МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи,
проведення практичних занять
і виконання контрольної роботи

з дисципліни

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»)

Харків – ХНАМГ – 2011

Методичні вказівки до самостійної роботи, проведення практичних занять і виконання контрольної роботи з дисципліни «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 3 курсу заочної форми навчання напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства») / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: М. І. Самойленко, О. М. Штельма, Н. В. Макогон, С. В. Дядюн. – Х.: ХНАМГ, 2011. – 126 с.

Укладачі: М. І. Самойленко,
О. М. Штельма,
Н. В. Макогон,
С. В. Дядюн

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу й узгоджені з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей.

Рецензент: доцент фізико-математичних наук О. Б. Костенко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 27.08.2009 р.

Вступ

Переведення економіки країни на шлях інтенсивного розвитку безпосередньо пов’язано з необхідністю підвищення ефективності використання математичної теорії у прикладній сфері діяльності людини. Вирішальну роль у досягненні поставленою мети відіграють фахівці, які добре володіють математичними методами і мають достатній досвід їх використання при вирішенні практичних задач.

Економіко-математичне моделювання відіграє винятково важливу роль у підготовці фахівців економічного профілю. Використання математичних методів в інженерно-економічній діяльності дозволяє вирішувати оптимальним способом багато економічних і організаційних задач. Іншими словами, інженер-економіст стає власником надійного інструменту для одержання найвищого економічного ефекту в конкретних виробничих умовах.

Прикладами можливих економічних задач, що наочно ілюструють корисність і необхідність знання запропонованої дисципліни, є наступні задачі (надаються в змістовній постановці):

- одержання максимального випуску продукції або максимального прибутку при заданих матеріальних, трудових або тимчасових витратах;
- забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових витратах;
- досягнення максимально короткого терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих або заданих виробничих ресурсах (матеріальних, трудових, енергетичних,

тимчасових та ін.).

Інженер-економіст повинен не тільки вміти вирішувати складні економічні задачі, але й вміти здійснювати їх математичну постановку, тобто за змістовною постановкою задачі складати її математичну модель, знати методи її розв’язання, аналізувати з метою використання в економіці та приймати ефективни управлінські рішення.

***Мета*:** формування системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей.

***Завдання*:** вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови економіко-математичних моделей, методів їх розв’язання та аналізу з метою використання в економіці

Предметом вивчення дисципліни є методологія та інструментарій побудови математичних моделей і розв’язування детермінованих оптимізаційних задач.

Рекомендації до самостійного вивчення тем дисципліни

Модуль 1. Вступ до економіко-математичного моделювання та методи розв'язування оптимізаційних задач

ЗМ 1.1. ***Предмет та концепції економіко-математичного моделювання***

ТЕМА 1. *Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки*

1. Концептуальні аспекти математичного моделювання
2. Основна концепція застосування методів математичного моделювання в економіці
3. Призначення моделі
4. Етапи побудови математичної моделі
5. Поняття економічної та математичної моделей. Класифікація моделей

Запитання для самоконтролю

1. Моделювання в економічних процесах
2. Визначення математичної моделі
3. Призначення моделі
4. Основні етапи побудови математичнх моделей
5. Макро- та мікроекономічні моделі
6. Статичні та динамічні моделі
7. Оптимізаційні та моделі рівноваги

ТЕМА 2. *Оптимізаційні економіко-математичні моделі*

1. Принципи побудови математичних моделей
2. Змістовна постановка оптимізаційної задачі
3. Математична постановка оптимізаційної задачі

Запитання для самоконтролю

1. Етапи побудови математичних моделей економічних задач
2. Математична постановка оптимізаційної задач
3. Математична модель задачі планування виробництва
4. Математична модель задачі організації виробництва
5. Математична модель транспортної задачі

ЗМ 1.2. *Методи розв'язування оптимізаційних задач*

ТЕМА 3. *Задача лінійного програмування та методи її розв'язування*

1. Математична постановка, економічні приклади задачі лінійного програмування

2. Форми запису задачі лінійного програмування: канонічна, розгорнута, матрична

3. Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної

4. Розв'язування задачі лінійного програмування за допомогою симплекс - методу та диференційного алгоритму

Запитання для самоконтролю

1. Основні властивості задачі лінійного програмування
2. Форми запису задачі лінійного програмування
3. Правила переходу від загальної задачі лінійного програмування до канонічної
4. Суть графічного методу вирішення задач лінійного програмування
5. Суть симплекс –методу вирішення задач лінійного програмування
6. Суть диференційного алгоритму вирішення задач лінійного програмування

7. Які рішення задачі лінійного програмування називають опорним, допустимим, оптимальним
8. Транспортна задача
9. Застосування транспортної задачі в економіці

ТЕМА 4. *Теорія двоїстості та аналіз лінійних оптимізаційних задач*

1. Теорія двоїстості для випадку симетричної пари взаємодвоїстих задач

1.1. Визначення прямої задачі та двоїстої до неї у симетричному випадку

1.2. Взаємозв'язок між прямою задачею та двоїстою до неї

1.3. Співвідношення між припустимими значеннями цільових функцій прямої та двоїстої задач

2. Знаходження розв'язку однієї з пари симетричних взаємодвоїстих задач за відомим розв'язком іншої задачі

3. Економічна інтерпретація теорем двоїстості (оптимальні значення двоїстих змінних як оптимальні оцінки ресурсів у задачі оптимізації плану виробництва)

Запитання для самоконтролю

1. Економічний зміст двоїстої задачі
2. Симетрична пара взаємодвоїстих задач
3. Несиметрична пара взаємодвоїстих задач
4. Змішані двоїсті задачі
5. Знаходження розв'язку однієї з пари симетричних взаємодвоїстих задач за відомим розв'язком іншої задачі.
6. Застосування теорії двоїстості в економіці

ТЕМА 5. *Цілочислове програмування*

1. Економічні приклади, математична постановка задач цілочислового (дискретного) програмування

2. Метод Гомори

Запитання для самоконтролю

1. Математична постановка задач цілочислового програмування
2. Алгоритм вирішення задач цілочислового програмування
3. Суть методу Гоморі

ТЕМА 6. *Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем*

1. Причини виникнення і приклади нелінійностей в оптимізаційних економічних задачах

2. Класи задач нелінійного програмування: одновимірні та багатовимірні, з обмеженнями або без обмежень

3. Огляд методів одновимірної оптимізації

4. Багатовимірна задача оптимізації без обмежень, її основні властивості

5. Властивості багатовимірної задачі оптимізації з обмеженнями (достатні умови існування розв'язку; необхідна умова локального екстремуму; особливості задачі опуклого програмування)

6. Функція Лагранжа та її сідлові точки

Запитання для самоконтролю

1. Використання нелінійних оптимізаційних моделей в економічних системах.
2. Безумовна оптимізація
3. Класичні й прямі методи безумовної оптимізації
4. Суть методу Ейлера та покоординатного спуску
5. Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей
6. Застосування методу Лагранжа в економіці.

Модуль 2. Вступ до теорії економічних ризиків та використання економетричних моделей в економіці

ЗМ 2.1. ***Аналіз та управління ризиком в економіці***

ТЕМА 1. *Аналіз та управління ризиком в економіці. Визначення ризику, види ризиків в економіці*

1. Визначення ризику

2. Кількісний і якісний аналіз ризику

Запитання для самоконтролю

1. Визначення ризику
2. Визначення ризику в сучасних економічних умовах України
3. Аналіз і управління ризиком в економіці
4. Етапи управління ризиком

ТЕМА 2. *Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику*

1. Критерії та основні показники оцінювання

2. Класифікація методів оцінювання ступеня ризику

Запитання для самоконтролю

1. Система кількісних оцінок ризику в абсолютному та відносному виразі
2. Класифікація методів оцінювання ступеня ризику
3. Статистичний метод
4. Метод експертних оцінок

ЗМ 2.2. ***Економетричні моделі економічних процесів і явищ***

ТЕМА 3. *Принципи побудови економетричних моделей. Парнолінійна регресія*

1. Поняття економетричної моделі

2. Типи економетричних моделей

3. Статистична база економетричних моделей

3. Парнолінійна регресія

4. Загальне поняття про лінійну регресію

5. Оцінка параметрів лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів

6. Коефіцієнти кореляції та детермінації

Запитання для самоконтролю

1. Поняття економетричної моделі
2. Типи   економетричних моделей
3. Основні етапи побудови економетричнтх моделей
4. Статистична база економетричних моделей
5. Які екомічні показники називають екзогенними, які ендогенними.
6. Парнолінійна регресія
7. Оцінка параметрів лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів
8. Суть коефіцієнта кореляції
9. Суть коефіцієнта детермінації

ТЕМА 4. *Лінійні моделі множинної регресії*

1. Приклади використання множинного регресійного аналізу на практиці

2. Лінійна багатофакторна модель

3. Етапи побудови багатофакторної регресійної моделі

4. Розрахунок невідомих параметрів багатофакторної регресії за методом найменших квадратів

5. Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації

6. Метод найменших квадратів у матрично-векторній формі

Запитання для самоконтролю

1. Приклади використання множинного регресійного аналізу на практиці
2. Лінійна багатофакторна модель
3. Етапи побудови багатофакторної регресійної моделі
4. Розрахунок невідомих параметрів багатофакторної регресії за методом найменших квадратів
5. Коефіцієнт множинної кореляції та детермінації
6. Метод найменших квадратів у матрично-векторній формі

ТЕМА 5. *Узагальнені економетричні моделі*

1. Узагальнена регресійна модель

2. Класична модель лінійної регресії: основні припущення, що лежать в основі методу найменших квадратів

3. Узагальнена багатофакторна лінійна регресійна модель

Запитання для самоконтролю

1. Узагальнена регресійна модель
2. Класична модель лінійної регресії: основні припущення, що лежать в основі методу найменших квадратів
3. Узагальнена багатофакторна лінійна регресійна модель

ТЕМА 6. *Економетричні моделі динаміки*

1. Авторегресивні і дистрибутивно-лагові моделі

2. Природа авторегресивних моделей

3. Приклади практичного застосування авторегресивних моделей

4. Приклади використання лагових моделей в економіці

5. Причини лагів

6. Оцінка параметрів дистрибутивно-лагових моделей

7. Послідовна оцінка дистрибутивно-лагових моделей

Запитання для самоконтролю

1. Авторегресивні і дистрибутивно-лагові моделі
2. Природа авторегресивних моделей
3. Приклади практичного застосування авторегресивних моделей
4. Приклади використання лагових моделей в економіці
5. Причини лагів
6. Оцінка параметрів дистрибутивно-лагових моделей
7. Послідовна оцінка дистрибутивно-лагових моделей

Методичні вказівки до проведення практичних занять і виконання контрольної роботи

Оптимізаційні економіко-математичні моделі.

Побудова математичних моделей економічних задач

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення цільової функції $Y(x_1, x_2, ..., x_n) = Y(\bar{x})$ за умов $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \; (i = \overline{1,m})$ де Y і f_i – задані функції, а b_i – дійсні числа

$$Y(\bar{o}) \to \underset{\bar{x}\in\Omega}{opt} \qquad (1.1)$$

$$\Omega: \begin{cases} f_i\left(\bar{o}\right) \le b_i \;, \\ f_i\left(\bar{o}\right) = b_i, \\ f_i\left(\bar{o}\right) \ge b_i \;, \\ \left(i = \overline{1,m}\right) \end{cases} \qquad (1.2)$$

Для побудови математичної моделі задачі необхідно:

- Визначити *невідомі*;
- Скласти *цільову функцію* $Y(\bar{o})$;
- Записати *систему обмеженнь* Ω .

Побудуємо математичні моделі задач лінійного й нелінійного програмування.

Задача організації виробництва

Для виготовлення трьох видів виробів А, В, С використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу на фрезерному обладнанні складають для виробу А – 3, В – 6, С – 5 верстато-год відповідно; на токарному обладнанні для виробу А – 2, В – 7, С – 3 верстато-год ; на зварювальному обладнанні для виробу А – 6, В – 5, С – 7 верстато-год ; на шливовальном обладнанні для виробу А – 5, В – 8, С – 6 верстато-год. Загальний фонд робочого часу фрезерного *обладнання складе 130 од, токарного, – 220 од, зварювального, – 210 од, шліфувального, – 260 од. Прибуток від реалізації одного виробу А складе 9 грн, В - 12 грн, С - 11 грн.*

Потрібно визначити, скільки виробів і якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний. Всі дані відображені в табл.1.1

Таблиця 1.1

Тип обладнання	**Витрати часу на обробку одного виробу, *станко-г***			**Загальний фонд робочого часу обладнання, г**
	А	В	С	
Фрезерне	3	6	5	130
Токарне	2	7	3	220
Зварювальне	6	5	7	210
Шліфувальне	5	8	6	260
Прибуток, грн.	9	12	11	–

Побудова математичної моделі задачі

Дана змістовна постановка задача організації виробництва. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі* – $\tilde{o}_1, x_2, x_3$. Буде виготовлено $\tilde{o}_1$ одиниць виробів виду *А*, $\tilde{o}_2$ – виду *В* та $\tilde{o}_3$ – виду *С*.
2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{o})$. Якщо буде виготовлено $\tilde{o}_1$ одиниць виробів виду *А*, $\tilde{o}_2$ – виду *В* і $\tilde{o}_3$ – виду С, то прибуток складе

$$Y(x_1, x_2, x_3) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to \max_{x \in \Omega}$$

3. Записати систему обмежень **Ω**. Для виробництва такої кількості виробів потрібно буде витратити $3\tilde{o}_1 + 6\tilde{o}_2 + 5\tilde{o}_3$ станко-год. фрезерного обладнання. Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 130, повинна виконуватися нерівність $3\tilde{o}_1 + 6\tilde{o}_2 + 5\tilde{o}_3 \le 130$.

Аналогічні міркування щодо можливого використання токарного, зварювального і шліфувального обладнання приведуть до наступних нерівностей: $2\tilde{o}_1 + 7\tilde{o}_2 + 3\tilde{o}_3 \le 220$;

$$6\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_2 + 7\tilde{o}_3 \le 210;$$

$$5\tilde{o}_1 + 8\tilde{o}_2 + 6\tilde{o}_3 \le 260.$$

При цьому кількість виробів, що виготовляються, не може бути негативною: $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$; $x_3 \ge 0$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд

$$Y\left(x_1, x_2, x_3\right) = 9x_1 + 12x_2 + 11x_3 \to \max_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1(\overline{x}) = 3\tilde{o}_1 + 6\tilde{o}_2 + 5\tilde{o}_3 \le 130 \\ f_2(\overline{x}) = 2\tilde{o}_1 + 7\tilde{o}_2 + 3\tilde{o}_3 \le 220 \\ f_3(\overline{x}) = 6x_1 + 5\tilde{o}_2 + 7\tilde{o}_3 \le 210 \\ f_4(\overline{x}) = 5x_1 + 8\tilde{o}_2 + 6\tilde{o}_3 \le 260 \\ \quad \tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3 \ge 0. \end{cases}$$

Задача планування випуску продукції.

На швейній фабриці тканина може бути розкроєна чотирма способами A, B, C, D для виготовлення виробів двох видів. У табл.1.2 наведені кількості виробів i–го виду (i =1, 2) і величина відходів при j-му варіанті (j = 1, 2, 3, 4) розкрою 1 м^2. У ній же вказані необхідні кількості кожного виду виробів, які необхідно виготовити фабриці в плановому періоді. Потрібно розкроїти тканину так, щоб було отримано задану кількість виробів кожного виду при мінімальних загальних відходах.

Таблиця 1.2

Вид виробу	**Кількість виробів з 1 м^2 тканини**				**Планова кількість виробів (м^2)**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	3	4	2	380
II	4	3	1	3	210
Величина відходів	0,1	0,3	0,2	0,4	

Побудова математичної моделі задачі

Дана змістовна постановка задачі планування випуску продукції. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі*. Позначимо через x_j кількість тканини (м^2), яка розкроюється по j–му варіанту $j=\overline{1,4}$.

$$\bar{o}=\begin{bmatrix}\tilde{o}_1\\ \tilde{o}_2\\ \tilde{o}_3\\ \tilde{o}_4\end{bmatrix}.$$

2. Скласти цільову *функцію* $Y\left(\bar{o}\right)$. $Y\left(\bar{o}\right)=0,1\tilde{o}_1+0,3\tilde{o}_2+0,2\tilde{o}_3+0,4\tilde{o}_4\to\min\limits_{\bar{x}\in\Omega}$.

3. Записати систему обмежень **Ω**. При цьому кількості виробів обох видів повинні відповідати плану:

$$f_1\,(\bar{x})=x_1+3x_2+4x_3+2x_4=380;$$

$$f_2\,(\bar{x})=4x_1+3x_2+x_3+3x_4=210.$$

Кількість тканини x_j , що розкроїли кожним способом, є позитивною величиною, тобто

$$x_j\geq 0\;\; j=\overline{1,4}$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y\left(\bar{o}\right)=0,1\tilde{o}_1+0,3\tilde{o}_2+0,2\tilde{o}_3+0,4\tilde{o}_4\to\min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}f_1\left(\bar{x}\right)=x_1+3x_2+4x_3+2x_4=380\\ f_2\left(\bar{x}\right)=4x_1+3x_2+x_3+3x_4=210\\ \tilde{o}_1\geq 0;\quad \tilde{o}_2\geq 0;\quad \tilde{o}_3\geq 0;\quad \tilde{o}_4\geq 0.\end{cases}$$

Транспортна задача планування перевезень

Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції використовують три види сировини. Потреби в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 110, 70, 180 і 120 од. Сировина зосереджена в трьох місцях її отримання, а запаси відповідно дорівнюють 100, *130, 160 од. На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого пункту її отримання. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею* $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 8 & 5\\ 5 & 3 & 2 & 5\end{bmatrix}$. *Скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість є мінімальною.*

Побудова математичної моделі задач.

