Nilai Sempadan Dua Dimensi**

*Mohammad Khatim Hasan, Ng Yit Hoe*

### **ABSTRAK**

Masalah nilai sempadan sering ditemui dalam transmisi gelombang. Kertas ini membincang tiga kaedah berangka berjenis pengenduran berlebihan bagi menyelesaikan masalah nilai sempadan. Kaedah yang dibincang ialah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (PBB), Pengenduran Berlebihan Terpecut (PBT) dan Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terputar (PBBT). Dalam kertas ini, formulasi umum (teritlak) dibangun bagi ketiga-tiga kaedah ini. Hasil kajian menunjukkan kaedah PBT Teritlak dan PBB Teritlak menghasilkan kejituan tertinggi, manakala kaedah PBBT Teritlak merupakan kaedah penyelesaian terpantas.

**Kata Kunci:** Pengenduran berlebihan teritlak, pengenduran berlebihan terputar, masalah nilai sempadan, formulasi teritlak dan simulasi berangka.

### **ABSTRACT**

*Boundary value problems are problems that are frequently encountered in the wave transmission. This paper discusses three numerical methods of type overrelaxation for solving boundary value problems. The methods discussed are Successive overrelaxation (SOR), Accelerative overrelaxation (AOR) and Rotated Successive Over-relaxation (RSOR). In this paper, generalized formulations for these three methods were developed. Results showed that the Generalized SOR and AOR method produce the highest accuracy, whereas Generalized RSOR method is the fastest solver.*

**Keyword:** *Generalized overrelaxation, rotated overrelaxation, boundary value problem, generalized formulation and numerical simulation.*

### **1. PENGENALAN**

Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (PBB) dibangun oleh Young dalam kajiannya bertajuk “*Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type*” (1950). Kaedah ini dibangun khusus bagi menyelesaikan masalah Poisson dua matra yang juga merupakan masalah nilai sempadan. Kaedah ini kemudian diubah suai oleh Hadjidimos (1978) dengan menganggar dua dari titik molekul pengiraannya, iaitu  $u_{i-1,j}^{(k+1)}$  dan  $u_{i,j-1}^{(k+1)}$  dengan titik  $u_{i-1,j}^{(k)}$  dan  $u_{i,j-1}^{(k)}$ . Selain itu beliau menambah  $\frac{r(u_{i-1,j}^{(k+1)} - u_{i-1,j}^{(k)})}{4}$  dan

$\frac{r(u_{i,j-1}^{(k+1)} - u_{i,j-1}^{(k)})}{4}$  dalam persamaan anggaran tersebut. Hasil penemuan ini diterbitkan dengan tajuk “Accelerated overrelaxation method” (1978). Kaedah ini dinamai kaedah Pengenduran Berlebihan Tercepat (PBT) yang turut dibincang oleh Ali & Lee (2007). Hasil penyelesaian kaedah PBT ini lebih jitu daripada hasil penyelesaian kaedah PBB dengan syarat nilai parameter  $r$  dan  $w$  yang dipilih menghampiri (tetapi tidak sama) antara satu dengan yang lain. Bagaimanapun, persamaan penghampiran kaedah PBT menjadi kompleks berbanding kaedah PBB sehingga mengakibatkan masa penyelesaian yang diambil lebih lama berbanding PBB.

Abdullah (1991) pula menghasilkan penyelesaian masalah Poisson dua matra dengan memperkenalkan konsep putaran. Molekul pengiraan bagi kumpulan tak tersirat (KTT) diputar 45 darjah. Tindakan ini mengimplikasi titik nod yang diguna untuk anggaran turut bertukar. Persamaan hampiran baharu ini hanya boleh menganggar separuh daripada titik nod dalam mandala penyelesaian. Oleh kerana hanya persamaan ini sahaja yang dilari secara berleleran, maka kompleksiti pengiraan secara keseluruhan hampir separuh berkurangan. Titik selainnya diselesaikan secara terus, yakni sekali pengiraan sahaja. Sifat ini menyebabkan kaedah menjadi pantas hampir dua kali ganda daripada KTT. Kaedah ini diberi nama kaedah Kumpulan Tak Tersirat Nyah - Pasangan (KTTNP). Bagaimanapun kaedah KTT mempunyai kejituan yang lebih baik daripada KTTNP. Konsep ini diguna oleh Othman (2000) bagi mengubah suai kaedah PBB sehingga menghasilkan kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Terputar (PBBT). Bagaimanapun, keempat-empat kertas yang dirujuk hanya menyelesaikan satu masalah yang sama, iaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy},$$

dengan mandala penyelesaian  $R$ ,  $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ , dan keadaan sempadan  $u(x, 0) = u(0, y) = 1$ ,  $u(x, 1) = e^x$ ,  $u(1, y) = e^y$ .

Dalam kertas ini kaedah PBBT Teritlak, PBB Teritlak dan PBT Teritlak dihasilkan. Ketiga-tiga kaedah teritlak ini diguna bagi menyelesaikan masalah sempadan dua matra dengan empat kes yang berbeza daripada yang dipapar dalam empat kertas di atas. Tujuan kajian ini adalah bagi melihat dan menganalisis tingkah laku ketiga-tiga kaedah teritlak ini dalam menyelesaikan berbagai masalah sempadan dua matra.

