ANALISI MATEMATICA L-B, 2005-06.
INTEGRALI CURVILINEI

1. Curve

• Archi continui

Abbiamo già usato, nella definizione di insieme connesso, la nozione di arco continuo in $\mathbf{R}^n$ parametrizzato da

$$t \mapsto r(t) \in \mathbf{R}^n, \quad t \in [a, b]$$

con $r(t)$ funzione continua della variabile reale t nell'intervallo $[a, b]$ di componenti $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

sono dette, appunto, equazioni parametriche dell'arco.

Come al solito, nei casi $n = 2$ o $n = 3$, in luogo di (x_1, x_2) o (x_1, x_2, x_3), useremo le rispettive notazioni

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

o

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \\ \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b].$$

Ricordiamo che i punti $r(a)$ ed $r(b)$ si dicono estremi dell'arco, che per $r(a) \neq r(b)$, l'arco si dice aperto, che per $r(a) = r(b)$ l'arco si dice chiuso e che l'arco si dice semplice se la funzione $r(t)$ ristretta all'intervallo aperto (a, b) è una funzione iniettiva. Interpretando la parametrizzazione come punto mobile in $\mathbf{R}^n$, e t come variabile di tempo, questa ultima proprietà significa che una stessa posizione non può essere assunta in tempi diversi ad eccezione degli estremi nel caso degli archi chiusi.

Si può definire una relazione d'ordine (verso di percorrenza) tra i punti di un arco semplice diversi dagli estremi dicendo che $r(t_1)$ precede

$r(t_2)$ se e solo se $t_1 < t_2$. Per quanto riguarda gli estremi, chiameremo in ogni caso $r(a)$ punto iniziale ed $r(b)$ punto finale.

• **Archi regolari**

Diremo che l'arco semplice $r(t)$ è regolare quando la funzione vettoriale $r(t)$ è derivabile con derivata $r'(t)$ continua e tale che $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$. Questo consente di definire in ogni punto $r(t)$ dell'arco il versore tangente

$$T(r(t)) = \frac{r'(t)}{\|r(t)\|}.$$

Il versore tangente è una funzione continua di t. Interpretando la parametrizzazione come punto mobile, in ogni punto il versore tangente ha verso coerente con il verso di percorrenza.

La nozione di arco regolare si può generalizzare nella maniera seguente: diremo che l'arco continuo e semplice $r(t)$ è regolare a tratti quando esistono k punti $t_1, \ldots, t_k \in (a, b)$ tali che, ponendo $t_0 = a$ e $t_{k+1} = b$, ogni restrizione di $r(t)$ agli intervalli $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, k$, definisce un arco regolare di estremi $r(t_j)$ ed $r(t_{j+1})$ ma risulta $r'_-(t_j) \neq r'_+(t_j)$ per $j = 1, \ldots, k$.

In ogni punto $r(t)$ con $t \neq t_j$, $j = 1, \ldots, k$, è definito il versore tangente mentre nei punti $r(t_j)$ abbiamo versori tangenti sinistri e destri non allineati.

Esempio 1.1. Fissati due punti distinti nel piano $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, l'arco $r(t)$ in $\mathbf{R}^2$ parametrizzato da

$$\begin{cases} x = tx_Q + (1-t)x_P \\ \\ y = ty_Q + (1-t)y_P \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

rappresenta il segmento di punto iniziale P e punto finale Q.

Questo corrisponde alla definizione vettoriale di $r(t)$

$$r(t) = tQ + (1-t)P, \quad t \in [0,1].$$

La derivata $r'(t)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = x_Q - x_P \\ \\ y' = y_Q - y_P \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

In ogni punto dell'arco, il vettore costante $Q - P$ è tangente. Il versore tangente è $\frac{Q-P}{\|Q-P\|}$, la retta tangente è ovviamente la retta cui appartiene il segmento.

Esempio 1.2. L'arco $r(t)$ in $\mathbf{R}^2$ parametrizzato da

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = t^2 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

rappresenta l'arco di parabola $y = x^2$ di punto iniziale $(0,0)$ e punto finale $(1,1)$.
Quando, come in questo caso, una delle coordinate x, y è il parametro, la parametrizzazione si dice cartesiana e l'arco coincide con il grafico di una funzione $y = y(x)$ o $x = x(y)$.
La derivata $r'(t)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = 1 \\ \\ y = 2t \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

In ogni punto fissato (t, t^2), il vettore $(1, 2t)$ è tangente. Il versore tangente è

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(1, 2t).$$

Fissato ad esempio il punto $(1/2, 1/4)$ corrispondente al valore $t = 1/2$, il vettore $(1,1)$ è tangente. La retta tangente in questo punto ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1/2 + s \cdot 1 \\ \\ y = 1/4 + s \cdot 1 \end{cases} \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per avere l'equazione cartesiana di tale retta, basta eliminare il parametro s. Dalla prima equazione si ha $s = x - 1/2$ da cui, sostituendo nella seconda

$$y = x - \frac{1}{4}.$$

Ovviamente questo è lo stesso risultato che si ottiene partendo dalla equazione cartesiana $y = x^2$ e calcolando la derivata nel punto $x = 1/2$.

Esempio 1.3. Per $a, b > 0$ costanti fissate, l'arco chiuso $r(t)$ in $\mathbf{R}^2$ parametrizzato da

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ \\ y = b \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta l'ellisse di centro l'origine ed assi sugli assi cartesiani x ed y di rispettive lunghezze $2a$ e $2b$. Il punto $(a, 0)$ é il punto iniziale e finale, il verso di percorrenza è quello antiorario. Nel caso $a = b = R$ si

ottiene la circonferenza di centro l'origine e raggio R percorsa in senso antiorario a partire dal punto $(R, 0)$ fino a tornare in tale punto.
La derivata $r'(t)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = -a \sin t \\ \\ y' = b \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

In ogni punto fissato $(a \cos t, b \sin t)$, il vettore $(-a \sin t, b \cos t)$ è tangente. Il versore tangente è

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}(-a \sin t, b \cos t).$$

Fissato ad esempio il punto $(a\sqrt{3}/2, b/2)$ corrispondente al valore $t = \pi/6$, il vettore $(-a/2, b\sqrt{3}/2)$ è tangente. La retta tangente in questo punto ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a\sqrt{3}/2 + s \cdot (-a/2) \\ \\ y = b/2 + s \cdot b\sqrt{3}/2 \end{cases} \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Per avere l'equazione cartesiana di tale retta, basta ricavare il parametro s da una equazione e sostituire nell'altra.