Дана змістовна постановка транспортної задачі. Це задача лінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі*. У транспортній задачі вектор змінних перетвориться до матричного вигляду, причому $\tilde{o}_{ij}$ означає кількість сировини, що перевозиться з *і-го* місця отримання до *j-го* підприємства:

$$x=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\end{bmatrix}$$

2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{o})$. (Загальна вартість перевезень є мінімальною): $Y(\bar{o})=\sum_{i}^{3}\sum_{j}^{4}c_{ij}x_{ij}\to\min\limits_{x\in\Omega}$

$$Y(\bar{o})=5x_{11}+6x_{12}+3x_{13}+4x_{14}+3x_{21}+4x_{22}+8x_{23}+5x_{24}+5x_{31}+3x_{32}+2x_{33}+5x_{34}\to\min\limits_{x_{ij}\in\Omega}$$

3. Записати систему обмежень **Ω**. Запаси сировини відповідно дорівнюють 100, 130, 160 од. Сумарні перевезення сировини з і–го пункту відправлення повинні відповідати загальному їх запасу на даному пункті:

$$f_1(\bar{x})=\sum_{j}^{4}x_{1j}=x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 100,$$

$$f_2(\bar{x})=\sum_{j}^{4}x_{2j}=x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 130,$$

$$f_3(\bar{x})=\sum_{j}^{4}x_{3j}=x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 160.$$

Потреби в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 110, 70, 180, 120 од.

Сумарний об'єм сировини, що перевозиться в j-й пункт призначення, повинен відповідати потребі:

$$f_4(\overline{x}) = \sum_{i}^{3} x_{i1} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110,$$

$$f_5(\overline{x}) = \sum_{i}^{3} x_{i2} = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70,$$

$$f_6(\overline{x}) = \sum_{i}^{3} x_{i3} = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180,$$

$$f_7(\overline{x}) = \sum_{i}^{3} x_{i4} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120.$$

Природно, кількість сировини x_{ij} є величина позитивна, тобто

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}.$$

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y\left(\overline{o}\right) = 5x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} + 5x_{24} + 5x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}$$

$$\begin{cases} f_1(\overline{x}) = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 130 \\ f_2(\overline{x}) = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100 \\ f_3(\overline{x}) = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 160 \\ f_4(\overline{x}) = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110 \\ f_5(\overline{x}) = x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ f_6(\overline{x}) = x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180 \\ f_7(\overline{x}) = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120 \\ x_{ij} \geq 0 i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Задача про планування виробництва

Є два способи виробництва деякого продукту – першим і другим. Витрати на виробництво $\tilde{o}_1$ *од. продукту першим способом виражаються залежністю* $H_1\left(x_1\right) = 2x_1^2 + 3x_1 + 4$. *Витрати на виробництво* $\tilde{o}_2$ *од. продукту другим способом виражаються залежністю* $H_2\left(x_2\right) = 3x_2^2 + 4x_2 + 2$. *За деякий звітний проміжок часу необхідно виробити рівно 350 од. продукції, розподіливши її між двома способами так, щоб мінімізувати загальні витрати.*

Побудова математичної моделі задачі

Дана змістовна постановка задачі нелінійного програмування. Для складання математичної моделі задачі необхідно:

1. Визначити *невідомі* – $\tilde{o}_1$, $\tilde{o}_2$.
2. Скласти цільову *функцію* $Y(\bar{o})$. $Y(\bar{o}) = 2\tilde{o}_1^2 + 3\tilde{o}_2^2 + 3\tilde{o}_1 + 4\tilde{o}_2 + 6 \to \min\limits_{x\in\Omega}$.
3. Записати систему обмеженнь Ω. Необхідно проізвести рівно 350 од. продукції. $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 350$.

Кількість продукції величина позитивна $\tilde{o}_1 \geq 0; \tilde{o}_2 \geq 0$.

Таким чином, математична постановка задачі має вигляд:

$$Y(\bar{o}) = 2\tilde{o}_1^2 + 3\tilde{o}_2^2 + 3\tilde{o}_1 + 4\tilde{o}_2 + 6 \to \min_{x\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} \tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 = 350 \\ \tilde{o}_1 \geq 0; \tilde{o}_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Задача лінійного програмування та методи її розв'язування

Математична постановка задачі лінійного програмування

Форми запису задачі лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти оптимум лінійної цільової функції $y(\bar{\tilde{o}})$, якщо обмеження f_i лінійні і змінні $\bar{\tilde{o}}$ позитивні.

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{\tilde{o}}) = \bar{\tilde{n}}^{ò}\bar{\tilde{o}} + \tilde{n}_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\text{opt}}, \qquad (2.1)$$

$$\Omega : \begin{cases} \grave{A}_1\bar{\tilde{o}} + \bar{b}_1 \leq 0; \\ \grave{A}_2\bar{\tilde{o}} + \bar{b}_2 = 0; \\ \grave{A}_3\bar{\tilde{o}} + \bar{b}_3 \geq 0; \\ \bar{x} \geq 0, \end{cases} \qquad (2.2)$$

де $\bar{\tilde{o}}$ – n-мірний вектор дійсних змінних $\bar{x} \in R^n$; $\bar{\tilde{n}}$ – n-мірний вектор коефіцієнтів функції, що оптимізується; $\tilde{n}_0$ – вільний член функції, що оптимізується; $\grave{A}_1, \grave{A}_2, \grave{A}_3$ – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n,\ \ m_2 \times n,\ \ m_3 \times n$ відповідно; $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1,\ \ m_2 \times 1,\ \ m_3 \times 1$ відповідно.

Задачу, подану вище, називають *стандартною* задачею лінійного програмування (ЗЛП).

ЗЛП, в якій обмеження записані у вигляді рівностей і змінні позитивні , називається ЗЛП в ***канонічній*** формі. *Канонічна*, або *основна* задача лінійного програмування має вигляд

$$y\left(\bar{\tilde{o}}\right) = \bar{\tilde{n}}^{\grave{o}}\,\bar{\tilde{o}} + \tilde{n}_0 \to \underset{\bar{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\text{opt}}, \qquad (2.3)$$

$$\Omega: \begin{cases} \grave{A}\bar{\tilde{o}} = \bar{b}; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \qquad (2.4)$$

де $\grave{A}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\bar{b}$ – вектор вільних членів обмежень розмірності $m \times 1$.

Перетворення стандартної ЗЛП до канонічної ЗЛП розглянемо на прикладах.

Приклад 1. *Перетворити в канонічну форму наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \to \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega: \begin{cases} \tilde{o}_1 - \tilde{o}_3 + \tilde{o}_5 \le 3 \\ \tilde{o}_1 + \tilde{o}_4 - 5\tilde{o}_5 \ge 8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання

1. Обмеження-нерівність типу "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад, { $\tilde{o}_1 - \tilde{o}_3 + \tilde{o}_5 \le 3$ } стане { $\tilde{o}_1 - \tilde{o}_3 + \tilde{o}_5 + x_6 = 3$ };

2. Обмеження-нерівність типу "≥" перетвориться в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової позитивної змінної, наприклад $\{\, \tilde{o}_1 + \tilde{o}_4 - 5\tilde{o}_5 \geq 8 \,\}$ стане $\{\, \tilde{o}_1 + \tilde{o}_4 - 5\tilde{o}_5 - \tilde{o}_7 = 8 \,\}$.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega : \begin{cases} \tilde{o}_1 - \tilde{o}_3 + \tilde{o}_5 + x_6 = 3 \\ \tilde{o}_1 + \tilde{o}_4 - 5\tilde{o}_5 - x_7 = 8 \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Приклад 2. *Перетворити в канонічну форму і записати у векторно-матричній формі наступну задачу лінійного програмування*:

$$y(x) = 6\tilde{o}_1 - 4\tilde{o}_2 - 7\tilde{o}_4 + \tilde{o}_5 \rightarrow \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5},$$

$$\Omega : \begin{cases} 2\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_3 - 3\tilde{o}_4 + 7\tilde{o}_5 \leq 8; \\ 9\tilde{o}_1 - \tilde{o}_3 + 2\tilde{o}_5 \leq 5; \\ \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 - 3\tilde{o}_4 + 5\tilde{o}_5 \geq 3;; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання

1. Нерівності типу "≤" (f_1, f_2) перетворимо в рівність шляхом додавання до їх лівих частин двох додаткових змінних $\tilde{o}_6, \tilde{o}_7$. Отримаємо $f_1 = 2\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_3 - 3\tilde{o}_4 + 7\tilde{o}_5 + x_6 = 8$; $\Delta_1 < 0$.

2. Нерівність типу "≥" (f_3) перетворимо в рівність шляхом віднімання з його лівої частини додаткової змінної $\tilde{o}_8$.

Отримаємо $f_3 = \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 - 3\tilde{o}_4 + 5\tilde{o}_5 - \tilde{o}_8 = 3$.

Канонічний вигляд початкової задачі:

$$y(x) = 6\tilde{o}_1 - 4\tilde{o}_2 - 7\tilde{o}_4 + \tilde{o}_5 \rightarrow \min_{\tilde{o}_j \in \Omega \subset \mathbf{R}^5}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_3 - 3\tilde{o}_4 + 7\tilde{o}_5 + \tilde{o}_6 = 8; \\ 9\tilde{o}_1 - \tilde{o}_3 + 2\tilde{o}_5 + \tilde{o}_7 = 5; \\ \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 - 3\tilde{o}_4 + 5\tilde{o}_5 - \tilde{o}_8 = 3;; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,8} \end{cases}$$

Векторно-матрична форма запису початкової задачі:

$$y(x)=\begin{bmatrix}6 & -4 & 0 & -7 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\bar{x}\rightarrow\min_{x\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases}\begin{bmatrix}2 & 0 & 5 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0\\ 9 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -3 & 5 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7\\ x_8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\ 5\\ 3\end{bmatrix};\\ \bar{\tilde{o}}\geq 0.\end{cases}$$

Елементи лінійної алгебри

У розв’язанні задач лінійного програмування симплекс-методом та за допомогою диференційного алгоритму ми будемо застосовувати жорданові виключення. Проілюструємо жорданові виключення на прикладах обернення матриць і розв’язанні системи лінійних рівнянь.

Приклад 3. Знайти матрицю A^{-1}, обернену матриці

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

і переконатися у рівності $A\cdot A^{-1}=E$; де *E*-одинична матриця.

Розв’язання

Матриця *A* має обернену матрицю тільки в тому випадку, якщо матриця *A* неособлива, тобто її визначник ΔA не дорівнює нулю. Визначник матриці вимірності 3×3 обчислити за формулою

$$\Delta A=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-\\ -a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

Переконаємось, що матриця *A* має повернену :

$$\Delta A=2\cdot 3\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0+1\cdot 1\cdot 1-1\cdot 3\cdot 0-2\cdot 0\cdot 1-0\cdot 1\cdot 1=7\neq 0\,.$$

Для одержання матриці A^{-1} необхідно зробити три кроки жорданових виключень. Для одержання елементів нової таблиці на кожному кроці жорданових виключень будемо користуватися такими співвідношеннями:

для головного елемента $$b_{kr} = \frac{1}{a_{kr}}; \qquad (2.5)$$

для елементів напрямного рядка (крім головного)

$$b_{\substack{kj \\ j\neq r}} = \frac{a_{kj}}{a_{kr}}; \qquad (2.6)$$

для елементів напрямного стовпця (крім головного)

$$b_{\substack{ir \\ i\neq k}} = \frac{a_{ir}}{a_{kr}}; \qquad (2.7)$$

для решти елементів $$b_{\substack{ij \\ i\neq k \\ j\neq r}} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{kj}}{a_{kr}}; \qquad (2.8)$$

Побудуємо вихідну таблицю жорданових виключень:

	t_1	t_2	t_3
$S_1=$	**2**	1	0
$S_2=$	0	3	1
$S_3=$	1	0	1

Головним елементом на першому кроці буде елемент a_{11}, на другому - a_{22}, на третьому - a_{33}. Визначимо елементи нової таблиці першого кроку:

головний елемент згідно з (2.5)

$$b_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{2};$$

елементи напрямного рядка згідно з (2.6)

$$b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}; \qquad b_{13} = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{0}{2} = 0;$$

елементи напрямного стовпця згідно з (2.7)

$$b_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0}{2} = 0; \qquad b_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{2};$$

решта елементів згідно з (2.8)

$$b_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} = 3 - \frac{0\cdot 1}{2} = 3; \qquad b_{23} = a_{33} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} = 1 - \frac{0\cdot 0}{2} = 1;$$

$$b_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} = 0 - \frac{1\cdot 1}{2} = -\frac{1}{2}; \qquad b_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} = 1 - \frac{1\cdot 0}{2} = 1.$$

Нова таблиця має вигляд: (1-й крок)

	S_1	$\boldsymbol{t_2}$	t_3
$t_1=$	1/2	-1/2	0
$\boldsymbol{S_2}=$	0	**3**	1
$S_3=$	1/2	-1/2	1

Процедури наступних кроків жорданових виключень аналогічні процедурі першого кроку.

	S_1	S_2	$\boldsymbol{t_3}$
$t_1=$	1/2	-1/6	1/6
$t_2=$	0	1/3	-1/3
$\boldsymbol{S_3}=$	1/2	-1/6	**7/6**

2-й крок

	S_1	S_2	S_3
$t_1=$	3/7	-1/7	1/7
$t_2=$	1/7	2/7	-2/7
$t_3=$	-3/7	1/7	6/7

$= A^{-1}$

3-й крок

Перевіримо тотожність $A \cdot A^{-1} = E.$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 2/7 & -2/7 \\ -3/7 & 1/7 & 6/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Висновок: матриця A^{-1} визначена вірно.

Приклад 4.

Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - 1 = 0; \\ x_2 - 2x_3 + 1 = 0; \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2 = 0. \end{cases}$$

відносно змінних x_1, x_2, x_4. Перевірити правильність рішення при $x_3 = 1$.

Розв'язання

Для вирішення системи використаємо *жорданові виключення*.

Вихідна таблиця має вигляд:

	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0 =	1	-1	0	1	-1
0 =	0	1	-2	0	1
0 =	2	0	1	-1	2

Елементи останнього стовпця таблиці відповідають вільним членам заданих рівнянь, решта елементів - коефіцієнтам біля відповідних змінних.

Для вирішення системи рівнянь необхідно змінні x_1, x_2, x_4 зробити залежними від змінної x_3, тобто у таблиці обміняти місцями нулі і змінні x_1, x_2, x_4. Дана процедура потребує виконання 3-х кроків жорданових виключень з використанням формул (1)-(4).

1-й крок

	0	x_2	x_3	x_4	*1*
x_1=	1	1	0	-1	1
0=	0	1	-2	0	1
0=	2	2	1	-3	4

Перший стовпець у новій системі рівнянь дає тільки нульові члени, тому він може бути вилучений без будь-яких небажаних наслідків. Далі нульові стовпці взагалі записувати не будемо.

2- крок

	x_3	x_4	1
x_1=	2	-1	0
x_2=	2	0	-1
0=	5	-3*	2

3-крок

	x_3	1
x_1=	1/3	-2/3
x_2=	2	-1
x_4=	5/3	2/3

Розв'язок: $x_1 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}$; $x_2 = 2x_3 - 1$; $x_4 = \frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{3}$. (5)

Перевірка: при $x_3 = 1$ з (5) $x_1 = -1/3;\quad x_2 = 1;\quad x_4 = 7/3.$ Здобуті значення змінних треба підставити до вихідної системи:

$$\begin{cases} -1/3\ -1 + 7/3 - 1 = 0; \\ 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0; \\ 2 \cdot (-1/3) + 1 - 7/3 + 2 = 0. \end{cases}$$

Система рівнянь перетворилася у тотожність. Отже, рішення (5) знайдено вірно

Застосування симплекс-методу в економічних задачах

Розглянемо застосування симплекс методу в економічних задачах на конкретних прикладах.

Приклад 5. *Підприємство має наступні виробничі ресурси (сировина, обладнання, електроенергія) і може організувати виробництво продукції двома різними способами. Витрати ресурсів і амортизація обладнання за один місяць і загальний ресурс при кожному способі задані в табл.2.1 (у грош.од).*

При першому способі виробництва підприємство випускає за один місяць 3 тис. виробів , при другому - 4 *тис. виробів .*

Таблиця 2.1

Виробничий ресурс	*Витрати ресурсів за 1 місяць при роботі*		*Загальний ресурс*
	по 1 способу	*по 2 способу*	
Сировина	*1*	*2*	*4*
Обладнання	*1*	*1*	*3*
Електроенергія	*2*	*1*	*8*

Скільки місяців повинно працювати підприємство кожним з цих способів, щоб при наявних ресурсах забезпечити максимальний випуск продкуці?

Розв'язання

Позначимо:

x_1 - *час роботи* підприємства першим способом;

x_2 - *час роботи* підприємства другим способом.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y\left(\bar{x}\right) = 3x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми :

$$y\left(\bar{x}\right) = 3x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

Як базис виберемо змінні x_3, x_4, x_5. Далі заповнюємо симплекс-таблицю:

Базис	$\overline{C}^{\text{áàç}}$	$\bar{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	4	1	2	1	0	0	$4/2$
x_4	0	3	1	1	0	1	0	$3/1$
x_5	0	8	2	1	0	0	1	$8/1$
Δ_j		$\Delta_0 = 0$	-3	-4	0	0	0	

1. Визначаємо початкове опорне рішення. Тобто незалежні змінні дорівнюють 0, а базисні (залежні) змінні дорівнюють правим частинам обмежень задачі. Знаходимо значення цільової функції на даному опорному плані

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i^{\text{áàç}} \cdot b_i = 0\cdot 4 + 0\cdot 3 + 0\cdot 8 = 0$$

Визначаємо оцінки цільової функції $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_i^{\text{áàç}} \cdot a_{ij} - C_j$

$\Delta_1 = 0\cdot1 + 0\cdot1 + 0\cdot2 - 3 = -3;\ \Delta_2 = 0\cdot2 + 0\cdot1 + 0\cdot1 - 4 = -4;\ \Delta_3 = 0\cdot1 + 0\cdot0 + 0\cdot0 - 0 = 0;$

$\Delta_4 = 0\cdot0 + 0\cdot1 + 0\cdot0 - 0 = 0;\ \ \Delta_5 = 0\cdot0 + 0\cdot0 + 0\cdot1 - 0 = 0;$

Перше опорне рішення не є оптимальним, оскільки $\Delta_j < 0,\ j = \overline{1,5}$.

Критерій оптимальності: мінімум цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\overline{x}'_{îï} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+m} \end{pmatrix}$ *всі оцінки* $\Delta_j \le 0 \;\; (j = \overline{1, n+m})$, а *максимум* цільової функції досягнутий, якщо для деякого опорного рішення $\overline{x}'_{îï} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n+m} \end{pmatrix}$ *всі оцінки* $\Delta_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1, n+m})$.

