ANALISI MATEMATICA L-B, 2005-06.
SERIE

1. Serie numeriche reali

• **Definizione**

Consideriamo una successione a_n, $n \geq 1$, di numeri reali. Che senso dare alla *somma di tutti gli* a_n? Si definisce una nuova successione S_n, nella maniera seguente:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

Utilizzando il simbolo di sommatoria

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \geq 1.$$

La successione S_n si chiama **serie** mentre la successione di partenza a_n viene detta **termine generale** della serie. Ciascun valore S_n viene detto una **somma parziale**.
La serie di termine generale a_n, cioè la successione S_n, viene poi denotata col simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Conseguentemente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice convergente, divergente, oscillante quando tale è la successione S_n delle somme parziali che essa indica. Il comportamento della serie, l'essere quindi convergente, divergente a $\pm\infty$, oscillante, si dice anche **carattere** della serie.
Quando

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell,\ \ell \in \mathbf{R} \text{ o } \ell = \pm\infty,$$

si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$$

e si dice che la serie vale ℓ o che ℓ è la somma della serie.
A volte, la serie di termine generale a_n verrà indicata anche con la notazione

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Esempio 1.1. Consideriamo la *serie di Mengoli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

serie di termine generale

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Per prima cosa ricordiamo che questo sta ad indicare la successione delle somme

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2},\ S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6},\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}, \dots$$

In questo caso è possibile provare che la serie converge e stabilirne il valore osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Si ha infatti

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$1 - \frac{1}{n+1}$$

cancellando i termini opposti a due a due. Dunque, da

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

deduciamo che la serie converge e che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Una serie che, come nell'esempio precedente, ha termine generale del tipo

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

si dice **telescopica**. Come sopra, la successione delle somme parziali si calcola in maniera semplice:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) =$$
$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) =$$
$$b_1 - b_{n+1}.$$

Dal carattere e dall'eventuale limite della successione b_n si deduce agevolmente il carattere e l'eventuale somma della serie telescopica. Unitamente alla serie geometrica che vedremo ora, le serie telescopiche costituiscono uno dei pochi casi in cui è possibile determinare la somma di una serie convergente per via elementare.

• **Serie geometrica**

Sia q un fissato numero reale non nullo e consideriamo la successione q^n, $n \geq 0$, delle potenze di q con esponente intero non negativo. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

di termine generale q^n si dice **serie geometrica** ed il numero q è detto la sua **ragione**. Tenendo conto che l'indice n qui parte da 0, la successione delle somme parziali è data da

$$S_0 = q^0 = 1,\ S_1 = q^0 + q^1 = 1 + q,\ \ldots, S_n = 1 + q + \ldots + q^n, \ldots$$

Per $q = 1$ ovviamente $S_n = 1 + 1 + \ldots + 1$ con $n + 1$ addendi pari ad 1, quindi $S_n = n+1$. Ne segue in maniera evidente che la serie geometrica di ragione $q = 1$ diverge a $+\infty$. Per $q \neq 1$, dalla uguaglianza facilmente verificabile $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$, abbiamo

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Basta ricordare ora il comportamento della successione q^n con $q \neq 1$ per dedurre quello di S_n. Ricordiamo che $q^n \to 0$ se e solo se $|q| < 1$, $q^n \to +\infty$ per $q > 1$, q^n è oscillante per $q \leq -1$. Ne segue che la serie geometrica di ragione q **converge se e solo se** $|q| < 1$ ed in questo caso vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

Per $q \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$, per $q \leq -1$ la serie è oscillante.

• **Resti**

Sia $m > 1$ un naturale fissato. La serie

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

si dice un **resto** della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Tale scrittura indica la successione di somme

$$\sigma_1 = a_m, \ \sigma_2 = a_m + a_{m+1}, \ \sigma_n = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+n-1}, \ldots$$

Confrontando con la serie completa, cioè con la successione delle somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, abbiamo la evidente relazione

$$\sigma_n = S_{n+m-1} - S_{m-1}.$$

Tenendo in mente che m, quindi anche S_{m-1}, è fissato, mandando $n \to +\infty$ segue subito che una serie ed ogni suo resto **hanno lo stesso carattere**. Nel caso che si abbia convergenza con $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell$, allora

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \ell - \sum_{n=1}^{m-1} a_n.$$

Questo significa che la serie resto $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ vale l'errore che si commette approssimando il valore della serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con la somma parziale $S_{m-1} = \sum_{n=1}^{m-1} a_n$. In particolare, se la serie completa converge, allora

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n = 0.$$

Dalla somma della serie geometrica possiamo dedurre la somma di ogni suo resto di indice $m > 0$:

$$\sum_{n=m}^{\infty} q^n$$

ora indica la serie di somme

$$\sigma_0 = q^m, \ \sigma_1 = q^m + q^{m+1}, \ \sigma_n = q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{m+n}, \ldots$$

da cui, raccogliendo q^m,

$$\sigma_n = q^m(1 + q + \ldots + q^n) = q^m S_n.$$

Nel caso di convergenza $|q| < 1$, ricordando che $S_n \to 1/(1-q)$, vale quindi

$$\sum_{n=m}^{\infty} q^n = \frac{q^m}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Con la somma della serie geometrica e dei suoi resti, si giustifica la nota regola della **frazione generatrice** di un numero con rappresentazione decimale periodica. Ad esempio

$$0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \ldots + \frac{7}{10^n} + \ldots =$$

$$7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots\right) = 7 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}$$

e

$$0.2525\ldots = \frac{25}{100} + \frac{25}{100^2} + \ldots + \frac{25}{100^n} + \ldots =$$

$$25\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots + \frac{1}{100^n} + \ldots\right) = 25 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{25}{99}.$$

• Condizione di Cauchy e condizione necessaria per la convergenza

Consideriamo una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$$

e, come al solito, S_n indichi la somma $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Per definizione, si ha $S_n \to \ell$ e, di conseguenza, anche $S_{n+p} \to \ell$ per ogni $p \geq 1$ fissato, dal momento che S_{n+p} è una sottosuccessione di S_n. Dunque

$$S_{n+p} - S_n \to 0.$$

La differenza $S_{n+p} - S_n$ vale

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}$$

quindi, se la serie converge, allora

$$\text{per ogni } p \geq 1 \text{ si ha } (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Questa condizione si dice **condizione di Cauchy** ed abbiamo appena provato che è condizione necessaria per la convergenza della serie di termine generale a_n. In realtà tale condizione è **necessaria e sufficiente** e la sua sufficienza equivale all'assioma di completezza di $\mathbf{R}$.