Esempio 1.4. Consideriamo l'arco $r(t)$ in $\mathbf{R}^3$ parametrizzato da

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = t^2 \\ \\ z = t^3 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

di punto iniziale $(0, 0, 0)$ e punto finale $(1, 1, 1)$.

Eliminando il parametro t si ottengono le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} y = x^2 \\ \\ z = x^3 \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

che rappresentano l'arco come parte della intersezione di due superfici quindi come parte di una varietà di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 1.
La derivata $r'(t)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x' = 1 \\ \\ y = 2t \\ \\ z' = 3t^2 \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

In ogni punto fissato (t, t^2, t^3), il vettore $(1, 2t, 3t^2)$ è tangente. Il versore tangente è

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}(1, 2t, 3t^2).$$

Fissato ad esempio il punto $(1/2, 1/4, 1/8)$ corrispondente al valore $t = 1/2$, il vettore $(1, 1, 3/4)$ è tangente. La retta tangente in questo punto ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1/2 + s \cdot 1 \\ \\ y = 1/4 + s \cdot 1 \qquad\qquad s \in \mathbf{R}. \\ \\ z = 1/8 + s \cdot 3/4 \end{cases}$$

Per avere l'equazione cartesiana di tale retta come intersezione di due piani, basta eliminare il parametro s. Dalla prima equazione si ha $s = x - 1/2$ da cui, sostituendo nelle altre

$$\begin{cases} y = x - 1/4 \\ \\ z = -1/4 + 3x/4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 4y - 1 = 0 \\ \\ 3x - 4z - 1 = 0. \end{cases}$$

• **Cambiamenti di parametro**

Dato un arco continuo $r(t)$, $t \in [a, b]$, consideriamo una funzione continua ed invertibile dall'intervallo $[\alpha, \beta]$ ad $[a, b]$

$$t = t(\tau), \quad \tau \in [\alpha, \beta]$$

e la funzione composta

$$\varrho(\tau) = r(t(\tau)), \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Le funzioni $r(t)$ e $\varrho(\tau)$ assumono gli stessi valori in $\mathbf{R}^n$, pensando in termini cinematici, il punto mobile descrive la stessa traiettoria nei due casi. Inoltre l'arco $\varrho(\tau)$ è semplice, aperto, chiuso se e solo se lo è rispettivamente l'arco $r(t)$.

Chiameremo la biezione continua dall'intervallo $[\alpha, \beta]$ all'intervallo $[a, b]$

$$t = t(\tau)$$

un cambiamento di parametro. Se, inoltre, la funzione $t = t(\tau)$ è derivabile con derivata continua in $[\alpha, \beta]$ con

$$\frac{d}{d\tau} t(\tau) \neq 0$$

per ogni τ, allora il cambiamento di parametro si dice regolare.
In questo ultimo caso, l'arco $r(t)$ è regolare se e solo se l'arco $\varrho(\tau)$ è regolare e si ha

$$\frac{d}{d\tau}\varrho(\tau) = \frac{d}{d\tau}r(t(\tau)) = \frac{d}{dt}r(t(\tau)) \cdot \frac{d}{d\tau}t(\tau)$$

dove l'ultimo prodotto è tra lo scalare $\frac{d}{d\tau}t(\tau)$ ed il vettore $\frac{d}{dt}r(t(\tau))$.
Questa relazione dice che la direzione del versore tangente non dipende dalla parametrizzazione se il cambio di parametro è regolare. Per conservare anche il verso occorre e basta richiedere che per ogni $\tau \in [\alpha, \beta]$ si abbia

$$\frac{d}{d\tau}t(\tau) > 0.$$

In questo caso si dice che i due archi sono equiorientati.

• **Curve e curve orientate**
Introduciamo una relazione di equivalenza tra archi regolari (o regolari a tratti):

$$r(t) \sim \varrho(\tau)$$

se e solo se

$$\varrho(\tau) = r(t(\tau))$$

con $t = t(\tau)$ un cambiamento regolare di parametro.

Chiameremo curva non orientata, o semplicemente curva, una classe di equivalenza Γ di archi rispetto a tale relazione. Archi equivalenti identificano la stessa curva. Tutte le proprietà degli archi invarianti per cambiamento regolare di parametro sono riferibili a curve: ad esempio la direzione tangente in ogni fissata posizione della curva.

Se imponiamo la ulteriore condizione che gli archi $r(t)$ e $\varrho(\tau)$ siano equiorientati, cioè se vale

$$\frac{d}{d\tau}t(\tau) > 0$$

nel cambiamento di parametro, otteniamo una nuova relazione di equivalenza. Le classi di equivalenza rispetto a questa ultima, si dicono curve orientate. Archi equivalenti equiorientati identificano la stessa curva orientata. Tutte le proprietà degli archi invarianti per cambiamento regolare di parametro con derivata positiva sono riferibili a curve orientate: ad esempio il versore tangente (direzione e verso) in ogni fissata posizione della curva.

