Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna

Anno Accademico: 2010/11

TECNICA ED ECONOMIA DEI TRASPORTI

Docente: Marino Lupi

RICHIAMI di CALCOLO delle PROBABILITA'

PROBABILITA'

Ci sono fenomeni che non si posso quantificare a priori, ma si devono prevedere su basi probabilistiche.

Esperimento: è una operazione di cui non si può prevedere, con sicurezza, il risultato.

Un esperimento è definito quando sono definiti:

- l'*evento semplice*. Per esempio, lancio un dado, gli eventi semplici sono due: esce un numero pari, esce un numero dispari. Oppure lancio un dado e vedo il numero che compare sulla faccia orizzontale: in questo caso gli eventi semplici sono 6.

- L'insieme dei risultati che è detto *spazio delle prove*. Per esempio, nel caso precedente, : pari, dispari, per il primo esperimento; i numeri: 1,2,3,4,5,6, per il secondo esperimento.

Probabilità secondo impostazione frequentistica

Secondo l'impostazione frequentistica la probabilità che si verifichi un evento è data da:

$$p_E = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n}$$

Dove $\frac{n_E}{n}$ rappresenta la frequenza relativa del verificarsi dell'evento E

Esempio. Evento, indicato con E, "esce un numero dispari":

$$p_E = \lim_{n \to \infty} \frac{\overset{\text{n. di volte in cui esce il numero 1}}{n_1} + n_2 + n_3}{\underset{\text{numero di prove}}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n}\right) = p_1 + p_2 + p_3$$

Lancio tre monete: l’evento semplice è costituito da una sequenza (ordinata) di teste e di croci.

Spazio delle ***prove***:

T	**T**	**T**
T	**T**	**C**
T	**C**	**T**
T	**C**	**C**
C	**T**	**T**
C	**C**	**T**
C	**T**	**C**
C	**C**	**C**

Evento A: escono meno di due teste, è un evento composto costituito da questi 4 eventi semplici

T	**T**	**T**
T	**T**	**C**
T	**C**	**T**
T	**C**	**C**
C	**T**	**T**
C	**C**	**T**
C	**T**	**C**
C	**C**	**C**

$$p_A = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Evento B: esce sempre la stessa faccia

T	T	T
T	T	C
T	C	T
T	C	C
C	T	T
C	C	T
C	T	C
C	C	C

$$p_B = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

Evento A⋃B: escono meno di due teste, oppure esce sempre la stessa faccia

T	T	T
T	T	C
T	C	T
T	C	C
C	T	T
C	C	T
C	T	C
C	C	C

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

$$p_{A \cup B} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Evento C: escono 3 teste

T	T	T
T	T	C
T	C	T
T	C	C
C	T	T
C	C	T
C	T	C
C	C	C

$$p_C = \frac{1}{8}$$

Evento A⋃C: escono meno di due teste oppure escono tre teste.

T	T	T
T	T	C
T	C	T
T	C	C
C	T	T
C	C	T
C	T	C
C	C	C

$$p_{A\cup C} = p_A + p_C - \cancel{p_{A\cap C}}$$

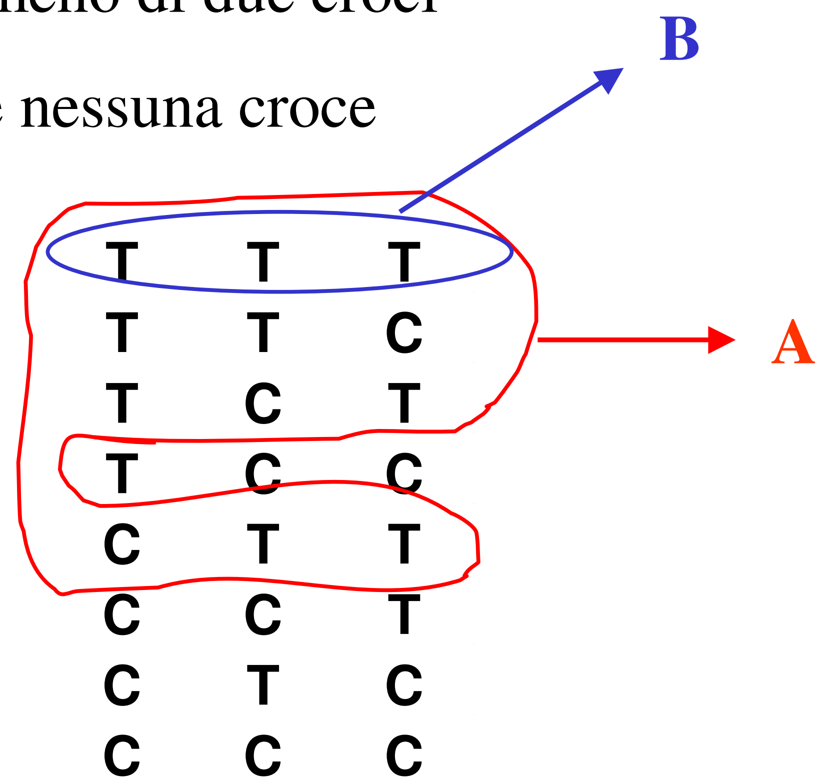
$$p_{A\cup C} = \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

PROBABILITA' CONDIZIONATA

Probabilità che si verifichi un evento dato che se ne è verificato un altro (l'insieme degli eventi semplici che costituiscono il primo evento diventa il nuovo spazio delle prove)

Esempio. Evento A: escono meno di due croci

Evento B: non esce nessuna croce



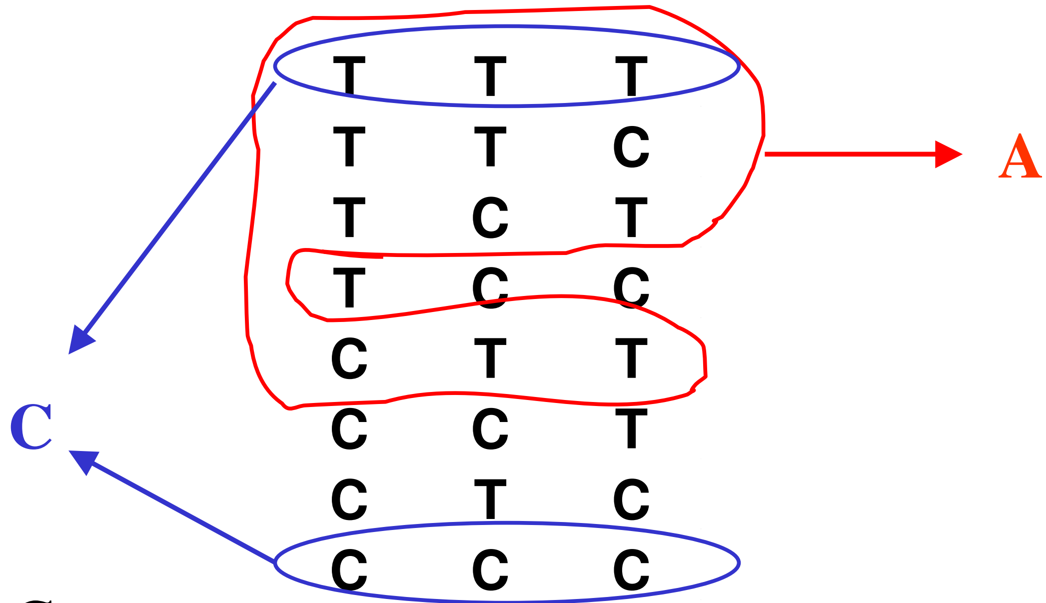
$$p(B \mid A) = \frac{1}{4}$$

↓

Probabilità che si verifichi B dato che si è verificato A

Esempio: Evento A: escono meno di due croci

Evento C: Tutte le facce sono uguali



$$p(C \mid A) = \frac{1}{4}$$

↓

Probabilità che si verifichi C
dato che si è verificato A

$$p(C \mid A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A \cap C)}{n(A)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A \cap C)/n}{n(A)/n} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{n(A \cap C)}{n}}{\lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}} = \frac{prob(A \cap C)}{prob(A)}$$

