ANALISI MATEMATICA L-B, 2005-06.
INTEGRALI MULTIPLI

1. Funzioni sommabili di n variabili

Studieremo l'integrale di Riemann per funzioni $f(x_1,\ldots,x_n)$ di n variabili reali a valori reali. L'integrale di f su $A \subset \mathbf{R}^n$ verrà denotato con

$$\int_A f, \quad \int_A f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n,$$

o con

$$\int_A f(x)dx,$$

denotando con x la variabile vettoriale $x = (x_1,\ldots,x_n)$, e verrà chiamato integrale multiplo. Per $n = 2$ ed $n = 3$ useremo di più le usuali notazioni

$$\int_A f(x,y)dxdy, \quad \int_A f(x,y,z)dxdydz$$

e parleremo di integrali doppi e tripli rispettivamente.

• Misura di Peano-Jordan in $\mathbf{R}^n$

Abbiamo già accennato alla misura di Peano-Jordan nel piano $\mathbf{R}^2$. Analoga teoria si può sviluppare in ogni $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$.

Un intervallo I di $\mathbf{R}^n$ è il prodotto cartesiano $I = J_1 \times \ldots \times J_n$ di n intervalli $J_1,\ldots,J_n \subset \mathbf{R}$. In maniera naturale, per I limitato si definisce la misura n-dimensionale di I come

$$\mu_n(I) = \mu_1(J_1)\mu_1(J_2)\cdots\mu_1(J_n)$$

dove $\mu_1(J)$ è la lunghezza euclidea dell'intervallo J di $\mathbf{R}$.
Anche l'insieme vuoto viene considerato un intervallo di $\mathbf{R}^n$ con misura nulla. Misura nulla si ha anche quando almeno uno dei J_k si riduce a un punto.

Un pluriintervallo $\mathcal{P}$ di $\mathbf{R}^n$ è una unione finita di intervalli limitati di $\mathbf{R}^n$. Ogni pluriintervallo $\mathcal{P}$ si scrive come unione di intervalli con interni a due a due disgiunti

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^{m} I_k, \quad I_j^\circ \cap I_h^\circ = \emptyset \quad \text{per } j \neq h.$$

Una tale rappresentazione di $\mathcal{P}$ non è unica, ma per tutte queste rappresentazioni rimane costante il numero

$$\mu_n(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} \mu_n(I_k)$$

che si definisce come la misura di $\mathcal{P}$.

Sia $X \subset \mathbf{R}^n$ un insieme limitato e denotiamo con $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$ generici pluriintervalli. Definiamo la misura interna $\mu_n^i(X)$ e la misura esterna $\mu_n^e(X)$ di X attraverso

$$\mu_n^i(X) = \sup_{\mathcal{P}' \subset X} \mu_n(\mathcal{P}'), \quad \mu_n^e(X) = \inf_{X \subset \mathcal{P}''} \mu_n(\mathcal{P}'').$$

Per ogni X limitato si ha

$$0 \leq \mu_n^i(X) \leq \mu_n^e(X).$$

Un insieme limitato $X \subset \mathbf{R}^n$ si dice misurabile secondo Peano-Jordan quando

$$\mu_n^i(X) = \mu_n^e(X).$$

In tal caso si chiama misura di X e si indica con $\mu_n(X)$ il valore comune

$$\mu_n(X) = \mu_n^i(X) = \mu_n^e(X).$$

In particolare, da $0 \leq \mu_n^i(X) \leq \mu_n^n(X)$ segue che X ha misura nulla se e solo se $\mu_n^e(X) = 0$. Per definizione, ciò accade quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un pluriintervallo $\mathcal{P}$ tale che $X \subset \mathcal{P}$ e $\mu_n(\mathcal{P}) \leq \varepsilon$.

Per ogni $X \subset \mathbf{R}^n$ insieme limitato si ha

$$\mu_n^e(X) = \mu_n^i(X) + \mu_n^e(\partial X)$$

dove ∂X denota la frontiera di X. Da questo segue subito

$$X \text{ misurabile} \Longleftrightarrow \mu_n(\partial X) = 0.$$

Denotiamo con $J_b(\mathbf{R}^n)$ la famiglia di tutti gli insiemi misurabili e limitati di $\mathbf{R}^n$. Per $X, Y \in J_b(\mathbf{R}^n)$ anche

$$X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y \in J_b(\mathbf{R}^n).$$

Queste proprietà si generalizzano ad unioni ed intersezioni di un numero finito di insiemi:

$$X_1, \ldots, X_m \in J_b(\mathbf{R}^n) \Longrightarrow \cup_{k=1}^m X_k, \cap_{k=1}^m X_k \in J_b(\mathbf{R}^n).$$

Inoltre, in maniera naturale, la misura è crescente:

$$X, Y \in J_b(\mathbf{R}^n), X \subset Y \Longrightarrow \mu_n(X) \subset \mu_n(Y).$$

Infine, per $X_1, \dots, X_m \in J_b(\mathbf{R}^n)$

$$\mu_n\left(\cup_{k=1}^m X_k\right) \le \sum_{k=1}^m \mu_n(X_k)$$

con

$$\mu_n\left(\cup_{k=1}^m X_k\right) = \sum_{k=1}^m \mu_n(X_k) \text{ per } \; X_j^\circ \cap X_h^\circ = \emptyset, \; j \ne h.$$

Sia ora Z un insieme non limitato in $\mathbf{R}^n$. Diremo che Z è misurabile se per ogni $X \in J_b(\mathbf{R}^n)$ anche $Z \cap X \in J_b(\mathbf{R}^n)$. In tal caso si pone

$$\mu_n(Z) = \sup_{X \in J_b(\mathbf{R}^n)} \mu_n(Z \cap X)$$

con la convenzione che l'estremo superiore di un insieme numerico non superiormente limitato vale $+\infty$.
Quando un insieme non limitato Z è misurabile, esistono successioni di insiemi misurabili e limitati $X_m \in J_b(\mathbf{R}^n)$ tale che per ogni m si ha $X_m \subset X_{m+1}$ e tale che $Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$. Per tutte queste successioni vale

$$\mu_n(Z) = \lim_{m \to +\infty} \mu_n(X_m).$$

Ognuna di tali successioni di insiemi X_m si dice una successione invadente Z.

