IL METODO DI NEWMARK

Il metodo di Newmark appartiene alla famiglia dei *metodi alle differenze finite*. Tale metodo prevede la discretizzazione dell'intervallo temporale di analisi in passi temporali Δt uguali fra loro. Conoscendo la configurazione del sistema all'istante iniziale, questo metodo permette di ricavare la soluzione all'istante temporale successivo. Tale soluzione diviene la condizione iniziale per il successivo *step* di calcolo. Il problema dell'equilibrio è governato da una generica equazione del tipo:

$$\mathbf{Ma}(t)+\mathbf{Ku}(t)=\mathbf{f}(t) \tag{1.1.1}$$

cui sono associate le condizioni iniziali. Considerando il generico istante t_j, sono note le componenti di spostamento, di velocità e di accelerazione in questo istante. Il metodo di Newmark considera accelerazioni nodali lineari nel tempo:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{a}(t)=\mathbf{a}_\mathrm{j}+\frac{t-t_j}{\Delta t}\left(\mathbf{a}_\mathrm{j+1}-\mathbf{a}_\mathrm{j}\right) \tag{1.1.2}$$

Integrando si ottengono le relazioni per la determinazione della velocità e dello spostamento:

$$\dot{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_\mathrm{j}+\left(t-t_j\right)\mathbf{a}_\mathrm{j}+\frac{\left(t-t_j\right)^2}{2\Delta t}\left(\mathbf{a}_\mathrm{j+1}-\mathbf{a}_\mathrm{j}\right) \tag{1.1.3}$$

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_\mathrm{j}+\left(t-t_j\right)\mathbf{v}_\mathrm{j}+\frac{\left(t-t_j\right)^2}{2}\mathbf{a}_\mathrm{j}+\frac{\left(t-t_j\right)^3}{6\Delta t}\left(\mathbf{a}_\mathrm{j+1}-\mathbf{a}_\mathrm{j}\right) \tag{1.1.4}$$

Essendo noti $\mathbf{u}_\mathrm{j},\mathbf{v}_\mathrm{j},\mathbf{a}_\mathrm{j}$, l'unica incognita risulta essere $\mathbf{a}_\mathrm{j+1}$. La velocità e lo spostamento all'istante t_{j+1} sono rispettivamente:

$$\mathbf{v}_\mathrm{j+1}=\mathbf{v}_\mathrm{j}+\Delta t\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}_\mathrm{j}+\frac{1}{2}\mathbf{a}_\mathrm{j+1}\right) \tag{1.1.5}$$

$$\mathbf{u}_\mathrm{j+1}=\mathbf{u}_\mathrm{j}+\Delta t\mathbf{v}_\mathrm{j}+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{2}{3}\mathbf{a}_\mathrm{j}+\frac{1}{3}\mathbf{a}_\mathrm{j+1}\right) \tag{1.1.6}$$

Le espressioni (1.1.5) e (1.1.6) possono essere generalizzate:

$$\mathbf{v}_\mathrm{j+1}=\mathbf{v}_\mathrm{j}+\Delta t\left[\left(1-\gamma\right)\mathbf{a}_\mathrm{j}+\gamma\mathbf{a}_\mathrm{j+1}\right] \tag{1.1.7}$$

$$\mathbf{u}_\mathrm{j+1}=\mathbf{u}_\mathrm{j}+\Delta t\mathbf{v}_\mathrm{j}+\frac{\Delta t^2}{2}\left[\left(1-2\beta\right)\mathbf{a}_\mathrm{j}+2\beta\mathbf{a}_\mathrm{j+1}\right] \tag{1.1.8}$$

L'equazione di bilancio all'istante t_{j+1} è la seguente:

$$\mathbf{Ma_{j+1}} + \mathbf{Ku_{j+1}} = \mathbf{f_{j+1}} \tag{1.1.9}$$

Sostituendo l'equazione (1.1.8) nella (1.1.9) si ottiene la seguente equazione:

$$\mathbf{Ma_{j+1}} + \mathbf{Ku_j} + \Delta t \mathbf{Kv_j} + \frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{K}\left[(1-2\beta)\mathbf{a_j} + 2\beta\mathbf{a_{j+1}}\right] = \mathbf{f_{j+1}} \tag{1.1.10}$$

nella quale $\mathbf{a_{j+1}}$ è l'unica incognita. Considerando i seguenti termini:

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}^* = \mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \\ &\mathbf{p^*_{j+1}} = \mathbf{f_{j+1}} - \mathbf{Ku_j} - \Delta t \mathbf{Kv_j} - \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\mathbf{Ka_j} \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

l'equazione (1.1.10) diventa:

$$\mathbf{K}^*\mathbf{a_{j+1}} = \mathbf{p^*_{j+1}} \tag{1.1.12}$$

da cui si ricava l'incognita $\mathbf{a_{j+1}}$:

$$\mathbf{a_{j+1}} = \frac{\mathbf{p^*_{j+1}}}{\mathbf{K}^*} \tag{1.1.13}$$

Inserendo $\mathbf{a_{j+1}}$ nelle equazioni (1.1.7) e (1.1.8) si ricava la soluzione all'istante t_{j+1}, che diventa la condizione iniziale per la determinazione della soluzione all'istante successivo.

L'algoritmo di Newmark non è *self-starting* in quanto le condizioni iniziali all'istante t_0 riguardano velocità e spostamento, ma non si conosce l'accelerazione $\mathbf{a_0}$. Per determinarla si impone l'equazione di bilancio all'istante t_0:

$$\mathbf{Ma_0} + \mathbf{Ku_0} = \mathbf{f_0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a_0} = \frac{(\mathbf{f_0} - \mathbf{Ku_0})}{\mathbf{M}} \tag{1.1.14}$$

Al variare dei coefficienti β e γ il metodo di Newmark assume denominazioni specifiche:

- con $\beta = 0; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo delle differenze centrali*;
- con $\beta = \frac{1}{12}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo di Fox Goodwin II*;
- con $\beta = \frac{1}{6}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo dell'accelerazione lineare I* o *metodo di Fox Goodwin I*;
- con $\beta = \frac{1}{4}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo del trapezio*;

- con $\beta = \frac{1}{3}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo dell'accelerazione lineare II*;
- con $\beta = \frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{2}$ si ottiene il *metodo dell'accelerazione costante media*;
- con $\beta = \frac{8}{5}; \gamma = \frac{3}{2}$ si ottiene il *metodo di Galerkin*;
- con $\beta = 2; \gamma = \frac{3}{2}$ si ottiene il *metodo delle differenze all'indietro*;
- con $\beta = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2; \gamma = \frac{1}{2}(1-2\alpha)$ si ottiene il *metodo HHT-α.*

Definendo *stabilità dell'algoritmo* la condizione per cui un piccolo errore ad un passo temporale determina errori cumulativi più piccoli nei passi temporali successivi, il metodo di Newmark risulta incondizionatamente stabile se:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \tag{1.1.15}$$

Se la condizione (1.1.15) non viene rispettata, allora il metodo diventa condizionatamente stabile, ovvero risulta stabile se viene rispettata la seguente condizione sulla scelta dell'incremento temporale:

$$\Delta t \leq \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega_{\max}} \tag{1.1.16}$$

dove $\omega_{\max}$ è il massimo autovalore derivante dalla risoluzione del problema agli autovalori:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right)\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.1.17}$$

Più è fitta la discretizzazione del dominio spaziale, maggiore è $\omega_{\max}$, di conseguenza la condizione sul Δt risulta essere più severa.