Algoritmi branch-and-bound

- Algoritmi per problemi di ottimizzazione combinatoria di tipo $\mathcal{NP}$-difficile:

  F = insieme soluzioni ammissibili (supposto finito): $y \in F$;

  $z(y)$: funzione obiettivo (da massimizzare);

  (z, F) = problema di determinare la soluzione $y^* \in F$ tale che

  $$z(y^*) \geq z(y) \quad \forall y \in F$$

- Algoritmi di tipo branch-and-bound:

  "ingredienti":

  · albero decisionale;

  · strategie di esplorazione;

  · rilassamenti;

  · dominanze;

  · tecniche di riduzione;

  · algoritmi euristici.

Metodo branch-and-bound

- $P^0 = (z, F(P^0))$ (problema da risolvere);

  $Z(P^0) = \max\{z(y) : y \in F(P^0)\}$.

- *Branch-and-bound*: suddivisione di P^0 in n_0 sottoproblemi

$$P^1, P^2, \ldots, P^{n_0}$$

  tali da "rappresentare globalmente" P^0;
  ottenuta mediante suddivisione di $F(P^0)$ in sottoinsiemi

$$F(P^1), F(P^2), \ldots, F(P^{n_0})$$

$$\text{tali che } \bigcup_{k=1}^{n_0} F(P^k) = F(P^0)$$

$$(Z(P^k) = \max\{z(y) : y \in F(P^k)\} \ (k = 1, \ldots, n_0))$$

  Si ottiene: $Z(P^0) = \max\{Z(P^1), Z(P^2), \ldots, Z(P^{n_0})\}$.

- (risolvere P^0) $\Leftrightarrow$ (*risolvere* P^k $(k = 1, \ldots, n_0)$)

$$\Updownarrow$$

  1) determinare la soluzione ottima di P^k, oppure

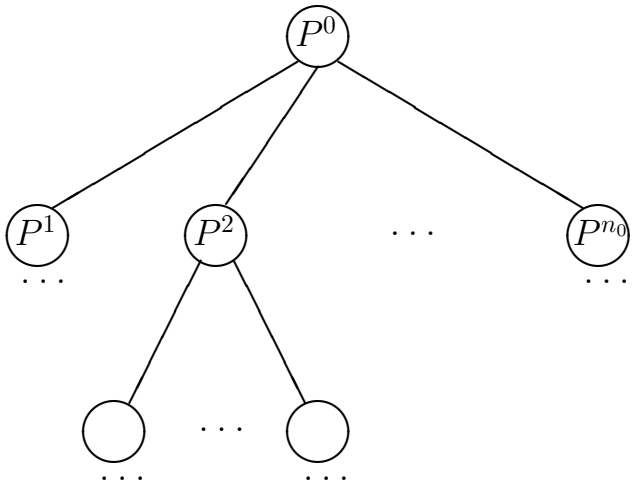
  2) dimostrare che $F(P^k) = \varnothing$, oppure

  3) dimostrare che $Z(P^k) \leq Z$ (Z = valore della miglior soluzione ammissibile di P^0 ottenuta in precedenza).

- Preferibilmente, $F(P^i) \cap F(P^j) = \varnothing \ \forall \ P^i, P^j : i \neq j$
("partizione" di $F(P^0)$ in n_0 sottoinsiemi).

- Suddivisione ripetuta per ogni sottoproblema non risolto.

Albero decisionale



foglie = sottoproblemi da risolvere.

- Diverse strategie per la scelta del sottoproblema da affrontare.
- Per ogni P^k, calcolo di un valore $U(P^k)$ (*upper bound*) tale che

$$U(P^k) \geq Z(P^k)$$

- $\Rightarrow$ **3)** se $U(P^k) \leq Z$, P^k non viene considerato.
- Per ottenere un upper bound di $P^k = (z, F(P^k))$:

  rilassamento di P^k: problema $R(P^k) = (z_r, F_r(P^k))$ tale che:

  a) $F_r(P^k) \supseteq F(P^k)$,

  b) $z_r(y) \geq z(y) \;\; \forall y \in F(P^k)$.
- $U(P^k) = Z(R(P^k)) = \max\{z_r(y) : y \in F_r(P^k)\}$.
- Proprietà: $Z(R(P^k))$ il più possibile prossimo a $Z(P^k)$;