Prendendo $p = 1$, abbiamo la seguente **condizione necessaria** di convergenza:

$$\textbf{se la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \textbf{ converge, allora } a_n \to 0.$$

Se una serie converge, allora il suo termine generale è infinitesimo. In maniera equivalente, se il termine generale non è infinitesimo, la serie non converge.

Questa condizione, ottenuta dalla condizione di Cauchy prendendo solo $p = 1$ invece di ogni $p \geq 1$, rimane solo necessaria e non è in generale sufficiente, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.2. La serie telescopica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$$

ha termine generale $\log((n+1)/n)$ infinitesimo, ma

$$S_n = (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \ldots + (\log(n+1) - \log n) =$$

$$\log(n+1) - \log 1 = \log(n+1),$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} = +\infty,$$

in particolare la serie non converge.

2. Serie a termini positivi

Consideriamo una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con termine generale **non negativo** $a_n \geq 0$. In maniera evidente, la successione $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ è **crescente** quindi ha limite, finito o $+\infty$.

Una serie a termine generale positivo **non può essere oscillante** ma **converge** ad un reale positivo oppure **diverge** a $+\infty$.

Vediamo ora alcuni criteri per stabilire quale di questi due caratteri possibili assume una data serie a termini positivi.

- **Criterio dell'integrale**

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione positiva e decrescente con limite $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Una tale funzione è integrabile ed esiste, finito o $+\infty$, l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)dx$ che per definizione vale l'area del sottografico.

Consideriamo la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ che soddisfa la condizione necessaria di convergenza grazie alla ipotesi $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$. Ci proponiamo di mettere in relazione il comportamento della serie con quello dell'integrale di $f(x)$.

Tracciato il grafico della funzione, consideriamo sull'asse delle ascisse gli intervalli consecutivi $I_k = [k, k+1]$ per $k = 1, \ldots, n-1$ e costruiamo i rettangoli $I_k \times [0, f(k+1)]$ di area $1 \cdot f(k+1) = f(k+1)$. Dal momento che f è decrescente, si ha subito

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx,$$

da cui, denotando come al solito $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$,

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$

Mandando $n \to +\infty$, questa disuguaglianza dimostra che se l'integrale converge, allora S_n non può divergere a $+\infty$, quindi converge anch'essa.

Tornando al grafico, costruiamo ora i rettangoli $I_k \times [0, f(k)]$ di area $1 \cdot f(k) = f(k)$. Sempre dal fatto che f è decrescente, questa volta si ha subito

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \geq \int_1^n f(x)dx,$$

da cui

$$S_{n-1} \geq \int_1^n f(x)dx.$$

Mandando $n \to +\infty$, questa disuguaglianza dimostra che se l'integrale diverge a $+\infty$, allora anche S_n diverge a $+\infty$.

Riassumendo, abbiamo provato il seguente criterio:

Teorema 2.1. (Criterio dell'integrale) *Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ una funzione positiva e decrescente con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ hanno lo stesso carattere.

• Serie armonica e serie armonica generalizzata

La serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

si dice serie **armonica**. Una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

con $\alpha > 0$ si dice serie **armonica generalizzata**, per $\alpha = 1$ si riottiene la serie armonica. La serie armonica generalizzata soddisfa la condizione necessaria di convergenza. Come applicazione del criterio dell'integrale, vedremo ora che l'ordine di infinitesimo α del termine generale è discriminante per il carattere della serie. Infatti, la serie armonica generalizzata si può scrivere nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ scegliendo $f(x) = 1/x^\alpha$, funzione che soddisfa le ipotesi del criterio dell'integrale. Dal momento che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > 1,$$

si ha che la serie armonica generalizzata

converge per $\alpha > 1$, diverge a $+\infty$ per $0 < \alpha \leq 1$.

In particolare, la serie armonica diverge a $+\infty$

• **Criterio del confronto**
Dopo aver stabilito il comportamento di alcune serie di riferimento, come la serie geometrica e la serie armonica generalizzata, stabiliamo un criterio di confronto.

Teorema 2.2. (Criterio del confronto per serie a termini positivi) *Siano a_n e b_n tali che per ogni n*

$$0 \leq a_n \leq b_n.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

In maniera equivalente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge a } +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge a } +\infty.$$

Dimostrazione.
Posto

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \sigma_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

da $a_k \leq b_k$ per ogni k, segue

$$S_n \leq \sigma_n$$

per ogni n. Le successioni crescenti S_n e σ_n hanno limite, finito o $+\infty$, e da $S_n \leq \sigma_n$ segue

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$$

che consente subito di concludere.

□

Dal momento che ogni resto ha lo stesso comportamento della serie completa, il criterio rimane valido anche sotto l'ipotesi meno restrittiva che $0 \le a_n \le b_n$ valga **definitivamente** invece che per ogni n.

È utile anche il seguente corollario:

Corollario 2.3. (Confronto asintotico) *Siano a_n e b_n tali che per ogni n*

$$0 < a_n, 0 < b_n,$$

e tali che

$$a_n \sim b_n, \quad n \to +\infty.$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hanno lo stesso carattere.}$$

Dimostrazione. Per ipotesi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

quindi, prendendo ad esempio l'intorno di raggio 1/2 del limite 1, si ha definitivamente

$$\frac{1}{2} \le \frac{a_n}{b_n} \le \frac{3}{2}.$$

Dalla disuguaglianza

$$a_n \le \frac{3}{2} b_n,$$

per confronto, si ha che se la serie di termine generale b_n converge anche la serie di termine generale a_n converge.

Viceversa, dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{2} b_n \le a_n,$$

sempre per confronto, si ha che se la serie di termine generale a_n converge anche la serie di termine generale b_n converge.

