ANALISI MATEMATICA L-B, 2005-06. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Equazioni del primo ordine

• **Introduzione**

Una equazione differenziale del primo ordine nella funzione incognita $y(x)$ è una equazione

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

con $f(x, y)$ una assegnata funzione continua di due variabili, $f : A \to \mathbf{R}$, A insieme aperto non vuoto di $\mathbf{R}^2$.
Una **soluzione** è una funzione $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^1$ della variabile x, definita in un intervallo reale I tale che $(x, y(x)) \in A$ per ogni $x \in I$ e tale che $y'(x) = f(x, y(x))$ per ogni $x \in I$. Si può dimostrare che l'ipotesi di continuità della funzione $f(x, y)$ è sufficiente per l'esistenza di infinite soluzioni. Una soluzione si dice **massimale** se è definita in un intervallo I tale che non esiste una soluzione prolungamento di $y(x)$ ad un intervallo J che contiene I strettamente. Salvo diverso avviso, nominando soluzioni intenderemo soluzioni massimali. Spesso scriveremo

$$y' = f(x, y)$$

sottintendendo la variabile x in $y(x)$ ed $y'(x)$. Una rappresentazione di tutte le soluzioni viene chiamata **integrale generale** dell'equazione.

Esempio 1.1. Il più semplice esempio di equazione differenziale è dato attraverso funzioni continue f dipendenti solo da $x \in I$, I intervallo reale:

$$y' = f(x).$$

Si tratta del problema già risolto nel primo corso di Analisi delle primitive di funzioni continue. Fissato un qualunque $x_0 \in I$, tutte le infinite soluzioni sono rappresentate da

$$y(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

con $c \in \mathbf{R}$ costante arbitraria, per il teorema fondamentale del calcolo. Se si considera la **condizione iniziale** $y(x_0) = y_0$ con y_0 valore assegnato, allora la costante c viene univocamente determinata: $c = y_0$. Questa situazione sarà quella generale, sotto opportune ipotesi di regolarità di $f(x, y)$, le soluzioni di una equazione del primo ordine sono infinite, dipendenti da un parametro reale c. Assegnando una condizione iniziale, si determina una unica soluzione massimale che la soddisfa determinando univocamente c.

Esempio 1.2. Il modello matematico del decadimento radioattivo è fornito da una equazione differenziale nella variabile $y(x)$ numero di isotopi radioattivi al tempo x. Infatti, sperimentalmente si osserva che la variazione relativa (rapporto incrementale) nell'intervallo di tempo $[x, x + \Delta x]$ è proporzionale ad $y(x)$:

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = -\alpha y(x),$$

con $\alpha > 0$ una costante dipendente dal materiale. Per $\Delta x \to 0$ si ottiene l'equazione

$$y' = -\alpha y.$$

Moltiplicando per $e^{\alpha x}$ l'equazione

$$y' + \alpha y = 0,$$

si ottiene

$$y'(x)e^{\alpha x} + \alpha y(x)e^{\alpha x} = 0$$

che possiamo scrivere nella forma

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{\alpha x}\right) = 0.$$

Avendo derivata nulla su un intervallo, la funzione $y(x)e^{\alpha x}$ è costante:

$$y(x)e^{\alpha x} = c.$$

Data una soluzione, necessariamente

$$y(x) = ce^{-\alpha x}.$$

Viceversa, ogni funzione di questo tipo è una soluzione. Ponendo $x = 0$ si ottiene $c = y(0)$, la quantità iniziale di materiale radioattivo. Conoscendo $y(0)$ e misurando $y(x)$, si può determinare il tempo trascorso x:

$$x = \frac{1}{\alpha} \log \frac{y(0)}{y(x)}.$$

Esempio 1.3. L'equazione

$$y' = -2xy^2$$

ha per soluzione la funzione nulla. Per $y(x) \neq 0$ per $x \in I$, si ha

$$-\frac{y'(x)}{y^2} = 2x$$

che si può scrivere

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y(x)}\right) = 2x$$

da cui

$$\frac{1}{y(x)} = \int 2x dx = x^2 + c.$$

Ne segue che le soluzioni non nulle si esprimono

$$y = \frac{1}{x^2 + c}.$$

Con $c > 0$ la soluzione è definita su tutto $\mathbf{R}$. Per $c \leq 0$, si hanno soluzioni definite negli intervalli massimali che non contengono i punti $\pm\sqrt{-c}$. Una condizione iniziale porta ad una unica soluzione massimale. Ad esempio $y(0) = -1$ vale se e solo se

$$-1 = \frac{1}{0^2 + c},$$

cioè se e solo se

$$c = -1.$$

La soluzione

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

che soddisfa tale condizione iniziale, è definita nell'intervallo massimale che contiene il punto iniziale $x = 0$ e dove l'espressione trovata definisce una funzione $\mathcal{C}^1$. Tale intervallo è $(-1, 1)$.

• **Problema di Cauchy**

Un problema

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

costituito da una equazione differenziale e da una condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, si dice **problema di Cauchy**. Affinchè Il problema abbia significato, si prendono il punto iniziale x_0 ed il valore iniziale y_0 tali che (x_0, y_0) appartenga al dominio di $f(x, y)$.

Teorema 1.4. (Esistenza e unicità) *Se la funzione $f(x, y)$ è continua con derivata $f_y(x, y)$ continua, allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una unica soluzione massimale.

Cenno di dimostrazione. Diamo lo schema della dimostrazione perchè fornisce un modo per approssimare la soluzione. Per prima cosa, dal teorema fondamentale del calcolo, l'esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy equivale alla esistenza di una unica soluzione continua della equazione integrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Si osservi che una soluzione continua è in realtà di classe $\mathcal{C}^1$.
Per l'unicità, consideriamo due soluzioni y_a, y_b nell'intervallo $[x_0, x_0+\delta]$, $\delta > 0$, e valutiamone la differenza valutando

$$\|y_a - y_b\| = \sup_{x_0 \leq x \leq x_0+\delta} |y_a(x) - y_b(x)|.$$

Abbiamo

$$|y_a(x) - y_b(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t, y_a(t)) - f(t, y_b(t))\right) dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} |f(t, y_a(t)) - f(t, y_b(t))| \, dt = \int_{x_0}^{x_0+\delta} |f_y(t, c)| \cdot |y_a(t) - y_b(t)| dt$$

con c tra $y_a(t)$ e $y_b(t)$ per il teorema del valor medio di Lagrange. La funzione f_y è continua, quindi è limitata sugli insiemi limitati e chiusi. Esiste una contante $L > 0$ tale che $|f_y(t, c)| \leq L$ per (t, c) in un rettangolo limitato e chiuso centrato in (x_0, y_0). Ne segue

$$|y_a(x) - y_b(x)| \leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} L|y_a(t) - y_b(t)|dt$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_0+\delta} L\|y_a - y_b\|dt = L\delta\|y_a - y_b\|$$

per tutti gli $x \in [x_0, x_0 + \delta]$, quindi passando all'estremo superiore anche a primo membro,

$$\|y_a - y_b\| \leq L\delta\|y_a - y_b\|.$$

Se si stringe l'intervallo in maniera che

$$L\delta < 1,$$

allora necessariamente

$$\|y_a - y_b\| = 0$$

che significa

$$y_a(x) = y_b(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \delta.$$

Allo stesso modo si prova che le due soluzioni devono coincidere nell'intervallo $[x_0-\delta, x_0]$. Si può poi ragionare alla stessa maniera sostituendo x_0 con $x_0 \pm \delta$ e y_0 con $y(x_0 \pm \delta)$ e provare che la soluzione massimale, se esiste, è unica.

Per provare l'esistenza di una soluzione dell'equazione integrale, si definisce la successione di funzioni $y_n(x)$, $n \geq 0$, data da

$$y_0(x) = y_0,$$

funzione costante, e

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \ n \geq 0.$$

Se $y_n(x)$ ha per limite una funzione continua $y(x)$, allora non è difficile dimostrare che anche

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \to \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

quindi $y(x)$ è una soluzione dell'equazione integrale passando al limite in entrambi i membri dell'uguaglianza che definisce y_{n+1}.

