

*Facoltà di Ingegneria - Università di Bologna*

Anno Accademico: 2010/11

# **TECNICA ED ECONOMIA DEI TRASPORTI**

Docente: Marino Lupi

## ***SISTEMI DI TRASPORTO E LORO SCHEMATIZZAZIONE***

***(Capitolo 1)***

# Definizione di sistema di trasporto

Un sistema di trasporto è un *insieme di componenti*, e di loro interazioni, che determinano la *domanda* di spostamenti fra punti diversi del *territorio* e determinano *l'offerta* di servizi di trasporto per il soddisfacimento di tale domanda.

- Sottosistema della *domanda*: utenti (viaggiatori o merci), insieme di spostamenti nell'area.
- Sottosistema della *offerta*: componenti *fisiche*, componenti *organizzative*, componenti *normative*.

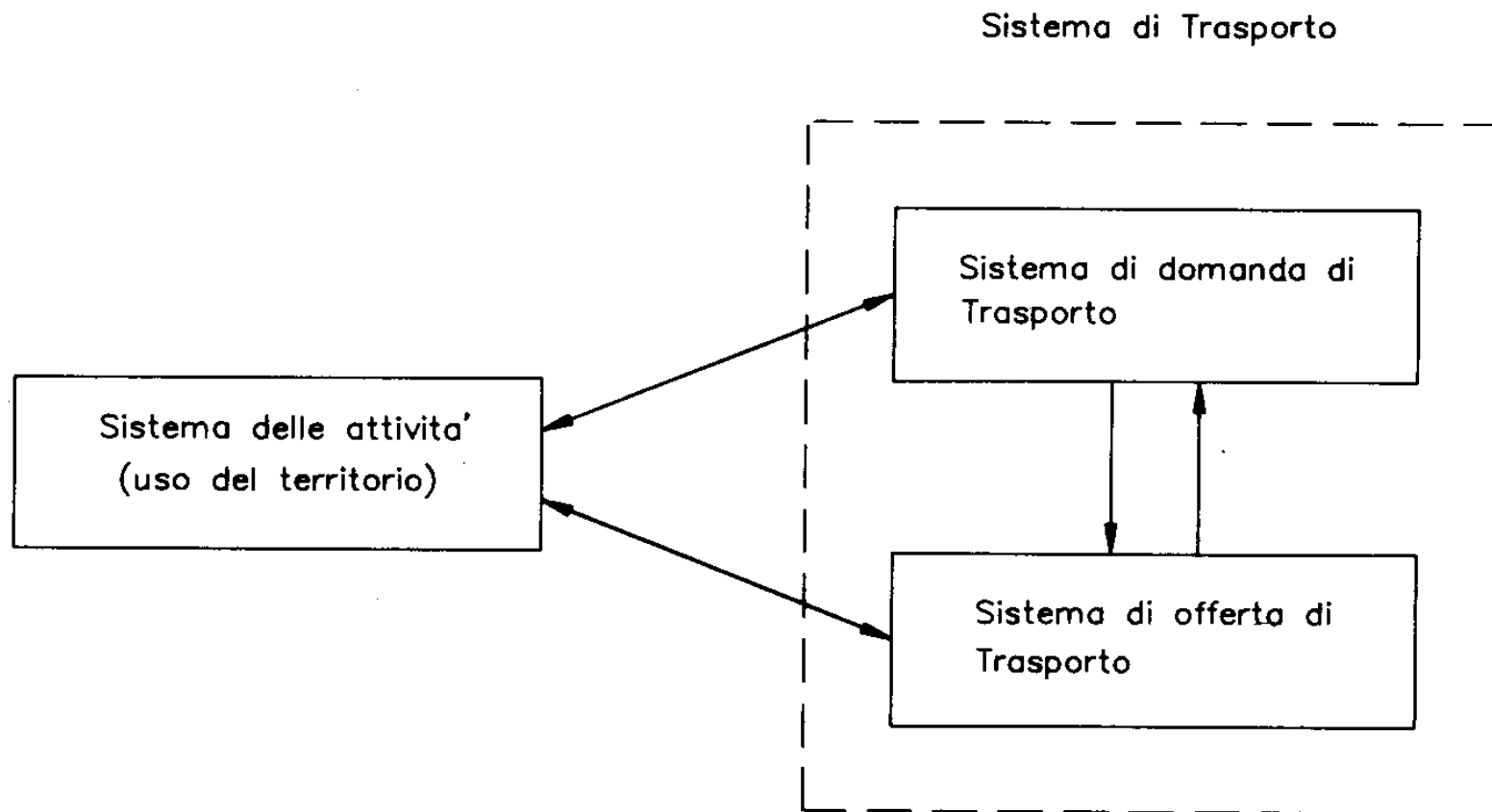
Esempio: Sistema di trasporto *individuale* in una area *urbana*

Sottosistema della *domanda*: Spostamenti di persone, che in un determinato intervallo temporale, avvengono fra zone origine e zone destinazione della area urbana.

Sottosistema della *offerta*:

- Componenti *fisiche*: insieme delle strade, veicoli, apparecchiature per il controllo semaforico.
- Componenti *organizzative*: cicli semaforici, tempi di verde, di rosso di giallo per le correnti veicolari; strade che hanno la precedenza, strade che devono dare la precedenza.
- Componenti *normative*: aree a traffico limitato; aree a “road pricing” .

# Interazione: sistema di *trasporto* – sistema *socioeconomico* del territorio



# Interazione: sistema di *trasporto* – sistema *socioeconomico* del territorio

La domanda di trasporto è una domanda *derivata*: uno spostamento *non produce “utilità” in sé*, ma viene compiuto per svolgere un’*attività alla destinazione* del viaggio.

- *In passato*: si considerava principalmente l’influenza del sistema *socioeconomico sulla domanda di trasporto*.

*Attualmente* si dà molta importanza *anche alla relazione inversa*.

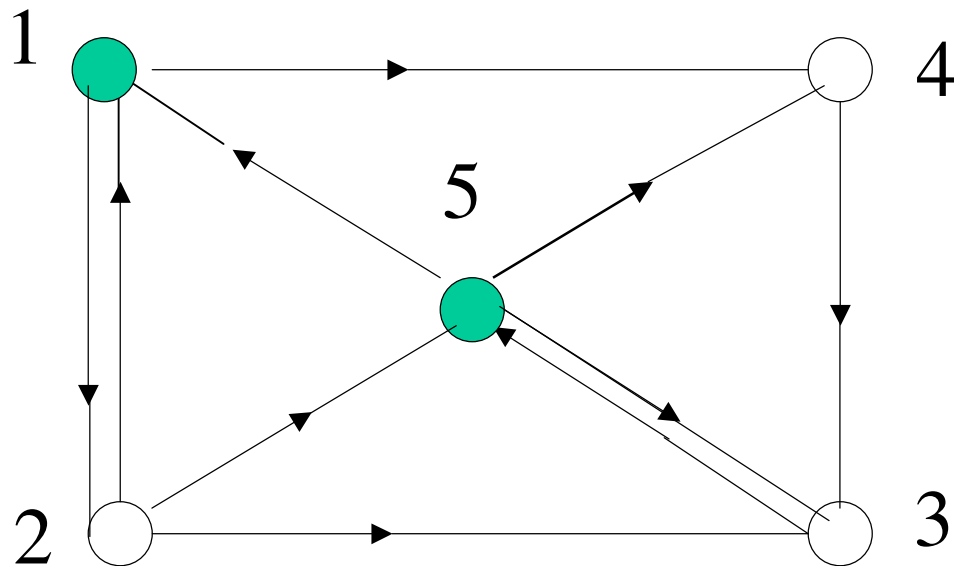
Un piano dei trasporti comprende:

- studio *dell’impatto ambientale* sul territorio;
- analisi dei *vantaggi*, in termini *economici e sociali*, conseguenti al miglioramento del sistema di trasporto.

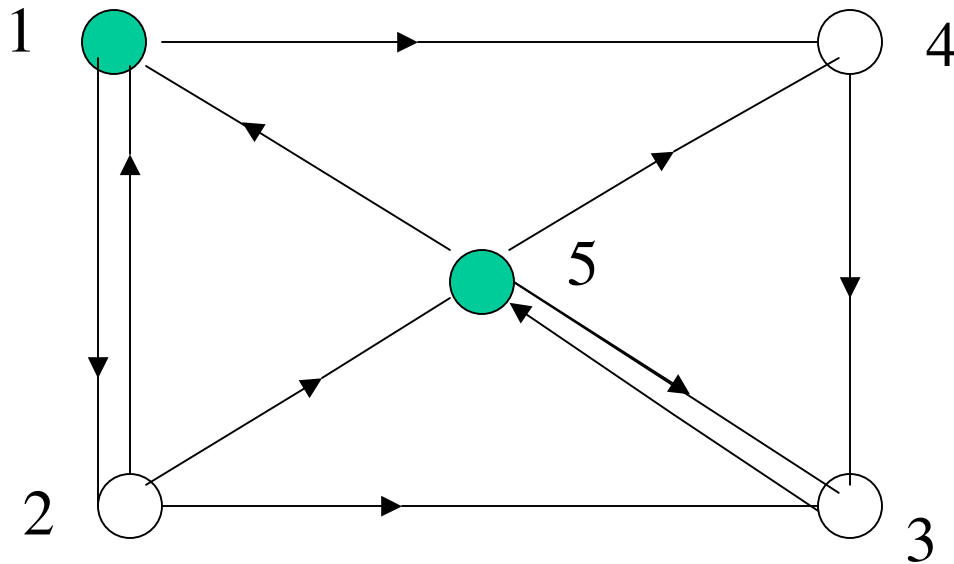
# Modellizzazione dell'offerta di trasporto: **Grafi**

Sia dato un insieme  $N$  di elementi  $i$  che chiamiamo *nodi* ed un insieme  $L$  di *coppie*  $(i, j)$  con  $i \in N$  e  $j \in N$  che chiamiamo *archi*.  
L'*insieme*  $G$  costituito dall'unione di  $L$  e di  $N$  :  
 $G = (N, L)$  costituisce un grafo.