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

che, per le serie a termini positivi in questione, equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge a } +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge a } +\infty.$$

Le due serie hanno lo stesso carattere.

□

Esempio 2.4. Consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}.$$

Da $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{\varepsilon}} = 0$ qualunque sia $\varepsilon > 0$, segue

$$\log n < n^{\varepsilon}$$

in maniera definitiva. Per gli stessi n, si ha quindi

$$\frac{1}{\sqrt{n}\log n} > \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

Basta ora fissare un $\varepsilon \leq 1/2$ per concludere per confronto che la serie data diverge a $+\infty$, dal momento che la serie minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$ diverge a $+\infty$ per quanto visto sulla serie armonica generalizzata.

Esempio 2.5. Consideriamo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\cos(n)}{n^{\alpha}},$$

con α parametro reale positivo, e studiamo il carattere della serie al variare di $\alpha > 0$.
Per ogni n, vale

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \leq \frac{2-\cos(n)}{n^{\alpha}} \leq \frac{3}{n^{\alpha}}.$$

Confrontando con la serie armonica generalizzata, per $\alpha > 1$ dalla disuguaglianza

$$\frac{2-\cos(n)}{n^{\alpha}} \leq \frac{3}{n^{\alpha}}$$

si ha che la serie data converge in quanto la serie maggiorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{\alpha}}$ converge per tali α.
Per $\alpha \leq 1$, dalla disuguaglianza

$$\frac{2-\cos(n)}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n^{\alpha}}$$

si ha che la serie data diverge a $+\infty$ in quanto la serie minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge a $+\infty$ per tali α.

- **Criterio della radice**

Dal criterio del confronto, segue un altro utile criterio.

Teorema 2.6. (Criterio della radice) *Sia $a_n > 0$ tale che esista il limite*
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell,\ 0 \le \ell \le +\infty,\ \ell \ne 1.$$
Se $\ell < 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Se $\ell > 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. Se $\ell < 1$, allora, fissato q in maniera che $\ell < q < 1$, si ha
$$\sqrt[n]{a_n} < q$$
definitivamente. Quindi, per gli stessi n,
$$a_n < q^n.$$
Dal momento che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ di ragione $q \in]0,1[$ converge, anche la serie data converge per confronto.
Nel caso $\ell > 1$, si ha $\sqrt[n]{a_n} > 1$, quindi anche $a_n > 1$, definitivamente. In particolare non può valere $a_n \to 0$ e la serie data non può convergere perchè il suo termine generale non soddisfa la condizione necessaria.

$\square$

Nel caso che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$
il criterio è inefficace. Come esempio notevole, prendiamo la serie armonica generalizzata il cui termine generale è $a_n = 1/n^\alpha$. Qualunque sia α, da $\sqrt[n]{n} \to 1$ segue sempre
$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\alpha} \to 1,$$
eppure il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ non è costante rispetto ad α.
Nel caso $\ell = 1$ il criterio della radice non consente di concludere nè per la convergenza nè per la divergenza a $+\infty$ della serie data.

Esempio 2.7. Studiamo il carattere della serie a termini positivi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n^2}$$
al variare del parametro $q > 0$. Applicando il criterio della radice, abbiamo
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{q^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{q}{\sqrt[n]{n^2}} = q.$$

Quindi, per $0 < q < 1$ la serie data converge mentre per $q > 1$ diverge a $+\infty$.
Nel caso $q = 1$ il criterio non si applica, ma basta osservare che la serie data diventa la serie armonica generalizzata convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Gli stessi risultati si possono ottenere applicando direttamente il confronto
$$\frac{q^n}{n^2} \leq q^n$$
con la serie geometrica per $0 < q < 1$ ed osservando che, invece, q^n/n^2 non tende a 0 per $q > 1$.

- **Criterio del rapporto**

Sempre dal criterio del confronto, segue un ulteriore utile criterio.

Teorema 2.8. (Criterio del rapporto) *Sia $a_n > 0$ tale che esista il limite*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell, \ 0 \leq \ell \leq +\infty, \ \ell \neq 1.$$
Se $\ell < 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Se $\ell > 1$, allora la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione. Se $\ell < 1$, allora, fissato q in maniera che $\ell < q < 1$, si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$
definitivamente. Quindi, per gli stessi n, $a_{n+1} < qa_n$. Dal momento che una serie ed ogni suo resto hanno lo stesso comportamento, per semplicità, possiamo assumere $a_{n+1} < qa_n$ per tutti gli $n \geq 1$. Ne segue
$$a_2 < qa_1, a_3 < qa_2 < q^2 a_1, \ldots,$$
ed è semplice provare per induzione che per tutti gli $n \geq 2$ vale
$$a_n < q^{n-1} a_1.$$
La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ di ragione $q \in]0, 1[$ converge, quindi anche la serie data converge per confronto.
Nel caso $\ell > 1$, si ha $a_n \to +\infty$ per il criterio del rapporto delle successioni. In particolare, la serie data non può convergere perchè il suo termine generale non soddisfa la condizione necessaria.

$\square$

Come per il criterio della radice, nel caso che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

il criterio è inefficace. Come esempio notevole, prendiamo ancora la serie armonica generalizzata il cui termine generale è $a_n = 1/n^\alpha$. Qualunque sia α,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1,$$

eppure il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ non è costante rispetto ad α. Nel caso $\ell = 1$, neppure il criterio del rapporto consente di concludere, nè per la convergenza nè per la divergenza a $+\infty$ della serie data.

In realtà si può dimostrare che il criterio della radice è più generale, nel senso che tutte le volte che il criterio del rapporto è applicabile tale è anche il criterio della radice. Questo fatto segue dalla validità della implicazione

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Esempio 2.9. Studiamo il carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Applicando il criterio del rapporto, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

Quindi la serie data converge.

3. Serie a termini di segno non costante

I criteri di convergenza visti sinora si applicano a serie con termini di segno definitivamente costante, positivo, come assunto, o negativo, nel qual caso basta raccogliere -1 in ogni somma parziale e trarne ovvie conseguenze. Vediamo cosa si può dire quando ciò non accade.