Per provare che y_n converge, si scrive y_n come serie telescopica

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1})$$

e si prova che tale serie

$$y_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(y_{k+1}(x) - y_k(x))$$

converge per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$. Ragionando come fatto sopra con $y_a - y_b$, si ottiene

$$\|y_{k+1} - y_k\| \leq L\delta \|y_k - y_{k-1}\|, \quad k \geq 0,$$

da cui per induzione

$$\|y_{k+1} - y_k\| \leq (L\delta)^k \|y_1 - y_0\|.$$

La serie che rappresenta $y_n(x)$ converge per ogni $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ per confronto con la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty}(L\delta)^k, \quad 0 < L\delta < 1.$$

Si prova poi che la somma $y(x)$ è una funzione continua, quindi effettivamente una soluzione dell'equazione integrale, e la si prolunga allo stesso modo fin quando possibile, ottenendo una soluzione massimale.

$\square$

Osservazione 1.5. Dal cenno di dimostrazione che abbiamo dato, è chiaro che l'ipotesi f_y continua può essere sostituita dalla condizione più debole che per ogni sottinsieme limitato e chiuso Q del dominio di f esista $L > 0$ tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (x, y_1), (x, y_2) \in Q.$$

Una condizione di questo tipo si dice **condizione di Lipschitz**.

Esempio 1.6. Esplicitiamo le funzioni y_n nel caso del problema di Cauchy

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

La funzione y_0 è la funzione costante 1, poi si ha

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)dt, \quad n \geq 0.$$

Dunque

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2}$$

$$\vdots$$

Per induzione, si ottiene

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

che converge alla unica soluzione massimale, definita su tutto $\mathbf{R}$,

$$y = e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

• **Un esempio di non unicità**

Il problema di Cauchy

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

non ha una unica soluzione. Infatti le funzioni

$$y_1(x) = 0,$$

funzione costante nulla, e

$$y_2(x) = x^3$$

sono entrambe soluzioni, come subito si verifica. In realtà le soluzioni sono infinite: tutte le funzioni del tipo

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & x < a \\ \\ 0 & a \le x \le b \\ \\ (x-b)^3 & x > b \end{cases}$$

con $a \le 0 \le b$, sono soluzioni. Si noti che la funzione $\sqrt[3]{y^2}$ non è di classe $\mathcal{C}^1$ in alcun intorno del valore iniziale $y_0 = 0$.

La sola continuità del secondo membro assicura l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy ma, in generale, non l'unicità. Le soluzioni assumono valori compresi tra quelli assunti da due soluzioni particolari, dette integrale inferiore ed integrale superiore. Quando l'integrale inferiore e superiore coincidono, si ha unicità. Nell'esempio precedente, l'integrale inferiore y_i e superiore y_s, sono

$$y_i(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}, \quad y_s(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \\ x^3 & x > 0 \end{cases}.$$

• Equazioni lineari del primo ordine

Solo per alcune classi particolari di equazioni, si conosce un procedimento risolutivo che porta ad una rappresentazione analitica delle soluzioni. La prima di queste classi che vediamo, è quella della equazioni lineari del primo ordine

$$y' = a(x)y + b(x),$$

con $a, b : I \to \mathbf{R}$ funzioni continue in I. La funzione $f = a(x)y + b(x)$ è continua così come lo è $f_y = a(x)$: sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy.

Scritta l'equazione nella forma

$$y' - a(x)y = b(x)$$

e denotata

$$Ly = y' - a(x)y$$

l'operazione sulla funzione y di classe $\mathcal{C}^1$, si ha che L è lineare:

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2$$

per ogni coppia di costanti c_1, c_2 e di funzioni y_1, y_2. Questo giustifica il nome della classe di equazioni.

Sia

$$A(x) = \int a(x)dx$$

una fissata primitiva di $a(x)$ e moltiplichiamo l'uguaglianza $y' - a(x)y = b(x)$ per la funzione $e^{-A(x)}$. L'uguaglianza

$$y'(x)e^{-A(x)} - a(x)e^{-A(x)}y(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

che si ottiene, si può scrivere

$$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{-A(x)}\right) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Indicata con

$$\int b(x)e^{-A(x)}dx$$

una fissata primitiva della funzione nota a secondo membro, abbiamo

$$y(x)e^{-A(x)} = \int b(x)e^{-A(x)}dx + c$$

con c costante reale arbitraria, da cui la formula dell'integrale generale

$$y = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}dx, \quad x \in I.$$

Una condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ porta a determinare univocamente c, determinando così l'unica soluzione del problema di Cauchy.

Osservazione 1.7. Tutte le soluzioni sono **globali**, cioè sono definite in tutto l'intervallo I dove sono definiti e continui i coefficienti $a(x), b(x)$. Questa proprietà discende dalla linearità dell'equazione.

Osservazione 1.8. L'integrale generale della equazione **omogenea**

$$y' = a(x)y$$

è

$$y = ce^{A(x)},$$

mentre $e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}dx$ è una particolare soluzione dell'equazione completa (quella con $c = 0$). L'integrale generale della equazione completa ha quindi la struttura

(integrale generale omogenea)+(soluzione particolare).

L'integrale generale dell'omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione 1 di funzioni, generato dalla funzione $e^{A(x)}$. La dimensione è pari all'ordine dell'equazione. L'insieme delle soluzioni dell'equazione completa è quindi uno spazio affine (spazio vettoriale traslato). Ritroveremo questa struttura per equazioni lineari di ogni ordine.

Esempio 1.9. Illustriamo la formula risolutiva nel problema di Cauchy

$$y' = \frac{y}{x} + x,\ y(-1) = 0.$$

Abbiamo $a(x) = 1/x, b(x) = x$, $I = (-\infty, 0)$ in quanto I è il più grande intervallo dove sono definiti e continui i coefficienti e che contiene il punto iniziale. Come funzione $A(x) = \int a(x)dx$, possiamo prendere

$$A(x) = \log|x| = \log(-x)$$

tenendo conto di $x < 0$. La formula risolutiva diventa

$$y = ce^{\log(-x)} + e^{\log(-x)} \int xe^{-\log(-x)}$$

cioè

$$y = -cx - x \int x \cdot \frac{1}{-x} dx,$$

$$y = -cx + x \int 1dx,$$

$$y = -cx + x^2.$$

Visto che la costante c è arbitraria, altrettanto è $-c$. Possiamo riscrivere c in luogo di $-c$ per non complicare inutilmente la scrittura e presentare l'integrale generale nella forma

$$y = cx + x^2, \quad x < 0.$$

La correttezza si può verificare direttamente: il primo membro

$$y' = c + 2x$$

ed il secondo

$$\frac{y}{x} + x = \frac{cx + x^2}{x} + x = c + 2x$$

sono effettivamente identici.

Imponendo la condizione iniziale $y(-1) = 0$ nell'integrale generale, si ottiene

$$0 = c \cdot (-1) + (-1)^2$$

da cui

$$c = 1.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y = x + x^2, \quad x < 0.$$

• **Equazioni del secondo ordine riconducibili ad equazioni lineari del primo ordine**
Una equazione del secondo ordine del tipo

$$y'' = a(x)y' + b(x)$$

con $a, b : I \to \mathbf{R}$ continue, si riconduce ad una equazione lineare del primo ordine

$$z' = a(x)z + b(x)$$

nell'incognita

$$z = y'.$$

Trovato l'integrale generale in $z(x)$ dipendente da una costante arbitraria c_1, si passa alle primitive

$$y(x) = \int z(x)dx + c_2.$$

L'integrale generale in $y(x)$ viene a dipendere dalle due costanti arbitrarie c_1, c_2. Esse vengono univocamente determinate da condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

Il problema di Cauchy del secondo ordine

$$y'' = a(x)y' + b(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$$

ha una unica soluzione definita su tutto I.