(Definizione di probabilità come limite della frequenza relativa *)

$$p(C \mid A) = \frac{prob(A \cap C)}{prob(A)} \Rightarrow prob(A \cap C) = p(C \mid A)\, prob(A)$$

$$p(A \mid C) = \frac{prob(A \cap C)}{prob(C)} \Rightarrow prob(A \cap C) = p(A \mid C)\, prob(C)$$

---

* $n(A \cap C)$: Numero di volte che si verifica l'evento $A \cap C$

$n(A)$: Numero di volte che si verifica l'evento A

Nell'esempio che era stato visto prima:

$$p(C \mid A) = \frac{prob(A \cap C)}{prob(A)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

EVENTI INDIPENDENTI

A e C sono *indipendenti se*:

$$p(C \mid A) = prob(C) \quad \text{o} \quad prob(C \cap A) = p(C)\,prob(A)$$

Con riferimento al precedente esempio:

$$\left.\begin{aligned} prob(C) &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ prob(C \mid A) &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \text{A e C sono indipedenti}$$

$$\left.\begin{aligned} prob(C) &= \frac{1}{4} \\ prob(A) &= \frac{4}{8} \\ prob(A \cap C) &= \frac{1}{8} \end{aligned}\right\} \frac{1}{8} = \frac{1}{\cancel{4}}\,\frac{\cancel{4}}{8} \Rightarrow \text{A e C sono indipedenti}$$

Esempio

Evento D: esce una sola croce

Evento A: escono meno di due croci

A

T	T	T
T	T	C
T	C	T
T	C	C
C	T	T
C	C	T
C	T	C
C	C	C

D

$prob(D \mid A) \neq prob(D)$ D e A sono eventi dipendenti

$$\frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{3}{8}$$

$prob(D \cap A) \neq prob(D)\ prob(A)$ D e A sono eventi dipendenti

$$\frac{3}{8} \qquad\qquad \frac{3}{8} \qquad \frac{4}{8}$$

Non valgono le uguaglianze e quindi gli eventi sono dipendenti

VARIABILI ALEATORIE

Def. : è una *funzione* definita su uno *spazio* delle *prove probabilizzato*

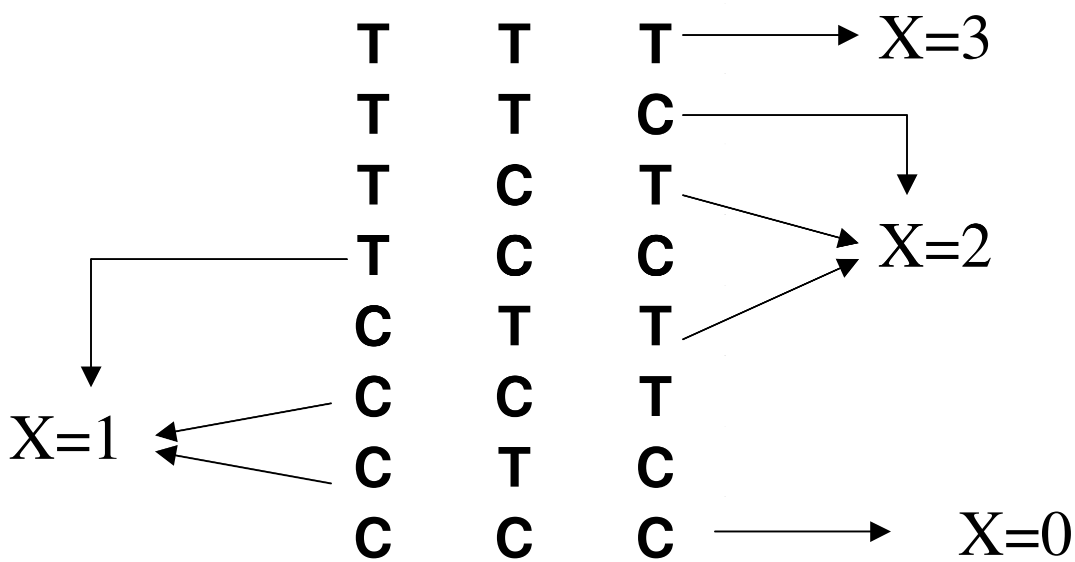
X è il numero delle teste:

$$p_X(X=0)=\frac{1}{8}$$

$$p_X(X=1)=\frac{3}{8}$$

$$p_X(X=2)=\frac{3}{8}$$

$$p_X(X=3)=\frac{1}{8}$$

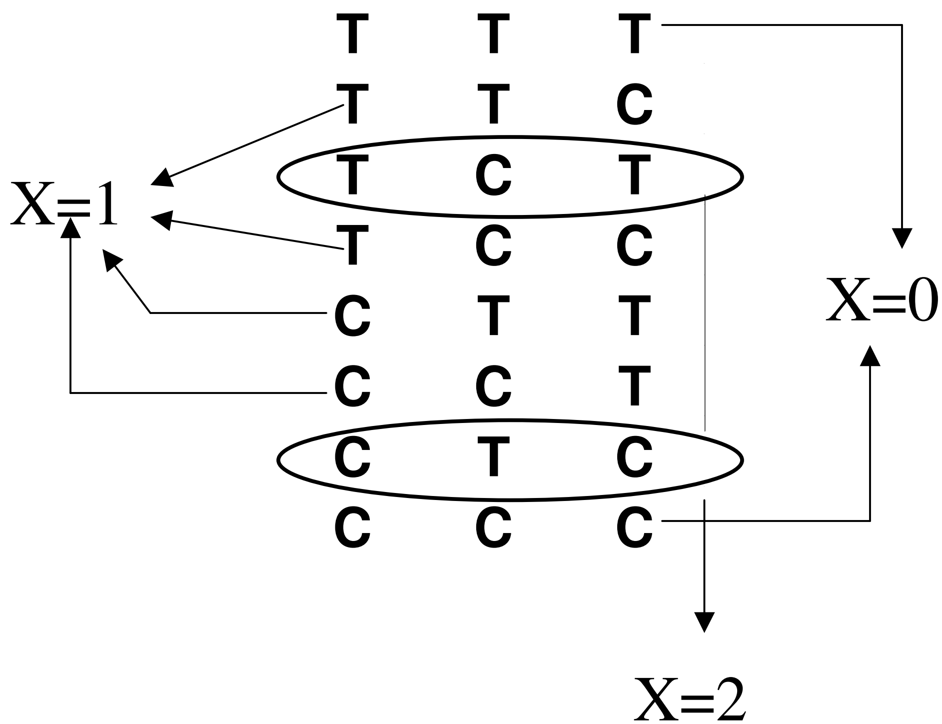


X è il numero di variazioni nella sequenza:

$$p_X(X=0)=\frac{2}{8}$$

$$p_X(X=1)=\frac{4}{8}$$

$$p_X(X=2)=\frac{2}{8}$$



FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Def.: $F_X(t) = prob(X \leq t)$