• **Integrale di funzioni positive**
Per $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, a valori non negativi, $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in A$, denotiamo con Γ_f il grafico e con $\mathcal{R}_f$ il sottografico di f

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} : \; x = (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

$$\mathcal{R}_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} : \; x = (x_1, \dots, x_n) \in A, 0 \le y \le f(x)\}.$$

Sia ora A **misurabile** in $\mathbf{R}^n$. Diremo che $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in A$, è **integrabile** su A quando il sottografico di f è misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$. In tal caso, la misura $\mu_{n+1}(\mathcal{R}_f)$, che è un numero reale non negativo oppure $+\infty$, si definisce come l'integrale di f su A:

$$\mu_{n+1}(\mathcal{R}_f) = \int_A f.$$

Come già introdotto, si usano anche le notazioni

$$\int_A f(x)dx, \;\; \int_A f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.$$

Se il sottografico è misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$, allora necessariamente il grafico Γ_f è misurabile in $\mathbf{R}^{n+1}$ con misura nulla dal momento che il grafico è parte della frontiera del sottografico. Da A misurabile in $\mathbf{R}^n$ si ha che tutte le altre parti di frontiera del sottografico hanno misura nulla in $\mathbf{R}^{n+1}$, quindi vale anche il viceversa. In definitiva, per $f \geq 0$

$$f \text{ integrabile su } A \text{ misurabile} \Longleftrightarrow \mu_{n+1}(\Gamma_f) = 0.$$

Quando f è integrabile con integrale finito,

$$\int_A f < +\infty,$$

la funzione si dice **sommabile** su A.

Per f la funzione costante 1 sull'insieme di base A si ha $\mu_{n+1}(\mathcal{R}_f) = \mu_n(A)$, quindi in particolare

$$\mu_n(A) = \int_A 1 \; dx_1 \ldots dx_n.$$

La condizione di integrabilità data da misura nulla del grafico in $\mathbf{R}^{n+1}$ vale sotto l'ipotesi di continuità della funzione f nel dominio A. Tale regolarità può essere indebolita. Come già visto per le funzioni di una sola variabile reale, si dice che la funzione $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è continua **quasi ovunque** o quasi dappertutto quando l'insieme dei punti di disconrinuità ha misura nulla in $\mathbf{R}^n$:

$$\mu_n\left(\{x \in A : \; f \text{ discontinua in } x\}\right) = 0.$$

Come per le funzioni di una variabile, vale il seguente risultato:

Teorema 1.1. *Se $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f \geq 0$, è continua quasi ovunque nel dominio misurabile A di $\mathbf{R}^n$, allora è integrabile su A.*

In particolare se il dominio di integrazione A ha misura nulla in $\mathbf{R}^n$, allora una qualunque funzione non negativa è integrabile su A con integrale pari a zero.

Collegato con questo e con le proprietà della misura in $\mathbf{R}^n$, abbiamo il fatto che l'integrabilità ed il valore dell'integrale non cambiano modificando una funzione su un insieme di misura nulla. Infatti, se $f \geq 0$ è integrabile su A e $B \subset A$ con $\mu_n(A \setminus B) = 0$, allora f è integrabile anche su B e

$$\int_B f = \int_A f.$$

• Funzioni sommabili, casi notevoli

Consideriamo ora una funzione $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di segno non necessariamente costante in A misurabile di $\mathbf{R}^n$. Ricordiamo le funzioni a valori non negativi $f_+, f_- \geq 0$ definite da

$$f_+ - f_- = f, \; f_+ + f_- = |f|.$$

Per f_+ e f_- abbiamo già introdotto l'integrabilità come la possibilità di misurare il sottografico. Diremo che f è integrabile su A quando tali sono f_+ ed f_- e la differenza

$$\int_A f_+ - \int_A f_-$$

non assume la forma indeterminata

$$\infty - \infty.$$

Per una tale f integrabile su A si pone

$$\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$$

con la solita convenzione che $\pm\infty + a = \pm\infty$ per ogni $a \in \mathbf{R}$. Si dice che f è **sommabile** su A quando tali sono le funzioni a valori non negativi f_+, f_-:

$$\int_A f_+ < +\infty, \ \int_A f_+ < +\infty.$$

In questo caso f è integrabile su A con integrale finito. Evidentemente

$$f \text{ sommabile} \Longleftrightarrow |f| \text{ sommabile}.$$

Tenendo poi conto di

$$\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-, \ \int_A |f| = \int_A f_+ + \int_A f_-$$

e del fatto che gli integrali di f_+ ed f_- sono non negativi, segue subito

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se la funzione ha segno costante quasi ovunque in A, che equivale a dire che almeno uno tra gli integrali di f_+ ed f_- vale zero.

Mettiamo ora in evidenza tre casi notevoli di sommabilità.