*Rappresentazione grafica (è la più intuitiva)*

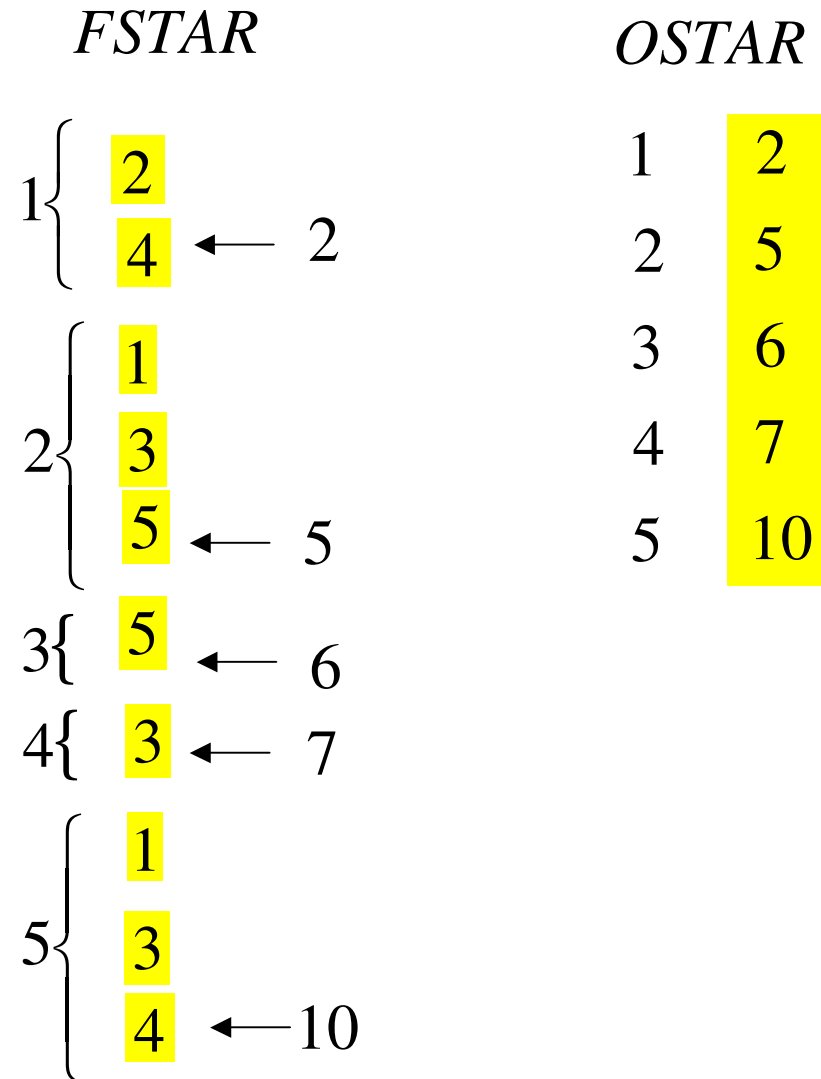


# Rappresentazione di un grafo tramite due vettori



***FSTAR* : nodi estremità delle varie stelle**

***OSTAR* : posto occupato in *FSTAR* dagli ultimi nodi dei successivi blocchi**



## Grafo utilizzato per rappresentare un sistema di trasporto

Cosa rappresentano i **nodi** del grafo? Individuano le posizioni **significative** nello **spazio** e nel **tempo** assunte dagli utenti del sistema di trasporto.

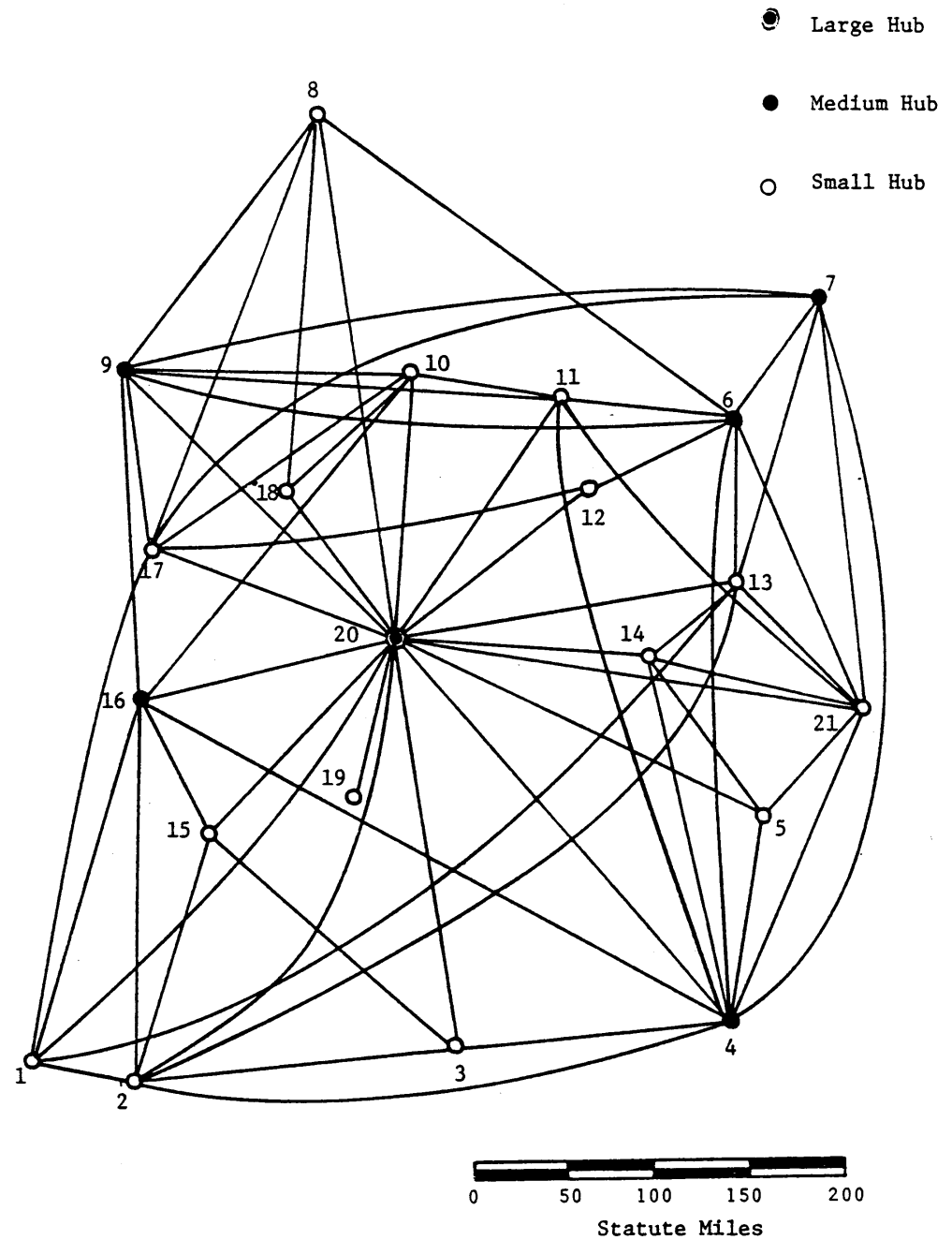
Cosa rappresentano gli **archi** del grafo? Rappresentano realtà fisiche diverse per esempio: una **infrastruttura**, il **servizio di trasporto** offerto fra due punti del territorio, la possibilità di eseguire una **manovra**.



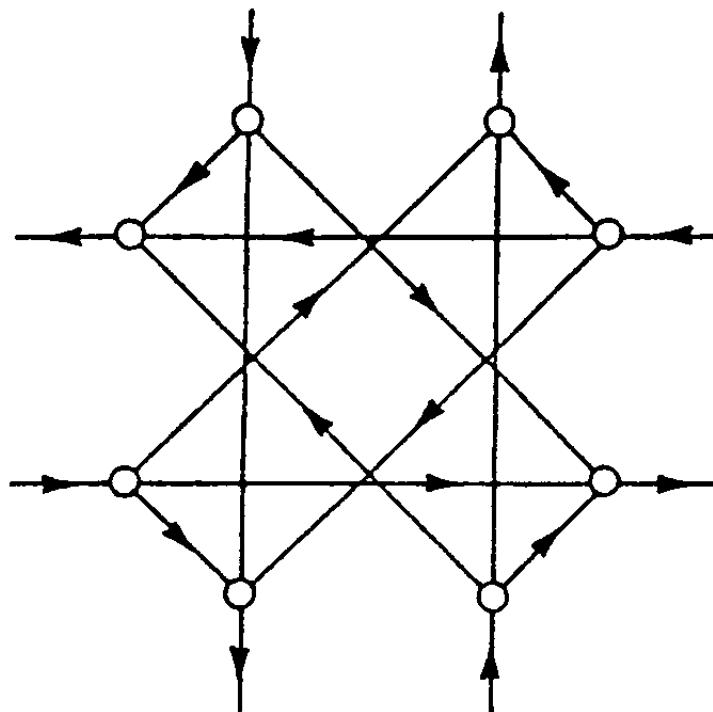
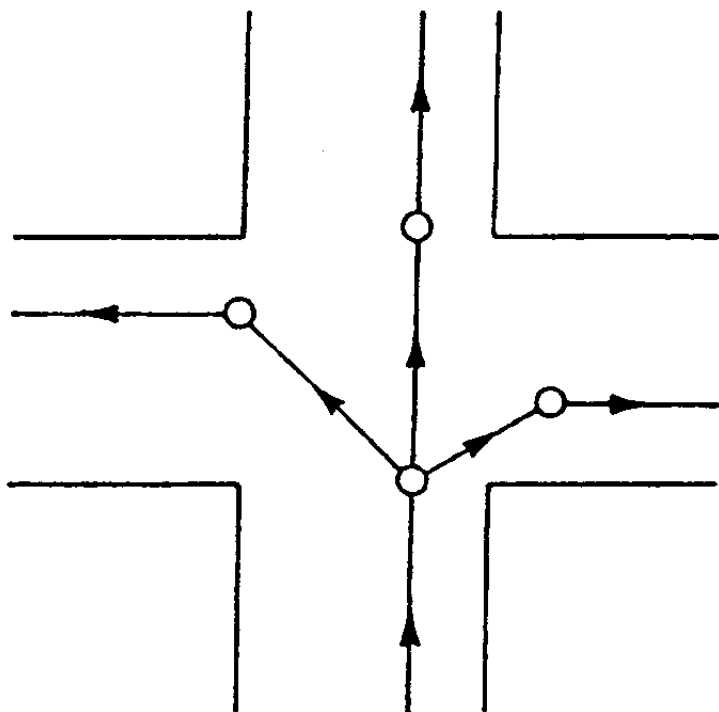
# Arco come infrastruttura, esempio: linea ferroviaria fra due stazioni (nodi)



**Arco rappresentante un servizio di trasporto, esempio: servizio di trasporto aereo fra due aeroporti (nodi).**



**Arco rappresentante una manovra (tempo di trasferimento),  
esempio: attraversamento, svolta a destra, svolta a sinistra  
ad una intersezione semaforizzata.**



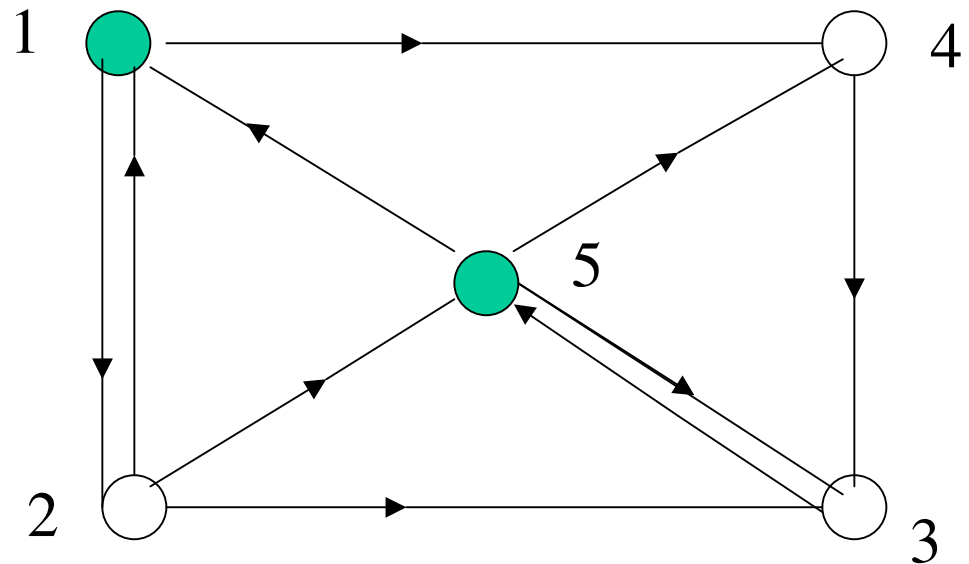
# Elementi di Teoria dei grafi utili per le reti di trasporto

*Itinerario* (o *cammino* o *percorso*): *sequenza di archi* nella quale il nodo *finale* di ciascun arco coincide con il nodo *iniziale* del successivo arco della sequenza.