• **Convergenza assoluta**

Ad una data serie a termini reali $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si associa la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Questa ultima converge se e solo se soddisfa la propria condizione necessaria e sufficiente di Cauchy

$$\text{per ogni } p \geq 1 \text{ si ha } |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}| \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

In questo caso, dalla disuguaglianza triangolare

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+p}|,$$

segue poi che anche la serie iniziale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ soddisfa la propria condizione di Cauchy. Questo mostra che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Vedremo che tale implicazione non si inverte.
Quando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, si dice che la serie iniziale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge assolutamente**. L'implicazione precedente si legge

convergenza assoluta $\Longrightarrow$ convergenza semplice.

Non vale il viceversa. Data una serie con termini a_n di segno non definitivamente costante che soddisfa la condizione necessaria $a_n \to 0$, si può studiarne la convergenza assoluta usando i criteri per le serie a termini positivi. Se si ha convergenza assoluta, allora si ha anche la convergenza semplice. Se non si ha convergenza assoluta, il problema di determinare la convergenza semplice rimane aperto.

Esempio 3.1. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Per $a_n = (-1)^n/n^2$, si ha $|a_n| = 1/n^2$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge, quindi la serie data converge assolutamente. In particolare, la serie data converge semplicemente.

- **Serie con termini a segno alterno**

Un caso particolare di serie a termini di segno non costante, è quello delle serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0,$$

dove il termine generale alterna in segno (vedi l'esempio precedente). Per esse vale il seguente criterio di semplice convergenza:

Teorema 3.2. (Criterio di Leibniz) *Sia a_n, $a_n > 0$ per ogni n, una successione decrescente e convergente a 0.*

Allora, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge ad un reale positivo ℓ.

Inoltre, la somma parziale $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$ approssima ℓ a meno di a_{n+1}, per difetto se n è pari, per eccesso se n è dispari.

Dimostrazione. Dal fatto che a_n è positiva e decrescente, si prova che:

1) la sottosuccessione S_{2n} delle somme di indice pari è crescente. Infatti, per ogni n, $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0$;

2) la sottosuccessione S_{2n+1} delle somme di indice dispari è decrescente. Infatti, per ogni n, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3} < 0$;

3) per ogni n vale $S_{2n} < S_{2n+1}$. Infatti $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} > 0$.

Dal momento che ogni successione monotona e limitata converge, ne segue $S_{2n} \to \ell_p$, $S_{2n+1} \to \ell_d$, con

$$0 < S_2 < S_4 < \ldots < S_{2n} < \ell_p \leq \ell_d < S_{2n+1} < \ldots < S_3 < S_1$$

per ogni n. Da $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ si ha poi

$$0 < \ell_d - \ell_p < a_{2n+1} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

da cui necessariamente

$$\ell_p = \ell_d.$$

La successione S_n converge dunque al valore comune ℓ di ℓ_p ed ℓ_d. Infine è chiaro da quanto precede che il valore S_n approssima ℓ per difetto se n è pari, per eccesso se n è dispari. In ogni caso

$$|S_n - \ell| < |S_n - S_{n+1}| = a_{n+1}.$$

□

Esempio 3.3. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ad essa si applica il criterio di Liebniz con $a_n = 1/n$, quindi converge. Se consideriamo la convergenza assoluta, ci riconduciamo alla serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge. Questo esempio mostra che **si può avere convergenza semplice senza convergenza assoluta.**

Esempio 3.4. Generalizziamo l'esempio precedente considerando la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}},$$

con α parametro reale. Per $\alpha > 1$ si ha convergenza assoluta, quindi anche semplice. Per $0 < \alpha \leq 1$ non si ha convergenza assoluta ma, per il criterio di Liebniz, si ha convergenza semplice. Per $\alpha \leq 0$ è violata la condizione necessaria, quindi non si ha convergenza.

• Integrali semplicemente convergenti
La teoria delle serie e quella dell'integrazione hanno vari punti di contatto in maniera naturale, si veda il criterio dell'integrale per serie a termini positivi. Ne vogliamo illustrare un altro importante.

Consideriamo una funzione $f : [a,+\infty) \to \mathbf{R}$, sommabile su ogni intervallo $[a,b]$. In particolare esiste, finito o $+\infty$, il limite di funzione crescente della variabile b

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b |f(x)|dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f_+(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f_-(x)dx,$$

dove le funzioni non negative f_+ ed f_- sono determinate dalle uguaglianze $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.
Quando l'integrale di $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ risulta finito, la funzione si dice sommabile su $[a,+\infty)$ ed esiste finito anche l'integrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f_+(x)dx - \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f_-(x)dx.$$

Usando la stessa terminologia delle serie, nel caso di funzione sommabile su $[a,+\infty)$, l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ si dice assolutamente convergente.

Può accadere, come vedremo nell'esempio seguente, che esista finito

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

senza che la funzione f sia sommabile su $[a,+\infty)$. In tutti i casi in cui tale limite esiste finito, esso viene comunque indicato con il simbolo $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e si dice che l'integrale è semplicemente convergente.
Come nelle serie, anche nell'integrale la assoluta convergenza implica quindi la convergenza semplice. Vediamo che, in generale, non vale il viceversa:

Esempio 3.5. Consideriamo la funzione

$$f : [2\pi,+\infty) \to \mathbf{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Essa alterna in segno negli intervalli $[n\pi,(n+1)\pi]$, $n \geq 2$, e soddisfa $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Indichiamo con A_n l'area

$$A_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|dx, \quad n \geq 2.$$

Chiaramente, la convergenza, semplice o assoluta, dell'integrale

$$\int_{2\pi}^{+\infty} f(x)dx$$

corrisponde alla convergenza, rispettivamente semplice o assoluta, della serie a segni alterni

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}A_n.$$

Dal fatto che $1/x$ è strettamente decrescente per $x > 0$ mentre $|\sin x|$ è periodica di periodo π, si ha che la successione A_n decresce.
Sempre dal fatto che $1/x$ decresce, si ha poi

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|dx < \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx < \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|dx$$

che si legge, tenendo conto che $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ ed usando la periodicità,

$$\frac{2}{(n+1)\pi} < A_n < \frac{2}{n\pi}.$$

In particolare $A_n \to 0$ e, ricordando che decresce, si può dedurre che la serie a segni alterni $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}A_n$ converge per Leibniz.
D'altra parte, da $A_n > 2/(n+1)\pi$, abbiamo che la serie a termini positivi $\sum_{n=2}^{\infty} A_n$ diverge per confronto con la serie armonica.