Primo caso: funzione limitata su un insieme limitato.
Una funzione continua quasi ovunque e limitata su A misurabile e limitato in $\mathbf{R}^n$ è sommabile su A. Infatti in questo caso sia f_+ che f_- hanno sottografici misurabili e limitati quindi con misura finita in $\mathbf{R}^{n+1}$.
Sia

$$\mathcal{D}: \quad A = \cup_{j=1}^m A_j, \ A_k^\circ \cap A_h^\circ = \emptyset, h \neq k,$$

una scomposizione in parti misurabili A_j dell'insieme A. Consideriamo poi la somma inferiore

$$s(f, \mathcal{D}) = \sum_{j=1}^m \mu_n(A_j) m_j, \quad m_j = \inf_{A_j} f,$$

e la somma superiore

$$S(f,\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{m} \mu_n(A_j) M_j, \quad M_j = \sup_{A_j} f,$$

relative alla scomposizione $\mathcal{D}$. Il prodotto $\mu_n(A_j)h$ vale la misura in $\mathbf{R}^{n+1}$ del cilindro di base A_j in $\mathbf{R}^n$ ed altezza h. Dalla definizione di integrale come differenza delle misure dei sottografici di f_+ ed f_- nell'ordine, in particolare ragionando sulla relazione tra misura interna, misura esterna e misura, segue

$$s(f,\mathcal{D}) \leq \int_A f \leq S(f,\mathcal{D}).$$

Se poi consideriamo tutte le possibili scomposizioni di A in parti misurabili ed introduciamo il parametro di finezza

$$\delta = \max_j (\mathrm{diam} A_j)$$

di una generica scomposizione, allora

$$\lim_{\delta\to 0} s(f,\mathcal{D}) = \lim_{\delta\to 0} S(f,\mathcal{D}) = \int_A f$$

in quanto misura interna, misura esterna e misura coincidono per i sottografici di f_+ ed f_-.

Altre somme approssimanti l'integrale di f su A sono le somme di Riemann

$$\sigma(f,\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{m} \mu_n(A_j) f(x_j), \quad x_j \in A_j,$$

relative ad una generica scomposizione di A con arbitraria scelta di ciascun punto x_j in A_j. Evidentemente vale

$$s(f,\mathcal{D}) \leq \sigma(f,\mathcal{D}) \leq S(f,\mathcal{D}),$$

quindi, per confronto, anche le somme di Riemann convergono all'integrale di f quando il parametro di finezza δ delle scomposizioni tende a zero:

$$\lim_{\delta\to 0} \sigma(f,\mathcal{D}) = \int_A f.$$

Secondo caso: funzione non limitata su un insieme limitato. Come caso di riferimento di funzione non limitata su un insieme limitato consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n : 0 < \|x\| < R\}, \ R > 0.$$

Si osservi che la funzione è continua ed a valori positivi quindi integrabile con integrale pari alla misura, finita o $+\infty$, del sottografico. Tale sottografico non è limitato perchè f non è limitata. In questo caso

$$f \text{ sommabile su } A \iff \alpha < n.$$

Questo fatto è stato provato nel primo corso di Analisi nel caso $n = 1$ di funzioni di una sola variabile. Qui verrà provato più avanti nei casi $n = 2$ ed $n = 3$ con l'utilizzo delle coordinate polari nel piano e delle coordinate sferiche nello spazio.

Terzo caso: funzione limitata su un insieme non limitato. Come caso di riferimento di funzione limitata su un insieme non limitato consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$$

su

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| > R\},\ R > 0.$$

Si osservi che la funzione è continua ed a valori positivi quindi integrabile con integrale pari alla misura, finita o $+\infty$, del sottografico. Tale sottografico non è limitato perchè la base A non è limitata. In questo caso

$$f \text{ sommabile su } A \iff \alpha > n.$$

Anche questo fatto è stato provato nel primo corso di Analisi nel caso $n = 1$ di funzioni di una sola variabile e qui verrà provato più avanti nei casi $n = 2$ ed $n = 3$ con l'utilizzo delle coordinate polari nel piano e delle coordinate sferiche nello spazio.

• **Baricentro**

Sia $f \geq 0$ sommabile su $A \subset \mathbf{R}^n$ misurabile e limitato. Possiamo pensare ad $f(x)$ come densità, funzione del punto $x \in A$, massa/misura. Nei casi $n = 2$ ed $n = 3$, f può essere interpretata rispettivamente come densità superficiale o densità volumetrica del corpo bidimensionale o tridimensionale A. Una somma di Riemann

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_n(A_j) f(x_j)$$

approssima quindi la massa totale di A non appena la scomposizione è abbastanza fine da considerare f pressochè costante su ciascuna parte A_j. Passando al limite per il parametro di finezza $\delta \to 0$, abbiamo che la massa m del corpo A vale l'integrale di f su A:

$$m = \int_A f(x)dx.$$

Analoghe considerazioni si possono fare per altre grandezze fisiche scalari.

Definita la massa, possiamo definire il baricentro $G = (x_{1,G}, \dots, x_{n,G})$ di A di coordinate

$$x_{k,G} = \frac{1}{m}\int_A x_k f(x)dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Nel caso che f sia costante, si ha il baricentro geometrico di coordinate

$$x_{k,G} = \frac{1}{\mu_n(A)}\int_A x_k dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

• **Proprietà dell'integrale**

Siano f, g integrabili su A misurabile. Si hanno le seguenti proprietà dell' integrale:

- Linearità. Se f, g sono sommabili su A, allora per c_1, c_2 costanti reali qualunque, anche $c_1 f + c_2 g$ è sommabile su A e vale

$$\int_A (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_A f + c_2 \int_A g.$$

- Monotonia. Se $g(x) \leq f(x)$ quasi ovunque in A allora

$$\int_A g \leq \int_A f.$$

- Additività. Sia $A = \cup_{j=1}^m A_j$ una scomposizione di A in m parti misurabili con $\mu_n(A_h \cap A_k) = 0$, $k \neq h$, e sia f sommabile su A. Allora f è sommabile anche su ciascun insieme A_j, $j = 1, \dots, m$, e vale

$$\int_A f = \sum_{j=1}^m \int_{A_j} f.$$

- Confronto. Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ quasi ovunque in A, allora:

$$g \text{ sommabile} \Longrightarrow f \text{ sommabile}$$

quindi, in maniera equivalente, anche

$$f \text{ non sommabile} \Longrightarrow g \text{ non sommabile}.$$

Esempio 1.2. Discutiamo la sommabilità della funzione di due variabili

$$f(x, y) = \frac{1}{(|x| + |y|)^\alpha}$$

definita a piacere per $(x, y) = (0, 0)$ (un singolo punto costituisce un insieme di misura nulla quindi neutro nel calcolo integrale) in

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Valgono le disuguaglianze

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|) \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$$

la cui verifica, che si ottiene ad esempio elevando al quadrato, lasciamo al lettore. Per confronto, $f(x,y)$ ha lo stesso comportamento di sommabilità della funzione di riferimento

$$g(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}}$$

quindi è sommabile in A se e solo se $\alpha < 2$, dove 2 è la dimensione attuale dello spazio ambiente $\mathbf{R}^2$.