1-4, 4-3, 3-5

1-2, 2-3, 3-5

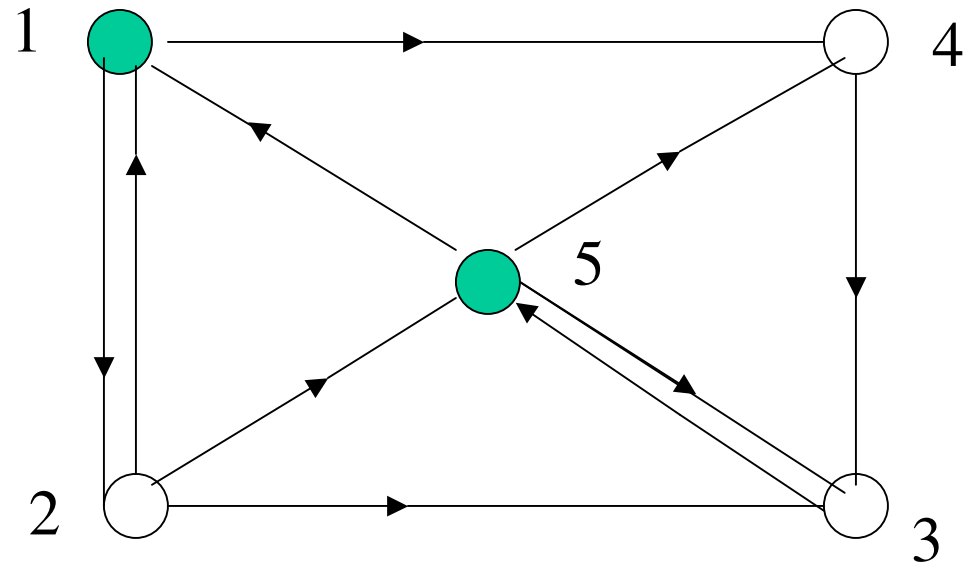
Un itinerario connette due nodi  $s$  e  $t$ : in cui  $s$  è il nodo iniziale del primo arco della sequenza e  $t$  è il nodo finale dell'ultimo arco della sequenza



*Circuito* (o *loop*): *itinerario* nel quale il nodo *iniziale* dell'*itinerario* *coincide* con il nodo finale dell'*itinerario*.

1-4, 4-3, 3-5, 5-1

1-2, 2-3, 3-5, 5-1



Itinerario *privo di circuiti*: nessuna *parte* di esso costituisce un *circuito*, ossia in esso un nodo non compare *più di una volta* come nodo iniziale o finale di un arco. Esempi di itinerari con circuiti: 1-4, 4-3, 3-5, 5-4, oppure 2-5, 5-1, 1-2, 2-3.

*Reti di trasporto*: si considerano sempre *itinerari privi di circuiti*.

## Altre definizioni sui grafi

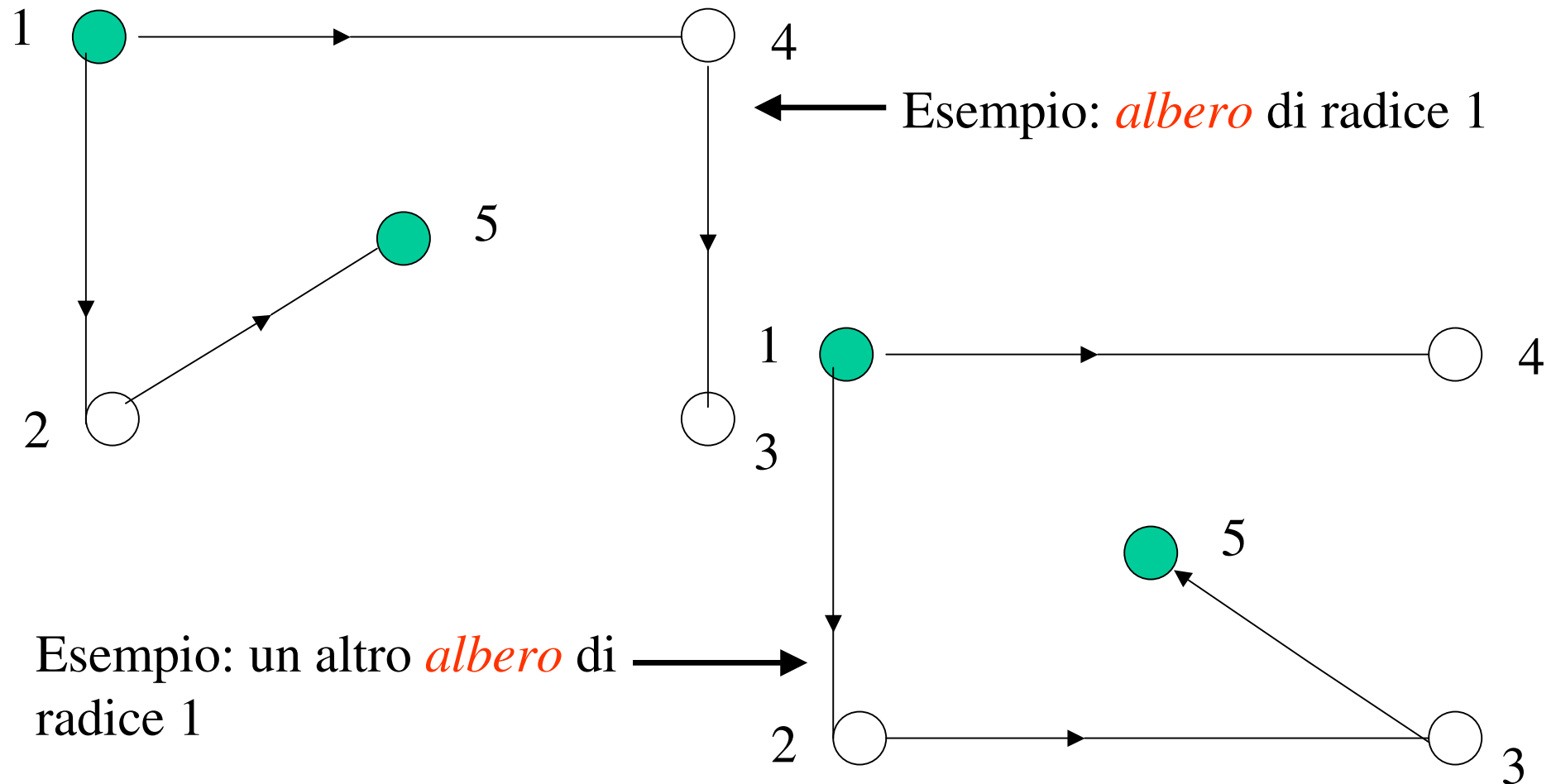
Grafo *completo* (o *completamente connesso*): un grafo in cui *ciascun nodo* è collegato mediante *un arco* a *ciascun altro nodo* del grafo.

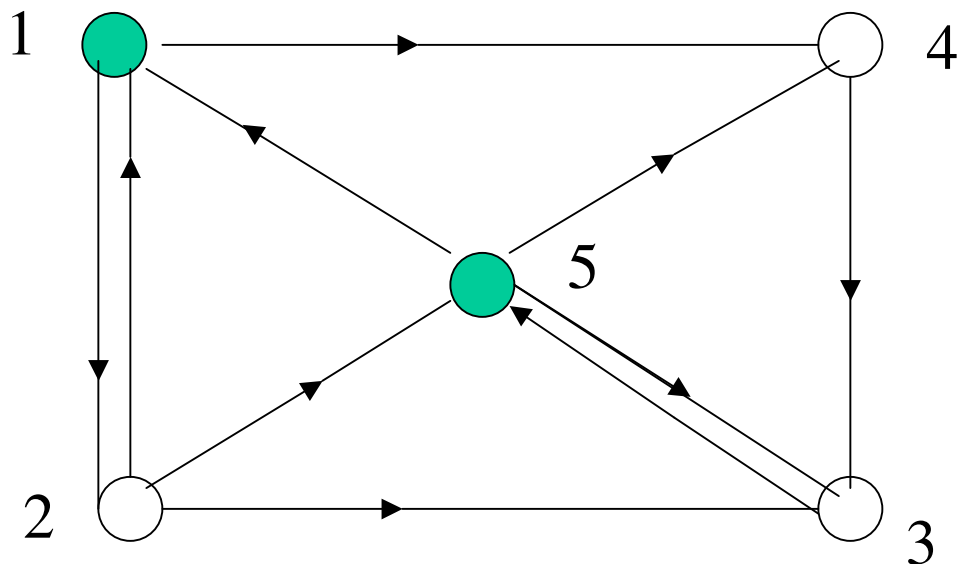
I grafi che rappresentano sistemi di trasporto (sottosistema della offerta) *non sono generalmente* completamente connessi.

Grafo *connesso*: *ciascun nodo* è origine di almeno *un itinerario* che ha come *nodo finale* un qualsiasi altro nodo del grafo.

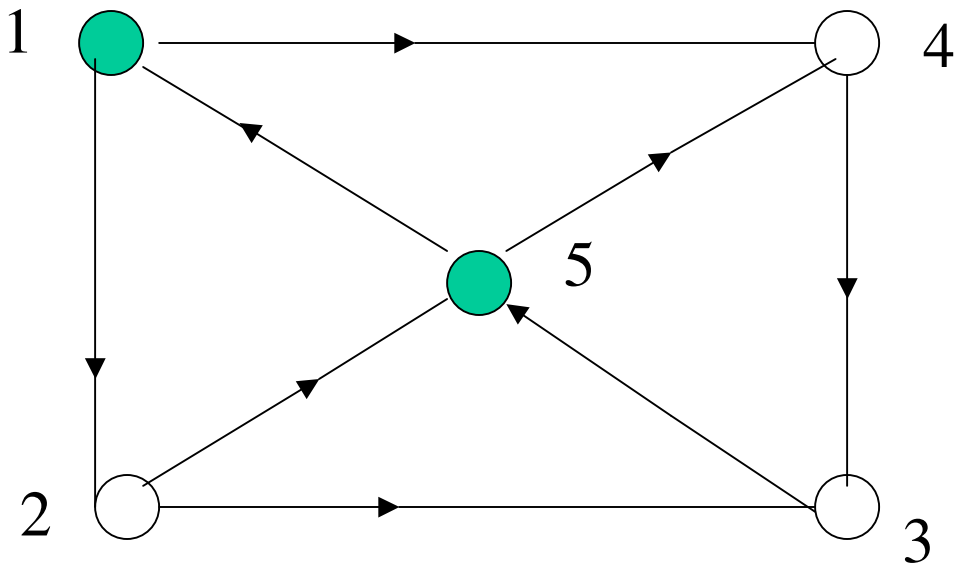
I grafi che rappresentano sistemi di trasporto *sono generalmente* connessi.