Ne segue che l'integrale

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

converge semplicemente ma non assolutamente.

4. Serie di potenze reali

• Definizione e teorema sulla convergenza

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ fissato e sia a_n, $n \geq 0$, una successione di numeri reali. La serie di termine generale dipendente dalla variabile reale x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

si dice **serie di potenze** di punto iniziale x_0 e coefficienti a_n. L'insieme dei punti x in cui la serie converge è il dominio naturale D della funzione di variabile x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Evidentemente $x_0 \in D$ e $f(x_0) = a_0$. La prima importante proprietà delle serie di potenze è che, quando D non si riduce al solo punto $\{x_0\}$, il dominio D è un intervallo di centro x_0, eventualmente l'intero asse reale. Questo si deduce dal teorema seguente dove si prende $x_0 = 0$, situazione a cui ci si può sempre ricondurre con una traslazione.

Teorema 4.1. *Se la serie di potenze* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge semplicemente per* $x = \bar{x}$ *con* $\bar{x} \neq 0$*, allora converge assolutamente e semplicemente per ogni* x *tale che* $|x| < |\bar{x}|$.

Dimostrazione. La serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ converge quindi $a_n \bar{x}^n \to 0$. In particolare, visto che ogni successione convergente è limitata, esiste $M > 0$ tale che per ogni n

$$|a_n \bar{x}^n| \leq M.$$

Per ogni x tale che $|x| < |\bar{x}|$, abbiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \bar{x}^n| \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n,$$

quindi la serie data converge assolutamente in tali x per confronto con la serie geometrica di ragione

$$\left|\frac{x}{\bar{x}}\right| < 1.$$

Come sempre, la convergenza assoluta porta anche la convergenza semplice.

$\square$

•Raggio di convergenza

Il teorema precedente dice che l'insieme di tutti gli x in cui converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è un intervallo di raggio R, $0 \leq R \leq +\infty$, centrato in $x_0 = 0$. Tale R si dice **raggio di convergenza** della serie. I casi $R = 0$ ed $R = +\infty$ corrispondono rispettivamente a convergenza nel solo punto $x_0 = 0$ e convergenza su tutto $\mathbf{R}$, mentre, per $0 < R < +\infty$, la serie converge assolutamente e semplicemente per $|x| < R$ e non converge per $|x| > R$. In questo ultimo caso, il comportamento nei punti estremi $x = \pm R$ varia da serie a serie e può essere di qualsiasi tipo, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 4.2. La serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è la serie di potenze con tutti i coefficienti $a_n = 1$. Essa converge se e solo se $|x| < 1$ quindi il raggio di convergenza vale $R = 1$ e la serie non converge in alcuno dei due estremi $x = \pm 1$.

Esempio 4.3. Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Per determinarne il raggio di convergenza R, ricordiamo che all'interno dell'intervallo di raggio R la convergenza è assoluta ed applichiamo il criterio della radice al termine $|x|^n/n$:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|.$$

Il criterio della radice consente di concludere che per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente mentre per $|x| > 1$ non converge in quanto il termine generale non tende a 0. Il raggio di convergenza vale dunque $R = 1$.
Esaminiamo il comportamento negli estremi. Per $x = 1$ si ottiene la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ quindi la serie non converge. Per $x = -1$ invece si ottiene la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente per Leibniz.

Esempio 4.4. Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Per determinarne il raggio di convergenza R, come sopra ricordiamo che all'interno dell'intervallo di raggio R la convergenza è assoluta ed applichiamo un criterio di convergenza ai termini positivi $|x|^n/n^2$. Lasciando la semplice applicazione del criterio della radice al lettore, usiamo questa volta il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|^n} = \lim_{n \to +\infty} |x| \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x|.$$

Come nell'esempio precedente, il criterio consente di concludere che per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente mentre per $|x| > 1$ non converge in quanto il termine generale non tende a 0. Il raggio di convergenza vale dunque ancora $R = 1$.
Questa volta però, la serie converge in entrambi gli estremi $x = \pm 1$ e lo fa assolutamente in quanto la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Gli esempi precedenti fanno capire anche come i criteri della radice e del rapporto possono essere impiegati nel determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Teorema 4.5. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell, \quad 0 \le \ell \le +\infty.$$

Allora la serie ha raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\ell}$$

dove per $\ell = 0$ *e* $\ell = +\infty$ *si intende* $R = +\infty$ *e* $R = 0$ *rispettivamente.*

Dimostrazione. Visto che all'interno dell'intervallo di raggio R la convergenza è assoluta, applichiamo il criterio della radice al termine $|a_n||x|^n$, $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \lim_{n\to+\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\ell,$$

dove, per $\ell = +\infty$, si intende $|x| \cdot +\infty = +\infty$.
Il criterio della radice consente di concludere che per $|x|\ell < 1$ la serie converge assolutamente mentre per $|x|\ell > 1$ non converge in quanto il termine generale non tende a 0. Il raggio di convergenza vale dunque $R = 1/\ell$ dove il reciproco di ℓ va inteso nel senso dei limiti per $\ell = 0$ o $\ell = +\infty$.

□

Teorema 4.6. *Data la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*,* $a_n \neq 0$*, supponiamo che esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell, \quad 0 \le \ell \le +\infty.$$

Allora la serie ha raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\ell}$$

dove per $\ell = 0$ *e* $\ell = +\infty$ *si intende* $R = +\infty$ *e* $R = 0$ *rispettivamente.*

Dimostrazione. Visto che all'interno dell'intervallo di raggio R la convergenza è assoluta, applichiamo il criterio del rapporto al termine $|a_n||x|^n$, $x \neq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = \lim_{n\to+\infty} |x| \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|\ell,$$

dove, per $\ell = +\infty$, si intende $|x| \cdot +\infty = +\infty$.
Il criterio del rapporto consente di concludere che per $|x|\ell < 1$ la serie converge assolutamente mentre per $|x|\ell > 1$ non converge in quanto il

termine generale non tende a 0. Il raggio di convergenza vale dunque $R = 1/\ell$ dove il reciproco di ℓ va inteso nel senso dei limiti per $\ell = 0$ o $\ell = +\infty$.