Ogni curva non orientata Γ genera due curve orientate: se $r(t)$ è una parametrizzazione che rappresenta Γ possiamo considerare la curva orientata γ rappresentata da $r(t)$ e da tutte le parametrizzazioni equivalenti $\varrho(\tau) = r(t(\tau))$ con derivata positiva $\frac{d}{d\tau}t(\tau) > 0$ del cambiamento di parametro (che conserva dunque il verso di percorrenza). Oltre a questa possiamo considerare la curva orientata, che indicheremo con $-\gamma$ e chiameremo curva opposta di γ, rappresentata dalle parametrizzazioni $\varrho(\tau) = r(t(\tau))$ con derivata negativa $\frac{d}{d\tau}t(\tau) < 0$ del cambiamento di parametro (che inverte il verso di percorrenza).

In questo senso, ogni curva ammette due possibili orientamenti, detti tra loro opposti. Ad esempio le curve chiuse nel piano $\mathbf{R}^2$ sono orientabili in senso antiorario, detto anche positivo, od orario, detto anche negativo.

•Lunghezza

Dato un arco continuo $r(t)$, $t \in [a,b]$, in $\mathbf{R}^n$, consideriamo una scomposizuione

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = b$$

dell'intervallo $[a,b]$ ed i corrispondenti punti sulla traiettoria $r(t_k)$, $k = 0, \ldots, m+1$. La lunghezza euclidea della poligonale Π iscritta così identificata vale

$$\ell(\Pi) = \sum_{k=0}^{m} \|r(t_{k+1}) - r(t_k)\|.$$

La lunghezza dell'arco viene definita come

$$\sup_{\Pi}\{\ell(\Pi)\}.$$

Nel caso che $r(t)$ sia una parametrizzazione di una curva regolare (a tratti) γ tale estremo superiore è finito e si può dimostrare che vale l'integrale

$$\int_a^b \|r'(t)\| dt$$

(lo spazio percorso è l'integrale nell'intervallo di tempo della veloctà scalare). Questo valore è invariante per parametrizzazioni $\varrho(\tau) = r(t(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, equivalenti ad $r(t)$. Infatti

$$\int_a^b \|r'(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \|r'(t(\tau))\| |t'(\tau)| d\tau = \int_\alpha^\beta \|\varrho'(\tau)\| d\tau$$

con il cambiamento di variabile

$$t = t(\tau),\ dt = t'(\tau) d\tau.$$

Si noti che il valore assoluto $|t'(\tau)|$ orienta in ogni caso l'intervallo $[\alpha, \beta]$ nell'ordine naturale: se $t'(\tau) > 0$ allora il cambiamento di variabile è crescente e si ha

$$\int_a^b \|r'(t)\|dt = \int_\alpha^\beta \|r'(t(\tau))\|t'(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta \|r'(t(\tau))\||t'(\tau)|d\tau.$$

Se $t'(\tau) < 0$ allora il cambiamento di variabile è decrescente e si ha

$$\int_a^b \|r'(t)\|dt = \int_\beta^\alpha \|r'(t(\tau))\|t'(\tau)d\tau =$$

$$-\int_\alpha^\beta \|r'(t(\tau))\|t'(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta \|r'(t(\tau))\||t'(\tau)|d\tau.$$

L'invarianza per parametrizzazioni equivalenti consente di definire la lunghezza di una curva regolare (a tratti) γ come

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|r'(t)\|dt$$

usando una qualunque parametrizzazione $r(t)$, $t \in [a, b]$, di γ.

Esempio 1.5. Calcoliamo la lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$ utilizzando la parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases} \qquad x \in [0, 1].$$

La derivata vale

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y = 2x \end{cases} \qquad x \in [0, 1],$$

quindi

$$\|(x', y')\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$$

e la lunghezza da determinare vale

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx.$$

Con il cambio di variabile

$$2x = \sinh y,\ dx = \frac{1}{2}\cosh y\ dy,$$

tenendo conto anche di

$$y = \operatorname{arcsinh}(2x) = \log\left(2x + \sqrt{4x^2 + 1}\right),$$

si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \cosh^2 y\ dy.$$

Calcoliamo questo ultimo integrale:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \cosh^2 y\; dy = \frac{1}{8}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} (e^y + e^{-y})^2 dy =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} (e^{2y} + e^{-2y} + 2) dy = \frac{1}{8}\left[\frac{e^{2y}}{2} - \frac{e^{-2y}}{2} + 2y\right]_0^{\log(2+\sqrt{5})} =$$

$$\frac{1}{16}(2+\sqrt{5})^2 - \frac{1}{16(2+\sqrt{5})^2} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) =$$

$$\frac{9+4\sqrt{5}}{16} - \frac{(2-\sqrt{5})^2}{16} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) =$$

$$\frac{9+4\sqrt{5}}{16} - \frac{9-4\sqrt{5}}{16} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5}).$$

Esempio 1.6. Calcoliamo la lunghezza dell'elica cilindrica di raggio r e passo h

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]. \\ z = \frac{h}{2\pi} t \end{cases}$$

La derivata vale

$$\begin{cases} x' = -r\sin t \\ y' = r\cos t \qquad\qquad x \in [0, 1], \\ z' = \frac{h}{2\pi} \end{cases}$$

quindi

$$\|(x', y', z')\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

e la lunghezza da determinare vale il seguente integrale di funzione costante:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}.$$

2. Integrali curvilinei

• Integrali di funzioni scalari

Data una curva regolare (a tratti) γ parametrizzata da $r(t)$, $t \in [a, b]$, con valori $r(t)$ in un aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ ed una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ continua della variabile $x = (x_1, \ldots, x_n)$, si definisce l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma f ds$ di f su γ attraverso

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt.$$

Alla stessa maniera dell'integrale di lunghezza, si vede che l'integrale non cambia passando a parametrizzazioni equivalenti, quindi dipende effettivamente solo da γ. L'orientamento di γ non influisce sul valore di questo tipo di integrale.