Si dice *albero*, di radice nel nodo  $s$ , un *grafo*, *privo* di *circuiti*, per il quale esiste un *solo itinerario* che collega il nodo radice  $s$  con *ciascun* altro nodo del grafo.

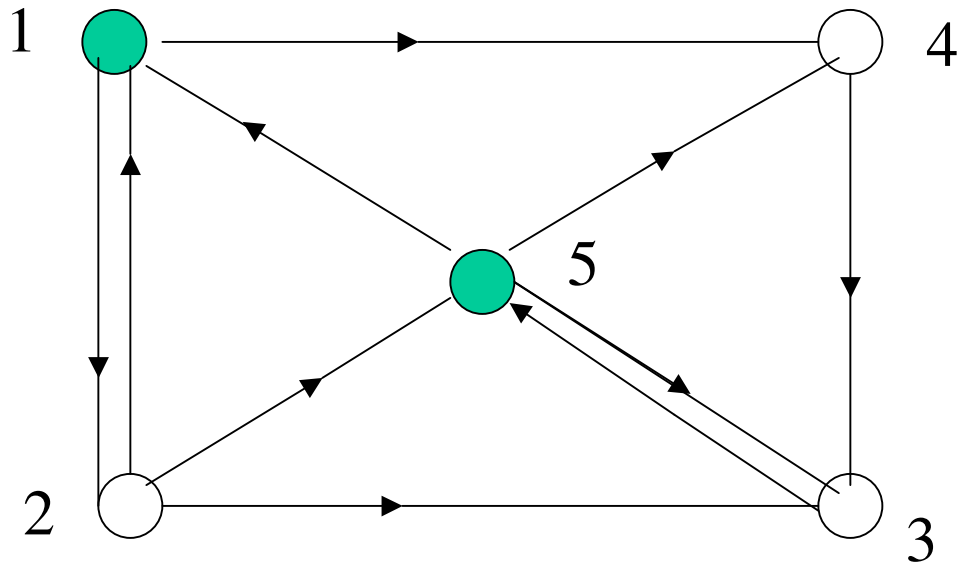




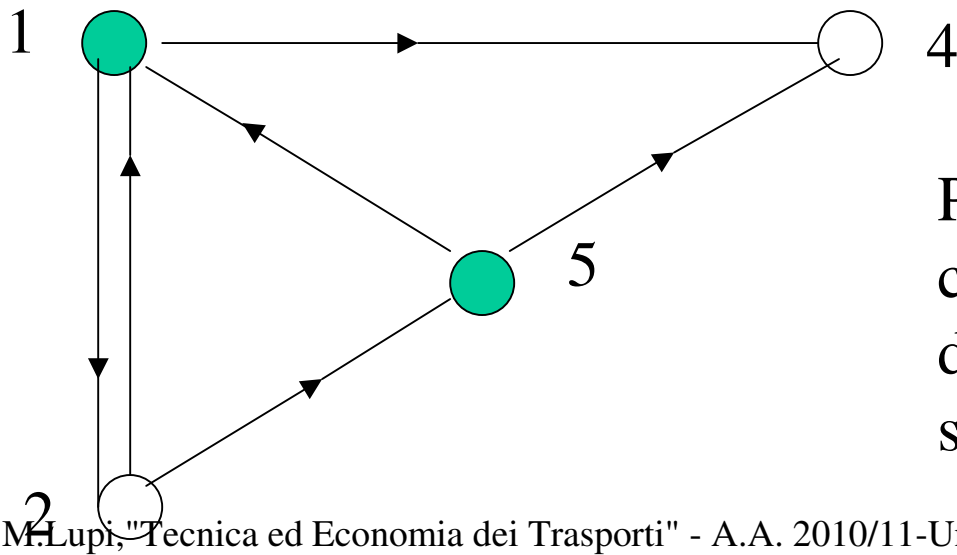
Grafo *parziale* (di un dato grafo): è un grafo che si ottiene dal grafo dato *eliminando* alcuni *archi* (i nodi rimangono gli stessi).



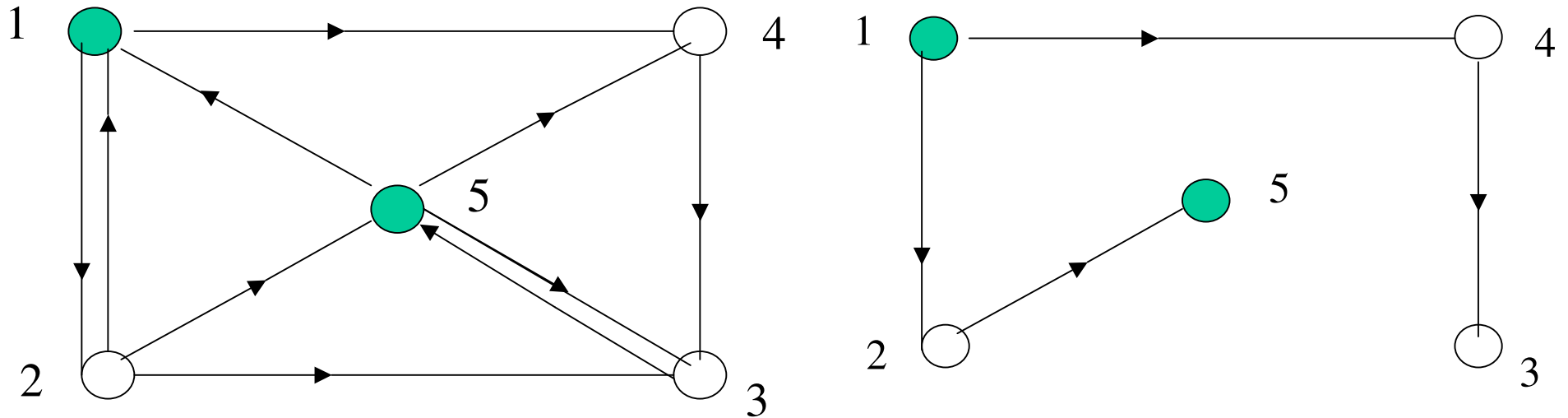




*Sottografo* (di un dato grafo): è un grafo che si ottiene dal grafo dato *eliminando* alcuni *nodi* ed alcuni *archi* del grafo dato.

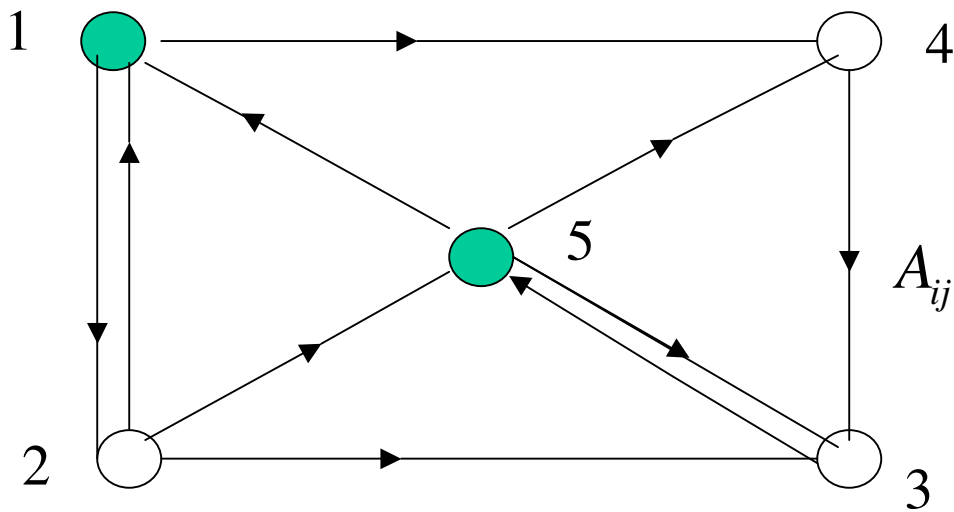


Per esempio un itinerario che connette due nodi, s e t, di un dato grafo è un esempio di sottografo.



Un albero, avente come nodo radice un nodo di un grafo, è un grafo *parziale* del grafo dato. Inoltre è un esempio di grafo *non connesso*.

In particolare posso definire un *albero di radice in un nodo s* di un grafo come un *grafo parziale* del grafo dato (privo di circuiti) nel quale esiste un solo itinerario che collega il nodo s con ciascun altro nodo del grafo dato.



**Matrice A : *incidenza archi-itinerari***

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'itinerario } j \text{ contiene l'arco } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1° 2° 3° 4°

1-2 0 1 1 0

1-4 1 0 0 0

2-1 0 0 0 0

2-3 0 0 1 0

2-5 0 1 0 0

3-5 1 0 1 0

4-3 1 0 0 0

5-1 0 0 0 1

5-3 0 0 0 0

5-4 0 0 0 0

Itinerari fra la *coppia O-D 1-5*

1 → 5: 1-4; 4-3; 3-5      1° itin

1 → 5: 1-2; 2-5      2° itin.

1 → 5: 1-2; 2-3; 3-5      3° itin.

Itinerari fra la *coppia O-D 5-1*

5 → 1 : 5-1      4° itin.

$$\mathbf{d} \begin{cases} 1000 (1 \rightarrow 5) \\ 500 (5 \rightarrow 1) \end{cases} \quad \mathbf{h} \begin{cases} 300 (1^\circ \text{ Itin.}) \\ 400 (2^\circ \text{ Itin.}) \\ 300 (3^\circ \text{ Itin.}) \\ 500 (4^\circ \text{ Itin.}) \end{cases}$$

Flusso su un arco: somma dei flussi sugli itinerari che contengono l'arco. Esempio arco 3-5.

$$(1 \quad 0 \quad 1 \quad 0) \times \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} = 300 + 300 = 600 \text{ autoveicoli}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{h}$$

$$a \times 1 \quad a \times M \quad M \times 1$$

$a$  : numero di archi nella rete;

$M$  : numero di itinerari nella rete

**B : Matrice di  
incidenza coppie  
O/D - itinerari**

	1°	2°	3°	4°
1 → 5	1	1	1	0
5 → 1	0	0	0	1

$B_{ij} \begin{cases} 1 \text{ se l'itinerario } j \text{ collega la coppia } i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

$$\underset{(m \times 1)}{\mathbf{d}} = \underset{(m \times M)}{\mathbf{B}} \underset{(M \times 1)}{\mathbf{h}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$m$  : numero di coppie O/D nella rete

$M$  : numero di itinerari nella rete

# Se voglio trovare $h$ dato $d$ ?

$$0,3 = \frac{300}{300 + 400 + 300}$$

$$\mathbf{B}' \underset{M}{(n. \text{ itinerari}} \times \underset{m}{n. \text{ coppie } O/D}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{*'} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 0,4 = \frac{400}{1000} \\ 1 = \frac{500}{500} \end{array}$$

$$\mathbf{h} \underset{(M \times 1)}{=} \mathbf{B}^{*'} \underset{(M \times m)}{=} \mathbf{d} \underset{(m \times 1)}{}$$

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Aliquota di domanda, fra la coppia O-D  $j$ , che utilizza l'itinerario  $i$