Esempio 1.10. Risolviamo il problema di Cauchy

$$y'' = y' + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Posto $z' = y$ nell'equazione, si ottiene

$$z' = z + 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Come primitiva del coefficiente $a(x) = 1$, prendiamo $A(x) = x$ ed applichiamo la formula risolutiva

$$z = c_1e^x + e^x \int 1 \cdot e^{-x}dx = c_1e^x + e^x \cdot (-e^{-x}) = c_1e^x - 1.$$

A questo punto, si può determinare subito la costante c_1 dalla condizione iniziale $z(0) = y'(0) = 0$, poi integrare $z = \int y(x)dx + c_2$ e determinare la costante di integrazione c_2 con la condizione iniziale $y(0) = 0$. Se invece vogliamo dare anche l'integrale generale dell'equazione assegnata, integriamo con c_1 arbitraria:

$$z = \int y(x)dx = \int (c_1e^x - 1)dx = c_1e^x - x + c_2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Imponendo nell'integrale generale le condizioni iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 0$, si ottiene

$$c_1 + c_2 = 0, \; c_1 - 1 = 0,$$

da cui

$$c_1 = 1, \; c_2 = -1.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y = e^x - x - 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

• **Equazioni di Bernoulli**

Un altro tipo di equazioni riconducibili ad equazioni lineari del primo ordine, è quello di **Bernoulli**

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha,$$

$a, b : I \to \mathbf{R}$ continue, con $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ altrimenti l'equazione è già lineare. Nel caso $\alpha > 0$, una soluzione è la funzione identicamente nulla. Supponiamo $y \neq 0$ e moltiplichiamo per $y^{-\alpha}$. L'equazione

$$y'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$

ottenuta, si scrive

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{d}{dx}(y^{1-\alpha}) = a(x)y^{1-\alpha} + b(x).$$

Ci siamo ricondotti alla equazione lineare

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$$

nell'incognita

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Risolta questa,

$$y = z^{1/(1-\alpha)}$$

fornisce l'integrale generale dell'equazione data. Le funzioni $z(x)$ sono definite sull'intero intervallo I ma questo non è vero in generale per $y = z^{1/(1-\alpha)}$. Le soluzioni y sono definite in intervalli dove $z^{1/(1-\alpha)}$ ha significato e definisce funzioni di classe $\mathcal{C}^1$.

Esempio 1.11. Determiniamo l'integrale generale dell'equazione

$$y' = y + xy^2.$$

I coefficienti $a(x) = 1$ e $b(x) = x$ sono definiti e continui su tutto $\mathbf{R}$. Una soluzione è la funzione nulla su tutto $\mathbf{R}$, le altre si trovano dividendo per y^2. Si ottiene

$$y'y^{-2} = y^{-1} + x,$$

quindi

$$-\frac{d}{dx}y^{-1} = y^{-1} + x.$$

Ponendo

$$z = y^{-1},$$

ci siamo ricondotti a

$$z' = -z - x.$$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine, si ha

$$z = ce^{-x} - e^{-x} \int xe^x dx$$

da cui

$$z = ce^{-x} - e^{-x}(xe^x - e^x) = ce^{-x} - x + 1.$$

Da $z = y^{-1}$ abbiamo $y = z^{-1}$, quindi l'integrale generale della equazione data è

$$y = \frac{1}{ce^{-x} - x + 1} \vee y = 0.$$

Ciascuna soluzione non nulla è definita in un intervallo massimale dove $ce^{-x} - x + 1 \neq 0$.

• **Equazioni a variabili separabili**

Una equazione del tipo

$$y' = h(y)g(x),$$

con h, g funzioni continue delle proprie variabili, si dice a variabili separabili. Nel caso che $h'(y)$ sia anch'essa definita e continua, la funzione $f(x, y) = h(y)g(x)$ ha derivata continua $f_y = h'(y)g(x)$, quindi soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy

$$y' = h(y)g(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Nel risolvere questo problema, distinguiamo i casi $h(y_0) = 0$ e $h(y_0) \neq 0$.

Per $h(y_0) = 0$. la funzione **costante**

$$y(x) = y_0$$

è una soluzione. Infatti il primo membro dell'equazione $y'(x)$ è identicamente nullo, così come il secondo $h(y(x))g(x) = h(y_0)g(x) = 0$. Ovviamente anche la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ è soddisfatta, qualunque sia x_0.

Se $h'(y)$ è definita e continua, allora questa è l'unica soluzione. In caso contrario, ci possono essere altre soluzioni, come visto nell'esempio

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Per $h(y_0) \neq 0$, la sola continuità di $h(y)$ e $g(x)$ è sufficiente ad assicurare esistenza ed unicità per questo tipo di problema di Cauchy. Infatti, da $h(y(x_0)) = h(y_0) \neq 0$, segue $h(y(x)) \neq 0$ per tutti gli x in un intorno di x_0. Dividendo l'equazione per $h(y(x))$, otteniamo

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x).$$

Consideriamo una primitiva fissata $H(y) = \int 1/h(y)dy$ della funzione $1/h(y)$ in un intorno di y_0. L'equazione si scrive

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = g(x)$$

da cui

$$H(y) = G(x) + c$$

con $G(x) = \int g(x)dx$ una primitiva fissata. Si lascia c costante arbitraria se si devono rappresentare soluzioni non costanti dell'integrale generale dell'equazione, mentre, per risolvre il problema di Cauchy, si impone la condizione iniziale ottenendo per c il valore

$$c_0 = H(y_0) - G(x_0).$$

La funzione $H(y)$ ha derivata continua e non nulla $H'(y) = 1/h(y)$ quindi è strettamente monotona nell'intervallo di definizione, perciò invertibile. L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y = H^{-1}(G(x) + c_0)$$

definita nel più grande intervallo contenente x_0 dove tale espressione definisce una funzione di classe $\mathcal{C}^1$.

Diamo un **procedimento formale** per ricordare il modo precedente di determinare le soluzioni non costanti. Scritta l'equazione nella forma

$$\frac{dy}{dx} = h(y)g(x),$$

si divide per $h(y)$ e si *moltiplica* per dx (questo non è un passaggio algebrico ma solo un passaggio simbolico), ottenendo l'uguaglianza formale

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx.$$

Ora si integra ciascun membro rispetto alla propria variabile arrivando alla rappresentazione sopra ottenuta

$$H(y) = G(x) + c$$

delle soluzioni.

Esempio 1.12. Risolviamo il problema

$$y' = \frac{x(y^2-1)}{2y}, \; y(0) = y_0$$

nei due casi $y_0 = -1$ e $y_0 = -1/2$.

Si tratta di una equazione a variabili separabili $y' = h(y)g(x)$ con, ad esempio, $h(y) = (y^2-1)/2y$, $g(x) = x$. Dal momento che $h'(y)$ è definita e continua per tutti gli $y \neq 0$, ogni problema di Cauchy per questa equazione ha una unica soluzione.

L'equazione è anche di Bernoulli in quanto si può scrivere

$$y' = \frac{x}{2}y - \frac{x}{2}y^{-1}.$$

Lasciamo questo secondo metodo risolutivo al lettore.

Tornando alle variabili separabili, nel caso $y_0 = -1$, si ha $h(y_0) = 0$ quindi il problema ha per soluzione la funzione costante $y(x) = -1$.Per la regolarità vista di $h(y)$, questa è l'unica soluzione. Il suo dominio è $\mathbf{R}$ visto che la funzione $g(x) = x$ è definita e continua ovunque.