Con la funzione costante $f = 1$, riotteniamo l'integrale di lunghezza:

$$\int_\gamma ds = \ell(\gamma).$$

Se f è una funzione postiva che rappresenta una densità lineare di massa come funzione dei punti di un filo pesante, allora l'integrale rappresenta la massa m del filo:

$$\int_\gamma f ds = m.$$

Il baricentro $G = (x_{1,G}, \ldots, x_{n,G})$ di γ ha coordinate

$$x_{i,G} = \frac{1}{m} \int_\gamma x_i f ds, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Per $f = 1$ si ha il baricentro geometrico di γ con coordinate

$$x_{i,G} = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x_i ds, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Non è detto che il baricentro sia un punto della curva, in generale non lo è.

Esempio 2.1. Preso l'arco γ di parabola $y = x^2$ di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$ calcoliamo

$$\int_\gamma \sqrt{y} ds.$$

Utilizziamo la parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = x \\ \\ y = x^2 \end{cases} \qquad x \in [0,1].$$

La derivata vale

$$\begin{cases} x' = 1 \\ \\ y = 2x \end{cases} \qquad x \in [0,1],$$

quindi

$$\|(x', y')\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{1 + 4x^2}.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma \sqrt{y} ds = \int_0^1 \sqrt{x^2}\sqrt{1+4x^2} dx = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2} dx =$$

$$\frac{1}{12}\left[(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1).$$

Esempio 2.2. Data la curva γ in $\mathbf{R}^3$ identificata in maniera cartesiana da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \\ z = y \end{cases} \qquad x \geq 0,$$

calcoliamo

$$\int_\gamma x(y+z) ds.$$

Per parametrizzare γ possiamo usare le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ \\ y = r\sin t \\ \\ z = z \end{cases}.$$

Dalle equazioni cartesiane di γ abbiamo $r = 1$ e $z = y = r\sin t$ quindi

$$\begin{cases} x = \cos t \\ \\ y = \sin t \\ \\ z = \sin t \end{cases}$$

con la condizione $x \geq 0$ equivalente a $\cos t \geq 0$. Una parametrizzazione di γ è

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t & t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ z = \sin t \end{cases}$$

con derivata

$$\begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t & t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ z' = \cos t \end{cases}$$

di norma

$$\|(x', y', z')\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 t}.$$

L'integrale richiesto vale

$$\int_\gamma x(y+z)ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t(\sin t + \sin t)\sqrt{1+\cos^2 t}dt =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos t \sin t\sqrt{1+\cos^2 t}dt =$$

$$-\frac{2}{3}\left[(1+\cos^2 t)^{3/2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}(1-1) = 0.$$

Esempio 2.3. Determiniamo il baricentro geometrico della curva γ in $\mathbf{R}^3$ parametrizzata da

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t & t \in [0, \pi]. \\ z = t \end{cases}$$

La curva è un tratto di elica cilindrica. La derivata vale

$$\begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t & t \in [0, \pi] \\ z' = 1 \end{cases}$$

con norma costante

$$\|(x', y', z')\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

La lunghezza di γ vale

$$\ell(\gamma) = \int_0^\pi \sqrt{2}dt = \pi\sqrt{2}.$$

Il baricentro $G = (x_G, y_G, z_G)$ ha coordinate

$$x_G = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma x ds = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi (\cos t)\sqrt{2}dt = \frac{1}{\pi}[\sin t]_0^\pi = 0,$$

$$y_G = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma y ds = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi (\sin t)\sqrt{2}dt = \frac{1}{\pi}[-\cos t]_0^\pi = \frac{2}{\pi},$$

$$z_G = \frac{1}{\ell(\gamma)} \int_\gamma z ds = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi t\sqrt{2}dt = \frac{1}{2\pi}[t^2]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Il baricentro è il punto

$$G = (0, 2/\pi, \pi/2).$$

• Integrali di campi vettoriali

Una funzione

$$F : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \quad A \text{ aperto di } \mathbf{R}^n$$

si dice campo vettoriale in A. Il nome corrisponde alla interpretazione di $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ come posizione nello spazio e della immagine

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n))$$

come vettore applicato nella posizione x.

Dato un campo continuo F ed una curva orientata regolare (a tratti) γ parametrizzata da $r(t)$, $t \in [a, b]$, con $r(t) \in A$ per ogni t, definiamo l'integrale $\int_\gamma F \cdot dr$ del campo F sulla curva orientata γ con versore tangente T, nella maniera seguente:

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_\gamma F \cdot T ds$$

dove $F \cdot T$ è il prodotto scalare tra i vettori F e T. Interpretando F come campo di forze, questo integrale corrisponde al lavoro compiuto da F sulla traiettoria orientata γ .

Indicando con $-\gamma$ la curva orientata in maniera opposta che ha $-T$ come versore, si ha

$$\int_{-\gamma} F \cdot dr = -\int_{\gamma} F \cdot dr.$$

Esplicitando la definizione, con $F = (f_1, \ldots, f_n)$, $r = (x_1, \ldots, x_n)$, abbiamo

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma} F \cdot T ds =$$

$$\int_a^b F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\|r(t)\|} \|r'(t)\| dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt =$$

$$\int_a^b (f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)) x_1'(t) + \ldots + f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)) x_n'(t))\, dt.$$

Semplificando formalmente

$$\frac{dx_j}{dt} dt = dx_j$$

si usa anche l'espressione

$$f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$$

che viene detta forma differenziale. In maniera corrispondente, per l'integrale di $F = (f_1, \ldots, f_n)$ sulla curva orientata γ si usa anche la notazione

$$\int_{\gamma} f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n.$$

Esempio 2.4. Calcoliamo gli integrali del campo piano $F(x, y) = (x + y, xy)$ sul segmento orientato γ_1 di punto iniziale $(0, 0)$ e punto finale $(1, 1)$ e sulla poligonale orientata γ_2 di estremi $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ nell'ordine.