## 2. KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN BERTURUT-TURUT (PBB) TERITLAK

Kaedah PBB Teritlak ini terhasil dengan menggabungkan kaedah Jacobi dan Kaedah Gauss-Seidel menggunakan satu pemboleh ubah  $w$ . Keadaan ini jelas dapat dilihat dengan melihat pada persamaan anggaran kaedah PBB yang diberi oleh

$$u_{i,j}^{(k+1)} = w \left( \frac{(g)^2 u_{i-1,j}^{(k+1)} + (g)^2 u_{i+1,j}^{(k)} + (h)^2 u_{i,j-1}^{(k+1)} + (h)^2 u_{i,j+1}^{(k)} - (g)^2 (h)^2 f_{i,j}}{2((h)^2 + (g)^2)} \right) + (1-w)u_{i,j}^{(k)}. \quad (1)$$

Jika  $w = 0$ , persamaan (1) menjadi persamaan anggaran Jacobi, manakala jika  $w = 1$ , persamaan (1) menjadi persamaan anggaran Gauss-Seidel. Pembolehubah  $g$  dan  $h$  pula masing-masing adalah lebar saiz pendiskritan pembolehubah  $y$  dan  $x$ . Persamaan (1) merupakan persamaan anggaran yang dihasil semula oleh penulis dan rakan secara umum. Tujuan penghasilan persamaan (1) ialah supaya persamaan ini dapat diguna dengan mudah bagi menyelesaikan berbagai jenis masalah tanpa perlu menghasil semula persamaan anggaran terlebih dahulu. Pendekatan ini berbeza dengan pendekatan yang diambil dalam Abdullah (1991) dan Othman (2000) yang hanya memfokus kepada penyelesaian sel diskrit berbentuk segiempat sama sahaja.

### 3. KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN TERPECUT (PBT) TERITLAK

Kaedah PBT Teritlak ini dapat dihasil dengan menganggar masing-masing titik  $u_{i-1,j}^{(k+1)}$  dan  $u_{i,j-1}^{(k+1)}$  pada persamaan (1) dengan titik  $u_{i-1,j}^{(k)}$  dan  $u_{i,j-1}^{(k)}$ . Titik  $u_{i-1,j}^{(k+1)}$  dan  $u_{i,j-1}^{(k+1)}$  bermaksud nilai titik  $u_{i-1,j}$  dan  $u_{i,j-1}$  pada lelaran  $k + 1$ , manakala titik  $u_{i-1,j}^{(k)}$  dan  $u_{i,j-1}^{(k)}$  bermaksud nilai titik  $u_{i-1,j}$  dan  $u_{i,j-1}$  pada lelaran sebelumnya, iaitu  $k$ . Selain daripada itu ditambah  $\frac{r((g)^2 u_{i-1,j}^{(k+1)} - (g)^2 u_{i-1,j}^{(k)})}{2((h)^2 + (g)^2)}$  dan  $\frac{r((h)^2 u_{i,j-1}^{(k+1)} - (h)^2 u_{i,j-1}^{(k)})}{2((h)^2 + (g)^2)}$  kepada persamaan (1) dan menghasil

$$u_{i,j}^{(k+1)} = r \left( \frac{(g)^2 u_{i-1,j}^{(k+1)} - (g)^2 u_{i-1,j}^{(k)} + (h)^2 u_{i,j-1}^{(k+1)} - (h)^2 u_{i,j-1}^{(k)}}{2((h)^2 + (g)^2)} \right) + \\ + w \left( \frac{(g)^2 u_{i-1,j}^{(k)} + (g)^2 u_{i+1,j}^{(k)} + (h)^2 u_{i,j-1}^{(k)} + (h)^2 u_{i,j+1}^{(k)} - (g)^2 (h)^2 f_{i,j}}{2((h)^2 + (g)^2)} \right) \\ + (1 - w) u_{i,j}^{(k)}. \quad (2)$$

Parameter  $r$  merupakan parameter pecutan yang memasti penyelesaian yang terhasil pantas jika dipilih dengan betul. Menurut Ali & Lee (2007), keputusan yang optimum terhasil sekiranya parameter  $r$  dipilih berhampiran dengan parameter  $w$ . Penerangan berkenaan simbol  $w, g$  dan  $h$  adalah serupa dengan penerangan simbol tersebut bagi persamaan (1). Bagaimanapun, Ali & Lee (2007) hanya menghasil persamaan anggaran bagi sel diskrit berbentuk segiempat sama sahaja.

### 4. KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN BERTURUT-TURUT TERPUTAR (PBBT) TERITLAK

Kaedah PBBT Teritlak ini dapat dibangun dengan merujuk kepada Othman (2000) dan Ali & Evans (2004) bagi pembangunan PBBT. Seperti kedua-dua kaedah di atas, yang membeza PBBT Teritlak dengan PBBT adalah persamaan penghampiran PBBT Teritlak dapat menganggar penyelesaian yang mengguna sel diskrit segiempat sama dan tepat manakala PBBT yang diberi oleh Othman (2000) dan Ali & Evans (2004) hanya khusus bagi sel diskrit segiempat sama sahaja. Persamaan hampiran PBBT Teritlak diberi oleh:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = w \left( \frac{u_{i-1,j+1}^{(k+1)} + u_{i+1,j-1}^{(k+1)} + u_{i-1,j-1}^{(k+1)} + u_{i+1,j+1}^{(k+1)} - ((h)^2 + (g)^2) f_{i,j}}{4} \right) + (1 - w) u_{i,j}^{(k)}. \quad (3)$$

Persamaan (3) ini diguna bagi mendapat anggaran bagi hanya separuh titik nod dalam domain penyelesaian secara lelaran. Separuh lagi titik dianggap secara terus mengguna persamaan (4).

$$(h)^2(g)^2 f_{i,j} = (g)^2 u_{i-1,j} + (g)^2 u_{i+1,j} + (h)^2 u_{i,j-1} + (h)^2 u_{i,j+1} - 2(h)^2 u_{i,j} - 2(g)^2 u_{i,j}. \quad (4)$$