Nel caso $y_0 = -1/2$, si ha $h(y_0) \neq 0$. Si separano le variabili ottenendo

$$\int \frac{2y}{y^2-1}dy = \int xdx,$$

da cui

$$\log|y^2-1| = \frac{x^2}{2} + c.$$

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$c = \log\left|\frac{1}{4} - 1\right| = \log\left|-\frac{3}{4}\right| = \log\frac{3}{4}.$$

Il segno di y^2-1 è negativo nel punto iniziale, quindi permane negativo in tutto il dominio massimale. Questo porta a

$$\log(1-y^2) = \frac{x^2}{2} + \log\frac{3}{4}$$

da cui

$$1 - y^2 = e^{x^2/2+\log 3/4} = e^{x^2/2} \cdot e^{\log 3/4} = \frac{3}{4}e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Infine da

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4}e^{\frac{x^2}{2}}$$

si scrive
$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{\frac{x^2}{2}}}.$$
Queste sono due soluzioni dell'equazione ma **una sola** soddisfa $y(0) = -1/2$ ed è
$$y = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{\frac{x^2}{2}}}$$
(l'altra è la soluzione del problema con condizione iniziale $y(0)=1/2$). Il suo dominio è il più grande intervallo contenente il punto iniziale $x_0 = 0$ dove l'espressione ottenuta definisce una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ che non assume valore $y = 0$, valore che non appartiene al dominio della funzione $h(y) = (y^2 - 1)/2y$. In ogni caso, per argomento nullo della radice non si avrebbe comunque una funzione derivabile. Questo porta a
$$1 - \frac{3}{4}e^{\frac{x^2}{2}} > 0,$$
cioè
$$e^{\frac{x^2}{2}} < \frac{4}{3}$$
che equivale a
$$x^2 < \log\frac{16}{9}.$$
La soluzione massimale è data da
$$y = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{\frac{x^2}{2}}}, \quad -\sqrt{\log\frac{16}{9}} < x < \sqrt{\log\frac{16}{9}}.$$

• **Equazioni riconducibili a variabili separabili**
Consideriamo una equazione del tipo
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
con $f(z)$ funzione continua della variabile reale z in un intervallo I. Prendiamo come nuova funzione incognita
$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$
Da $y(x) = xz(x)$, abbiamo
$$y' = z + xz',$$
da cui
$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$

quindi ci siamo ricondotti ad una equazione a variabili separabili. Determinato l'integrale generale $z(x)$ di questa, l'integrale generale della equazione data è fornito da $y(x) = xz(z)$.

Nel caso si abbia una condizione iniziale

$$y(x_0) = y_0,$$

con $x_0 \neq 0$ per avere significato, la condizione iniziale per la funzione $z(x)$ diventa

$$z(x_0) = \frac{y(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}.$$

Esempio 1.13. Consideriamo il problema di Cauchy

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad y(-2) = -1.$$

Il secondo membro dell'equazione è il quoziente di due polinomi omogenei nelle variabili x, y, entrambe non nulle. In questi casi, dividendo per x elevato al grado di omogeneità, l'equazione assume la forma $y' = f(y/x)$. Nel caso in questione, basta scrivere

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

e l'equazione diventa

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

dove il secondo membro dipende solo dal rapporto y/x. Ponendo

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}, \ y(x) = xz(x), \ y'(x) = z(x) + xz'(x),$$

il problema dato si riduce a

$$z + xz' = \frac{1}{z} + z, \quad z(-2) = \frac{y(-2)}{-2} = \frac{-1}{-2},$$

cioè

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z}, \quad z(-2) = \frac{1}{2},$$

problema a variabili separabili. La funzione $1/z$ non si annulla quindi l'equazione non ha soluzioni costanti. Separando le variabili si ottiene

$$\int z dz = \int \frac{1}{x} dx,$$

da cui

$$\frac{z^2}{2} = \log|x| + c,$$

dove $\log|x| = \log(-x)$ in quanto x varia in un intervallo che contiene il punto iniziale $x_0 = -2$ e che non contiene $x = 0$, quindi in un intervallo completamente contenuto nella semiretta dei reali negativi. Imponendo la condizione iniziale $z(-2) = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\frac{1}{8} = \log 2 + c,$$

quindi

$$c = \frac{1}{8} - \log 2.$$

Ne segue

$$z^2 = \log\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}, \quad x < 0,$$

che porta a considerare

$$z = \pm\sqrt{\log\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}.$$

L'unica soluzione del problema nella variabile z è data da

$$z = \sqrt{\log\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}},$$

tenendo ancora conto della condizione iniziale $z(-2) = 1/2$ (l'altra soluzione dell'equazione soddisfa la condizione iniziale $z(-2) = -1/2$). Oltre alla condizione già introdotta $x < 0$, il dominio si determina imponendo anche

$$\log\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} > 0.$$

L'espressione trovata definisce una funzione anche quando l'argomento della radice si annulla ma l'equazione perde di significato per $z = 0$, in ogni caso in tali punti x l'espressione trovata non definisce una funzione derivabile. Abbiamo

$$2\log\frac{|x|}{2} + \frac{1}{4} > 0$$

da cui

$$|x| > 2e^{-1/8}.$$

Dovendo essere $x < 0$, si ottiene

$$x < -2e^{-1/8}$$

come dominio massimale. Si noti che l'intervallo ottenuto contiene il punto iniziale $x_0 = -2$. Tornando al problema dato nella incognita $y = xz$, abbiamo la soluzione

$$y = x\sqrt{\log\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}, \quad x < -2e^{-1/8}.$$

2. Equazioni lineari di ordine superiore al primo

In questa sezione studieremo equazioni differenziali di ordine $n \geq 2$ nella incognita $y(x)$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

con $a_1, \ldots, a_n$ e f assegnate funzioni continue in un intervallo reale I. Tali equazioni si dicono **lineari** in quanto l'operazione Ly sulle funzioni $y(x)$ di classe $\mathcal{C}^n$

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y$$

è una operazione lineare:

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2$$

per ogni coppia di funzioni y_1, y_2 e di costanti c_1, c_2. Il caso $n = 1$ è stato studiato in precedenza. Studieremo in dettaglio il caso $n = 2$, nell'ultimo paragrafo daremo alcuni cenni su equazioni di ordine superiore, alle quali gli argomenti visti per $n = 2$ si estendono con facilità.

• Soluzioni globali del problema di Cauchy

Teorema 2.1. *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$$

per una equazione lineare del secondo ordine con coefficienti $a_1(x), a_2(x)$ e termine noto $f(x)$ funzioni definite e continue in un intervallo reale I.
Per ogni $x_0 \in I$ ed ogni $y_0, y_1 \in \mathbf{R}$ il problema ha una unica soluzione la quale risulta definita e di classe $\mathcal{C}^2$ su tutto I.

Per dimostrare il teorema precedente ci si riduce ad un sistema 2×2 del primo ordine prendendo come vettore incognito

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

L'equazione scalare equivale al sistema

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

con condizione iniziale

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Al problema di Cauchy per questo sistema nel vettore incognito Y, del tipo

$$Y' = A(x)Y + B(x)$$

con $A(x)$ matrice di funzioni continue in I e $B(x)$ vettore colonna con componenti continue in I, si applicano argomenti simili a quelli visti nel problema per una sola equazione scalare del primo ordine $y' = a(x)y + b(x)$.

•Spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea
Consideriamo per prima l'equazione omogenea. Ricordiamo che l'insieme di tutte le funzioni definite su un medesimo intervallo I ed a valori reali è uno spazio vettoriale, con le naturali operazioni di somma tra funzioni e di moltiplicazione di una costante per una funzione. Lineare indipendenza per un sistema di n funzioni $f_1, \ldots, f_n$ significa, denotando con $c_1, \ldots, c_n$ delle costanti,

$$c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I \Longrightarrow c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

Teorema 2.2. *Sia*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

una equazione omogenea con coefficienti a_1, a_2 definiti e continui nell'intervallo reale I e siano y_1, y_2 due soluzioni linearmente indipendenti. Allora l'integrale generale dell'equazione è rappresentato da

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie. In particolare, l'insieme di tutte le soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Dimostrazione. Che l'insieme delle soluzioni sia uno spazio vettoriale segue immediatamente dalla linearità dell'equazione. Infatti è immediato verificare che ogni combinazione lineare di soluzioni è a sua volta una soluzione. Dobbiamo provare che la dimensione è pari a 2. Dalla teoria degli spazi vettoriali, sappiamo che è sufficiente esibire una base con 2 elementi per concludere che una qualunque coppia di soluzioni linearmente indipendenti genera l'intero spazio.
Fissiamo un punto $x_0 \in I$ e consideriamo la soluzione y_1 con dati iniziali $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, e la soluzione y_2 con dati iniziali $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$.
Sia poi y una qualunque soluzione e denotiamo

$$\alpha_0 = y(x_0), \alpha_1 = y'(x_0)$$

i suoi valori iniziali. Il sistema nelle incognite c_1, c_2

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 = \alpha_0 \\ \\ y_1'(x_0)c_1 + y_2'(x_0)c_2 = \alpha_1 \end{cases}$$

ha l'unica evidente soluzione $c_1 = \alpha_0$, $c_2 = \alpha_1$ per come sono stati scelti i dati iniziali di y_1 e y_2.
Siano c_1 e c_2 le soluzioni di tale sistema e consideriamo le due soluzioni della equazione differenziale

$$y(x), \quad c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Per costruzione entrambe risolvono il problema di Cauchy con gli stessi valori iniziali α_0, α_1 nello stesso punto x_0. Per l'unicità della soluzione si ha

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

identicamente per ogni $x \in I$, come si voleva dimostrare.