2. Виберемо *направляючий стовпець*. Оскільки дана задача на максимум, то для поліпшення рішення серед оцінок Δ_j потрібно вибрати найменшу, в даному випадку $\Delta_2 = -4$. Виділяємо направляючий стовпець. У базис необхідно ввести змінну x_2.

3. Знайдемо *направляючий рядок*. Для цього підрахуємо симплекс-відношення $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ir}}$.

Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\left\{ 4/2 ; 3/1 ; 8/1 \right\} = 2$. Виділяємо направляючий рядок сірим кольором, а змінну x_3 необхідно вивести з базису.

4. Заповнюємо симплекс таблицю 2-го шагу. У стовпець "Базис" замість змінної x_3, яку вивели з базису, вказуємо x_2, яку ввели в базис.

У стовпець $\overline{C}^{áàç}$ вносимо зміни – навпроти x_2 записуємо значення коефіцієнта цільової функції $\tilde{N}_2 = 4$.

Далі симплекс-таблицю заповнюємо в наступному порядку:

1. У стовпцях x_2, x_4, x_5, відповідаючих базисним змінним, записуємо
2. Одиничні вектори $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
3. Всі елементи направляючого рядка (окрім $\overline{C}^{áàç}$) ділимо на головний елемент (на 2).
4. Елементи таблиці, що залишилися, перераховуємо за формулою жорданових виключень (за четвертим правилом) $a_{ij}^{íîâ} = a_{ij} - \dfrac{a_{ir} \cdot a_{kj}}{a_{kr}}$.

Отримана таблиця має наступний вигляд.

Базис	$\overline{C}^{áàç}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	2	1/2	1	1/2	0	0	4
x_4	0	1	1/2	0	-1/2	1	0	2
x_5	0	6	3/2	0	-1/2	0	1	4
Δ_j		$\Delta_0 = 8$	-1	0	2	0	0	

1. *Друге опорне рішення* $\overline{x'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ не є оптимальним оскільки $\Delta_1 < 0$.

2. Виберемо *направляючий стовпець*. Оскільки серед всіх Δ_j тільки $\Delta_1 < 0$ направляючим стовпцем буде перший стовпець, а змінну x_1 необхідно ввести в базис.

3. Знайдемо *направляючий рядок*. Для цього підрахуємо симплекс-відношення θ_i. Вибираємо другий рядок k=2, оскільки $\theta_k = \min\{4; 2; 4\} = 2$. Направляючий рядок виділяємо сірим кольором, а змінну x_4 необхідно вивести з базису.

4. Заповнюємо симплекс таблицю 3-го кроку.

Базис	$\overline{C}^{áàç}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	4	1	0	1	1	-1	0	
x_1	3	2	1	0	-1	2	0	
x_5	0	3	0	0	1	-3	1	
Δ_j		$\Delta_0 = 10$	0	0	1	2	0	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то отримане опорне рішення є оптимальним $\overline{x'}^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, а максимум функції рівний $y(\overline{x}^*) = 10$.

Максимальний випуск продукції складе 10 тис. од., при цьому за першим способом підприємство повинне працювати два місяці, за другим - один місяць.

Диференційний алгоритм

Приклад **6**.

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 2 од. поживної речовини А, не менше 8 од. речовини В. На 1 кг корму І доводиться 1 од. поживної речовини А, 2 од. поживної речовини В . На 1 кг корму ІІ доводиться 3 од. поживної речовини А і 8 од. поживної речовини В . Цена 1 кг корму І складає 1 грн., 1 кг корму ІІ складає 4 грн. Необхідно визначити денний раціон тварин, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин, при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Поживні речовини	**Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг корму**		**Щоденна норма поживних речовин**
	I	II	
A	1	3	2
B	2	8	5
Вартість 1 кг корму	1	4	

Розв'язання

Позначимо $\vec{x}=(x_1,x_2)$ – кількість кілограмів корму І та ІІ в денному раціоні. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y\left(\overline{x}\right)=x_1+4x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1+3x_2\ge 2 \\ 2x_1+8x_2\ge 5 \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2} \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми. Введемо дві додаткові змінні x_3, x_4.

$$y\left(\overline{x}\right)=x_1+4x_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=2 \\ 2x_1+8x_2-x_4=5 \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

1. *Пошук опорного рішення.* Нехай залежними змінними будуть x_3, x_4, а незалежними будуть x_1 і x_2, тоді виразимо залежні через незалежні $x_3 = x_1 + 3x_2 - 2;\ \ x_4 = 2x_1 + 8x_2 - 5$.

Складемо таблицю й одержимо перше опорне рішення $\overset{-\grave{O}}{x_0} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -5]$. Воно неприпустиме тому, що $\tilde{o}_3 = -2 < 0$, $\tilde{o}_4 = -5 < 0$.

	x_1	x_2	1
x_3=	1	3	-2
x_4=	2	8	-5
y=	1	4	0

2. *Пошук припустимого опорного рішення.* Направляючим стовпцем може бути і перший і другий, оскільки всі елементи матриці В позитивні. Нехай направляючим стовпцем буде перший стовпець. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій $\Delta t_1 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{-2}{1}; \quad -\frac{-5}{2} \right] = 2$. Це означає, що перший рядок обрано направляючим і залежна змінна x_3 стане незалежною, а незалежна змінна x_1 стане залежною.

	x_1	x_2	1
x_3=	$\boxed{1}$	3	-2
x_4=	2	8	-5
y=	1	4	0

Головним елементом стане $b_{11} = 1$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\overset{-\grave{O}}{x_1} = [2 \quad 0 \quad 0 \quad -1]$. Дане рішення не є припустимим. Воно неприпустиме тому, що $\tilde{o}_4 = -1 < 0$.

	x_3	x_2	1
x_1=	1	-3	2
x_4=	2	2	-1
y=	1	1	2

Ми знову повторюємо 2-й етап.

2. *Пошук припустимого опорного рішення.* Направляючим стовпцем може бути і перший і другий, оскільки 2>0. Для вибору направляючого

	x_3	x_4	1
x_1=	4	-3/2	1/2
x_2=	1	1/2	1/2
y=	0	1/2	5/2

рядка застосуємо критерій $\Delta t_2 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{2}{-3}; \quad -\frac{-1}{2} \right] = 1/2$. Це означає, що другий рядок обрано направляючим і залежна змінна x_4 стане незалежної, а незалежна змінна x_2 стане залежною. Головним елементом стане $b_{42} = 2$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_2^{\grave{o}} = \left[1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \right]$. Дане рішення є припустимим. Тепер нас цікавить, чи є це рішення оптимальним? Дане рішення є оптимальним, оскільки $k_1 = 0 \geq 0$ і $k_2 = 1/2 \geq 0$. Підставимо $\bar{x}_2^{\grave{o}} = \left[1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \right]$ в цільову функцію вихідної задачі. Одержимо $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, $y^* = 0.5 + 4 \cdot 0.5 = 2.5$.

Денний раціон тварин, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин – 0.5 кілограмів корму I та 0.5 кілограмів корму II. Мінімальні грошові витрати на придбання корму – 2.5 грн.

Приклад 7. *Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:*

$$y(\bar{x}) = -x_1 - 2x_2 + 2 \to \min_{x \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16 \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Розв'язання

1. *Пошук опорного рішення*. Нехай залежними змінними будуть x_3, x_4, x_5, а незалежними будуть x_1 і x_2, тоді виразимо залежні через незалежні $x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 12; \; x_4 = x_1 - 3x_2 + 6; \; x_5 = 2x_1 + 4x_2 - 16$.

Складемо таблицю й одержимо перше опорне рішення $\bar{x}_0^{\grave{o}} = [0 \quad 0 \quad 12 \quad 6 \quad -16]$. Воно неприпустиме тому, що $\tilde{o}_5 = -16 < 0$. Значення цільової функції $\acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_0\right) = 2$.

2. Пошук припустимого опорного рішення. Направляючим стовпцем може бути і перший, і другий, оскільки й $b_{31} > 0$, і $b_{32} > 0$. Нехай направляючим стовпцем буде перший стовпець. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій $\Delta t_1 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{12}{-4} \quad -\frac{-16}{2} \right] = 3$. Це означає, що перший рядок обрано направляючим і залежна змінна x_3 стане незалежною, а незалежна змінна x_1 стане залежною.

	x_1	x_2	1
$x_3=$	$\boxed{-4}$	2	12
$x_4=$	1	-3	6
$x_5=$	**2**	4	-16
$y=$	-1	-2	2

Головним елементом стане $b_{11} = -4$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\overline{x}_1^{\grave{o}} = [3 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad -10]$. Дане рішення не є припустимим. Однак, $\acute{o}\left(\overline{\tilde{o}}_1\right) = -1$, $\acute{o}\left(\overline{\tilde{o}}_1\right) < \acute{o}\left(\overline{\tilde{o}}_0\right)$.

Ми знову повторюємо 2-й етап.

	x_3	x_2	1
$x_1=$	-1/4	1/2	3
$x_4=$	-1/4	-5/2	9
$x_5=$	-1/2	5	-10
$y=$	1/4	-5/2	-1

2.Пошук припустимого опорного рішення. Направляючим стовпцем може бути тільки **другий стовпець**, оскільки в третьому рядку тільки $b_{32} > 0$. Для вибору направляючого рядка застосуємо критерій $\Delta t_2 = \min\limits_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{9}{-5/2} \quad -\frac{-10}{5} \right] = 2$. Це означає, що як направляючий обран третій рядок і залежна змінна x_5 стане незалежною, а незалежна змінна x_2 стане залежною. Головним елементом стане $b_{32} = 5$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне

	x_3	x_2	1
$x_1=$	-4	1/2	3
$x_4=$	-1/4	-5/2	9
$x_5=$	-1/2	$\boxed{5}$	-10
$y=$	1/4	-5/2	-1

	x_3	x_5	1
$x_1=$	-1/5	1/10	4
$x_4=$	-1/2	-1/2	4
$x_2=$	1/10	1/5	2
$y=$	0	-1/2	-6

рішення $\bar{x}_2^{\grave{o}} = [4 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0]$. Дане рішення є припустимим $\acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_2\right) = -6$, $\acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_2\right) < \acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_1\right)$ **.** Тепер нас цікавить, чи є це рішення оптимальним? Ні, оскільки $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Переходимо до третього етапу.

	x_3	x_5	*1*
x_1=	-1/5	1/10	4
x_4=	-1/2	-1/2	4
x_2=	1/10	1/5	2
y=	0	-1/2	-6

3.Пошук оптимального рішення. Направляючим стовпцем може бути тільки *другий стовпець*, оскільки саме $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Вибір направляючого рядка здійснюється тільки серед рядків, у яких $b_{ir} < 0$, тільки $b_{22} = -\frac{1}{2} < 0$. Це означає, що *другий рядок – направляючий*.

	x_3	x_4	*1*
x_1=	-0,3	-1/5	4,8
x_5=	-1	-2	8
x_2=	-1/10	-2/5	3,6
y=	1/2	1	-10

І незалежна змінна x_5 стане залежною, а залежна змінна x_4 стане незалежною. Головним елементом стане $b_{22} = -\frac{1}{2}$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нове опорне рішення $\bar{x}_3^{\grave{o}} = [4,8 \quad 3,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Дане рішення є оптимальним, оскільки $k_1 = \frac{1}{2} > 0$ й $k_2 = 1 > 0$. $\acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_3\right) = -10$, $\acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_3\right) < \acute{o}\left(\bar{\tilde{o}}_2\right)$. Щоб довідатися, яким є рішення вихідної задачі, підставимо $\bar{x}_3^{\grave{o}} = [4,8 \quad 3,6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ в цільову функцію вихідної задачі. Одержимо $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 4,8 \\ 3,6 \end{bmatrix}$, $y^* = -4.8 - 2 \cdot 3.6 + 2 = -10$.

Транспортна задача

Постановка, методи розв'язання та аналізу

Транспортна задача є однією з найпоширеніших спеціальних задач лінійного програмування. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення надмірно дальніх, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємств, пов'язані із здійсненням процесів забезпечення сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням і т.д.

У загальному вигляді транспортну задачу можна подати наступним чином: у m пунктах виробництва $A_1, A_2, .., A_m$ роблять деякий однорідний продукт у кількостях, відповідно, $a_1, a_2....a_m$. Цей продукт споживають у n пунктах $B_1,...,B_n$ у кількостях, відповідно, $b_1, b_2.......b_n$. Припустимо, що з кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати з перевезення з пункту A_i у пункт B_j одиниці продукції рівні c_{ij} $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Задача полягає у визначенні такого плану перевезень, при якому запити всіх споживачів повністю задоволені, весь продукт із пунктів виробництва вивезений і сумарні транспортні витрати мінімальні.

У залежності від співвідношення між сумарним обсягом виробництва (запасами вантажу) і сумарним споживанням, транспортні задачі бувають *закриті й відкриті.*

Закрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то транспортна задача називається закритою.

Відкрита транспортна задача: Якщо обсяг виробництва не дорівнює обсягу споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то транспортна задача називається відкритою.

Розглянемо ***закриту транспортну задачу.*** Умови транспортної задачі зручно подати у вигляді :

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**					
		B_1	B_2	…	B_j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Для складання математичної моделі задачі введемо змінні $x_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, що позначають кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту виробництва в j-й пункт споживання.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega} \tag{2.9}$$

$$
\Omega:\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i, (\mathrm{i}\ =\ 1,\ 2,\ ...,\mathrm{m};)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, (\mathrm{j}\ =\ 1,\ 2,\ ...,\mathrm{n};)\\ x_{ij}\geq 0; i=\overline{1,\mathrm{m}},\ j=\overline{1,\mathrm{n}}.\end{cases} \tag{2.10}
$$

Умови (2.10) гарантують повне вивезення продукту з усіх пунктів виробництва й повне задоволення попиту у всіх пунктах споживання.

Транспортна задача являє собою задачу лінійного програмування із ($m\times n$) числом змінних x_{ij}, і ($m+n$) числом обмежень-рівностей.

Змінні x_{ij} нумерують за допомогою двох індексів і тому записують у вигляді матриці:

$$
X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & x_{1n}\\ x_{21} & x_{22} & . & x_{2n}\\ . & . & . & .\\ x_{m1} & x_{m2} & . & x_{mn}\end{bmatrix}
$$

Матрицю X називають планом перевезень транспортної задачі, а змінні x_{ij} — перевезеннями.

Матриця C = || c_{ij}|| називається матрицею транспортних витрат. Оптимальним рішенням задачі є матриця

$$
X_{opt}=(x_{ij})_{m\times n},
$$

яка задовольняє системі обмежень і надає мінімум цільовій функції. Існують ручні й машинні методи рішення транспортної задачі. До ручних відносяться розподільний метод, метод потенціалів, до машинних – угорський метод, метод диференціальних стрічок.

Розв'язання транспортної задачі за допомогою ручних методів складається з наступних етапів:

- визначення початкового опорного рішення задачі;
- перевірка цього рішення на оптимальність;
- перехід від одного опорного рішення до другого.

Розглянемо рішення транспортної задачі на прикладі.

Приклад 8

Три постачальники A_1, A_2, A_3 мають запаси продукції в кількостях 60, 50, 50 т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3, B_4 повинні отримати цю продукцію в кількостях 40, 40, 30, 50 т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані матрицею:

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} (\text{грош.од.})$$

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} – кількість продукції, яку щомісячно слід доставляти на *j–й* завод з *і–го* складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$L(X)=3x_{11}+3x_{12}+2x_{13}+2x_{14}+3x_{21}+4x_{22}+2x_{23}+4x_{24}+2x_{31}+4x_{32}+$$
$$+3x_{33}+4x_{34}\to \min_{x_{ij}\in\Omega},$$

$$\Omega:\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=40 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=40 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=30 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=50 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=50 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 \\ x_{ij}\ge 0, i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}. \end{cases}$$

*1- й крок***.** *1-й етап.* Найбільш поширеним методом побудови вихідного опорного плану є метод північно-західного кута. Він полягає в послідовному розподілі продукції споживачам з урахуванням можливостей постачальників, починаючи з лівого верхнього квадрата (клітинки) й закінчуючи правим нижнім квадратом (клітинкою).

Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне рішення транспортної задачі. Згідно з цим методом заповнюємо таблицю, починаючи з лівого верхнього кута. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення 60 од. з потребою першого пункту призначення 40 од. Вибираємо меншу величину (40) і записуємо її в даний квадрат (табл.2.1). Перший постачальник, маючи 60 од. вантажу, відправляє першому споживачеві 40 од. вантажу. Оскільки першому споживачеві не потрібен більше груз, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець.

Таблиця 2.1

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3	2	2
A_2	**50**	3	4	2	4
A_3	**50**	2	4	3	4

Тепер на першому пункті відправлення залишилося 60-40=20 од. продукції. Порівнюємо залишок 20 од. і потребу 40 од., які перший постачальник поставляє другому споживачеві. Вибираємо меншу величину (20) і записуємо її в сусідню клітинку (табл. 2.2). Оскільки весь запас в першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітинку, яка знаходиться нижче заповненої.

Таблиця 2.2

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3 **20**	2	2
A_2	**50**	3	4	2	4
A_3	**50**	2	4	3	4

У новій клітинці другий постачальник залишає 20 од. вантажу для другого споживача і другий стовпець заповнений, оскільки другому споживачеві не потрібен більше вантаж (див табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3 **20**	2	2
A_2	**50**	3	4 **20**	2	4
A_3	**50**	2	4	3	4

Тепер на другому пункті відправлення залишилося 50-20 = 30 од. продукції, які другий постачальник віддає третьому споживачеві. Другий рядок і третій стовпець з подальшого розгляду виключаємо, оскільки запаси другого постачальника вичерпані і потреби третього споживача задоволені.

Остання права нижня клітинка заповнюється механічно – в неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 50. Всі результати із знаходження початкового опорного плану наведені в табл. 2.4. Вони в таблиці виділені жирним шрифтом.

Таблиця 2.4

Пункти відправлення	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3 **40**	3 **20**	2	2 **0**
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4
A_3	**50**	2	4	3	4 **50**

Таким чином, ми одержали перший початковий опорний план. $X_0=\begin{bmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$.

Обчислюємо значення цільової функції: $L(X)=3\cdot 40+3\cdot 20+4\cdot 20+2\cdot 30+4\cdot 50=520$. Це значення буде використано на подальших кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинне послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Тепер необхідно перевірити умову *невиродженності* . План

$$X=(x_{ij})_{m\times n},(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}),$$

є невиродженим, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m+n-1$, а якщо менше – то виродженим.

