

Analisi Matematica T1 - prof.G.Cupini
CdL Ingegneria Edile – Università di Bologna - Polo Ravenna

PROGRAMMA PROVA SCRITTA (9 CFU=90 ore)

Insiemi limitati superiormente o inferiormente, insiemi limitati.
Maggioranti e minoranti. Massimi e minimi. Estremo superiore e inferiore.
Domini di funzione.
Trasformazioni elementari di grafici.
Calcolo dei limiti mediante l'uso dei limiti notevoli.
Continuità.
Rette tangenti al grafico.
Studio della continuità e classificazione dei punti di discontinuità.
Deduzione di informazioni sulla funzione di cui sia noto il grafico.

FINE PROGRAMMA PRIMA PROVA PARZIALE

Derivabilità.
Studio della derivabilità e classificazione dei punti di non derivabilità.
Calcolo dei limiti mediante gli sviluppi di Taylor
Asintoti.
Studio della monotonia e della convessità.
Determinazione dei punti di massimo/minimo assoluti e relativi e dei loro valori.
Disegno di un grafico qualitativo, dedotto dalle proprietà della funzione.
Integrazione definita e indefinita.
Matrici e operazioni tra matrici.
Rango e determinante.
Inversa di una matrice.
Sistemi lineari di m equazioni ed n incognite.
Teorema di Cramer. Formula di Cramer.
Teorema di Rouché-Capelli.
Vettori linearmente indipendenti.
Basi di uno spazio vettoriale.
Prodotto scalare e vettoriale.

PROGRAMMA ORALE (9 CFU=90 ore)

INSIEMI NUMERICI

Insiemi e operazioni tra insiemi. Numeri naturali, interi, razionali. Proprietà dei numeri razionali e reali. Assioma di completezza. \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di completezza. La radice quadrata di 2 non è razionale (con dimostrazione).
Maggioranti e minoranti. Insiemi limitati superiormente o inferiormente, insiemi limitati. Massimi e minimi. Estremo superiore e inferiore: definizione e proprietà.

FUNZIONI

Definizione di funzione. Dominio, codominio, immagine. Funzioni suriettive. Grafico di una funzione. Funzioni limitate, pari e dispari, crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone. Operazioni tra funzioni: somma, sottrazione, prodotto, rapporto, composizione. Funzioni costanti, funzione identità. Funzioni iniettive. Funzione invertibile. Funzione inversa e sue proprietà. Trasformazioni elementari di

grafici Funzioni potenze. Valore assoluto. Funzioni esponenziali e logaritmiche. Funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, cotangente) e loro inverse. Funzioni iperboliche.

Punto di accumulazione. Definizione di limite e suo significato. Limite destro e sinistro. Legame tra limite, limite destro e limite sinistro. Teorema di unicità del limite (con dimostrazione).

Legame tra limite di $f(x)$ e limite di $|f(x)|$ (con dimostrazione nel caso di limite uguale a 0). Esempi di non esistenza dei limiti.

Aritmetica di infinito. Forme indeterminate. Algebra dei limiti: limite della somma, differenza, prodotto e rapporto di funzioni.

Teorema dei due carabinieri (con dimostrazione). Teorema del confronto. Applicazione del teorema del confronto: somma di funzione divergente e funzione limitata è una funzione divergente.

Funzione limitata per funzione infinitesima è funzione infinitesima (con dimostrazione), $|\sin x| \leq |x|$ (con dimostrazione), limite di $\sin x$ per x che tende a 0 (con dimostrazione), limite di $\cos x$ per x che tende a 0 (con dimostrazione), limite notevole $\sin x/x$ per x che tende a 0 vale 1 (con dimostrazione). Definizione di continuità. Continuità della funzione seno (con dimostrazione).

Le funzioni elementari sono continue. Somma, differenza, prodotto, rapporto, composizione di funzioni continue sono funzioni continue. Caratterizzazione della continuità di f in punti di accumulazione bilateri. Gerarchia degli infiniti e degli infinitesimi. Principio di sostituzione degli infiniti e degli infinitesimi. Calcolo dei limiti: rapporto di polinomi, metodo di razionalizzazione. Limiti notevoli.

Classificazione dei punti di discontinuità. Teoremi di permanenza del segno: 1) se il limite è positivo allora in un intorno del punto la funzione è positiva (con dimostrazione) e applicazione al caso di funzioni continue (con dimostrazione), 2) se la funzione è non negativa in un intorno allora il limite è non negativo. Definizione di punti di massimo e di minimo assoluti e relativi. Valori di massimo e di minimo assoluti e loro caratterizzazione. Teorema di Weierstrass. Teorema dell'esistenza degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Teorema di Bolzano. Applicazione dei teoremi di Weierstrass+teorema di Bolzano.