Il segmento orientato γ_1 è parametrizzato da

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

con derivata

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases} \qquad t \in [0, 1].$$

Per $F = (f_1, f_2)$, $f_1 = x + y$, $f_2 = xy$, ne segue

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_0^1 (f_1 x' + f_2 y')dt =$$

$$\int_0^1 ((t+t)\cdot 1 + (t \cdot t)\cdot 1)dt = \int_0^1 (2t + t^2)dt =$$

$$\left[t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Veniamo ora alla poligonale $\gamma_2 = \gamma_{2,1} + \gamma_{2,2}$ con $\gamma_{2,1}$ il segmento orientato di punto iniziale $(0,0)$ e punto finale $(1,0)$ e $\gamma_{2,2}$ il segmento orientato di punto iniziale $(1,0)$ e punto finale $(1,1)$. Il segmento orientato $\gamma_{2,1}$ è parametrizzato da

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

con derivata

$$\begin{cases} x' = 1 \\ \\ y' = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

mentre il segmento orientato $\gamma_{2,2}$ è parametrizzato da

$$\begin{cases} x = 1 \\ \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

con derivata

$$\begin{cases} x' = 0 \\ \\ y' = 1 \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

Ne segue

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dr = \int_{\gamma_{2,1}} F \cdot dr + \int_{\gamma_{2,2}} F \cdot dr =$$

$$\int_0^1 ((t+0)\cdot 1 + (t \cdot 0)\cdot 0)dt + \int_0^1 ((1+t)\cdot 0 + (1 \cdot t)\cdot 1)dt =$$

$$\int_0^1 tdt + \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Si noti che nonostante le curve orientate γ_1 e γ_2 abbiano lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale, gli integrali risultano diversi.

Interpretando questi integrali come lavoro, possiamo affermare che il campo F non è conservativo.

Esempio 2.5. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr$ con $F = (f_1, f_2, f_3)$ campo in $\mathbf{R}^3$ dato da

$$F = (z, z, -x - y)$$

e γ la curva orientata di punto iniziale $(0, 0, -\sqrt{2})$ ed individuata dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = x \end{cases} \qquad x \geq 0.$$

Cerchiamo una parametrizzazione della curva γ utilizzando le coordinate sferiche (r, ϑ, φ) con $r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$,

$$\begin{cases} x = r \cos\vartheta \sin\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\varphi \end{cases}.$$

Le equazioni cartesiane forniscono $r = \sqrt{2}$ e $\cos\vartheta = \sin\vartheta$ mentre $x \geq 0$ equivale a $\cos\vartheta \geq 0$. Possiamo quindi sostituire

$$r = \sqrt{2}, \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

ed ottenere una parametrizzazione con parametro φ:

$$\begin{cases} x = \sin\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = \sqrt{2}\cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

Questa è la parametrizzazione della curva opposta $-\gamma$ in quanto il punto $(0, 0, -\sqrt{2})$ non è il punto iniziale come richiesto ma il punto finale: basterà usare

$$\int_\gamma F \cdot dr = -\int_{-\gamma} F \cdot dr.$$

Derivando la parametrizzazione di $-\gamma$ ottenuta, abbiamo

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \\ y' = \cos\varphi & \varphi \in [0,\pi] \\ z' = -\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$$

quindi

$$\int_\gamma F \cdot dr = -\int_{-\gamma} F \cdot dr = -\int_0^\pi (f_1 x' + f_2 y' + f_3 z') d\varphi =$$

$$-\int_0^\pi (\sqrt{2}\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \sqrt{2}\cos\varphi \cdot \cos\varphi + (-\sin\varphi - \sin\varphi) \cdot (-\sqrt{2}\sin\varphi)) d\varphi =$$

$$-\int_0^\pi (2\sqrt{2}\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\sin^2\varphi) d\varphi = -\int_0^\pi 2\sqrt{2} d\varphi = -2\pi\sqrt{2}.$$

3. Potenziali

• Campi esatti

Dato un campo continuo

$$F : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

diremo che F è esatto in A se esiste una funzione scalare

$$U : A \to \mathbf{R},$$

$U \in C^1(A)$, tale che

$$\nabla U = F.$$

La funzione U si dice un potenziale di F. Esplicitando le componenti $F = (f_1, \dots, f_n)$ la definizione equivale a

$$\partial_{x_j} U = f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Se F è esatto su A ed A è connesso allora tutti i potenziali differiscono per una costante. Infatti se U_1 ed U_2 sono due potenziali allora

$$\nabla(U_1 - U_2) = F - F = 0$$

quindi, per il fatto che A è connesso,

$$U_1 - U_2 = c$$

con c costante.

Il seguente risultato afferma che l'integrale di un campo esatto su una curva regolare (a tratti) orientata di punto iniziale P e punto finale Q vale la differenza di potenziale $U(Q) - U(P)$:

Teorema 3.1. *Sia* $F : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *un campo esatto in* A *con potenziale* $U : A \to \mathbf{R}$ *e sia* γ *una curva orientata regolare (a tratti) in* A *di punto iniziale* P *e punto finale* Q.
Allora

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(Q) - U(P).$$

Dimostrazione. Prendiamo una parametrizzazione $r(t)$, $t \in [a, b]$, della curva orientata γ. Si ha

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt =$$

$$\int_a^b \nabla U(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}U(r(t))dt =$$

$$[U(r(t))]_a^b = U(r(b)) - U(r(a)) = U(Q) - U(P)$$

dove abbiamo usato $F = \nabla U$ e la regola della catena $\frac{d}{dt}U(r(t)) = \nabla U(r(t)) \cdot r'(t)$.

$\diamond$

In particolare l'integrale di un campo esatto su una curva dipende solo dagli estremi.