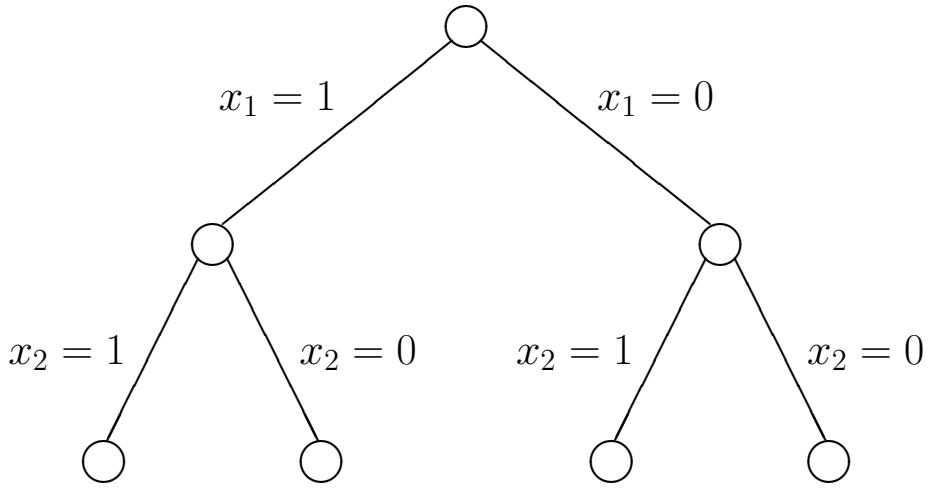
  $R(P^k)$ sufficientemente "facile" da risolvere.

Algoritmo branch-and-bound per KP01

- È conveniente ordinare gli elementi secondo valori non crescenti del profitto per unità di peso:

$$\frac{p_j}{w_j} \geq \frac{p_{j+1}}{w_{j+1}} \; \forall \; j$$

- Albero decisionale binario:



...

- Strategia di esplorazione:

  · al primo livello $x_1 = 1$, $x_1 = 0$;

  · se esiste nodo attivo generato da $(x_j = 1)$ si ramifica da questo, altrimenti dall'ultimo nodo attivo generato da $(x_j = 0)$.

$$\Downarrow$$

  L'insieme dei nodi attivi contiene sempre
  al più un nodo generato da $(x_j = 1)$
  uno o più nodi generati da $(x_j = 0)$

• Upper bound $\Leftarrow$ rilassamento continuo:

$$x_j \in \{0,1\}\ (j=1,\ldots,n) \quad \text{sostituito da}$$
$$0 \le x_j \le 1\ (j=1,\ldots,n).$$

• Soluzione del rilassamento continuo (Dantzig, 1957):

· si inseriscono con continuità gli elementi migliori frazionando il primo che non entra interamente, cioè:

· $s := \min\{i\ :\ \sum_{j=1}^{i} w_j > c\}$ (*elemento critico*);

· $\overline{c} := c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j$;

$x_j = 1, j = 1, ..., s-1; x_s = \overline{c}/w_s; x_j = 0, j = s+1, ..., n$

· $U := \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \overline{c}\frac{p_s}{w_s} \right\rfloor$

