ANALISI MATEMATICA B

PROF. MASSIMO CICOGNANI

DIAMO UNO SCHEMA DI SOLUZIONE DA COMPLETARE DA PARTE DEL LETTORE CON SEMPLICI CALCOLI

Esercizio 1. Sia $f(x,y)$ funzione delle due variabili reali x, y

a) Dare le definizione di derivata di $f(x,y)$ nel punto (x_0, y_0) secondo la direzione $v = (v_1, v_2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

quando questo limite esiste finito.

b) Applicare tale definizione al caso $f(x,y) = x + y^2$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ per una generica direzione $v = (v_1, v_2)$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 + tv_1 + (1 + tv_2)^2 - 2}{t} = v_1 + 2v_2$$

con semplici calcoli.

c) Il risultato ottenuto è $v_1 + 2v_2$. Come lo si poteva ottenere senza applicare la definizione?

La funzione è differenziabile quindi la derivata direzionale vale il prodotto scalare tra il gradiente e la direzione. Il gradiente di f in $(1,1)$ è $\nabla f = (1,2)$ quindi tale prodotto scalare vale $v_1 + 2v_2$.

d) Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di massimo e minimo vincolati di $h(v_1, v_2) = v_1 + 2v_2$ sulla circonferenza unitaria $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

Il sistema di Lagrange da risolvere è

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda v_1 = 0 \\ 2 + 2\lambda v_2 = 0 \\ v_1^2 + v_2^2 = 1 \end{cases}$$

Date: 30 giugno 2010.

le cui soluzioni sono $(v_1, v_2) = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

e) Anche il risultato del punto d) si poteva prevedere. Spiegare perchè.

Un prodotto scalare è minimo o massimo quando i vettori sono allineati. I versori allineati con il gradiente $(1, 2)$ sono per l'appunto $(v_1, v_2) = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Esercizio 2. Determinare il baricentro $G = (x_G, y_G)$ dell'insieme $A = \{(x, y) : 2x \leq y \leq 3 - x^2, x \geq 0\}$ usando nei calcoli delle due coordinate una volta l'ordine d'integrazione $dxdy$ e l'altra volta l'ordine $dydx$.

L'insieme A viene rappresentato dalla parte di piano cartesiano nel primo quadrante delimitata dalla retta $y = 2x$ e dalla parabola $y = 3 - x^2$. Il punto di intersezione tra le due curve è $(1, 2)$. L'area di A si calcola tramite un integrale semplice:

$$\mu_2(A) = \int_0^1 (3 - x^2 - 2x)dx.$$

Il baricentro ha coordinate

$$x_G = \frac{1}{\mu_2(A)} \int\int_A x dxdy,\ y_G = \frac{1}{\mu_2(A)} \int\int_A y dxdy.$$

L'insieme A è normale rispetto all'asse x con coordinate $0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 3 - x^2$ quindi, ad esempio,

$$\int\int_A y dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2x}^{3-x^2} y dy \right) dx.$$

Rispetto all'asse y, A è unione di due insiemi normali

$$A_1 : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq y/2;\ A_2 : 2 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq \sqrt{3 - y}$$

quindi, ad esempio,

$$\int\int_A x dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{y/2} x dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_0^{\sqrt{3-y}} x dx \right) dy.$$

Esercizio 3. Provare che il campo vettoriale $F = (-yz/x^2, (z/x) + 2y, (y/x) + 1)$ è conservativo nel semispazio $x > 0$. Determinare poi il suo lavoro sul segmento orientato $x = 1 + t, y = 2t, z = -t, 0 \leq t \leq 1$, sia applicando la definizione che per mezzo di un potenziale.