Esempio 3.2. Data la funzione

$$U : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}, \quad U(x, y) = \log(x^2 + y^2)$$

si ha

$$U_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad U_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Per costruzione, U è un potenziale in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ del campo

$$F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2, \quad F(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}\right).$$

Fissati ad esempio i punti $P = (1, 1)$ e $Q = (2, 1)$ e data una qualunque curva regolare (a tratti) γ in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ di punto iniziale P e punto finale Q si ha

$$\int_\gamma F \cdot dr = U(Q) - U(P) = \log 5 - \log 2.$$

•Campi conservativi
In generale diremo che l'integrale di un campo F non dipende dal

percorso ma dipende solo dagli estremi (campo conservativo) quando F è definito su un aperto connesso A e per ogni $x, y \in A$ ed ogni γ_1, γ_2 curve orientate regolari a tratti in A di punto iniziale x e punto finale y si ha

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr.$$

In questa situazione, il valore comune a tutti gli integrali su curve orientate regolari a tratti di punto iniziale x e punto finale y si indica con

$$\int_x^y F \cdot dr.$$

È comoda anche la seguente caratterizzazione che utilizza solo curve chiuse:

Proposizione 3.3. *Sia*

$$F : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

un campo continuo su A aperto e connesso. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

(a) L'integrale di F non dipende dal percorso.

(b) Per ogni curva chiusa γ regolare a tratti in A si ha $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr = 0.$

Dimostrazione. Supponiamo vera (a) e sia γ una curva orientata chiusa in A. Dal momento che γ e $-\gamma$ hanno lo stesso punto iniziale e finale, da (a) segue

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_{-\gamma} F \cdot dr$$

ma si ha sempre

$$\int_{-\gamma} F \cdot dr = -\int_\gamma F \cdot dr$$

quindi

$$\int_\gamma F \cdot dr = -\int_\gamma F \cdot dr$$

da cui

$$\int_\gamma F \cdot dr = 0.$$

Sia ora vera (b) e consideriamo due curve orientate γ_1 e γ_2 di stesso punto iniziale x e stesso punto finale y. La curva

$$\gamma_1 + (-\gamma_2)$$

è una curva chiusa di punto iniziale e finale x quindi, per (b),

$$0 = \int_{\gamma_1+(-\gamma_2)} F \cdot dr = \int_{\gamma_1} F \cdot dr + \int_{-\gamma_2} F \cdot dr = \int_{\gamma_1} F \cdot dr - \int_{\gamma_2} F \cdot dr$$

da cui

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr.$$

◇

• Equivalenza tra campi esatti e campi conservativi

Teorema 3.4. *Sia A un aperto e connesso di $\mathbf{R}^n$ e sia $F : A \to \mathbf{R}^n$ un campo continuo. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:*

(a) F è esatto in A.

(b) L'integrale di F non dipende dal percorso.

Cenno di dimostrazione. Supponiamo vera (a) e sia F esatto in A con U un suo potenziale. Abbiamo già dimostrato che l'integrale non dipende dal percorso in quanto data una curva γ di punto iniziale x e punto finale y in A si ha

$$\int_{\gamma} F \cdot dr = U(y) - U(x)$$

quindi l'integrale dipende solo dagli estremi.
Sia ora vera (b) e fissiamo $x_0 \in A$. Poichè l'integrale di F non dipende dal percorso, possiamo considerare la funzione scalare di variabile $x \in A$

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} F \cdot dr$$

definita prendendo l'integrale su una qualunque curva orientata in A di punto iniziale x_0 e punto finale x. Si dimostra che tale funzione è un potenziale in A di F.

◇

Il cenno di dimostrazione del teorema precedente, suggerisce come costruire un potenziale in A di un campo che si conosce essere esatto in A ma di cui i potenziali non sono ancora noti. Ad esempio, se A è un rettangolo in $\mathbf{R}^2$ ed F è esatto in A possiamo determinare un potenziale U in A di F fissando $(x_0, y_0) \in A$ e definendo

$$U(x, y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} F \cdot dr$$

dove l'integrale è fatto lungo una qualunque curva di punto iniziale (x_0, y_0) e punto finale (x, y). Nel rettangolo, conviene integrare sulla poligonale con due lati paralleli agli assi di estremi (x_0, y_0), (x, y_0), (x, y) nell'ordine.

Supponiamo, ad esempio, $x \geq x_0$ e $y \geq y_0$. Il segmento orientato γ_1 che congiunge (x_0, y_0) a (x, y_0) è parametrizzato da

$$r_1(t) = (t, y_0), \quad x_0 \leq t \leq x$$

con derivata

$$r_1'(t) = (1, 0)$$

mentre il segmento orientato γ_2 che congiunge (x, y_0) a (x, y) è parametrizzato da

$$r_2(t) = (x, t), \quad y_0 \leq t \leq y$$

con derivata

$$r_2'(t) = (0, 1).$$

Ne segue che per $F = (f_1, f_2)$

$$U(x, y) = \int_{\gamma_1} F \cdot dr + \int_{\gamma_2} F \cdot dr =$$

$$\int_{x_0}^{x} (f_1(t, y_0) \cdot 1 + f_2(t, y_0) \cdot 0)dt + \int_{y_0}^{y} (f_1(x, t) \cdot 0 + f_2(x, t) \cdot 1)dt =$$

$$\int_{x_0}^{x} f_1(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x, t)dt.$$

Abbiamo così una formula per determinare un potenziale di un campo piano esatto in un rettangolo:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x, t)dt.$$

Analogamente, in dimensione $n = 3$, una formula per determinare un potenziale di un campo esatto $F = (f_1, f_2, f_3)$ in un parallelepipedo di $\mathbf{R}^3$ è data da

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} f_3(x, y, t)dt$$

ottenuta fissando un punto (x_0, y_0, z_0) ed integrando fino al punto generico (x, y, z) lungo la poligonale orientata con tre lati paralleli agli assi di estremi (x_0, y_0, z_0), (x, y_0, z_0), (x, y, z_0), (x, y, z) nell'ordine.

Esempio 3.5. Dato il campo in $\mathbf{R}^2$

$$F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \big(\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy)\big)$$

calcolare la funzione

$$U(x,y) = \int_0^x f_1(t,0)dt + \int_0^y f_2(x,t)dt$$

e verificare che è un potenziale del campo F in $\mathbf{R}^2$.