· Es: $n = 5$

$p' = (\ 12,\ 12,\ 7,\ 6,\ 2)$

$w' = (\ 4,\ 5,\ 3,\ 3,\ 2)$

$c = 10$

$s = 3, \overline{c} = 1$

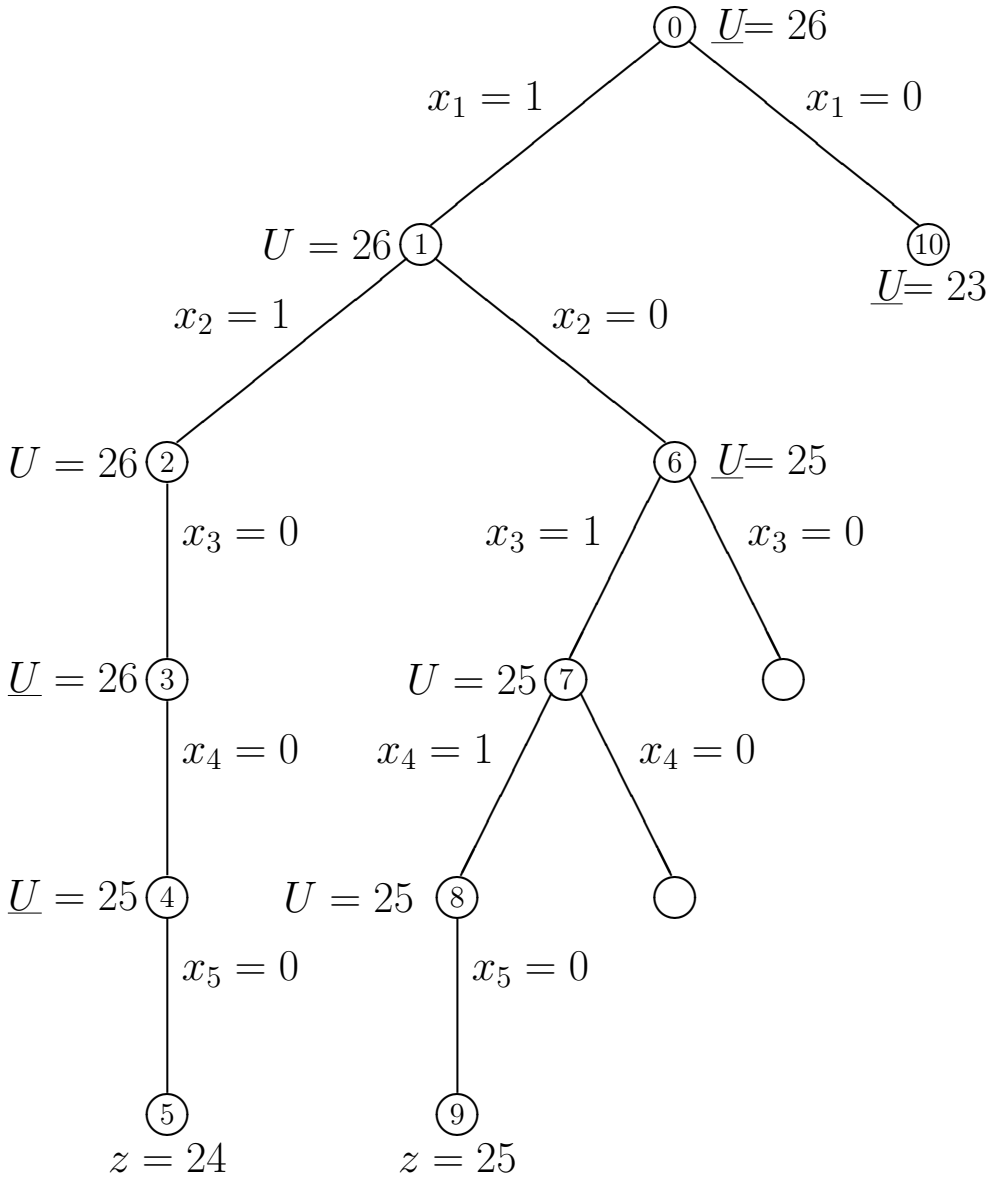
$$U = \left\lfloor 12 + 12 + 1 \cdot \frac{7}{3} \right\rfloor = 26$$

Es: $n = 5$

$p' = (12, 12, 7, 6, 2)$

$w' = (4, 5, 3, 3, 2)$

$c = 10$



Soluzione ottima: nodo 9: $x_1 = 1, x_2 = 0, X_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0; z = 25$

Rilassamenti (Problema di massimizzazione)

- Rilassamento: qualunque metodo che

  a) ampli la regione ammissibile

  e/o

  b) aumenti il valore della funzione obiettivo in corrispondenza della regione ammissibile originale.

- Alcuni rilassamenti *classici* possono essere applicati al modello matematico del problema.

- Dato un problema (P) di PLI binaria:

$$Z(P) = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{kj} x_j = e_k \quad (k = 1, \ldots, l) \tag{3}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

- Il problema rilassato $R(P)$ ha un valore ottimo $Z(R(P))$ "migliore" di $Z(P)$, cioè $Z(R(P)) \geq Z(P)$ (si dice che $Z(R(P))$ è un limite superiore o *Upper Bound* di $Z(P)$).

- Criteri: $Z(R(P))$ il più *prossimo* a $Z(P)$;
  $R(P)$ sufficientemente *facile* da risolvere.

- Due tipi distinti di vincoli per evidenziare diverse proprietà.

- I rilassamenti classici si estendono facilmente a PLI generale.