Si verifica facilmente che il campo è chiuso. Dal momento che il semispazio $x > 0$ è stellato, il campo è ivi esatto. I potenziali U si trovano integrando le componenti. Ad esempio

$$U = \int ((y/x) + 1)dz = (yz/x) + z + h(x, y).$$

Imponendo $U_x = f_1$ si ottiene $h_x = 0$ da cui

$$U = (yz/x) + z + h(y).$$

Infine da $U_y = f_2$ si ha $h'(y) = 2y$ da cui

$$U = (yz/x) + z + y^2 + c.$$

Il segmento ha estremi $P_i = (1, 0, 0)$ e $P_f = (2, 2, -1)$ quindi il lavoro vale

$$U(2, 2, -1) - U(1, 0, 0) = 2.$$

Lo stesso risultato si ottiene seguendo la definizione:

$$\int_0^1 (f_1x' + f_2y' + f_3z')dt = \int_0^1 [f_1(1+t, 2t, -t) + 2f_2(1+t, 2t, -t) - f_3(1+t, 2t, -t)]dt.$$

Esercizio 4. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $x(t) = 1/(t+i)^2$ e verificare il risultato con l'antitrasformata.

La funzione è sommabile quindi

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{(t+i)^2}dt$$

è una funzione continua. Passando alla funzione di variabile complessa $z = t + iy$

$$f(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{(z+i)^2}$$

e considerando che

$$|e^{-i\omega z}| = e^{\omega y},$$

si deve considerare il semipiano $y > 0$ per $\omega \leq 0$ ed il semipiano $y < 0$ per $\omega \geq 0$. La funzione $f(z)$ ha come unica singolarità un polo doppio per $z = -i$, in particolare

$$\hat{x}(\omega) = 0, \ \omega \leq 0.$$

Il residuo in $z = -i$ vale

$$\lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} e^{-i\omega z} = \lim_{z \to -i} -i\omega e^{-i\omega z} = -i\omega e^{-\omega}$$

da cui

$$\hat{x}(\omega) = 2\pi\omega e^{-\omega}, \ \omega \geq 0.$$

Con una unica espressione

$$\hat{x}(\omega) = 2\pi\omega u(\omega)e^{-\omega}$$

con $u(\omega)$ il gradino unitario. La trasformata ottenuta è a sua volta sommabile quindi la formula di antitrasformazione consiste di un integrale assolutamente convergente:

$$\int_0^{+\infty} e^{\omega(-1+it)} d\omega = \int_0^{+\infty} \omega e^{i\omega(t+i)} d\omega.$$

Integrando per parti si ottiene $1/(t+i)^2$ che coincide ovunque con $x(t)$.

Esercizio 5. Determinare la derivata x' nel senso delle distribuzioni della funzione $x(t) = |t| \cdot 1_{(-1,1)}$ per mezzo della definizione. Determinare poi $\hat{x'}(\omega)$ e dedurne $\hat{x}(\omega)$ per $\omega \neq 0$. Calcolare infine il valore notevole $\hat{x}(0)$ e verificare la relazione attesa coi valori $\hat{x}(\omega)$ per $\omega \neq 0$.

Abbiamo

$$\langle x', \varphi \rangle = -\langle x, \varphi' \rangle = \int_{-1}^{0} t\varphi'(t)dt - \int_0^1 t\varphi'(t)dt$$

da cui, integrando per parti,

$$\langle x', \varphi \rangle = \varphi(-1) - \int_{-1}^{0} \varphi(t)dt - \varphi(1) + \int_0^1 \varphi(t)dt.$$

Si conclude

$$x' = \delta(t+1) - \delta(t-1) - 1_{(-1,0)} + 1_{(0,1)}.$$

Trasformando, si ha

$$\hat{x'} = e^{i\omega} - e^{-i\omega} - \int_{-1}^{0} e^{-i\omega t}dt + \int_0^1 e^{-i\omega t}dt = 2i\sin\omega - \frac{2(\cos\omega - 1)}{i\omega}.$$

Per $\omega \neq 0$ abbiamo

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{x'}(\omega)}{i\omega} = 2\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{2(\cos\omega - 1)}{\omega^2}.$$

Il valore notevole

$$\hat{x}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

si deduce immdiatamente dalla definizione di $x(t)$ (area di triangoli)

$$\hat{x}(0) = 1.$$

La relazione attesa, visto che $\hat{x}$ è continua come trasformata di funzione sommabile, è

$$\lim_{\omega \to 0} \hat{x}(\omega) = \hat{x}(0)$$

cioè

$$\lim_{\omega \to 0} 2\frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{2(\cos\omega - 1)}{\omega^2} = 1$$

che effettivamente vale per i limiti notevoli

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin\omega}{\omega} = 1, \ \lim_{\omega \to 0} \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2} = 1.$$