Число зайнятих кліток в таблиці дорівнює 5, $m+n-1=3+4-1=6$,тобто умова *невиродженності* не виконана. Зробимо його невиродженим, помістивши базисні нулі в клітку з координатами (i, j):(1,4).

2- й етап. Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність методом потенціалів за наступним критерієм: якщо опорне рішення транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система дійсних чисел $\alpha_i\ (i=\overline{1,m})$ і $\beta_j\ (j=\overline{1,n})$ задовольняючих умовам:

$\beta_j+\alpha_i=c_{ij}$ при $x_{ij}>0$ (для зайнятих кліток);

$\beta_j+\alpha_i\le c_{ij}$ при $x_{ij}=0$ (для вільних кліток).

Числа $\alpha_i\ (i=\overline{1,m})$ і $\beta_j\ (j=\overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення. У зв'язку з цим знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення з системи:

$\beta_1+\alpha_1=3$, $\beta_2+\alpha_2=4$, $\beta_4+\alpha_1=2$,

$\beta_2+\alpha_1=3$, $\beta_3+\alpha_2=2$, $\beta_4+\alpha_3=4$, що містить шість рівнянь з сім'ю невідомими. Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$. Записуємо знайдені потенціали в табл. 5.

*3-й етап. Ви*значимо величину $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$, яку називають *оцінкою вільних кліток*. Якщо всі *оцінки вільних кліток* $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорне рішення є оптимальним. Якщо хоч би одна з оцінок $\Delta_{ij} > 0$, то опорне рішення не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного рішення .

Таблиця 2.5

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3 - **40**	3 **20**	2	2 +	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 +	4	3	4 - **50**	2
β_j		3	3	1	2	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки: $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = 1, \Delta_{24} = -1$ $\Delta_{31} = 3$, $\Delta_{32} = 1$, $\Delta_{33} = 0$. Оскільки серед оцінок Δ_{ij} є позитивні, то опорний план X_0 не є оптимальним.

Серед позитивних оцінок вибираємо максимальний тариф : $\Delta_{31} = 3$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл і перерозподіляємо потоки продукції, а саму клітку позначаємо знаком «+». Потім, рухаючись по зайнятих клітках, по черзі відзначаємо їх знаками «–» і «+». При цьому напрям руху може змінюватися тільки під прямим кутом і замикатися на початковій клітці. У результаті побудови циклу у відповідних рядках і стовпцях має бути парна кількість знаків «–», «+». У табл. 2.5 зайняті клітки, складові циклу, виділені сірим фоном.

Потім з вершин зі знаком «–» обирають мінімальний вантаж, його додають до вантажів, що стоять у вершин зі знаком «+», і віднімають від вантажів у вершин із знаком «–». В результаті перерозподілу вантажу отримаємо нове опорне рішення (опорний план).

Найменшим з чисел x_{ij} в «мінусових» клітках є $x_{11} = 40$ (мінімальний вантаж). Ця клітка стає вільною, а решта кліток циклу міняють свої значення таким чином $x_{14} = 0 + 40 = 40;$ $x_{31} = 0 + 40 = 40;$ $x_{34} = 50 - 40 = 10;$

У результаті виконаних перетворень отримуємо новий опорний план $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані цільова функція стає рівною 400, що менше початкового значення 520.

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без 1-го етапу.

2- й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.2.6) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо систему рівнянь і вважаючи $\alpha_1 = 0$ вирішуємо її: $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_3 = 2$.

Таблиця 2.6

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **20**	2	2 **40**	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	3	1	20	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки: $\Delta_{11} = -3$, $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = -2$, $\Delta_{24} = -1$, $\Delta_{32} = 1$, $\Delta_{33} = 0$.

Оскільки серед оцінок $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$ є позитивна ($\Delta_{32} = 1$), то опорний план X_1 не є оптимальним.

Позитивна оцінка ($\Delta_{32} = 1$) відповідає клітці (3,2). Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл. 2.7 зайняті клітки, складові циклу, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+».

Таблиця 2.7

<table>
<tr><th rowspan="4">Пункти відправ.</th><th rowspan="4">Запаси</th><th colspan="4">Пункти призначення</th><th rowspan="4">α_i</th></tr>
<tr><th>B_1</th><th>B_2</th><th>B_3</th><th>B_4</th></tr>
<tr><th colspan="3">Потреби</th><th></th></tr>
<tr><th>40</th><th>40</th><th>30</th><th>50</th></tr>
<tr><td>A_1</td><td>60</td><td>3</td><td>3 - 20</td><td>2</td><td>2 + 40</td><td></td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>50</td><td>3</td><td>4 20</td><td>2 30</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>50</td><td>2 40</td><td>4 +</td><td>3</td><td>4 - 10</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">β_j</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Найменшим з чисел x_{ij} в «мінусових» клітках є $x_{34} = 10$. Дана клітка стає вільною, а решта кліток циклу міняють свої значення таким чином: $x_{12} = 20 - 10 = 10$, $x_{14} = 40 + 10 = 50$, $x_{34} = 0 + 10 = 10$

Новий опорний план $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція мети стає рівною 390, що менше попереднього значення 400.

3- й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.8) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо систему рівнянь і вирішуємо її.

$\beta_2 + \alpha_1 = 3$, $\beta_2 + \alpha_2 = 4$, $\beta_1 + \alpha_3 = 2$,

$\beta_4 + \alpha_1 = 2$, $\beta_3 + \alpha_2 = 2$, $\beta_2 + \alpha_3 = 4$, Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_3 = 1$. Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{11} = -2$, $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{21} = -1$, $\Delta_{24} = -1$, $\Delta_{33} = -1$, $\Delta_{34} = -1$. Оскільки всі оцінки негативні, то опорний план X_2 є оптимальним.

Таблиця 2.8

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 **10**	2	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **20**	2 **30**	4	1
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	1
β_j		1	3	1	2	

Таким чином, знайдено оптимальний план $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Цільова функція набуває оптимального значення $L(X) = 390$.

Знаходження початкового опорного плану методом мінімальної вартості

Згідно з цим методом вантажі розподіляються насамперед в ті клітки, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень. Далі постачання розподіляються в незайняті клітки з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників і задоволення попиту споживачів. Процес розподілу продовжується до тих пір, поки всі вантажі від постачальників не будуть вивезені, а споживачі не будуть задоволені.

Приклад 9

Використовуючи умови ***прикладу 1*** *визначити початковий опорний план методом мінімальної вартості й знайти оптимальне рішення задачі методом потенціалів.*

Розв'язання

Всі результати по знаходженню початкового опорного плану *методом мінімальної вартості* наведені в табл. 2.9

Таблиця 2.9

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреби			
		40	**40**	**30**	**50**
A_1	**60**	3	3	2 **30**	2 **30**
A_2	**50**	3	4 **40**	2	4 **10**
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**

Ми одержали перший початковий опорний план. $X_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & 30 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. Обчислюємо значення цільової функції:

$L(X)=2\cdot 30+2\cdot 30+4\cdot 40+4\cdot 10+2\cdot 40+4\cdot 10=440$.

У наступних таблицях наведено рішення задачі методом *потенціалів.*

Таблиця 2.10

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3	2 **30** -	2 **30** +	0
A_2	**50**	3	4 **40**	2 +	4 **10** -	2
A_3	**50**	2 **40**	4	3	4 **10**	2
β_j		0	2	2	2	

Таблиця 2.11

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3	2 **20** -	2 **40** +	0
A_2	**50**	3	4 **40** -	2 **10** +	4	0
A_3	**50**	2 **40**	4 +	3	4 **10** -	2
β_j		0	4	2	2	

$$X_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \qquad L(X)=420$$

Таблиця 2.12

Пункти відправки	**Запаси**	**Пункти призначення**				α_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
		Потреби				
		40	**40**	**30**	**50**	
A_1	**60**	3	3 +	2 **10** -	2 **50**	0
A_2	**50**	3	4 **30** -	2 **20** +	4	0
A_3	**50**	2 **40**	4 **10**	3	4	0
β_j		2	4	2	2	

$$X_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 40 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \qquad L(X)=400$$

Таблиця 2.13

<table>
<tr><td rowspan="4">Пункти відправки</td><td rowspan="4">Запаси</td><td colspan="4">Пункти призначення</td><td rowspan="4">α_i</td></tr>
<tr><td>B_1</td><td>B_2</td><td>B_3</td><td>B_4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Потреби</td><td></td></tr>
<tr><td>40</td><td>40</td><td>30</td><td>50</td></tr>
<tr><td>A_1</td><td>60</td><td>3</td><td>3
10</td><td>2</td><td>2
50</td><td>0</td></tr>
<tr><td>A_2</td><td>50</td><td>3</td><td>4
20</td><td>2
30</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>A_3</td><td>50</td><td>2
40</td><td>4
10</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">β_j</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Таким чином, знайдено оптимальний план $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 50 \\ 0 & 20 & 30 & 0 \\ 40 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Цільова функція набуває оптимального значення $L(X) = 390$

Застосування транспортних задач в економіці

Алгоритм і методи рішення транспортної задачі можуть бути використані при вирішенні деяких економічних задач, що не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. В цьому випадку величини тарифів c_{ij} мають різний сенс залежно від конкретної економічної задачі, до таких задач відносяться:

- оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей. У них c_{ij} є таким економічним показником, як продуктивність. Задача дозволяє визначити, скільки часу і на якій операції повинен використовуватися кожен з верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Оскільки транспортна задача вимагає знаходження мінімуму, то значення c_{ij} беруться з негативним знаком;
- оптимальне призначення або проблема вибору. Є m механізмів, які можуть виконувати n різних робіт з продуктивністю c_{ij}. Задача дозволяє

визначити, який механізм і на яку роботу треба призначити, щоб добитися максимальної продуктивності;

- задача про скорочення виробництва з урахуванням сумарних витрат на виготовлення і транспортування продукції;
- збільшення продуктивності автомобільного траспорта за рахунок мінімізації порожнього пробігу. Зменшення порожнього пробігу скоротить кількість автомобілів для перевезень, збільшивши їх продуктивність;
- вирішення задач за допомогою методу заборони перевезень. Використовується в тому випадку, якщо вантаж від деякого постачальника по якихось причинах не може бути направлений одному із споживачів. Дане обмеження можна врахувати, привласнивши відповідній клітці достатньо велике значення вартості, тим самим в цю клітку не проводитимуться перевезення.

Приклад 10

На підприємстві є три групи верстатів, кожна з яких може виконувати п'ять операцій з обробки деталей (операції можуть виконуватися у будь-якому порядку). Максимальний час роботи кожної групи верстатів, відповідно, дорівнює 100, 250, 180 год. Кожна операція повинна виконуватися, відповідно, 100, 120, 70, 130, 110 год. Визначити, скільки часу на яку операцію потрібно використовувати кожній групі верстатів, щоб обробити максимальну кількість деталей. Продуктивність кожної групи верстатів на кожну операцію задана матрицею C

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Скористаємося алгоритмом рішення закритої транспортної задачі, при цьому під тарифом розуміємо продуктивність верстатів по операціях.

Оскільки в задачі потрібно знайти максимум, а згідно алгоритму транспортної задачі знаходиться мінімум, тарифи помножимо на (-1).

Таблиця 2.13

b_j / a_i		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	α_i
		100	**120**	**70**	**110**	**130**	
1	**100**	-3 **40**	-5	-11	-10 +	-5 **60** -	0
2	**250**	-5 **60**	-10 **120**	-15 **70**	-3	-2	-2
3	**180**	-4	-8	-6	-12 **110** -	-10 **70** +	-5
β_j		-3	-8	-13	-7	-5	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{14} = 3$, $\Delta_{24} = -6$, $\Delta_{25} = -5$, $\Delta_{31} = -4$, $\Delta_{32} = -5$, $\Delta_{33} = -12$.

Оскільки $\Delta_{14} = 3 > 0$, перерозподіливши верстати, отримаємо нову таблицю.

Таблиця 2.14

b_j / a_i		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	α_i
		100	**120**	**70**	**110**	**130**	
1	**100**	-3 **40**	-5	-11	-10 **60**	-5	0
2	**250**	-5 **60**	-10 **120**	-15 **70**	-3	-2	-2
3	**180**	-4	-8	-6	-12 **50**	-10 **130**	-2
β_j		-3	-8	-13	-10	-8	

Для кожної вільної клітки обчислюємо оцінки $\Delta_{ij} = \beta_j + \alpha_i - c_{ij}$: $\Delta_{12} = -3$, $\Delta_{13} = -2$, $\Delta_{15} = -3$, $\Delta_{24} = -9$, $\Delta_{25} = -8$, $\Delta_{31} = -1$, $\Delta_{32} = -2$, $\Delta_{33} = -9$.

Оскільки всі оцінки негативні, то знайдене рішення є оптимальним.

$$X_{\hat{\imath}\ddot{\imath}\grave{o}} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{bmatrix}$$

Першій групі верстатів доцільно виконувати операції 1 і 4 тривалістю 40 і 60 годин відповідно, другій групі – операції 1,2 і 3 тривалістю 60, 120 і 70 годин відповідно, третій групі – операції 4 і 5 тривалістю 50 і 130 годин відповідно, при цьому максимальне число оброблених деталей складе 5170 од.

Теорія двоїстості і аналіз лінійних оптимізаційних задач. Економічна інтерпретація двоїстості

Двоїсті задачі

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яку називають ***двоїстою*** по відношенню до даної (початкової) задачі. Початкова і двоїста задачі тісно зв'язані між собою і утворюють *єдину пару* двоїстих задач, причому задача, двоїста по відношенню до двоїстої задачі, збігається з початковою.

Залежно від структури моделі вихідної задачі розрізняють симетричні, несиметричні та змішані двоїсті задачі.

Симетричні двоїсті задачі.

Симетрична пара двоїстих задач.

Початкова задача	**Двоїста задача**
$y(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \grave{a}_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases}$	$d(\overline{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \grave{a}_{ji} z_i \ge c_j, \ j = \overline{1,n}; \\ z_i \ge 0, i = \overline{1,m}. \end{cases}$

Порівнюючи форми запису прямої і двоїстої задач, можна встановити між ними наступні взаємозв'язки.

- Кожному і-*му* обмеженню вихідної задачі відповідає змінна z_i двоїстої задачі й, навпаки, кожному j-*му* обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна x_j вихідної задачі.
- Вільні члени обмежень однієї із задач є коефіцієнтами при відповідних змінних у цільовій функції іншої задачі. При цьому максимізація міняється на мінімізацію, і навпаки.
- Матриці систем обмежень двоїстої пари задач взаємно транспоновані. Отже, рядок коефіцієнтів a_{ij} в j-*м* обмеженні двоїстої задачі є стовпець коефіцієнтів при x_j в обмеженнях вихідної задачі й навпаки. Знаки нерівностей змінюються на протилежні. Вільними членами обмежень є коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції задачі.
- Всі змінні двоїстої задачі позитивні.

Несиметричні двоїсті задачі

Несиметрична пара двоїстих задач

Початкова задача	**Двоїста задача**
1. $y(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$	1. $d(\overline{z}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z_i \to \min$
2. $\sum_{j=1}^{n} \grave{a}_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m};$	2. $\sum_{i=1}^{m} \grave{a}_{ji} z_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n};$
3. $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$	3. $z_i -$ *довільні по знаку,* $i = \overline{1,m};$

Взаємозв'язки між прямою та двоїстою задачами такі ж самі, як в парі симетричних задач, але треба врахувати наступні особливості:

- Обмеженнями двоїстої задачі будуть нерівності. У задачах обмеження-нерівності варто записувати зі знаком "≤ " при максимізації та зі знаком "≥ " при мінімізації.
- Змінні z_i довільні по знаку, тобто можуть набувати як позитивних, так і негативних значень.

Змішані двоїсті задачі

Математична модель вихідної задачі має умови симетричних та несиметричних задач. Якщо необхідно побудувати двоїсту задачу, треба виконувати правила симетричних і несиметричних задач.

Розберемо декілька прикладів побудови двоїстих задач.

Приклад 11. Побудувати двоїсту задачу до заданої:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} \tilde{o}_1 \;-\; 2\tilde{o}_2 \;+\; \tilde{o}_3 \;\le\; 7 \qquad z_1 \\ 2\tilde{o}_1 \;+\; 3\tilde{o}_2 \;-\; 2\tilde{o}_3 \le 10 \qquad z_2 \\ \tilde{o}_1 \;\ge 0, \tilde{o}_2 \ge \; 0 \; \tilde{o}_3 \ge 0 \end{cases} .$$

Розв'язання

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\overline{z}) = 7z_1 + 10z_2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} \mathrm{z}_1 \;+\; 2\mathrm{z}_2 \;\ge\; 2 \\ -2\mathrm{z}_1 \;+\; 3\mathrm{z}_2 \;\ge -2 \\ z_1 - \; 2\mathrm{z}_2 \ge 1 \\ z_1 \ge, z_2 \ge 0 \end{cases}$$

Дана задача є симетричною.

Приклад 12. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2\tilde{o}_1 \;-\; 2\tilde{o}_2 + \; 3\tilde{o}_3 - \; \tilde{o}_4 \;=\; 9 \quad z_1 \\ \tilde{o}_1 \;+\; \tilde{o}_2 \; - 6\tilde{o}_3 - \; \tilde{o}_4 \;=\; 6 \qquad z_2 \\ \tilde{o}_j \ge 0, \; j = 1, 4 \end{cases}$$

Розв'язання

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 9z_1 + 6z_2 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2z_1 + z_2 \le 3 \\ -2z_1 + z_2 \le 1 \\ 3z_1 - 6z_2 \le 3 \\ -z_1 - z_2 \le 1 \end{cases}$$

$$z_i - \textit{довільні по знаку,} \ \ i = \overline{1,2};$$

Дана задача є несиметричною.

