View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Almae Matris Studiorum Campus

ANALISI MATEMATICA B

Esercizio 1. Data la funzione $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$

A) Determinarne il dominio;

Posto $t = t(x) = (1-x)/x$ e $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$, si ha $f(x) = g(t(x))$. L'intervallo di convergenza della serie di potenze $g(t)$ è $-1 \leq t < 1$; infatti il raggio di convergenza vale 1, per $t = 1$ si ha la serie armonica che non converge e per $t = -1$ si ha una serie a segni alterni che soddisfa il criterio di Liebniz quindi converge. Imponendo che $t(x)$ appartenga a tale intervallo si ottiene la condizione $x > 1/2$ che identifica il dominio di $f(x)$.

B) Motivare la presenza di un asintoto orizzontale al grafico;

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(t(x)) = \lim_{t\to-1} g(t) = g(-1)$$

in quanto la serie di potenze converge per $t = -1$ ed è ivi continua per il Lemma di Abel.

C) Utilizzando la somma della serie geometrica, esplicitare la derivata $f'(x)$;

Per la derivata della funzione composta $f'(x) = t'(x)g'(t(x))$. Si ha $t'(x) = -1/x^2$ mentre, derivando termine a termine per $-1 < t < 1$, si ottiene la serie geometrica

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = 1 + t + t^2 + \ldots = \frac{1}{1-t}.$$

Concludendo

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-x}{x}} = -\frac{1}{x(2x-1)}.$$

D) Ricavare da C) una espressione esplicita di $f(x)$.

Integrando coi fratti semplici, sempre per $x > 1/2$, si ha

$$f(x) = -\int \frac{1}{x(2x-1)} dx = \log \frac{x}{2x-1} + c, \quad x > 1/2.$$

Infine, da $f(1) = g(t(1)) = g(0) = 0$, si ricava $c = 0$ quindi si conclude

$$f(x) = \log \frac{x}{2x-1}, \quad x > 1/2.$$

Esercizio 2. Si consideri il campo vettoriale piano $F = (2x + y + 2, 2y + x)$.

A) Senza determinarli esplicitamente prima della domanda F), provare che F ha potenziali globali $U(x, y)$;

Date: 15 giu 2011.

Posto $f_1 = 2x + y + 2$ e $f_2 = 2y + x$, da $\partial_y(f_1) = 1 = \partial_x(f_2)$ si verifica la condizione necessaria di chiusura. Il dominio di F è tutto il piano quindi è semplicemente connesso: ne segue che la condizione di chiusura è qui anche sufficiente per l'esistenza di potenziali globali. Si tenga conto nel seguito che, per definizione di potenziale,

$$U_x = f_1 = 2x + y + 2,\ U_y = f_2 = 2y + x.$$

B) Provare che la superficie grafico $z = U(x, y)$ in ogni suo punto giace localmente al di sopra del piano tangente;

Dalla formula di Taylor al secondo ordine, questo equivale a dire che la matrice hessiana H è definita positiva in ogni punto. Tale hessiana è a termini costanti

$$U_{xx} = 2,\ U_{xy} = U_{yx} = 1,\ U_{yy} = 2$$

ed è definita positiva in forza di

$$U_{xx} > 0,\ \det(H) > 0.$$

C) Determinare i punti critici liberi del potenziale $U(x, y)$ e classificarli da B);

Solo $P = (-4/3, 2/3)$ è punto critico ed è di minimo relativo per quanto visto in B).

D) Tramite la regola della catena, provare che il potenziale $U(x, y)$ ha un minimo assoluto vincolato sulla semicirconferenza di centro $(-1, 0)$ e raggio 1 parametrizzata da $x = -1 + \cos t, y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi$;

Abbiamo

$$\frac{dU}{dt} = U_x x'(t) + U_y y'(t) = (2\cos t + \sin t)\cdot(-\sin t) + (2\sin t - 1 + \cos t)\cos t = \cos^2 t - \sin^2 t - \cos t$$

da cui anche

$$\frac{dU}{dt} = 2\cos^2 t - 1 - \cos t.$$

Da questa ultima espressione, nell'intervallo $0 < t < \pi$, la derivata si annulla per $t = 2\pi/3$, è negativa per $0 < t < 2\pi/3$, positiva per $2\pi/3 < t < \pi$. La funzione $U(x(t), y(t))$ ha quindi per minimo assoluto il valore

$$U(x(2\pi/3), y(2\pi/3)) = U(-3/2, \sqrt{3}/2).$$

E) Dalla definizione, ricavare il lavoro del campo F sulla semicirconferenza al punto D) orientata dalla parametrizzazione ivi espressa.

Il lavoro vale

$$\int_0^\pi (f_1 x' + f_2 y')dt = \int_0^\pi (U_x x' + U_y y')dt = \int_0^\pi \frac{dU}{dt} dt = \int_0^\pi (\cos^2 t - \sin^2 t - \cos t)dt =$$
$$\int_0^\pi (\cos(2t) - \cos t)dt = \left[\frac{1}{2}\sin(2t) - \sin t\right]_0^\pi = 0.$$

F) Ricavare ora una espressione esplicita dei potenziali $U(x,y)$.

Si ha $U = \int(2x + y + 2)dx = x^2 + xy + 2x + h(y)$ ed imponendo $U_y = x + 2y$ si ottiene $h'(y) = 2y$ da cui $h(y) = y^2 + c$. Concludendo

$$U = x^2 + xy + y^2 + 2x + c.$$

G) Riottenere da F) il risultato di D) col metodo dei moltiplicatori di Lagrange una volta osservato che sulla semicirconferenza $U(x,y) = xy$ a meno di costanti.