## 5. UJIKAJI BERANGKA, KEPUTUSAN DAN PERBINCANGAN

Bagi menguji keberkesanan ketiga-tiga kaedah ini dalam menyelesaikan masalah nilai sempadan dua matra, empat ujikaji berangka dijalankan dan hasilnya dicerap dan dipapar dalam bentuk rajah dan jadual. Perisian simulasi ini dibangun mengguna bahasa pengaturcaraan C#. Syarat penumpuan yang diguna bagi keempat-empat ujikaji ialah

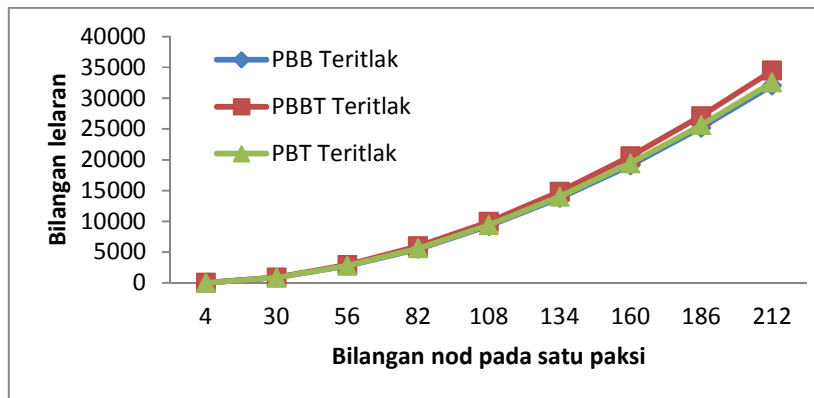
$$\max \left\{ \left| u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)} \right| \right\} < 10^{-10}.$$

### 5.1 Ujikaji 1

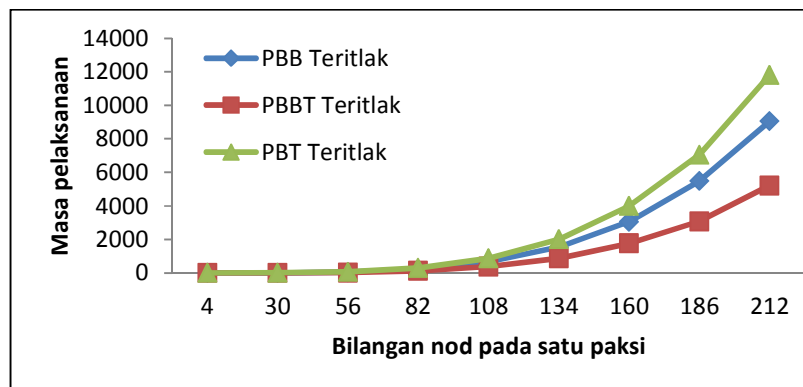
Masalah nilai sempadan yang dipertimbang ialah:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x, \quad (5)$$

yang tertakrif dalam mandala penyelesaian  $R$ ,  $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$  dengan nilai di sempadan diberi oleh fungsi  $u(x,0) = \frac{1}{6}x^3$ ,  $u(x,1) = \frac{1}{6}x^3$ ,  $u(0,y) = 0$ ,  $u(1,y) = \frac{1}{6}$ .



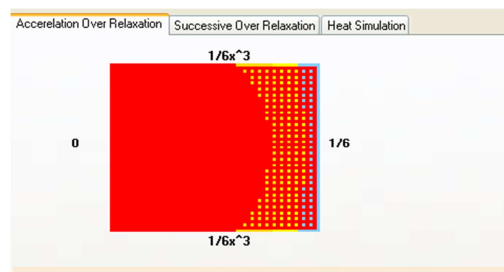
Rajah 1: Perbandingan Bilangan Lelaran bagi Ujikaji 1.



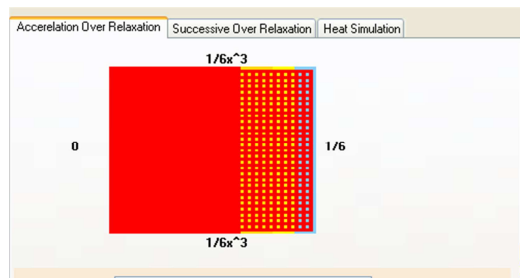
Rajah 2: Perbandingan Masa Pelaksanaan bagi Ujikaji 1

Rajah 1 hingga Rajah 3 merakam hasil penyelesaian Ujikaji 1. Kejituan kaedah tidak dipertimbang kerana ujikaji ini tidak mempunyai penyelesaian tepat untuk dibanding dengan hasil anggaran ketiga-tiga kaedah. Bagaimanapun, ketiga-tiga kaedah menghasil keputusan anggaran yang hampir sama antara satu dengan yang lain. Keputusan yang dipapar pada Rajah 1 jelas menunjukkan kaedah PBBT Teritlak lebih pantas daripada kaedah PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Kaedah PBT Teritlak memerlukan masa terpanjang bagi menyelesaikan masalah kerana tahap kerumitan pengiraannya adalah yang tertinggi berbanding dua kaedah yang lain. Dari segi bilangan lelaran pula, kaedah PBT Teritlak dan PBB Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang hampir sama (dipapar dalam Rajah 1 yang graf PBB Teritlak dengan PBT Teritlak bertindih antara satu dengan yang lain) bagi menumpu, sedangkan PBBT Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang lebih tinggi untuk menumpu. Ini menunjukkan PBBT Teritlak mempunyai kerumitan pengiraan terendah kerana walaupun kaedah ini memerlukan bilangan lelaran tertinggi untuk menumpu, namun tetap menyelesaikan masalah Ujikaji 1 dengan pantas. Simulasi profil tenaga bagi Ujikaji 1 hasil kaedah PBBT Teritlak dipapar dalam Rajah 3.