Приклад 13 Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} \tilde{o}_1 - 2\tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 + 3\tilde{o}_4 - 2\tilde{o}_5 = 6 & z_1 \\ 2\tilde{o}_1 + 3\tilde{o}_2 - 2\tilde{o}_3 - \tilde{o}_4 + \tilde{o}_5 \le 4 & z_2 \\ \tilde{o}_1 + 3\tilde{o}_3 - 4\tilde{o}_5 \ge 8 & z_3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_3 \ge 0, \tilde{o}_5 \ge 0 & \end{cases}$$

Розв'язання

Перш ніж приступити до побудови двоїстої задачі, необхідно упорядкувати запис початкової задачі. Оскільки цільова функція мінімізується, то нерівності мають бути записані у вигляді "$\ge$". Для цього другу нерівність помножимо на -1, після чого вона запишеться у вигляді

$$-2\tilde{o}_1 - 3\tilde{o}_2 + 2\tilde{o}_3 + \tilde{o}_4 - \tilde{o}_5 \ge -4$$

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 і записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 6z_1 - 4z_2 + 8z_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 - 2z_2 + z_3 \le 1 \\ -2z_1 - 3z_2 = -2 \\ z_1 + 2z_2 + 3z_3 \le 1 \\ 3z_1 + z_2 = -1 \\ -2z_1 - z_2 - 4z_3 \le 1 \\ z_2 \ge 0, z_3 \ge 0 \end{cases}$$

Друге і четверте обмеження виражені у вигляді рівностей, оскільки відповідні їм змінні x_2 та x_4 не підпорядковані умовам позитивності. Умови позитивності в двоїстій задачі накладені тільки на змінні z_2 та z_3, оскільки їм відповідають в початковій задачі обмеження у вигляді нерівностей.

Дана задача є змішаною.

Приклад 14. Побудувати двоїсту задачу до заданої :

$$y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 + 2\tilde{o}_3 + \tilde{o}_4 = 12 & z_1 \\ 2\tilde{o}_1 + 2\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 + 2\tilde{o}_4 \le 11 & z_2 \\ 4\tilde{o}_1 + x_2 + 3\tilde{o}_3 - \tilde{o}_4 \ge 9 & z_3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_3 \ge 0, \tilde{o}_4 \ge 0 & \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки початкова задача на максимум, то третю нерівність потрібно привести до вигляду « ≤», для чого помножимо її на “-1”, отримаємо: $-4x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \le -9$.

Необхідно ввести змінні z_1 , z_2 , z_3 та записати відповідно до вказаних правил двоїсту задачу:

$$d(\bar{z}) = 12z_1 + 11z_2 - 9z_3 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 3z_1 + 2z_2 - 4z_3 \ge 1; \\ z_1 + 2z_2 - z_3 = 4; \\ 2z_1 - z_2 - 3z_3 \ge 3; \\ z_1 + 2z_2 + z_3 \ge 2; \\ z_2 \ge 0, \quad z_3 \ge 0. \end{cases}$$

Друге обмеження двоїстої задачі записане у вигляді рівності, оскільки відповідна йому змінна x_2 в початковій задачі може бути будь-якою. На змінну z_1 не накладається обмеження позитивності, оскільки відповідно їй перше обмеження в початковій задачі має вид строгої рівності.

Дана задача є змішаною.

Застосування теорії двоїстості в економіці

Приклад 15. *Фірма випускає три види виробів, маючи в своєму розпорядженні сировину чотирьох типів А, Б, В, Г, відповідно, в кількостях 18, 16, 8 і 6 т. Норми витрат кожного типу сировини на 1од. виробу першого виду складають, відповідно, 1, 2, 1, 0, другого виду 2, 1, 1, 1 і третього виду - 1, 1, 0, 1. Прибуток від реалізації 1 од. виробу першого виду 3 грош.од., другого - 4 грош.од., третього - 2 грош.од.*

1. *Скласти план виробництва трьох видів виробів, щоб отримати максимальний прибуток.*
2. *По вихідним даним задачі сформулювати другу економічну задачу (двоїсту до даної).*
3. *Знайти оптимальне рішення двоїстої задачі.*
4. *Визначити дефіцитність сировини.*

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йде на виготовлення одиниці виробу**			**Запас сировини**
	I	II	III	
А	1	2	1	18
Б	2	1	1	16
В	1	1	0	8
Г	0	1	1	6
Прибуток від реалізації 1 од. виробу	3	4	2	

Розв'язання

1. Позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ план виробництва виробів трьох видів. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} \tilde{o}_1 + 2\tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 \le 18; \\ 2\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 \le 16; \\ x_1 + \tilde{o}_2 \le 8 \\ \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 \le 6; \\ \tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3 \ge 0 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми, введемо чотири додаткові змінні x_4, x_5, x_6, x_7.

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} \tilde{o}_1 + 2\tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 + x_4 = 18; \\ 2\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 + x_5 = 16; \\ x_1 + \tilde{o}_2 + x_6 = 8 \\ \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 + x_7 = 6; \\ \tilde{o}_j \geq 0,\ j = \overline{1,7} \end{cases}$$

Розв’язуємо задачу симплекс-методом. Далі заповнюємо симплекс-таблицю:

Базис	$\overline{C}^{\acute{a}\grave{a}\varsigma}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 2$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0	9
x_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0	16
x_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0	8
x_7	0	6	0	1	1	0	0	0	1	6
Δ_j		$\Delta_0 = 0$	-3	-4	-2	0	0	0	0	

Наступні таблиці будуть мати вигляд:

Базис	$\overline{C}^{\acute{a}\grave{a}\varsigma}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 2$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	6	1	0	-1	1	0	0	-2	6
x_5	0	10	2	0	0	0	1	0	-1	5
x_6	0	2	1	0	-1	0	0	1	-1	2
x_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	
Δ_j		$\Delta_0 = 24$	-3	0	2	0	0	0	4	

Базис	$\overline{C}^{\acute{a}\grave{a}\varsigma}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 2$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	4	0	0	2	1	0	-1	-1	
x_5	0	6	0	0	-1	0	1	-2	1	3
x_1	3	2	1	0	-1	0	0	1	-1	
x_2	4	6	0	1	1	1	0	0	1	4
Δ_j		$\Delta_0 = 30$	0	0	-1	0	0	3	4	

Базис	$\overline{C}^{áàç}$	$\bar{b}$	$\tilde{N}_1 = 3$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 2$	$\tilde{N}_4 = 0$	$\tilde{N}_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	0	4	0	0	0	1	0	-1	-1	
x_3	2	3	0	0	1	0	$1/2$	-1	$1/2$	
x_1	3	5	1	0	0	0	$1/2$	0	$-1/2$	
x_2	4	3	0	1	0	0	$-1/2$	1	$1/2$	
Δ_j		$\Delta_0 = 33$	0	0	0	0	$1/2$	2	$3/2$	

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$, то отримане опорне рішення є оптимальним $\overline{x}'* = (5 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, а максимум функції рівний $y(\overline{x}*) = 33$.

Оптимальний план виробництва трьох видів виробів: 5 виробів I виду, 3 – II виду, 3 – III виду, максимальний прибуток складе 33 грош. од.

2. Сформулюємо двоїсту задачу до даної:

$$d(\overline{z}) = 18z_1 + 16z_2 + 8z_3 + 6z_4 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} z_1 + 2z_2 + z_3 \geq 3 \\ 2z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \geq 4 \\ z_1 + z_2 + z_4 \geq 2 \\ z_i \geq 0, \ i = \overline{1,4}; \end{cases}$$

У двоїстій задачі треба знайти оптимальні ціни $z_1, z_2, z_{3,} z_4$ за сировину і мінімізувати загальну вартість всієї сировини $d(\overline{z}) \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$.

3. Якщо вихідна задача розв'язана симплекс методом, то рішення двоїстої задачі може бути знайдено за допомогою формули

$$\overline{z}' = \overline{c}' A^{-1}$$

де $\overline{c}'$ – вектор-рядок коефіцієнтів при базисних змінних цільової функції в оптимальному рішенні початкової задачі ;

A^{-1} – зворотна матриця для матриці A, яка є матрицею коефіцієнтів базисних змінних системи обмежень початкової задачі в оптимальному рішенні.

Базисними змінними в оптимальному рішенні є x_1, x_2, x_3, x_4.

$$\bar{c}' = [3 \quad 4 \quad 2 \quad 0] \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{z}' = \bar{c}' A^{-1} = [3 \quad 4 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Оптимальне рішення $\bar{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, а мінімум функції, згідно з теоремою двоїстості $y(x)_{\max} = d(\bar{z})_{\min}$, дорівнює $d(\bar{z}) = 33$.

4. Найбільш дефіцитною є сировина типу В , для якої подвійна оцінка $z_3 = 2$. Менш дефіцитна сировина типу Б , для якої $z_2 = 1/2$. Зовсім недефіцитною є сировина типу А, $z_1 = 0$.

Цілочислове програмування

У деяких економічних задачах (наприклад, при визначенні оптимального випуску машин, агрегатів, розміщення обладнання) змінні характеризують фізично неподільні одиниці і тому повинні набувати тільки цілих значень. У загальному вигляді математична модель задачі цілочислового програмування матиме вигляд:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \underset{\text{õ}\in\Omega}{\text{opt}} \qquad (4.1)$$

$$\Omega: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \grave{a}_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m}; \\ x_j \ge 0, \ j = \text{int}, \ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Методи розв’язання задач лінійного програмування не гарантують цілочисловості рішення.

Іноді задачі цілочислового програмування розв'язують приблизно. Відкинувши умову цілочисловості, розв'язують задачу методом лінійного програмування, потім в отриманому оптимальному рішенні округляють змінні до цілих чисел. Такий прийом можна використовувати, якщо значення змінних достатньо великі і погрішністю округлення можна нехтувати. Якщо значення змінних невеликі, то округлення може привести до значної розбіжності з оптимальним рішенням. Існує аналітичний метод розв'язання повністю цілочислових задач - метод Гоморі.

Метод Гоморі

Симплекс-методом знаходять оптимальне рішення задачі. Якщо рішення виходить цілочисловим, то задача вирішена, якщо ні, то до задачі приєднують нове додаткове обмеження, яке називають перетином. Отримують нову задачу, для якої безліч допустимих рішень буде менша, ніж для початкової задачі, але міститиме всі допустимі цілочислові рішення.

Додаткове обмеження відсікає частину області, що містить нецілочислове оптимальне рішення.

Отриману задачу розв'язують методом лінійного програмування. Процес побудови перетинів і розв'язання задачі повторюється до отримання цілочислового оптимального рішення.

Алгоритм метода Гоморі.

1. Відкинувши умову цілочисловості, вирішуємо початкову задачу сімплексним методом. Якщо вийде цілочислове оптимальне рішення, то задача розв'язана. Якщо в оптимальному рішенні не всі змінні цілочислові, то будуємо перетини.

2. Хай в оптимальному рішенні змінна x_t - дробове число, тобто $x_t = f_t$. Розглянемо рівняння, в якому x_t - базисна змінна.

$$x_t + \sum_{j \in J} h_{tj} x_j = f_t \tag{4.3}$$

де j – безліч індексів вільних змінних. Розіб'ємо всі коефіцієнти і вільний член на два доданки: цілу і дробову частину. Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число, що не перевищує a. Дробовою частиною числа a називається різниця між числом a і його цілою частиною. Цілу частину числа позначимо [a], а дробову частину – $\{a\}$, тобто $a=[a]+\{a\}$.Тоді рівняння набуде вигляду

$$x_t+\sum_{j\in J}\left(\left|h_{tj}\right|+\left\{h_{tj}\right\}\right)x_j=[\,f_t\,]+\{\,f_t\,\} \tag{4.4}$$

або

$$x_t+\sum_{j\in J}\left|h_{tj}\right|x_j-[\,f_t\,]=\{\,f_t\,\}-\sum_{j\in J}\left\{h_{tj}\right\}x_j$$

Для будь-якого цілочислового вирішення задачі ліва частина рівняння є ціле число, отже, і права частина також буде цілим числом.

Нерівність

$$\{\,f_t\,\}-\sum_{j\in J}\left\{h_{tj}\right\}x_j\le 0 \tag{4.5}$$

є перерізом Гоморі.

3. Приєднуючи отриману нерівність до раніше вирішеної задачі, отримаємо нову задачу лінійного програмування, яку знову розв’язуємо сімплексним методом; якщо її оптимальне рішення виявиться цілочисловим, то воно і буде оптимальним рішенням початкової задачі. Якщо знову вийде нецілочислове рішення, то будуємо новий перетин, і так далі.

Зауваження. Якщо в оптимальному рішенні декілька змінних нецілочислові, то перетин будують по базисній змінній, що має найбільшу дробову частину.

Розглянемо алгоритм розв’язання задачі цілочислового програмування на конкретному прикладі.

Приклад 15

Для поліпшення фінансового положення фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоздатної продукції, для чого в одному з цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що вимагає 19/3 м² площі. На придбання додаткового обладнання фірма виділила 10 тис. грош. од., при цьому вона може купити обладнання двох видів. Придбання одного комплекту обладнання 1-го виду коштує 1 тис. грош.од., 2-го виду – 3 тис. грош.од. Придбання одного комплекту обладнання 1-го виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 2 грош.од., а одного комплекту обладнання 2-го виду – на 4 грош. од. Знаючи, що для установки одного комплекту обладнання 1-го виду вимагається 2 м² площі, а для обладнання 2-го виду – 1 м² площі, визначити такий набір додаткового обладнання, який дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язання

Позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2)$ – кількість комплектів додаткового обладнання 1-го та 2-го виду. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$L\left(\bar{x}\right) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0, x_j = \text{int}, \ j = 1,4 \end{cases}$$

Необхідно привести задачу до канонічної форми. Введемо дві додаткові змінні x_3, x_4.

$$L\left(\bar{x}\right) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \ge 0, x_j = \text{int}, \ j = 1,2 \end{cases}$$

Розв'язання задачі сімплексним методом наведено в наступних таблицях.

Базис	$\overline{C}^{баз}$	$\bar{b}$	$C_1 = 2$	$C_2 = 4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	$19/3$	2	1	1	0	19/3
x_4	0	10	1	3	0	1	10/3
Δ_j		0	-2	-4	0	0	

Базис	$\overline{C}^{\acute{a}\grave{a}ç}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 2$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	3	$5/3$	0	1	$-1/3$	9/5
x_2	4	$10/3$	$1/3$	1	0	$1/3$	10
Δ_j		$40/3$	$-2/3$	0	0	$4/3$	

Базис	$\overline{C}^{\acute{a}\grave{a}ç}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 2$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$	
x_2	4	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$	
Δ_j		$218/15$	0	0	$2/5$	$6/5$	

$\overline{x}_{on}^{T} = \left[9/5 \quad 41/15 \right] \qquad L\left(\overline{x}\right) = 218/5$

Рішення нецілочислове, тому будуємо переріз Гоморі.

Знайдемо дробові частини чисел $9/5, 41/15$ (1та 2 рядки 3-го кроку) *:*

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}; \qquad \left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15};$$

Візьмемо перше рівняння з останньої сімплексної таблиці, оскільки

$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \rangle \frac{11}{15};$

Отримаємо такий вираз $\quad -\frac{3}{5}x_3 - \left(-\frac{1}{5}x_4\right) + \frac{9}{5} \le 0 \qquad$ (4.6)

Врахуємо дробові частини чисел $3/5, -1/5$ *:*

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}; \qquad \left\{-\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5};$$

Вираз (4.6) отримає наступний вигляд $-\frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 + \frac{4}{5} \le 0$ або $-\frac{3}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4 \le -\frac{4}{5}$

Додаткове обмеження цілочисловості для 1-го рядка 3-го кроку*:*

$$3/5\, x_3 + 4/5\, x_4 \ge 4/5 \quad \text{або} \quad 3/5\, x_3 + 4/5\, x_4 - x_5 = 4/5.$$

Подальші розрахунки проводимо в наступних таблицях.

Базис	$\overline{C}^{áàç}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 2$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	$9/5$	1	0	$3/5$	$-1/5$	0	
x_2	4	$41/15$	0	1	$-1/5$	$2/5$	0	
		$4/5$	0	0	$3/5$	$4/5$	-1	

Базис	$\overline{C}^{áàç}$	$\overline{b}$	$\tilde{N}_1 = 2$	$\tilde{N}_2 = 4$	$\tilde{N}_3 = 0$	$\tilde{N}_4 = 0$	$C_5 = 0$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	2	1	1	0	0	-1	1	
x_2	4	3	0	1	0	$2/3$	$-1/3$	
x_3	0	$4/3$	0	0	1	$4/3$	$-5/3$	
		14	0	0	0	$2/3$	$2/3$	

$$\overline{x}^{T}_{öåë} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad L\left(\overline{x}\right) = 14$$

Порівнюючи значення цільової функції цілочислового рішення із значенням при оптимальному рішенні, слід відмітити, що знаходження цілочислового рішення приводить до зменшення її екстремального значення.

Необхідно встановити один комплект обладнання 1-го виду та три комплекти обладнання 2-го виду.

Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

Безумовна оптимізація

Нелінійність в економіці виникає, коли результати діяльності підприємств зростають або спадають непропорційно зміні масштабів використання ресурсів, наприклад, через насичення ринку товарами, коли кожний наступний товар продати складніше, ніж попередню.

Задачі нелінійної оптимізації можна поділити на два великих класи:

- безумовна оптимізація (областю припустимих рішень є увесь евклідів простір) ;
- умовна оптимізація (наявність області Ω).

Задачу пошуку безумовного глобального оптимуму можна сформулювати таким чином: знайти оптимум функції $y(\bar{x})$, заданої в n-мірному евклідовому просторі R^n. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y\left(\bar{õ}\right) \to \underset{\bar{x}\in\mathbf{R}^n}{\text{opt}}\,, \qquad (5.1)$$

Необхідні умови точки локального оптимуму мають вигляд:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\,\bar{x}}\right)^{*} = 0\ . \qquad (5.2)$$

Точки, в яких виконуються необхідні умови звуться стаціонарними. Стаціонарна точка може бути як точкою екстремуму, так і точкою перегину.

Для визначення достатніх умов існування локального оптимуму розглянемо матрицю Гесса. Н – матриця Гесса, що містить другі похідні функції $y(\bar{x})$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix};$$

Достатні умови для точки локального мінімуму полягають у додатній визначеності матриці Гесса Н, що обчислена в точці мінімуму.

Зауваження: якщо в деякій точці при виконанні необхідних умов матриця Гесса від′ємно визначена, то ця точка є локальним максимумом.

Класичні й прямі методи оптимізації

Усі методи оптимізації можна поділити на класичні (непрямі, посередні, точні) та розшукові (прямі, безпосередні, наближені, ітераційні).

Класичні методи дозволяють знайти точку оптимуму посереднім шляхом – через розв′язання системи рівнянь. Завдяки цьому отриманий розв′язок є точним, якщо вирішення системи рівнянь здійснювалось не наближеними методами.

