

## ANALISI MATEMATICA B

**Esercizio 1.** È data la funzione polinomiale di 2 variabili reali

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + \frac{2}{3}y^3 - 2x - 2y.$$

A) Determinare i punti critici e classificarli.

B) Determinare il punto  $Q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $y_0 \neq 0$ , dello spazio in cui il piano tangente alla superficie  $z = f(x, y)$  ha equazione  $z = z_0 - 2(x - x_0) - 2(y - y_0)$ .

Considerare poi le rette di tale piano passanti per  $Q_0$  accoppiate con le rette, loro proiezioni, del piano  $(x, y)$  passanti per  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Determinare secondo quali direzioni  $v = (v_1, v_2)$  del piano  $(x, y)$  si ha una coppia di rette parallele e secondo quali direzioni si ha una coppia con massima inclinazione. Scrivere infine l'equazione cartesiana delle due rette così selezionate nel piano  $(x, y)$ .

C) Determinare il punto del piano tangente considerato in B) che ha minima distanza da  $P_0 = (x_0, y_0, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 2.** Determinare il volume del solido

$$A = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

generato da una rotazione completa attorno all'asse  $z$  dell'insieme piano

$$B = \{(r, z) : 0 \leq z \leq r, z \leq 2 - r^2\}.$$

Dedurre poi la coordinata  $r_G$  del baricentro  $G = (r_G, z_G)$  di  $B$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione  $u = x^3 - 3xy^2$ .

Provare che il campo  $(-u_y, u_x)$  è esatto e trovarne i potenziali  $v$ . Quale proprietà ha di conseguenza la funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$ , della variabile complessa  $z = x + iy$ ? Qual è l'espressione analitica di  $f(z)$  in termini della variabile  $z$ ?

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione  $x(t) = u(t)e^{-t} - u(-t)e^t$  con  $u(t) = 1_{(0, +\infty)}$  il gradino unitario.

A) Calcolare la trasformata di Fourier  $\hat{x}(\omega)$ .

B) Verificare il risultato di A) con la formula di antitrasformazione.

C) Determinare la derivata  $x'$  nel senso delle distribuzioni seguendo la definizione.

D) Calcolare  $\hat{x}'$  direttamente dal risultato di C) e verificare la relazione attesa con  $\hat{x}$ .