Proprietà

$0 \leq F_X(t) \leq 1$

$F_X(t) \to 0$ per t $\to$ -∞

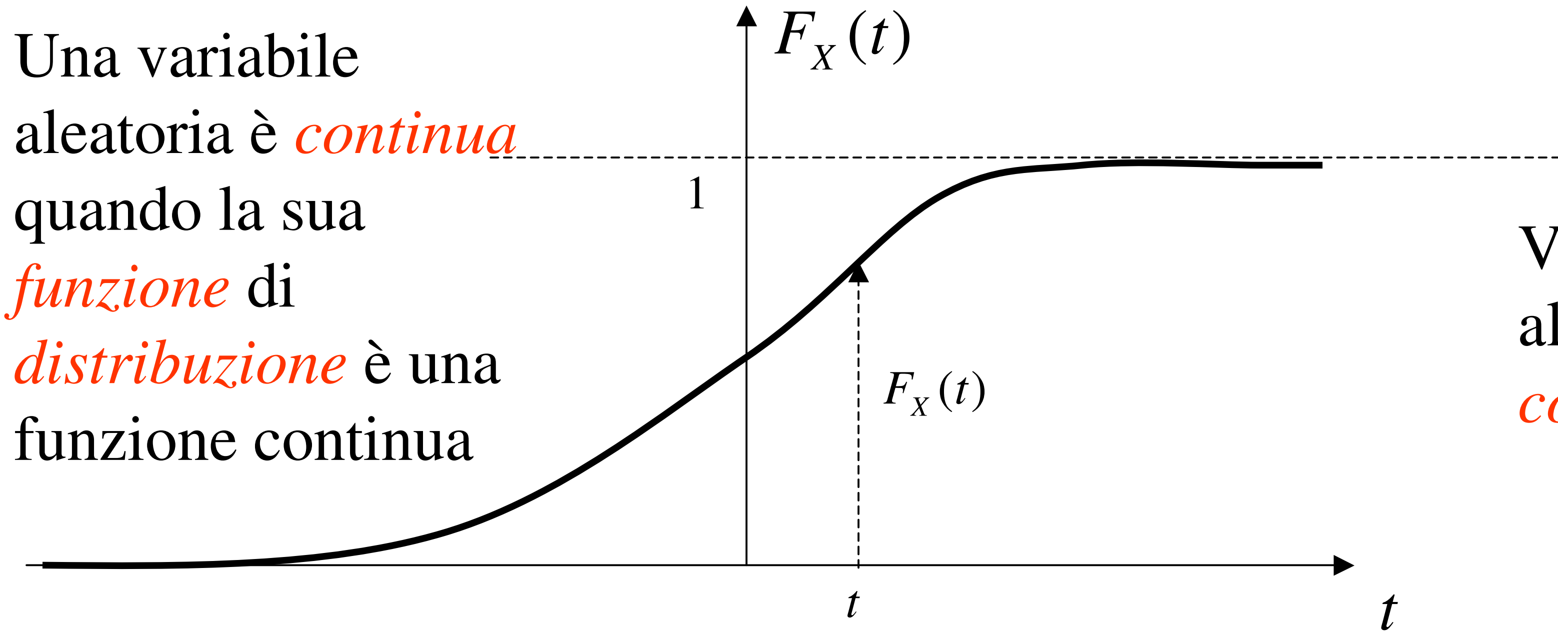
$F_X(t) \to 1$ per t $\to$ +∞

$Se\ a \leq b$ allora $F_X(a) \leq F_X(b)$

ovvero la funzione di distribuzione è non decrescente :

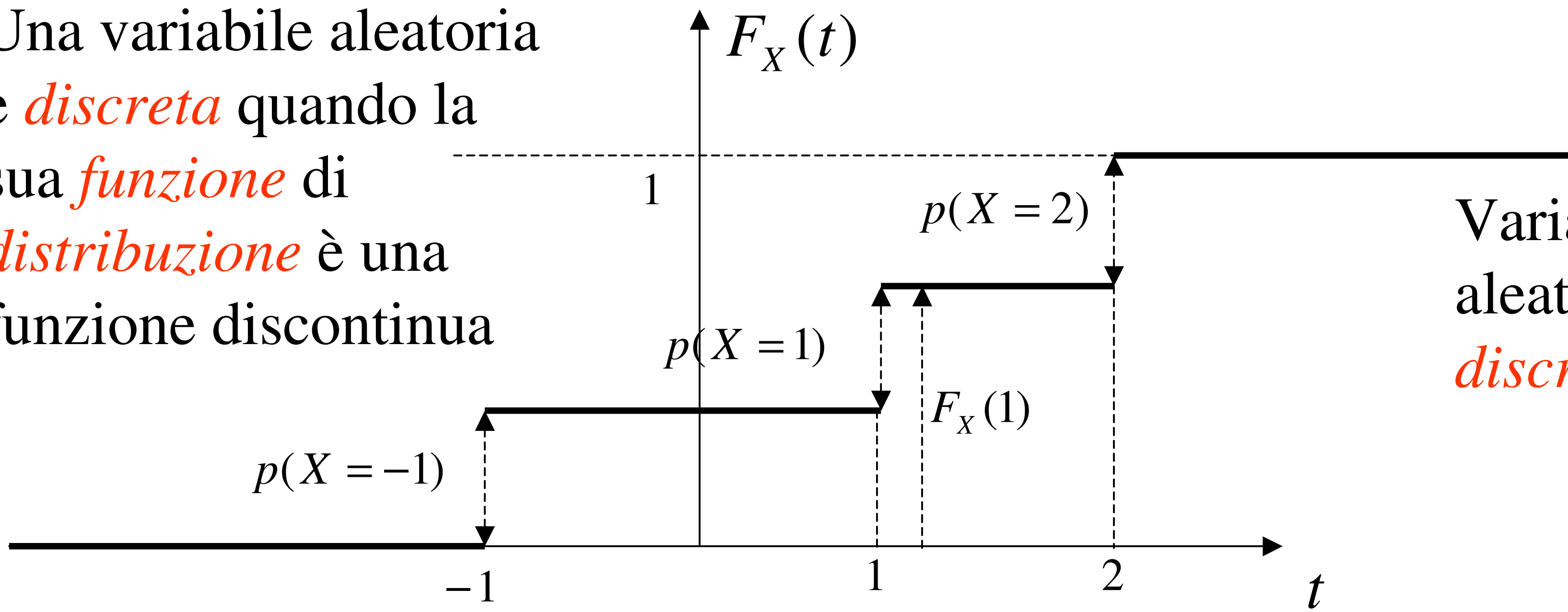
$F_X(b) - F_X(a) = prob(a < X \leq b)$

Una variabile aleatoria è *continua* quando la sua *funzione* di *distribuzione* è una funzione continua