Abbiamo

$$U(x,y) = \int_0^x 0dt + \int_0^y x^2\cos(xt)dt = [x\sin(xt)]_{t=0}^{t=y} = x\sin(xy).$$

Derivando, otteniamo

$$U_x = \sin(xy) + xy\cos(xy) = f_1, \quad U_y = x^2\cos(xy) = f_2$$

quindi U è un potenziale di F su $\mathbf{R}^2$.
F è esatto su $\mathbf{R}^2$ e tutti i suoi potenziali in $\mathbf{R}^2$ sono dati da

$$U = x\sin(xy) + c$$

con c costante arbitraria.

• Campi chiusi
Dato un campo vettoriale $F : A \to \mathbf{R}^n$, A aperto di $\mathbf{R}^n$, $F \in C^1(A)$ diremo che $F = (f_1, \ldots, f_n)$ è un campo chiuso in A se per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ vale

$$\partial_{x_i} f_j(x) = \partial_{x_j} f_{x_i}(x), \quad i,j = 1, \ldots, n.$$

In dimensione fisica $n = 2$ o $n = 3$, un campo è chiuso in A se e solo se il rotore di F è identicamente nullo in A.

F chiuso in A è condizione necessaria affinchè F sia esatto in A:

Teorema 3.6. *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$ e sia $F : A \to \mathbf{R}^n$ un campo di classe C^1 in A.*
Se F è esatto in A allora F è chiuso in A.

Dimostrazione. Sia F esatto con potenziale U in A. Da $\nabla U = F$ e da $F \in C^1(A)$ segue $U \in C^2(A)$. Vale quindi il Teorema di Schwarz per U:

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j} U = \partial_{x_j}\partial_{x_i} U$$

che si legge

$$\partial_{x_i} f_j = \partial_{x_j} f_{x_i}$$

dal momento che

$$\partial_{x_j} U = f_j, \ \partial_{x_i} U = f_i.$$

◇

Vediamo subito, con il seguente esempio, che la condizione campo chiuso non è in generale sufficiente per avere un campo esatto.

Esempio 3.7. Consideriamo il campo piano

$$F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbf{R}^2, \quad F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Si verifica subito che

$$\partial_y \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

quindi il campo è chiuso in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Prendiamo ora la circonferenza unitaria γ orientata in senso antiorario a partire dal punto $(1,0)$ parametrizzata da

$$r(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

con derivata

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Abbiamo

$$\int_\gamma F \cdot dr = \int_0^{2\pi} ((-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Dal momento che l'integrale su una curva chiusa non è zero, il campo non ha potenziale definito su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Valgono tuttavia dei risultati che vanno nella direzione

$$F \text{ chiuso } \Rightarrow F \text{ esatto}$$

che utilizzano delle ipotesi aggiuntive sulla geometria del dominio A.

Diremo che l'aperto connesso $A \subset \mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso se ogni curva chiusa regolare a tratti in A delimita una regione piana contenuta in A (A è una regione del piano *senza buchi*). Vale il seguente:

Teorema 3.8. *Se il campo piano F è chiuso sul dominio $A \subset \mathbf{R}^2$ semplicemente connesso allora F è esatto in A.*

Dimostrazione parziale. Consideriamo il caso di A rettangolo. Abbiamo già trovato che se F è esatto su un rettangolo allora un potenziale è necessariamente dato da

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x,t) dt.$$

Dobbiamo verificare che nella ipotesi F chiuso la funzione U così definita è effettivamente un potenziale.

Poichè il primo addendo non dipende da y, applicando al secondo il Teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo subito

$$\partial_y U = f_2(x, y).$$

Nel derivare in dx, applichiamo al primo addendo il Teorema fondamentale mentre nel secondo deriviamo sotto il segno di integrale:

$$\partial_x U = f_1(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_x f_2(x, t) dt.$$

Dal momento che F è chiuso, abbiamo

$$\partial_x f_2(x, t) = \partial_t f_1(x, t)$$

da cui

$$\partial_x U = f_1(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \partial_t f_1(x, t) dt = f_1(x, y_0) + f_1(x, y) - f_1(x, y_0) = f_1(x, y).$$

Questo conclude la verifica di

$$\nabla U = (f_1, f_2)$$

sul rettangolo.

$\diamond$

In qualunque dimensione n, diremo che l'aperto connesso $A \subset \mathbf{R}^n$ è stellato se esiste $x_0 \in A$ tale che per ogni $x \in A$ il segmento di estremi x_0 ed x è contenuto in A.
Un tale punto x_0 è detto un centro di A. Un esempio di insiemi stellati è fornito dagli insiemi convessi: ogni punto può fare da centro.

Vale il seguente:

Teorema 3.9. *Se il campo piano F è chiuso sul dominio stellato $A \subset \mathbf{R}^n$ allora F è esatto in A.*

Dal momento che per $n = 2$

$$A \text{ stellato } \Rightarrow A \text{ semplicemente connesso}$$

in dimensiome 2 il risultato più generale è quello che riguarda insiemi semplicemente connessi.

I risultati precedenti dicono che che un campo chiuso è localmente esatto: su ogni regione stellata nel dominio il campo è esatto. Se i potenziali locali si possono estendere ad un potenziale globale su tutto il dominio, il campo è globalmente esatto, altrimenti non lo è.
Torniamo al campo

$$F : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2, \quad F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Dal momento che è chiuso, esistono potenziali locali. Si verifica direttamante che i seguenti due sono potenziali locali nelle regioni di fianco indicate:

$$U(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + c, \quad x \neq 0,$$
$$U(x,y) = -\arctan\frac{x}{y} + c, \quad y \neq 0.$$

Abbiamo già dimostrato, integrando sulla circonferenza unitaria, che il campo non è globalmente esatto. Questi potenziali locali non hanno una estensione globale. Il primo di essi rappresenta la coordinata polare ϑ nei punti del I e IV quadrante: non è possibile estenderlo ad un potenziale globale su tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ in quanto la funzione $\vartheta(x,y)$ non è definibile con continuità su tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: partendo da un punto e tornando in esso con una curva semplice chiusa che gira una volta attorno all'origine in senso antiorario, il valore limite di ϑ è aumentato di 2π. Questo corrisponde al fatto che l'integrale di F lungo una tale curva chiusa non vale 0 ma 2π.