Rajah 3(a) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak pada awal proses simulasi, Rajah 3(b) pula menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak semasa kaedah PBBT Teritlak memenuhi syarat penumpuan, manakala Rajah 3(c) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak setelah semua titik dalam mandala penyelesaian dianggar.



(a)



(b)



(c)

Rajah 3: (a)Awal Simulasi, (b) Ketika Penumpuan Berlaku, (c) Setelah Semua Titik Dikira, bagi Ujikaji 1.

## 5.2 Ujikaji 2

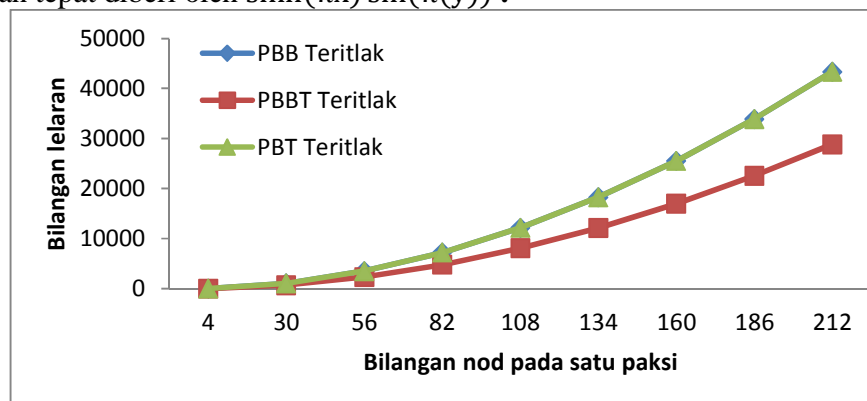
Masalah nilai sempadan yang dipertimbang adalah:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2, \quad (6)$$

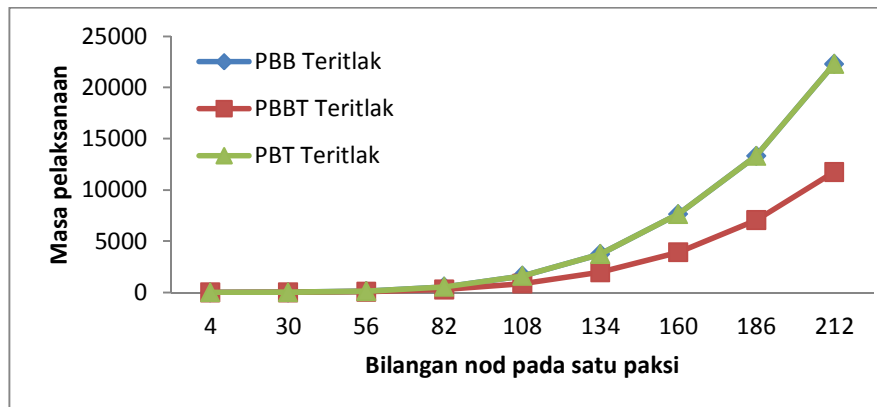
yang tertakrif dalam mandala penyelesaian  $R$ ,  $(x,y) \in (0, 1) \times (0, 1)$  dan syarat sempadan diberikan oleh fungsi

$$u(x, 0) = u(x, 1) = x(1 - x), \quad (0, y) = 0, \quad u(1, y) = \sinh(\pi) \sin(\pi(y)) + x(1 - x).$$

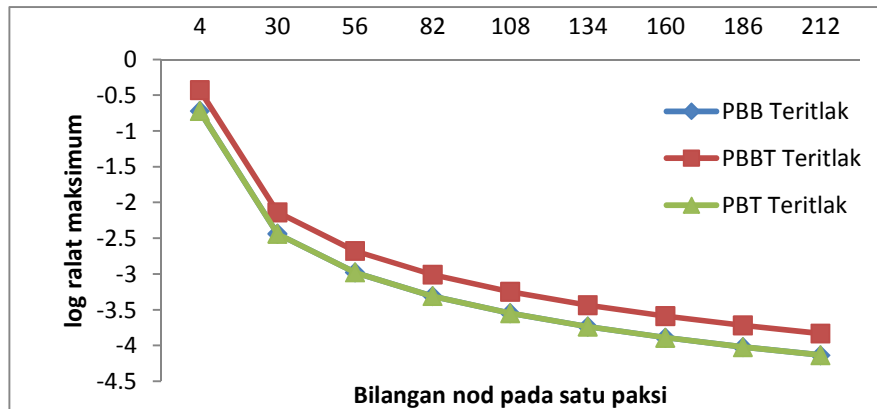
Penyelesaian tepat diberi oleh  $\sinh(\pi x) \sin(\pi(y))$ .