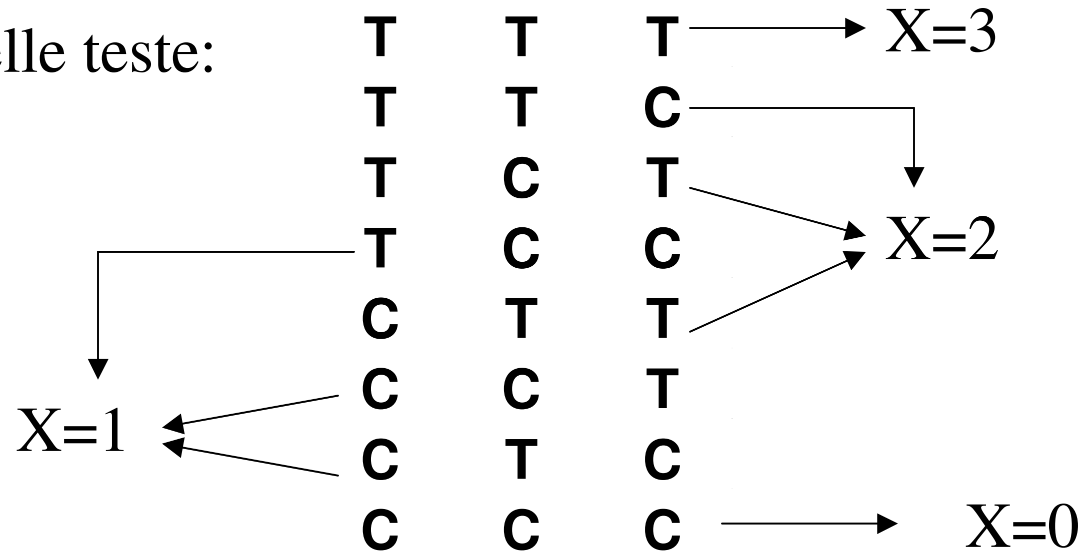
Variabile aleatoria *continua*

Una variabile aleatoria è *discreta* quando la sua *funzione* di *distribuzione* è una funzione discontinua



Variabile aleatoria *discreta*

Esempio: X è il numero delle teste:

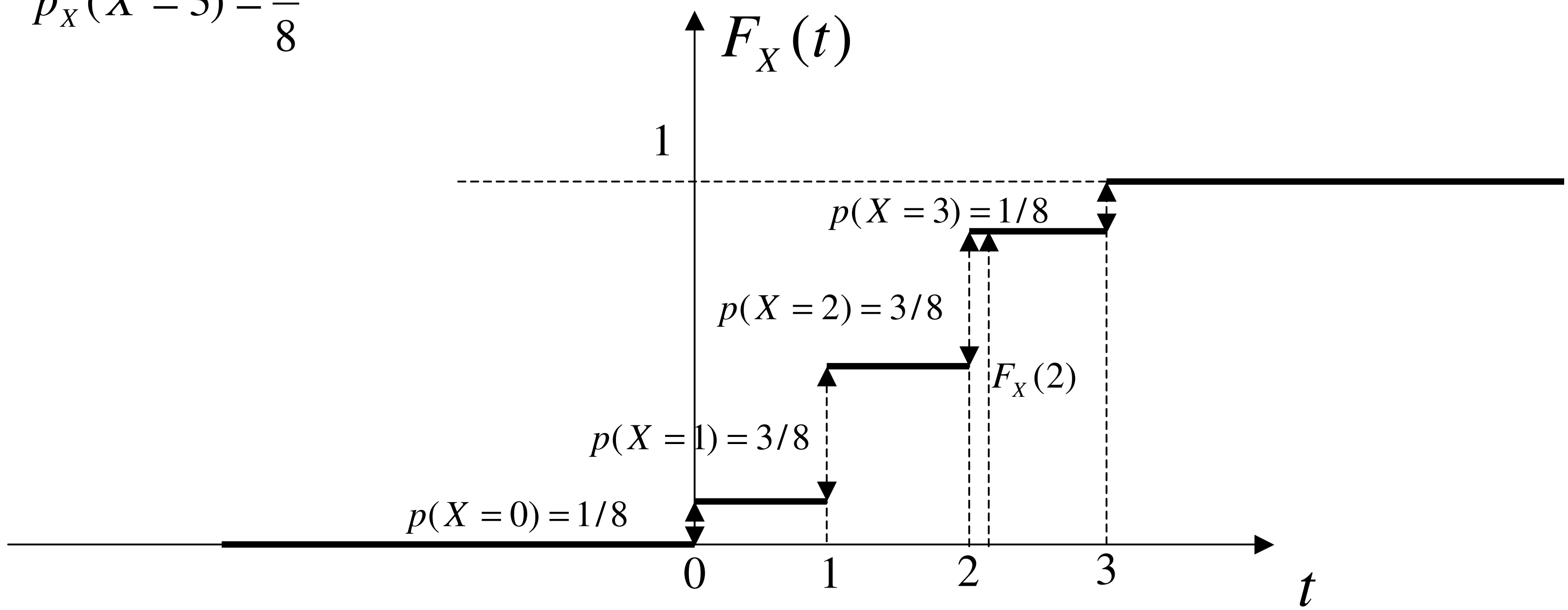


$$p_X(X=0)=\frac{1}{8}$$

$$p_X(X=1)=\frac{3}{8}$$

$$p_X(X=2)=\frac{3}{8}$$

$$p_X(X=3)=\frac{1}{8}$$



$$F_X(2) = prob(X \leq 2) = prob(X = 0) + prob(X = 1) + prob(X = 2) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

PROBABILITA' SECONDO IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA

Si basa su *tre assiomi*

- La probabilità di un evento è un numero maggiore di 0 e minore di 1

- La probabilità di un evento composto è pari alla somma delle probabilità degli eventi semplici che lo compongono

- La probabilità dello spazio delle prove è pari a 1

FUNZIONE DI PROBABILITA'

E' la legge di probabilità per la variabile aleatoria *discreta*

Proprietà:

$$0 \leq p_X(t) \leq 1 \quad \text{(dall'assioma 1)}$$

$$prob(X \leq y) = \sum_{t \leq y} p_X(t) \qquad \text{(dall'assioma 2)}$$

$$\sum_{\forall t} p_X(t) = 1 \quad \text{(dall'assioma 3)}$$

FUNZIONE DI DENSITA' DI PROBABILITA'