Siamo interessati alla *determinazione* di  $f$  (vettore dei flussi sugli archi) *dato* il vettore di *domanda*  $d$  –  
*Problema dell'assegnazione*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{h} \\ \mathbf{h} = \mathbf{B}^* \mathbf{d} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{B}^* \mathbf{d} = \mathbf{Z} \mathbf{d}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f} & = & \mathbf{A} \quad \mathbf{h} \\ (a \times 1) & & (a \times M) \quad (M \times 1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{h} & = & \mathbf{B}^* \mathbf{d} \\ (M \times 1) & & (M \times m) \quad (m \times 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{f} & = & \mathbf{A} & \mathbf{B}^* & \mathbf{d} & = & \mathbf{Z} \quad \mathbf{d} \\ (a \times 1) & & (a \times M) & (M \times m) & (m \times 1) & & (a \times m) \quad (m \times 1) \end{array}$$

$Z_{ij}$  = aliquota di domanda della coppia O/D  $j$  passante  
per l'arco  $i$

	<b>A</b> ( $a \times M$ )				<b>B*'</b> ( $M \times m$ )			<b>Z</b> ( $a \times m$ )	
	1°	2°	3°	4°				1-5	5-1
1-2	0	1	1	0	0,3	0	1-2	0,7	0
1-4	1	0	0	0	0,4	0	1-4	0,3	0
2-1	0	0	0	0	0,3	0	2-1	0	0
2-3	0	0	1	0	0	1	2-3	0,3	0
2-5	0	1	0	0			2-5	0,4	0
3-5	1	0	1	0			3-5	0,6	0
4-3	1	0	0	0			4-3	0,3	0
5-1	0	0	0	1			5-1	0	1
5-3	0	0	0	0			5-3	0	0
5-4	0	0	0	0			5-4	0	0



$$\begin{matrix}
 \mathbf{Z} & = & \mathbf{A} & \mathbf{B*'} \\
 (a \times m) & & (a \times M) & (M \times m)
 \end{matrix}$$



**Z**  
( $a \times m$ )

**d**  
( $m \times 1$ )

**f**  
( $a \times 1$ )

	1-5	5-1
1-2	0,7	0
1-4	0,3	0
2-1	0	0
2-3	0,3	0
2-5	0,4	0
3-5	0,6	0
4-3	0,3	0
5-1	0	1
5-3	0	0
5-4	0	0

1000  
500

1-2 700  
1-4 300  
2-1 0  
2-3 300  
2-5 400  
3-5 600  
4-3 300  
5-1 500  
5-3 0  
5-4 0

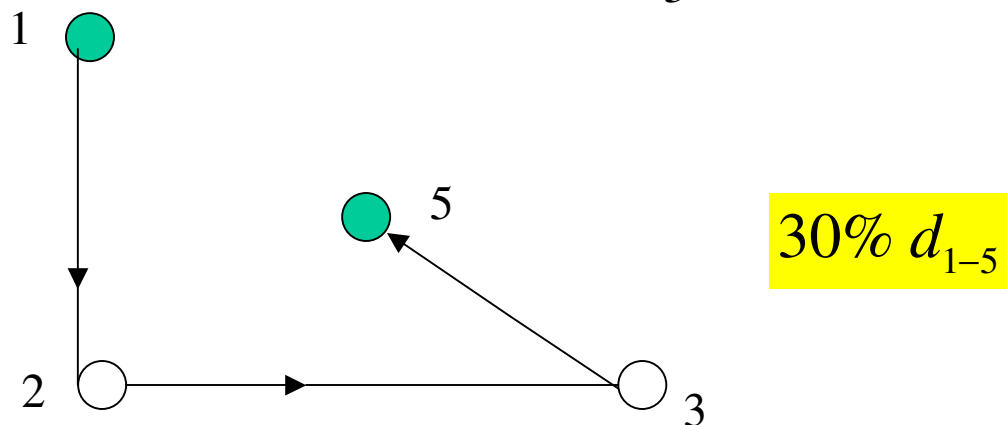
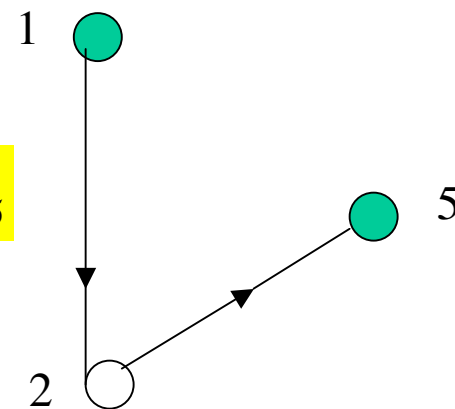
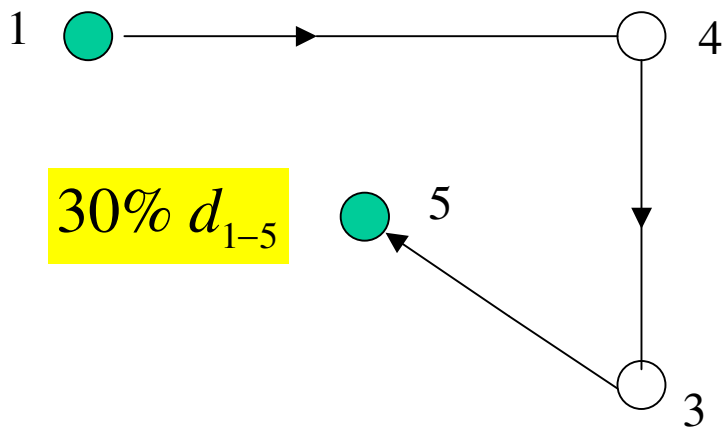


$$\mathbf{f} = \mathbf{Z} \mathbf{d}$$

( $a \times 1$ )    ( $a \times m$ ) ( $m \times 1$ )

Ho ipotizzato una certa matrice  $B^*$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Nelle applicazioni pratiche devo risolvere il *problema* dell'*assegnazione* per reti di *grandi dimensioni*

Nel corso vedremo due metodi:

Assegnazione *tutto o niente*: *tutta la domanda*, fra una certa coppia O-D, viene assegnata all'*itinerario di minimo costo*.

Assegnazione *probabilistica*: la domanda si *divide* fra i *vari itinerari* che congiungono una certa coppia O/D (la distribuzione della domanda dell'esempio precedente potrebbe essere il risultato di un'assegnazione probabilistica).

## Costi sugli archi

I nodi del grafo indicano le diverse *posizioni significative* nello *spazio e nel tempo* dell'utente del sistema di trasporto.

Ogni arco è caratterizzato dal tempo di trasferimento o da altri *oneri sopportati dall'utente* per *spostarsi* dal nodo iniziale a quello finale.

Il costo è un *vettore*: tempo di percorrenza, costo monetario, stress....., ma nella schematizzazione di un sistema di trasporto tramite una rete si considera uno *scalare*:

- considerando la componente più *rilevante*: per es. tempo del viaggio per le reti di trasporto urbane;

- *omogeneizzando tutte* le componenti in un costo *generalizzato* attraverso opportuni coefficienti:

$$c_g = \beta t + c_m$$

Valore monetario del tempo

costo monetario

Il costo del trasporto riflette l' *avversione* degli *utenti* a percorrere l'arco. La domanda di trasporto è una *domanda derivata*: uno spostamento *non produce "utilità" in sé*, ma viene compiuto per *svolgere delle attività* alla *destinazione del viaggio*.

# Costi sugli archi e costi sugli itinerari di una rete

Costo su un itinerario  $p$ ,  $C_p$ , è dato dalla somma dei costi sugli archi che lo compongono.

$$\mathbf{C} \equiv (C_1, C_2, \dots, C_p, \dots, C_M)$$

**Vettore dei costi sugli itinerari**

$$\mathbf{c} \equiv (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_a)$$

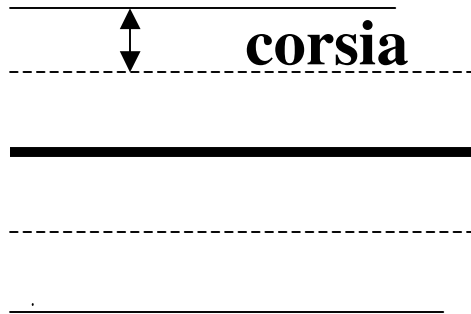
**Vettore dei costi sugli archi**

**Matrice A : *incidenza archi-itinerari***

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'itinerario } j \text{ contiene l'arco } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{C} & = & \mathbf{A}' & \mathbf{c} \\ M \times 1 & & M \times a & a \times 1 \end{matrix}$$

# Funzioni di costo su un arco



Strada a carreggiate *separate*  
(autostrada)

$f_1$

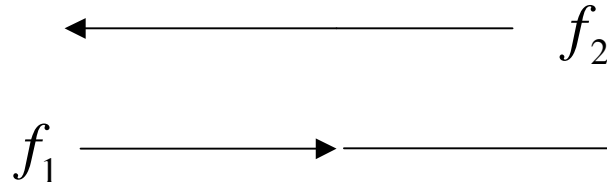
$$c_1 = c_1(f_1)$$

Funzione di costo *separabile*: il costo dipende *solo* dal flusso sull'arco a cui la funzione si riferisce:  $c_i = c_i(f_i)$ .



Strada a carreggiata *unica*  
(due corsie totali)

$$c_1 = c_1(f_1, f_2)$$



Funzione di costo *non separabile*: il costo dipende *anche* dal flusso su altri archi della rete. In generale:  $c_i = c_i(\mathbf{f})$

# Rete di Trasporto

Si dice *rete* un grafo ai cui archi è associata una *caratteristica quantitativa*.

La *funzione di costo* è la *caratteristica quantitativa* che trasforma un grafo in una *rete di trasporto*.

**Rete di trasporto:**  $R(N, L, F)$

$N$  : Insieme dei **nodi**

$L$  : Insieme degli **archi** (coppie di nodi)

$F$  : Insieme delle **funzioni di costo**



# Estrazione di una rete di trasporto da una realtà territoriale

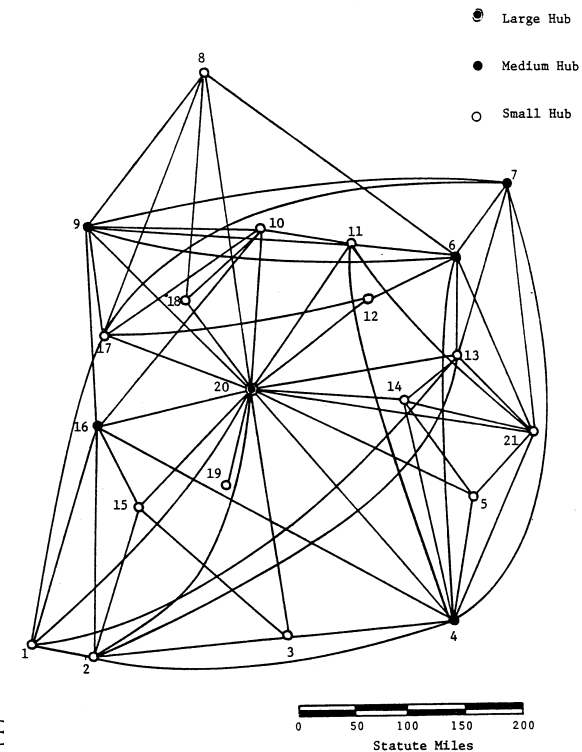
Problema dell'*estrazione*: individuazione delle *posizioni spazio-temporali* degli utenti *significative per l'analisi del sistema di trasporto*, degli *archi* che le collegano con le rispettive *funzioni di costo*.