DERIVAZIONE

Definizione di rapporto incrementale e derivata e loro significato geometrico. Equazione della retta tangente al grafico. Continuità non implica derivabilità: esempi. Calcolo delle derivate delle funzioni: costante, potenza, esponenziale, seno (tutte con dimostrazione). Derivabilità di una somma/differenza, prodotto, quoziente, composizione di funzioni derivabili. Derivabilità della funzione inversa e applicazione (calcolo della derivata di \arcsin) Derivate di funzioni elementari. Legame tra continuità e derivabilità, in particolare che la derivabilità implica la continuità (con dimostrazione). Derivate destre e sinistre e loro legame con la derivata (con dimostrazione). Teorema di Fermat (con dimostrazione) e suo significato geometrico. Teorema di Rolle (con dimostrazione) e suo significato geometrico. Teorema di Lagrange (con dimostrazione) e suo significato geometrico. Esempi che mostrano l'ottimalità delle ipotesi dei teoremi di: Fermat, Rolle, Lagrange.

Criterio di monotonia (con dimostrazione) e il caso delle funzioni strettamente monotone. Legame esistente tra funzione costante e funzione con derivata nulla se definite in un intervallo (con dimostrazione). Impostazione di uno studio del grafico di funzione. Derivate di ordine superiore.

Sviluppo di Taylor (e McLaurin) con resto di Peano e di Lagrange. Le proprietà di o piccolo. Calcolo di limiti con lo sviluppo di Taylor. Definizione di funzione convessa/concava e significato geometrico. Caratterizzazioni della convessità nel caso di funzioni derivabili e di funzioni derivabili due volte (di cui l'implicazione: $f'' \geq 0$ implica f convessa con dimostrazione).

Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui: definizioni ed esempi. Legame tra limite di f' esiste, coincide col limite del rapporto incrementale. Metodi per determinare la derivabilità in un punto. Studio della derivabilità in un punto. Classificazione dei punti di continuità che non sono di derivabilità (angoloso, a tangenza verticale, di cuspide).

Classificazione dei punti di non derivabilità e grafico di funzione.

INTEGRAZIONE

Definizione di primitiva. Due primitive si differenziano per una costante (con dimostrazione). Data una primitiva, ve ne sono infinite (con dimostrazione). Definizione di integrale indefinito. Proprietà degli integrali indefiniti. Primitiva di una potenza.

Formulario per gli integrali indefiniti immediati. Integrazione per sostituzione (con dimostrazione).

Esercizi di integrazione per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali: polinomio di grado 0 o 1 diviso un polinomio di grado 2. Metodo dei fratti semplici.

Integrazione per parti (con dimostrazione) e applicazione.

Definizione di integrale definito, sue proprietà e applicazione al calcolo delle aree. Formula fondamentale del calcolo integrale (chiamato, sul libro di testo, teorema fondamentale sul calcolo integrale).

Integrali definiti per funzioni pari o dispari quando il dominio d'integrazione è simmetrico rispetto allo 0. Integrazione per parti e per sostituzione per integrali definiti. Esercizi sul calcolo di integrali definiti.

ALGEBRA LINEARE

Vettori. Somma di vettori: definizione, interpretazione grafica, proprietà. Moltiplicazione per scalari: definizione, interpretazione grafica, proprietà. Definizione di spazio vettoriale e di sottospazio. Prodotto scalare: definizione e proprietà. Norma di un vettore. Legame tra prodotto scalare di due vettori e le loro norme (con dimostrazione).

Matrice. Somma di matrici. Moltiplicazione di una matrice per un numero reale. Lo spazio delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale. Prodotto righe per colonne. Il prodotto righe per colonne non è commutativo. Matrici quadrate. Matrice identità. Matrici invertibili e matrice inversa. Determinante di una matrice quadrata. Proprietà dei determinanti. Regola di Sarrus (per il calcolo di determinanti di matrici 3×3). Teorema di Laplace (per il calcolo del determinante di una matrice secondo una riga/colonna). Caratterizzazione delle matrici invertibili. Sottomatrici. Rango.

Sistemi lineari di m equazioni ed n incognite e loro rappresentazione in forma matriciale. Sistemi lineari omogenei. Teorema di Cramer. Formula di Cramer. Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi determinati, indeterminati, indefiniti.

Autovalori: definizione e loro caratterizzazione (con dimostrazione). Autovettori.

Combinazione lineare di vettori. Vettori linearmente indipendenti ed esempi in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Spazio vettoriale generato da vettori. Definizione di base di uno spazio vettoriale. Base canonica di \mathbb{R}^n . Prodotto vettoriale di due vettori di \mathbb{R}^3 : definizione e proprietà. Esempi.