E' la legge di probabilità per la variabile aleatoria *continua*

$$f_X(t) = \frac{dF_X(t)}{dt}$$

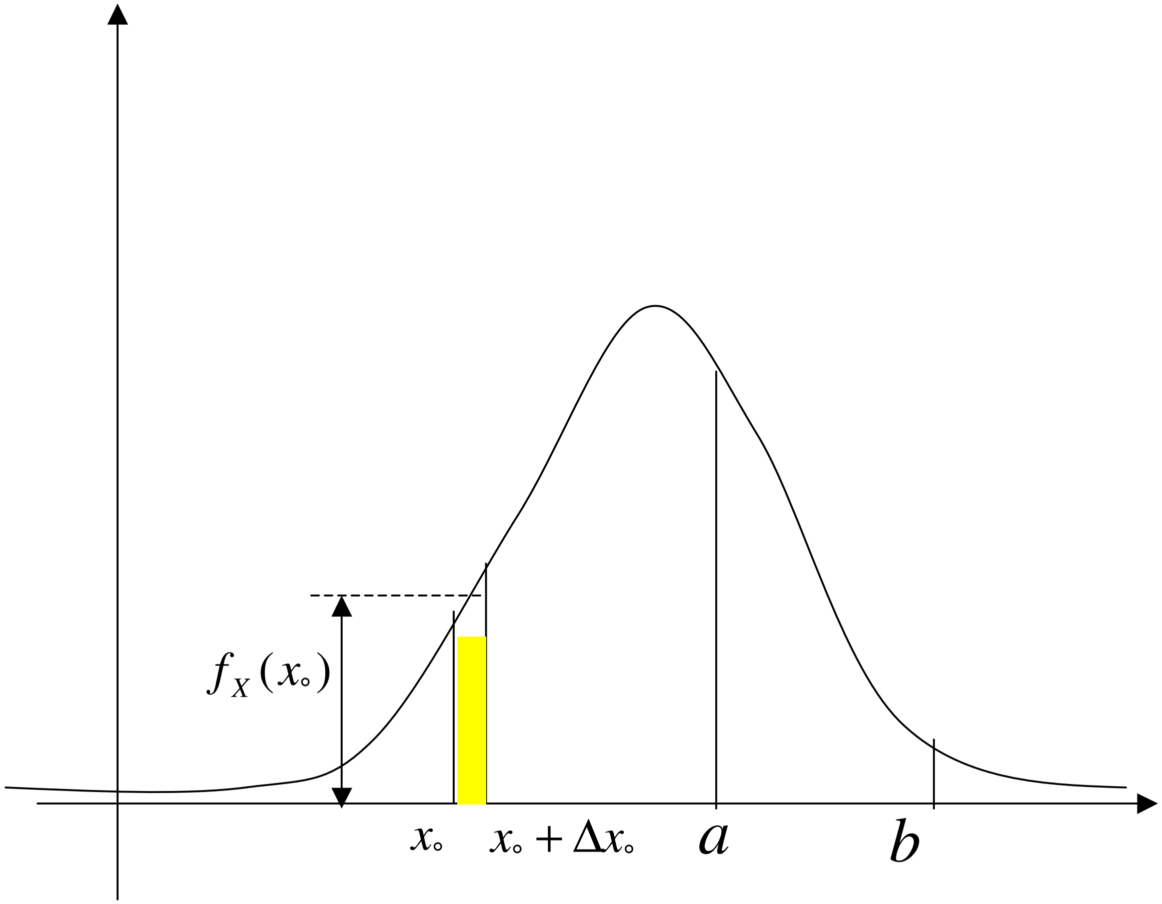
Proprietà:

$$f_X(t) \geq 0$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(y)dy$$

Se a $\leq$ b prob(a $\leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ e perciò :

$$prob(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(y)dy$$



$$prob(x_\circ \leq X \leq x_\circ + \Delta x_\circ) \approx f_X(x_\circ)\Delta x_\circ$$

$$prob(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(y)dy$$

MEDIA DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Per una variabile aleatoria *discreta*: $$E[X] = \mu_X = \sum_{\forall x} p_X(x)x$$

Per una variabile aleatoria *continua*: $$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx$$

Esempio: Variabile aleatoria X vista precedentemente (X è il numero delle teste).

$$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$$

VARIANZA DI UNA VARIABILE ALEATORIA

La media è un operatore lineare

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2+\mu_X^2-2\mu_X X\right] = E\left[X^2\right]+E\left[\mu_X^2\right]-2\mu_X E\left[X\right] =$$

$$= E\left[X^2\right]+\mu_x^2-2\mu_X\mu_X = E\left[X^2\right]-\mu_x^2 = m_2-\mu_x^2$$

momento del 2° ordine

Esempio

$$p_X(X=0)=\frac{1}{8} \qquad \mu_X = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$p_X(X=1)=\frac{3}{8} \qquad \sigma_X^2 = \sum_{\forall x}(x-\mu_X)^2 p_X(x) = (0-\frac{3}{2})^2\frac{1}{8}+(1-\frac{3}{2})^2\frac{3}{8}+(2-\frac{3}{2})^2\frac{3}{8}+(3-\frac{3}{2})^2\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

$$p_X(X=2)=\frac{3}{8} \qquad \sigma_X^2 = m_2-\mu_X^2 = 0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{3}{8}+9\cdot\frac{1}{8}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

$$p_X(X=3)=\frac{1}{8}$$

FUNZIONE DI VARIABILE ALEATORIA

$$Y = g(X) = (x-1)^2$$

$$x = 0 \rightarrow \; y = 1 \text{ con probabilità } \frac{1}{8}$$

$$x = 1 \rightarrow \; y = 0 \text{ con probabilità } \frac{3}{8}$$

$$x = 2 \rightarrow \; y = 1 \text{ con probabilità } \frac{3}{8}$$

$$x = 3 \rightarrow \; y = 4 \text{ con probabilità } \frac{1}{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \rightarrow \; p_Y(0) = \frac{3}{8} \\ y = 1 \rightarrow \; p_Y(1) = \frac{4}{8} \\ y = 4 \rightarrow \; p_Y(4) = \frac{1}{8} \end{array}\right\} \qquad \sum_{\forall y} p_Y(y) = 1$$

MEDIA DELLA VARIABILE ALEATORIA Y=g(X)

$$E[Y] = \sum_{\forall y} y\ p_Y(y) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

$$E[Y] = E[g(x)] = \sum_{\forall x} g(x)\ p_X(x) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

E dunque:

$$E[Y] = E[g(x)] = \sum_{\forall x} g(x)\ p_X(x)$$

Per variabile aleatoria discreta

$$E[Y] = E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Per variabile aleatoria continua

La media è un operatore lineare

Per renderci conto di questo valutiamo la media della funzione di variabile aleatoria $a + bX$ (sfruttiamo i risultati precedenti)

Ammettiamo che X sia una variabile aleatoria discreta:

$$E[Y] = \sum_{\forall x}(a+bx)p_X(x) = \sum_{\forall x} a p_X + b\sum_{\forall x} x p_X = a\underbrace{\sum_{\forall x} p_X}_{=1} + b\sum_{\forall x} x p_X =$$

$$= a + b\,E[X]$$ E dunque la media è un operatore lineare

Ammettiamo che X sia una variabile aleatoria continua (otteniamo lo stesso risultato):

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}(a+bx)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a f_X(x)dx + + \int_{-\infty}^{+\infty} bx f_X(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = a + bE[X]$$

MOMENTO DI ORDINE K

$$m_k = E\left[X^k\right] = \sum_{\forall x} x^k p_X(x)$$ Per variabile aleatoria discreta

$$m_k = E\left[X^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx$$ Per variabile aleatoria continua