Rete di *trasporto aereo*:

Nodi: aeroporti

Archi: esistenza di un *servizio* di trasporto aereo fra i nodi.

(Discorso analogo per una rete di trasporto marittimo)



Rete di *trasporto ferroviario*:

Nodi: stazioni

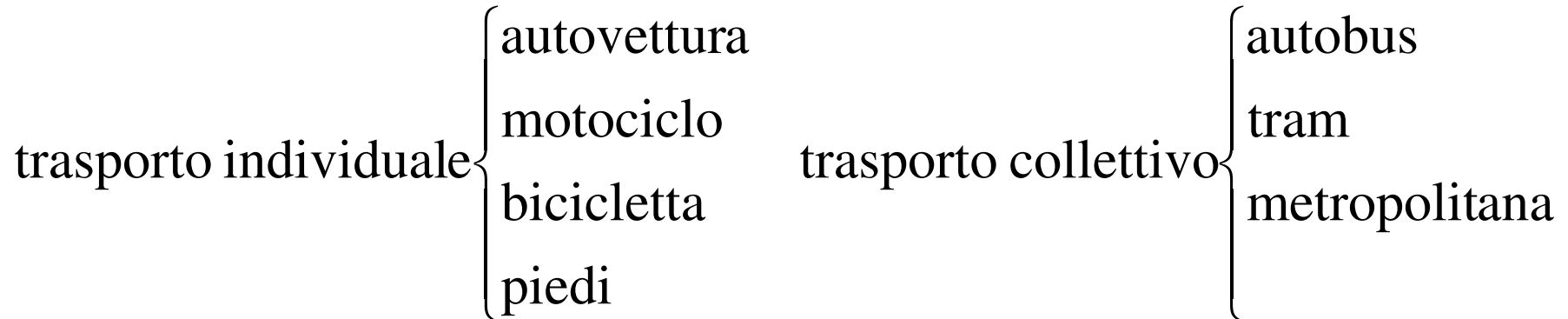
Archi: linee ferroviarie (*infrastruttura fisica*)

(Discorso analogo per una rete di trasporto autostradale)



# Estrazione della rete da una realtà territoriale: rete dei trasporto di una *area urbana : caso complesso*

*Più sistemi* di trasporto:



Altro problema: le strade sono molto *differenti* fra loro per caratteristiche *geometriche* e di *traffico*.

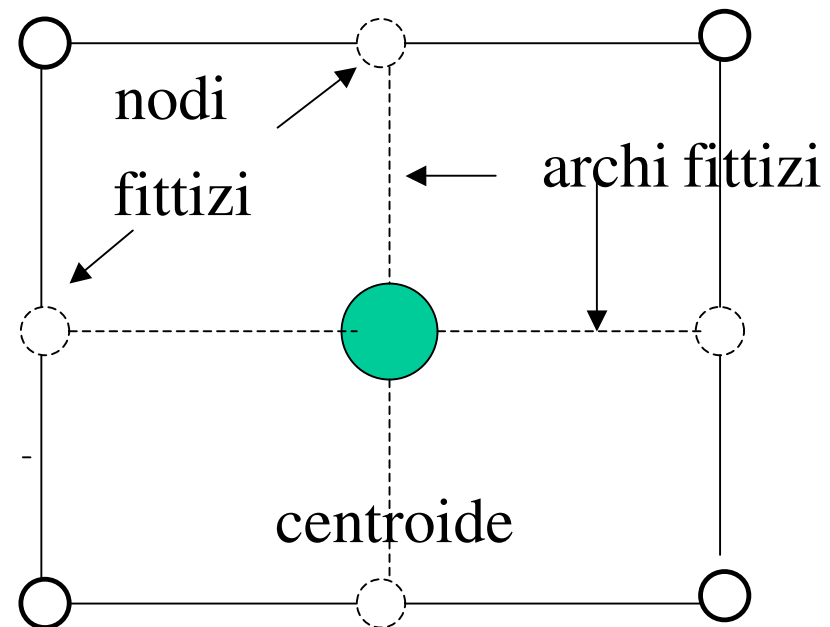
Tipologie di strade: *locali, interquartiere, scorrimento, primarie*

## I nodi centroidi

La rete di trasporto serve per *modellizzare* fondamentalmente l'*offerta* di trasporto. Ma si tiene conto anche della *domanda*: attraverso la determinazione del numero dei *centroidi* e della loro posizione.

I punti di partenza e di fine degli spostamenti in area urbana sono estremamente diffusi nel territorio.

Semplificazione per trattare il problema: penso concentrate, in un unico punto, *centroide*, gli spostamenti che arrivano o partono dai diversi punti della zona a cui è associato il centroide.



Quanti centroidi devo mettere in una rete che rappresenta un sistema urbano?

## Problema del *dettaglio* nell'estrazione di una rete di trasporto urbana

Fasi della simulazione di un sistema di trasporto:

- *Estrazione della rete* (modellizzazione dell'offerta)
  - *Stima della domanda* di trasporto
  - Interazione domanda- offerta: *assegnazione della domanda alla rete*
- Calcolo dei *flussi sugli archi*

Sono interessato ad avere una discordanza fra *flussi calcolati* con il modello e *rilevati* nella realtà (*conteggi di traffico*) minore possibile.

Quattro *fonti principali* di errore (discordanza fra flussi calcolati e rilevati):

- a) Errori dovuti alla modellizzazione del *comportamento dell'utente* nella scelta dell'itinerario fra una coppia O-D.
- b) Errori riguardanti la *stima della domanda* di trasporto.
- c) Errori relativi alle *funzioni di costo* sugli archi.
- d) Scarsa idoneità dello *schema di rete* a rappresentare il sistema di offerta reale.

*Scarsa idoneità* dello *schema di rete* a rappresentare il sistema di offerta reale (d): sono spinto ad estrarre una *rete dettagliata*

b) Errori riguardanti la *stima* della *domanda* di trasporto

c) Errori relativi alle *funzioni di costo* sugli archi



Mi conviene adottare uno schema *meno dettagliato*

Per ridurre le fonti di “discordanza” b) e c) mi conviene:

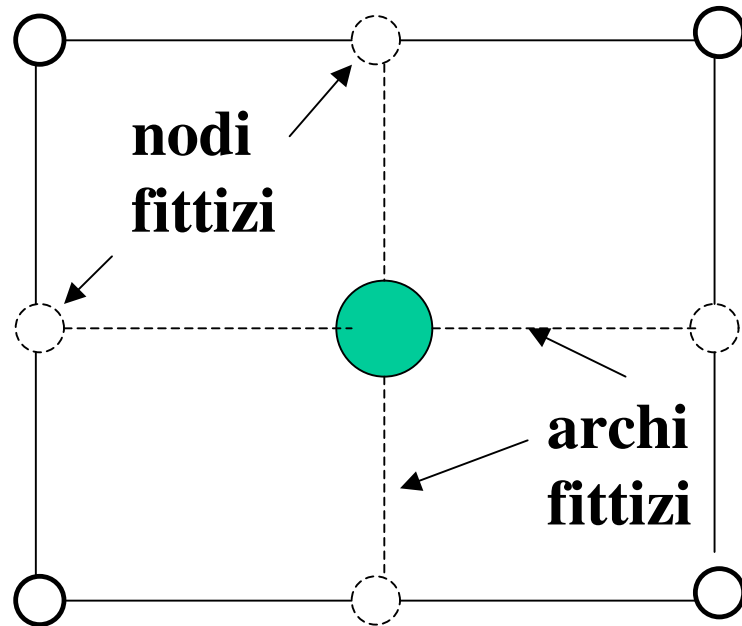
- *Limitare* il numero di *centroidi* e quindi di coppie O-D nella rete: limitando il numero di informazioni ottenute da indagini campionarie, a parità di tasso di campionamento, ottengo stime più *affidabili*.
- *Non rappresentare le strade locali* : funzioni di costo difficili da individuare perché non riconducibili ad una tipologia standard.

Nella *pratica dell'estrazione* delle reti da una realtà urbana si tende a *non rappresentare* le *strade locali* (strade a servizio dei comparti ambientali):

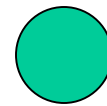
- ottengo zone di riferimento dei centroidi di *grandezza adeguata* ad una *buona stima* della *domanda* (numero limitato di coppie O-D della rete);
- evito di introdurre nel modello funzioni di costo i cui valori sono lontani da quelli reali (funzioni di costo *poco affidabili*).



# Comparti ambientali



Porzioni di area urbana in cui il traffico *arriva o parte*, ma *non li attraversa*

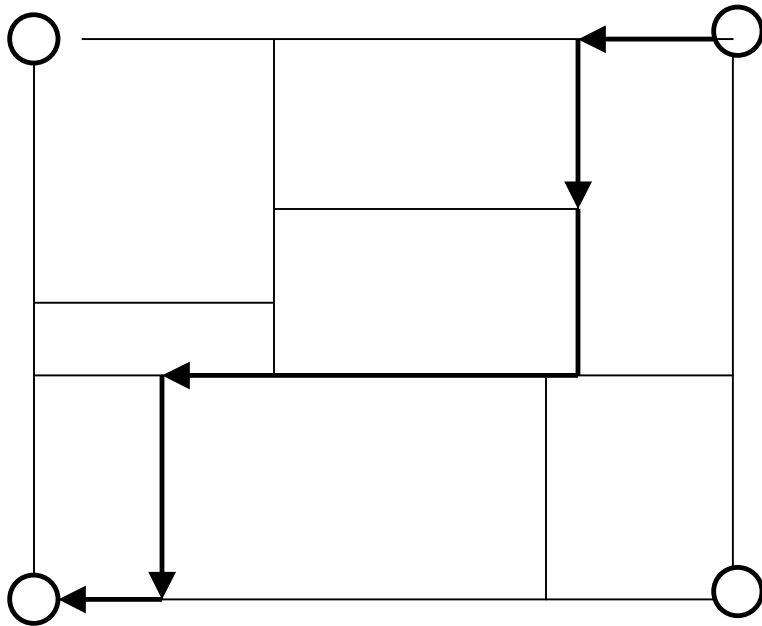


Centroide non attraversabile : in esso si pensano *concentrati* gli spostamenti in arrivo e partenza dal comparto.

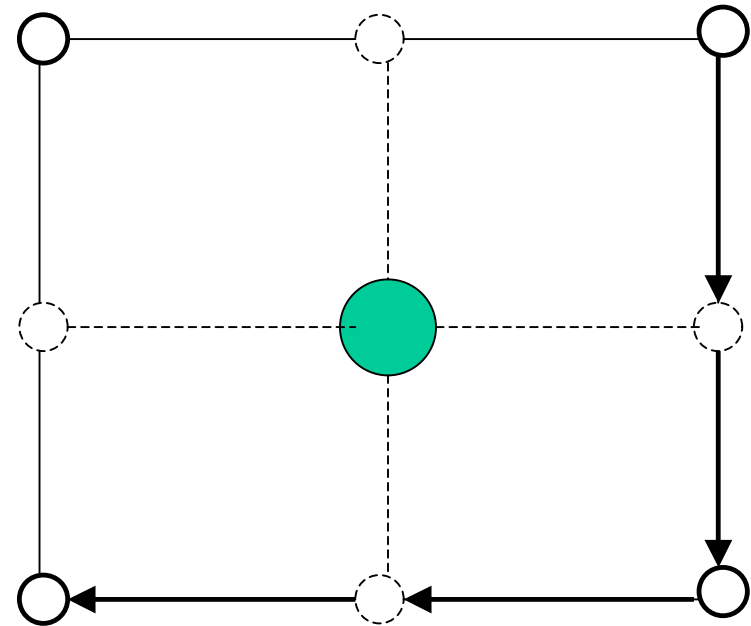
----- *archi "fittizi"*

Rappresentano in modo fittizio (funzioni di costo non reali) l'insieme delle strade locali (rappresentano anche semplici relazioni di traffico a servizio del comparto).