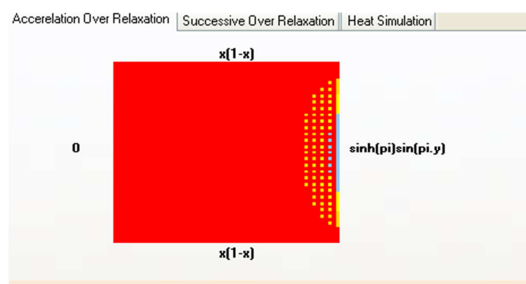
Rajah 4: Perbandingan Bilangan Lelaran bagi Ujikaji 2



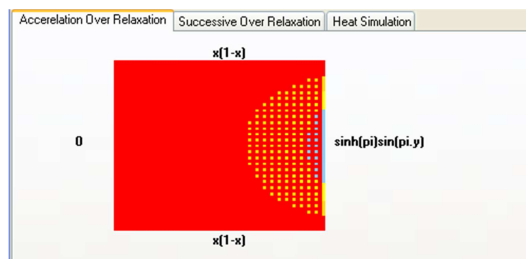
Rajah 5: Perbandingan Masa Pelaksanaan bagi Ujikaji 2



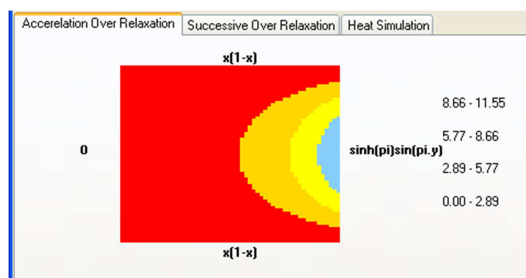
Rajah 6: Perbandingan Kejituan bagi Ujikaji 2



(a)



(b)



(c)

Rajah 7: (a) Awal Simulasi, (b) Ketika Penumpuan Berlaku, (c) Setelah Semua Titik Dikira, bagi Ujikaji 2.

Rajah 4 hingga Rajah 7 merakam hasil penyelesaian Ujikaji 2. Kaedah PBT Teritlak mempunyai kejituan, bilangan lelaran dan masa pelaksanaan yang sama dengan PBB Teritlak (dibukti dengan pertindihan graf PBT Teritlak dan PBB Teritlak dalam Rajah 4 hingga Rajah 6), manakala hasil anggaran kaedah PBBT Teritlak tidak setepat PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Keputusan yang dipapar oleh Rajah 5 menunjukkan kaedah PBBT Teritlak hampir dua kali ganda lebih pantas daripada PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Kaedah PBT Teritlak dan kaedah PBB Teritlak memerlukan masa terpanjang. Tidak dapat dipastikan mengapa masa pelaksanaan PBB Teritlak dan PBT Teritlak sama apabila menyelesaikan Ujikaji 2 ini. Ini kerana jika bilangan lelaran yang diperlu adalah sama, maka kerumitan pengiraan memainkan peranan penting bagi menerang tingkahlaku masa pelaksanaan kaedah. Merujuk persamaan (1) dan (2), jelas kerumitan pengiraan bagi PBT Teritlak lebih rumit berbanding PBB Teritlak. Hasil analisis ini seolah-olah menunjukkan perbezaan kerumitan pengiraan tidak mempengaruhi masa pelaksanaan ujikaji ini. Kajian lanjut berkaitan penyelesaian Ujikaji 2 harus dijalankan dengan mendalam bagi merungkai persoalan ini. Dari segi bilangan lelaran pula, kaedah PBT Teritlak dan PBB Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang sama bagi menumpu, sedangkan PBBT Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang lebih rendah untuk menumpu. Hal ini menjadikan kaedah PBBT Teritlak lebih pantas di samping kerumitan pengiraannya yang hampir separuh lebih kurang dari PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Simulasi profil tenaga bagi Ujikaji 2 hasil kaedah PBBT Teritlak dipapar di Rajah 7.

Rajah 7(a) menunjukkan profil tenaga yang dianggarkan oleh kaedah PBBT Teritlak pada awal proses simulasi, Rajah 7(b) pula menunjukkan profil tenaga yang dianggarkan oleh kaedah PBBT Teritlak semasa kaedah PBBT Teritlak memenuhi syarat penumpuan,



manakala Rajah 7(c) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak setelah semua titik dalam mandala penyelesaian dianggar.

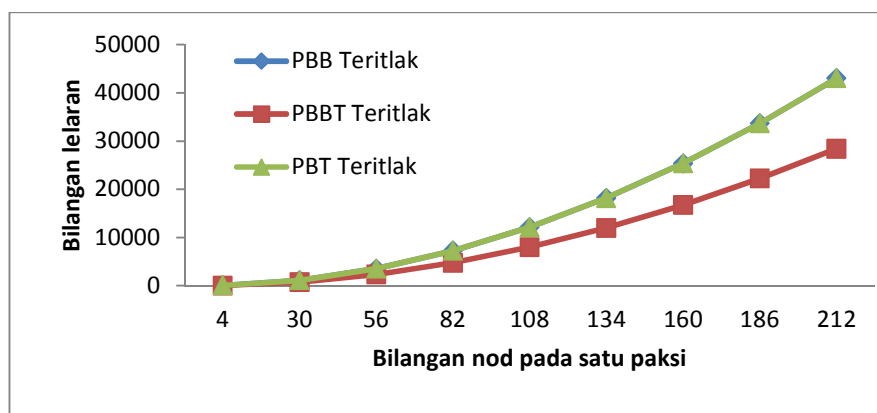
### 5.3 Ujikaji 3

Masalah nilai sempadan yang dipertimbang adalah seperti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y, \quad (7)$$