PERCENTILE

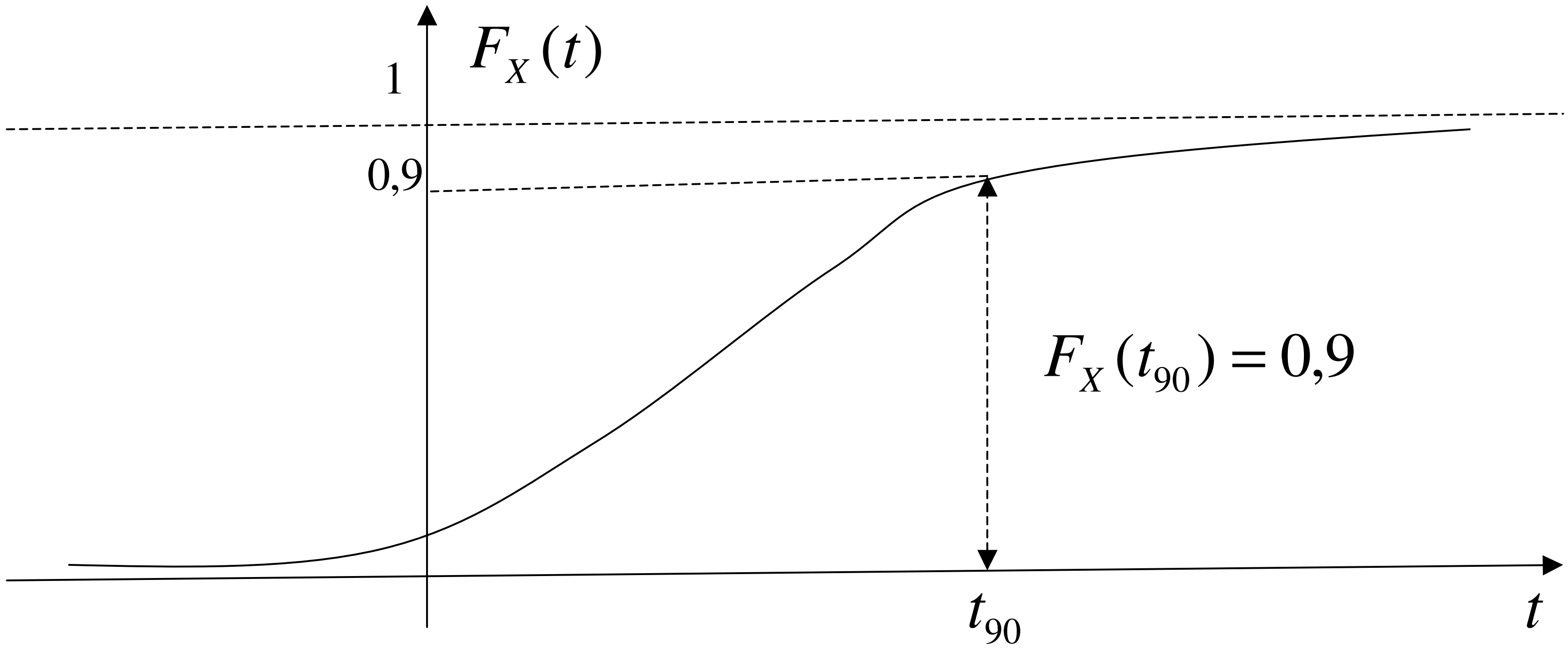
Si definisce k-esimo percentile il valore della variabile aleatoria, indichiamola con t_k, tale che $\mathrm{F_X}(t_k) = \dfrac{k}{100}$

t_{25} è il valore della variabile aleatoria tale che $\mathrm{F_X}(t_{25}) = \dfrac{25}{100}$

t_{50} è il valore della variabile aleatoria tale che $\mathrm{F_X}(t_{50}) = \dfrac{50}{100}$

(Vi è una probabilità pari al 50% che la variabile aleatoria t stia al di sotto di t_{50} : t_{50} è detta *mediana* della variabile aleatoria *t)*

t_{90} è il valore della variabile aleatoria tale che $\mathrm{F_X}(t_{90}) = \dfrac{90}{100}$


$F_X(t)$
1
0,9
$F_X(t_{90}) = 0{,}9$
t_{90}
t

FUNZIONI DI VARIABILI ALEATORIE DISTRIBUITE CONGIUNTAMENTE

			X = numero delle teste	Y = numero di variazioni nella sequenza
T	T	T	3	0
T	T	C	2	1
T	C	T	2	2
T	C	C	1	1
C	T	T	2	1
C	C	T	1	1
C	T	C	1	2
C	C	C	0	0

$$p_X(X=0)=\frac{1}{8}$$

$$p_X(X=1)=\frac{3}{8}$$

$$p_X(X=2)=\frac{3}{8}$$

$$p_X(X=3)=\frac{1}{8}$$

$$y=0 \rightarrow p_y(0)=\frac{2}{8}$$

$$y=1 \rightarrow p_y(1)=\frac{4}{8}$$

$$y=4 \rightarrow p_y(4)=\frac{2}{8}$$

Funzione di probabilità congiunta

$$p_{X,Y}(x,y)=prob(X=x \cap Y=y)$$

$$\sum_{\forall x,y} p_{X,Y}(x,y)=1$$

FUNZIONE DI PROBABILITA' MARGINALE (si ottiene facendo la somma sulle righe e sulle colonne)

	Y=0	Y=1	Y=2	
X=0	1/8	0	0	1/8
X=1	0	2/8	1/8	3/8
X=2	0	2/8	1/8	3/8
X=3	1/8	0	0	1/8
	2/8	4/8	2/8	

FUNZIONE DI PROBABILITA' CONDIZIONATA

Ripetendo il il concetto di probabilità condizionata visto per gli eventi, la funzione di probabilità di Y dato X è data da:

$$p_{X|Y}(x \mid y) = \frac{prob\,(X = x \cap Y = y)}{prob(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

La funzione di probabilità di X dato che Y è uguale a 1, $p_{X/Y}(x / y = 1)$, è data da:

$$p_{X/Y}(0/1) = \frac{prob(X = 0 \cap Y = 1)}{prob(Y = 1)} = \frac{0}{\frac{4}{8}} = 0 \qquad p_{X/Y}(1/1) = \frac{prob(X = 1 \cap Y = 1)}{prob(Y = 1)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$p_{X/Y}(2/1) = \frac{prob(X = 2 \cap Y = 1)}{prob(Y = 1)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2} \qquad p_{X/Y}(3/1) = \frac{prob(X = 3 \cap Y = 1)}{prob(Y = 1)} = \frac{0}{\frac{4}{8}} = 0$$

Le variabili X e Y sono indipendenti quando:

$$p_{X/Y}(x/y) = \frac{prob(X = x \cap Y = y)}{prob(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$$

In modo analogo a quanto visto a proposito degli eventi: $prob\,(B \mid A) = p(B)$

E sempre in modo analogo a quanto visto per gli eventi $(prob\,(A \cap B) = p(A)\,p(B))$

$$prob(X = x \cap Y = y) = p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\; p_Y(y)$$