Nel complementare di A è sommabile se e solo se $\alpha > 2$.

2. Formule di riduzione

Vediamo in questa sezione come un integrale di una funzione di n variabili si riduce ad n integrali di funzioni di una sola variabile.

•Riduzione di integrali doppi

Sia $f(x,y)$ sommabile sul rettangolo $A=[a,b]\times[c,d]$ di $\mathbf{R}^2$. Suddividiamo gli intervalli $[a,b]$ e $[c,d]$ in m ed n intervalli rispettivamente

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,\ \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

e di conseguenza il rettangolo A in mn rettangoli

$$A = \cup_{i,j} A_{ij},\ \ A_{ij} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}],\ i = 0,\ldots,m-1,\ j = 0,\ldots,n-1.$$

Denotiamo

$$\delta_1 = \max_i (x_{i+1}-x_i),\ \ \delta_2 = \max_j (y_{j+1}-y_j).$$

Il parametro di finezza δ della scomposizione di A, dato dalla massima lunghezza della diagonale dei rettangoli A_{ij}, verifica

$$\delta \leq \sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2}.$$

L'integrale di f su A è limite di somme di Riemann

$$\int_A f(x,y)dxdy = \lim_{(\delta_1,\delta_2)\to(0,0)} \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_i,y_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Se la funzione della sola variabile y

$$y \mapsto f(x,y)$$

è sommabile su $[c, d]$ qualunque sia $x \in [a, b]$, risulta ben definita su $[a, b]$ la funzione

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

e si ha

$$\lim_{\delta_2 \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_i, y_j)(y_{j+1} - y_j) = \int_c^d f(x_i, y)dy = F(x_i).$$

Da questo segue

$$\int_A f(x, y)dxdy = \lim_{\delta_1 \to 0} \sum_{i=0}^{m-1} F(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Se ora la funzione $F(x)$ è sommabile su $[a, b]$, abbiamo

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_a^b F(x)dx$$

che si scrive, ricordando la definizione di $F(x)$,

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Si omettono le parentesi e si scrive

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

con la convenzione che il primo integrale che si calcola è quello scritto internamente. Dopo che si è integrato in dy, il risultato è una funzione $F(x)$ da integrare in dx. Il ruolo delle variabili si può scambiare ottenendo anche

$$\int_A f(x, y)dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy$$

sotto le ipotesi che tutti gli integrali che compaiono siano integrali di funzioni sommabili.

Nel caso $f(x, y) \geq 0$, l'integrale doppio $\int_A f(x, y)dxdy$ rappresenta il volume del sottografico

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

in $\mathbf{R}^3$. L'integrale semplice $\int_c^d f(x, y)dy$ rappresenta invece un'area: quella della sezione piana

$$\mathcal{R}_x = \{(y, z) : c \leq y \leq d, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

di $\mathcal{R}$ ad x fissato. La formula di riduzione

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

si legge quindi

$$\mu_3(\mathcal{R}) = \int_a^b \mu_2(\mathcal{R}_x)dx,$$

cioè

Il volume del solido $\mathcal{R}$ vale l'integrale in dx dell'area delle proprie sezioni piane $\mathcal{R}_x$.

Questo modo di calcolare volumi è noto come **Principio di Cavalieri**.

Le formule di riduzione non valgono solo su domini di base rettangolari ed il principio di Cavalieri non si applica solo a solidi con sezioni piane che hanno base di lunghezza costante. Consideriamo un dominio nel piano

$$A = \{(x,y) : x \in I, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

con $I = (a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, intervallo reale e $\alpha, \beta : I \to \mathbf{R}$ due funzioni continue, $\alpha(x) \le \beta(x)$ per ogni $x \in I$. Un tale dominio si dice **normale** rispetto all'asse x. Viene data una analoga definizione di dominio normale rispetto all'asse y scambiando il ruolo di x ed y. Un dominio normale è misurabile nel piano in quanto la sua frontiera ha area nulla.

Sia ora $f : A \to \mathbf{R}$ sommabile su A dominio normale, ad esempio rispetto all'asse x. Vale la formula di riduzione

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dydx$$

sotto l'ipotesi che anche gli integrali a secondo membro

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy, \quad \int_a^b F(x)dx$$

siano integrali di funzioni sommabili.

Esempio 2.1. Per A il triangolo

$$A = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\},$$

calcoliamo

$$\int_A e^{y^2} dxdy.$$

Se pensiamo ad A come dominio normale rispetto all'asse x, la formula di riduzione è
$$\int_A e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dydx.$$
In questo caso, però, il calcolo dell'integrale interno
$$F(x) = \int_x^1 e^{y^2} dy$$
non è possibile per via elementare dal momento che non abbiamo la possibilità di esprimere analiticamente le primitive di e^{y^2} in dy attraverso funzioni elementari. Si può rappresentare il triangolo A anche come insieme normale rispetto all'asse y:
$$A = \{(x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}.$$
La formula di riduzione diventa
$$\int_A e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^x e^{y^2} dxdy = \int_0^1 e^{y^2} \int_0^y dxdy =$$
$$\int_0^1 ye^{y^2} dy = \frac{1}{2}\left[e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$
Entrambe le formule di riduzione danno lo stesso integrale doppio ma a volte, come in questo caso, con diverso grado di complessità computazionale.

