Esercizio 1

A) Un'azienda di trasporto deve caricare i propri camion in modo da servire giornalmente un dato insieme di clienti. Nei camion devono essere caricati n pallet $\{1, \dots, n\}$, il j-esimo dei quali ha un peso p_j ed un volume v_j. Per ciascun camion la capacità in peso è pari a P e quella in volume pari a V, inoltre vi è un costo fisso per l'utilizzazione del camion pari a c. L'azienda dispone di un numero m di camion sufficiente a caricare tutti i pallet e desidera minimizzare il costo complessivo dei camion utilizzati per caricare tutti i pallet.

1. Si determini un modello di programmazione lineare intera per il problema;

2. Si definisca un algoritmo euristico di tipo greedy per determinare una "buona" soluzione ammissibile del problema.

B) Si consideri il problema di programmazione lineare intera:

$$\min 5x_1 + 6x_2$$
$$10x_1 + 12x_2 \geq 15$$
$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

1. Lo si risolva tramite il metodo branch-and-bound, risolvendo i rilassamenti continui con il metodo grafico, scegliendo per il branching la variabile frazionaria di indice minimo ed esplorando prima i problemi generati da vincoli del tipo $x_i \leq a$;

2. Qualora il profitto della prima variabile sia α anziché 5, si discuta l'andamento della soluzione ottima del rilassamento continuo al variare di $\alpha \in]-\infty, +\infty[$.

Esercizio 2

A) L'azienda di trasporto del punto A) dell'esercizio precedente deve risolvere il problema di caricamento dei pallet in un singolo camion. In particolare, ogni pallet j ha un peso p_j, un volume v_j ed un profitto g_j ed il camion ha capacità in peso pari a P e capacità in volume pari a V; si vuole caricare nel camion un sottoinsieme di pallet di profitto massimo.

1. Si determini un modello di programmazione lineare intera per il problema;

2. Si definisca un algoritmo euristico di tipo greedy ed uno di ricerca locale per determinare "buone" soluzioni ammissibili del problema.

B) Si consideri il problema di programmazione lineare intera:

$$\max 2x_1 + x_2$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \in \{0, 1\}$$

1. Lo si risolva tramite il metodo branch-and-bound, risolvendo il primo rilassamento continuo con l'algoritmo del simplesso, partendo dal vertice (0,0), ed i rilassamenti continui successivi con il metodo grafico, scegliendo per il branching la variabile frazionaria di indice minimo ed esplorando prima i problemi generati da vincoli del tipo $x_i \leq a$;

2. Assumendo che i profitti di x_1, x_2 siano g_1, g_2, determinare per quali valori di g_1, g_2 la soluzione del rilassamento continuo del problema rimane ottima.

Esercizio 3

A) In un reparto di lavorazione occorre decidere l'assegnazione di n lavori $\{1, \ldots, n\}$ ad m macchine $\{1, \ldots, m\}$. In particolare, i vincoli di produzione richiedono che ogni lavoro j sia eseguito da esattamente p_j macchine ed ogni macchina i esegua esattamente q_i lavori. Supponendo noto il costo c_{ij} dell'assegnazione del lavoro j alla macchina i, si vuole determinare l'assegnazione ammissibile di costo complessivo minimo.

1. Si determini un modello di programmazione lineare intera per il problema;
2. Si definisca un algoritmo euristico di tipo greedy per determinare una "buona" soluzione ammissibile del problema.

B) Si consideri il problema di programmazione lineare intera:

$$\max 22x_1 + 14x_2 + x_3 + 16x_4 + 30x_5 + 6x_6$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + 8x_4 + 12x_5 + 4x_6 \leq 13$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0, 1\}$$

1. Lo si risolva tramite il metodo branch-and-bound, scegliendo per il branching la variabile frazionaria di indice minimo ed esplorando prima i problemi generati da vincoli del tipo $x_i \geq a$;
2. Discutere come risolvere il rilassamento continuo della variante in cui "max" è sostituito da "min" e "$\leq$" è sostituito da "$\geq$".

Esercizio 4

A) Un'azienda sta considerando la possibilità di avviare una linea di produzione di n nuovi prodotti $\{1, \ldots, n\}$, a partire da m materie prime $\{1, \ldots, m\}$, l'i-esima delle quali è disponibile in quantità d_i. La quantità di materia prima i necessaria per la produzione di una unità di prodotto j è pari ad a_{ij}. Inoltre, per ciascun prodotto j, il profitto unitario di vendita è p_j, al quale si deve però sottrarre un costo fisso f_j che deve essere pagato se la quantità prodotta non è nulla. Si vuole determinare il massimo profitto ottenibile con la linea di produzione.

1. Si determini un modello di programmazione lineare intera mista per il problema, determinando dai dati del problema la massima quantità producibile di ciascun prodotto.
2. Si definisca un algoritmo euristico di tipo greedy per determinare una "buona" soluzione ammissibile del problema, nel caso in cui le quantità prodotte debbano assumere valori interi.

B) Si consideri il seguente esempio numerico per il problema del punto A): $n = 1$, $m = 2$, $d_1 = 14$, $d_2 = 30$, $a_{11} = 4$, $a_{21} = 6$, $p_1 = 10$, $f_1 = 20$.

1. Si disegni la regione ammissibile del modello e se ne determini graficamente la soluzione ottima;
2. Qualora la quantità di prodotto 1 debba essere intera, si determini la soluzione ottima tramite il metodo branch-and-bound, risolvendo i rilassamenti continui con il metodo grafico, scegliendo per il branching la variabile frazionaria di indice minimo ed esplorando prima i problemi generati da vincoli del tipo $x_i \leq a$.

Esercizio 5

A) Una compagnia di trasporti deve assegnare degli autobus ad un insieme di m tratte $\{1, \ldots, m\}$ precedentemente determinate. A tal fine, sono stati predisposti n possibili percorsi $\{1, \ldots, n\}$ per gli autobus, definiti tramite una matrice binaria (a_{ij}) tale che $a_{ij} = 1$ se e solo se il percorso j contiene la tratta i, ed un vettore di costi (c_j). Per ogni tratta i, si richiede che almeno b_i autobus la effettuino. Conseguentemente, è possibile che più autobus effettuino lo stesso percorso. Si vuole determinare il numero di autobus da assegnare ad ogni percorso in modo da minimizzare il costo complessivo.

1. Si determini un modello di programmazione lineare intera per il problema.
2. Si definisca un algoritmo euristico di tipo greedy per determinare una "buona" soluzione ammissibile del problema.

B) Si consideri il seguente esempio numerico per il problema del punto A): $m = n = 2$, $c = (4, 3)$, $b = (2, 1)$,

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Lo si risolva tramite il metodo branch-and-bound, risolvendo il primo rilassamento continuo con l'algoritmo del simplesso, partendo dal vertice (2,0), ed i rilassamenti continui successivi con il metodo grafico, scegliendo per il branching la variabile frazionaria di indice minimo ed esplorando prima i problemi generati da vincoli del tipo $x_i \leq a$;
2. Assumendo che b_1 sia pari a β anziché 2, determinare l'andamento della soluzione ottima del rilassamento continuo al variare di $\beta \in [0, +\infty[$.