Per esempio con riguardo al caso precedente:

$$prob(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{8} \qquad p_X(1) = \frac{3}{8} \qquad p_Y(1) = \frac{4}{8}$$

$$\frac{2}{8} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{8}$$

Le variabili X e Y non sono indipendenti

	Y=2	Y=4	Y=6	
X=5	0,1	0,2	0,1	0,4
X=10	0,15	0,3	0,15	0,6
	0,25	0,50	0,25	

$$p_{X/Y}(5/y) = \frac{prob(X = 5 \cap Y = y)}{prob(Y = y)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} \text{ oppure } \frac{0{,}2}{0{,}5} \text{ in entrambi i casi} = 0{,}4 = p_X(5)$$

$$p_{X/Y}(10/y) = \frac{prob(X = 10 \cap Y = y)}{prob(Y = y)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} \text{ oppure } \frac{0{,}3}{0{,}5} \text{ in entrambi i casi} = 0{,}6 = p_X(10)$$

Se X è indipendente da Y, anche Y sarà indipendente da X

$$p_{Y/X}(2/x) = \frac{prob\,(X = x \cap Y = 2)}{prob(X = x)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} \text{ oppure } \frac{0{,}15}{0{,}6} \text{ in entrambi i casi} = 0{,}25 = p_Y(2)$$

$$p_{Y/X}(4/x) = \frac{prob\,(X = x \cap Y = 4)}{prob(X = x)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} \text{ oppure } \frac{0{,}3}{0{,}6} \text{ in entrambi i casi} = 0{,}50 = p_Y(4)$$

$$p_{Y/X}(6/x) = \frac{prob\,(X = x \cap Y = 6)}{prob(X = x)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} \text{ oppure } \frac{0{,}15}{0{,}6} \text{ in entrambi i casi} = 0{,}25 = p_Y(6)$$

Si poteva anche verificare che per ogni coppia (x,y):

$$prob\,(X = x, Y = y) = p_X(x)\,p_Y(y)$$

Per esempio:

$$prob\,(X = 5, Y = 4) = 0{,}2 \qquad\qquad p_X(5)\,p_Y(4) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$$

$$prob\,(X = 5, Y = 4) = p_X(5)\,p_Y(4)$$

Per dire che le variabili sono indipendenti devo verificare che per ogni coppi x,y si verifichi la eguaglianza.

In *pratica* spesso l'*indipendenza* si assume per *ipotesi* (dalla conoscenza degli esperimenti su cui si basano le variabili aleatorie X e Y). Ossia si assume che sia: $prob\,(X = x, Y = y) = p_X(x)\,p_Y(y)$

L'ipotesi di indipendenza semplifica molto spesso i calcoli ed è quindi una ipotesi conveniente che si adotta se non ci sono chiare ragioni contrarie.

Nel caso le variabili aleatorie siano continue si definisce la *funzione* di *densità di probabilità condizionata* di Y dato X (o viceversa).

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Se le due variabili sono indipendenti:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_X(x) \qquad f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

FUNZIONE DI VARIABILI ALEATORIE CONGIUNTE

Consideriamo due variabili aleatorie, X e Y, e la funzione somma S che sarà anche essa una variabile aleatoria essendo somma di due variabili aleatorie:

			X	Y	S
T	T	T	3	0	3
T	T	C	2	1	3
T	C	T	2	2	4
T	C	C	1	1	2
C	T	T	2	1	3
C	C	T	1	1	2
C	T	C	1	2	3
C	C	C	0	0	0

$$p_X(S=0)=\frac{1}{8}$$

$$p_X(S=2)=\frac{2}{8}$$

$$p_X(S=3)=\frac{4}{8}$$

$$p_X(S=4)=\frac{1}{8}$$

La media della somma di due variabili aleatorie posso ricavarla come media della variabile aleatoria S

$$E[S] = \sum_{\forall S} s\ p_S(s) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{8}$$

Oppure la posso ricavare attraverso la tabella della slide 32 in cui ho la probabilità del verificarsi di ciascuna coppia x,y: $p_{X,Y}(x, y)$

$$E[X+Y] = \sum_{\forall x,y} (x+y)\ p_{X+Y}(x+y) = (0+0) \cdot \frac{1}{8} + 0 + 0 + 0 + (1+1) \cdot \frac{2}{8} +$$

$$+ (1+2) \cdot \frac{1}{8} + 0 + (2+1) \cdot \frac{2}{8} + (2+2) \cdot \frac{1}{8} + (3+0) \cdot \frac{1}{8} + 0 + 0 = \frac{20}{8}$$

$$E\left[g(X,Y)\right]=\sum_{\forall x,y} g(x,y)\; p_{X,Y}(x,y)$$ Per variabile *discreta*

$$E\left[g(X,Y)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\; f_{X,Y}(x,y)dxdy$$ Per variabile *continua*

La media è un operatore lineare. Infatti dimostriamo che:

$$E\left[aX'+bY'\right]=aE\left[X'\right]+bE\left[Y'\right]$$

Pongo: $X = aX' \text{ e } \mathrm{Y} = \mathrm{bY'}$

$$E\left[aX'+bY'\right]=E\left[X+Y\right] \xrightarrow{\text{Dimostriamo che è uguale:}} E\left[X\right]+E\left[Y\right]$$

$$E[X+Y]=\sum_{\forall x,y}(x+y)\ p_{X,Y}(x,y)=\sum_{\forall x,y}x\ p_{X,Y}(x,y)+\sum_{\forall x,y}y\ p_{X,Y}(x,y)\ =$$

$$\sum_x\sum_y x\ p_{X,Y}(x,y)\ +\sum_x\sum_y y\ p_{X,Y}(x,y)=\sum_x x\sum_y p_{X,Y}(x,y)+\sum_y y\sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

$$\sum_x x\ p_X(x)+\sum_y y\ p_Y(y)=E[X]+E[Y]$$

$$E[aX'+bY']=E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$

D’altra parte avevamo già dimostrato che: $E(aX')=aE(X')$

Quindi:

$$E[aX'+bY']=aE[X']+bE[Y']$$

COVARIANZA DI DUE VARIABILI ALEATORIE

E' data dalla media del prodotto degli scarti delle due variabili aleatorie (ciascun scarto rispetto alla rispettiva media).

$$\sigma_{XY} = \mathrm{cov}[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y] =$$

$$E[XY] - \mu_Y E[X] - \mu_X E[Y] + \mu_X\mu_Y = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

$$\sigma_{X,Y} = E[XY] - \mu_X\mu_Y$$

Proprietà: se le due variabili aleatorie X e Y *sono indipendenti* risulta: $\mathrm{cov}[X,Y] = 0$

Ricordiamo che la media di una funzione di due variabili aleatorie è data da: $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y)\, p_{XY}(x,y)$