Esempio 2.2. Determiniamo il baricentro geometrico $G = (x_G, y_G)$ dell'insieme piano
$$A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le \sqrt{x}\}.$$
Per prima cosa calcoliamo l'area $\mu_2(A)$ di A.
$$\mu_2(A) = \int_A 1dxdy = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} 1dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx =$$
$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$
Calcoliamo ora x_G:
$$x_G = \frac{1}{\mu_2(A)} \int_A xdxdy = 6\int_0^1 x \int_x^{\sqrt{x}} dydx = 6\int_0^1 (x\sqrt{x} - x^2)dx =$$
$$6\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 6\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{5}.$$

Nel calcolare y_G, facciamo vedere come si possa applicare anche l'altra formula di riduzione invertendo l'ordine di integrazione. Risolvendo le equazioni delle curve di frontiera rispetto ad x e proiettando l'insieme sull'asse y, si scrive A come normale rispetto all'asse y:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}.$$

Ne segue

$$y_G = \frac{1}{\mu_2(A)} \int_A y dx dy = 6 \int_0^1 y \int_{y^2}^{y} dx dy = 6 \int_0^1 (y^2 - y^3) dy =$$

$$6 \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}.$$

Il baricentro di A è il punto

$$G = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right).$$

•Riduzione di integrali tripli

Sia $A \subset \mathbf{R}^3$ un insieme misurabile di misura (volume) finita, con proiezione sull'asse z data dall'intervallo reale I di estremi a, b, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Denotiamo con A_z la generica sezione piana di A a quota $z \in I$,

$$A_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in A\}.$$

Applicando il principio di Cavalieri, si ha

$$\int_A 1 dx dy dz = \mu_3(A) = \int_a^b \mu_2(A_z) dz = \int_a^b \left(\int_{A_z} 1 dx dy \right) dz.$$

Una tale riduzione vale anche per una funzione $f(x, y, z)$ sommabile su A

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{A_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

sotto le ipotesi che anche gli integrali a secondo membro

$$F(z) = \int_{A_z} f(x, y, z) dx dy, \quad \int_a^b F(z) dz$$

siano integrali di funzioni sommabili. Le parentesi vengono in genere omesse e si scrive

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{A_z} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Chiaramente si può scegliere di proiettare A anche su assi diversi dall'asse z, scambiando il ruolo delle variabili.

Esempio 2.3. Determiniamo il baricentro geometrico $G = (x_G, y_G, z_G)$ di

$$A = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \sqrt{z}\}.$$

La proiezione di A sull'asse z è l'intervallo $[0, 1]$. Per $z \in [0, 1]$, la sezione piana A_z di A a quota z è il triangolo rettangolo isoscele con cateto di lunghezza $\sqrt{z}$

$$A_z = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \sqrt{z}\}$$

la cui area vale $\mu_2(A_z) = z/2$. Il volume di A vale

$$\mu_3(A) = \int_0^1 \mu_2(A_z) dz = \int_0^1 \frac{1}{2} z dz = \frac{1}{4}[z^2]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Calcoliamo ora x_G:

$$x_G = \frac{1}{\mu_3(A)} \int_A x dx dy dz = 4 \int_0^1 \int_{A_z} x dx dy dz.$$

L'integrale doppio interno vale

$$\int_{A_z} x dx dy = \int_0^{\sqrt{z}} x \int_0^{\sqrt{z}-x} dy dx = \int_0^{\sqrt{z}} (x\sqrt{z} - x^2) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}\sqrt{z} x^2 - \frac{1}{3} x^3\right]_0^{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} z\sqrt{z} - \frac{1}{3} z\sqrt{z} = \frac{1}{6} z\sqrt{z},$$

da cui

$$x_G = \frac{2}{3} \int_0^1 z\sqrt{z} dz = \frac{4}{15} \left[z^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

Calcoliamo poi y_G:

$$y_G = \frac{1}{\mu_3(A)} \int_A y dx dy dz = 4 \int_0^1 \int_{A_z} y dx dy dz.$$

L'integrale doppio interno vale

$$\int_{A_z} y dx dy = \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z}-x} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{z}} [y^2]_0^{\sqrt{z}-x} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{z}} (z + x^2 - 2x\sqrt{z}) dx = \frac{1}{2} \left[zx + \frac{1}{3} x^3 - x^2\sqrt{z}\right]_0^{\sqrt{z}} =$$

$$\frac{1}{2} z\sqrt{z} + \frac{1}{6} z\sqrt{z} - \frac{1}{2} z\sqrt{z} = \frac{1}{6} z\sqrt{z},$$

da cui, esattamente come nel calcolo di x_G,

$$y_G = \frac{2}{3}\int_0^1 z\sqrt{z}dz = \frac{4}{15}.$$

Del resto $x_G = y_G$ era prevedibile per chiari motivi di simmetria di A attorno al piano $y = x$. Calcoliamo infine z_G:

$$z_G = \frac{1}{\mu_3(A)}\int_A zdxdydz = 4\int_0^1 z\int_{A_z} dxdydz =$$

$$4\int_0^1 z\mu_2(A_z)dz = 2\int_0^1 z^2dz = \frac{2}{3}[z^3]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Il baricentro di A è

$$G = \left(\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{3}\right).$$

Abbiamo un diverso modo di ridurre integrali tripli, scambiando l'ordine dell'integrale doppio e dell'integrale semplice. Sia B la proiezione di A su di un piano coordinato, ad esempio il piano x, y. Per ogni fissato $(x, y) \in B$, denotiamo con $A_{(x,y)}$ la sezione unidimensionale di A che si ottiene intersecando A con la retta parallela all'asse z spiccata da tale punto. Per semplicità, consideriamo il caso che A sia un dominio normale

$$A = \{(x, y, z) : (x, y) \in B, \alpha(x, y) \le z \le \beta(x, y)\},$$

$$\alpha, \beta : B \to \mathbf{R} \text{ continue, } \alpha(x, y) \le \beta(x, y),$$

in maniera tale che la sezione $A_{(x,y)}$ sia l'intervallo

$$A_{(x.y)} = \{z : \alpha(x, y) \le z \le \beta(x, y)\} = [\alpha(x, y), \beta(x, y)].$$