□

•Wronskiano

Il problema di trovare l'integrale generale di una equazione lineare omogenea del secondo ordine è stato ridotto a trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti. Situazione analoga si ha per equazioni omogenee di ordine $n > 2$, dove lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione n ed è quindi generato da n soluzioni linearmente indipendenti.
Mentre nel caso di due soluzioni la lineare indipendenza è semplice da verificare, basta infatti controllare che non si abbiano due funzioni con rapporto costante, nel caso generale la verifica diretta non è sempre agevole. Anticipiamo fin dal caso $n = 2$ uno strumento per riconoscere la lineare indipendenza di n soluzioni $y_1, \ldots, y_n$. Si tratta di calcolare il determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

detto **wronskiano**.

Teorema 2.3. (Del wronskiano) *Siano y_1 e y_2 due soluzioni della equazione lineare omogenea del secondo ordine*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

con coefficienti a_1, a_2 definiti e continui nell'intervallo I. Sia poi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

il loro determinante wronskiano.
Le seguenti tre proposizioni sono equivalenti:

(a) Esiste $x_0 \in I$ tale che $W(x_0) = 0$;

(b) y_1 e y_2 sono linearmente dipendenti;

(c) $W(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

In particolare si ha che o il wronskiano è identicamente nullo in tutti i punti o non si annulla in alcun punto. Queste due alternative equivalgono rispettivamente alla lineare dipendenza ed alla lineare indipendenza di y_1 e y_2.

Dimostrazione.

Proviamo che (a) implica (b). Sia x_0 tale che $W(x_0) = 0$. Ne segue che il sistema omogeneo nelle incognite c_1, c_2

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 = 0 \\ \\ y_1'(x_0)c_1 + y_2'(x_0)c_2 = 0 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni perchè la matrice dei coefficienti è singolare. Prendiamo una soluzione $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ non nulla e consideriamo la funzione $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Questa ha dati di Cauchy $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$, quindi, per l'unicità della soluzione del Problema di Cauchy, è la soluzione identicamente nulla. Abbiamo trovato una combinazione lineare identicamente nulla di y_1 e y_2 con coefficienti non tutti nulli provando così la loro lineare dipendenza.

Proviamo ora che (b) implica (c). Siano y_1 e y_2 linearmente dipendenti e sia $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$, per ogni $x \in I$, una loro combinazione nulla con coefficienti $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. In particolare, derivando, si ha anche $c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) = 0$. Dunque $W(x)$ è identicamente nullo perchè in ogni punto x le colonne del determinante sono linearmente dipendenti.

Infine è ovvio che (c) implica (a).

Queste tre implicazioni danno l'equivalenza di (a), (b) e (c). Le considerazioni finali nell'enunciato, oltre che sulle equivalenze provate, si fondano anche sulla conseguente equivalenza delle tre negazioni di (a), (b) e (c).

□

Esempio 2.4. Le due funzioni $y_1 = e^x$ e $y_2 = xe^x$ sono due soluzioni di $y'' - 2y' + y = 0$ (verifica lasciata al lettore) con dominio $\mathbf{R}$. È evidente che sono indipendenti in quanto $y_2/y_1 = x$, quindi il loro rapporto non è costante. Il loro wronskiano è

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{vmatrix}$$

che per $x = 0$ si riduce a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ne segue che il wronskiano è diverso da zero in tutti i punti $x \in \mathbf{R}$ e si conferma la lineare indipendenza di y_1 e y_2.

• **Equazioni a coefficienti costanti**

Vediamo ora come si possano determinare esplicitamente due soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

con coefficienti **costanti** $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Le soluzioni risulteranno definite su tutto $\mathbf{R}$ perchè le soluzioni di una equazione lineare sono sempre definite sull'intero intervallo dove sono definiti e continui i coefficienti. Trattandosi di coefficienti costanti, l'intervallo massimale è ovviamente $\mathbf{R}$ stesso. Nessun procedimento generale è noto nel caso di coefficienti variabili.

Per una equazione lineare del primo ordine $y' + ay = 0$ con coefficiente costante a, l'integrale generale è dato da $y = ce^{-ax}$. Lo spazio delle soluzioni è quindi uno spazio vettoriale di dimensione 1, generato dalla funzione esponenziale $y_1 = e^{-ax}$. È naturale, quindi, cercare soluzioni della equazione del secondo ordine del tipo $y = e^{\lambda x}$. Abbiamo

$$y = e^{\lambda x},\ y' = \lambda e^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Sostituendo nella equazione, si ottiene

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \Longleftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Si tratta quindi di risolvere l'equazione algebrica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Tale equazione si ottiene da quella differenziale sostituendo la incognita funzione y e le sue derivate y', y'' con le rispettive potenze λ^0, λ^1, λ^2 della incognita algebrica λ. L'ordine di derivazione di y diventa l'esponente di λ. L'equazione così ottenuta si chiama **equazione caratteristica**, le sue soluzioni radici caratteristiche, il polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$

polinomio caratteristico. Distinguiamo i tre possibili casi che si possono presentare nel risolvere l'equazione caratteristica.

Caso (1): due radici reali.
Se l'equazione caratteristica ha due soluzioni reali distinte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, allora l'equazione differenziale ha le due soluzioni

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Tali soluzioni sono linearmente indipendenti in maniera evidente, non avendo rapporto costante. Questo è in linea con il loro wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

che per $x = 0$ si riduce a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

Ne segue che il wronskiano è diverso da zero in tutti i punti $x \in \mathbf{R}$ e si conferma la lineare indipendenza di y_1 e y_2. Abbiamo quindi una base dello spazio vettoriale di dimensione 2 delle soluzioni.
Concludendo, l'integrale generale è dato da

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

con c_1, c_2 costanti reali arbitrarie. Tali costanti vengono univocamente determinate se si impongono condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Caso (2): due radici complesse coniugate.
L'equazione caratteristica abbia due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_0 = \alpha + i\beta, \; \lambda_0^* = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \beta \neq 0.$$

Le funzioni esponenziale di variabile reale x a valori complessi

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)\right)$$

verificano ancora

$$\frac{d}{dx} e^{(\alpha \pm i\beta)x} = \frac{d}{dx} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \pm i \frac{d}{dx} e^{\alpha x} \sin(\beta x) = (\alpha \pm i\beta) e^{(\alpha \pm i\beta)x},$$

quindi abbiamo due soluzioni a valori complessi coniugati

$$z(x) = e^{\lambda_0 x} = e^{(\alpha + i\beta)x}, \; z^*(x) = e^{\lambda_0^* x} = e^{(\alpha - i\beta)x},$$

della equazione differenziale. Per ottenere soluzioni a valori reali, usiamo il fatto che la parte reale

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

e la parte immaginaria

$$y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

di $z(x)$ sono anch'esse soluzioni in quanto combinazione lineare di soluzioni:

$$y_1 = \frac{z + z^*}{2}, \quad y_2 = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Tali soluzioni a valori reali sono linearmente indipendenti in maniera evidente, non avendo rapporto costante. Questo è in linea con il loro wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x)) \end{vmatrix}$$

che per $x = 0$ si riduce a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta \neq 0$$

Ne segue che il wronskiano è diverso da zero in tutti i punti $x \in \mathbf{R}$ e si conferma la lineare indipendenza di y_1 e y_2. Abbiamo quindi una base dello spazio vettoriale reale di dimensione 2 delle soluzioni a valori reali.