Прямими методами вирішують задачу оптимізації шляхом ітераційного наближення до точки мінімуму. Розв′язок отримають наближеним, але із забезпеченням наперед заданої точності. На відміну від класичних існує відносно багато прямих методів.

Метод Ейлера

Метод Ейлера належить до класичних методів. Він базуєтьс на необхідних та достатніх умовах точки локального мінімуму.

Приклад 17.

Методом Ейлера знайти мінімум функції

$$y(\bar{x}) = -x_1^3 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 18x_2 \to \min_{\bar{x} \in R^2}$$

Розв'язання

Задач розв'язують в три етапи.у

- *Перший* – полягає в розв'язанні системи *n* рівнянь:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

  продиктованих необхідними умовами для точки локального мінімуму та знаходженні усіх стаціонарних точок,

- *другий* – у формуванні матриці других часткових похідних для кожної стаціонарної точки;
- *третій* – в перевірці отриманих матриць на додатну визначеність згідно з критерієм Сильвестра та знаходженням точки мінімуму, як цього вимагають достатні умови.

Для визначення характеру квадратичної форми використаємо критерій Сільвестра, який полягає в обчисленні головних визначників матриці квадратичної форми А :

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- Якщо всі головні визначники додатні, то квадратична форма додатно визначена;

- якщо всі непарні головні визначники від’ємні, а парні - додатні, то квадратична форма від’ємно визначена.
- у решті випадків - не визначена або напіввизначена.

Перший етап. Для нашого прикладу отримаємо систему рівняннь:

$$\begin{cases} -3x_1^2 + 6x_2 + 6 = 0; \\ 6x_1 + 6x_2 - 18 = 0. \end{cases}$$

Розв’язком системи є стаціонарні точки $\bar{x}_A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\bar{x}_B^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$. *Другий етап*.

Визначимо елементи матриць других похідних $H_A^{(0)}$, $H_B^{(0)}$ відповідно в точках $\bar{x}_A^{(0)}$ і $\bar{x}_B^{(0)}$:

в точці $\bar{x}_A^{(0)}$ $\quad h_{11} = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)_A^{(0)} = (-6x_1)_A^{(0)} = -12;$

в точці $\bar{x}_B^{(0)}$ $\quad h_{11} = \left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \right)_B^{(0)} = (-6x_1)_B^{(0)} = 24;$

$$h_{22} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)_A^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \right)_B^{(0)} = 6;$$

$$h_{12} = h_{21} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^{(0)} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} \right)^{(0)} = 6;$$

Складемо матриці $H_A^{(0)} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$; $H_B^{(0)} = \begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$.

Третій етап. Згідно з критерієм Сильвестра матриця $H_A^{(0)}$ не визначена; матриця $H_B^{(0)}$ додатно визначена. Отже , $\bar{x}_B^{(0)}$ - точка локального мінімуму (при від’ємній визначеності матриці других похідних в стаціонарній точці має місце максимум функції).

У точці $\bar{x}^* = \bar{x}_B^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$ задана функція $y^* = -107$, що і потрібно знайти.

Метод покоординатного спуску

Метод покоординатного спуску належить до прямих методів багатовимірної оптимізації.

Приклад 18

Методом покоординатного спуску знайти мінімум функції цілі $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$ *з точністю* $\varepsilon = 0.12$*, взяти за початкову точку наближення точку* $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

Розв'язання

У методі покоординатного спуску, який ще зветься методом Гаусса-Зейделя, на кожному кроці змінюється тільки одна змінна. Тому рекурентне співвідношення між попередньою точкою наближення до мінімуму і наступною має вигляд

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \lambda_r^{(k)} \Delta x_r^{(k)}, \qquad (5.3)$$

$$\text{де } \Delta x_r^{(k)} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}, \text{ а } \lambda_r^{(k)} = \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}. \qquad (5.4)$$

тобто

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}. \qquad (5.5)$$

Зауважимо, що друга похідна обов′язково повинна братися за модулем, інакше при її від′ємному значенні процес мінімізіції піде у зворотному напрямку.

Варіювання змінних здійснюють послідовно: спочатку – першу, потім – другу і т.д. Цикл, що складається з n послідовних кроків, створює одну ітерацію. Пошук мінімуму закінчують, як тільки на черговому кроці абсолютне значення усіх складових вектора перших часткових похідних функції цілі будуть менш, ніж задана точність обчислень

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^{(k)}\right| < \varepsilon, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (5.6)$$

Нульова ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)} = 3.48 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)} = 14.4$

Нове значення змінної $x_1^{(1)}$ визначається відповідно до (5.5):

$$x_1^{(1)} = 2.4 - \frac{3.48}{14.4} = 2.1589.$$

Тепер формується нова проміжна точка $\bar{x}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.3 \end{bmatrix}.$

2-й крок. Нове значення змінної x_2 визначається також відповідно виразу (5.5). Треба пам'ятати, що до відповідних похідних підставляється нова проміжна точка $\bar{x}^{(1.0)}$.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1,0)} = 2.92 > \varepsilon; \ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(1,0)} = 13.8; \ x_2^{(1)} = 2.3 - \frac{2.92}{13.8} = 2.088.$$

У результаті нульової ітерації отримали точку $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.158 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$

Необхідно пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті нульової ітерації: $y^{(1)} = -7.882 < -7.129 = y^{(0)}$.

Перевіремо виконання співвідношення (5.6)

$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)} = 0.131 > \varepsilon;$

Співвідношення (5.6) не виконується. Тому переходимо до першої ітерації.

Перша ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)} = 1.442 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(1)} = 12.948;$ $\mathrm{x}_1^{(2)} = 2.158 - \frac{1.442}{12.948} = 2.047;$

$$\bar{x}^{(2,1)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.088 \end{bmatrix}.$$

2-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2,1)} = 0.7972 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(2,1)} = 12.528;$ $\mathrm{x}_2^{(2)} = 2.088 - \frac{0.7972}{12.528} = 2.0243.$

У результаті першої ітерації отримаємо $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.047 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$

Треба пересвідчитися у наближенні до точки мінімуму в результаті першої ітерації: $y^{(2)} = -7.99004 < -7.882 = y^{(1)}$.

Перевіримо виконання співвідношення (5.6)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon; \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(2)} = |-0.008| < \varepsilon;$$

Співвідношення (5.6) не виконується по змінній x_1, переходимо до другої ітерації .

Друга ітерація:

1-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)} = 0.4248 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(2)} = 12.282;$ $x_1^{(3)} = 2.047 - \frac{0.4243}{12.282} = = 2.0124;$

$$\overline{x}^{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0243 \end{bmatrix}.$$

2-й крок. $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3,2)} = 0.219 > \varepsilon;$ $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)^{(3,2)} = 12.1458;$ $x_2^{(3)} = 2.0243 - \frac{0.219}{12.1458} = 2.0061;$

$$\overline{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{y}^{(3)} = -7.9993 < -7.9904 = y^{(2)}.$$

Перевіремо виконання співвідношення (5.6)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(3)} = 0.113 < \varepsilon; \qquad \left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = |-0.001| < \varepsilon;$$

Співвідношення (3.6) виконується.

$$\overline{x}^* = \begin{bmatrix} 2.0124 \\ 2.0061 \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{y}^* = -7.9993$$

Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівностей має вигляд

$$y(\overline{x}) \to \underset{\overline{x}\in\Omega}{opt}$$

$$\Omega: \; f_i\left(\overline{x}\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}, n$$

Розгляд цієї теми грунтується на концепції залежних й незалежних змінних, що полягає у розбитті усіх змінних задачі на два підвектори: $x = \begin{bmatrix} \overline{s} \\ \overline{t} \end{bmatrix}$,

де $\overline{s}$ – підвектор залежних змінних; $\overline{t}$ – підвектор незалежних змінних.

Необхідні умови локального умовного оптимуму мають вигляд

$$\boxed{\left(\frac{\delta\, y}{\delta\, \bar{t}}\right)^{*} = 0}$$

де $\left(\frac{\delta\, y}{\delta\, \bar{t}}\right) = \left(\frac{\partial\, y}{\partial\, \bar{t}}\right)^{T} - \left(\frac{\partial\, y}{\partial\, \bar{s}}\right)^{T} (\mathbf{W})^{-1}\mathbf{C}$;

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ .. & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_{21}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}.$$

Достатні умови точки локального мінімуму полягають у додатній визначеності в точці локального мінімуму матриці других умовних похідних функції цілі $\mathbf{S} = \left[\frac{\delta^2 y}{\delta t_i \delta t_j}\right]$.

Матриця має розмір *(p×p)* і визначається за формулою

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}_{tt} - \mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} - \left(\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_{ss}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} \quad ,$$

де $\mathbf{W}^{-1}$, $\mathbf{C}$ – вже знайомі обернена матриця Якобі і матриця управління; $\mathbf{P}_{tt}$, $\mathbf{P}_{ts}$, $\mathbf{P}_{ss}$ – підматриці матриці

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix} = \mathbf{H} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{\mathrm{i}} \mathbf{H}_i \,.$$

Тут $\mathbf{H}$ – вже знайома матриця других похідних функції цілі; $\mathbf{H}_i$ – матриця других похідних *i*-го обмеження задачі, визначається як

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}, \; i = \overline{1, m};$$

λ_{i} – *коефіцієнти чутливості*, складові вектора $\bar{\lambda}^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{W}^{-1}$.

Застосування методу Лагранжа в економіці

Цей метод полягає у заміні функції цілі функцією Лагранжа і подальшому визначенні її стаціонарних точок, що співпадають з стаціонарними точками початкової функції цілі.

Спочатку побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = y(\bar{x}) - \bar{\lambda} \cdot \bar{f}(\bar{x}),$$

де $\bar{\lambda}$ - вектор коефіцієнтів чутливості або невизначених множників Лагранжа.

Далі розв'язання задачі полягає у визначенні стаціонарних точок функції Лагранжа, при цьому $\bar{\lambda}$ розглядається як вектор додаткових змінних, а сама функція Лагранжа як функція без обмежень. Стаціонарні точки функції Лагранжа визначаються як рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} \partial L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0; \\ \dfrac{\partial L(\bar{x}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = -\bar{f}(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо застосування методу на прикладі вирішення задачі оптимальної реалізації продукції.

Приклад 19

Борошномельний комбінат реалізує борошно двома способами: уроздріб через магазин і оптом через торгових агентів. При продажі x_1 кг борошна через магазин витрати на реалізацію складають x_1^2 грош.од., а при продажі x_2 кг борошна за допомогою торгових агентів – x_2^2 грош.од. Визначити, скільки кг борошна слід продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо в добу для продажу виділяється 5000 кг борошна.

Розв'язання

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 = 5000 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2 \end{cases}$$

Функція Лагранжа матиме вигляд $\partial L\left(\overline{x},\ \overline{\lambda}\right)=x_1^2+x_2^2-\lambda\left(x_1+x_2-5000\right).$

а сама система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases}2x_1-\lambda=0;\\2x_2-\lambda=0;\\-x_1-x_2+5000=0.\end{cases}$$

Звідки знаходимо стаціонарну точку $\overline{x}^{(0)\,'}=\left[2500 \quad 2500\right]$; $y(\overline{x})=12500000$

Надаючи x_1 значення більше і менше 2500 знаходимо $y(\overline{x})$ і з визначення екстремуму функції отримуємо, що $y(\overline{x})$ при $x_1=x_2=2500$ досягає мінімуму.

Для отримання мінімальніх витрат необхідно реалізувати в добу через магазин і торгових агентів по 2500кг борошна, при цьому витрати на реалізацію складуть 12500 тис. грош.од.

Аналіз та управління ризиком в економіці

На сьогодні немає однозначного розуміння сутності ризику. Це пояснюється, зокрема, багатоаспектністю цього явища, а крім того, ризик - це складне явище, що має безліч незбіжних, а іноді протилежних реальних основ. Це спричиняє можливість існування декількох визначень поняття ризику з різних точок зору.

Розглянемо ряд визначень ризику, що дають вітчизняні й закордонні автори:

- Ризик - потенційна, чисельно вимірна можливість втрати. Поняттям ризику характеризується невизначеність, пов'язана з можливістю виникнення в ході реалізації проекту несприятливих ситуацій і наслідків.
- Ризик – імовірність виникнення втрат, збитків, недонадходжень планованих доходів, прибутку.
- Ризик - це невизначеність наших фінансових результатів у майбутньому.

- Ризик - імовірність втрати цінностей (фінансових, матеріальних товарних ресурсів) у результаті діяльності, якщо обстановка й умови проведення діяльності будуть мінятися в напрямку, відмінному від передбаченого планами й розрахунками.

На основі проведеного аналізу розробок дослідників в області ризику-менеджменту пропонується виділити чотири етапи, наявність яких є достатньою й необхідною умовою ефективного управління ризиками. Слід зазначити, що ці чотири етапи є взаємозалежними, тобто, результати, отримані на одному з етапів, можуть привести до необхідності коректування наступних етапів.

Першим етапом управління ризиками є постановка цілей. На цьому етапі проводиться *збір і обробка даних по аспектах ризику*.

Збір і обробка даних по аспектах ризику – один з найважливіших етапів процесу управління ризиком, оскільки процес управління, в першу чергу, припускає одержання, переробку, передачу й практичне використання різного роду інформації.

Особливо важливу роль грає інформація в процесі якісного й кількісного аналізу ризику.

Другим етапом є аналіз ризику. Він, у свою чергу, складається із двох підетапів: кількісного і якісного аналізу ризику.

Якісний аналіз припускає: виявлення джерел і причин ризику, етапів і робіт, при виконанні яких виникає ризик, тобто: установлення потенційних зон ризику; ідентифікацію (встановлення) всіх можливих ризиків; виявлення практичних вигід і можливих негативних наслідків, які можуть наступити при реалізації ризикового рішення.

Кількісний аналіз припускає чисельне визначення окремих ризиків і ризику проекту (рішення) у цілому. На цьому етапі визначаються чисельні значення ймовірності настання ризикових подій і їхніх наслідків, здійснюється кількісна оцінка ступеня (рівня) ризику, визначається (встановлюється) також припустимий у даній конкретній обстановці рівень ризику.

Безпосередньо з аналізом ризику зв'язаний *третій етап – вибір (коректування) методів управління ризиком*. На даному етапі відбувається оцінка порівняльної ефективності зазначених методів, а також аналізується комплексний вплив методів. Необхідність цього пояснюється тісним взаємозв'язком ризиків між собою, внаслідок чого вплив на один з ризиків може з'явитися фактором збільшення інших ризиків. У той же час, ряд методів може виявитися універсальним за характером впливу на ризики, що дозволить знизити витрати на управління ризиками.

Четвертим етапом управління ризиками є *контроль і переосмислення ризиків*. Ця стадія має на увазі активну роль економічного суб'єкта в подоланні ситуацій ризику, у виборі альтернативних рішень і ухваленні остаточного рішення. На цьому етапі дослідження ризику дозволяє одержати нову інформацію про сутності ризику, про безпомилковість попередніх висновків і про природу ризику. Тим самим, підтверджується принцип єдності теорії й практики - чим активніше застосовуються теоретичні знання про сутності ризику на практиці (в управлінні ризиками), тим більше дослідник дізнається про сутності ризику й тим грамотніше він приймає рішення.

Система показників кількісного оцінювання ступеня ризику

Статистичний метод

Суть *статистичного методу* полягає в тім, що вивчається статистика втрат і прибутків, що мали місце на даному або аналогічному виробництві, встановлюється величина й частота одержання того або іншого економічного результату та складається найбільш імовірний прогноз на майбутнє.

Статистичний метод кількісної оцінки ризику вимагає наявності значного масиву даних, які не завжди є в розпорядженні підприємця. Збір і обробка даних можуть бути досить коштовні. Тому часто при обмеженій недостатній кількості інформації доводиться використовувати інши методи.

Метод експертних оцінок

Найбільш часто даний метод застосовується при недостатній кількості інформації або при визначенні ступеня ризику нового напрямку підприємницької діяльності, що не має аналогів.

У найбільш загальному вигляді сутність даного методу полягає в тому, що підприємство виділяє окрему групу ризиків і розглядає, яким чином вони можуть впливати на його діяльність. Цей розгляд зводиться до дачі бальних оцінок за ймовірністю виникнення того чи іншого виду ризику, а також до ступеня його впливу на діяльність фірми.

Принципи побудови економетричних моделей. Парнолінійна регресія

Прості лінійні регресійні моделі встановлюють лінійну залежність між двома змінними, наприклад, витратами на відпустку та складом родини; витратами на рекламу та обсягом продукції; що випускається, витратами на споживання та валовим національним продуктом (ВНП); зміною ВНП залежно від часу і та ін.

При цьому одна із змінних y вважається залежною змінною та розглядається, як функція від незалежної змінної x.

У загальному вигляді проста вибіркова регресійна модель запишеться так:

$$y = b_0 + b_1 x + e \qquad (8.1)$$

де y — вектор спостережень за залежною змінною $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$;

x — вектор спостережень за незалежною змінною $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

b_0, b_1 — оцінки невідомих параметрів регресійної моделі; e — вектор випадкових величин (помилок). Регресійна модель називається лінійною, якщо вона лінійна за своїми параметрами. Отже, модель є лінійною регресійною моделлю.

Оцінка параметрів лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів

Щоб мати явний вигляд залежності, необхідно знайти (оцінити) невідомі параметри b_0, b_1 цієї моделі.

Реальні спостереження y_i і x_i зобразимо точками у системі координат (X,Y) (рис. 8.1).

Таблиця 8.1

i	y_i	x_i
1	25	5
2	30	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18

Візуально можна припустити, що між даними є лінійна залежність, тобто їх можна апроксимувати прямою лінією.

Взагалі, існує необмежена кількість прямих $y = b_0 + b_1 x$, які можна провести через множину спостережуваних точок. Яку ж з них вибрати? Щоб це визначити, потрібно мати у розпорядженні певний критерій, що дозволяв би вибрати з множини можливих прямих "найкращу" з точки зору даного критерію. Найпоширенішим є критерій мінімізації суми квадратів відхилень. На рис. 8.1, наприклад, пряма (1), як і інші, розташована таким чином, що деякі точки знаходяться вище, а деякі нижче цієї прямої, на основі чого можна встановити відхилення (помилки) відносно цієї прямої:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i,\ i = \overline{1,n}\ .$$

Де $\hat{y}$ — і-та точка на прямій, яка відповідає значенню x_i.