Affinchè lo schema di rete sia adeguato *devo progettare la rete* stradale reale in modo che gli utenti non attraversino il comparto: altrimenti forzo i flussi su un numero minor di infrastrutture stradali



**Itinerario *reale***



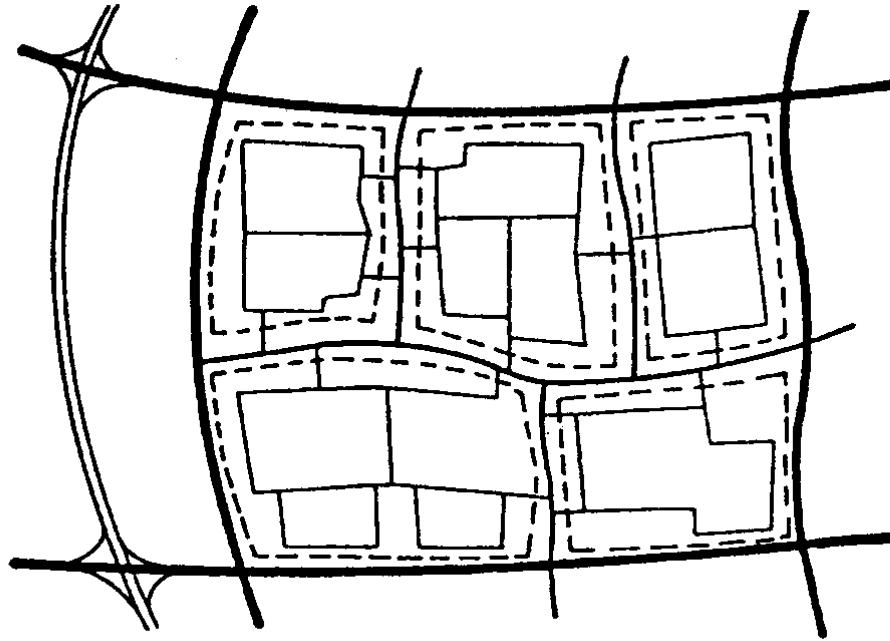
**Itinerario considerato  
*nel modello***





In realtà la previsione dei comparti ambientali, non è tanto una norma per *limitare* gli *errori* dovuti alla *modellizzazione* del sistema di trasporto tramite una rete, ma è soprattutto una *importante norma* di tipo *progettuale*.

Si devono *progettare* reti stradali urbane che siano divise in comparti ambientali al fine di *limitare l'inquinamento atmosferico* ed *acustico* nelle aree residenziali.

Previsione dei comparti ambientali: famoso rapporto “*Traffic in Towns*” della Commissione *Buchan*, anni '60 in Gran Bretagna

# Classificazione delle strade urbane



-  Strada primaria
-  Strada di scorrimento
-  Strada di quartiere
-  Strada locale
-  Limite dei comparti ambientali

Strade *primarie*: tronchi terminali e passanti delle strade *extraurbane*, prevalentemente *raccogliono* e *distribuiscono* il traffico di *scambio* fra il territorio urbano ed extraurbano (ma sono utilizzate anche dal traffico di attraversamento).

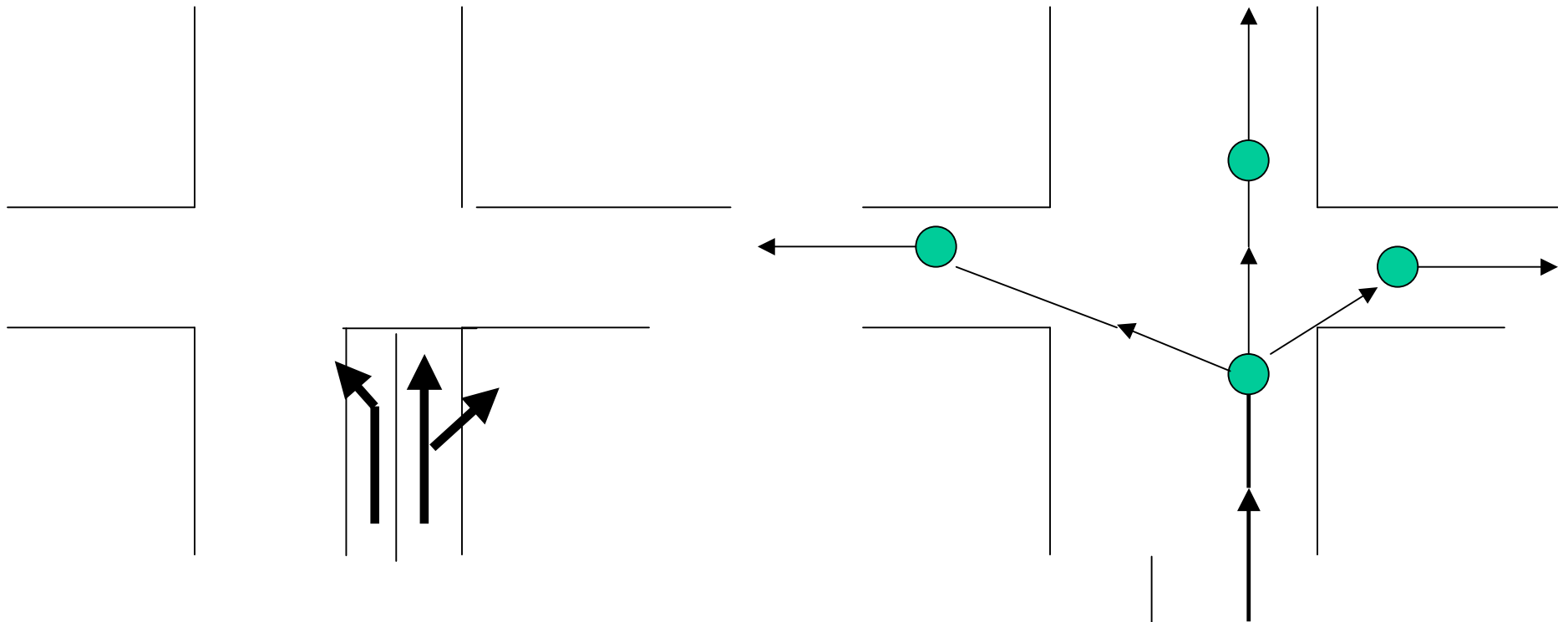
Strade di *scorrimento*: sono totalmente comprese in ambito urbano, prevalentemente, canalizzano gli spostamenti di *maggior lunghezza* e i *flussi più elevati*.

Strade di *quartiere*: sono a servizio di ambiti urbani più limitati di quelle di scorrimento, ma superiori a quelli delle strade locali.

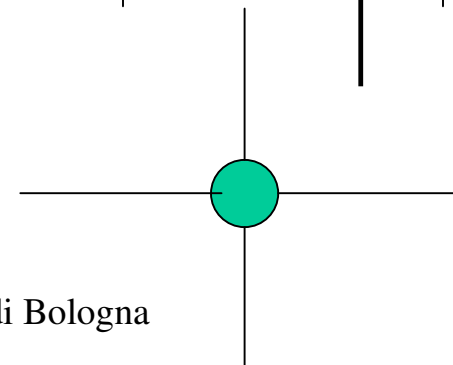
Strade *locali*: sono al servizio dei *comparti ambientali*. Le strade locali devono essere progettate per consentire l'*accesso* agli edifici del comparto, ma *non* per essere utilizzate per *attraversare* il comparto.

# Intersezioni semaforizzate

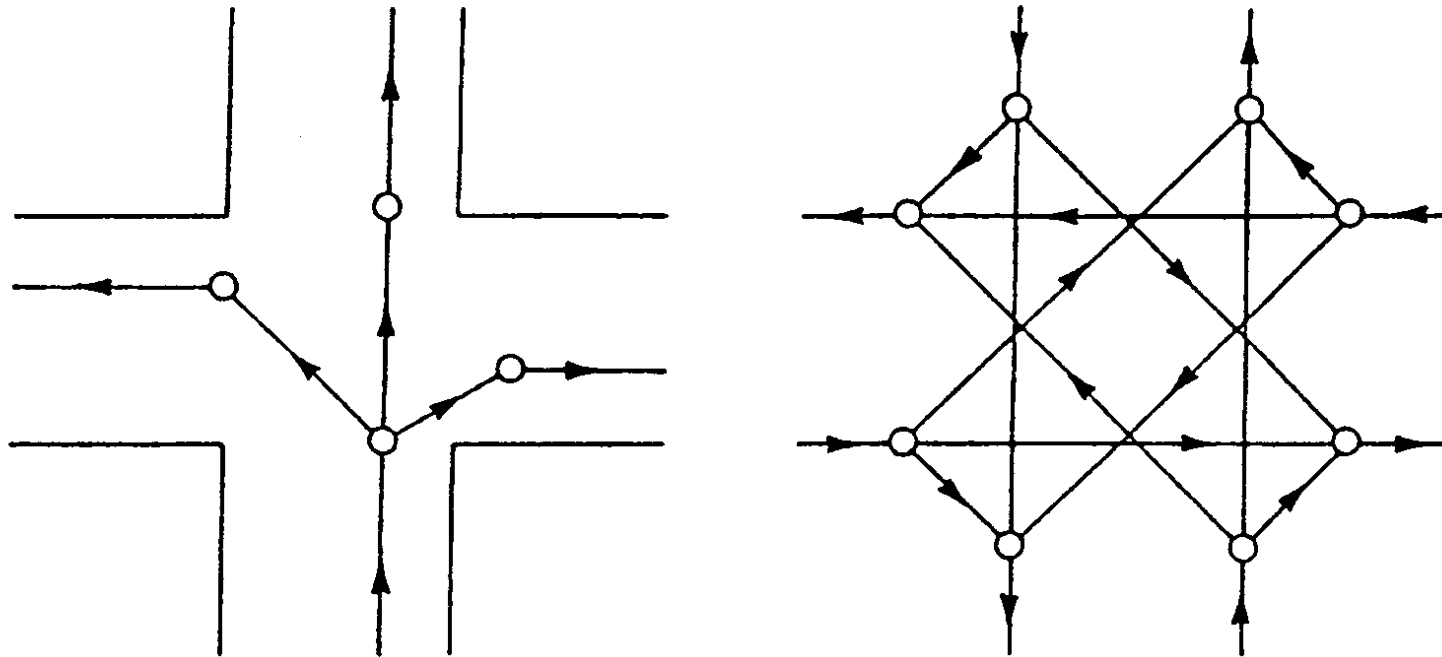
Rappresentazione cosiddetta “*esplosa*”