Concludendo, l'integrale generale reale è dato da

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x))$$

con c_1, c_2 costanti reali arbitrarie. Tali costanti vengono univocamente determinate se si impongono condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Caso (3): Una sola soluzione reale.

L'equazione caratteristica abbia una sola soluzione λ_0. Necessariamente $a_1^2 = 4a_2$,

$$\lambda_0 = -\frac{a_1}{2},$$

e l'equazione caratteristica si scrive

$$(\lambda - \lambda_0)^2 = 0.$$

Non solo il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \lambda_0)^2$$

si annulla per $\lambda = \lambda_0$ ma anche il polinomio derivato

$$p'(\lambda) = 2\lambda + a_1 = 2(\lambda - \lambda_0)$$

si annulla nello stesso punto. In questo caso si dice che λ_0 ha molteplicità algebrica 2 o che è una soluzione doppia.
Sappiamo già che la funzione

$$y_1 = e^{\lambda_0 x}$$

è una soluzione. Un'altra è

$$y_2 = xe^{\lambda_0 x}.$$

Infatti,

$$y_2' = (1 + \lambda_0 x)e^{\lambda_0 x}, \quad y_2'' = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x)e^{\lambda_0 x},$$

da cui

$$\begin{aligned} y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 & \\ &= xe^{\lambda_0 x}(\lambda_0^2 + a_1\lambda_0 + a_2) + e^{\lambda_0 x}(2\lambda_0 + a_1) \\ &= xe^{\lambda_0 x}p(\lambda_0) + e^{\lambda_0 x}p'(\lambda_0) = 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni $y_1 = e^{\lambda_0 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_0 x}$ sono linearmente indipendenti in maniera evidente, non avendo rapporto costante. Questo è in linea con il loro wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & xe^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & (1 + \lambda_0 x)e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix}$$

che per $x = 0$ si riduce a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ne segue che il wronskiano è diverso da zero in tutti i punti $x \in \mathbf{R}$ e si conferma la lineare indipendenza di y_1 e y_2. Abbiamo quindi una base dello spazio vettoriale di dimensione 2 delle soluzioni.
Concludendo, l'integrale generale è dato da

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_0 x}$$

con c_1, c_2 costanti reali arbitrarie. Tali costanti vengono univocamente determinate se si impongono condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1.$$

Esempio 2.5. Risolviamo il problema
$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$
L'equazione è a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
con le due soluzioni reali
$$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3.$$
L'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da
$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$
Per imporre entrambe le condizioni iniziali, calcoliamo anche
$$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}.$$
Per $x = 0$ si ottiene quindi
$$c_1 + c_2 = 0, \quad 2c_1 + 3c_2 = 1,$$
da cui
$$c_1 = -1, \quad c_2 = 1.$$
L'unica soluzione del problema di Cauchy è
$$y = -e^{2x} + e^{3x}.$$

Esempio 2.6. Determiniamo l'integrale generale di
$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$
L'equazione è a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è
$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$
con le due soluzioni complesse coniugate
$$\lambda_0 = 1 + 2i, \ \lambda_0^* = 1 - 2i.$$
L'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da
$$y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Esempio 2.7. Determiniamo la soluzione del problema
$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$
dove $\omega \neq 0$ è un parametro reale.
L'equazione è a coefficienti costanti ed è l'equazione che si ottiene scrivendo il principio fondamentale della dinamica per un corpo di massa unitaria sottoposto ad una forza di richiamo di intensità proporzionale, con costante di proporzionalità ω^2, allo spostamento $y(x)$ al tempo x. I dati iniziali si interpretano come spostamento iniziale nullo e velocità iniziale pari a 1.

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

con le due soluzioni complesse coniugate

$$\lambda_0 = i\omega,\ \ \lambda_0^* = -i\omega.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x,$$

che nel modello fisico menzionato corrisponde ad un moto periodico detto **moto armonico**. Per imporre entrambe le condizioni iniziali, calcoliamo anche

$$y' = -c_1\omega \sin \omega x + c_2\omega \cos \omega x.$$

Per $x = 0$ si ottiene quindi

$$c_1 = 0, \quad c_2\omega = 1,$$

da cui

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1/\omega.$$

L'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$y = \frac{1}{\omega} \sin \omega x.$$

Dalle formule trigonometriche del coseno di una somma, l'integrale generale $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ si può mettere nella forma

$$y = A \cos(\omega x + \varphi)$$

con

$$A \cos \varphi = c_1,\ \ A \sin \varphi = -c_2.$$

In questa presentazione, le due costanti arbitrarie nell'integrale generale sono A e φ, con rispettivo significato di ampiezza e fase iniziale dell'oscillazione.

Esempio 2.8. Deteminiamo l'integrale generale di

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione è a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

che si scrive

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

con la sola soluzione doppia

$$\lambda_0 = 2.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x}.$$

• **Spazio affine delle soluzioni dell'equazione completa, variazione delle costanti**

L'integrale generale di una equazione lineare omogenea ha la struttura di spazio vettoriale. Vediamo qual è la struttura dell'integrale generale della equazione completa

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

con a_1, a_2, f funzioni definite e continue nell'intervallo reale I.

Teorema 2.9. *Siano y_1, y_2 soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ e sia u una particolare soluzione dell'equazione completa $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$. L'integrale generale della equazione completa è dato da*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u, \quad x \in I,$$

con c_1, c_2 costanti arbitrarie.

Dimostrazione. Denotiamo, come già fatto in precedenza,

$$Ly = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

l'operazione lineare sulla variabile y. Per ipotesi $Ly_1 = 0$, $Ly_2 = 0$, $Lu = f$. Per linearità

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + u) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2 + Lu = f,$$

quindi ogni funzione del tipo

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + u$$

è una soluzione dell'equazione completa. Viceversa, data una qualunque soluzione y dell'equazione completa, abbiamo

$$L(y - u) = Ly - Lu = f - f = 0,$$

quindi $y - u$ risolve l'equazione omogenea. Esistono quindi costanti c_1, c_2 tali che $y - u = c_1 y_1 + c_2 y_2$ che si scrive proprio

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u.$$

□

L'integrale generale della equazione completa ha quindi la struttura di spazio affine, spazio vettoriale traslato.

Vediamo ora come un termine di traslazione, una soluzione particolare u, possa essere determinato una volta note due soluzioni linearmente indipendenti y_1, y_2 della equazione omogenea. Proveremo che esiste una soluzione dell'equazione completa del tipo

$$u(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$$

con γ_1, γ_2 funzioni di classe $\mathcal{C}^1$. Dal momento che, rispetto all'integrale generale della equazione omogenea, compaiono funzioni di x al posto delle costanti c_1, c_2, questo metodo per determinare u si dice della **variazione delle costanti**.
Derivando, otteniamo

$$u' = \gamma_1' y_1 + \gamma_1 y_1' + \gamma_2' y_2 + \gamma_2 y_2'.$$

Nella ricerca di u che abbiamo impostato, abbiamo all'inizio due gradi di libertà grazie alla presenza di due generiche funzioni γ_1, γ_2. Spendiamo ora uno di questi gradi di libertà, imponendo la condizione

$$\gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0$$

in maniera che nel calcolo di u'' non compaiano nè γ_1'' nè γ_2''. Sotto questa condizione, la derivata prima vale

$$u' = \gamma_1 y_1' + \gamma_2 y_2'$$

e la derivata seconda vale

$$u'' = \gamma_1' y_1' + \gamma_1 y_1'' + \gamma_2' y_2' + \gamma_2 y_2''.$$

Imponiamo ora

$$u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = f(x),$$

che scriviamo, ancora una volta, nel modo

$$Lu = f$$

con

$$Lu = u'' + a_1 u' + a_2 u.$$

Otteniamo

$$\gamma_1 L y_1 + \gamma_2 L y_2 + \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = f.$$