• Ricerca di potenziali

Dato un campo chiuso in A, esistono potenziali locali. È importante saperli determinare: dopo averli trovati esplicitamente si può controllare se si possono estendere o meno all'intero dominio A verificando così se il campo è globalmente esatto o no. Nel caso che A sia semplicemente connesso nel piano o stellato in un qualunque $\mathbf{R}^n$, sappiamo fin dall'inizio che esistono potenziali globali.

Nella determinazione di potenziali locali su rettangoli di $\mathbf{R}^2$ o parallelepipedi di $\mathbf{R}^3$, si possono usare, come abbiamo già fatto, le rispettive formule

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} f_1(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x,t)dt,$$

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} f_1(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x,t,z_0)dt + \int_{z_0}^{z} f_3(x,y,t)dt.$$

Vogliamo descrivere un procedimento alternativo che si basa direttamente sulla definizione stessa di potenziale.

Per $n = 2$, partiamo dalle equazioni

$$\partial_x U = f_1, \quad \partial_y U = f_2.$$

Considerando, ad esempio, la prima, abbiamo

$$U(x,y) = \int f_1(x,y)dx + h(y)$$

dove la funzione $h(y)$ rappresenta una generica costante di integrazione rispetto alla variabile x. Derivando ora rispetto ad y ed uguagliando il risultato ad $f_2(x,y)$ come richiesto dalla seconda equazione, si ottiene una equazione nella sola variabile y

$$h'(y) = g(y)$$

grazie al fatto che F è chiuso. Integrando questa ultima si determina $h(y)$ quindi si determina completamente un potenziale locale U.

Esempio 3.10. Consideriamo il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} + 2y\right)$$

nel suo dominio naturale $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si verifica facilmente che è chiuso quindi esistono potenziali locali. Dal momento che il dominio non è semplicemente connesso, non possiamo prevedere se questi potranno essere estesi a potenziali globali o meno. Calcoliamo potenziali locali col metodo precedente:

$$U = \int \frac{2x}{x^2+y^2}\, dx = \log(x^2+y^2) + h(y).$$

Derivando tale U rispetto ad y ed uguagliando alla seconda componente si ottiene

$$\frac{2y}{x^2+y^2} + h'(y) = \frac{2y}{x^2+y^2} + 2y$$

da cui

$$h'(y) = 2y$$

quindi

$$h(y) = y^2 + c.$$

Potenziali locali sono forniti da

$$U = \log(x^2+y^2) + y^2 + c.$$

Poichè tali funzioni sono in realtà definite su tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si tratta di potenziali globali ed il campo è esatto su $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Per $n = 3$, partiamo dalle equazioni

$$\partial_x U = f_1,\ \partial_y U = f_2,\ \partial_z U = f_3.$$

Considerando, ad esempio, la prima, abbiamo

$$U(x,y,z) = \int f_1(x,y,z)dx + h_1(y,z)$$

dove la funzione $h_1(y,z)$ rappresenta una generica costante di integrazione rispetto alla variabile x. Derivando ora rispetto ad y ed uguagliando il risultato ad $f_2(x,y,z)$ come richiesto dalla seconda equazione, si ottiene una equazione nelle sole variabili y, z

$$\partial_y h_1(y,z) = g_1(y,z)$$

grazie al fatto che F è chiuso. Integrando questa si ha

$$h_1(y,z) = \int g_1(y,z)dy + h_2(z)$$

quindi si specifica meglio il potenziale in

$$U(x,y,z) = \int f_1(x,y,z)dx + \int g_1(y,z)dy + h_2(z).$$

Derivando infine rispetto a z ed uguagliando il risultato ad $f_3(x,y,z)$ come richiesto dalla terza equazione, si ottiene una equazione nella sola variabile z

$$h_2'(z) = g_2(z)$$

sempre grazie al fatto che F è chiuso. Integrando questa ultima si determina $h_2(z)$ quindi si determina completamente un potenziale locale U.

Esempio 3.11. Consideriamo il campo

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{y+z}, \frac{x}{2\sqrt{y+z}} + 2y, \frac{x}{2\sqrt{y+z}} + 3z^2\right)$$

nel semispazio aperto $y + z > 0$. Si verifica facilmente che è chiuso quindi esistono potenziali locali. Dal momento che il dominio è stellato, questi potranno sicuramente essere estesi a potenziali globali. Calcoliamo i potenziali di questo campo globalmente esatto col metodo precedente:

$$U = \int \sqrt{y+z}\, dx = x\sqrt{y+z} + h_1(y,z).$$

Derivando tale U rispetto ad y ed uguagliando alla seconda componente si ottiene

$$\frac{x}{2\sqrt{y+z}} + \partial_y h_1(y,z) = \frac{x}{2\sqrt{y+z}} + 2y$$

da cui

$$\partial_y h_1(y,z) = 2y$$

quindi

$$h_1(y,z) = \int 2y dy = y^2 + h_2(z).$$

Derivando
$$U = x\sqrt{y+z} + y^2 + h_2(z)$$
in dz ed uguagliando alla terza componente si ottiene
$$\frac{x}{2\sqrt{y+z}} + h_2'(z) = \frac{x}{2\sqrt{y+z}} + 3z^2$$
da cui
$$h_2'(z) = 3z^2$$
quindi
$$h_2(z) = z^3 + c.$$
I potenziali su tutto il semispazio $y + z > 0$ sono forniti da
$$U = x\sqrt{y+z} + y^2 + z^3.$$