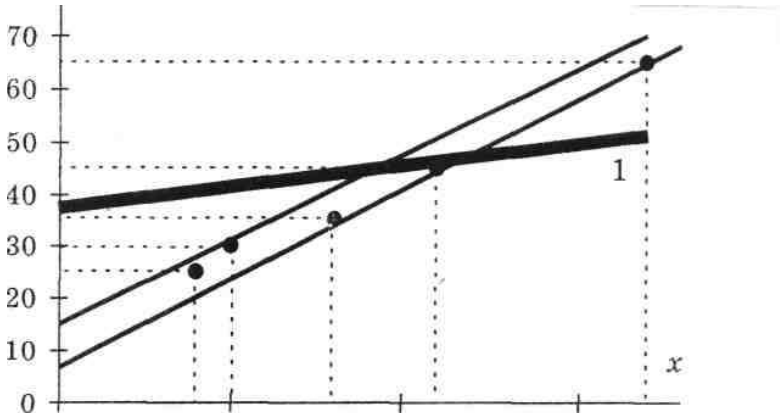

Рис. 8.1

Відхилення, або помилки, ще інколи називають залишками. Логічно, що треба проводити пряму таким чином, щоб сума квадратів помилок була мінімальною. В цьому і полягає *критерій найменших квадратів:* невідомі параметри b_0, b_1 визначаються таким чином, щоб мінімізувати $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$.

Оцінка параметрів, обчислених за методом найменших квадратів має вигляд

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2},$$

$$\text{де } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,; \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$$

Вираз для b_1 можна записати ще таким чином:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(x)}.$$

Тепер можемо записати у явному вигляді регресію y від x, у якій параметри обчислені за методом найменших квадратів. Її інколи називають регресією найменших квадратів y від x. Маємо:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x,$$

або

$$y = \hat{y} + e = b_0 + b_1 x + e.$$

Коефіцієнт кореляції

Найпростішим критерієм, який дає кількісну оцінку зв'язку між двома показниками, є коефіцієнт кореляції. Він розраховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

де $\operatorname{cov}(x, y)$ — коефіцієнт коваріації між x та y; $\operatorname{var}(x)$ — дисперсія змінної x ; $\operatorname{var}(y)$— дисперсія змінної y.

Коефіцієнт кореляції дорівнює відношенню коефіцієнта коваріації до кореня з добутку двох дисперсій. Коефіцієнт кореляції, на відміну від коефіцієнта коваріації, є вже не абсолютною, а відносною мірою зв'язку між двома факторами. Тому значення коефіцієнта кореляції , як можна побачити з виразу, завжди розташовані між -1 та +1 (-1 < r_{xy} < 1). Позитивне значення коефіцієнта кореляції свідчить про прямий зв'язок між показниками, а негативне — про зворотний зв'язок. Коли коефіцієнт кореляції прямує за абсолютною величиною до 1, це свідчить про наявність сильного зв'язку ($r \to \pm 1$ — щільність зв'язку велика); у протилежному випадку, коли коефіцієнт кореляції прямує до нуля ($r \to 0$), зв'язку немає.

Коефіцієнт детермінації

Поряд з коефіцієнтом кореляції використовується ще один критерій, за допомогою якого також вимірюється щільність зв'язку між двома або більше показниками та перевіряється адекватність (відповідність) побудованої регресійної моделі реальній дійсності. Тобто дається відповідь на запитання, чи справді зміна значення y лінійно залежить саме від зміни значення x, а не відбувається під впливом різних випадкових факторів. Таким критерієм є коефіцієнт детермінації.

Коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції:

$$R^2 = r^2$$

Коефіцієнт детермінації завжди позитивний і перебуває у межах від нуля до одиниці ($0 < R^2 < 1$).

Приклад 20. *У табл 8.2 наведено умовні данні спостережень витрат y на відпустку робітника залежно від кількості членів його родини x. Побудувати регресійну модель залежності y і x, знайти оцінки її параметрів.*

Таблиця 8.2

Кількість членів родини	**Витрати на відпустку,** ***ум. од.***
x	y
1	16
2	12
2	23
4	19
6	30
$x = 3$	$y = 20$

Розв'язання

Для того, щоб встановити залежність витрат на відпустку від розмірів родини, припустимо, що ця залежність описується лінійною функцією,

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x,$$

тобто її можна розглядати, як просту лінійну регресію (рис8.2)

$$y = \hat{y} + e = b_0 + b_1 x + e.$$

Встановимо її невідомі параметри за формулами

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(x)} \text{ та } b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Незважаючи на громіздкість цієї формули з першого погляду, вона найчастіше використовується на практиці.

Для підрахунку b_1 нам потрібно визначити $n, \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Відобразимо ці дані за допомогою табл. 8.3

Таблиця 8.3

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}$
1	1	16	16	1	14.74	1.26
2	2	12	24	4	17.37	-5.37
3	2	23	46	4	17.37	5.63
4	4	19	76	16	22.63	-3.63
5	6	30	180	36	27.89	2.11
$\sum$	15	100	342	61	100	0

Згідно з табл.8.3 $$b_1 = \frac{342 - 15 \cdot \frac{100}{5}}{61 - \frac{225}{5}} = \frac{42}{61 - 45} \approx 2{,}63,$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 20 - 2{,}63 \cdot 3 = 12{,}11,$$

$$\hat{y}_i = 12{,}11 + 2{,}63x_i.$$

Це рівняння дає для кожного спостережуваного значення x_i значення $\hat{y}_i$ та $e_i = y_i - \hat{y}$ (дві останні колонки табл. 8.4). Підкреслимо, що сума оцінених значень дорівнює сумі фактичних значень y_i, а сума помилок дорівнює 0.

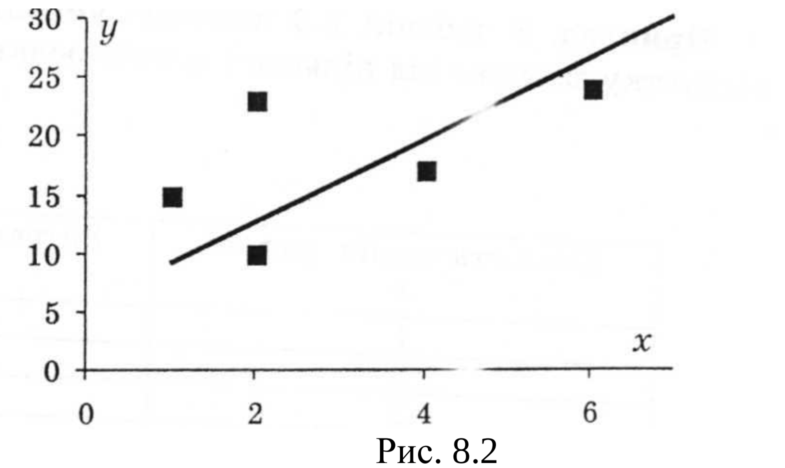

Рис. 8.2

Приклад 21. *Спостережені значення прибутку фабрики y (ум.од) і її затрат x (ум.од) на рекламу задані в табл.8.4. Побудувати регресійну модель залежності y і x, знайти оцінки її параметрів. Обчисліть коефіцієнти кореляції та детермінації.*

Таблиця 8.4

i	1	2	3	4	5	6
x_i	20	14	12	20	33	38
y_i	75	85	92	88	72	99

Розв'язання

Всі обчислення зведемо в табл. 8.5. Необхідні підсумкові значення будемо заносити в колонку $\sum$.

Таблиця 8.5

i	x_i	y_i	$(x_i-\bar{x})$	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	20	75	-2.83	-10.17	103.4	28.81	8.03
2	14	85	-8.83	-0.17	0.0289	1.47	78.03
3	12	92	-10.83	6.83	46.649	-74.03	117.36
4	20	88	-2.83	2.83	8.01	-8.03	8.03
5	33	72	10.17	-13.17	173.45	-133.86	103.36
6	38	99	15.17	13.83	191.269	209.81	230.03
$\sum$	137	511			522.75	224.17	544.84

Згідно з табл. 8.5 $\bar{x}=22{,}83$; $\bar{y}=85{,}16$.

$$b_1=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{24{,}17}{544{,}83}=0{,}04436 .$$

$$b_0=\bar{y}-b_1\bar{x}=85{,}16-0{,}04436\cdot 22{,}83=84{,}15 .$$

$\hat{y}_i=84{,}15+0{,}04436x$.

У рівнянні прямої коефіцієнт b_1 є тангенсом куту нахилу прямої до осі 0х. Якщо $b_1>0$, то між змінною y і змінною x існує позитивний (прямий) зв'язок, якщо $b_1<0$ - негативний (зворотний), при $b_1=0$ змінні x і y незалежні одна від одної.

В нашому прикладі зв'язок між y та x дуже слабкий, бо $b_1=0{,}04436$.

Коефіцієнт b_0 є точкою перетину прямої з віссю 0у.

$$\operatorname{cov}(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{24{,}17}{6}=4{,}02 .$$

$$\operatorname{var}(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{544{,}84}{6}=90{,}8 .$$

$$\operatorname{var}(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\frac{522{,}25}{6}=87{,}13 .$$

Розрахуємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{4{,}02}{\sqrt{90{,}8}\sqrt{87{,}13}} = 0{,}045.$$

Коефіцієнт кореляції також свідчить про слабкий зв'язок між y та x.

Розрахуємо коефіцієнт детермінації:

$$r^2 = \frac{4{,}02 \cdot 4{,}02}{90{,}8 \cdot 87{,}13} = 0{,}002.$$

Лінійні моделі множинної регресії

Узагальнена множинна лінійна регресійна модель має вигляд:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

де y — залежна змінна; $x_1, x_2, ..., x_p$ — незалежні змінні (або фактори); $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ —параметри моделі (константи), які потрібно оцінити; ε— неспостережувана випадкова величина.

Узагальнена регресійна модель — це модель, яка дійсна для всієї генеральної сукупності. На відміну від узагальненої регресійної, вибіркова модель будується для певної виборки.

Вибіркова лінійна множинна модель має такий вигляд:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p + e \,, \tag{9.1}$$

де y — залежна змінна;
$x_1, x_2, ..., x_p$ — незалежні змінні (або фактори);
$b_1, b_2, ..., b_p$ — оцінки невідомих параметрів виборочної моделі;
e — випадкова величина (помилка).

Лінійною регресійною моделлю називають модель, що лінійна за своїми параметрами.

За введеними нами позначеннями, множинна лінійна регресійна модель має p незалежних змінних, або факторів, які впливають на залежну змінну y, та (p + 1) невідомих параметрів, які потрібно оцінити.

Розглянемо двофакторну модель

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + e = \hat{y} + e$$

Параметри моделі b_1, b_2, b_0 треба оцінити за методом найменших квадратів.

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x}_1 - b_2 \overline{x}_2$$

$$b_1 = \frac{\sum \tilde{x}_{i1} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i2}^{\;2} - \sum \tilde{x}_{i2} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2}}{\sum \tilde{x}_{i1}^{\;2} \sum \tilde{x}_{i2}^{\;2} - (\sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2})^2},$$

$$b_2 = \frac{\sum \tilde{x}_{i2} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i1}^{\;2} - \sum \tilde{x}_{i1} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2}}{\sum \tilde{x}_{i1}^{\;2} \sum \tilde{x}_{i2}^{\;2} - (\sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2})^2},$$

де $\tilde{x}_{i1} = x_{i1} - \overline{x}_1; \tilde{x}_{i2} = x_{i2} - \overline{x}_2; \tilde{y} = y_i - \overline{y} -$ відхилення змінних.

Приклад 22. *Досліджується рівень седньомісячної заробітної плати y (ум.од.) в залежності від продуктивності праці* x_1 *(ум.од.) і фондоємності продукції* x_2 *(ум.од.) для 6 споріднених за випуском продукції фірм. Дані спостережень наведені в табл.9.1 Побудувати лінійну регресію для даного процесу, знайти оцінки її параметрів.*

Таблиця 9.1

x_1	2	4	6	7	8
x_2	9	6	12	11	20
y	55	46	35	67	72

Розв'язання

Рівнянням лінійної регресії заданого умовою процесу є

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \, .$$

Оцінками її параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ мають бути параметри регрсії b_0, b_1, b_2, що будуються за вибірковими даними :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + e = \hat{y} + e$$

Параметри моделі b_1, b_2, b_0 треба оцінити за методом найменших квадратів. Знайдемо параметри моделі , за матричною формою запису системи нормальних рівнянь.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

$$Y = XB + e,$$

$X^T Y = (X^T X)B$ – матрична форма системи нормальних рівнянь.

$B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ – матрична форма розв'язку системи нормальних рівнянь.

Тут $(X^T X)^{-1}$ — матриця, обернена до матриці $(X^T X)$. Стовпець B називається вектором оцінок коефіцієнтів (параметрів) регресії.

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 12 & 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 11 \\ 1 & 8 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 27 & 58 \\ 27 & 169 & 351 \\ 58 & 351 & 782 \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 12 & 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 \\ 46 \\ 35 \\ 67 \\ 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 275 \\ 1549 \\ 3368 \end{bmatrix}$$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.62 & -0.14 & -0.06 \\ -0.14 & 0.098 & -0.03 \\ -0.05 & -0.03 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 1.62 & -0.14 & -0.06 \\ -0.14 & 0.098 & -0.03 \\ -0.05 & -0.03 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 275 \\ 1549 \\ 3368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.76 \\ 0.24 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

Таким чином, одержана теоретична лінійна залежність між факторами x_1 і x_2 та $\hat{y}$

$$\hat{y} = 35.76 + 0.24x_1 + 1.55x_2$$

Завдання для контрольних робіт

Завдання для контрольної роботи з теми

“Лінійне програмування: симплекс-метод”

Варіант 1

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 7x_1 - 2x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge -3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + x_2 \ge -3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 \ge -3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою симплекс-методу розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 - 4x_2 \to \min_{\overline{x} \in \Omega}$$

$$\Omega : \begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 3x_2 \le 27 \\ -3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ -x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 3 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 - 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -7x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 + x_2 \ge -1 \\ 5x_1 + x_2 \ge -3 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega:\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -6 \\ 2x_1 - x_2 \ge -4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 - x_2 \ge -6 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою симплекс-методу розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ \tilde{o}_1 \ge 0, \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

Завдання для контрольної роботи з теми

“Лінійне програмування: диференційний алгоритм”

Варіант 1

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \quad + 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \quad - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 2

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_4 + 4 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 3

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \quad + 4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 4

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 4 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 5

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \qquad - x_5 - 4 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 6

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 6 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 \qquad - x_5 + 8 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 7

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 8

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 8 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 8 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 9

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 10

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 10 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 + 2 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 11

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 12

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 12 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 6 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 13

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 13 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 14

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 14 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 15

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 15 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_5 + 10 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 16

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 16 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 10 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 17

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 17 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 18

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 18 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 - 1 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 19

За допомогою диференційного алгоритму розв’язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 19 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 10 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 20

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 20 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 10 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 21

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 21 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 16 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 22

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 22 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 15 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 23

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 23 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 15 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 24

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\overline{x}) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 24 \to \min_{\overline{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 16 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 - 4 = 0 \\ \overline{x} \geq 0 \end{cases}$$

Варіант 25

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 25 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 6 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 26

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 26 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 + 6 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 27

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 - x_2 + 8x_3 + 27 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 - 3 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 28

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 28 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

:

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0 \\ -4x_1 - x_2 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 29

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = -x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9 \to \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 - 2 = 0 \\ \bar{x} \ge 0 \end{cases}$$

Варіант 30

За допомогою диференційного алгоритму розв'язати задачу лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 30 \rightarrow \min_{\bar{x}\in\Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0 \\ \bar{x} \geq 0 \end{cases}$$

Завдання для контрольної роботи з теми

"Транспортна задача. Постановка, методи розв'язання та аналізу"

Постачальники A_1, A_2, A_3......A_m мають запаси продукції в кількостях $a_1, a_2....a_m$. т. відповідно. Споживачі B_1, B_2, B_3......B_n повинні отримати цю продукцію в кількостях $b_1, b_2.......b_n$. т. відповідно. Знайти такий варіант прикріплення постачальників до споживачів, при якому сума витрат на перевезення буде мінімальною. Якщо витрати по перевезенню 1 т. продукції задані в таблиці:

Варіант № 1

a_i \ b_j	80	140	110
60	4	3	5
150	10	1	2
80	3	8	6
40	6	4	9

Варіант № 2

a_i \ b_j	70	120	105	125	110
120	14	8	17	5	3
180	21	10	7	11	6
230	3	5	8	4	9

Варіант № 3

a_i \ b_j	80	60	30	90
70	3	7	5	2
45	5	3	4	7
90	2	1	8	5
55	5	7	2	8

Варіант № 4

b_j / a_i	120	150	130
140	5	8	4
110	3	1	8
50	7	3	6
100	4	9	6

Варіант № 5

b_j / a_i	150	130	120
125	6	3	4
115	4	7	2
130	8	5	9
120	3	7	2

Варіант № 6

b_j / a_i	80	70	90	60	70
120	7	4	15	9	14
150	11	2	7	3	10
100	4	5	12	8	17

Варіант № 7

b_j / a_i	112	105	108
107	7	5	4
103	4	9	5
35	8	6	2
80	3	5	1

Варіант № 8

b_j / a_i	110	135	120
120	7	2	4
125	3	8	9
80	1	3	9
40	6	4	2

Варіант № 9

b_j / a_i	140	145	45
70	7	4	1
145	5	9	8
55	3	8	3
60	3	1	4

Варіант № 10

a_i \ b_j	120	170	110
90	6	4	2
100	3	5	7
80	1	4	6
130	5	6	8

Варіант № 11

a_i \ b_j	16	14	10
17	2	1	3
11	4	2	4
5	1	3	5
7	4	7	1

Варіант № 12

a_i \ b_j	10	16	14
8	3	7	3
10	2	1	5
7	2	5	1
15	4	2	7

Варіант № 13

a_i \ b_j	300	280	330	290	100
370	21	18	14	3	4
450	7	11	10	5	12
480	4	8	16	9	13

Варіант № 14

a_i \ b_j	7	8	15	10
16	2	5	5	4
18	4	7	2	9
6	3	2	1	2

Варіант № 15

a_i \ b_j	19	13	18
17	3	1	2
10	4	2	6
12	2	3	4
11	3	7	1

Варіант № 16

b_j / a_i	11	10	19
6	9	5	3
13	4	1	9
12	3	2	1
9	4	5	6

Варіант № 17

b_j / a_i	10	17	18
10	3	5	2
9	2	6	9
14	5	2	8
12	4	1	3

Варіант № 18

b_j / a_i	115	119	111
117	2	1	6
50	1	7	4
110	4	2	8
68	3	1	2

Варіант № 19

b_j / a_i	120	130	140
115	3	2	6
125	8	7	2
50	4	1	7
100	3	5	1

Варіант № 20

b_j / a_i	120	130	140
115	6	7	5
100	3	7	1
125	2	3	4
50	8	2	1

Варіант № 21

b_j / a_i	130	230	190	160	120
260	2	4	11	5	3
300	8	17	13	7	6
270	14	10	5	8	9

Варіант № 22

b_j / a_i	90	120	110	130	70
175	12	9	7	11	6
165	4	3	12	2	8
180	5	17	9	4	11

Варіант № 23

b_j / a_i	20	25	35	40
25	12	15	14	10
50	16	20	28	17
45	19	21	16	13

Варіант № 24

b_j / a_i	120	50	190	110
160	7	8	1	2
140	4	5	9	8
170	9	2	3	6

Варіант № 25

b_j / a_i	100	90	160	150	80
150	2	10	15	14	4
170	3	7	12	5	8
260	1	18	6	13	16

Варіант № 26

b_j / a_i	100	110	80	210
120	11	4	15	7
130	9	7	14	5
150	8	3	6	10

Варіант № 27

b_j / a_i	100	110	120	130
220	11	2	3	9
150	12	4	10	20
90	18	5	1	6

Варіант № 28

b_j / a_i	45	55	75	85
120	4	5	2	6
60	1	4	8	3
80	5	6	1	9

Варіант № 29

b_j / a_i	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Варіант № 30

b_j / a_i	150	110	100	140
220	2	4	7	11
120	6	1	5	2
160	1	9	5	12

Завдання для контрольної роботи з теми “Теорія двоїстості”

Для виготовлення m видів продукції використовують n видів сировини. Запаси сировини,количество одиниць сировини, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, а також величина прибутка, отримувана від реалізації одиниці продукції приведені в таблиці. Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

1. Скласти план виробництва m видів продукції , щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.
2. За вихідними даними задачі сформулювати другу економічну задачу (двоїсту до даної).
3. Знайти оптимальне рішення двоїстої задачі.
4. Визначити дефіцитність сировини.