Il fatto che y_1 e y_2 risolvano l'equazione omogenea si scrive

$$Ly_1 = Ly_2 = 0,$$

quindi l'ultima condizione ottenuta diventa

$$\gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = f.$$

In definitiva, la funzione $u = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$ è una soluzione dell'equazione completa se e solo se γ_1 e γ_2 sono funzioni derivabili con derivate continue ed è soddisfatto il sistema di equazioni nelle funzioni γ_1', γ_2'

$$\begin{cases} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 = 0 \\ \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' = f. \end{cases}$$

Il determinante di questo sistema è il wronskiano di y_1, y_2 quindi è ovunque non nullo per la loro lineare indipendenza. L'unica soluzione si può scrivere attraverso i quozienti di determinanti (metodo di Kramer)

$$\gamma_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \quad \gamma_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}.$$

Da questa rappresentazione si vede che la soluzione del sistema ha per componenti funzione continue. In particolare è possibile trovare due primitive

$$\gamma_1(x) = \int \gamma_1'(x)dx, \ \gamma_2(x) = \int \gamma_2'(x)dx$$

trovando così la soluzione particolare

$$u = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$$

della equazione completa.

Esempio 2.10. Determiniamo l'integrale generale di

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Determiniamo prima due soluzioni linearmente indipendenti y_1, y_2 della equazione omogenea

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ha la sola soluzione doppia $\lambda_0 = 1$ da cui

$$y_1 = e^x, \ y_2 = xe^x$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti. In particolare

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x$$

rappresenta l'integrale generale dell'equazione omogenea. Cerchiamo ora una soluzione particolare u della equazione completa,

$$u = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2,$$

col metodo della variazione delle costanti. Le derivate γ_1', γ_2' sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^x\gamma_1' + xe^x\gamma_2' = 0 \\ \\ e^x\gamma_1' + (1+x)e^x\gamma_2' = e^x \end{cases}$$

da cui, dividendo per e^x,

$$\begin{cases} \gamma_1' + x\gamma_2' = 0 \\ \\ \gamma_1' + (1+x)\gamma_2' = 1. \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione, abbiamo

$$\begin{cases} \gamma_1' = -x\gamma_2' \\ \\ \gamma_2' = 1, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \gamma_1' = -x \\ \\ \gamma_2' = 1. \end{cases}$$

Due primitive sono

$$\gamma_1 = -\frac{x^2}{2},\ \gamma_2 = x$$

quindi una soluzione particolare dell'equazione completa è

$$u = -\frac{x^2}{2}e^x + x \cdot xe^x = \frac{x^2}{2}e^x.$$

Sommando u all'integrale generale della equazione omogenea, si ottiene l'integrale generale della equazione data

$$y = \left(c_1 + c_2x + \frac{x^2}{2}\right)e^x.$$

• **Soluzioni particolari per similitudine, risonanza, principio di sovrapposizione**

Il metodo della variazione delle costanti si applica a qualunque equazione lineare completa, a patto che si sia trovata una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea. C'è un metodo alternativo, limitatamente al caso di una equazione a coefficienti costanti

$$y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$$

e con termine noto del tipo

$$f(x) = p(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

$p(x)$ e $q(x)$ polinomi ed $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Come casi particolari abbiamo termini noti dei tipi

$$f(x) = p(x)e^{\alpha x}, \quad \alpha \neq 0, \beta = 0,$$

$$f(x) = p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x), \quad \alpha = 0, \beta \neq 0$$

e

$$f(x) = p(x), \quad \alpha = \beta = 0.$$

Inoltre, in quanto precede, non si deve dimenticare che si stanno considerando anche i polinomi costanti (grado 0).

Si cerca una soluzione dello stesso tipo

$$u = P(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi da determinarsi. Il metodo è efficace perchè le funzioni u, u', u'' ed f sono tutte dello stesso tipo, quindi si possono rendere identici i due membri della equazione imponendo che tutti i termini simili abbiano gli stessi coefficienti a primo e secondo membro. Si ottiene un sistema lineare dove le incognite sono i coefficienti dei polinomi $P(x)$ e $Q(x)$. Se la ricerca dei polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ viene impostata secondo lo schema seguente, si ottiene sempre un sistema con matrice quadrata non singolare: un sistema di Kramer. In quanto segue denotiamo con $m \geq 0$ il massimo grado dei polinomi $p(x)$ e $q(x)$ nel termine noto $f(x)$, in particolare $m = 0$ significa p e q costanti.

Caso (a): $\alpha + i\beta$ non risolve l'equazione caratteristica.
Si cerca u del tipo

$$u = A(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + B(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

con polinomi $A(x)$ e $B(x)$ anch'essi di grado m

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m, \; B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,$$

in particolare costanti A, B nel caso $m = 0$ di costanti p, q nel termine noto f. In maniera evidente si intende

$$u = A(x)e^{\alpha x} \;\text{ per } \alpha \neq 0, \beta = 0,$$

$$u = A(x)\cos(\beta x) + B(x)\sin(\beta x) \;\text{ per } \alpha = 0, \beta \neq 0,$$

$$u = A(x) \;\text{ per } \alpha = \beta = 0.$$

Si impone che u sia soluzione e, uguagliando i coefficienti di tutti i termini simili, si ottiene un sistema lineare nelle incognite

$$a_j, b_j, \; j = 0, \ldots, m,$$

che effettivamente compaiono. Tale sistema ha una unica soluzione.

Caso (b): $\alpha + i\beta$ risolve l'equazione caratteristica.
Sia r la molteplicità di $\alpha + i\beta$ come soluzione dell'equazione caratteristica. Nel caso di equazioni del secondo ordine abbiamo i due casi possibili $r = 1$ (soluzione semplice) e $r = 2$ soluzione doppia.
Si cerca u del tipo

$$u = x^r A(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) + x^r B(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

con polinomi $A(x)$ e $B(x)$ di grado m come nel caso precedente. Si impone che u sia soluzione e, uguagliando i coefficienti di tutti i termini simili, si ottiene un sistema lineare che ha come incognite i coefficienti dei polinomi $A(x), B(x)$ che effettivamente compaiono. Tale sistema ha ancora soluzione unica.

I due casi si possono unificare interpretando il caso di *molteplicità nulla* $r = 0$ come il caso in cui $\alpha + i\beta$ non è soluzione dell'equazione caratteristica.

Osservazione 2.11. **(Risonanza)** Consideriamo l'equazione del moto armonico

$$y'' + \omega^2 y = a \cos \omega_0 x$$

con termine noto (forza esterna) periodico. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ ha le due radici immaginarie $\pm i\omega$. L'equazione omogenea ha integrale generale $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$.
Nel cercare una soluzione particolare per similitudine, dobbiamo distinguere due casi:

- Primo caso: $\omega \neq \omega_0$.

In questo caso le frequenze del termine noto e delle soluzioni della equazione omogenea sono diverse. Visto che $i\omega_0$ non risolve l'equazione caratteristica, la soluzione particolare si cerca della forma

$$u = A \cos \omega_0 x + B \sin \omega_0 x.$$

Abbiamo

$$u' = -A\omega_0 \sin \omega_0 x + B\omega_0 \cos \omega_0 x, \quad u'' = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 x - B\omega_0^2 \sin \omega_0 x,$$

da cui, sostituendo nell'equazione ed uguagliando i coefficienti dei termini simili, si arriva al sistema

$$A(\omega^2 - \omega_0^2) = a, \quad B(\omega^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Ne segue

$$A = \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2}, \ B = 0.$$

L'integrale generale della equazione completa è

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x + \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos \omega_0 x.$$

Si hanno oscillazioni di ampiezze costanti per ω e ω_0 fissati. Tali ampiezze, però, divergono a $+\infty$ per $\omega - \omega_0 \to 0$.