Vale

$$\int_A f(x, y, z)dxdydz = \int_B \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy$$

nella ipotesi che anche gli integrali a secondo membro

$$F(x, y) = \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dz, \quad \int_B F(x, y)dxdy$$

siano integrali di funzioni sommabili. Come al solito, le parentesi vengono omesse e si scrive

$$\int_A f(x, y, z)dxdydz = \int_B \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z)dzdxdy.$$

Esempio 2.4. Calcoliamo
$$\int_A \frac{1}{2\sqrt{z}} dxdydz$$
con
$$A = \{(x,y,z) : x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 1, 0 \leq z \leq x^2\}.$$
La proiezione di A sul piano x, y è il triangolo
$$B = \{(x,y) : x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 1\}$$
mentre per $(x,y) \in B$ la sezione $A_{(x,y)}$ è descritta da
$$0 \leq z \leq x^2.$$
Abbiamo
$$\int_A \frac{1}{2\sqrt{z}} dxdydz = \int_B \int_0^{x^2} \frac{1}{2\sqrt{z}} dzdxdy =$$
$$\int_B [\sqrt{z}]_0^{x^2} dxdy = \int_B |x| dxdy = \int_B (-x) dxdy$$
dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che in B vale $x \leq 0$. Ora possiamo ridurre l'integrale doppio:
$$-\int_B x dxdy = -\int_{-1}^0 x \int_0^{1+x} dydx = -\int_{-1}^0 x(1+x)dx =$$
$$-\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

• **Riduzione di integrali multpli**

Le formule di riduzione valgono in dimensione n qualunque. Scriviamo $n = p + q$, $p, q \geq 1$, e denotiamo la variabile di $\mathbf{R}^n$ con (x,y) dove $x \in \mathbf{R}^p$, $y \in \mathbf{R}^q$. Sia A un misurabile di $\mathbf{R}^n$ e denotiamo con B la sua proiezione su $\mathbf{R}^p$. Poi, per ogni $x \in B$, denotiamo con A_x la sezione q-dimensionale di A
$$A_x = \{y \in \mathbf{R}^q : (x,y) \in A\}.$$
Per $f(x,y)$ sommabile su A vale
$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_B \int_{A_x} f(x,y)dydx$$
sotto l'ipotesi che anche gli integrali a secondo membro
$$F(x) = \int_{A_x} f(x,y)dy, \quad \int_B F(x)dx,$$

di rispettive dimensioni q e p, siano integrali di funzioni sommabili.

3. Cambiamenti di variabile

•Cambiamenti di variabile in $\mathbf{R}^n$

Consideriamo il cubo unitario n-dimensionale $Q = [0,1] \times \ldots \times [0,1]$,

$$Q = \{(u_1, \ldots, u_n) : 0 \leq u_j \leq 1, j = 1, \ldots, n\},$$

e sottoponiamolo ad una trasformazione lineare $x = \varphi(u)$

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + & \ldots & +a_{1n}u_n \\ x_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + & \ldots & +a_{2n}u_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n = a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + & \ldots & +a_{nn}u_n \end{cases}$$

rappresentata dalla matrice non singolare $A = (a_{ij})$. Una delle interpretazioni notevoli dei determinanti è che la misura dell'insieme immagine $\varphi(Q)$ vale

$$\mu_n(\varphi(Q)) = |\det A|.$$

Da questo segue che per ogni $B \subset \mathbf{R}^n$ misurabile anche $\varphi(B)$ è misurabile con misura

$$\mu_n(\varphi(B)) = |\det A| \mu_n(B).$$

Questa uguaglianza si scrive anche

$$\int_{\varphi(B)} 1 dx = \int_B 1 \cdot |\det A| du.$$

Si dimostra che al posto della funzione 1 può comparire una funzione $f(x)$ sommabile su $\varphi(B)$: la funzione composta $f(\varphi(u))$ è sommabile in du su B e vale

$$\int_{\varphi(B)} f(x) dx = \int_B f(\varphi(u)) |\det A| du.$$

Questa formula di cambiamento di variabile lineare si può generalizzare a cambiamenti di variabile $x = \varphi(u)$ di classe C^1. Il valore assoluto del determinante $|\det A|$ viene sostituito dal valore assoluto del determinante jacobiano $|\det J_\varphi(u)|$ in quanto ogni trasformazione differenziabile è localmente approssimata da una trasformazione affine (lineare+traslazione) rappresentata dalla matrice jacobiana.

Teorema 3.1. (Cambiamento di variabile) *Sia B un insieme aperto e misurabile di $\mathbf{R}^n$ e sia $\varphi : B \to \varphi(B)$,*

$$x = \varphi(u),$$

una funzione di classe C^1 invertibile e tale che $\det J_\varphi(u) \neq 0$ *per ogni* $u \in B$.
Allora, anche l'insieme $\varphi(B)$ è misurabile con misura

$$\mu_n(\varphi(B)) = \int_B |\det J_\varphi(u)|\, du.$$

Sia poi $f(x)$ una funzione sommabile su $\varphi(B)$.
Allora, la funzione $f(\varphi(u))$ è sommabile su B con

$$\int_{\varphi(B)} f(x)dx = \int_B f(\varphi(u))\, |\det J_\varphi(u)|\, du.$$

Poichè gli insiemi di misura nulla sono neutri nella teoria dell'integrale, è sufficiente che φ, invece di essere iniettiva su tutto B, abbia una restrizione iniettiva ad un sottoinsieme $E \subset B$ con $\mu_n(B \setminus E) = 0$. Per lo stesso motivo, è sufficiente che la condizione $\det J_\varphi(u) \neq 0$ valga quasi ovunque in B invece che ovunque. Questa osservazione è importante nell'utilizzo della coordinate polari, sferiche cilindriche.