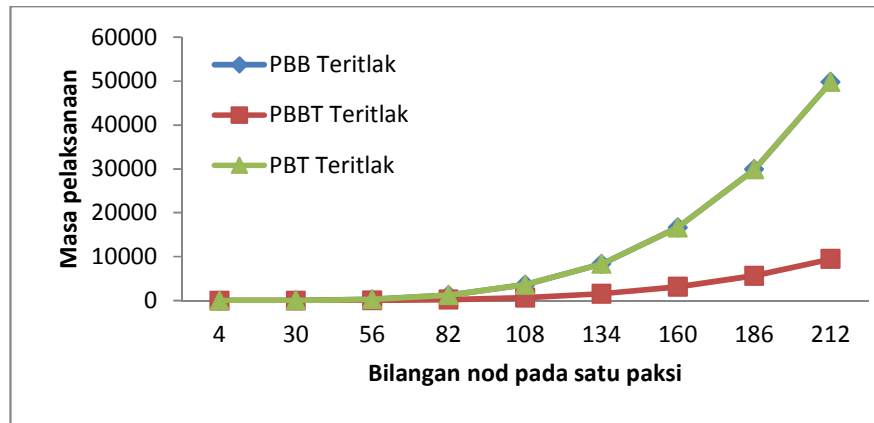
yang tertakrif dalam mandala penyelesaian  $R$ ,  $(x,y) \in (0, 1) \times (0, 2)$ , dan syarat sempadan diberi oleh fungsi  $u(x,0) = x$ ,  $u(x,1) = xe$ ,  $u(0,y) = 0$ ,  $u(2,y) = 2e^y$ . Penyelesaian tepat bagi persamaan (7) diberi oleh  $xe^y$ .

Rajah 8 hingga 11 merakam hasil penyelesaian Ujikaji 3. Kaedah PBT Teritlak mempunyai kejituan, bilangan lelaran dan masa pelaksanaan yang sama dengan PBB Teritlak (dibukti dengan pertindihan graf PBT Teritlak dan PBB Teritlak pada Rajah 8 hingga Rajah 10), manakala hasil anggaran kaedah PBBT Teritlak tidak setepat PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Keputusan yang dipapar dalam Rajah 9 menunjukkan kaedah PBBT Teritlak jauh lebih pantas daripada PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Kaedah PBT Teritlak dan kaedah PBB Teritlak memerlukan masa terpanjang. Seperti Ujikaji 2, tidak dapat dipastikan mengapa masa pelaksanaan PBB Teritlak dan PBT Teritlak sama apabila menyelesaikan Ujikaji 3 ini. Ini kerana jika bilangan lelaran yang diperlu adalah sama, maka kerumitan pengiraan memainkan peranan penting bagi menerangkan tingkahlaku masa pelaksanaan dua kaedah. Persamaan (1) dan (2) menunjukkan kerumitan pengiraan bagi kaedah PBT Teritlak lebih tinggi berbanding PBB Teritlak. Hasil ujikaji ini seolah-olah menunjukkan perbezaan kerumitan pengiraan tidak mempengaruhi masa pelaksanaan ujikaji. Kajian lanjut berkaitan penyelesaian Ujikaji 3 juga harus dijalankan dengan mendalam bagi merungkai persoalan ini. Dari segi bilangan lelaran pula, kaedah PBT Teritlak dan PBB Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang sama untuk menumpu, sedangkan PBBT Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang lebih rendah untuk menumpu. Hal ini menjadikan kaedah PBBT Teritlak ini lebih pantas di samping kerumitan pengiraannya yang hampir separuh lebih kurang dari PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Simulasi profil tenaga bagi Ujikaji 3 hasil kaedah PBBT Teritlak dipapar dalam Rajah 11.

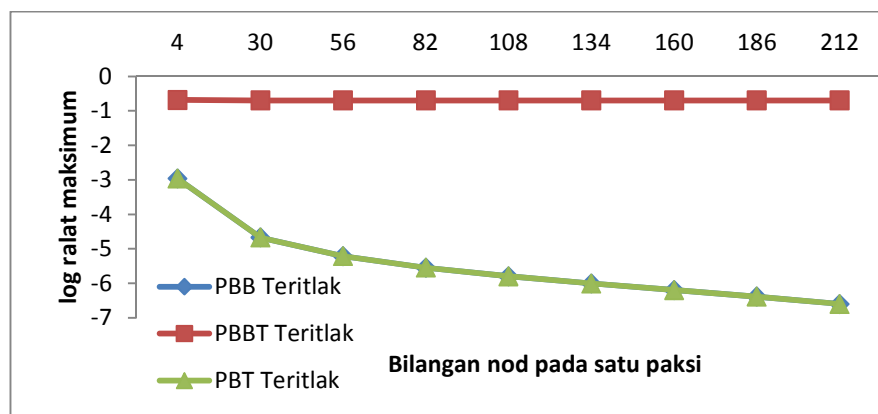


Rajah 8: Perbandingan Bilangan Lelaran bagi Ujikaji 3.

Rajah 11(a) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak di awal proses simulasi, Rajah 11(b) pula menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak semasa kaedah PBBT Teritlak memenuhi syarat penumpuan, manakala Rajah 11(c) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak setelah semua titik dalam mandala penyelesaian dianggar.



Rajah 9: Perbandingan Masa Pelaksanaan bagi Ujikaji 3.



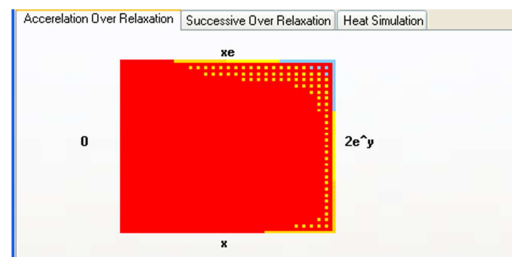
Rajah 10: Perbandingan Kejituan bagi Ujikaji 3.