L'equazione cartesiana della semicirconferenza è

$$x^2 + y^2 + 2x = 0, \ y \geq 0.$$

Sotto questa condizione si ha proprio $U = xy + c$. Questa funzione può avere massimo/minimo agli estremi della semicirconferenza $(-2,0), (0,0)$ o nella unica soluzione $(-3/2, \sqrt{3}/2)$ del sistema di Lagrange

$$\begin{cases} y + 2\lambda(x+1) = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

Avendo ora a disposizione una espressione esplicita di $U(x,y)$ si vede che gli estremi sono punti di massimo mentre si riottiene che $(-3/2, \sqrt{3}/2)$ è il punto di minimo.

H) Riottenere da F) il risultato di E).

Il lavoro vale $U(-2,0) - U(0,0) = 0$ come in E).

Esercizio 3. Determinare il volume del solido $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq (x^2+y^2)^{1/2}\}$ generato da una rotazione completa attorno all'asse z dell'insieme piano $B = \{(r,z) : r^2 \leq z \leq r\}$. Eseguire l'integrale doppio su B che ne segue secondo entrambe le riduzioni possibili $dzdr$ e $drdz$.

Il volume vale

$$\int\int\int_A dxdydz = 2\pi \int\int_B rdrdz$$

passando a coordinate cilindriche come sempre si fa nelle rotazioni assiali. Una prima riduzione fornisce

$$2\pi \int_0^1 r \int_{r^2}^{r} dzdr = 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3)dr = \frac{\pi}{6}.$$

Seguendo l'altra riduzione si ha ancora

$$2\pi \int_0^1 \int_z^{\sqrt{z}} rdrdz = \pi \int_0^1 (z - z^2)dz = \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $x(t) = u(2-t)e^t$ con $u(t) = 1_{(0,+\infty)}$ il gradino unitario.

A) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{x}(\omega)$.

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{2} e^{t(1-i\omega)}dt = \frac{1}{1-i\omega}\left[e^{t(1-i\omega)}\right]_{-\infty}^{2} = \frac{e^{2(1-i\omega)}}{1-i\omega}.$$

B) Verificare il risultato di A) con la formula di antitrasformazione.

L'antitrasformata vale

$$\frac{e^2}{2\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\omega(t-2)}}{1-i\omega} d\omega.$$

Nel punto di salto $t = 2$, si può applicare il calcolo delle primitive ed integrare separatamente la parte reale $1/(\omega^2+1)$ e la parte immaginaria $\omega/(\omega^2+1)$ di $1/(1-i\omega)$. Questa ultima ha integrale nullo per ogni R per simmetria dispari. Integrando la parte reale, il risultato della antitrasformata è $e^2/2$ che corrisponde a $(x(2^+) + x(2^-))/2$.

Per $t \neq 2$ si considera la funzione di variabile complessa $z = \omega + iy$

$$f(z) = \frac{e^{iz(t-2)}}{1-iz} = \frac{e^{iz(t-2)}}{-i(z+i)}$$

che ha un polo semplice per $z = -i$ con residuo

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{e^{t-2}}{-i}.$$

Tenendo conto di

$$\left|e^{iz(t-2)}\right| = \left|e^{i(\omega+iy)(t-2)}\right| = e^{-y(t-2)}$$

si deve integrare nel semipiano $y > 0$ per $t > 2$ mentre si deve integrare nel semipiano $y < 0$ per $t < 2$.

Nel caso $t < 2$, tenendo conto dell'orientamento orario quando si integra nel semipiano inferiore, l'antitrasformata vale

$$\frac{1}{2\pi e^2} \cdot (-2\pi i) \cdot \text{Res}(f, -i) = \frac{e^2}{2\pi} \cdot (-2\pi i) \cdot \frac{e^{t-2}}{-i} = e^t$$

mentre per $t > 2$ vale 0 in quanto nel semipiano $y > 0$ non ci sono singolarità di $f(z)$.

In ogni caso, nei punti di continuità $t \neq 2$, l'antitrasformata vale $x(t)$.

C) Determinare la derivata x' nel senso delle distribuzioni seguendo la definizione.

Si ha

$$\langle x'(t), \varphi(t)\rangle = -\langle x(t), \varphi'(t)\rangle = -\int_{-\infty}^{2} e^t \varphi'(t)dt = -\left[e^t\varphi(t)\right]_{-\infty}^{2} + \int_{-\infty}^{2} e^t\varphi(t)dt =$$

$$-e^2\varphi(2) + \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t)dt = -e^2\langle\delta(t-2), \varphi(t)\rangle + \langle x(t), \varphi(t)\rangle$$

quindi

$$x'(t) = -e^2\delta(t-2) + x(t).$$

D) Calcolare $\hat{x'}$ direttamente dal risultato di C) e verificare poi la relazione attesa con $\hat{x}$.

Tenendo conto anche di A), si ha

$$\hat{x'}(\omega) = -e^2 \cdot e^{-2i\omega} + \frac{e^{2(1-i\omega)}}{1-i\omega} = \frac{i\omega e^{2(1-i\omega)}}{1-i\omega}$$

che verifica

$$\hat{x'}(\omega) = i\omega\hat{x}(\omega).$$

E) Verificare l'uguaglianza di Parseval.

Si deve verificare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega.$$

Il primo membro vale

$$\int_{-\infty}^{2} e^{2t}dt = \frac{e^4}{2}.$$

Il secondo, tenendo conto di $|e^{-2i\omega}| = 1$ e di $|1-i\omega|^2 = \omega^2+1$, vale anch'esso

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^4}{\omega^2+1} d\omega = \frac{e^4}{2}.$$