•Coordinate polari nel piano

Calcoliamo il determinante jacobiano del cambiamento di variabile in coordinate polari

$$x = r\cos\vartheta,\ \ y = r\sin\vartheta.$$

Abbiamo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r$$

Le condizioni di invertibiltà e di jacobiano non nullo portano alle limitazioni $r > 0$, invece di $r \geq 0$, e $0 < \vartheta < 2\pi$, invece di $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Tuttavia, questo non dà alcuna limitazione effettiva nel calcolo integrale perchè si sono esclusi gli insiemi (rette) di area nulla nel piano r, ϑ dati da $r = 0$, $\vartheta = 0$, $\vartheta = 2\pi$. La formula di cambiamento di variabile diventa

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_B f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\cdot r\ drd\vartheta,$$

con B l'insieme corrispondente ad A in coordinate r, ϑ.

Chiaramente il passaggio in coordinate polari è vantaggioso quando l'insieme A e/o la funzione f hanno buone proprietà (simmetria, stabilità di forma o di valori) rispetto alle rotazioni.

Esempio 3.2. Determiniamo il baricentro geometrico $G = (x_G, y_G)$ del quarto di cerchio

$$A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

L'insieme B corrispondente ad A in coordinate polari è

$$B = \{(r,\vartheta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2\}.$$

Abbiamo quindi

$$x_G = \frac{1}{\mu_2(A)} \int_A x dxdy = \frac{4}{\pi} \int_A x dxdy = \frac{4}{\pi} \int_B r\cos\vartheta \cdot r \; drd\vartheta =$$

$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 r^2 \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta d\vartheta dr = \frac{4}{3\pi} [\sin\vartheta]_0^{\pi/2} [r^3]_0^1 = \frac{4}{3\pi}.$$

Per motivi di simmetria si ha poi $y_G = x_G$, come del resto si verifica agevolmente:

$$y_G = \frac{1}{\mu_2(A)} \int_A y dxdy = \frac{4}{\pi} \int_A y dxdy = \frac{4}{\pi} \int_B r\sin\vartheta \cdot r \; drd\vartheta =$$

$$\frac{4}{\pi} \int_0^1 r^2 \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta d\vartheta dr = \frac{4}{3\pi} [-\cos\vartheta]_0^{\pi/2} [r^3]_0^1 = \frac{4}{3\pi}.$$

Il baricentro è

$$G = (4/3\pi, 4/3\pi).$$

Vediamo ora due importanti applicazioni delle coordinate polari.

- Sommabilità della funzione $1/(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha$

Possiamo ora dimostrare nel caso $n = 2$ quanto già anticipato sull'integrale della funzione di riferimento $1/\|x\|^\alpha$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Sia

$$A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}, \;\; f(x,y) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha},$$

e calcoliamo

$$\int_A f(x,y) dxdy.$$

In coordinate polari, A si trasforma in

$$B = \{(r,\vartheta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\},$$

quindi

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_B \frac{1}{r^\alpha} \cdot r \; drd\vartheta = \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} d\vartheta dr = 2\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr$$

dove l'ultimo integrale è finito se e solo se $\alpha - 1 < 1$ quindi se e solo se $\alpha < 2$. Abbiamo ottenuto

$$f \text{ sommabile su } A \Longleftrightarrow \alpha < 2.$$

In maniera del tutto analoga, ricordando il comportamento dell'integrale $\displaystyle\int_R^{+\infty} \frac{1}{r^{\alpha-1}} dr$, per $x^2 + y^2 > R^2$, si ottiene

$$f \text{ sommabile su } \mathbf{R}^2 \setminus A \Longleftrightarrow \alpha > 2.$$

- Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Con l'utilizzo delle coordinate polari e delle formule di riduzione applicate all'integrale doppio

$$J = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

si ottiene il valore dell'integrale semplice

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

non deducibile dal calcolo elementare di primitive. Le formule di riduzione danno un legame tra I e J:

$$J = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dydx = I^2.$$

Il passaggio a coordinate polari consente di calcolare J:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\vartheta dr = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi[-e^{-r^2}]_0^{+\infty} = \pi.$$

Da $J = I^2$ si ha dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

•Coordinate cilindriche nello spazio, solidi di rotazione

Calcoliamo il determinante jacobiano del cambiamento di variabile in coordinate cilindriche

$$x = r\cos\vartheta, \;\; y = r\sin\vartheta, \;\; z = z.$$

Abbiamo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \vartheta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Le condizioni di invertibiltà e di jacobiano non nullo portano alle limitazioni $r > 0$, invece di $r \geq 0$, e $0 < \vartheta < 2\pi$, invece di $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. Tuttavia, questo non dà alcuna limitazione effettiva nel calcolo integrale perchè si sono esclusi gli insiemi (piani) di volume nullo nello spazio r, ϑ, z dati da $r = 0$, $\vartheta = 0$, $\vartheta = 2\pi$. La formula di cambiamento di variabile diventa

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_B f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z)\cdot r\ drd\vartheta dz,$$

con B l'insieme corrispondente ad A in coordinate r, ϑ, z.

Il passaggio in coordinate polari è vantaggioso quando l'insieme A e/o la funzione f hanno buone proprietà (simmetria, stabilità di forma o di valori) rispetto alle rotazioni assiali. L'asse di rotazione viene fatto coincidere con l'asse z.