#### 5.4 Ujikaji 4

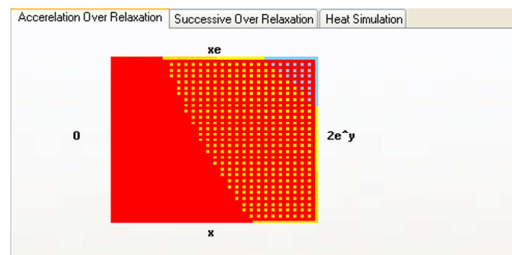
Masalah nilai sempadan yang dipertimbang adalah seperti:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2 + y^2)e^{xy}, \quad (8)$$

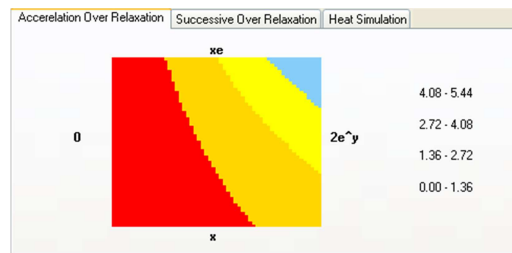
dengan mandala penyelesaian  $R$ ,  $(x,y) \in (0, 1) \times (0, 2)$ , dan syarat sempadan diberi oleh fungsi  $u(x, 0) = u(0, y) = 1$ ,  $u(x, 1) = e^x$ ,  $u(2, y) = e^{2y}$ . Penyelesaian yang tepat diberi oleh  $e^{xy}$ .



(a)



(b)

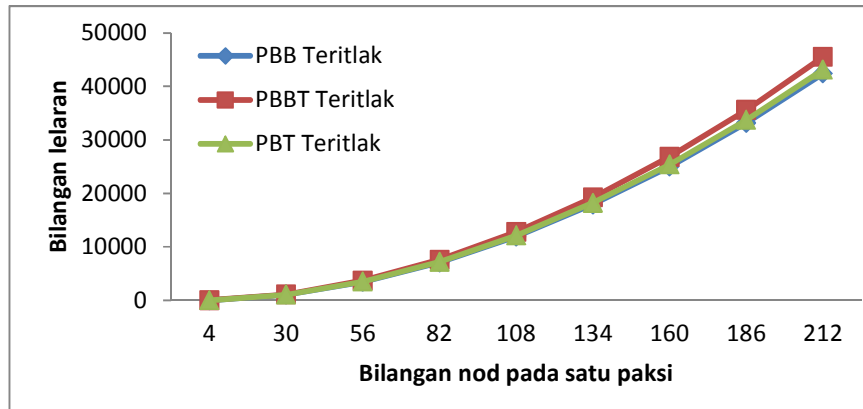


(c)

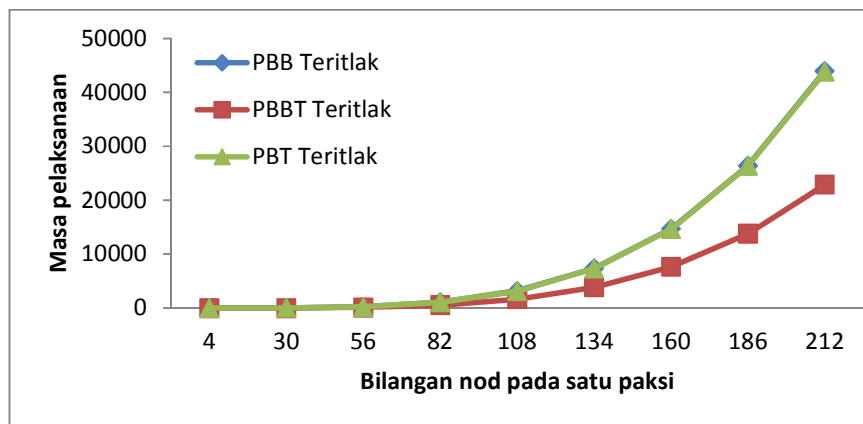
Rajah 11: (a) Awal Simulasi, (b) Ketika Penumpuan Berlaku, (c) Setelah Semua Titik Dikira bagi Ujikaji 3.

Rajah 12 hingga Rajah 15 merakam hasil penyelesaian Ujikaji 4. Keputusan yang dipapar dalam Rajah 13 jelas menunjukkan kaedah PBBT Teritlak lebih pantas daripada PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Manakala PBB Teritlak dan PBT Teritlak mempunyai kepantasan yang sama (ditunjukkan oleh pertindihan graf PBB Teritlak dan PBT Teritlak dalam Rajah 13). Kaedah PBT Teritlak memerlukan masa terpanjang bagi menyelesaikan masalah kerana tahap kerumitan pengiraannya adalah yang tertinggi berbanding dengan dua kaedah yang lain. Dari segi bilangan lelaran pula, kaedah PBT Teritlak dan PBB Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang hampir sama untuk menumpu, sedangkan PBBT Teritlak memerlukan jumlah lelaran yang lebih tinggi untuk menumpu. Hal ini digambarkan oleh pertindihan maklumat PBB Teritlak dan PBT Teritlak seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 12. Ini menunjukkan PBBT Teritlak mempunyai kerumitan pengiraan terendah kerana walaupun kaedah ini memerlukan bilangan lelaran tertinggi untuk menumpu, namun tetap menyelesaikan masalah Ujikaji 4 dengan pantas. Kejituan kaedah PBT Teritlak mempunyai kejituan yang hampir sama dengan PBB Teritlak (ditunjukkan oleh pertindihan graf PBB Teritlak dan PBT Teritlak pada Rajah 14), manakala hasil anggaran kaedah PBBT Teritlak tidak setepat PBB