$\square$

Esempio 4.7. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ è una serie di potenze in x con coefficienti $a_0 = 0$, $a_n = 1/n^n$ per $n \geq 1$. Da

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

segue

$$R = +\infty$$

quindi la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Esempio 4.8. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!(-x)^n}{n^n}$ è una serie di potenze in x con coefficienti $a_0 = 0$, $a_n = (-1)^n(2n)!/n^n$ per $n \geq 1$. Abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = +\infty \cdot \frac{1}{e} = +\infty.$$

Ne segue

$$R = 0$$

quindi la serie converge solo per $x = 0$ dove vale a_0, quindi 0 in questo caso.

Precisamente, abbiamo che per ogni $x \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!|x|^n}{n^n} = +\infty,$$

in particolare $(2n)!$ è un infinito di ordine superiore a n^n.

Esempio 4.9. Consideriamo la serie di potenze in $x - 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n}{3^n + n}(x-1)^n.$$

Col criterio del rapporto applicato ai coefficienti, abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+n+1}{3^{n+1}+n+1}\cdot\frac{3^n+n}{2^n+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3},$$

quindi

$$R = \frac{3}{2}.$$

Dal momento che il punto iniziale qui è $x_0 = 1$, la serie converge assolutamente per ogni x nell'intervallo

$$\left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Vediamo il comportamento agli estremi. Per $x = -1/2$ e $x = 5/2$ si ottengono le rispettive serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n+n}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n}{3^n+n}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n,$$

i cui termini generali non tendono a zero. La serie di potenze non converge agli estremi.

- **Derivazione per serie**

Veniamo ora ad esaminare la regolarità di una funzione definita da una serie di potenze. Iniziamo con la regolarità nei punti **interni** dell'intervallo di convergenza.

Teorema 4.10. *Consideriamo la funzione $f(x)$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

definita attraverso una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Consideriamo poi la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

che si ottiene derivando ciascun termine della serie data.
Allora le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza R, la funzione $f(x)$ risulta derivabile per ogni x con $x_0 - R < x < x_0 + R$ con derivata

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

Non diamo la dimostrazione di questo teorema, ci limitiamo a commentarne le importanti conseguenze.
Innanzitutto, esso dice che, **all'interno** dell'intervallo di definizione, per **derivare/integrare** una funzione definita attraverso una serie di potenze, si può **derivare/integrare termine a termine**. Si ottiene una derivata/primitiva espressa attraverso una serie di potenze che ha lo stesso raggio di convergenza di quella assegnata.

Esempio 4.11. Consideriamo la serie geometrica di ragione $-x$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^n + \ldots$$

che sappiamo convergere se e solo se $-1 < x < 1$ e di cui conosciamo la somma:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-x)^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Integrando termine a termine, abbiamo

$$\log(1+x) + c = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Ponendo $x = 0$, si ottiene che la costante d'integrazione vale $c = 0$, quindi abbiamo ottenuto il seguente sviluppo in serie della funzione $\log(1+x)$:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

In questo esempio si può verificare che il raggio di convergenza è ancora $R = 1$, come per la serie geometrica, ad esempio dal limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

• **Lemma di Abel**
Vediamo ora cosa si può dire agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Teorema 4.12. (Lemma di Abel) *Consideriamo la funzione $f(x)$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

definita attraverso una serie di potenze con raggio di convergenza R, $0 < R < +\infty$. Supponiamo che la serie converga anche per $x = x_0 + R$, *quindi che la funzione $f(x)$ sia definita anche in $x_0 + R$ con valore*

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Allora la funzione $f(x)$ è continua in $x_0 + R$ in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to x_0 + R} f(x).$$

Analogo risultato vale nell'estremo $x_0 - R$.

Esempio 4.13. La serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Nell'estremo $x = 1$ si riduce alla serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ che converge per Leibniz. D'altra parte, dall'esempio 4.11, sappiamo che per $|x| < 1$ la serie converge a $\log(1 + x)$. Dal Lemma di Abel, concludiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \lim_{x \to 1} \log(1 + x),$$

cioè

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \ldots$$

Per quanto riguarda la derivabilità agli estremi, ricordiamo che se una funzione $f : I \to \mathbf{R}$, definita su un intervallo I, è continua in $\bar{x} \in I$ ed esiste finito il limite $\lim_{x \to \bar{x}} f'(x) = \ell$, allora $f(x)$ è derivabile in $\bar{x}$ con $f'(\bar{x}) = \ell$. Infatti, dal teorema del valor medio, o, se si vuole, dalle regole di De L'Hospital, segue

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{x \to \bar{x}} f'(x).$$

Abbiamo quindi il seguente corollario del Lemma di Abel:

Corollario 4.14. *Consideriamo la funzione $f(x)$*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

definita attraverso una serie di potenze con raggio di convergenza R, $0 < R < +\infty$, e la sua derivata per $|x - x_0| < R$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 (x - x_0) + \ldots + n a_n (x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

Supponiamo che sia la serie data che la sua derivata convergano nell'estremo $x_0 + R$.
Allora, la funzione $f(x)$ è derivabile per $x = x_0 + R$ con derivata

$$f'(x_0 + R) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1} = a_1 + 2a_2 R + \ldots + n a_n R^{n-1} + \ldots$$

Analogo risultato vale per $x = x_0 - R$.