Варіант1

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	1	5
Б	2	3	6
В	3	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 2

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	1	1
Б	5	1	3
В	3	1	3
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 3

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	1	6
Б	2	1	4
В	1	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 4

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	2	1	4
Б	1	1	6
Г	3	1	18
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 5

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	2	4
В	1	1	6
Г	2	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 6

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
Б	1	3	6
В	1	1	3
Г	2	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 7

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	2	1	3
В	1	2	5
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	5	

Варіант 8

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	2	4
В	2	3	10
Г	2	1	12
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 9

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	1	8
Б	2	1	4
В	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 10

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
Б	1	2	6
В	1	1	5
Г	1	1	6
рибуток від реалізації одиниці продукції	2	1	

Варіант 11

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	2	1	3
В	1	2	4
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 12

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	4
В	1	1	6
Г	1	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 13

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	3
Б	1	1	6
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 14

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
Б	2	1	6
В	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	2	

Варіант 15

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	8
В	1	1	8
Г	2	3	10
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	2	

Варіант 16

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	6
В	1	2	4
Г	2	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 17

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	3
В	1	2	4
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 18

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	3
В	1	1	6
Г	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	1	

Варіант 19

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	2	3
Б	1	1	6
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 20

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	1	8
Б	1	1	6
Г	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	1	

Варіант 21

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	1	8
Б	3	1	9
Г	1	2	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	5	

Варіант 22

Вид сировини	Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу		Запас сировини
	I	II	
А	1	2	18
В	1	1	8
Г	0	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 23

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	3
В	5	3	27
Г	3	2	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	4	

Варіант 24

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	2	1	4
Б	2	1	6
В	1	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 25

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	2	4
В	2	3	10
Г	2	1	3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Варіант 26

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	3
В	1	2	5
Г	1	1	6
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	5	

Варіант 27

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
А	1	1	1
Б	5	1	3
В	3	1	3
Г	2	1	4
Прибуток від реалізації одиниці продукції	7	2	

Варіант 28

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	6
В	2	1	4
Г	1	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	1	2	

Варіант 29

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	2	1	4
В	1	1	6
Г	1	2	12
Прибуток від реалізації одиниці продукції	3	2	

Варіант 30

Вид сировини	**Кількість одиниць сировини, що йдуть на виготовлення одиниці виробу**		**Запас сировини**
	I	II	
Б	1	1	6
В	1	2	4
Г	2	1	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції	2	3	

Завдання для контрольної роботи з теми "Безумовна оптимізація. Класичні методи"

Варіант 1

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1^2 x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{4}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 2

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 3x_2 + \frac{2x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1^2 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 3

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 x_2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 4

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 + \frac{3}{x_1 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 5

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = \frac{1}{4} x_1^2 x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{2}{x_1} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 6

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y\left(\bar{x}\right) = 2\sqrt{x_1} + 3x_2 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2^3} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 7

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{27}{x_1^2 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 8

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + \frac{2}{x_1 \sqrt{x_2}} + x_2 \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 9

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 3x_1^3 + 3x_2^3 + \frac{9}{x_1 x_2} \to \min_{\bar{x} \in R^2},$$

Варіант 10

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4x_2\sqrt{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{4}{\sqrt{x_1}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 11

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 + \frac{2}{x_1^4 x_2^2} + \frac{2}{x_2^2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 12

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 3\cdot x_2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \frac{2}{x_2} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 13

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 x_2 + \frac{2}{x_2} + \frac{2}{x_1^2 x_2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 14

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1^2 x_2 + \frac{4x_1^2}{x_2} + \frac{8}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 15

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 + \frac{2x_2}{\sqrt{x_1}} + \frac{2}{x_2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 16

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = \sqrt{x_1 x_2} + \frac{9}{x_2} + \frac{36}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 17

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = \frac{2}{9}x_1 x_2^4 + \frac{8}{x_1} + \frac{16}{3x_2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 18

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x^2 x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{2x_2}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 19

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_2 + \frac{2x_1}{\sqrt{x_2}} + \frac{2}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 20

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_2\sqrt{x_1} + \frac{4}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 21

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_2\sqrt{x_1} + \frac{1}{2x_1} + \frac{8}{x_1x_2^4} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 22

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2\sqrt{x_2} + \frac{x_1}{4x_2^2} + \frac{1}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 23

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1x_2 + \frac{4}{x_2\sqrt{x_1}} + \frac{2}{\sqrt{x_1}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 24

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4\frac{x_2}{x_1^2} + x_1 + \frac{2}{\sqrt{x_2}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 25

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2\sqrt{x_1x_2} + \frac{1}{x_1} + \frac{16}{x_1x_2^2} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 26

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4x_1x_2^2 + \frac{1}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 27

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 4x_1^2x_2 + \frac{2}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{x_1} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 28

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = x_1 + \frac{6}{x_1\sqrt{x_2}} + 9x_1x_2 \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 29

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 2x_1x_2 + \frac{25}{x_1\sqrt{x_2}} + \frac{20}{\sqrt{x_2}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Варіант 30

Знайти мінімум функції методом Ейлера;

$$y(\bar{x}) = 5x_1x_2 + \frac{1}{5x_2\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_1}} \to \min_{\bar{x}\in R^2},$$

Завдання для контрольної роботи з теми “Парнолінійна регресія”

Варіант 1

Досліджується лінійний зв'язок між відповідними показниками для 5 банків України. Побудувати лінійну регресійну модель, знайти оцінки її параметрів. Обчисліть коефіцієнти кореляції та детермінації.

Показники	Ощадбанк	Україна	Пріватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Чисті активи(x)	10.27	18.45	11.25	10.04	8.38
Власні засоби(y)	7.85	21.33	7.62	11.35	3.93

Варіант 2

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Чисті активи(x)	4.93	1.51	1.36	1.37	2.02
Власні засоби(y)	3.89	3.29	2.59	0.98	1.67

Варіант 3

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Чисті активи(x)	1.61	1.17	0.81	0.51	0.66
Власні засоби(y)	0.91	1.16	0.99	1.02	0.86

Варіант 4

Показники	Ощадбанк	Україна	Пріватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Власні засоби(x)	7.85	21.33	7.62	11.35	3.93
Статутний фонд(y)	1.06	5.63	4.55	2.95	3.5

Варіант 5

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Власні засоби(x)	3.89	3.29	2.59	0.98	1.67
Статутний фонд(y)	2.04	9.08	1.68	0.69	1.53

Варіант 6

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Власні засоби(x)	1.67	0.91	1.16	0.99	1.02
Статутний фонд(y)	1.53	2.25	2.48	1.78	1.18

Варіант 7

Показники	Ощадбанк	Україна	Приватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Статутний фонд(x)	1.06	5.63	4.55	2.95	3.5
Внески громадян(y)	51.1	12.16	14.155	4.5	1.5

Варіант 8

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Статутний фонд(x)	2.04	9.08	1.68	0.69	1.53
Внески громадян(y)	0.07	0.08	0.6	0.3	1.3

Варіант 9

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Статутний фонд(x)	1.53	2.25	2.48	1.78	1.18
Внески громадян(y)	0.01	0.8	0.3	0.8	0.001

Варіант 10

Показники	Ощадбанк	Україна	Приватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Внески громадян(x)	51.1	12.16	14.155	4.5	1.5
Балансовий прибуток(y)	6.4	9.01	15.73	10.51	7.95

Варіант 11

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Внески громадян(x)	0.07	0.08	0.6	0.3	1.3
Балансовий прибуток(y)	4.76	1.08	7.06	3.83	0.63

Варіант 12

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Внески громадян(x)	0.01	0.8	0.3	0.8	0.001
Балансовий прибуток(y)	1.47	0.55	1.83	1.8	1.31

Варіант 13

Показники	Ощадбанк	Україна	Пріватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Балансовий прибуток(x)	6.4	9.01	15.73	10.51	7.95
Чисті активи(y)	10.27	18.45	11.25	10.04	8.38

Варіант 14

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Балансовий прибуток(x)	4.76	1.08	7.06	3.83	0.63
Чисті активи(y)	4.93	1.51	1.36	1.37	2.02

Варіант 15

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Балансовий прибуток(x)	1.47	0.55	1.83	1.8	1.31
Чисті активи(y)	1.61	1.17	0.81	0.51	0.66

Варіант 16

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Чисті активи(x)	0.7	1.45	1.22	0.64	0.68
Власні засоби(y)	1.15	0.88	1.02	0.7	0.84

Варіант 17

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Чисті активи(x)	0.93	2.51	0.53	0.37	0.62
Власні засоби(y)	0.81	0.29	0.59	0.93	0.67

Варіант 18

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Чисті активи(x)	0.31	0.56	0.74	0.67	0.38
Власні засоби(y)	0.44	0.94	0.59	0.77	0.64

Варіант 19

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Власні засоби(x)	1.15	0.88	1.02	0.7	0.84
Статутний фонд(y)	2.25	1.68	1.12	1.71	2.02

Варіант 20

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Власні засоби(x)	0.81	0.29	0.59	0.93	0.67
Статутний фонд(y)	1.11	1.29	1.59	2.09	1.16

Варіант 21

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Власні засоби(x)	0.44	0.94	0.59	0.77	0.64
Статутний фонд(y)	1.24	0.64	0.79	0.71	1.22

Варіант 22

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Статутний фонд(x)	2.25	1.68	1.12	1.71	2.02
Внески громадян(y)	0.35	0.58	0.32	0.71	0.57

Варіант 23

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Статутний фонд(x)	1.11	1.29	1.59	2.09	1.16
Внески громадян(y)	0.36	0.09	0.03	0.09	0.51

Варіант 24

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Статутний фонд(x)	1.24	0.64	0.79	0.71	1.22
Внески громадян(y)	0.04	0.04	0.19	0.49	0.22

Варіант 25

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Внески громадян(x)	0.35	0.58	0.32	0.71	0.57
Балансовий прибуток(y)	0.64	0.54	1.47	0.84	0.89

Варіант 26

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Внески громадян(x)	0.04	0.04	0.19	0.49	0.22
Балансовий прибуток(y)	0.34	0.24	0.11	0.47	0.62

Варіант 27

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Внески громадян(x)	0.03	0.24	0.49	0.11	0.21
Балансовий прибуток(y)	1.64	1.04	0.93	0.48	0.75

Варіант 28

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Балансовий прибуток(x)	0.64	0.54	1.47	0.84	0.89
Чисті активи(y)	0.7	1.45	1.22	0.64	0.68

Варіант 29

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Балансовий прибуток(x)	0.44	0.94	1.37	0.94	0.99
Чисті активи(y)	0.93	2.51	0.53	0.37	0.62

Варіант 30

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Балансовий прибуток(x)	1.64	1.04	0.93	0.48	0.75
Чисті активи(y)	0.31	0.56	0.74	0.67	0.38

Завдання для контрольної роботи з теми

"Лінійні моделі множинної регресії"

Варіант 1

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	2	4	6	7	8
x_2	20	15	12	19	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 2

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	3	5	7	9	11
x_2	21	16	13	20	34
y	74	85	94	87	71

Варіант 3

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	5	7	9	11	13
x_2	20	17	12	11	30
y	76	86	92	88	78

Варіант 4

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	1	3	5	7	9
x_2	22	17	14	22	35
y	73	82	91	88	72

Варіант 5

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 .

x_1	2	3	4	5	6
x_2	30	25	22	29	43
y	85	96	95	98	82

Варіант 6

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	4	5	6	7
x_2	32	27	24	31	45
y	83	94	90	68	80

Варіант 7

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	4	5	6	8	2
x_2	28	25	22	29	43
y	81	94	89	94	82

Варіант 8

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	9	6	4	5	3
x_2	31	27	18	27	35
y	80	90	92	98	82

Варіант 9

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	8	7	3	4	3
x_2	21	17	12	29	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 10

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	7	6	5	3	8
x_2	12	15	19	18	20
y	45	26	45	38	42

Варіант 11

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	1	3	4	6	2
x_2	8	15	19	18	10
y	35	26	55	38	42

Варіант 12

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 ,b_2.

x_1	2	4	6	3	8
x_2	11	16	17	14	20
y	37	46	36	38	42

Варіант 13

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 .

x_1	1	2	3	4	7
x_2	17	18	12	19	24
y	45	24	45	36	42

Варіант 14

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 ,b_2.

x_1	5	4	6	2	3
x_2	19	24	14	19	22
y	43	22	45	34	42

Варіант 15

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	2	1	3	5	7
x_2	18	14	15	17	16
y	41	28	45	32	42

Варіант 16

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2 .

x_1	2	3	66	5	1
x_2	12	16	20	12	10
y	39	30	45	3	42

Варіант 17

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2 .

x_1	6	1	2	4	5
x_2	29	11	13	18	33
y	65	76	85	78	62

Варіант 18

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	7	3	7	9	4
x_2	20	15	12	19	33
y	55	66	75	68	52

Варіант 19

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	5	7	9	8
x_2	20	35	43	19	33
y	45	56	65	58	72

Варіант 20

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	2	4	6	8	9
x_2	29	15	18	19	33
y	70	80	90	80	70

Варіант 21

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	5	9	12	14
x_2	20	45	42	39	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 22

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1					
x_2	20	15	12	19	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 23

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	5	8	12	13	14
x_2	28	45	29	19	30
y	75	86	95	88	72

Варіант 24

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	11	9	5	8	12
x_2	29	17	32	19	23
y	70	86	90	85	74

Варіант 25

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	11	12	13	17	18
x_2	32	35	22	29	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 26

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	14	11	11	9	12
x_2	21	35	42	39	33
y	75	80	91	82	72

Варіант 27

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	5	7	18	11
x_2	23	18	13	29	33
y	65	86	95	88	72

Варіант 28

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	12	2	5	7	11
x_2	22	15	12	19	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 29

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	11	12	13	7	8
x_2	40	27	35	21	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 30

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	11	12	12	7	8
x_2	26	19	21	19	33
y	75	86	95	88	72

Список джерел

1. Самойленко М.І. Математичне програмування. – Харків: Основа, 2002. – 424с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учеб. пособие для студентов вузов. – Киев: Вища школа.,1989, – 392с.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.В. Математическое программирование. –М.: Высш.шк., 1980.
4. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2001.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2006. – 496с.:ил.
6. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике.. – М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Долгопятов Т.Г., Суворов Б.Г. Математическое моделирование экономических процессов МГУ, 1990, – 262с.
8. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач. К. :Вища школа. - 1990. – 239с.
9. Плис А.И., Сливина Н.А. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999.
10. Монахов А.В. Математические методы анализа экономики. СПб.: Питер, 2002. – 176с.
11. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. СПб.: Питер, 2002.
12. Жиронкина Г. В., Тіманюк В.О. Економетрія: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів.- Х.:Вид-во НФаУ: Золоті сторінки, 2004. – 224с.
13. Елисеева И. И. Эконометрика: Учебник.- М.:Финансы и статистика, 2003.

14. Лук’ яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний посібник. – К.: Літера, ЛТД, 2002. – 352с.
15. Лук’яненко І.Г. Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Товариство «Знання», КОО, 1998. – 494 с.
16. Черкасов В.В. Деловой риск предпринимательской деятельности: Практ. пособие.–Киев,1996.
17. Егоршин А.А., Малярец Л.М. Практикум по эконометрии в Excel: Учебное пособие для экономических вузов. – Х.: «ИНЖЕК», 2005. – 100с. Русск. Яз.
18. Самойленко М.І., Білогурова Г.В., Штельма О.М., Гавриленко І.О. Методичні вказівки до самостійного вирішення задач та виконання розрахункових завдань з курсу “Математичного програмування“. ХДАМГ, - 2006.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки

до самостійної роботи, проведення практичних занять

і виконання контрольної роботи

з дисципліни

«ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»

(для студентів 3 курсу заочної форми навчання
напряму підготовки 6.030504 «Економіка підприємства»)

Укладачі **САМОЙЛЕНКО** Микола Іванович,
ШТЕЛЬМА Ольга Миколаївна,
МАКОГОН Наталія Вікторівна,
ДЯДЮН Сергій Васильович

Редактор *З. І. Зайцева*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2010, поз. 393М

Підп. до друку 13.10.2010 р.	Формат 60×84/16
Друк на ризографі.	Ум.-друк. арк. 5,0
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05. 2011 р.