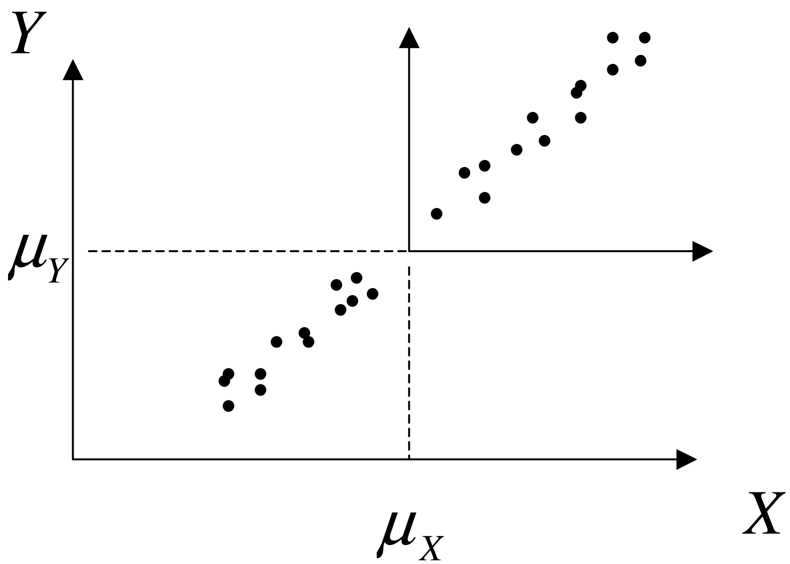
$$\mathrm{cov}[X,Y] = E[XY] - \mu_X \mu_Y = \sum_x \sum_y (x \cdot y)\, p_{XY}(x,y) - \mu_X \mu_Y =$$

$$= \sum_x \sum_y (x \cdot y)\, p_X(x)\, p_Y(y) - \mu_X \mu_Y =$$

$$= \left(\sum_x x\, p_X(x)\right)\left(\sum_y y\, p_Y(y)\right) - \mu_X \mu_Y = \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y = 0$$

Facciamo ora alcune osservazioni a proposito del segno della covarianza tenendo conto della definizione:

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$



Cosa vuol dire se ho una covarianza *positiva alta* ?

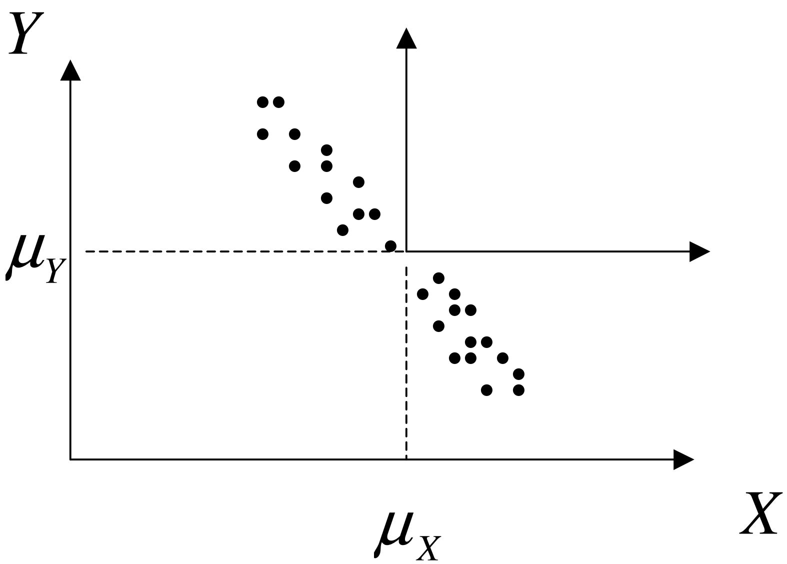
Se X è superiore alla media, anche Y è superiore alla media. Se X è inferiore alla media, anche Y è inferiore alla media. Le due variabili non sono indipendenti.

Covarianza positiva: $Cov(X,Y) > 0$ $\qquad E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

$+ \qquad +$

$- \qquad -$

Si può anche dire che le due variabili aleatorie variano congiuntamente nello "stesso senso".



Covarianza *negativa* ed alta (in valore assoluto).

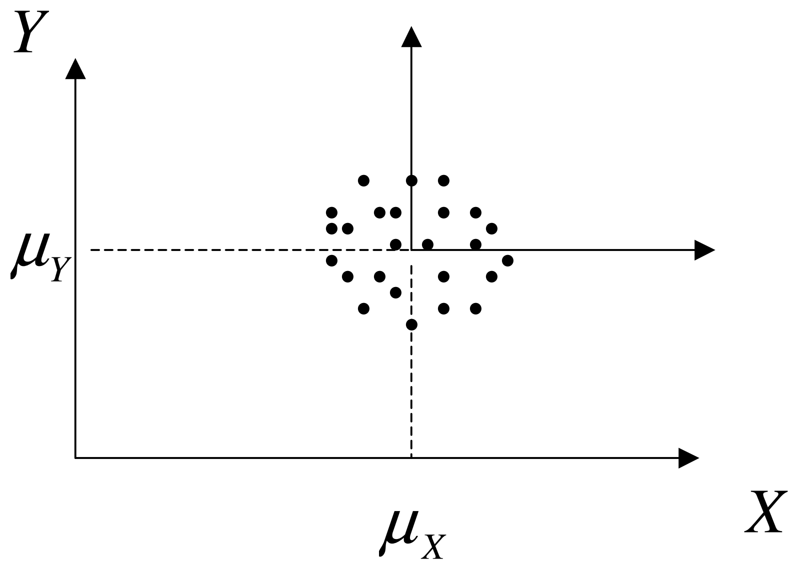
Se X è superiore alla media, Y è inferiore alla media. Se X è inferiore alla media, Y è superiore alla media. Le due variabili non sono indipendenti.

Covarianza negativa: $Cov(X,Y) < 0 \qquad E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

$+ \qquad -$

$- \qquad +$

Si può anche dire che le due variabili aleatorie variano congiuntamente, ma in "senso opposto".



Covarianza $\cong 0$

Sapere qualcosa sulla X (per esempio che è superiore alla media) non mi dà informazioni sulla Y. In media i prodotti positivi si elidono con quelli negativi.

Covarianza $\cong 0$

$$Cov(X, Y) \cong 0 \qquad E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$+$	$-$
$+$	$+$
$-$	$-$
$-$	$+$

Si può anche dire che le due variabili aleatorie non tendono a variare congiuntamente.

Dopo aver visto la covarianza di due variabili aleatorie vediamo ora la varianza della somma di due variabili aleatorie

Se due variabili aleatorie X e Y sono DIPENDENTI:

$$Var[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + 2\,\mathrm{cov}[X,Y]$$

Se X ≡ Y la covarianza diventa varianza

$$\mathrm{cov}[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y] = E[(X-\mu_X)(X-\mu_X] = E[(X-\mu_X)^2]$$

Se X ≡ Y

varianza

Dimostriamo ora la formula

$$Var[X+Y] = E[(X+Y)^2] - (\mu_{X+Y})^2 = E[X^2+Y^2+2XY] - (\mu_X+\mu_Y)^2 =$$
$$= E[X^2] + E[Y^2] + 2E[XY] - \mu_X^2 - \mu_Y^2 - 2\mu_X\mu_Y =$$
$$+ E[X^2] - \mu_X^2 + E[Y^2] - \mu_Y^2 + 2(E[XY] - \mu_X\mu_Y) =$$
$$= \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] + \underbrace{2\,\mathrm{cov}[X,Y]}$$

Se le variabili sono *indipendenti* allora: $\mathrm{cov}[X,Y] = 0$

E dunque: $Var[X+Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y]$

Si può estendere il risultato ad una combinazione lineare:

$$Var[aX+bY] = a^2\,\mathrm{var}[X] + b^2\,\mathrm{var}[Y] + 2ab\,\mathrm{cov}[X,Y]$$