Esempio 3.3. Calcoliamo

$$\int_A \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxddydz,\ \ A = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 1, \sqrt{x^2+y^2} \leq z\}.$$

In coordinate cilindriche

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \Longleftrightarrow 0 \leq r \leq z.$$

Il solido A corrisponde a

$$B = \{(r,\vartheta,z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq z, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

da cui si capisce che A è di rotazione e che la figura piana che genera A attraverso una rotazione completa attorno all'asse z è il triangolo

$$C = \{(r,z) : 0 \leq z \leq 1, 0 \leq r \leq z\}.$$

Dal momento che la funzione da integrare non dipende da ϑ, si ha

$$\int_A \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxddydz = \int_B \frac{z}{r}\cdot rdrd\vartheta dz = 2\pi \int_C zdrdz.$$

A questo punto si applicano le formule di riduzione:

$$\int_C z dr dz = \int_0^1 z \int_0^z dr dz = \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}.$$

Concludendo,

$$\int_A \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz = \frac{2\pi}{3}.$$

Con le coordinate cilindriche, si giustifica agevolmente il seguente risultato sui volumi di rotazione:

Teorema 3.4. (Guldino) *Sia A il solido di rotazione generato dalla figura piana C. Il volume di A vale il prodotto tra l'area di C e la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro di C durante la rotazione.*

Dimostrazione. In coordinate cilindriche A corrisponde a

$$B = \{(r, \vartheta, z) : (r, z) \in C, 0 \le \vartheta \le 2\pi\}$$

quindi

$$\mu_3(A) = \int_A 1 dx dy dz = \int_B r dr d\vartheta dz = 2\pi \int_C r dr dz.$$

Moltiplicando e dividendo per l'area di C, e denotando con $G = (r_G, z_G)$ il baricentro di C, si ha

$$\mu_3(A) = \mu_2(C) \cdot 2\pi \frac{1}{\mu_2(C)} \int_C r dr dz = \mu_2(C) \cdot 2\pi r_G$$

dove l'ultimo prodotto è proprio tra l'area di C e la lunghezza della circonferenza descritta da G durante la rotazione.

□

•Coordinate sferiche nello spazio

Calcoliamo il determinante jacobiano del cambiamento di variabile in coordinate sferiche

$$x = r\cos\vartheta\sin\varphi,\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\ z = r\cos\varphi.$$

Abbiamo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -r^2\sin\varphi\cos^2\varphi - r^2\sin^3\varphi = -r^2\sin\varphi$$

sviluppando secondo l'ultima riga. Tenendo conto che $\sin\varphi \geq 0$ in quanto $0 \leq \varphi \leq \pi$, il valore assoluto del determinate jacobiano è $r^2\sin\varphi$. Quindi $dxdydz$ va cambiato in

$$r^2\sin\varphi dr d\vartheta d\varphi.$$

Le condizioni di invertibiltà e di jacobiano non nullo portano alle limitazioni $r > 0$, invece di $r \geq 0$, $0 < \vartheta < 2\pi$, invece di $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, e $0 < \varphi < \pi$ invece di $0 \leq \varphi \leq \pi$. Tuttavia, questo non dà alcuna limitazione effettiva nel calcolo integrale perchè si sono esclusi gli insiemi (piani) di volume nullo nello spazio r, ϑ, φ dati da $r = 0$, $\vartheta = 0$, $\vartheta = 2\pi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. La formula di cambiamento di variabile diventa

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz =$$
$$\int_B f(r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\; dr d\vartheta d\varphi,$$

con B l'insieme corrispondente ad A in coordinate r, ϑ, φ.

Chiaramente il passaggio in coordinate sferiche è vantaggioso quando l'insieme A e/o la funzione f hanno buone proprietà (simmetria, stabilità di forma o di valori) rispetto alle rotazioni centrali.

Esempio 3.5. Calcoliamo

$$\int_A \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz, \quad A = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, x \geq 0\}.$$

A è l'intersezione di una sfera con un semicono. In coordinate sferiche

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq r \leq 1$$

e

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2} \Longleftrightarrow r\cos\varphi \geq r\sin\varphi \Longleftrightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Infine

$$x \geq 0 \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

dove si è scelto, in maniera equivalente, di far variare ϑ in $[-\pi, \pi]$ invece che in $[0, 2\pi]$ per leggere più agevolmente la condizione $\cos\vartheta \geq 0$. In coordinate sferiche, A corrisponde a

$$B = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/4, -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2\}.$$

Dunque

$$\int_A \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \frac{r\cos\vartheta\sin\varphi}{r\sin\varphi} \cdot r^2 \sin\varphi d\varphi d\vartheta dr =$$

$$\int_0^1 r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \int_0^{\pi/4} \sin\varphi d\varphi d\vartheta dr = \frac{1}{3}[r^3]_0^1 \cdot [\sin\vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot [-\cos\varphi]_0^{\pi/4} =$$

$$\frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Concludiamo con una importante applicazione delle coordinate sferiche.

- Sommabilità della funzione $1/(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha$

Possiamo ora dimostrare anche nel caso $n = 3$ quanto già anticipato sull'integrale della funzione di riferimento $1/\|x\|^\alpha$, $x \in \mathbf{R}^n$.

Sia

$$A = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}, \ f(x,y,z) = \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha},$$

e calcoliamo

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz.$$

In coordinate sferiche, A si trasforma in

$$B = \{(r,\vartheta,\varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\},$$

quindi

$$\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_B \frac{1}{r^\alpha} \cdot r^2 \sin\varphi \ drd\vartheta d\varphi =$$

$$\int_0^R \frac{1}{r^{\alpha-2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi d\vartheta dr = 4\pi \int_0^R \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr$$

dove l'ultimo integrale è finito se e solo se $\alpha - 2 < 1$ quindi se e solo se $\alpha < 3$. Abbiamo ottenuto

$$f \text{ sommabile su } A \iff \alpha < 3.$$

In maniera del tutto analoga, ricordando il comportamento dell'integrale $\displaystyle\int_R^{+\infty} \frac{1}{r^{\alpha-2}} dr$, per $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$, si ottiene

$$f \text{ sommabile su } \mathbf{R}^3 \setminus A \iff \alpha > 3.$$