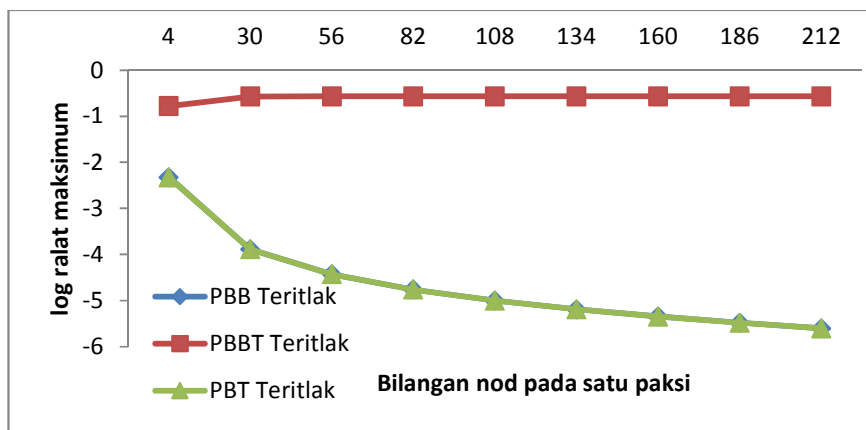
Teritlak dan PBT Teritlak. Simulasi profil tenaga bagi Ujikaji 4 hasil kaedah PBBT Teritlak dipapar dalam Rajah 15.



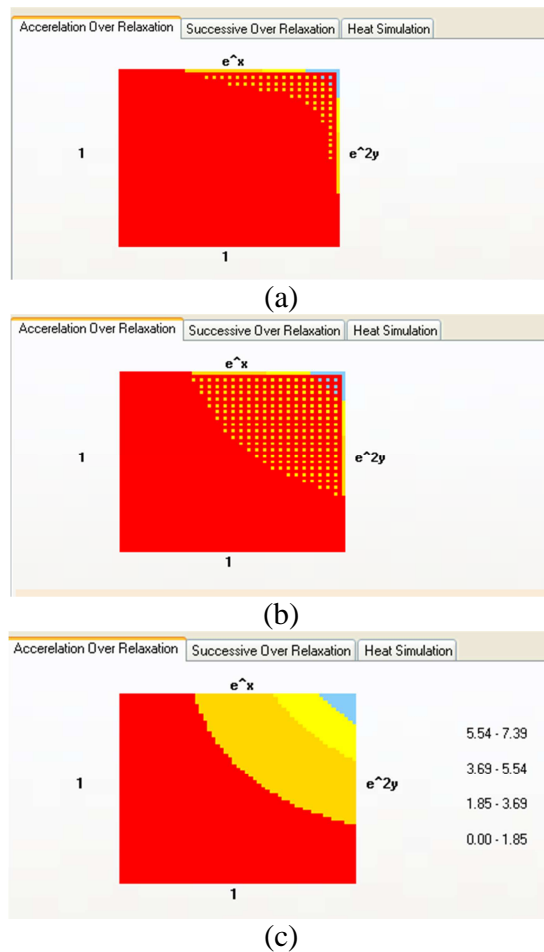
Rajah 12: Perbandingan Bilangan Lelaran bagi Ujikaji 4.



Rajah 13: Perbandingan Masa Pelaksanaan bagi Ujikaji 4.



Rajah 14: Perbandingan Kejituan bagi Ujikaji 4.



Rajah 15: (a) Awal Simulasi, (b) Ketika Penumpuan Berlaku, (c) Setelah Semua Titik diKira, bagi Ujikaji 4.

Rajah 15(a) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak pada awal proses simulasi, Rajah 15(b) pula menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak semasa kaedah PBBT Teritlak memenuhi syarat penumpuan, manakala Rajah 15(c) menunjukkan profil tenaga yang dianggar oleh kaedah PBBT Teritlak setelah semua titik dalam mandala penyelesaian dianggar.

## 6. KESIMPULAN

Hasil daripada keempat-empat ujikaji yang dijalankan jelas menunjukkan kaedah PBBT Teritlak mempunyai kepantasan yang tinggi berbanding kaedah PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Bagaimanapun kejituan hasil anggarannya tidak sebaik kaedah PBB Teritlak dan PBT Teritlak. Satu kajian bagi memperbaiki kejituan hasil anggaran perlu dilakukan. Justeru, kajian seterusnya ialah mencari pendekatan baharu bagi menyelesaikan masalah sedemikian.

## **PENGHARGAAN**

Kajian ini dibiayai oleh geran UKM-GGPM-ICT-110-2010.

## **RUJUKAN**

- Abdullah, A. R. 1991. The four point explicit decoupled group (EDG) method: a fast poisson solver. *International Journal of Computer Mathematics*, 38: 61-70.
- Ali, N. H. and Evans, D. J. 2004. Preconditioned rotated iterative methods in the solution of elliptic partial differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 81(9): 1163-1174.
- Ali, N. H. and Lee, S. C. 2007. Group accelerated overrelaxation methods on rotated grid. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 191: 533-542.
- Hadjidimos, A. 1978. Accelerated overrelaxation method. *Mathematics and Computation*, 32: 149-157.
- Othman, M. 2000. Implementasi algoritma selari dan berjujukan untuk menyelesaikan sistem linear secara lelaran pada sistem komputer multipemproses ingatan sepunya. PhD thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia.
- Young, D. M. 1950. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic Type. PhD thesis, Harvard University.

## **NOTA BIOGRAFI**

Dr. Mohammad Khatim Hasan adalah Profesor Madya di Pusat Pengajian Teknologi Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia. Minat beliau adalah dalam algoritma berangka dan selari.

e-mel:khatim@ftsm.ukm.my

Ng. Yit Hoe adalah pelajar sarjana di bawah seliaan Dr. Mohamed Khatim Hasan. Beliau menjalankan penyelidikan mengenai algoritma pengenduran berlebihan dan variasinya bagi menyelesaikan masalah berangka berkeadaan mantap.