- Secondo caso: $\omega = \omega_0$.

In questo caso le frequenze del termine noto e delle soluzioni della equazione omogenea sono uguali. Visto che $i\omega$ è radice semplice dell'equazione caratteristica, una funzione del tipo $A\cos\omega x + B\sin\omega x$ risolve l'equazione omogenea e non può quindi risolvere l'equazione completa. La soluzione particolare si cerca della forma

$$u = Ax\cos\omega x + Bx\sin\omega x.$$

Abbiamo

$$u' = A\cos\omega x + B\sin\omega x - Ax\omega\sin\omega x + Bx\omega\cos\omega x,$$

$$u'' = -2A\omega\sin\omega x + 2B\omega\cos\omega x - Ax\omega^2\cos\omega x - Bx\omega^2\sin\omega x,$$

da cui, sostituendo nell'equazione ed uguagliando i coefficienti dei termini simili, si arriva al sistema

$$-2A\omega = 0, \quad 2B\omega = a.$$

Ne segue

$$A = 0, \ B = \frac{a}{2\omega}.$$

L'integrale generale della equazione completa è

$$y = c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x + \frac{ax}{2\omega}\sin\omega x.$$

Si hanno oscillazioni di ampiezze divergenti a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

Entrambi i casi descrivono cosa accade quando la frequenza del termine noto è troppo vicina alla frequenza delle soluzioni dell'equazione omogenea. Sia che si consideri $\omega - \omega_0 \to 0$ che $\omega = \omega_0$ con $x \to +\infty$, si hanno oscillazioni di ampiezza divergente. Fisicamente, questo può significare il collasso del sistema. Questo è il modello più semplice del fenomeno fisico della **risonanza**.

Osservazione 2.12. **(Principio di sovrapposizione)** Un'altra utile osservazione è la seguente: per linearità, tutte le soluzioni di una equazione del tipo

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

sono della forma

$$u = u_1 + u_2$$

con u_1 soluzione di

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_1(x)$$

e u_2 soluzione di

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x).$$

Questo fatto, noto come **principio di sovrapposizione**, può essere usato nel metodo di similitudine per estendere tale metodo dai prodotti alle somme di funzioni esponenziali, trigonometriche e polinomiali.

Esempio 2.13. Determiniamo l'integrale generale di

$$y'' - 6y' + 9y = xe^{3x}.$$

Risolvendo l'equazione caratteristica si ha la sola soluzione $\lambda_0 = 3$, di molteplicità $r = 2$. L'equazione omogenea ha integrale generale

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}.$$

Una funzione simile al termine noto è del tipo

$$v = (ax + b)e^{3x}$$

ma sia axe^{3x} che be^{3x} risolvono l'equazione omogenea. Moltiplicando per x, il termine bxe^{3x} continua a risolvere l'omogenea. In realtà il metodo per similitudine richiede di moltiplicare per x^2 dal momento che $\alpha = 3$ è soluzione doppia dell'equazione caratteristica. La soluzione particolare si cerca del tipo

$$u = x^2(ax + b)e^{3x}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} u &= (ax^3 + bx^2)e^{3x}, \\ u' &= (3ax^3 + (3a + 3b)x^2 + 2bx)e^{3x}, \\ u'' &= (9ax^3 + (18a + 9b)x^2 + (6a + 12b)x + 2b)e^{3x}. \end{aligned}$$

Sostituendo, si ottiene

$$(6ax + 2b)e^{3x} = xe^{3x}$$

da cui

$$6a = 1,\ 2b = 0$$

quindi

$$a = \frac{1}{6},\ b = 0.$$

Una soluzione particolare è

$$u = \frac{1}{6}x^3 e^{3x}$$

e l'integrale generale della equazione data è

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3\right) e^{3x}.$$

Esempio 2.14. Determiniamo l'integrale generale di
$$y'' - 6y' + 9y = x + e^{3x}.$$
L'equazione omogenea è la stessa dell'esempio precedente, con integrale generale
$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}.$$
Per il principio di sovrapposizione, una funzione simile al termine noto è del tipo
$$v = (ax + b) + ce^{3x}$$
ma ce^{3x} risolve l'equazione omogenea. Moltiplicando per x, il termine cxe^{3x} continua a risolvere l'omogenea. In realtà il metodo per similitudine richiede di moltiplicare ce^{3x} per x^2 dal momento che $\alpha = 3$ è soluzione doppia dell'equazione caratteristica. La soluzione particolare si cerca del tipo
$$u = (ax + b) + cx^2 e^{3x}$$
dove $u_1 = ax + b$ dovrà risolvere l'equazione con termine noto $f_1 = x$ mentre $u_2 = cx^2 e^{3x}$ sarà determinata come soluzione dell' equazione con termine noto $f_2 = e^{3x}$. Abbiamo
$$\begin{aligned} &u = ax + b + cx^2 e^{3x}, \\ &u' = a + (2cx + 3cx^2)e^{3x}, \\ &u'' = (2c + 12cx + 9cx^2)e^{3x}. \end{aligned}$$
Sostituendo, si ottiene
$$-6a + 9b + 9ax + 2ce^{3x} = x + e^{3x}$$
da cui
$$-6a + 9b = 0, \ 9a = 1, \ 2c = 1$$
quindi
$$a = \frac{1}{9}, \ b = \frac{2}{27}, \ c = \frac{1}{2}.$$
Una soluzione particolare è
$$u = \frac{1}{9}x + \frac{2}{27} + \frac{1}{2}x^2 e^{3x}$$
e l'integrale generale della equazione data è
$$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{3x} + \frac{1}{9}x + \frac{2}{27}.$$

• **Equazioni di ordine superiore**

Quanto visto per equazioni di ordine $n = 2$ si generalizza ad equazioni di ordine qualunque
$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

In particolare:

- Le soluzioni sono definite in tutto l'intervallo I dove sono definiti e continui i coefficienti $a_1, \dots, a_n$ ed il termine noto f. Il problema di Cauchy con dati iniziali

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

ha una unica soluzione;

- L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n, quindi l'integrale generale dell'omogenea si scrive

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

con $y_1, \dots, y_n$ soluzioni linearmente indipendenti. La lineare indipendenza di queste soluzioni equivale al fatto che il determinate wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

verifica $W(x) \neq 0$ in ogni punto $x \in I$. Basta verificare questo in un solo punto $x = x_0$ perchè se il wronskiano è diverso da zero in un punto, allora lo è in tutti i punti;

- Nel caso di coefficienti **costanti** reali, una base $y_1, \dots, y_n$ dell'integrale generale dell'omogenea si determina risolvendo l'equazione caratteristica

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

Ogni soluzione λ_0 di molteplicità r corrisponde alle r soluzioni indipendenti

$$e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{r-1} e^{\lambda_0 x}$$

da inserire nella base cercata. Nel caso che $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ non sia reale, allora anche la complessa coniugata $\lambda_0^* = \alpha - i\beta$ è soluzione dell'equazione caratteristica con la stessa molteplicità r. Questo corrisponde alle $2r$ soluzioni indipendenti a valori reali

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

da inserire nella base cercata;

- L'equazione completa ha integrale generale dato da

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + u$$

ottenuto sommando una soluzione particolare u all'integrale generale dell'omogenea. C'è una soluzione particolare del tipo

$$u = \gamma_1 y_1 + \dots + \gamma_n y_n$$

con $\gamma_1 = \gamma_1(x), \ldots, \gamma_n = \gamma_n(x)$ funzioni le cui derivate risolvono il sistema di Kramer

$$\begin{cases} y_1\gamma_1' + & \ldots & +y_n\gamma_n' & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-2)}\gamma_1' + & \ldots & +y_n^{(n-2)}\gamma_n' & = 0 \\ y_1^{(n-1)}\gamma_1' + & \ldots & +y_n^{(n-1)}\gamma_n' & = f \end{cases}$$

Quando il termine noto lo consente, in alternativa a questo si può usare la similitudine.