Rappresentazione  
cosiddetta “*semplificata*” (unico nodo)

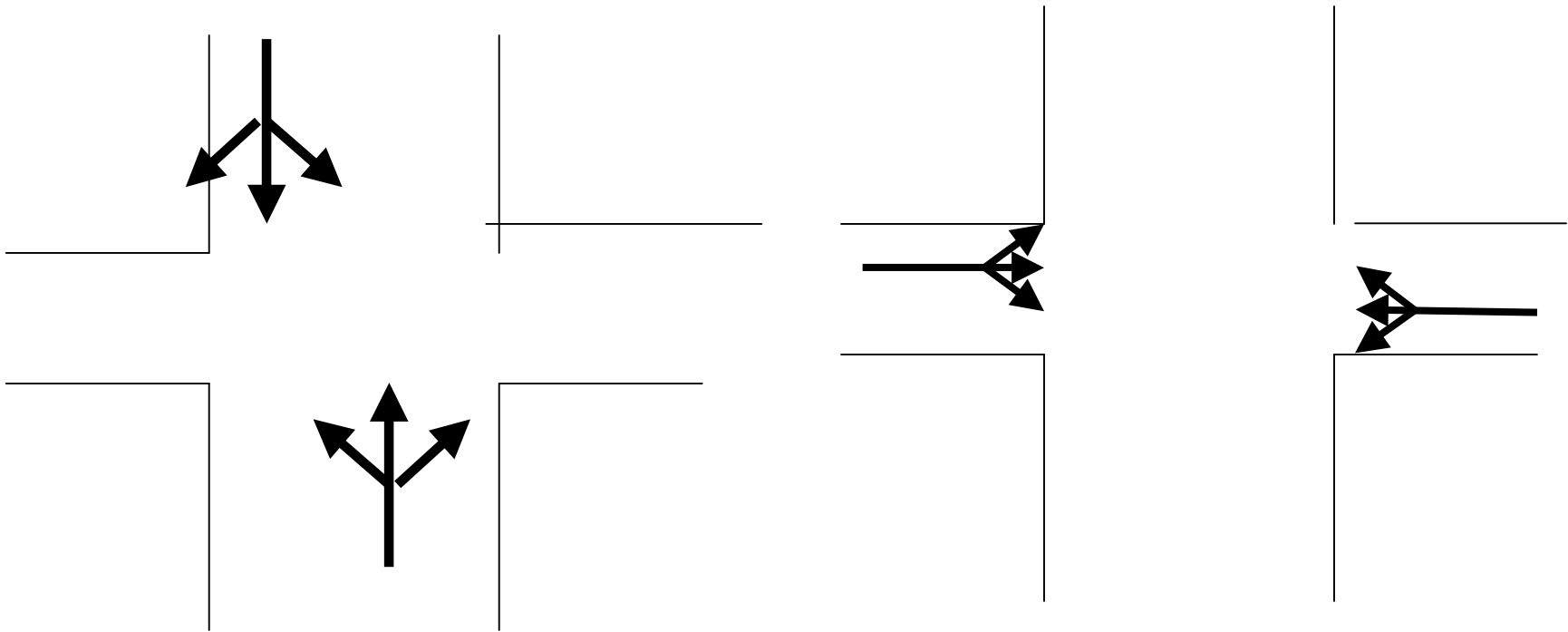


## Rappresentazione “esplosa”



Una intersezione semaforizzata è rappresentata con *8 nodi* e *12 archi* (per ciascun approccio ho tre archi: svolta a destra, attraversamento, svolta a sinistra).

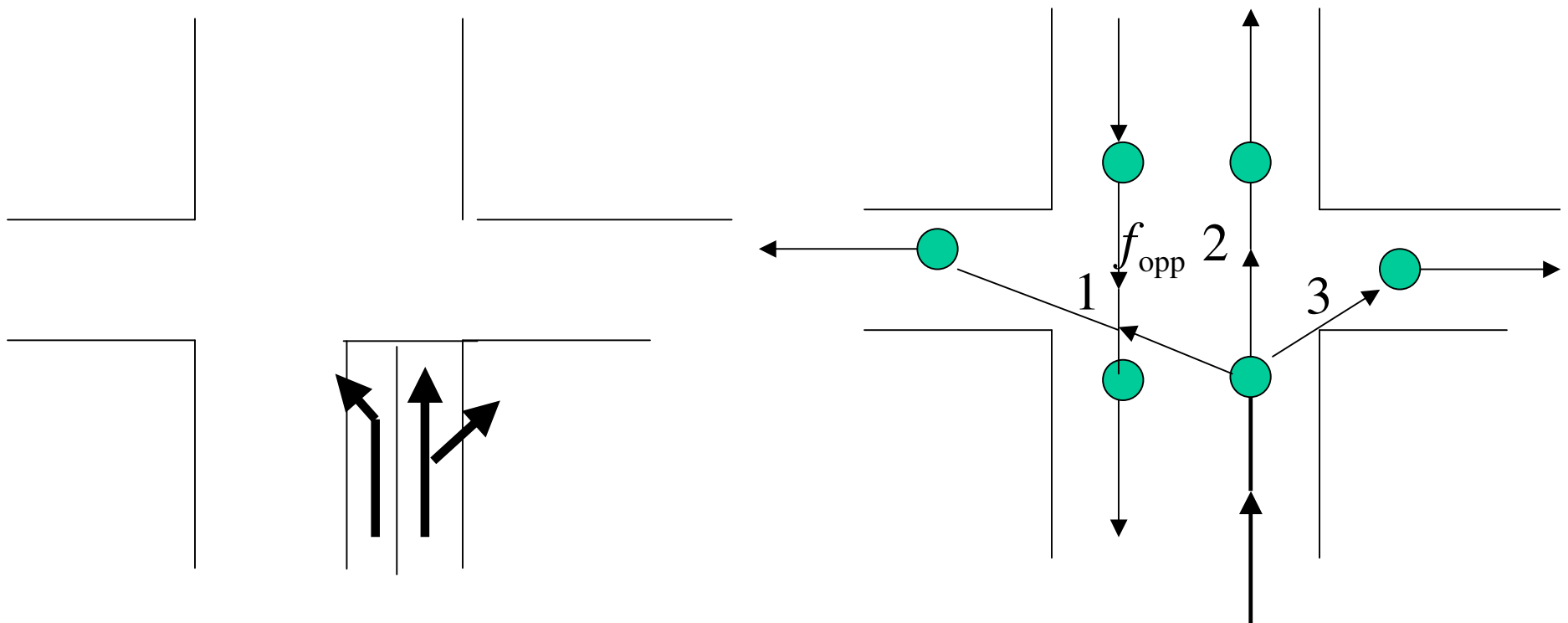
## Immaginiamo una certa fasatura:



1° fase: nord-sud

2° fase: est-ovest





Funzioni di costo *non separabili* : il costo dipende *non solo* dal flusso sull'arco a cui ci si riferisce.

Arco 1, *svolta a sinistra*, *non* separabile:  $c_1 = c_1(f_1, f_{opp})$

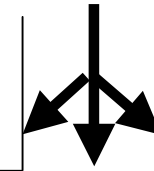
Arco 2, *attraversamento*, *non* separabile:  $c_2 = c_2(f_2, f_3)$

Arco 3, *svolta a destra*, *non* separabile:  $c_3 = c_3(f_3, f_2)$

## Altro tipo di fasatura

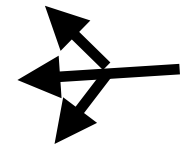
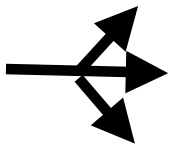
1° fase: sud

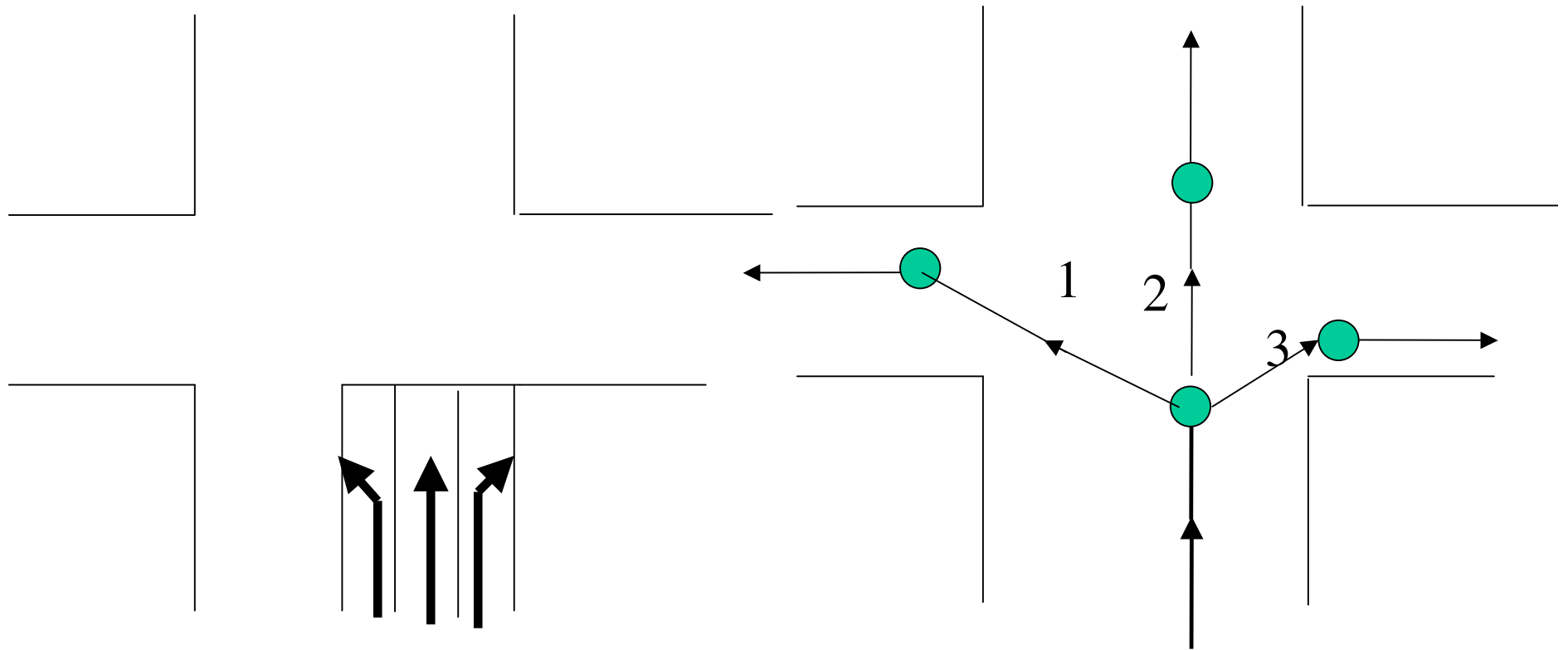
2° fase: nord



3° fase: ovest

4° fase: est





Funzioni di costo *separabili* : il costo dipende solo dal flusso sull'arco a cui ci si riferisce.

Arco 1, *svolta sinistra, separabile*:  $c_1 = c_1(f_1)$

Arco 2, *attraversamento, separabile*:  $c_2 = c_2(f_2)$

Arco 3, *svolta a destra, separabile*:  $c_3 = c_3(f_3)$