- **Serie di Taylor**

Abbiamo visto che una funzione $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

definita attraverso una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ è derivabile per $|x - x_0| < R$ e che la sua derivata è definita dalla serie di potenze

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n a_n (x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

che si ottiene derivando ciascun termine della serie data e che ha lo stesso raggio di convergenza.
Applicando lo stesso risultato alla serie che fornisce $f'(x)$, abbiamo che nell'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ la funzione $f(x)$ è derivabile due volte con

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} =$$
$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Continuando ad applicare lo stesso risultato, si ottiene che la funzione $f(x)$ ha derivate di ogni ordine m per $|x - x_0| < R$ con

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n (x - x_0)^{n-m} =$$
$$m! a_m + (m+1)! a_{m+1}(x-x_0) + \ldots + n(n-1)\cdots(n-m+1) a_n (x-x_0)^{n-m} + \ldots$$

In particolare, ponendo $x = x_0$, per tutti gli m si ottiene

$$a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}.$$

La serie che definisce $f(x)$ si può quindi riscrivere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R.$$

La somma parziale

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è il **polinomio di Taylor** di ordine n e punto iniziale x_0 della funzione $f(x)$. Per questo motivo la serie si dice **serie di Taylor** di punto iniziale x_0 della funzione $f(x)$.

Abbiamo quindi provato che, per $|x-x_0| < R$, **ogni serie di potenze è la serie di Taylor della funzione** $f(x)$ **che essa definisce**.

• **Funzioni sviluppabili in serie di Taylor**

Per scrivere la serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

di una data funzione $f(x)$ di punto iniziale x_0, basta che la funzione sia derivabile di ogni ordine per $x = x_0$. Non è affatto scontato che la serie abbia un raggio di convergenza $R > 0$ e, anche ammesso questo, che converga ad $f(x)$ per $|x-x_0| < R$: potrebbe convergere ad una funzione $g(x) \neq f(x)$ che ha le stesse derivate di $f(x)$ nel punto x_0, $g^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.15. Consideriamo la funzione

$$f(x) = 0,\ x \le 0; \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}},\ x > 0.$$

La funzione $f(x)$ è continua per $x = 0$ dal momento che

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

Di più, la funzione ha derivate nulle di ogni ordine per $x = 0$. Infatti, si mostra per induzione che per ogni n

$$f^{(n)}(x) = 0,\ x < 0; \quad f^{(n)}(x) = P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}},\ x > 0$$

con P_{2n} polinomio di grado $2n$, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0.$$

La serie di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale $x_0 = 0$ è dunque la serie identicamente nulla, eppure $f(x)$ non è la funzione identicamente nulla in alcun intervallo $(-r, r)$, $r > 0$.

Quando invece accade che per $R > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < R,$$

la funzione si dice **sviluppabile in serie di Taylor** di punto iniziale x_0.

Abbiamo visto che una funzione definita attraverso una serie di potenze è sviluppabile in serie di Taylor perchè la serie è in realtà la serie di Taylor della propria funzione somma. L'esempio precedente mostra che non tutte le funzioni sono definibili attraverso serie di potenze.

Ricordiamo che la somma parziale di indice n nella serie di Taylor

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

è il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$, e scriviamo la formula di Taylor di ordine n con resto $E_n(x)$:

$$f(x) = S_n(x) + E_n(x).$$

Per definizione,

$f(x)$ **è sviluppabile in serie di Taylor** $\iff \lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0$ **per ogni** $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$**.**

Risulta molto utile in questo contesto la rappresentazione del resto alla maniera di Lagrange

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

per un c compreso tra x_0 ed x come mostrano i seguenti importanti esempi.

Esempio 4.16. La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di Taylor con $x_0 = 0$ e raggio $R = +\infty$.

Consideriamo infatti $x \in (-r, r)$ con $r > 0$ arbitrario e scriviamo la formula di Mc Laurin di ordine n

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Abbiamo

$$\left|\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{e^r}{(n+1)!}r^{n+1}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

quindi il resto nella formula di Taylor tende a 0. Per l'arbitrarietà di r, abbiamo lo sviluppo in serie di Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

sull'intero asse reale.

In particolare, per $x = 1$,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

con convergenza molto più rapida della successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Esempio 4.17. La funzione $f(x) = \sin x$ è sviluppabile in serie di Taylor con $x_0 = 0$ e raggio $R = +\infty$.
Consideriamo infatti $x \in (-r, r)$ con $r > 0$ arbitrario e scriviamo la formula di Mc Laurin di ordine $2n + 1$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin c}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Abbiamo

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{\sin c}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| < \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$$

quindi il resto nella formula di Taylor tende a 0. Per l'arbitrarietà di r, abbiamo lo sviluppo in serie di Taylor

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

sull'intero asse reale.

Esempio 4.18. In maniera analoga all'esempio precedente, si prova lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

sull'intero asse reale.

Esempio 4.19. Abbiamo già visto nell'esempio 4.11 lo sviluppo in serie di potenze, quindi in serie di Taylor, di punto iniziale $x_0 = 0$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1,$$

con raggio di convergenza $R = 1$. Dal Lemma di Abel, abbiamo poi dedotto che lo sviluppo vale anche nell'estremo $x = 1$.

Esempio 4.20. Lasciamo al lettore provare gli sviluppi di punto iniziale $x_0 = 0$ sull'intero asse reale delle funzioni iperboliche

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Esempio 4.21. Per α esponente non intero positivo, si prova lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1,$$

con raggio di convergenza $R = 1$. Ricordiamo che per definizione, anche per α non intero positivo, si pone

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Questo sviluppo in **serie binomiale**, è stato provato da Newton. Quando $\alpha = m$ è intero positivo la serie si riduce al ben noto sviluppo finito di ordine m

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

con $\binom{m}{n}$ gli usuali coefficienti binomiali.

5. Serie in campo complesso

- **Convergenza in campo complesso**

La definizione di limite di successione si applica anche in campo complesso. Una successione di numeri complessi z_n converge al numero complesso w per $n \to +\infty$ quando per ogni intorno U di w i termini z_n appartengono definitivamente ad U. Ricordando che gli intorni di w

sono cerchi nel piano complesso di centro w e che la distanza euclidea in $\mathbf{C}$ tra i punti z e w è il modulo $|z-w|$, ciò equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - w| < \varepsilon.$$

In ulteriore maniera equivalente

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = w \ \text{ in } \mathbf{C} \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n - w| = 0 \ \text{ in } \mathbf{R}_+$$

che si legge z_n converge a w in campo complesso se e solo se la distanza tra z_n e w converge a 0 in campo reale.

Per $z = x + iy$ di parte reale $\Re z = x$ e parte immaginaria $\Im z = y$, abbiamo $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ e valgono le disuguaglianze di facile verifica

$$|x| \le \sqrt{x^2+y^2}, \quad |y| \le \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le |x| + |y|.$$

Da esse, col confronto, per $z_n = x_n + iy_n$ e $w = a + ib$, abbiamo anche l'equivalenza tra la convergenza in campo complesso e la convergenza in campo reale di entrambe le coordinate:

$$z_n \to w \ \text{ in } \mathbf{C} \Longleftrightarrow x_n \to a \wedge y_n \to b \ \text{ in } \mathbf{R}.$$

•Serie a termini complessi

La struttura algebrica di $\mathbf{C}$ consente di definire le serie anche in campo complesso. Per z_n successione complessa e $\ell \in \mathbf{C}$, si dirà che $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge ad ℓ quando la successione delle somme parziali $S_n \to \ell$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$, in maniera del tutto analoga alle serie reali. Mettendo in evidenza la parte reale e la parte immaginaria, per $z_n = x_n + iy_n$ ed $\ell = a + ib$, questo equivale alla convergenza di entrambe le serie reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

Rimane valida la condizione necessaria e sufficiente di Cauchy per la convergenza. La sufficienza di tale condizione viene presa come definizione di completezza del campo complesso. In particolare, permane la condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \ \text{ in } \mathbf{C},$$

che, ricordiamo, equivale a

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0 \ \text{ in } \mathbf{R}_+.$$

Come in campo reale, dalla condizione di Cauchy segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ converge in } \mathbf{R}_+ \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge in } \mathbf{C}$$

che si legge

$$\text{assoluta convergenza} \Longrightarrow \text{semplice convergenza.}$$

Mettiamo in evidenza che nello studio della assoluta convergenza si possono applicare i criteri per serie a termini reali positivi perchè tale è $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Ovviamente non vale l'implicazione inversa dal momento che già sappiamo che non vale nel sottocampo reale.

Esempio 5.1. Studiamo il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+i)}$.
Abbiamo

$$\left|\frac{1}{n(n+i)}\right| = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n^2},$$

da cui la serie a termini reali positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n(n+i)}\right|$ converge avendo lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. La serie data converge assolutamente quindi anche semplicemente in campo complesso.

Esempio 5.2. Studiamo il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1)^n n + i}$.
Abbiamo

$$\left|\frac{1}{(-1)^n n + i}\right| = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{2n} n^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n},$$

da cui la serie a termini reali positivi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{(-1)^n n + i}\right|$ non converge avendo lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. La serie data non converge assolutamente.
Esaminiamo la convergenza semplice attraverso le serie delle parti reali e immaginarie. Abbiamo

$$\frac{1}{(-1)^n n + i} = \frac{1}{(-1)^n n + i} \cdot \frac{(-1)^n n - i}{(-1)^n n - i} = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} - i\frac{1}{n^2+1}.$$

La serie a termini reali positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge per confronto con la serie armonica generalizzata convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, quindi la serie delle parti immaginarie converge.
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ converge per Leibniz. Per verificare che la successione $n/(n^2+1)$ è decrescente, basta considerare la funzione di variabile reale $x/(x^2+1)$, derivarla ed osservare che ha derivata negativa per $x > 1$.
Poichè convergono in campo reale entrambe le serie delle parti reali e immaginarie, la serie data converge in campo complesso anche se non converge assolutamente.

• **Serie di potenze in campo complesso**
La struttura algebrica di $\mathbf{C}$ consente di definire le serie di potenze anche in campo complesso. La serie di variabile **complessa** z, coefficienti **complessi** a_n e punto iniziale $z_0 \in \mathbf{C}$ si scrive

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

In analogia a quanto accade in campo reale si ha:

Teorema 5.3. *Se la serie converge semplicemente in $w \neq z_0$, allora converge assolutamente in ogni z tale che $|z - z_0| < |w - z_0|$.*

Se l'insieme di convergenza non si riduce al solo punto $\{z_0\}$, allora la serie converge assolutamente all'interno di un cerchio centrato in z_0. Si definisce il raggio di convergenza R attraverso

$$R = \sup\{|w - z_0| : \text{la serie converge in } w\},$$

dove $R = 0$ se la serie converge solo in z_0, $R = +\infty$ se la serie converge in tutti i punti del piano complesso. Per $0 < R < +\infty$, la serie converge assolutamente nei punti interni al cerchio di centro z_0 e raggio R, non converge nei punti esterni. Nei punti della circonferenza di frontiera, il carattere può variare da serie a serie e da punto a punto.

Dal momento che all'interno la convergenza è assoluta, anche per coefficienti complessi si possono usare i criteri

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \Longrightarrow R = \frac{1}{\ell},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \Longrightarrow R = \frac{1}{\ell},$$

dove il reciproco di ℓ va inteso nel senso dei limiti quando $\ell = 0$ o $\ell = +\infty$.

• Funzioni elementari di variabile complessa
La sviluppabilità in serie delle funzioni elementari di variabile reale consente di estendere la loro definizione al campo complesso. Ad esempio, da
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R},$$
si **definisce**
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbf{C}.$$
Questa ultima serie converge in tutto il piano complesso dal momento che il cerchio di convergenza deve contenere l'intero asse reale. Ragionando poi sulle somme parziali, si prova la proprietà fondamentale dell'esponenziale
$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}$$
per ogni $z, w \in \mathbf{C}$. Analogamente, si estendono all'intero piano complesso le funzioni seno e coseno:
$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$
Da
$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!},$$
tenendo conto che la successione i^n assume con periodo 4 i valori $1, i, -1, -i$ nell'ordine, si ottiene la **formula di Eulero**
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$
Da questa e dalla stessa formula con $-z$ in luogo di z
$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$
sommando e sottraendo, si ottengono le altre formule di Eulero
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$
Le formule di Eulero sono spesso utilizzate per $z = x$, x reale,
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad x \in \mathbf{R},$$
per potere utilizzare le proprietà dell'esponenziale anche quando si devono manipolare funzioni goniometriche.

Da esse segue anche una utile rappresentazione dell'esponenziale complesso e^z per $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Questa è la forma trigonometrica di e^z dalla quale risulta chiaro che il suo modulo vale e^x mentre y è un suo argomento.